Задача 1. Эллиптически поляризованный свет падает на идеальный поляроид по нормали к его поверхности. Электрическое поле $\vec{E}(z,t) = A\cos(kz - \omega t)\vec{e}_x + B\sin(kz - \omega t)\vec{e}_y$, где A и B – это действительные константы, A по модулю меньше B. Поляроид вращают вокруг своей оси и регистрируют интенсивность прошедшего света. Найти соотношение минимальной к максимальной прошедшей интенсивности I_{min}/I_{max}.

Решение.

Расположим поляроид в плоскости $z = 0$. Пусть ось поляроида ориентирована под углом α к оси x. Тогда проекции x- и y-компонент поля $\vec{E}$ на ось поляроида равны соответственно:

$$E_{x,\alpha} = A\cos\alpha\cos\omega t, \quad E_{y,\alpha} = B\sin\alpha\sin\omega t.$$

Суммарное поле на выходе поляроида равно

$$E' = A\cos\alpha\cos\omega t + B\sin\alpha\sin\omega t,$$

а интенсивность:

$$I = \langle E'^2\rangle = A^2\cos^2\alpha\langle\cos^2\omega t\rangle + B^2\sin^2\alpha\langle\sin^2\omega t\rangle + 2AB\sin\alpha\cos\alpha\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = \frac{A^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{B^2\sin^2\alpha}{2} + 0.$$

Анализируем функцию $I(\alpha)$ на экстремумы:

$$\frac{dI}{d\alpha} = -A^2\cos\alpha\sin\alpha + B^2\sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad \frac{B^2-A^2}{2}\sin 2\alpha = 0,$$

$$\alpha_{extr} = 0, \frac{\pi}{2}, \quad I_{min} = \frac{A^2}{2}, \; I_{max} = \frac{B^2}{2}, \; I_{min}/I_{max} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Задача 2. Пользуясь соотношением неопределённостей, оценить минимально возможный размер пятна от лазера с длиной волны $\lambda = 0.5$ мкм (диаметр пучка света выходящего из лазера $d = 0.5$ мм) на экране, расположенном на расстоянии $L = 10$ м от лазера.

Решение.

Слова “минимально возможный” в условии лишние. Пятно на экране формируется как область геометрического пятна, которая расширяется за счет неопределенности поперечной компоненты волнового вектора:

$$D = d + \frac{\delta k_x}{k}L \approx d + \frac{\pi}{d}\cdot\frac{L}{k} = d + \frac{\pi\lambda L}{2\pi d} = d + \frac{\lambda L}{2d} =$$

$$= 0.5\cdot 10^{-3} + \frac{0.5\cdot 10^{-6}\cdot 10}{2\cdot 0.5\cdot 10^{-3}} = 0.5\cdot 10^{-3} + 0.5\cdot 10^{-2}\text{ м} = 5.5\text{ мм}.$$

Задача 3. Для просветления линзы сделанной из германия (показатель преломления $n_{Ge} = 4$) используют фторид кальция (показатель преломления $n_{CaF2} = 1.4$). Какая минимальная толщина просветляющего покрытия должна быть для ИК-излучения с длиной волны в вакууме $\lambda = 3.5$ мкм? Какой коэффициент отражения по интенсивности от поверхности линзы без просветляющего покрытия при нормальном падении?

Решение.

Отражение волны на задней границе просветляющего слоя происходит от оптически более плотной среды, поэтому там возникает скачок по фазе на π. Тогда для ослабления волны, отраженной от передней границы (где также возникает скачок по фазе на π), оптическая длина хода луча внутри слоя должна составлять половину длины волны в вакууме:

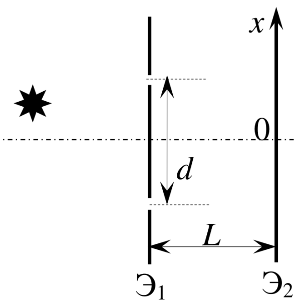
$$2n_{CaF2}d = \frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; d = \frac{\lambda}{4n_{CaF2}} = \frac{3.5}{4 \cdot 1.4} = 0.625 \text{ мкм}.$$

Поскольку условие $\sqrt{n_1 n_3} = \sqrt{1 \cdot n_{Ge}} = n_{CaF2}$ не выполняется, отраженная волна будет ослабляться, но не зануляться.

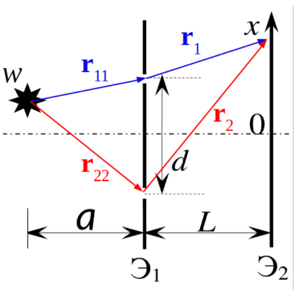
Коэффициент отражения без просветляющего покрытия равен

$$R = \left(\frac{n_{Ge} - 1}{n_{Ge} + 1}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0.36$$

Задача 4. В классической схеме Юнга экран Э 1 с двумя щелями освещается монохроматическим нитевидным источником с длиной волны λ, смещённым на некоторое расстояние от оси системы. Расстояние между щелями d, расстояние между экранами $Э_1$ и $Э_2$ равно L ($L \gg d$). Найти расстояние между максимумами интенсивности на экране $Э_2$.



Решение.



Выражение для разности длин оптического хода лучей $r_2 - r_1$ получали на семинарах:

$$r_2 - r_1 \approx \frac{d \cdot x}{L}.$$

Аналогично записывается разность $r_{22} - r_{11}$:

$$r_{22} - r_{11} \approx \frac{d \cdot w}{a}.$$

Полная оптическая разность хода двух лучей составляет

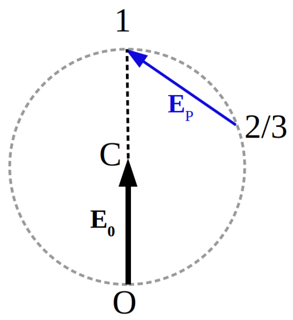
$$r_2 + r_{22} - (r_1 + r_{11}) = r_2 - r_1 + r_{22} - r_{11} \approx \frac{d \cdot x}{L} + \frac{d \cdot w}{a}.$$

Максимумы интерференции возникают там, где разность хода кратна длине волны. На расстояние между максимумами интерференционной картины влияет только первое слагаемое:

$$\frac{d \cdot \Delta x_{max}}{L} = \lambda, \;\; \Delta x_{max} = \frac{\lambda L}{d}.$$

Задача 5. Плоская монохроматическая электромагнитная волна падает на непрозрачный экран с отверстием в виде кольца. Внешний радиус кольца R равен радиусу первой зоны Френеля для точки наблюдения P. Чему равен внутренний радиус кольцевого отверстия r, если интенсивность в точке P такая же, как и в отсутствие экрана?

Решение.



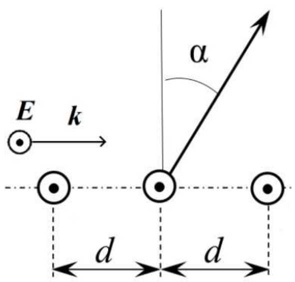
Решаем задачу с помощью диаграммы Френеля. Рисуем окружность радиуса E_0. Первая зона Френеля – это часть дуги справа между нижней и верхней точками окружности. Если бы было открыто отверстие, занимающее первую зону Френеля, то на диаграмме Френеля суммарный вектор был бы между нижней и верхней точками окружности. Если открыто кольцо, то на диаграмме вместо нижней точки выступает какая-то точка дуги на правой полуокружности. Вектор поля в точке наблюдения P – это вектор между этой точкой дуги и верхней точкой, которой соответствует внешний радиус кольца. По условию задачи этот вектор должен иметь длину E_0. Такое возможно, если начальная точка вектора $\hat{E}_P$ находится на $2/3$ дуги правой полуокружности, если отсчитывать от нижней точки. Тогда внутренний радиус равен

$$r = \sqrt{m\lambda Z_P},$$

где $m = 2/3$.

Учтем, что внешний радиус кольца равен $R = \sqrt{\lambda Z_P}$, так как для него число зон Френеля $m = 1$. Тогда получим

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$



Задача 6. Линейно поляризованная ЭМ волна длиной волны λ падает на три заряда, расположенных в линию на одинаковых расстояниях d друг от друга. Волна падает вдоль линии, соединяющей заряды, а направление её поляризации перпендикулярно рисунку. При каком минимальном расстоянии d интенсивность рассеянной волны в волновой зоне будет равна нулю при угле рассеяния $\alpha = 0$? Угол α отсчитывается от нормали к прямой, соединяющей диполи.

Решение.

В условии задачи содержится маленькая подсказка: заряды названы диполями. Тем самым указывается, что электрическое поле падающей волны придает зарядам ускорение, у них возникает ненулевое $\ddot{\vec{d}}$ и они становятся источниками дипольного излучения.

Для направления $\alpha = 0$ расстояние от всех зарядов до приемника в волновой зоне одно и то же. Поэтому они должны генерировать излучение с такой разностью фаз $\Delta\phi$, чтобы занулялась сумма

$$\left(e^0 + e^{i\Delta\phi} + e^{2i\Delta\phi}\right) e^{i(kr-\omega t)} = 0.$$

Для этого на комплексной плоскости векторы e^0, $e^{i\Delta\phi}$, $e^{2i\Delta\phi}$ должны образовывать равносторонний треугольник, то есть $\Delta\phi = 2\pi/3$. Такую же разность фаз должна иметь падающая плоская волна в точках, в которых находятся заряды:

$$kd = 2\pi/3 \Rightarrow d = \frac{2\pi}{3k} = \frac{\lambda}{3}.$$