

ОТЗЫВ

**официального оппонента о диссертационной работе
Ядрихинского Христофора Васильевича «Симметричный
анализ некоторых уравнений типа Блэка – Шоулза целого
и дробного порядков», представленной на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук по научной
специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения
и математическая физика»**

Актуальность темы диссертации. Диссертационная работа Х.В. Ядрихинского посвящена исследованию симметричных свойств дифференциального уравнения Геана – Пу и его дробных аналогов с производными Римана – Лиувилля и Герасимова – Капуто по времени.

Уравнение Геана – Пу является нелинейным обобщением известного линейного параболического уравнения Блэка – Шоулса, широко используемого в финансовой математике для моделирования стоимости опционов, и представляет собой уравнение в частных производных второго порядка ультрапараболического типа с тремя независимыми переменными (временем t , ценой базового актива S и количеством акций q) на функцию цены опциона $\theta(t, S, q)$. Модель Геана – Пу учитывает транзакционные издержки и долгосрочное влияние операций на рынок, а соответствующее уравнение Геана – Пу содержит произвольную функцию затрат $F(t, \theta_q)$, по которой впервые решается задача групповой классификации с использованием классических методов С. Ли и Л.В. Овсянникова.

Дробные аналоги уравнений финансовой математики типа Блэка – Шоулса, Геана – Пу и других начали исследоваться сравнительно недавно (с конца XX века) в связи с обнаружением в данных финансовых рынков фрактальных характеристик и эффектов долговременной памяти. Примерно в тоже время классические методы группового анализа дифференциальных уравнений начали обобщаться на уравнения с дробными производными. Несмотря на то, что за последнее время опубликовано немало работ, в которых

исследуются симметрии различных типов уравнений с дробными производными, остаются открытыми многие вопросы, касающиеся разработки эффективных методов вычисления симметрий таких уравнений и решения задач групповой классификации для уравнений, имеющих практические приложения. Поэтому результаты представленной работы Х.В. Ядрихинского, связанные с развитием методов построения симметрий уравнений с дробными производными, а также с исследованием симметричных свойств новых классов уравнений финансовой математики, являются актуальными и новыми.

Научная новизна, обоснованность и достоверность научных положений диссертации, практическая значимость исследований. Диссертационная работа Х.В. Ядрихинского носит теоретический характер, ее основные научные результаты заключаются в следующем:

1. Решены задачи групповой классификации для трех классов уравнений:
 - (i) для уравнения Геана – Пу с целочисленной (первой) производной по времени в случаях нелинейной и линейной функций затрат;
 - (ii) для уравнения Геана – Пу с дробной производной Римана – Лиувилля по времени в случае нелинейной функции затрат;
 - (iii) для уравнения Геана – Пу с дробной производной Герасимова – Капуто по времени в случае нелинейной функции затрат.
2. Для алгебр Ли операторов полученных инвариантных моделей построены оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр Ли, соответствующие подмодели и некоторые инвариантные решения.
3. Предложено представление формулы Лейбница для производной Герасимова – Капуто в виде бесконечного ряда, которое может эффективно использоваться в групповом анализе уравнений с производной Герасимова – Капуто при построении формул продолжения и в дальнейшем при решении определяющих уравнений.

Обоснованность и достоверность научных результатов обусловлены строгостью применяемых математических методов исследования,

подробными вычислениями, изложенными в диссертации, корректностью использования математического аппарата.

Практическая ценность результатов определяется тем, что рассматриваемые уравнения могут использоваться для построения и верификации актуальных моделей финансовых рынков.

Краткая характеристика основного содержания диссертации. Диссертация Х.В. Ядрихинского объемом 175 страниц состоит из Введения, трех глав, разбитых на параграфы, Заключения и Списка литературы, включающего 84 наименования.

Во Введении описываются актуальность темы исследования, дается краткий исторический обзор развития и современного состояния моделей финансовой математики и используемым методам их исследования, описываются цель, задачи, основные результаты исследования, положения, выносимые на защиту, степень новизны полученных результатов и их апробация. Кроме того, дается краткое изложение содержания диссертации.

В первой главе диссертации рассматривается уравнение Геана – Пу с первой производной по времени. В § 1.1 вычисляются преобразования эквивалентности в случаях ненулевой и нулевой безрисковой ставок r , в § 1.2 проводится групповая классификация уравнений Геана – Пу, в § 1.3 для полученных при групповой классификации алгебр Ли строятся оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр Ли и для полученных подалгебр вычисляются инвариантные подмодели. Здесь особо хочется отметить оригинальные результаты построения решений для квадратичной функции затрат, инвариантных относительно широких классов одно- и двумерных алгебр Ли. В § 1.4 построены три оператора рекурсии для уравнения Геана – Пу с линейной функцией затрат.

Во второй главе исследуются симметричные свойства уравнения Геана – Пу с дробной производной Римана – Лиувилля по времени: в § 2.1 вводятся необходимые сведения о производных Римана – Лиувилля, в § 2.2 решается задача групповой классификации рассматриваемых уравнений, в § 2.3

строятся одно- и двумерные оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли операторов, полученных в предыдущем параграфе, и для них вычисляются инвариантные подмодели.

Если в первых двух главах диссертационной работы автор использовал в основном теоретические разработки своих предшественников, то в третьей главе он предложил новое представление для формулы вычисления производной Герасимова – Капуто от произведения функций (формулу Лейбница). А именно, автор в § 3.1 переписал формулу Лейбница в виде бесконечного ряда, использование которого в формулах продолжения (см. § 3.2) позволяет наглядно увидеть структуру определяющего уравнения и выполнить в дальнейшем его расщепление по независимым переменным. Используя разработанные представления формулы Лейбница и формулы продолжения, в § 3.3 диссертации Х.В. Ядрихинский вычислил преобразования эквивалентности для уравнения Геана – Пу с дробной производной Герасимова – Капуто по времени меньше единицы, и далее, в § 3.4, провел групповую классификацию таких нелинейных уравнений. В § 3.5 построены оптимальные системы одно- и двумерных подалгебр для алгебр Ли, найденных при групповой классификации, получены соответствующие инвариантные подмодели и некоторые решения. В § 3.6 проведен сравнительный анализ результатов групповых классификаций уравнений Геана – Пу с целой и дробными производными по времени.

В Заключении приведена сводка основных результатов работы и изложены перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

Список литературы содержит наименования источников, цитируемых в работе.

В целом диссертация Х.В. Ядрихинцева является законченным исследованием, представляет решение актуальных задач, объединенных общим подходом для их решения.

Замечания по работе. К изложению работы могут быть сделаны следующие замечания.

1. При проведении групповой классификации на этапе анализа классифицирующего соотношения

$$-r\varepsilon F + \varepsilon F_t + \kappa(t)F_{\theta_q} + \theta_q\phi(t) + \psi(t) = 0$$

на неизвестную функцию $F(t, \theta_q)$ (см. стр. 47) автор, перебирая различные возможные значения коэффициентов этого классифицирующего соотношения, одновременно зануляет как коэффициенты классифицирующего соотношения, так и соответствующие коэффициенты в определяющем уравнении (1.2.39), что в общем случае может привести к потере некоторых симметрий. Остается открытым вопрос: как автор проверял корректность ограничений, накладываемых на коэффициенты определяющего уравнения?

2. На стр. 10 диссертации автор ошибочно утверждает, что формулы продолжения на дробные производные Герасимова – Капуты впервые были получены в работе Т. Ваккурадж в 2020 году. В действительности, такие формулы продолжения впервые появились в статье Р.К. Газизова, А.А. Касаткина и С.Ю. Лукашука в 2009 г. в журнале Phys. Scripta.

3. В тексте диссертации имеются некоторые неточности и опечатки. Например, на стр. 28 в пункте 2 Теоремы 1.1.1 в формулу для оператора Y_ψ входят множители, зависящие от определенного интеграла. Однако в формулировке теоремы не указано, как влияют пределы интегрирования на свойства данного оператора. Аналогичные вопросы к оператору X_3 в пункте 3 Теоремы 1.2.2.

Указанные замечания не снижают значимости полученных результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы Х.В. Ядрихинского.

Общее заключение. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из которых 8 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Все результаты диссертационной работы Х.В. Ядрихинского были

своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на различных международных научно-исследовательских конференциях. Автореферат диссертации Х.В. Ядрихинского правильно отражает ее суть.

Считаю, что диссертационная работа удовлетворяет пунктам 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Ядрихинский Христофор Васильевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент

Газизов Рафаил Кавыевич,

18 / 10 / 2024.

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры Высокопроизводительных вычислений
и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО
«Уфимский университет науки и технологий»
Министерства науки и высшего образования РФ,
специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения
Тел.: +7 908-350-22-74

E-mail: gazizovrk@yandex.ru

Почтовый адрес: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12
УУНиТ, корп. 1, ауд. 408, каф. ВВиДУ

