Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. К. АММОСОВА"

На правах рукописи

Ядрихинский Христофор Васильевич

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЛЭКА — ШОУЛЗА ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Федоров

ЯКУТСК — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

В основе классических теорий ценообразования опционов, в том числе теории Блэка — Шоулза — Мертона [27,28,58], лежит гипотеза совершенного рынка, означающая, в частности, что участники рынка используют только сложившиеся на рынке цены и не могут своими операциями оказать влияние на них. Это не соответствует рыночной практике, тем не менее построенные в рамках таких теорий модели ценообразования опционов, в основе которых лежит параболическое уравнение с младшими членами и с обратным направлением времени, широко используются. Они дают полезные результаты во многих случаях, например, когда базовый актив ликвиден и номинал опциона не слишком большой для рынка. Однако в случае неликвидного рынка или в случае необходимости операций с опционами больших номиналов уже нельзя исключать из рассмотрения влияние операций на рынок.

Географическое, качественное и количественное расширение рынка производных ценных бумаг и развитие современных вычислительных технологий привели к росту интереса исследователей к более сложным, нелинейным моделям ценообразования опционов, которые получены в предположении отказа от тех или иных составляющих гипотезы совершенного рынка. Одной из таких моделей является исследуемая в данной работе модель Геана — Пу [47, 48], которая учитывает влияние сделок на цену опциона и затраты на хеджирование.

Еще одним направлением в исследовании ценообразования опционов является использование дробного интегро-дифференциального исчисления. Как показывает практика, реальному финансовому рынку присущи нелинейность и эффекты памяти, которые могут быть более точно реализованы при моделировании с помощью дробных производных и интегралов. Из-за наличия у реальных процессов долговременной памяти и «тяжелых хвостов» у соответствующих распределений, традиционные методы могут не в полной мере отражать реальную ситуацию. Нелокальные свойства дробных производных и наличие фрактальных характеристик в структуре процессов на финансовых рынках проложили путь к внедрению и быстрому развитию дробного исчисления в финансах (см. обзорную статью [69]). Это позволяет лучше моделировать экстремальные события и сложные рыночные явления, а, например, дробные уравнения типа Блэка — Шоулза могут более точно отображать колебания цен на реальных финансовых рынках, обеспечивая надежную основу для моделирования ценообразования производных финансовых инструментов и управления рисками.

Одним из важнейших инструментов аналитического исследования нелинейных дифференциальных уравнений является групповой анализ. В последние несколько лет развивается теория симметрий для дробных дифференциальных уравнений. В данной работе проведено исследование симметрийных свойств моделей Геана — Пу как целого, так и дробного порядков.

В силу всех этих причин исследование нелинейных моделей ценообразования опционов, включая дробные нелинейные модели, в том числе изучение их групповой структуры, весьма актуально.

Степень разработанности темы исследования

Одной из первых работ по ценообразованию опционов является диссертация L. Bachelier [23]. На основе предложенной в ней модели вычислены цены опционов на акции базового актива и проведено их сравнение с текущими ценами. В модели цена базового актива (акции) $S = \{S_t\}_{t\leqslant T}$ подчиняется закону линейного броуновского движения с дрейфом:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \leqslant T,$$

где μ — снос, σ — среднеквадратичное отклонение цен акции, а $W = \{W_t\}_{t\leqslant T}$ — винеровский процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве

(Ω, F, P), такой, что $W_0 = 0$, $\mathbb{E}W_t = 0$ и $\mathbb{E}W_t^2 = t$.

G. P. Samuelson [62] использовал для описания динамики цены акций геометрическое (или экономическое) броуновское движение, которое затем легло в основу модели Блэка — Шоулза — Мертона [27,28,58]. Эта модель не учитывает цену исполнения, воздействие сделок участников рынка на текущие цены, поэтому исследователи стали активно разрабатывать изменения модели, которые могут учесть эти факторы.

Одна из первых моделей, которая берет во внимание сделки (транзакции) при определении цены опциона, предложена в работе H. E. Leland [53]. Модель G. Barles и H.M. Soner [26] учитывает цену исполнения и фактор неприятия риска хеджерами. Модифицированная волатильность принимает вид $\sigma_{BS}^2 = \sigma^2 \left(1 + Y\left(e^{r(T-t)} a^2 S^2 C_{SS}\right)\right)$, где $a = \mu\sqrt{\gamma N}$ — параметр, учитывающий транзакционные издержки μ, количество опционов для продажи N и фактор неприятия риска γ, а Y — функция корректировки волатильности [26, Теорема 3.1]. При этом Y удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{df}[Y(f)] = \frac{Y(f)+1}{2\sqrt{fY(f)} - f}, \quad \forall f \neq 0, \quad Y(0) = 0.$$

Подход «кривой предложения» принимает во внимание воздействие на цены торгуемого актива операций большого объема или недостаточной ликвидности, см. работы P. Bank и D. Baum [25] , U. Çetin, R. Jarrow и P. Protter [33, §4] (модель имеет вид нелинейного параболического уравнения с обратным временем $w_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w_{xx}(1 + 2\rho x w_{xx}) = 0$, где t — время, x — цена акции, w — цена опциона, σ — волатильность акции, ρ — транзакционные издержки), U. Çetin и L. C. Rogers [34, §6].

Влияние дельта-хеджирования (динамического хеджирования) на динамику базового актива и на цену опциона моделируется в работах J. Cvitanić и I. Karatzas [36], S. Grossman [46], E. Platen и M. Schweizer [60].

R. Sircar и G. Papanicolaou [65] для получения уравнения цены опциона использовали процесс совокупного дохода «реферальных» трейдеров. Авторами получено семейство нелинейных параболических уравнений с обартным временем, в случае отсутствия «программных» трейдеров ($\rho \to 0$) сводящееся к классическому уравнению Блэка — Шоулса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})U'(V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x}))}{V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})U'(V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})) - \rho x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}\right]^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial C}{\partial x} - C\right) = 0.$$

Здесь $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$, а $U(\cdot)$ — функция относительного спроса «реферальных» трейдеров. R. Sircar и G. Papanicolaou ограничились рассмотрением линейной функции $U(z) = \beta z$, $\beta > 0$, в этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\rho\frac{\partial C}{\partial x}}{1-\rho\frac{\partial C}{\partial x} - \rho x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}\right]^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial C}{\partial x} - C\right) = 0,$$

и провели численное исследование поведения модели в моменты, близкие к экспирации опционов.

P. Schönbucher и P. Wilmott [64] построили общую модель стоимости опциона $P(S,t)$ на неликвидном рынке, учитывающую эффекты обратной связи между процессом цены базового актива и торговой стратегией крупного трейдера $f(S,t)$:

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial \chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial \chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)^2 P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0,$$

где $\chi(S,W,t)$ — избыточный спрос, W — броуновское движение, а S — цена базового актива. Согласованные с моделью Блэка — Шоулса (т. е. когда отсутствует крупный трейдер и цены подчиняются логнормальному случайному блужданию) снос и волатильность получены авторами в виде

$$\sigma(S,t) = \frac{l\widetilde{\sigma}S'}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}},$$

$$\mu(S,t) = \frac{1}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\left[l\widetilde{\mu}S' + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{l^2\widetilde{\sigma}^2 S'^2}{2\left(l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\right)}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right],$$

где l — параметр ликвидности рынка, $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\sigma}$ — снос и волатильность из модели Блэка — Шоулса соответственно.

С помощью так называемой теории оптимального исполнения обязательств строятся модели, учитывающие транзакционные издержки, в работах L. C. Rogers и L. S. Singh [61], R. Almgren и N. Chriss [21].

В конце XX века было обнаружено, что финансовые рынки демонстрируют фрактальные характеристики [56, 59] и наличие долговременной памяти [38, 55]. Нелокальные свойства дробных производных позволяют содержащим их моделям описывать различные распределения цен на активы, в том числе, с «острыми пиками» или «тяжелыми хвостами», это дает возможность моделировать как крупные скачки за небольшие промежутки времени, так и долгосрочные зависимости на рынках. В предположении, что динамика цен на акции обусловлена процессами скачкообразной диффузии или процессами Леви, установленная динамика цен на производные финансовые инструменты удовлетворяет уравнению типа Блэка — Шоулза с дробными производными. Например, дробные производные по «пространственной» переменной (т. е. по цене базового актива) в таком уравнении получаются после замены в соответствующей модели стандартного броуновского движения дробным броуновским движением или специальными процессами Леви [32]. Дробные производные по времени получаются при рассмотрении изменения цены опциона с течением времени как фрактальной системы передачи [35]. Можно выделить дробные пространственные [32, 49], дробные пространственно-временные модели (однопараметрические [50], когда параметры дробной динамики по времени и по цене актива связаны, и двупараметрические [54]) и дробные по времени [35, 67] модели типа Блэка — Шоулза.

Перечисленные модели изучались многими авторами, осуществлялся поиск их решений как численно, так и аналитически, различными методами, см., например, [39, 52, 63, 68], а также обзор [69]. Исследование уравнения Блэка — Шоулза методами группового анализа [14, 15] проведено Н. Х. Ибрагимовым и Р. К. Газизовым [43].

Групповой (или симметрийный) анализ дифференциальных уравнений является одной из немногих теорий, которые предоставляют методы для нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем уравнений. С середины XX века получено большое число результатов по групповой структуре, точным решениям, законам сохранения многих уравнений и систем уравнений, моделирующих динамику различных физических процессов, в том числе в газовой динамике, гидродинамике, теории эластичности и т.д., см. работы [1–3, 7, 12, 14–16, 18–20, 22] и библиографии там. Отметим работы по разработке и применению методов группового анализа для интегро-дифференциальных уравнений [45], учитывая, что дробные производные являются интегро-дифференциальными операторами, и других уравнений с нелокальными операторами [57].

В последнее десятилетие исследуются групповые свойства различных нелинейных моделей типа Блэка — Шоулза, вычисляются их инвариантные решения и подмодели в работах L. A. Bordag [29–31], В. Е. Федорова и М. М. Дышаева [8–11, 40–42].

Для исследования уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля в работах Р. К. Газизова, А. А. Касаткина и С. Ю. Лукащука [4–6, 13, 43, 44] получены соответствующие формулы продолжения для коэффициентов продолженного допускаемого оператора. В работе Z.-Y. Zhang и J. Zheng [70] получена структура симметрий для эволюционных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной Римана — Лиувилля по времени порядка $\alpha \in (0, 1)$. А именно, в теореме 2.7 доказано, что все симметрии у такого уравнения имеют линейно-автономный вид. В работе T. Bakkyaraj [24] рассматривается класс уравнений с дробными производными Герасимова — Капуто. Получены формулы продолжения для коэффициентов при дробных производных порядка $\alpha \in (0, 1)$ генератора группы линейно-автономных преобразований.

Данная диссертационная работа посвящена групповому анализу модели, полученной в работах О. Геана и Дж. Пу [47, 48], и ее дробных аналогов. Это модель ценообразования опционов, учитывающая транзакционные издержки и долгосрочное влияние операций на рынок. Она также является нелинейной модификацией уравнения Блэка — Шоулза, но в отличие от большинства таких уравнений содержит, помимо переменных времени t и цены базового актива S, еще и переменную количества акций q. А именно, в условиях отсутствия постоянного влияния на рынок для функции $\theta(t, S, q)$, которая моделирует цену безразличия колл-опциона со сроком исполнения T, получено дифференциальное уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + V_t H(\theta_q),$$

в котором

1) $r\theta$ — классическое слагаемое, связанное с дисконтированием на безрисковую ставку r;

2) $(\mu - rS)q$ соответствует премии, связанной с владением акциями вместо наличных денег; если держать q акций, в среднем состояние по рыночной оценке будет увеличиваться на μq за единицу времени (μ — прогноз тренда ожидаемой доходности базового актива), тогда как денежный эквивалент q акций (т. е. qS, где S — цена акции) увеличивает состояние по рыночной оценке на rqS за единицу времени;

3) слагаемые $-\mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS}$ связаны с динамикой цены акции, где σ — волатильность цены акции;

4) из слагаемого $-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2$ вытекает взаимозависимость между количеством акций q в хеджирующем портфеле и динамикой цены акции S, γ — фактор неприятия риска продавцом опциона;

5) $V_t H(\theta_q)$ моделирует затраты на исполнение и лимит участия; здесь V_t — детерминированный, неотрицательный и ограниченный процесс рыночного объема, функция H моделирует затраты на исполнение обязательств.

Далее в работе функция $V_t H(\theta_q)$ будет заменяться более общей функцией двух переменных $F(t, \theta_q)$, которая будет свободным элементом при получении групповой классификации соответствующих уравнений. Функцию F будем называть функцией затрат. Заметим также, что в отличие от перечисленных выше моделей, нелинейное уравнение Геана — Пу содержит помимо независимых переменных времени t и цены базового активы S или x, еще и переменную количества акций q и является по сути ультрапараболическим.

Цели и задачи

Цель диссертационной работы заключается в исследовании групповых свойств уравнения Геана — Пу и его дробных аналогов с производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по времени при различных спецификациях функции затрат $F(t, \theta_q)$. При этом решаются задачи групповой классификации таких уравнений, поиска их инвариантных подмоделей и решений, а также проведения сравнительного анализа между симметрийными свойствами уравнения Геана — Пу первого порядка по времени и дробных уравнений Геана — Пу.

Научная новизна

Ранее методами группового анализа уравнения Геана — Пу не исследовались, поэтому все полученные результаты об их групповых свойствах являются новыми. Отметим кроме того, что симметрийный анализ дробных дифференциальных уравнений ранее проводился в работах Р. К. Газизова, А. А. Касаткина и С. Ю. Лукащука [4–6, 13, 44] и некоторых других авторов, см., например, [70], только в случае дробной производной Римана — Лиувилля, за редким исключением, в частности, см. [24]. Для проведения группового анализа уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто автором диссертации была проделана подготовительная теоретическая работа: получена удобная для использования версия аналога обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка (предложенный в [66] вариант этой формулы оказался неудобным для использования, в монографии [37] эта формула получена только для производной Герасимова — Капуто порядка менее единицы), с ее помощью выведена полная формула продолжения для коэффициента при дробной производной в продолжении допускаемого оператора, в том числе в случае оператора группы линейно-автономных преобразований.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа имеет теоретический характер, она посвящена исследованию групповой структуры некоторых классов нелинейных уравнений типа Блэка — Шоулза первого или дробного порядка по времени. Результаты работы развивают теорию дифференциальных уравнений, в частности они вносят свой вклад в развитие методов группового анализа для уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто.

Исследуемые в работе уравнения являются важными моделями в теории финансовых рынков. Полученные групповые классификации таких уравнений позволили получить ряд инвариантных подмоделей и решений исследуемых моделей Геана — Пу. Получение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений важно само по себе и может быть практически значимо при разработке и тестировании численных методов их решения.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе исследуется групповая структура нелинейных дифференциальных уравнений Геана — Пу первого и дробного порядка по времени. Используется единая схема для исследования трех классов уравнений Геана — Пу: с первой производной, с дробной производной Римана — Лиувилля и с дробной производной Герасимова — Капуто по временно́й переменной. Методом Ли — Овсянникова сначала осуществляется поиск групп преобразований эквивалентности, а затем с их использованием проводится групповая классификация рассматриваемого класса уравнений. Затем для каждой спецификации свободного элемента из групповой классификации рассматривается алгебра Ли генераторов допускаемых групп уравнения. Осуществляется поиск внутренних и зеркальных автоморфизмов алгебры Ли, с помощью которых находятся оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр. Для подалгебр из этих систем выводяится инвариантные подмодели, в некоторых случаях удается их проинтегрировать и получить инвариантные решения.

Для исследования уравнений Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто использовались методы дробного интегро-дифференциального исчисления и группового анализа для дробных дифференциальных уравнений. В частности, в данной диссертационной работе был получен удобный для работы аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка, а с его помощью выведена формула продолжения для коэффициента при производной Герасимова — Капуто произвольного порядка, в том числе в случае группы линейно-автономных преобразований. Эти формулы были использованы для исследования групповой структуры соответствующих уравнений согласно описанной в предыдущем абзаце схеме.

Положения, выносимые на защиту

1. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу в случаях нелинейной и линейной функции затрат.

2. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля по времени в случае нелинейной функции затрат.

3. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени в случае нелинейной функции затрат.

4. Получен аналог обобщенного правила Лейбница для дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка. Выведена полная формула продолжения для коэффициента при дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка в генераторе допускаемой группы в общем и линейно-автономном случае.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на конференциях:

Всероссийская научная конференция с международным участием, посвященная 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и

ЯАССР, доктора технических наук, профессора Э. А. Бондарева, «Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики», Якутск, 2021;

Всероссийская научно-практическая конференция «Эрэл-2021», Якутск, 2021;

61-я Международная научная студенческая конференция, Новосибирск, 2023;

XXV научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Лаврентьевские чтения», посвященные 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), Якутск, 2023;

X Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, 2023;

Международная научная конференция “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”, Уфа, 2024.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов:

при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект No. FSRG-2023-2025;

при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение №075-022024-1441 от 28.02.2024.

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах [71–84], из которых 7 статей [71–78] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. В работе [73] В. Е. Федоровым написано введение, С. М. Ситнику принадлежит идея использования фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами при описании базиса алгебры Ли и корректировка некоторых рассуждений при ее осуществлении. В статье [78] В. Е. Федоровым написана основная часть введения, М. М. Дышаевым — п. 1.1 с описанием исследуемой модели. В работе [74] В. Е. Федорову принадлежит доказательство теоремы 3.1, в статьях [71, 72, 75–77] В. Е. Федоровым осуществлена постановка задачи, скорректированы некоторые доказательства. В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Содержание работы

Диссертационная работа объемом в 170 страниц содержит введение, 3 главы, заключение, список литературы, состоящий из 76 источников.

В **первой главе** рассмотрено уравнение Геана — Пу первого порядка по времени

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \quad (0.0.1)$$

В §1.1 произведено вычисление алгебры Ли генераторов групп преобразований эквивалентности этого уравнения с функцией затрат $F(t, \theta_q)$ в качестве свободного элемента в случаях нулевой и ненулевой безрисковой ставки r.

В §1.2 полученные группы преобразований эквивалентности использованы для получения групповой классификации исследуемого уравнения методом Ли — Овсянникова. Рассмотрены случаи нелинейной и линейной функции затрат по переменной θ_q и случаи нулевой и ненулевой безрисковой ставки r.

В §1.3 для каждой полученной при групповой классификации алгебры Ли найдены оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр, для которых в свою очередь вычислены инвариантные подмодели, а в случае их интегрируемости — и инвариантные решения. Особое внимание уделено уравнению с функцией затрат $F(t, \theta_q) = a(t)\theta_q^2$, для которого найдены инвариантные подмодели и инвариантные решения для достаточно широких классов допускаемых подалгебр определенного вида.

В §1.4 найдены три оператора рекурсии уравнения (0.0.1) с линейной по θ_q функцией F. С учетом их коммутирования (в одном из трех случаев — с точностью до аддитивной константы) показано, что найденные три оператора рекурсии порождают трехпараметрическое счетное семейство обобщенных симметрий исследуемого уравнения.

Вторая глава посвящена исследованию уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля по времени

$$ {}_cD_t^\alpha\theta = r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2+F(t,\theta_q). \quad (0.0.2) $$

§2.1 содержит предварительные сведения о дробном интеграле и дробной производной Римана — Лиувилля, некоторых их свойствах, приведен вид общего решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной Римана — Лиувилля.

В §2.2 найдены группы преобразований эквивалентности уравнения (0.0.2) со свободным элементом $F(t,\theta_q)$ при $\alpha > 0$ для случаев нулевой и ненулевой безрисковой ставки r. В §2.3 для уравнения (0.0.2) с $\alpha > 0$ и нелинейной по θ_q функцией затрат F получена групповая классификация.

В §2.4 найдены оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр для алгебр Ли из полученной групповой классификации в случае $\alpha \in (0,1)$. Для подалгебр из оптимальных систем вычислены инвариантные подмодели.

В **третьей главе** исследуется групповая структура уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени

$$ {}_c^CD_t^\alpha\theta = r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2+F(t,\theta_q). \quad (0.0.3) $$

§3.1 содержит вывод аналога обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка. С его помощью в §3.2 получены полные формулы продолжения для коэффициентов оператора допускаемой группы при дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка. Рассмотрены случаи общей группы преобразований и группы линейно-автономных преобразований.

В §3.3 найдены группы преобразований эквивалентности уравнения (0.0.3) с функцией затрат $F(t, \theta_q)$ в качестве свободного элемента для случаев нулевой и ненулевой безрисковой ставки r.

В §3.4 проведена групповая классификация уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени порядка меньше единицы и с нелийнейной функцией затрат. Отдельно получены клссификации для случаев $r = 0$ и $r \neq 0$.

В §3.5 найдены оптимальные системы одномерных и двумерных подгалгебр найденных при групповой классификации алгебр Ли, получены соответствующие инвариантные подмодели и решения.

В заключении описаны перспективы использования результатов диссертации и развития ее тематики.

Обозначения и соглашения, используемые по умолчанию в тексте диссертации, перечислены в списке обозначений и соглашений.

Список литературы содержит цитированные в работе литературные источники. В конце списка приведены все публикации автора по теме диссертационной работы.

1. Уравнение Геана — Пу

На протяжении всего изложения будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Символ $\square$ лежит в конце доказательства.

1.1. Группы преобразований эквивалентности

Рассматриваем уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \tag{1.1.1}$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$, $F(\theta_q)$ — произвольный элемент, $\gamma\sigma \neq 0$.

Для поиска генераторов групп преобразований эквивалентности считаем F и ее производные переменными. Оператор порождающий группы преобразований эквивалентности будем искать в виде

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \alpha\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F,$$

где τ, ξ, α, η зависят от t, S, q, θ, а ζ от t, S, q, θ, F, θ_S, θ_q, θ_t. При этом к уравнению (1.1.1) добавляются дополнительные уравнения, которые обозначают зависимость F только от θ_q и t:

$$F_q = 0, \quad F_S = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{\theta_S} = 0, \quad F_{\theta_t} = 0. \tag{1.1.2}$$

Система (1.1.1), (1.1.2) рассматривается как многообразие M в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на уравнение (1.1.1) продолженным оператором

$$\tilde{X} = X + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} +$$
$$+\zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} + \zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^\theta\partial_{F_\theta}.$$

После сужения результата на многообразие M получаем уравнение

$$\eta^t - r\eta - (\mu - rS)\alpha + rq\xi + \mu\eta^S +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta^S - \alpha - \frac{r}{2}(\theta_S - q)\tau) - \zeta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M =$$
$$= \eta^t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\eta^S - \alpha) -$$
$$-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - \zeta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = 0. \qquad (1.1.3)$$

Коэффициенты продолженного оператора $\tilde{X}$ вычисляются при помощи формул продолжения и операторов полной производной

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \theta_t\frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots, \quad D_S = \frac{\partial}{\partial S} + \theta_S\frac{\partial}{\partial\theta} + \theta_{SS}\frac{\partial}{\partial\theta_S} + \ldots,$$
$$D_q = \frac{\partial}{\partial q} + \theta_q\frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots, \quad \tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + F_t\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_S = \frac{\partial}{\partial S} + F_S\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$
$$\tilde{D}_q = \frac{\partial}{\partial q} + F_q\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} + F_\theta\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_t} = \frac{\partial}{\partial\theta_t} + F_{\theta_t}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$
$$\tilde{D}_{\theta_S} = \frac{\partial}{\partial\theta_S} + F_{\theta_S}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_q} = \frac{\partial}{\partial\theta_q} + F_{\theta_q}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots$$

Формулы продолжения в данном случае имеют вид

$$\eta^t = D_t\eta - \theta_t D_t\tau - \theta_S D_t\xi - \theta_q D_t\alpha, \quad \eta^S = D_S\eta - \theta_t D_S\tau - \theta_S D_S\xi - \theta_q D_S\alpha,$$
$$\eta^q = D_q\eta - \theta_t D_q\tau - \theta_S D_q\xi - \theta_q D_q\alpha,$$
$$\eta^{SS} = D_S\eta^S - \theta_{St} D_S\tau - \theta_{SS} D_S\xi - \theta_{Sq} D_S\alpha.$$

Вычисление производных в них дает формулы

$$\eta^t = \eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta),$$
$$\eta^S = \eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta),$$
$$\eta^q = \eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_t(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta),$$
$$\eta^{SS} = \eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) +$$
$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$
$$-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) -$$

$$-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}).$$

Аналогично

$$\zeta^S = \tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\alpha-$$
$$-F_\theta\tilde{D}_S\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q,$$
$$\zeta^q = \tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\alpha - F_\theta\tilde{D}_q\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q,$$
$$\zeta^\theta = \tilde{D}_\theta\zeta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_S\tilde{D}_\theta\xi - F_q\tilde{D}_\theta\alpha - F_\theta\tilde{D}_\theta\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_\theta\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_\theta\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_\theta\eta^q,$$
$$\zeta^{\theta_t} = \tilde{D}_{\theta_t}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\alpha-$$
$$-F_\theta\tilde{D}_{\theta_t}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q,$$
$$\zeta^{\theta_S} = \tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\alpha-$$
$$-F_\theta\tilde{D}_{\theta_S}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q.$$

Действуя продолженным оператором на дополнительные уравнения (1.1.2) и сужая результат на многообразие M, получим

$$\zeta^q|_M = 0, \quad \zeta^S|_M = 0, \quad \zeta^\theta|_M = 0, \quad \zeta^{\theta_S}|_M = 0, \quad \zeta^{\theta_t}|_M = 0. \tag{1.1.4}$$

Подставив формулы продолжения в уравнения (1.1.4) с последующим вычислением полных производных и переходом на многообразие M, получаем

$$\zeta^S|_M = \zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_M = \zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(\eta_{Sq} + \theta_q\eta_{S\theta} - \theta_t(\tau_{Sq} + \theta_q\tau_{S\theta})-$$
$$-\theta_S(\xi_{Sq} + \theta_q\xi_{S\theta}) - \theta_q(\alpha_{Sq} + \theta_q\alpha_{S\theta}))|_M = 0, \tag{1.1.5}$$
$$\zeta^q|_M = \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_M = \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(\eta_{qq} + \theta_q\eta_{q\theta} - \theta_t(\tau_{qq} + \theta_q\tau_{q\theta})-$$
$$-\theta_S(\xi_{qq} + \theta_q\xi_{q\theta}) - \theta_q(\alpha_{qq} + \theta_q\alpha_{q\theta}))|_M = 0, \tag{1.1.6}$$
$$\zeta^\theta|_M = \zeta_\theta - F_t\tau_\theta - F_{\theta_q}\eta^q_\theta|_M = \zeta_\theta - F_t\tau_\theta - F_{\theta_q}(\eta_{q\theta} + \theta_q\eta_{\theta\theta} - \theta_t(\tau_{q\theta} + \theta_q\tau_{\theta\theta})-$$
$$-\theta_S(\xi_{q\theta} + \theta_q\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{q\theta} + \theta_q\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0 \tag{1.1.7}$$
$$\zeta^{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}(\tau_q + \theta_q\tau_\theta)|_M = 0, \tag{1.1.8}$$
$$\zeta^{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}(\xi_q + \theta_q\xi_\theta)|_M = 0. \tag{1.1.9}$$

Подставляем формулы продолжения в уравнение (1.1.3):

$$\eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta)-$$

$$
\begin{gathered}
-r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\times \\
\times(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \alpha) - \\
-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - \zeta + \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \\
+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \\
-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \\
-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0.
\end{gathered}
$$

Далее перемещаем все члены уравнения с θ_t в конец уравнения с последующим переходом на многообразие по θ_t и получаем

$$
\begin{gathered}
\eta_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\alpha_t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\times \\
\times(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \alpha) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - \zeta + \\
+\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - \\
-2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta})) + \\
+(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\times \\
\times(\eta_\theta - \tau_t - \theta_S\xi_\theta - \theta_q\alpha_\theta - (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \\
-\frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS}\tau_\theta - (\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta})) - \\
-\tau_\theta\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right)^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{1.1.10}
$$

Переход к многообразию по θ_t не меняет вид уравнений (1.1.8), (1.1.9), поэтому разделение переменных дает $\zeta_{\theta_t} = 0$, $\zeta_{\theta_S} = 0$, $\tau_q = 0$, $\tau_\theta = 0$, $\xi_q = 0$, $\xi_\theta = 0$. Дифференцирование уравнения (1.1.10) по θ_{St}, θ_{Sq} дает $\tau_S = 0$, $\tau_\theta = 0$, $\alpha_S = 0$, $\alpha_\theta = 0$. Следовательно, получаем равенства

$$
\tau_q = 0, \quad \tau_S = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \xi_q = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \alpha_S = 0, \quad \alpha_\theta = 0, \tag{1.1.11}
$$

$$
\zeta_{\theta_t} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0. \tag{1.1.12}
$$

Переходим в (1.1.5)–(1.1.7) к многообразию по θ_t с подстановкой равенств (1.1.11), (1.1.12):

$$\zeta^S|_M = \zeta_S - F_{\theta_q}(\eta_{Sq} + \theta_q\eta_{S\theta}) = 0, \quad \zeta^q|_M = \zeta_q - F_{\theta_q}(\eta_{qq} + \theta_q\eta_{q\theta} - \theta_q\alpha_{qq}) = 0,$$
$$\zeta^\theta|_M = \zeta_\theta - F_{\theta_q}(\eta_{q\theta} + \theta_q\eta_{\theta\theta}) = 0. \tag{1.1.13}$$

Из последнего уравнения получаем $\eta_{q\theta} = 0$, далее дифференцируем по F_{θ_q} и θ_q во втором уравнении из (1.1.13) и получаем $\alpha_{qq} = \eta_{q\theta} = 0$. Следовательно, из (1.1.13) получаем следующие уравнения

$$\eta_{S\theta} = 0, \quad \eta_{Sq} = 0, \quad \eta_{q\theta} = 0, \quad \alpha_{qq} = 0, \quad \eta_{qq} = 0, \quad \eta_{\theta\theta} = 0, \tag{1.1.14}$$
$$\zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_{\theta_t} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0. \tag{1.1.15}$$

Подстановкой равенств (1.1.11), (1.1.12) (1.1.14), (1.1.15) в уравнение (1.1.10) получаем

$$\eta_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\alpha_t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\eta_S +$$
$$+\theta_S\eta_\theta - \theta_S\xi_S - \alpha) - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - \zeta + \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + \theta_{SS}(\eta_\theta -$$
$$-2\xi_S) - \theta_S\xi_{SS}) + (\eta_\theta - \tau_t)(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} -$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F) = 0. \tag{1.1.16}$$

Разделяем полученное уравнение по переменным θ_{SS}, θ_S, так как ζ от них не зависит, и получаем

$$\theta_{SS} : \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_\theta - 2\xi_S + \tau_t - \eta_\theta) = \frac{1}{2}\sigma^2(-2\xi_S + \tau_t) = 0,$$
$$\theta_S^2 : \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\eta_\theta - \xi_S) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \frac{\eta_\theta - \tau_t}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} = 0,$$
$$\theta_S : -\xi_t + (\mu - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})(\eta_\theta - \xi_S) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\eta_S - \alpha) +$$
$$+rq\tau\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS} + (\eta_\theta - \tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) = 0,$$
$$1 : \eta_t - \theta_q\alpha_t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})(\eta_S - \alpha) - \frac{r\tau q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} -$$
$$-\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\eta_{SS} + (\eta_\theta - \tau_t)(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F) = 0.$$

После сокращений уравнения принимают вид

$$\theta_{SS}: 2\xi_S = \tau_t, \quad \theta_S^2: \eta_\theta - 2\xi_S - r\tau + \tau_t = 0, \tag{1.1.17}$$

$$\theta_S: \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-rq\tau - q\xi_S + \alpha - \eta_S + q\tau_t) +$$
$$+\mu\xi_S - \mu\tau_t + \xi_t + \frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS} = 0, \tag{1.1.18}$$

$$1: r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r\tau q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} +$$
$$+(\mu - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})(-\eta_S + \alpha) - \eta_t + \theta_q\alpha_t + \zeta - \frac{\sigma^2}{2}\eta_{SS} +$$
$$+(\tau_t - \eta_\theta)(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F) = 0. \tag{1.1.19}$$

Из $2\xi_S = \tau_t$ (1.1.17) и $\tau_S = 0$, $\xi_q = 0$, $\tau_q = 0$ в (1.1.11) получаем $\xi = \tau_t S/2 + B(t)$. Подстановка $2\xi_S = \tau_t$ в (1.1.17) дает $\eta_\theta = r\tau$. Дифференцируем по q (1.1.18) с использованием (1.1.17), (1.1.11), (1.1.14). Тогда получаем $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-r\tau + \alpha_q + \tau_t/2) = 0$. Откуда получаем $\alpha = r\tau - \tau_t/2$ и интегрирование с учетом равенств $\tau_q = 0$, $\alpha_S = 0$ из (1.1.11) дает $\alpha = (r\tau - \tau_t/2)q + L(t)$. Следовательно,

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \frac{\tau_t}{2}S + B(t), \quad \alpha = \left(r\tau - \frac{\tau_t}{2}\right)q + L(t), \quad \eta_\theta = r\tau. \tag{1.1.20}$$

Подставляя полученное в (1.1.18), имеем

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(-rq\tau - q\frac{\tau_t}{2} + \left(r\tau - \frac{\tau_t}{2}\right)q + L - \eta_S + q\tau_t\right) +$$
$$+\mu\frac{\tau_t}{2} - \mu\tau_t + S\frac{\tau_{tt}}{2} + B_t = 0.$$

После сокращения уравнение принимает вид

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(L - \eta_S\right) - \mu\frac{\tau_t}{2} + S\frac{\tau_{tt}}{2} + B_t = 0.$$

Выражаем η_S и интегрируем с учетом равенств $\eta_\theta = r\tau$ из (1.1.20), $\eta_{Sq} = 0$, $\eta_{qq} = 0$ из (1.1.14). Тогда

$$\eta_S = L + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(S\frac{\tau_{tt}}{2} - \mu\frac{\tau_t}{2} + B_t\right),$$

$$\eta = r\tau\theta + LS + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(S^2\frac{\tau_{tt}}{4} - \mu\frac{\tau_t}{2}S + B_t S\right) + N(t)q + M(t). \qquad (1.1.21)$$

Подставляем полученное (1.1.20), (1.1.21) в (1.1.19):

$$r^2\tau\theta + rLS + r\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(S^2\frac{\tau_{tt}}{4} - \mu\frac{\tau_t}{2}S + B_t S\right) + rNq + rM -$$
$$-rS\left(\left(r\tau - \frac{\tau_t}{2}\right)q + L\right) - rq\left(\frac{\tau_t}{2}S + B\right) + \frac{r\tau q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} +$$
$$+(\mu - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})\left(-L + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(-S\frac{\tau_{tt}}{2} + \mu\frac{\tau_t}{2} - B_t\right) + \left(r\tau - \frac{\tau_t}{2}\right)q + L\right) -$$
$$-r\tau_t\theta - L_t S - r\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(S^2\frac{\tau_{tt}}{4} - \mu\frac{\tau_t}{2}S + B_t S\right) + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(-S^2\frac{\tau_{ttt}}{4} + \mu\frac{\tau_{tt}}{2}S - B_{tt}S\right) -$$
$$-N_t q - M_t + \theta_q\left(\left(r\tau_t - \frac{\tau_{tt}}{2}\right)q + L_t\right) +$$
$$+\zeta - \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4} + (\tau_t - r\tau)(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F) = 0.$$

После сокращения

$$rNq + rM - rqB + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\mu\frac{\tau_t}{2} - B_t\right) + Sq\left(\frac{\tau_{tt}}{2} - r^2\tau\right) + qB_t -$$
$$-L_t S + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(-S^2\frac{\tau_{ttt}}{4} - B_{tt}S\right) - N_t q - M_t + \theta_q\left(\left(r\tau_t - \frac{\tau_{tt}}{2}\right)q + L_t\right) +$$
$$+\zeta - \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4} + (\tau_t - r\tau)(-rSq + F) = 0.$$

В силу (1.1.14) $\zeta = \zeta(t, \theta_q)$. Дифференцируя по S, q, получим следующее:

$$S^2 : \tau_{ttt} = 0, \quad Sq : \frac{\tau_{tt}}{2} - r\tau_t = 0, \quad q\theta_q : r\tau_t - \frac{\tau_{tt}}{2} = 0, \qquad (1.1.22)$$

$$S : L_t + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}B_{tt}, \quad q : rN - rB - N_t + B_t = 0, \qquad (1.1.23)$$

$$1 : rM - M_t + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\mu\frac{\tau_t}{2} - B_t\right) + \theta_q L_t + \zeta - \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4} +$$
$$+(\tau_t - r\tau)F = 0. \qquad (1.1.24)$$

Решая второе уравнение из (1.1.23), получаем $N = B + Ke^{rt}$. Подставляем эту функцию в (1.1.20), (1.1.21), тогда

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \frac{\tau_t}{2}S + B(t), \quad \alpha = \left(r\tau - \frac{\tau_t}{2}\right)q + L(t), \qquad (1.1.25)$$

$$\eta = r\tau\theta + LS + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(S^2\frac{\tau_{tt}}{4} - \mu\frac{\tau_t}{2}S + B_tS\right) +$$
$$+(B + Ke^{rt})q + M(t). \tag{1.1.26}$$

1.1.1. Случай $r = 0$

Если $r = 0$, то решение уравнений (1.1.22) дает $\tau = at + b$. Подстановка $r = 0$ в первое уравнение (1.1.23) и интегрирование дает $L = -B_t/(\gamma\sigma^2) + U$. Подставляем полученное в (1.1.24)–(1.1.26), в итоге

$$\tau = at + b, \quad \xi = \frac{a}{2}S + B(t), \quad \alpha = -\frac{a}{2}q - \frac{B_t}{\gamma\sigma^2} + U,$$
$$\eta = (B + K)q + S\left(U - \frac{\mu a}{2\gamma\sigma^2}\right) + E(t),$$
$$\zeta = E_t + \mu\frac{B_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\mu^2 a}{2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{B_{tt}}{\gamma\sigma^2} - aF.$$

1.1.2. Случай $r \neq 0$

Так как $r \neq 0$, то решение уравнений (1.1.22) дает $\tau_t = \kappa_1 e^{2rt}$, $\tau_{ttt} = 4\kappa_1 r^2 e^{2rt}$, следовательно, $\tau_t = 0$. Интегрируя первое уравнение в (1.1.23), получим

$$L = -\frac{\int_{t_0}^{t} e^{rs}B_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}} + U.$$

Подставляем в (1.1.24)–(1.1.26):

$$rM - M_t - B_t\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}B_{tt}\theta_q + \zeta - r\tau F = 0,$$
$$\tau = \mathrm{const}, \quad \xi = B(t), \quad \alpha = r\tau q - \frac{\int_{t_0}^{t} e^{rs}B_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}} + U,$$
$$\zeta = M_t - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}B_t}{\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}B_{tt}}{\gamma\sigma^2} + r\tau F,$$
$$\eta = r\tau\theta + (B + Ke^{rt})q + S\left(\frac{e^{r(t-T)}B_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\int_{t_0}^{t} e^{rs}B_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}} + U\right) + E(t).$$

1.1.3. Теорема о порождении групп преобразований эквивалентности

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1.1.1. 1. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (1.1.1) *при* $r = 0$ *образуют*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = q\partial_\theta, \quad Y_\phi = \phi(t)\partial_\theta + \phi_t\partial_F,$$
$$Y_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\partial_\theta + \left(-\frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2} - F\right)\partial_F,$$
$$Y_\psi = \psi(t)\partial_S - \frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \psi q\partial_\theta + \left(\mu\frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F.$$

2. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (1.1.1) *при* $r \neq 0$ *образуют*

$$Y_1 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = e^{rt}q\partial_\theta,$$
$$Y_\psi = \psi(t)\partial_S - \frac{\int_{t_0}^t e^{rs}\psi_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}}\partial_q + \left(\psi q + S\left(\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\int_{t_0}^t e^{rs}\psi_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}}\right)\right)\partial_\theta +$$
$$+\left(\mu\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F, \quad Y_\phi = \phi(t)\partial_\theta + (\phi_t - r\phi)\partial_F.$$

Решение уравнений Ли при $r = 0$ для полученных групп со взятием проекции на переменные t, θ_q, F дает

$$Y_1 : \bar{t} = t + a_1; \quad Y_3 : \bar{\theta}_q = \theta_q + a_3; \tag{1.1.27}$$
$$Y_4 : \bar{t} = te^{a_4}, \quad \bar{\theta}_q = \theta_q e^{a_4/2}, \quad \bar{F} = (F + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2})e^{-a_4} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2};$$
$$Y_\phi : \bar{F} = F + \phi_t; \; Y_\psi : \bar{\theta}_q = \theta_q + \psi, \; \bar{F} = F + \mu\frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \frac{\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}, \tag{1.1.28}$$

а при $r \neq 0$ получаем

$$Y_1 : \bar{t} = t + a_1, \quad \bar{F} = e^{ra_1}F; \quad Y_3 : \bar{\theta}_q = \theta_q + e^{rt}; \tag{1.1.29}$$
$$Y_\phi : \bar{F} = F + \phi_t - r\phi; \tag{1.1.30}$$
$$Y_\psi : \bar{\theta}_q = \theta_q + \psi, \quad \bar{F} = F + \mu\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \frac{e^{r(t-T)}\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}. \tag{1.1.31}$$

1.2. Групповая классификация

Рассматриваем уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \quad (1.2.1)$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$, $\gamma\sigma \neq 0$. Генераторы допускаемых им групп Ли ищем в виде $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \alpha\partial_q + \eta\partial_\theta$, где функции τ, ξ, α, η зависят от t, S, q, θ. Его второе продолжение имеет вид

$$\tilde{X} = X + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}}.$$

Действие этим оператором на уравнения (1.2.1) с сужением результата на многообразие M, определяемое равенством (1.2.1), дает уравнение

$$\eta^t - r\eta - (\mu - rS)\alpha + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\eta^S -$$
$$-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\alpha - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_M =$$
$$= \eta^t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\eta^S - \alpha) -$$
$$-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = 0.$$

После подстановки формул продолжений в это уравнение получим

$$\eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta) -$$
$$-r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)) \times$$
$$\times(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \alpha) -$$
$$-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - F_t\tau -$$
$$-F_{\theta_q}(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_t(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta)) +$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) +$$
$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$
$$-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) -$$
$$-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0.$$

Подстановкой θ_t из (1.2.1) переходим на мнгогообразие M:

$$
\begin{gathered}
(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\times \\
\times(\eta_\theta - \tau_t - \theta_S\xi_\theta - \theta_q\alpha_\theta - (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \\
+F_{\theta_q}(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2(\theta_{SS}\tau_\theta + \tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta})) - \\
-(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)^2\tau_\theta + \\
+\eta_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\alpha_t - r\eta + rS\alpha + rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\times \\
\times(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \alpha) - \\
-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau - F_t\tau - \\
-F_{\theta_q}(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta)) + \\
+\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \\
+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \\
-\theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta})) = 0. \qquad (1.2.2)
\end{gathered}
$$

Дифференцирование по переменным θ_{Sq} и θ_{St} в (1.2.2) приводит к уравнениям $-\sigma^2(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) = 0$ и $-\sigma^2(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) = 0$. Следовательно, $\tau_S = \tau_\theta = \alpha_S = \alpha_\theta = 0$. Отсюда после дифференцирования уравнения (1.2.2) по θ_{SS} получаем

$$
\begin{gathered}
-\frac{\sigma^2}{2}(\eta_\theta - \tau_t - \theta_S\xi_\theta + F_{\theta_q}\tau_q) + \frac{\sigma^2}{2}(\eta_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) = \\
= \frac{\sigma^2}{2}(\tau_t - 2\xi_S - 2\theta_S\xi_\theta - F_{\theta_q}\tau_q) = 0.
\end{gathered}
$$

Теперь дифференцирование по θ_S получаем уравнения $\xi_\theta = 0$, $\tau_t - 2\xi_S - F_{\theta_q}\tau_q = 0$, и с помощью равенства $\tau_S = 0$ дифференцированием по S получим $\xi_{SS} = 0$. Таким образом,

$$
\tau_S = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \alpha_S = 0, \quad \alpha_\theta = 0, \qquad (1.2.3)
$$

$$
\tau_t - 2\xi_S - F_{\theta_q}\tau_q = 0. \qquad (1.2.4)
$$

Подстановка (1.2.3) в уравнение (1.2.2) с сокращением членов при θ_{SS}

дает

$$\left(r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2+F\right)(\eta_\theta-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+$$
$$+\eta_t-\theta_S\xi_t-\theta_q\alpha_t-r\eta+rS\alpha+rq\xi+(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q))\times$$
$$\times(\eta_S+\theta_S\eta_\theta-\theta_S\xi_S-\alpha)-\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\tau-F_t\tau-$$
$$-F_{\theta_q}(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_S\xi_q-\theta_q\alpha_q)+\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS}+2\theta_S\eta_{S\theta}+\theta_S^2\eta_{\theta\theta})=0. \qquad (1.2.5)$$

Разделяем уравнение (1.2.5) по переменной θ_S и подстановкой (1.2.4) получаем

$$\theta_S^2:-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\eta_\theta-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\eta_\theta-\xi_S)-$$
$$-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{r\tau}{2}+\frac{\sigma^2}{2}\eta_{\theta\theta}=\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\eta_\theta-r\tau)+\frac{\sigma^2}{2}\eta_{\theta\theta}=0, \qquad (1.2.6)$$
$$\theta_S:(-\mu+q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)})(\eta_\theta-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)-\xi_t+\mu(\eta_\theta-\xi_S)+$$
$$+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\eta_S-\alpha-q\eta_\theta+q\xi_S)+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}rq\tau+F_{\theta_q}\xi_q+\sigma^2\eta_{S\theta}=$$
$$=\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(q\eta_\theta-q\xi_S+\eta_S-\alpha-q\eta_\theta+rq\tau)+$$
$$+F_{\theta_q}\xi_q+\sigma^2\eta_{S\theta}-\xi_t+\mu\xi_S=0, \qquad (1.2.7)$$
$$1:\left(r\theta+(\mu-rS)q-\frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+F\right)(\eta_\theta-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+\eta_t-\theta_q\alpha_t-$$
$$-r\eta+rS\alpha+rq\xi+\mu(\eta_S-\alpha)+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-q\eta_S+q\alpha)-$$
$$-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{rq^2\tau}{2}-F_t\tau-F_{\theta_q}(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_q\alpha_q)+\frac{1}{2}\sigma^2\eta_{SS}=0. \qquad (1.2.8)$$

Из равенств $\xi_{SS}=0$ и $\xi_\theta=0$ из (1.2.3) следует, что $\xi=A(t,q)S+B(t,q)$. Решая уравнение (1.2.6) относительно θ, получаем $\eta_\theta=r\tau+\tilde{E}(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}$. Следовательно,

$$\xi=A(t,q)S+B(t,q), \quad \eta=r\tau\theta+E(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G(t,S,q). \qquad (1.2.9)$$

Подставляем эти равенства в (1.2.7) и (1.2.8):

$$\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-qA+G_S-\alpha+rq\tau)-A_tS-B_t+$$

$$+F_{\theta_q}(A_qS+B_q)+\mu A=0, \tag{1.2.10}$$

$$(r\theta+(\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{q^2}{2}+F)(r\tau-\gamma e^{r(T-t)}Ee^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+$$
$$+r\tau_t\theta+E_te^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+r\gamma e^{r(T-t)}\theta Ee^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G_t-\theta_q\alpha_t-$$
$$-r(r\tau\theta+Ee^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G)+rS\alpha+rq(AS+B)+$$
$$+\mu(E_Se^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G_S-\alpha)+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-qE_Se^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}-qG_S+q\alpha)-$$
$$-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{rq^2\tau}{2}-F_t\tau+\frac{1}{2}\sigma^2(E_{SS}e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G_{SS})-$$
$$-F_{\theta_q}(r\tau_q\theta+E_qe^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}+G_q+\theta_q(r\tau-\gamma e^{r(T-t)}Ee^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta})-\theta_q\alpha_q)=0. \tag{1.2.11}$$

В полученном уравнении (1.2.11) при слагаемых, содержащих θ, стоит коэффициент $r(r\tau-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+r\tau_t-r^2\tau-rF_{\theta_q}\tau_q$, который сокращается, то же касается выражения $-r\gamma e^{r(T-t)}E+r\gamma e^{r(T-t)}E$ при $\theta\exp(-\gamma e^{r(T-t)}\theta)$. Следовательно, дифференцирование уравнения (1.2.11) по θ дает следующие два уравнения:

$$-\gamma e^{r(T-t)}E((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{q^2}{2}+F)+E_t-rE+$$
$$+E_S(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)+\frac{\sigma^2}{2}E_{SS}-F_{\theta_q}E_q+\gamma e^{r(T-t)}E\theta_qF_{\theta_q}=0, \tag{1.2.12}$$
$$((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{q^2}{2}+F)(r\tau-\tau_t+F_{\theta_q}\tau_q)+G_t-\theta_q\alpha_t-rG+$$
$$+rS\alpha+rq(AS+B)+\mu(G_S-\alpha)+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-qG_S+q\alpha)-$$
$$-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{rq^2\tau}{2}-F_t\tau+\frac{1}{2}\sigma^2G_{SS}-F_{\theta_q}(G_q+\theta_qr\tau-\theta_q\alpha_q)=0. \tag{1.2.13}$$

1.2.1. Уравнение с нелинейной функцией F

Пусть $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$. Дифференцируя (1.2.3), (1.2.10), (1.2.12) по θ_q, получаем $\tau_q=0$. $A_q=0$, $B_q=0$, $E=0$. Из (1.2.4) и (1.2.9) следует, что $A=\tau_t/2$. Таким образом,

$$\tau_q=0,\quad A_q=0,\quad B_q=0,\quad E=0,\quad A=\frac{\tau_t}{2} \tag{1.2.14}$$

и с учетом (1.2.9)

$$\tau=\tau(t),\quad \alpha=\alpha(t,q),\quad \xi=\frac{\tau_t}{2}S+B(t),\quad \eta=r\tau\theta+G(t,S,q). \qquad (1.2.15)$$

Дифференцируем (1.2.10) по S и получаем с подстановкой из уравнений (1.2.14), (1.2.15) $G_{SS}=\tau_{tt}e^{r(t-T)}/(2\gamma\sigma^2)$. Теперь двукратное дифференцирование по S уравнения (1.2.13) с учетом (1.2.15) дает

$$G_{SSt}-rG_{SS}+\mu G_{SSS}-q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}G_{SSS}+\frac{\sigma^2}{2}G_{SSSS}-F_{\theta_q}G_{SSq}=0.$$

В силу равенства $G_{SS}=\tau_{tt}e^{r(t-T)}/(2\gamma\sigma^2)$ и с учетом (1.2.15) получаем $\tau_{ttt}=0$.

Далее дифференцирование уравнения (1.2.10) по q дает $\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-\frac{\tau_t}{2}+G_{Sq}-\alpha_q+r\tau)=0$, а дифференцирование (1.2.13) по θ_q и S влечет равенство $-F_{\theta_q\theta_q}G_{Sq}=0$. Следовательно, $\alpha_q=r\tau-\frac{\tau_t}{2}$. Тогда с учетом $\tau_q=0$ из (1.2.14) интегрированием получаем

$$\tau_{ttt}=0,\quad G_{Sq}=0,\quad \alpha_q=r\tau-\frac{\tau_t}{2},\quad \alpha=q\left(r\tau-\frac{\tau_t}{2}\right)+L(t). \qquad (1.2.16)$$

Подставляем (1.2.14), (1.2.15) и (1.2.16) в уравнение (1.2.10):

$$\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\left(G_S-L\right)-\frac{\tau_{tt}}{2}S-B_t+\mu\frac{\tau_t}{2}=0.$$

Отсюда выражаем G_S и интегрируем его с использованием равенства $G_{Sq}=0$ из (1.2.16). Тогда

$$G_S=L+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{2}S+B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right),$$

$$G=LS+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{4}S^2+SB_t-S\mu\frac{\tau_t}{2}\right)+H(t,q). \qquad (1.2.17)$$

Теперь подставляем полученные (1.2.14), (1.2.15), (1.2.16) и (1.2.17) в (1.2.13):

$$\left((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{q^2}{2}+F\right)(r\tau-\tau_t)+$$

$$+L_tS+r\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{4}S^2+SB_t-S\mu\frac{\tau_t}{2}\right)+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{ttt}}{4}S^2+SB_{tt}-S\mu\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+$$

$$+H_t-rLS-r\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{4}S^2+SB_t-S\mu\frac{\tau_t}{2}\right)-rH-$$

$$-\theta_q\left(q\left(r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+L_t\right)+rS\left(q\left(r\tau-\frac{\tau_t}{2}\right)+L\right)+$$
$$+rq\left(\frac{\tau_t}{2}S+B\right)+\mu L+\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{2}S+B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right)-\mu q\left(r\tau-\frac{\tau_t}{2}\right)-\mu L-$$
$$-qL\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}-q\left(\frac{\tau_{tt}}{2}S+B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right)+q\left(q\left(r\tau-\frac{\tau_t}{2}\right)+L\right)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}-$$
$$-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{rq^2\tau}{2}-F_t\tau+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4}-F_{\theta_q}\left(H_q+\theta_qr\tau-\theta_q\left(r\tau-\frac{\tau_t}{2}\right)\right)=0.$$

После сокращений получим

$$Sq\left(r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+F(r\tau-\tau_t)+L_tS+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{ttt}}{4}S^2+SB_{tt}-S\mu\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+$$
$$+H_t-rH-\theta_q\left(q\left(r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+L_t\right)+q(rB-B_t)+$$
$$+\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{2}S+B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right)-F_t\tau+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4}-F_{\theta_q}\left(H_q+\theta_q\frac{\tau_t}{2}\right)=0.$$

Дифференцирование этого уравнения по S и q дает равенство $r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}=0$. Рассматриваем оставшееся как равенство нулю многочлена от S. Тогда

$$Sq:r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}=0,\quad S^2:\tau_{ttt}=0,\quad S:L_t+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}B_{tt}=0,\tag{1.2.18}$$
$$1:F(r\tau-\tau_t)+H_t-rH-\theta_q\left(q\left(r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}\right)+L_t\right)+q(rB-B_t)+$$
$$+\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right)-F_t\tau+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4}-F_{\theta_q}(H_q+\theta_q\frac{\tau_t}{2})=0.\tag{1.2.19}$$

Дифференцируем (1.2.19) по θ_q и q и получаем $r\tau_t-\frac{\tau_{tt}}{2}-F_{\theta_q\theta_q}H_{qq}=0$. Исходя из предположения $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$ и учитывая (1.2.18), получаем $H_{qq}=0$. Интегрирование дает

$$H=N(t)q+M(t).\tag{1.2.20}$$

Подставим его в (1.2.19) и получим

$$F(r\tau-\tau_t)+N_tq+M_t-rNq-rM-\theta_qL_t+q(rB-B_t)+$$
$$+\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(B_t-\mu\frac{\tau_t}{2}\right)-F_t\tau+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4}-F_{\theta_q}(N+\theta_q\frac{\tau_t}{2})=0.$$

Дифференцирование полученного уравнения по q дает равенство $N_t - rN = B_t - rB$. Интегрированием получаем $B = N + Ke^{rt}$. После подстановки в (1.2.18) имеем

$$Sq : r\tau_t - \frac{\tau_{tt}}{2} = 0, \quad B = N + Ke^{rt}, \tag{1.2.21}$$

$$S^2 : \tau_{ttt} = 0, \quad S : L_t + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2 Ke^{rt}) = 0, \tag{1.2.22}$$

$$F(r\tau - \tau_t) + M_t - rM - \theta_q L_t + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(N_t + rKe^{rt} - \mu\frac{\tau_t}{2}\right) -$$

$$-F_t\tau + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma}\frac{\tau_{tt}}{4} - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q\frac{\tau_t}{2}\right) = 0. \tag{1.2.23}$$

Из (1.2.15)–(1.2.17), (1.2.20), (1.2.21) получаем, что

$$\tau = \tau(t), \quad \alpha = q(r\tau - \frac{\tau_t}{2}) + L(t), \quad \xi = \frac{\tau_t}{2}S + N + Ke^{rt}, \tag{1.2.24}$$

$$\eta = r\tau\theta + LS + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(\frac{\tau_{tt}}{4}S^2 + SN_t + rSKe^{rt} - S\mu\frac{\tau_t}{2}\right) + N(t)q + M(t). \tag{1.2.25}$$

1.2.2. Групповая классификация при $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, $r = 0$

При $r = 0$ из первого уравнения (1.2.21) получаем $\tau_{tt} = 0$ и следовательно $\tau = at + b$. Подстановка в (1.2.24), (1.2.25) дает

$$\tau = at + b, \quad \alpha = -\frac{a}{2}q + L(t), \quad \xi = \frac{a}{2}S + N + K, \tag{1.2.26}$$

$$\eta = LS + \frac{1}{\gamma\sigma^2}\left(SN_t - S\mu\frac{a}{2}\right) + N(t)q + M(t). \tag{1.2.27}$$

Подставляем полученное в (1.2.22), (1.2.23):

$$L_t + \frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} = 0, \tag{1.2.28}$$

$$-aF + M_t - \theta_q L_t + \mu\frac{1}{\gamma\sigma^2}\left(N_t - \mu\frac{a}{2}\right) -$$

$$-F_t(at + b) - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q\frac{a}{2}\right) = 0. \tag{1.2.29}$$

Интегрирование уравнения (1.2.28) дает $L = -\frac{N_t}{\gamma\sigma^2} + c$. Тогда в силу (1.2.26) и (1.2.29)

$$\tau = at + b, \quad \alpha = -\frac{a}{2}q - \frac{N_t}{\gamma\sigma^2} + c, \quad \xi = \frac{a}{2}S + N + K, \tag{1.2.30}$$

$$\eta = M(t) + N(t)q + S\left(c - \frac{a\mu}{2\gamma\sigma^2}\right), \tag{1.2.31}$$

$$\begin{gathered} -aF + M_t + \theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}(N_t - \mu\frac{a}{2}) - \\ -F_t(at+b) - F_{\theta_q}(N + \frac{a}{2}\theta_q) = 0. \end{gathered} \tag{1.2.32}$$

Перепишем определяющее уравнение в виде

$$\kappa(t) + \chi(t)\theta_q + aF + F_t(at+b) + F_{\theta_q}(N + \frac{a}{2}\theta_q) = 0.$$

1. Если $a \neq 0$, сделаем замену

$$F = \frac{\tilde{F}}{at+b}$$

и получим $\kappa(t)(at+b) + \chi(t)(at+b)\theta_q + \tilde{F}_t(at+b) + \tilde{F}_{\theta_q}(N + \frac{a}{2}\theta_q) = 0$. Следующая замена: $\bar{\theta_q} = \theta_q - (at+b)^{1/2}\int(at+b)^{-3/2}Ndt$. После нее получаем уравнение

$$\begin{gathered} \kappa(t)(at+b) + \chi(t)(at+b)^{3/2}\int(at+b)^{-3/2}Ndt + \\ +\chi(t)(at+b)\bar{\theta_q} + \tilde{F}_t(at+b) + \frac{a}{2}\bar{\theta}_q\tilde{F}_{\bar{\theta}_q} = 0. \end{gathered}$$

Теперь осуществим замену

$$\begin{gathered} \tilde{F} = W - (at+b)^{-1/2}\int(at+b)^{1/2}\chi(t)dt\bar{\theta_q} - \\ -\int\left(\kappa(t) + \chi(t)(at+b)^{1/2}\int(at+b)^{-3/2}Ndt\right)dt. \end{gathered}$$

и получим уравнение $W_t(at+b) + \frac{a}{2}\bar{\theta}_q W_{\bar{\theta}_q} = 0$. Его общее решение имеет вид $W = W(\bar{\theta_q}(at+b)^{-1/2})$. Вернувшись к исходным переменным, получим общее решение

$$F = (at+b)^{-1}W\left((at+b)^{-1/2}\theta_q - \int(at+b)^{-3/2}Ndt\right) -$$

$$-(at+b)^{-3/2}\int(at+b)^{1/2}\chi(t)dt\theta_q+$$
$$+(at+b)^{-1}\int(at+b)^{-3/2}Ndt\int(at+b)^{1/2}\chi(t)dt-$$
$$-(at+b)^{-1}\int\left(\kappa(t)+\chi(t)(at+b)^{1/2}\int(at+b)^{-3/2}Ndt\right)dt.$$

С помощью преобразований эквивалентности, порождаемых оператором Y_1 из (1.1.27), получим $b=0$. При помощи преобразований эквивалентности оператора Y_ϕ из (1.1.28) получаем

$$F=(at)^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q-\int t^{-3/2}\frac{N}{a}dt\right)-t^{-3/2}\int t^{1/2}\frac{\chi(t)}{a}dt\theta_q.$$

Применяем Y_ψ из (1.1.28) и получаем при помощи Y_ϕ $F=t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right)+f(t)\theta_q$, где $W''\neq 0$ по предположению. Подставляем полученное в (1.2.30)–(1.2.32):

$$\tau=at+b,\quad \alpha=-\frac{a}{2}q-\frac{N_t}{\gamma\sigma^2}+c,\quad \xi=\frac{a}{2}S+N+k, \tag{1.2.33}$$
$$\eta=M(t)+N(t)q+S\left(-\frac{N_t}{\gamma\sigma^2}+c\right)+\frac{1}{\gamma\sigma^2}S\left(N_t-\mu\frac{a}{2}\right),$$
$$-at^{-1}W-af\theta_q+M_t+\theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2}+\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t-\mu\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}(at+b)t^{-5/2}\theta_qW'+$$
$$+t^{-2}(at+b)W-(at+b)f_t\theta_q-(t^{-3/2}W'+f(t))\left(N+\frac{a}{2}\theta_q\right)=0.$$

После сокращения последнее уравнение принимает вид

$$-af\theta_q+M_t+\theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2}+\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t-\mu\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}t^{-5/2}\theta_qW'+$$
$$+bt^{-2}W-(at+b)f_t\theta_q-t^{-3/2}NW'-f(t)N-\frac{a}{2}f(t)\theta_q=0.$$

Далее заменой переменных $u=t^{-1/2}\theta_q$ переписываем уравнение как

$$-aft^{1/2}u+M_t+t^{1/2}u\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2}+\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}(N_t-\mu\frac{a}{2})+\frac{b}{2}t^{-2}uW'+$$
$$+bt^{-2}W-(at+b)t^{1/2}f_tu-t^{-3/2}NW'-f(t)N-\frac{a}{2}t^{1/2}f(t)u=0.$$

Как уравнение от u его можно представить в виде

$$\left(\frac{b}{2}u+n\right)W'+bW+mu+l=0.$$

1.1. Считаем, что $b\neq 0$. Делаем замену

$$v=u+\frac{2n}{b},\quad W=\widetilde{W}-\frac{2m}{3b}v-\frac{l}{b}+\frac{2mn}{b^2}$$

Тогда получаем уравнение $\frac{vb}{2}\widetilde{W}'+b\widetilde{W}=0$. Его решение $\widetilde{W}=C/v^2$. Следовательно,

$$W=\frac{C_1}{(u+C_2)^2}+C_3u+C_4,\ F=\frac{C_1}{t(t^{-1/2}\theta_q+C_2)^2}+C_3t^{-1/2}\theta_q+C_4+f(t)\theta_q.$$

После применения Y_ψ получаем функцию вида $F=\frac{C_1}{\theta_q^2}+f_1(t)\theta_q+f_2(t)$, а после применения Y_ϕ — $F=\frac{C}{\theta_q^2}+f(t)\theta_q$. Подставляем обратно в определяющее уравнение (1.2.32) и получаем

$$-a\frac{C}{\theta_q^2}-af\theta_q+M_t+\theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2}+\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t-\mu\frac{a}{2}\right)-$$
$$-f_t(at+b)\theta_q+\left(\frac{2C}{\theta_q^3}-f\right)\left(N+\frac{a}{2}\theta_q\right)=0.$$

После сокращения получаем уравнение

$$-af\theta_q+M_t+\theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2}+\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t-\mu\frac{a}{2}\right)-$$
$$-f_t(at+b)\theta_q+\frac{2NC}{\theta_q^3}-f\left(N+\frac{a}{2}\theta_q\right)=0.$$

Дифференцируя его по θ_q, получаем $N=0$, поэтому

$$N=0,\quad f_t(at+b)+\frac{3a}{2}f=0,\quad M_t=\frac{a\mu^2}{2\gamma\sigma^2}.$$

Решение уравнения для f есть $f=c_2(t+c_1)^{-3/2}$. Применение преобразования эквивалентности Y_1 дает функцию $f=C_2t^{-3/2}$. Подстановка полученного f обратно в уравнение на f дает $C_2b=0$. Так как $b\neq 0$, $C_2=0$ и $f=0$. При этом $M=\frac{a\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2}+d$. Тогда коэффициенты оператора (1.2.33) принимают вид

$$\tau=at+b,\ \xi=\frac{a}{2}S+k,\ \eta=\frac{a\mu^2t}{2\gamma\sigma^2}+d+S\left(c-\frac{a\mu}{2\gamma\sigma^2}\right),\ \alpha=-\frac{a}{2}q+c.$$

В результате при $F = C/\theta_q^2$ получаем операторы

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

1.2. Считаем, что $b = 0$, $n \neq 0$. Тогда определяющее уравнение имеет вид $nW' + mu + l = 0$. Его решение имеет вид

$$W = C_1 u^2 + C_2 u + C_3 = C_1 t^{-1}\theta_q^2 + C_2 t^{-1/2}\theta_q + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$. Тогда обратной заменой получаем

$$F = C_1 t^{-2}\theta_q^2 + C_2 t^{-3/2}\theta_q + C_3 t^{-1} + f(t)\theta_q$$

Применением Y_ψ получим

$$F + \mu\psi_t + \frac{\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{\psi_t}{2\gamma\sigma^2} = C_1 t^{-2}\theta_q^2 + \theta_q(2C_1 t^{-2}\psi + C_2 t^{-3/2} + f(t)) +$$
$$+ 2C_1 t^{-2}\psi^2 + C_2 t^{-3/2}\psi + f(t)\psi + C_3 t^{-1}.$$

Выбираем для сокращения коэффициента перед θ_q в качестве ψ решение уравнения $\psi_t = 2\gamma\sigma^2(2C_1 t^{-2}\psi + C_2 t^{-3/2} + f(t))$. Последующим применением Y_ϕ получаем $F = Ct^{-2}\theta_q^2$. Подстановка в (1.2.32) дает

$$-aCt^{-2}\theta_q^2 + M_t + \theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t - \mu\frac{a}{2}\right) +$$
$$+ 2Ct^{-3}\theta_q^2 at - 2Ct^{-2}\theta_q\left(N + \frac{a}{2}\theta_q\right) = 0.$$

Отсюда

$$M_t + \theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\left(N_t - \mu\frac{a}{2}\right) - 2NCt^{-2}\theta_q = 0,$$

поэтому

$$M = \frac{a\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N + d, \quad N_{tt} = 2C\gamma\sigma^2 t^{-2}N.$$

Подставляем полученное в (1.2.30):

$$\tau = at + b, \quad \alpha = -\frac{a}{2}q - \frac{N_t}{\gamma\sigma^2} + c, \quad \xi = \frac{a}{2}S + N + K,$$

$$\eta = \frac{a\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N + d + N(t)q + S\left(c - \frac{a\mu}{2\gamma\sigma^2}\right).$$

Для уравнения $N_{tt} = 2C\gamma\sigma^2 t^{-2}N$ замена $t = e^v$ дает $N_{vv} - N_v - 2C\gamma\sigma^2 N = 0$.

Если $1 + 8C\gamma\sigma^2 > 0$, $C \neq 0$, $p^2 = 1 + 8C\gamma\sigma^2$ то получаем решения $N_1 = n_1 t^{\frac{1+p}{2}}$, $N_2 = n_2 t^{\frac{1-p}{2}}$.

Если $1 + 8C\gamma\sigma^2 < 0$ и $p^2 = -1 - 8C\gamma\sigma^2$, то решения будут иметь вид $N_1 = n_1\sqrt{t}\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)$, $N_2 = n_2\sqrt{t}\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)$.

Если $1 + 8C\gamma\sigma^2 = 0$, то получаем $N_1 = n_1\sqrt{t}$, $N_2 = n_2\sqrt{t}\ln|t|$.

В результате получаем при $1 + 8C\gamma\sigma^2 > 0$, $C \neq 0$, $p^2 = 1 + 8C\gamma\sigma^2$ следующие операторы

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$

$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta,$$

$$X_5 = t^{(1+p)/2}\partial_S - \frac{(1+p)t^{(p-1)/2}}{2\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(t^{(1+p)/2}q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}t^{(1+p)/2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = t^{(1-p)/2}\partial_S - \frac{(1-p)t^{-(1+p)/2}}{2\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(t^{(1-p)/2}q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}t^{(1-p)/2}\right)\partial_\theta;$$

при $1 + 8C\gamma\sigma^2 < 0$, $p^2 = -1 - 8C\gamma\sigma^2$ операторы будут иметь вид

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$

$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta,$$

$$X_5 = \sqrt{t}\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\partial_S - \frac{1}{2\sqrt{t}\gamma\sigma^2}\left(\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right) - p\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\right)\partial_q +$$

$$+\left(\sqrt{t}\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\sqrt{t}\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = \sqrt{t}\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\partial_S - \frac{1}{2\sqrt{t}\gamma\sigma^2}\left(\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right) + p\cos\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\right)\partial_q +$$

$$+\left(\sqrt{t}\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\sqrt{t}\sin\left(\frac{p}{2}\ln|t|\right)\right)\partial_\theta;$$

при $1+8C\gamma\sigma^2=0$ —

$$X_1=\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,\quad X_3=\partial_S,$$
$$X_4=t\partial_t+\frac{S}{2}\partial_S-\frac{q}{2}\partial_q+\left(\frac{\mu^2t}{2\gamma\sigma^2}-\frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta,$$
$$X_5=\sqrt{t}\partial_S-\frac{1}{2\sqrt{t}\gamma\sigma^2}\partial_q+\left(\sqrt{t}q-\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\sqrt{t}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6=\sqrt{t}\ln|t|\partial_S-\frac{1}{\sqrt{t}\gamma\sigma^2}\left(1+\frac{1}{2}\ln|t|\right)\partial_q+\left(\sqrt{t}\ln|t|q-\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\sqrt{t}\ln|t|\right)\partial_\theta.$$

1.3. Если $b=0$, $n=t^{-3/2}N=0$, то функция W произвольная и $F=t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right)+f(t)\theta_q$. В этом случае получаем из (1.2.30)–(1.2.32) уравнения

$$\tau=at,\quad \alpha=-\frac{a}{2}q+c,\quad \xi=\frac{a}{2}S+K,\quad \eta=M(t)+S\left(c-\frac{a\mu}{2\gamma\sigma^2}\right),$$
$$-af\theta_q+M_t-\frac{a\mu^2}{2\gamma\sigma^2}-atf_t\theta_q-\frac{af}{2}\theta_q=0.$$

Дифференцирование по θ_q полученного уравнения дает $atf_t=-3af/2$. Решение в предположении $a\neq 0$ дает $f=Ct^{-3/2}$. Тогда

$$f=Ct^{-3/2},\quad M=\frac{a\mu^2t}{2\gamma\sigma^2}+d$$

Следовательно

$$\tau=at,\quad \alpha=-\frac{a}{2}q+c,\quad \xi=\frac{a}{2}S+k,\quad \eta=\frac{a\mu^2t}{2\gamma\sigma^2}+d+S\left(c-\mu\frac{a}{2}\right).$$

Поэтому если $F=t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right)+Ct^{-3/2}\theta_q=t^{-1}\widetilde{W}(t^{-1/2}\theta_q)$, то получаем операторы

$$X_1=\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,\quad X_3=\partial_S,$$
$$X_4=t\partial_t+\frac{S}{2}\partial_S-\frac{q}{2}\partial_q+\left(\frac{\mu^2t}{2\gamma\sigma^2}-\frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

1.4. Если $b\neq 0$, $n=0$, то получим тот же результат, что и в пункте **1.1**.

2. Пусть теперь $a=0$, тогда

$$\tau=b,\quad \xi=N+k,\quad \eta=M(t)+N(t)q+cS,\quad \alpha=-\frac{N_t}{\gamma\sigma^2}+c,$$

$$M_t + \theta_q \frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} N_t - bF_t - NF_{\theta_q} = 0.$$

2.1. Если $N \neq 0$, $b \neq 0$, получаем определяющее уравнение

$$C_1(t)F_{\theta_q} + C_2 F_t + C_3(t)\theta_q + C_4(t) = 0.$$

Делаем замену

$$F = \tilde{F} - \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} C_3(l)dl\theta_q + \frac{1}{C_2}\int_{t_1}^{t}\left(-C_4(s) + \int_{t_0}^{s} C_3(l)dl\right)ds$$

и получаем уравнение $C_1(t)\tilde{F}_{\theta_q} + C_2\tilde{F}_t = 0$. Его решение имеет вид

$$\tilde{F} = \tilde{F}\left(\theta_q - \int_{t_3}^{t}\frac{C_1(l)}{C_2}dl\right).$$

Обратная замена дает решение

$$F = \tilde{F}\left(\theta_q - \int_{t_3}^{t}\frac{C_1(l)}{C_2}dl\right) - \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} C_3(l)dl\theta_q +$$
$$+\frac{1}{C_2}\int_{t_1}^{t}\left(-C_4(s) + \int_{t_0}^{s} C_3(l)dl\right)ds.$$

Применяем преобразование эквивалентности Y_ϕ и получаем

$$F = \tilde{F}\left(\theta_q - \int_{t_3}^{t}\frac{C_1(l)}{C_2}dl\right) - \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} C_3(l)dl\theta_q.$$

Применение Y_ψ при $\psi = \int_{t_3}^{t}\frac{C_1(l)}{C_2}dl$ дает

$$F + \mu\frac{C_1(t)}{C_2\gamma\sigma^2} + \frac{\int_{t_3}^{t} C_1(l)dlC_3'(t)}{2C_2^2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{C_3'(t)}{C_2\gamma\sigma^2} = \tilde{F}(\theta_q) - \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} C_3(l)dl\theta_q.$$

Повторное применение Y_φ дает $F = \tilde{F}(\theta_q) + f(t)\theta_q$. Подставляем обратно в определяющее уравнение и получаем

$$M_t + \theta_q\frac{N_{tt}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N_t - bf_t\theta_q - N\tilde{F}_{\theta_q} - Nf(t) = 0.$$

Так как $N \neq 0$ и $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, то получаем $\tilde{F}_{\theta_q} = n_1\theta_q^2 + n_2\theta_q + n_3$. Тогда $F = n_1\theta_q^2 + n_2\theta_q + n_3 + f(t)\theta_q$, $n_1 \neq 0$. Применение Y_ψ дает равенство

$$F + \mu\frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \frac{\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2} =$$

$$= n_1\theta_q^2 + \theta_q(2n_1\psi + n_2 + f(t)) + n_1\psi^2 + n_2\psi + f(t)\psi + n_3.$$

Выбираем ψ, такое, что $\psi_{tt} = \gamma\sigma^2(2n_1\psi + n_2 + f(t))$. Тогда получаем

$$F = n_1\theta_q^2 + n_1\psi^2 + n_2\psi + f(t)\psi + n_3 - \mu\frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2}.$$

Применение Y_ϕ дает $F = n_1\theta_q^2$. Применяем Y_4 и получаем

$$\left(F + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\right)e^{-a_4} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2} = n_1 e^{a_4}\theta_q^2.$$

Применение Y_ϕ и подстановка $a_4 = -\ln|n_1|/2$ дают $F = n\theta_q^2$, $n = \pm 1$, тогда

$$N_{tt} = 2n\gamma\sigma^2 N, \quad M_t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N_t = 0,$$

$$\tau = b, \quad \alpha = -\frac{N_t}{\gamma\sigma^2} + c, \quad \xi = N + k, \quad \eta = M(t) + N(t)q + cS.$$

Решая эти уравнения, получим

$$M = d - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N,$$

$$n\gamma > 0, \quad N = n_1 e^{pt} + n_2 e^{-pt}, \quad p = \sqrt{|2\gamma\sigma^2|};$$

$$n\gamma < 0, \quad N = n_1\cos(pt) + n_2\sin(pt), \quad p = \sqrt{|2\gamma\sigma^2|}.$$

При $n\gamma\sigma^2 > 0$ получаем

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$

$$X_5 = e^{pt}\partial_S - \frac{pe^{pt}}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(e^{pt}q - \frac{\mu e^{pt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = e^{-pt}\partial_S + \frac{pe^{-pt}}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(e^{-pt}q - \frac{\mu e^{-pt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где $p = \sqrt{|2\gamma\sigma^2|}$.

При $n\gamma\sigma^2 < 0$ имеем

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$

$$X_5 = \sin(pt)\partial_S - \frac{p\cos(pt)}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\sin(pt)q - \frac{\mu\sin(pt)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = \cos(pt)\partial_S + \frac{p\sin(pt)}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\cos(pt)q - \frac{\mu\cos(pt)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где $p = \sqrt{|2\gamma\sigma^2|}$.

2.2. Если $N \neq 0$, $b = 0$, получаем $F = f(t)\theta_q^2$, $f(t) \neq 0$,

$$\tau = 0, \quad \alpha = -\frac{N_t}{\gamma\sigma^2} + c, \quad \xi = N + k, \quad \eta = d - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}N + N(t)q + cS,$$

$$N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 N.$$

Следовательно, генераторы принимают вид

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$

$$X_4 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_5 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta.$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — линейно независимые решения линейного уравнения $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 N$.

2.3. При $N = 0$, $b \neq 0$ получаем $F = \tilde{F}(\theta_q)$, следовательно,

$$\tau = b, \quad \alpha = c, \quad \xi = k, \quad \eta = d + cS, \quad M_t = 0, \quad M = d.$$

Тогда $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$, $X_3 = \partial_S$, $X_4 = \partial_t$.

2.4 Для $N = 0$, $b = 0$ имеем $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$, $X_3 = \partial_S$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы о групповой классификации в случае нулевой безрисковой процентной ставки r.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$, $r = 0$.

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при функции* $F = F(t, \theta_q)$*, такой, что* $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$*, которая не эквивалентна функциям* $f(t)\theta_q^2$*,* $\tilde{F}(\theta_q)$ *и* $t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$*, имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S.$$

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при функции* $F = \tilde{F}(\theta_q)$, $\tilde{F}'' \neq 0$, *которая не эквивалентна* $f(t)\theta_q^2$ *и* $t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t.$$

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при* $F = C/\theta_q^2$ *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

4. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при* $F = f(t)\theta_q^2$, *которая не эквивалентна* $Ct^{-2}\theta_q^2$ *и* $\pm\theta_q^2$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta.$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *— линейно независимые решения линейного уравнения* $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 N$.

5. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при* $F = Ct^{-2}\theta_q^2$, $C \neq 0$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2 *имеют следующий вид:*

$\varphi_1 = t^{(1+\sqrt{1+8C\gamma\sigma^2})/2}$, $\varphi_2 = t^{(1-\sqrt{1+8C\gamma\sigma^2})/2}$ *при* $1 + 8C\gamma\sigma^2 > 0$;

$\varphi_1 = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{-1-8C\gamma\sigma^2}}{2}\ln|t|\right)$, $\varphi_2 = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{-1-8C\gamma\sigma^2}}{2}\ln|t|\right)$ *при* $1+8C\gamma\sigma^2<0$;

$\varphi_1 = \sqrt{t}$, $\varphi_2 = \sqrt{t}\ln|t|$ *при* $1+8C\gamma\sigma^2=0$.

6. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при функции* $F = t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$, *такой, что* $W'' \neq 0$, *которая не эквивалентна* $f(t)\theta_q^2$ *и* C/θ_q^2, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

7. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при* $F = n\theta_q^2$, $n=\pm1$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2 *имеют следующий вид:*

$\varphi_1 = e^{\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t}$, $\varphi_2 = e^{-\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t}$ *при* $n\gamma>0$;

$\varphi_1 = \sin(\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t)$, $\varphi_2 = \cos(\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t)$ *при* $n\gamma<0$.

1.2.3. Групповая классификация при $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$, $r\neq 0$

Пусть теперь $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$, $r\neq 0$. В этом случае решая (1.2.21), (1.2.22) получаем $\tau = \mathrm{const}$ и подстановка в (1.2.24) дает

$$\tau = \mathrm{const}, \quad \alpha = r\tau q + L(t), \quad \xi = N + Ke^{rt}, \tag{1.2.34}$$

$$\eta = r\tau\theta + LS + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(SN_t + rSKe^{rt}\right) + N(t)q + M(t). \tag{1.2.35}$$

Тогда из (1.2.22), (1.2.23) получаем

$$L_t + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rt}) = 0, \tag{1.2.36}$$

$$r\tau F + M_t - rM - \theta_q L_t + \mu \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\left(N_t + rKe^{rt}\right) - F_t\tau - NF_{\theta_q} = 0. \quad (1.2.37)$$

Решение уравнения (1.2.36) дает

$$L = -\int_{t_0}^{t} \frac{e^{r(s-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rs})ds + U. \quad (1.2.38)$$

Подставляем (1.2.38) в (1.2.34), (1.2.35), (1.2.37):

$$r\tau F + M_t + \theta_q \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rt}) - rM +$$

$$+\mu \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) - F_t\tau - F_{\theta_q}N = 0, \quad (1.2.39)$$

$$\tau = \mathrm{const}, \quad \alpha = r\tau q - \int_{t_0}^{t} \frac{e^{r(s-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rs})ds + U, \quad (1.2.40)$$

$$\xi = N(t) + Ke^{rt}, \quad \eta = r\tau\theta + S\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{e^{r(s-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rs})ds + U\right) +$$

$$+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}S(N_t + rKe^{rt}) + N(t)q + M(t). \quad (1.2.41)$$

Уравнение на неизвестную функцию (1.2.39) имеет вид

$$-r\varepsilon F + \varepsilon F_t + \kappa(t)F_{\theta_q} + \theta_q\phi(t) + \psi(t) = 0.$$

1. Если $\varepsilon = 0$, $\kappa(t) = 0$ и $F = F(t, \theta_q)$ — произвольная функция, то получаем $-\varepsilon = \tau = 0$, $-\kappa = N = 0$, $-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\phi = N_{tt} + r^2Ke^{rt} = r^2Ke^{rt} = 0$, следовательно, $K = 0$, $\tau = 0$, $N = 0$ и уравнение (1.2.39) принимает вид $M_t - rM = 0$, $M = me^{rt}$. Следовательно, (1.2.40) влечет равенства $\tau = 0$, $\alpha = U$, $\xi = 0$, $\eta = US + me^{rt}$. Отсюда получаем операторы

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

2. Если $\varepsilon \neq 0$, $\kappa = 0$, то получаем решение $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + f_2(t)\theta_q + f_3(t)$, применяем преобразование эквивалентности, порождаемое оператором Y_ϕ (1.1.30) и получаем, что $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + f_1(t)\theta_q$. Так как $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, то получаем $\widetilde{F}_{\theta_q\theta_q} \neq 0$. Из равенства $\kappa = 0$ следует, что $N = 0$. Подставляем

$F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + f_1(t)\theta_q$ и $N = 0$ в (1.2.39) и получаеме уравнение

$$r\tau f_1(t)\theta_q + M_t + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}r^2Ke^{rt} - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}rKe^{rt} - (f_1)_t\tau\theta_q = 0.$$

Его дифференцирование по θ_q дает два равенства

$$r\tau f_1(t) + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}r^2Ke^{rt} - (f_1)_t(t)\tau = 0, \quad M_t - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}rKe^{rt} = 0.$$

Подставляем $f_1(t) = \bar{f}_1e^{rt} + r\bar{f}_2e^{2rt}$ в уравнение на $f_1(t)$ и получаем

$$r\tau\bar{f}_1e^{rt} + r^2\tau\bar{f}_2e^{2rt} + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}r^2Ke^{rt} - r\tau\bar{f}_1e^{rt} - 2r^2\tau\bar{f}_2e^{2rt} = 0,$$

отсюда $K = \gamma\sigma^2e^{rT}\tau\bar{f}_2$. Решая уравнение для M, получим $M = me^{rt} - \mu\tau\bar{f}_2e^{2rt}$. Подставляем полученное в (1.2.40):

$$\tau = \text{const}, \quad \alpha = r\tau q - \frac{r\tau\bar{f}_2}{2}e^{2rt} + \frac{r\tau\bar{f}_2}{2}e^{2rt_0} + U, \quad \xi = \gamma\sigma^2e^{rT}\tau\bar{f}_3e^{rt},$$
$$\eta = r\tau\theta + S\left(\frac{r\tau\bar{f}_2}{2}e^{2rt} + \frac{r\tau\bar{f}_2}{2}e^{2rt_0} + U\right) + me^{rt} - \mu\tau\bar{f}_2e^{2rt}.$$

Обозначим $\bar{F} = \widetilde{F} + \bar{f}_1\theta_q$ и получим специализацию $F = e^{rt}\bar{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$, $\bar{F}_{\theta_q\theta_q} \neq 0$. Используя замену $\bar{U} = U + r\tau\bar{f}_2e^{2rt_0}/2$, получим допускаемые операторы

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_3 = \partial_t + \gamma\sigma^2e^{rT}fe^{rt}\partial_S + \left(rq - \frac{rf}{2}e^{2rt}\right)\partial_q + \left(r\theta + \frac{rf}{2}e^{2rt}S - \mu fe^{2rt}\right)\partial_\theta.$$

Применение преобразование эквивалентности растяжения $\partial_t + rF\partial_F$ дает $F = e^{rt}\bar{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}e^{ra_1}\theta_q$.Поэтому имеем три специализации при $f = 0$ и $f = \pm1$.

3. Если $\varepsilon = 0$, $\kappa \neq 0$, $\phi(t) = 0$, то получаем противоречие с предположением $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$.

4. Если $\varepsilon = 0$, $\kappa \neq 0$, $\phi(t) \neq 0$, то получаем решение $F = f_1(t)\theta_q^2 + f_2(t)\theta_q + f_3(t)$, $f_1(t) \neq 0$. Рассматриваем преобразование эквивалентности Y_ψ (1.1.31), где ψ решение уравнения $\psi_{tt} = \gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(2f_1(t)\psi + f_2(t))$. Получаем произвольный элемент вида $F = f_1(t)\theta_q^2 + \bar{f}_2(t)$, где

$$\bar{f}_2 = f_1(t)\psi^2 + f_2(t)\psi + f_3(t) - \mu\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{e^{r(t-T)}\psi\psi_{tt}}{2\gamma\sigma^2}.$$

Дальше применяем преобразование эквивалентности Y_ϕ и получаем $F = f(t)\theta_q^2$. Из равенства $\varepsilon = 0$ следует, что $\tau = 0$. Подставляем полученное в уравнения (1.2.39), (1.2.40):

$$M_t + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rt}) - rM +$$
$$+\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) - 2f(t)\theta_q N = 0, \tag{1.2.42}$$

$$\tau = 0, \quad \alpha = -\int_{t_0}^{t}\frac{e^{r(s-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rs})ds + U, \tag{1.2.43}$$

$$\xi = N(t) + Ke^{rt}, \quad \eta = S\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{e^{r(s-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rs})ds + U\right) +$$
$$+\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}S(N_t + rKe^{rt}) + N(t)q + M(t). \tag{1.2.44}$$

Дифференцирование по переменной θ_q уравнения (1.2.42) дает

$$N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N - r^2Ke^{rt}, \tag{1.2.45}$$

$$M_t - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) = 0. \tag{1.2.46}$$

Решая уравнение (1.2.46) получаем

$$M = me^{rt} - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N + Ke^{rt}). \tag{1.2.47}$$

Подставляем (1.2.47) и (1.2.45) в (1.2.43), (1.2.44), тогда

$$\tau = 0, \quad \alpha = -\int_{t_0}^{t}2f(s)Nds + U, \quad \xi = N(t) + Ke^{rt}, \tag{1.2.48}$$

$$\eta = S\left(-\int_{t_0}^{t}2f(s)Nds + U\right) + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}S(N_t + rKe^{rt}) +$$
$$+N(t)q + me^{rt} - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N + Ke^{rt}). \tag{1.2.49}$$

Пусть $\Psi(t)$ — частное решение уравнения (1.2.45) при $K=1$, тогда замена $N=W+K\Psi(t)$ приводит уравнение (1.2.45) к однородному виду $N_{tt}=2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N$, которое имеет два линейно независимых частных решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Следовательно решение (1.2.45) есть

$$N=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+K\Psi(t), \tag{1.2.50}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — линейно независимые решения $N_{tt}=2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N$ и $\Psi(t)$ — частное решение $N_{tt}=2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N-r^2e^{rt}$. Подставляем (1.2.50) в (1.2.48), (1.2.49) и получаем

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,$$
$$X_3=\varphi_1\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\varphi_1ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'-2S\int_{t_0}^t f(s)\varphi_1ds+\varphi_1q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1\right)\partial_\theta,$$
$$X_4=\varphi_2\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\varphi_2ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2'-2S\int_{t_0}^t f(s)\varphi_2ds+\varphi_2q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2\right)\partial_\theta,$$
$$X_5=(\Psi+e^{rt})\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\Psi ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi'+re^{rt})-2S\int_{t_0}^t f(s)\Psi ds+\Psi q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi+e^{rt})\right)\partial_\theta,$$

5. При $\varepsilon\neq 0$, $\kappa\neq 0$ делаем замену в определяющем отношении

$$F=e^{rt}\bar F(t,\theta_q)-e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}\frac{\phi(s)}{\varepsilon}ds\theta_q+$$
$$+e^{rt}\int\kappa(t)\int_{t_0}^t e^{-rs}\frac{\phi(s)}{\varepsilon^2}dsdt-e^{rt}\int e^{-rt}\frac{\psi(t)}{\varepsilon}dt.$$

Следовательно, получаем уравнение $\varepsilon\bar F_t+\kappa(t)\bar F_{\theta_q}=0$. Его общее решение — $\bar F=\widetilde F(\theta_q-\int\kappa(t)dt/\varepsilon)$. Поэтому $F=e^{rt}\widetilde F(\theta_q-f_1(t))+f_2(t)\theta_q+f_3(t)$. Используем преобразование эквивалентности (1.1.31) Y_ψ с $\psi=f_1(t)$, тогда

$$F+\mu\frac{e^{r(t-T)}(f_1)_t}{\gamma\sigma^2}+\frac{e^{r(t-T)}f_1(f_1)_{tt}}{2\gamma\sigma^2}+\theta_q\frac{e^{r(t-T)}(f_1)_{tt}}{\gamma\sigma^2}=$$

$$= e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + f_2(t)\theta_q + f_2(t)f_1(t) + f_3(t).$$

Далее применяем преобразование эквивалентности (1.1.30) Y_ϕ и получаем $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + \bar{f}(t)\theta_q$. Подставляем полученное в (1.2.39)

$$\theta_q\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rt}) + M_t - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) -$$
$$-N\bar{f} + (r\bar{f} - (\bar{f})_t)\tau\theta_q - Ne^{rt}\widetilde{F}_{\theta_q} = 0.$$

Это уравнение имеет вид

$$d\widetilde{F}_{\theta_q} + n\theta_q + c = 0,$$

где $d \neq 0$ ввиду $\kappa \neq 0$.

5.1. Если $n = 0$, то получаем противоречие с условием $\widetilde{F}_{\theta_q\theta_q} \neq 0$.

5.2. Если $n \neq 0$, то $\widetilde{F} = \widetilde{f}_1\theta_q^2 + \widetilde{f}_2\theta_q + \widetilde{f}_3$. Следовательно, $F = e^{rt}(\widetilde{f}_1\theta_q^2 + \widetilde{f}_2\theta_q + \widetilde{f}_3) + \bar{f}(t)\theta_q$, где в силу условия $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ имеем $\widetilde{f}_1 \neq 0$. Применим преобразование эквивалентности (1.1.31) Y_ψ, где ψ — решение уравнения

$$A_{tt} = 2\widetilde{f}_1\gamma\sigma^2e^{rT}A + \widetilde{f}_2\gamma\sigma^2e^{rT} + \bar{f}(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}.$$

Тогда $F = e^{rt}\widetilde{f}_1\theta_q^2 + \hat{f}(t)$, а после преобразования эквивалентности Y_ϕ $F = fe^{rt}\theta_q^2$. Преобразование эквивалентности Y_1 (1.1.29) не может убрать константу f, так как сдвиг по t и растяжение по F сокращаются одновременно. Подставляем $F = fe^{rt}\theta_q^2$ в (1.2.39):

$$M_t + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_{tt} + r^2Ke^{rt}) - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) - 2Nf\theta_qe^{rt} = 0.$$

Дифференцирование по θ_q этого уравнения дает равенства

$$\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\theta_q : N_{tt} + r^2Ke^{rt} = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}N, \tag{1.2.51}$$

$$1 : M_t - rM + \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N_t + rKe^{rt}) = 0.$$

Решение последнего уравнения есть

$$M = me^{rt} - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N + Ke^{rt}). \tag{1.2.52}$$

Подставляем уравнение (1.2.51), (1.2.52) в (1.2.40), (1.2.41), тогда

$$\tau = \text{const}, \quad \alpha = r\tau q - 2f\int_{t_0}^{t} e^{rs}Nds + U, \quad \xi = N(t) + Ke^{rt}, \tag{1.2.53}$$

$$\eta = r\tau\theta + S\left(-2f\int_{t_0}^{t} e^{rs}Nds + U\right) + \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}S(N_t + rKe^{rt}) +$$
$$+ N(t)q + me^{rt} - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(N + Ke^{rt}). \tag{1.2.54}$$

Уравнение (1.2.51) имеет много разных решений в зависимости от значений постоянных в нем.

Для однородного уравнения $N_{tt} = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}N$ решения зависят от знака $f\gamma$. Вводим обозначение $k = \sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}$. Если $f\gamma > 0$, то получаем $N_{\text{одн}} = n_1e^{kt} + n_2e^{-kt}$. Если $f\gamma < 0$, то получаем $N_{\text{одн}} = n_1\cos(kt) + n_2\sin(kt)$.

Частные решения неоднородного уравнения $N_{tt} + r^2Ke^{rt} = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}N$ зависят от значения $r^2 - 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$. Если $r^2 = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$, то получаем $N_{\text{част}} = -rKte^{rt}/2$. Если $r^2 \neq 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$, то получаем $N_{\text{част}} = r^2Ke^{rt}/(2f\gamma\sigma^2e^{rT} - r^2)$. Следовательно получается, что если $f\gamma > 0$, $r^2 \neq 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$, то

$$N = n_1e^{kt} + n_2e^{-kt} + \frac{r^2Ke^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT} - r^2},$$

а в случе $f\gamma > 0$, $r^2 = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$ —

$$N = n_1e^{rt} + n_2e^{-rt} - \frac{rKt}{2}e^{rt}.$$

Если $f\gamma < 0$, то

$$N = n_1\cos(kt) + n_2\sin(kt) + \frac{r^2Ke^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT} - r^2},$$

где $k = \sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}$.

Если $f\gamma > 0$, $r^2 \neq 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}$, то подставляем (1.2.3) в (1.2.53), (1.2.54) с заменой $k = \sqrt{2f\gamma\sigma^2 e^{rT}}$, вносом константы интегрирования в U и сокращением полученного и получаем

$$\tau = \text{const}, \quad \xi = n_1 e^{kt} + n_2 e^{-kt} + \frac{k^2 K e^{rt}}{k^2 - r^2},$$
$$\alpha = r\tau q - \frac{2fn_1}{k+r} e^{(k+r)t} - \frac{2fn_2}{r-k} e^{(r-k)t} - \frac{rfKe^{2rt}}{(k^2 - r^2)} + U,$$
$$\eta = r\tau\theta + S\left(\frac{2frn_1}{k(k+r)} e^{(k+r)t} - \frac{2frn_2}{k(r-k)} e^{(r-k)t} + \frac{rfKe^{2rt}}{k^2 - r^2} + U\right) +$$
$$+\left(n_1 e^{kt} + n_2 e^{-kt} + \frac{r^2 K e^{rt}}{k^2 - r^2}\right) q +$$
$$+me^{rt} - \mu \frac{2fe^{rt}}{k^2} \left(n_1 e^{kt} + n_2 e^{-kt} + \frac{k^2 K e^{rt}}{k^2 - r^2}\right),$$

где $k = \sqrt{|2f\gamma\sigma^2 e^{rT}|}$. Поэтому в случае $f\gamma > 0$, $r^2 \neq 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}$ получаем операторы

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta,$$
$$X_4 = e^{kt}\partial_S - \frac{2fe^{(k+r)t}}{k+r}\partial_q + \left(\frac{2rfe^{(k+r)t}}{k(k+r)} S + e^{kt} q - \mu \frac{2fe^{(k+r)t}}{k^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = e^{-kt}\partial_S - \frac{2fe^{(r-k)t}}{r-k}\partial_q + \left(-\frac{2rfe^{(r-k)t}}{k(r-k)} S + e^{-kt} q - \mu \frac{2fe^{(r-k)t}}{k^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6 = \frac{k^2 e^{rt}}{k^2 - r^2}\partial_S - \frac{rfe^{2rt}}{k^2 - r^2}\partial_q + \left(\frac{rfe^{2rt}}{k^2 - r^2} S + \frac{r^2 e^{rt}}{k^2 - r^2} q - \mu \frac{2fe^{2rt}}{k^2 - r^2}\right)\partial_\theta,$$

где $k = \sqrt{|2f\gamma\sigma^2 e^{rT}|}$.

Если $f\gamma > 0$, $r^2 = 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}$, то подставляем (1.2.3) в (1.2.53), (1.2.54) с заменой $\gamma\sigma^2 e^{rT} = \frac{r^2}{2f}$, вносом константы интегрирования в U и сокращением:

$$\tau = const, \quad \xi = n_1 e^{rt} + n_2 e^{-rt} - \frac{rKt}{2} e^{rt} + Ke^{rt},$$
$$\alpha = r\tau q - 2f\left(\frac{n_1}{2r} + \frac{K}{8r}\right) e^{2rt} - 2fn_2 t + \frac{fKt}{2} e^{2rt} + U,$$
$$\eta = r\tau\theta + S\left(f\left(\frac{n_1}{r} - \frac{K}{4r}\right) e^{2rt} - 2fn_2\left(t + \frac{1}{r}\right) + K\left(\frac{f}{r} - \frac{ft}{2}\right) e^{2rt} + U\right) +$$
$$+\left(n_1 e^{rt} + n_2 e^{-rt} - \frac{rKt}{2} e^{rt}\right) q +$$

$$+me^{rt}-\mu\frac{2fe^{rt}}{r^2}(n_1e^{rt}+n_2e^{-rt}-\frac{rKt}{2}e^{rt}+Ke^{rt}).$$

Тогда при $f\gamma>0$, $r^2=2f\gamma\sigma^2e^{rT}$ получаем операторы

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,\quad X_3=\partial_t+rq\partial_q+r\theta\partial_\theta,$$
$$X_4=e^{rt}\partial_S-\frac{f}{r}e^{2rt}\partial_q+\left(S\frac{f}{r}e^{2rt}+e^{rt}q-\mu\frac{2fe^{2rt}}{r^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_5=e^{-rt}\partial_S-2ft\partial_q+\left(-2fS(t+\frac{1}{r})+e^{-rt}q-\mu\frac{2f}{r^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6=e^{rt}(1-\frac{rt}{2})\partial_S+fe^{2rt}(\frac{t}{2}-\frac{1}{4r})\partial_q+$$
$$+\left(Sfe^{2rt}(\frac{3}{4r}-\frac{t}{2})-\frac{rt}{2}e^{rt}q-\mu fe^{2rt}(\frac{2}{r^2}-\frac{t}{r})\right)\partial_\theta,$$

где $|r|=\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}$.

Если $f\gamma<0$, то аналогичным образом получим

$$\tau=\mathrm{const},\quad \xi=n_1\cos(kt)+n_2\sin(kt)+\frac{k^2Ke^{rt}}{k^2+r^2},$$
$$\alpha=r\tau q-\frac{2fe^{rt}}{r^2+k^2}((rn_1-kn_2)\cos(kt)+(kn_1+rn_2)\sin(kt))+\frac{rfKe^{2rt}}{(k^2+r^2)}+U,$$
$$\eta=r\tau\theta+S\left(\frac{2fe^{rt}}{r^2+k^2}\left(\left(-\frac{r^2}{k}n_2-rn_1\right)\cos(kt)+\left(\frac{r^2}{k}n_1-rn_2\right)\sin(kt)\right)+\right.$$
$$\left.-\frac{rfKe^{2rt}}{(k^2+r^2)}+U\right)+\left(n_1\cos(kt)+n_2\sin(kt)-\frac{r^2Ke^{rt}}{k^2+r^2}\right)q+$$
$$+me^{rt}+\mu\frac{2fe^{rt}}{k^2}\left(n_1\cos(kt)+n_2\sin(kt)+\frac{k^2Ke^{rt}}{k^2+r^2}\right).$$

Поэтому при $f\gamma<0$ получаем операторы

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,\quad X_3=\partial_t+rq\partial_q+r\theta\partial_\theta,$$
$$X_4=\cos(kt)\partial_S-\frac{2fe^{rt}}{k^2+r^2}(r\cos(kt)+k\sin(kt))\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{2rfe^{rt}}{k(k^2+r^2)}(-k\cos(kt)+r\sin(kt))+\cos(kt)q+\mu\frac{2fe^{rt}}{k^2}\cos(kt)\right)\partial_\theta,$$
$$X_5=\sin(kt)\partial_S-\frac{2fe^{rt}}{k^2+r^2}(-k\cos(kt)+r\sin(kt))\partial_q+$$

$$+\left(S\frac{2rfe^{rt}}{k(k^2+r^2)}(-r\cos(kt)-k\sin(kt))+\sin(kt)q+\mu\frac{2fe^{rt}}{k^2}\sin(kt)\right)\partial_\theta,$$

$$X_6=\frac{k^2e^{rt}}{k^2+r^2}\partial_S+\frac{rfe^{2rt}}{k^2+r^2}\partial_q+\left(-\frac{rfe^{2rt}}{k^2+r^2}S-\frac{r^2e^{rt}}{k^2+r^2}q+\mu\frac{2fe^{2rt}}{k^2+r^2}\right)\partial_\theta.$$

Таким образом, получена теорема о групповой классификации для случая ненулевой безрисковой процентной ставки r.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\gamma\sigma\neq 0$, $r\neq 0$.*

1\. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при произвольной функции F, $F_{\theta_q\theta_q}\neq 0$, которая не эквивалентна $f(t)\theta_q^2$, $e^{rt}\tilde{F}(\theta_q)+rfe^{2rt}\theta_q$, имеет вид*

$$X_1=\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta.$$

2\. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при функции $F=e^{rt}\tilde{F}(\theta_q)+rfe^{2rt}\theta_q$, $\tilde{F}''\neq 0$, которая не эквивалентна $f(t)\theta_q^2$, имеет вид*

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,$$

$$X_3=\partial_t+\gamma\sigma^2e^{rT}fe^{rt}\partial_S+\left(rq-\frac{rf}{2}e^{2rt}\right)\partial_q+\left(r\theta+\frac{rf}{2}e^{2rt}S-\mu fe^{2rt}\right)\partial_\theta.$$

3. Базис допускаемой алгебры Ли уравнения (1.1.1) *при функции $F=f(t)\theta_q^2$, $f(t)\neq 0$, которая не эквивалентна $fe^{rt}\theta_q^2$, имеет вид*

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,$$

$$X_3=\varphi_1(t)\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\varphi_1(s)ds\partial_q+$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'(t)-2S\int_{t_0}^t f(s)\varphi_1(s)ds+\varphi_1(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1(t)\right)\partial_\theta,$$

$$X_4=\varphi_2(t)\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\varphi_2(s)ds\partial_q+$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2'(t)-2S\int_{t_0}^t f(s)\varphi_2(s)ds+\varphi_2(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2(t)\right)\partial_\theta,$$

$$X_5=(\Psi(t)+e^{rt})\partial_S-2\int_{t_0}^t f(s)\Psi(s)ds\partial_q+$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi'(t)+re^{rt})-2S\int_{t_0}^{t}f(s)\Psi(s)ds+\right.$$
$$\left.+\Psi(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi(t)+e^{rt})\right)\partial_\theta,$$

где $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *— линейно независимые решения однородного уравнения* $N_{tt}=2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N$ *и* $\Psi(t)$ *— частное решение неоднородного уравнения* $N_{tt}=2f(t)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}N-r^2e^{rt}$.

4. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1.1.1) *при* $F=fe^{rt}\theta_q^2$, $f\neq 0$, *имеет вид*

$$X_1=e^{rt}\partial_\theta,\quad X_2=\partial_q+S\partial_\theta,$$
$$X_3=\partial_t+rq\partial_q+r\theta\partial_\theta,$$
$$X_4=\varphi_1(t)\partial_S-2f\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)e^{rs}ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'(t)-2fS\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)e^{rs}ds+\varphi_1(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1(t)\right)\partial_\theta,$$
$$X_5=\varphi_2(t)\partial_S-2f\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)e^{rs}ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2'(t)-2fS\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)e^{rs}ds+\varphi_2(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2(t)\right)\partial_\theta,$$
$$X_6=(\Psi(t)+e^{rt})\partial_S-2f\int_{t_0}^{t}\Psi(s)e^{rs}ds\partial_q+$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi'(t)+re^{rt})-2fS\int_{t_0}^{t}\Psi(s)e^{rs}ds+\Psi(t)q-\mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi(t)+e^{rt})\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2, Ψ *имеют вид*:

$\varphi_1(t)=e^{\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t}$, $\varphi_2(t)=e^{-\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t}$, $\Psi(t)=\frac{r^2e^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT}-r^2}$ *при* $f\gamma>0$, $r^2\neq 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$;

$\varphi_1(t)=e^{rt}$, $\varphi_2(t)=e^{-rt}$, $\Psi(t)=-\frac{rt}{2}e^{rt}$ *при* $f\gamma>0$, $r^2=2f\gamma\sigma^2e^{rT}$;

$\varphi_1(t)=\cos(\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t)$, $\varphi_2(t)=\sin(\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t)$, $\Psi(t)=\frac{r^2e^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT}-r^2}$ *при* $f\gamma<0$.

1.2.4. Уравнение с линейной функцией F

Рассматриваем элемент $F = a(t)\theta_q + b(t)$. Применяем преобразование эквивалентности Y_ϕ и получаем $F = a(t)\theta_q$. Следовательно получаем уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + a(t)\theta_q, \quad (1.2.55)$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$.

Делаем замену

$$\theta = Sq + Se^{rt}\int_{t_1}^{t} ae^{-rs}ds + e^{rt}\frac{\ln z}{\gamma e^{rT}} +$$
$$+e^{rt}\int_{t_2}^{t}\left(-\mu\int_{t_1}^{p} ae^{-rs}ds - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\left(\int_{t_1}^{p} ae^{-rs}ds\right)^2\right)dp \quad (1.2.56)$$

и получаем уравнение

$$z_t = z_S\left(-\mu - \gamma\sigma^2 e^{rT}\int_{t_1}^{t} ae^{-rs}ds\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 z_{SS} + az_q.$$

Введем обозначения

$$I_1(t) = \int_{t_1}^{t} a(s)e^{-rs}ds, \quad (1.2.57)$$

$$I_2(t) = \int_{t_2}^{t}\left(-\mu\int_{t_1}^{p} a(s)e^{-rs}ds - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\left(\int_{t_1}^{p} a(s)e^{-rs}ds\right)^2\right)dp, \quad (1.2.58)$$

$$I_3(t) = \int_{t_3}^{t}\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT}\int_{t_1}^{p} a(s)e^{-rs}ds\right)dp, \quad I_4(t) = \int_{t_4}^{t} a(s)ds. \quad (1.2.59)$$

После замены

$$u = -t, \quad h = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(S - I_3(t)\right), \quad v = q + I_4(t). \quad (1.2.60)$$

получаем уравнение теплопроводности $z_u = z_{hh}$ с неявной дополнительной переменной v. Собирая все замены (1.2.56)–(1.2.60), получаем

$$t = -u, \quad S = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}h + I_3(-u), \quad q = v - I_4(-u),$$
$$\theta = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}h + I_3(-u)\right)(v - I_4(-u)) + e^{-ru}\frac{\ln z}{\gamma e^{rT}} +$$

$$+e^{-ru}I_2(-u)+e^{-ru}I_1(-u)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}h+I_3(-u)\right).$$

Обратная замена

$$u=-t,\quad h=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(S-I_3(t)\right),\quad v=q+I_4(t),$$
$$z=\exp\left(\gamma e^{r(T-t)}(\theta-Sq)-S\gamma e^{rT}I_1(t)-\gamma e^{rT}I_2(t)\right).$$

Следовательно,

$$\partial_u=-\partial_t+a\partial_q-(\mu+\gamma\sigma^2e^{rT}I_1(t))\partial_S+$$
$$+\left(-(\mu+\gamma\sigma^2e^{rT}I_1(t))q-r\theta+rSq-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt}(I_1(t))^2\right)\partial_\theta,$$
$$\partial_h=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\partial_S+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(q+e^{rt}I_1(t))\partial_\theta,$$
$$\partial_v=\partial_q+S\partial_\theta,$$
$$\partial_z=\frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\exp\left(-\gamma e^{r(T-t)}(\theta-Sq)+S\gamma e^{rT}I_1(t)+\gamma e^{rT}I_2(t)\right)\partial_\theta$$

Алгебра Ли уравнения теплопроводности (см. [14], пример 2.41) имеет вид

$$X_1=\partial_h,\quad X_2=\partial_u,\quad X_3=z\partial_z,\quad X_4=h\partial_h+2u\partial_u,$$
$$X_5=2u\partial_h-hz\partial_z,\quad X_K=K(u,h,v)\partial_z,\quad X_6=4u^2\partial_u+4uh\partial_h-(h^2+2u)z\partial_z,$$

где K — решение уравнения $K_u=K_{hh}$. Добавляем к ней оператор $X_7=\partial_v$, который означает автономность уравнения относительно неявной переменной v и домножаем ввиду автономности все операторы на функции, зависящие от v. Заменой переменных получаем генераторы групп Ли линейного уравнения (1.2.55)

$$X_1=c_1\left(\partial_S+(q+e^{rt}I_1(t))\partial_\theta\right),$$
$$X_2=c_2\left(-\partial_t+a(t)\partial_q-(\mu+\gamma\sigma^2e^{rT}I_1(t))\partial_S+\right.$$
$$\left.+\left(-(\mu+\gamma\sigma^2e^{rT}I_1(t))q-r\theta+rSq-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt}I_1(t)^2\right)\partial_\theta\right),$$
$$X_3=c_3e^{rt}\partial_\theta,$$

$$X_4 = c_4 \left(2t\partial_t - 2ta(t)\partial_q + \left(S - I_3(t) + 2t\mu + 2t\gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t)\right)\partial_S + \right.$$
$$+ \left(2t(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))q + 2rt\theta - 2rtSq + t\gamma\sigma^2 e^{rT} e^{rt} I_1(t)^2 + 2tb + \right.$$
$$\left.\left. + \left(S - I_3(t)\right)\left(q + e^{rt} I_1(t)\right)\right)\partial_\theta\right),$$
$$X_5 = c_5(t\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_S + (tq\gamma\sigma^2 e^{rT} + (S - I_3(t) + t\gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))e^{rt})\partial_\theta),$$
$$X_6 = c_6\Bigg(-2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_t + 2a(t)t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_q -$$
$$-\Bigg(2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t)) + 2t\gamma\sigma^2 e^{rT}(S - I_3(t))\Bigg)\partial_S +$$
$$+\Bigg(- 2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))q - 2rt^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\theta + 2rt^2\gamma\sigma^2 e^{rT} Sq -$$
$$-t^2(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{rt} I_1(t)^2 - 2t\gamma\sigma^2 e^{rT}(S - I_3(t))(q + e^{rt} I_1(t)) -$$
$$-(S - I_3(t))^2 e^{rt} + \sigma^2 t e^{rt}\Bigg)\partial_\theta\Bigg),$$
$$X_7 = c_7(\partial_q + S\partial_\theta),$$
$$X_K = K\left(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(S - I_3(t)\right), q + I_4(t)\right) \times$$
$$\times \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}} \exp\left(-\gamma e^{r(T-t)}(\theta - Sq) + S\gamma e^{rT} I_1(t) + \gamma e^{rT} I_2(t)\right)\partial_\theta,$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 зависят от $v = q + I_4(t)$, а функция $K = K(u, h, v)$ удовлетворяет уравнению $K_u = K_{hh}$.

1.3. Инвариантные подмодели и решения

1.3.1. Случай $r \neq 0$ и произвольной функции F

В данном случае уравнение допускает алгебру L_2 с базисом

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

Коммутатор равен нулю: $[X_1, X_2] = 0$. Следовательно, одномерная система подалгебр имеет вид $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2 + aX_1\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Инварианты подалгебры $\langle X_2 + aX_1\rangle$. имеют вид

$$J_1 = t, \quad J_2 = S, \quad J_3 = \theta - Sq - aqe^{rt}. \qquad (1.3.1)$$

Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + aqe^{rt} + e^{rt}\varphi(t,S)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = e^{-rt}F\left(t,S\right). \tag{1.3.2}$$

Подалгебра $\langle X_1\rangle$ не обладает инвариантами зависящими от θ.

1.3.2. Случай $r \neq 0$ и $F = e^{rt}\bar{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$

Рассматриваем специализацию $F = e^{rt}\bar{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$, $\bar{F}_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ при $r \neq 0$. Основная алгебра L_3 имеет базис

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_3 = \partial_t + \gamma\sigma^2 e^{rT} f e^{rt}\partial_S + \left(rq - \frac{rf}{2}e^{2rt}\right)\partial_q + \left(r\theta + \frac{rf}{2}e^{2rt}S - \mu f e^{2rt}\right)\partial_\theta.$$

Коммутаторы имеют вид

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT}X_1,$$

поэтому ненулевые структурные константы есть $C^1_{2,3} = -C^1_{3,2} = -f\gamma\sigma^2 e^{rT}$, $C^2_{2,3} = -C^2_{3,2} = r$. Вычисление внутренних автоморфизмов дает

$$E_2 : \bar{e}_1 = e_1 - f\gamma\sigma^2 e^{rT}e_3 a_2, \quad \bar{e}_2 = e_2 + re_3 a_2,$$
$$E_3 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{1}{r}f\gamma\sigma^2 e^{rT}e_2(1 - e^{-ra_3}), \quad \bar{e}_2 = e_2 e^{-ra_3}.$$

Добавляем к ним при $f \neq 0$ автоморфизм $E_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_2 = -e_2$. Если $f = 0$, то получаем два отражения $E^1_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $E^2_- : \bar{e}_2 = -e_2$.

Для поиска одномерной системы подалгебр предполагаем, что $e_3 \neq 0$. Тогда применением автоморфизма E_2 получаем $e_2 = 0$. Следовательно получаем $(e_1, 0, 1)$.

Если $e_3 = 0$ и $e_2 \neq 0$, то если $f \neq 0$ домножением вектора $(e_1, e_2, 0)$ на константу получаем $e_2 = 1$. Тогда применением E_3 при

$$a_3 = -\frac{1}{r}\ln\left(1 + \frac{re_1}{f\gamma\sigma^2 e^{rT}}\right), \quad 1 + \frac{re_1}{f\gamma\sigma^2 e^{rT}} > 0,$$

получаем $e_1 = 0$. Если

$$1 + \frac{re_1}{f\gamma\sigma^2 e^{rT}} = 0,$$

то получаем $(-\frac{1}{r} f\gamma\sigma^2 e^{rT}, 1, 0)$. В случае

$$1 + \frac{re_1}{f\gamma\sigma^2 e^{rT}} < 0.$$

Тогда применяем E_3 при

$$a_3 = -\frac{1}{r} \ln \left(-1 - \frac{re_1}{f\gamma\sigma^2 e^{rT}} \right).$$

После чего получаем $(-2\frac{1}{r} f\gamma\sigma^2 e^{rT}, 1, 0)$.

Если $f = 0$, то автоморфизм E_3 является растяжением и при помощи доступного при $f = 0$ отражения E_-^2 получаем наборы $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$.

В случае $e_2 = 0$, $e_3 = 0$ получаем $(1, 0, 0)$.

Следовательно если $f \neq 0$, то получаем оптимальную систему одномерных подалгебр $\langle X_1 \rangle$, $\langle X_2 \rangle$, $\langle rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle$, $\langle rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle$, $\langle bX_1 + X_3 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$. А если $f = 0$, то получаем систему $\langle X_1 \rangle$, $\langle X_2 \rangle$, $\langle X_1 + X_2 \rangle$, $\langle bX_1 + X_3 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

Переходим к поиску оптимальной системы двумерных подалгебр в случае $f \neq 0$.

Рассматриваем вектор $X_3 + bX_1$. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_2$. Вычисляем коммутатор $[X_3 + bX_1, \alpha X_1 + \beta X_2] = -\beta(rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1)$. Если $\beta \neq 0$ то получаем подалгебру $\langle X_3 + bX_1, rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle$. Если $\beta = 0$, то получаем подалгебру $\langle X_3, X_1 \rangle$.

Теперь рассматриваем вектор X_2. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[X_2, \alpha X_1 + \beta X_3] = \beta(rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1)$. Если $\beta \neq 0$, то ввиду $f \neq 0$ получаем противоречие. Если $\beta = 0$, то получаем $\langle X_2, X_1 \rangle$.

Рассматриваем вектор $rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1$, $f \neq 0$. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[rX_2 -$

$f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1, \alpha X_1 + \beta X_3] = r\beta(rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1)$. Если $\beta \neq 0$, то уравнение эквивалентно раннее рассмотренному. Если $\beta = 0$, то получаем ранее полученную $\langle X_2, X_1 \rangle$.

Рассматриваем вектор $rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1$, $f \neq 0$. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1, \alpha X_1 + \beta X_3] = r\beta(rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1)$. Если $\beta \neq 0$, то не получается подалгебры. Случай $\beta = 0$ приводит к ранее полученной подалгебре $\langle X_2, X_1 \rangle$.

Рассматриваем вектор X_1. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_2 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[X_1, \alpha X_2 + \beta X_3] = 0$. Если $\beta \neq 0$, то применение автоморфизма E_2 при $f \neq 0$ сводит случай к ранее рассмотренному $\langle X_3, X_1 \rangle$. Если $\beta = 0$, то получаем ранее полученную $\langle X_2, X_1 \rangle$.

Лемма 1.3.1. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $f \neq 0$ являются $\Theta_1 = \{\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \langle X_3 + bX_1 \rangle, \langle rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle, \langle rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle, b \in \mathbb{R}\}$ и $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2 \rangle, \langle X_1, X_3 \rangle, \langle X_3 + bX_1, rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1 \rangle, b \in \mathbb{R}\}$.*

Теперь рассмотрим случай $f = 0$.

Рассматриваем вектор $X_3 + bX_1$. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_2$. Вычисляем коммутатор $[X_3 + bX_1, \alpha X_1 + \beta X_2] = -\beta r X_2$. Если $\beta \neq 0$ то получаем подалгебру $\langle X_3 + bX_1, X_2 \rangle$. Если $\beta = 0$, то получаем подалгебру $\langle X_3, X_1 \rangle$.

Теперь рассматриваем вектор X_2. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[X_2, \alpha X_1 + \beta X_3] = \beta r X_2$. Если $\beta \neq 0$, получившаяся подалгебра эквивалентна уже найденной раннее. Если $\beta = 0$, то получаем $\langle X_2, X_1 \rangle$.

Рассматриваем вектор $X_2 + X_1$. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_1 + \beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[X_2 + X_1, \alpha X_1 + \beta X_3] = \beta r X_2$. Если $\beta \neq 0$, то полученное не является подалгеброй. Если $\beta = 0$, то снова получаем

$\langle X_2, X_1\rangle$.

Рассматриваем вектор X_1. Ищем для него второй базисный вектор в виде $\alpha X_2+\beta X_3$. Вычисляем коммутатор $[X_1, \alpha X_2+\beta X_3]=0$. Если $\beta\neq 0$, то применение автоморфизма E_2 дает $\langle X_3, X_1\rangle$. Если $\beta=0$, то вновь получается $\langle X_2, X_1\rangle$.

Лемма 1.3.2. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $f=0$ являются $\Theta_1=\{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_1+X_2\rangle, \langle bX_1+X_3\rangle, b\in\mathbb{R}\}$ и $\Theta_2=\{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_2, bX_1+X_3\rangle, b\in\mathbb{R}\}$.*

Для подалгебры $\langle X_3+bX_1, rX_2-f\gamma\sigma^2e^{rT}X_1\rangle$ инварианты имеют вид

$$J_1=S-\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt},$$
$$J_2=e^{-rt}\theta-e^{-rt}Sq+\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}q+\mu\frac{f}{r}e^{rt}-fe^{rt}S+\frac{3f^2}{4r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{2rt}-bt.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta=Sq-\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt}q-\mu\frac{f}{r}e^{2rt}+fe^{2rt}S-\frac{3f^2}{4r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{3rt}+bte^{rt}+e^{rt}\varphi(J_1).$$

После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$b+\mu\varphi'+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''+\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{rT}\varphi'^2=\bar{F}\left(S-\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt}\right).$$

При $f=0$ получаем инвариантную подмодель для подалгебры $\langle X_3+bX_1, X_2\rangle$

$$b+\mu\varphi'+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''+\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{rT}\varphi'^2=\bar{F}(S).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_3+bX_1\rangle$, ее инварианты имеют вид

$$J_1=z=S-\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt},\quad J_2=y=qe^{-rt}+\frac{f}{2}e^{rt},$$
$$J_3=e^{-rt}\theta-e^{-rt}Sq+\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}q+\mu\frac{f}{r}e^{rt}-fe^{rt}S+\frac{3f^2}{4r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{2rt}-bt.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta=Sq-\frac{f}{r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{rt}q-\mu\frac{f}{r}e^{2rt}+fe^{2rt}S-\frac{3f^2}{4r}\gamma\sigma^2e^{rT}e^{3rt}+bte^{rt}+e^{rt}\varphi(z,y).$$

После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$b - ry\varphi_y + \mu\varphi_z + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_z^2 = \bar{F}(z + \varphi_y).$$

Для подалгебры $\langle X_2 + bX_1\rangle$ инварианты имеют вид

$$J_1 = t, \quad J_2 = S, \quad J_3 = \theta - Sq - bqe^{rt}.$$

Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + be^{rt}q + e^{rt}\varphi(t, S)$. После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$b - rS\varphi_S + \mu\varphi_t + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{tt} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_t^2 = \bar{F}(t + \varphi_S).$$

Подалгебра $\langle rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT}X_1\rangle$, $f \neq 0$ имеет инварианты

$$J_1 = t, \quad J_2 = S, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}qe^{rt}.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq - \frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}qe^{rt} + e^{rt}\varphi(t, S).$$

После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_S^2 =$$
$$= \bar{F}\left(S - \frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}e^{rt}\right) + rfe^{rt}S - f^2\gamma\sigma^2 e^{rT}e^{2rt}.$$

Для подалгебры $\langle rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}X_1\rangle$, $f \neq 0$ инвариантами являются

$$J_1 = z = t, \quad J_2 = y = S, \quad J_3 = \theta - Sq + 2\frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}qe^{rt},$$

поэтому инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq - 2\frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}qe^{rt} + e^{rt}\varphi(t, S).$$

После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_S^2 = \bar{F}\left(S - 2\frac{f}{r}\gamma\sigma^2 e^{rT}e^{rt}\right) + rfe^{rt}S-$$

$$-2f^2\gamma\sigma^2 e^{rT} e^{2rt}.$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2 \rangle$ с инвариантами

$$J_1 = t, \quad J_2 = S, \quad J_3 = \theta - Sq.$$

Инвариантное решение ищется в вид $\theta = Sq + e^{rt}\varphi(t,S)$. После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_S^2 = \bar{F}\,(S) + rfe^{rt}S.$$

Для подалгебры $\langle X_1 + X_2 \rangle$, $f = 0$, с инвариантами

$$J_1 = z = t, \quad J_2 = y = S, \quad J_3 = \theta - Sq - qe^{rt}$$

инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + qe^{rt} + e^{rt}\varphi(t,S)$. После подстановки в основное уравнение и сокращения получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_S^2 = \bar{F}\left(S + e^{rt}\right).$$

Подалгебры $\langle X_3, X_1 \rangle$, $\langle X_1, X_2 \rangle$, $\langle X_1 \rangle$ не обладают инвариантами, зависящими от θ.

1.3.3. Случай $r = 0$, $\mu \neq 0$ и $F = C/\theta_q^2$

Рассмотрим уравнение

$$\theta_t = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + \frac{C}{\theta_q^2}, \quad C \neq 0,$$

которое допускает алгебру Ли L_5, порождаемую операторами

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = 2t\partial_t + S\partial_S - q\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

Вычисление коммутаторов дает

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = 0, \quad [X_1, X_5] = 0,$$

$$[X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_2, X_5] = -X_2, \quad [X_3, X_4] = 0,$$

$$[X_3, X_5] = X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} X_1, \quad [X_4, X_5] = 2X_4 + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} X_1.$$

Поэтому ненулевые структурные константы алгебры L_5 имеют вид

$$C^1_{2,3} = -C^1_{3,2} = -1, \quad C^2_{2,5} = -C^2_{5,2} = -1, \quad C^3_{3,5} = -C^3_{5,3} = 1, \tag{1.3.1}$$

$$C^1_{3,5} = -C^1_{5,3} = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}, \quad C^1_{4,5} = -C^1_{5,4} = \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}, \quad C^4_{4,5} = -C^4_{5,4} = 2. \tag{1.3.2}$$

Следовательно, генераторами внутренних автоморфизмов являются

$$E_2 = -e_3\partial_{e_1} - e_5\partial_{e_2}, \quad E_3 = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_5\partial_{e_1} - e_2\partial_{e_1} + e_5\partial_{e_3},$$

$$E_4 = \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} e_5\partial_{e_1} + 2e_5\partial_{e_4}, \; E_5 = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_3\partial_{e_1} - \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} e_4\partial_{e_1} + e_2\partial_{e_2} - e_3\partial_{e_3} - 2e_4\partial_{e_4}.$$

Сами автоморфизмы имеют вид

$$E_2 : \bar{e}_1 = e_1 - e_3 a_2, \quad \bar{e}_2 = e_2 - e_5 a_2,$$

$$E_3 : \bar{e_1} = e_1 - e_2 a_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_5 a_3, \quad \bar{e_3} = e_3 + e_5 a_3,$$

$$E_4 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} e_5 a_4, \quad \bar{e}_4 = e_4 + 2e_5 a_4,$$

$$E_5 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} e_3 (1 - e^{-a_5}) + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2} e_4 (e^{-2a_5} - 1),$$

$$\bar{e}_2 = e^{a_5} e_2, \quad \bar{e}_3 = e^{-a_5} e_3, \quad \bar{e}_4 = e^{-2a_5} e_4.$$

Добавляем к ним отражение $E_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e_3} = -e_3$, $\bar{e_4} = -e_4$, которое не меняет таблицу коммутаторов.

Как и прежде, рассматриваем вектор $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, соответствующий оператору $X = \sum\limits_{k=1}^{5} e_k X_k$.

1. Пусть $e_5 \neq 0$. Тогда применением автоморфизмов E_2, E_3, E_4 получаем вектор $(e_1, 0, 0, 0, 1)$. Следовательно получаем подалгебру $\langle X_5 + bX_1 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $e_5 = 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 \neq 0$. Применяем E_- и получаем, что $e_2 e_3 > 0$. Затем с помощью E_5 получим вектор $(e_1, 1, 1, e_4, 0)$. И тогда применением одного из автоморфизмов E_2, E_3 получаем $e_1 = 0$ и вектор $(0, 1, 1, e_4, 0)$. Следовательно, получена подалгебра $\langle X_2 + X_3 + bX_4 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

3. Пусть $e_5 = 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 = 0$. Если $e_4 < 0$, с помощью E_- получим $e_4 > 0$, тогда посредством E_5 получаем вектор $(e_1, 1, 0, 1, 0)$. Используя E_3, получим $e_1 = 0$ и вектор $(0, 1, 0, 1, 0)$. Получаем подалгебру $\langle X_2 + X_4 \rangle$. Если $e_4 = 0$, то будет получена подалгебра $\langle X_2 \rangle$.

4. Пусть $e_5 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 \neq 0$. Если $e_4 \neq 0$, применяем E_5 и получаем вектор $(e_1, 0, 1, \pm 1, 0)$. Тогда применением автоморфизма E_2 получим $e_1 = 0$, $(0, 0, 1, \pm 1, 0)$. Следовательно, получены подалгебры $\langle X_3 + X_4 \rangle$, $\langle X_3 - X_4 \rangle$. Если $e_4 = 0$, то получим $\langle X_3 \rangle$.

5. Пусть $e_5 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $e_4 \neq 0$, тогда подалгебра имеет вид $\langle X_4 + bX_1 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

6. Пусть $e_5 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $e_4 = 0$. В этом случае получаем $\langle X_1 \rangle$.

Вычислим двумерные подалгебры.

Рассматриваем вектор $X_5 + bX_1$, $b \in \mathbb{R}$. Второй вектор ищем в виде $aX_1 + cX_2 + dX_3 + gX_4$. Коммутатор имеет вид

$$[X_5 + bX_1, aX_1 + cX_2 + dX_3 + gX_4] = cX_2 - dX_3 + d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 - 2gX_4 - g\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}X_1.$$

Результат не может зависеть от $X_5 + bX_1$ ввиду отсутствия X_5. Следовательно, получаем $g = -2hg$, $d = -hd$, $c = gc$, $a = dh\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - gh\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}$. Ввиду того, что все найденные непрерывные автоморфизмы меняют вид первого вектора $X_5 + bX_1$, получаем подалгебры вида $\langle X_5, X_1 \rangle$, $\langle X_5 + bX_1, X_2 \rangle$, $\langle X_5 + bX_1, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 \rangle$, $\langle X_5 + bX_1, X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1 \rangle$.

Рассматриваем вектор $X_2 + X_3 + bX_4$, $b \in \mathbb{R}$. Второй вектор ищем в виде $aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5$. Коммутатор имеет вид

$$[X_2 + X_3 + bX_4, aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5] = -cX_1 - gX_2 + gX_3 - g\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 +$$
$$+2bgX_4 + gb\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}X_1 = m(X_2 + X_3 + bX_4) + n(aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5).$$

Отсюда получаем $na = -c - g\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} + gb\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}$, $m = -g$, $m + nc = g$, $mb + nd = 2bg$, $ng = 0$. Если $g \neq 0$, то получаем уравнения $n = 0$, $m = g$, $m = -g$, $m = 2g$. Следовательно, $m = 0$ и тогда получаем $g = 0$. Противоречие. Если $g = 0$, то получаем уравнения $m = 0$, $nc = 0$, $nd = 0$, $na = -c$. Тогда, если $n \neq 0$, то получаем $a = d = c = 0$ и нулевой второй вектор. Противоречие. Следовательно, $m = n = 0$ и $c = 0$. Если $d \neq 0$, то получаем базисный элемент подалгебры в виде $m(X_2 + X_3 + bX_4) + n(aX_1 + dX_4)$. Перегруппировкой слагаемых получим $m(X_2+X_3-abX_1/d)+(n+bm/d)(aX_1+dX_4)$. Применение E_2, которое не влияет на вторую часть aX_1+dX_4 этого вектора, дает $m(X_2+X_3)+(n+bm/d)(aX_1+dX_4)$. Получена подалгебра $\langle X_2+X_3, X_4+aX_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Если $d = 0$, получаем подалгебру $\langle X_2 + X_3 + bX_4, X_1\rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

Рассматриваем вектор X_2+X_4. Второй вектор ищем в виде $aX_1+cX_3+dX_4 + gX_5$. Коммутатор имеет вид

$$[X_2 + X_4, aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5] = -cX_1 - gX_2 + 2gX_4 + g\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}X_1 =$$

$$= m(X_2 + X_4) + n(aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5).$$

Тогда $na = -c + g\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}$, $m = -g$, $nc = 0$, $m + nd = 2g$, $ng = 0$. Если $g \neq 0$, то получаем уравнения $n = 0$, $m = -g$, $m = 2g$. Поэтому $m = 0$ и тогда $g = 0$. Противоречие. Если $g = 0$, то получаем равенства $m = 0$, $nc = 0$, $nd = 0$, $na = -c$. Тогда, если $n \neq 0$, то получаем $a = d = c = 0$ и нулевой второй вектор. Противоречие. Следовательно, $m = n = 0$ и $c = 0$. Если $d \neq 0$, то получаем $n = 0$ и $na = -c$ дает $c = 0$. Рассматриваем векторы подалгебры в виде $m(X_2 + X_4) + n(aX_1 + dX_4)$. Перегруппируем их в виде $m(X_2 - aX_1/d) + (n + m/d)(aX_1 + dX_4)$ и переходим к новому базису. Применение E_3, которое не влияет на вторую часть $aX_1 + dX_4$ этого вектора, дает $mX_2+(n+m/d)(aX_1+dX_4)$. Получаем подалгебру $\langle X_2, X_4+bX_1\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Если $d = 0$, получим подалгебру $\langle X_2 + X_4, X_1\rangle$.

Аналогично рассматривая векторы $X_3 + X_4$ и $X_3 - X_4$ получаем подалгебры $\langle X_3, X_4 + aX_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, $\langle X_3 + X_4, X_1\rangle$, $\langle X_3 - X_4, X_1\rangle$.

Рассматриваем вектор X_2. Второй вектор ищем в виде $aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5$. Коммутатор имеет вид

$$[X_2, aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5] = -cX_1 - gX_2 =$$
$$= mX_2 + n(aX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5).$$

Откуда получаем $na = -c$, $m = -g$, $nc = 0$, $nd = 0$, $ng = 0$. Если $g \neq 0$, то получаем уравнения $n = 0$, $c = 0$, $m = -g$. Тогда считаем $g = 1$. Рассматриваем векторы подалгебры в виде $mX_2 + n(aX_1 + dX_4 + X_5)$. Применение автоморфизма E_3 дает вектор $mX_2 + n(aX_1 - d\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}X_1 + X_5)$. Следовательно, приходим к ранее полученной подалгебре $\langle X_2, X_5 + bX_1\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Если $g = 0$, то получаем уравнения $m = 0$, $nc = 0$, $nd = 0$, $na = -c$. Тогда, если $n \neq 0$, то получаем $a = d = c = 0$ и нулевой второй вектор. Противоречие. Поэтому $m = n = 0$ и $c = 0$. Если $d \neq 0$, то получаем $n = 0$ и $na = -c$ дает $c = 0$. Рассматриваем векторы подалгебры в виде $mX_2 + n(aX_1 + dX_4)$. Следовательно, вновь получаем подалгебру $\langle X_2, X_4 + aX_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Если $d = 0$, получаем подалгебру $\langle X_1, X_2\rangle$.

Аналогично рассматривая вектор X_3, получим подалгебры $\langle X_3, X_5 + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_2 + aX_1\rangle$, $\langle X_3, X_4 + aX_1\rangle$, $\langle X_3, X_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Подалгебра $\langle X_3, X_5 + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_2 + aX_1\rangle$ переходит в ранее полученную $\langle X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1, X_5 + aX_1\rangle$ при помощи автоморфизма E_2.

Рассматриваем вектор $X_4 + bX_1$. Второй вектор ищем в виде $aX_1 + cX_2 + dX_3 + gX_5$. Коммутатор имеет вид

$$[X_4 + bX_1, aX_1 + cX_2 + dX_3 + gX_5] = 2gX_4 + g\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}X_1 =$$
$$= m(X_4 + bX_1) + n(aX_1 + cX_2 + dX_3 + gX_5).$$

Отсюда получаем $na + mb = g\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$, $m = 2g$, $nc = 0$, $nd = 0$, $ng = 0$. Если $g \neq 0$, то получаем уравнения $n = 0$, $mb = g\frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}$, $m = 2g$. Тогда считаем $g = 1$. Рассматриваем векторы подалгебры в виде $m(X_4 + bX_1) + n(aX_1 + cX_2 + dX_3 + X_5)$. Применение автоморфизмов E_3, E_2 дает вектор $m(X_4 + bX_1) + n(aX_1 - dX_1 +$

$d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 + X_5)$. Следовательно, при произвольном b получаем противоречие, а при $b = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$ получаем ранее полученную подалгебру $\langle X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1, X_5 + bX_1\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Если $g = 0$, то получаем уравнения $m = 0$, $nc = 0$, $nd = 0$, $na = 0$. Тогда, если $n \neq 0$, то получаем $a = d = c = 0$ и нулевой второй вектор. Противоречие означает, что $m = n = 0$. Рассматриваем векторы подалгебры в виде $m(X_4 + bX_1) + n(aX_1 + cX_2 + dX_3)$. Так как автоморфизм E_5 в первом векторе только растягивает по X_4 и сдвигает по X_1, то форма первого вектора $X_4 + bX_1$ не меняется. Автоморфизмы E_2, E_3, E_- при этом не меняют формы первого вектора. Следовательно, повторяя вывод для одномерной системы подалгебр, получаем подалгебры $\langle X_4 + aX_1, X_2\rangle$, $\langle X_4 + aX_1, X_3\rangle$, $\langle X_4 + aX_1, X_2 + X_3\rangle$, $\langle X_4, X_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

Рассматриваем вектор X_1. Так как автоморфизмы влияют на первый вектор только сменой знака и не меняют вида вектора, то повторяя вывод для для одномерной системы подалгебр, получаем подалгебры $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$, $\langle X_1, X_4\rangle$, $\langle X_1, X_5\rangle$, $\langle X_1, X_3 - X_4\rangle$, $\langle X_1, X_2 + X_4\rangle$, $\langle X_1, X_3 + X_4\rangle$, $\langle X_1, X_2 + X_3 + bX_4\rangle$, $b \in \mathbb{R}$, которые были получены раннее.

В двумерную систему входят подалгебры $\langle X_5 + aX_1, X_2\rangle$, $\langle X_5 + aX_1, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle$, $\langle X_5 + aX_1, X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1\rangle$, $\langle X_2 + X_3, X_4 + aX_1\rangle$, $\langle X_2 + X_3 + aX_4, X_1\rangle$, $\langle X_2, X_4 + aX_1\rangle$, $\langle X_2 + X_4, X_1\rangle$, $\langle X_3, X_4 + aX_1\rangle$, $\langle X_3 + X_4, X_1\rangle$, $\langle X_3 - X_4, X_1\rangle$, $\langle X_3, X_1\rangle$, $\langle X_4, X_1\rangle$, $\langle X_5, X_1\rangle$, $\langle X_2, X_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 1.3.3. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_5 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle aX_1 + X_4\rangle, \langle aX_1 + X_5\rangle, \langle X_2 + X_4\rangle, \langle X_3 - X_4\rangle, \langle X_3 + X_4\rangle, \langle X_2 + X_3 + aX_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$ *и* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_5\rangle, \langle X_1, X_2 + X_4\rangle, \langle X_1, X_3 + X_4\rangle, \langle X_1, X_3 - X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + X_3 + aX_4\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_4\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_5\rangle, \langle aX_1 + X_5, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle, \langle aX_1 + X_5, X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1\rangle, \langle X_2 + X_3, aX_1 + X_4\rangle, \langle X_3, aX_1 + X_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Подалгебра $\langle X_2, aX_1 + X_5\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = z = \frac{S}{\sqrt{t}}, \quad J_2 = \theta - Sq - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z).$$

Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$az^2 - z^3\varphi' + \sigma^2 z^2\varphi'' + \gamma\sigma^2 z^2\varphi'^2 = 2C.$$

Пусть $\varphi'(z) = \psi(z)$, тогда

$$\psi'(z) = \frac{2C}{\sigma^2 z^2} + \frac{z\psi(z) - a}{\sigma^2} - \gamma\psi(z)^2.$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_5 + aX_1, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = tq^2, \quad J_2 = \theta - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z)$$

и приводит к инвариантной подмодели

$$2az + 4z^2\varphi' + 2\gamma\sigma^2 z^2 = \frac{C}{\varphi'^2}.$$

Подалгебра $\langle X_5 + aX_1, X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = z = Sq, \quad J_2 = \theta - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - a\ln S.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + a\ln S + \varphi(z).$$

Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\frac{\sigma^2}{2}z^2\varphi'' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 z^2\varphi'^2 + a\gamma\sigma^2 z\varphi' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 a^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 a = \frac{C}{(1+\varphi')^2}.$$

Для подалгебры $\langle X_2 + X_3, aX_1 + X_4\rangle$. с инвариантами

$$J_1 = z = S - q, \quad J_2 = \theta - Sq + \frac{q^2}{2} - at.$$

инвариантное решение ищем в виде $\theta = Sq - \frac{q^2}{2} + at + \varphi(z)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$a + \mu\varphi' + \frac{\sigma^2}{2}\varphi'' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi'^2 = \frac{C}{(z-\varphi')^2}.$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2, aX_1 + X_4\rangle$ с инвариантами $J_1 = S$, $J_2 = \theta - Sq - at$. Инвариантное решение ищем в виде $\theta = Sq + at + \varphi(S)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$a + \mu\varphi' + \frac{\sigma^2}{2}\varphi'' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi'^2 = \frac{C}{S^2}.$$

Пусть $\varphi'(z) = \psi(z)$, тогда

$$\psi'(z) = \frac{2C}{\sigma^2 S^2} - 2\frac{\mu\psi(z) + a}{\sigma^2} - \gamma\psi(z)^2.$$

Для подалгебры $\langle X_3, aX_1 + X_4\rangle$ с инвариантами $J_1 = q$, $J_2 = \theta - at$ инвариантное решение будем искать в виде $\theta = at + \varphi(q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$a - \mu q + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 = \frac{C}{(\varphi')^2}.$$

Подалгебра $\langle aX_1 + X_5\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = z = Sq, \quad J_2 = y = tq^2, \quad J_2 = \theta - Sq - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z,y).$$

Подстановка в основное уравнение дает инвариантную подмодель

$$\frac{a}{2y} + \varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = \frac{C}{(z + z\varphi_z + 2y\varphi_y)^2}.$$

Для подалгебры $\langle X_2 + X_3 + aX_4\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = aq - t, \quad J_2 = y = S - q, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{q^2}{2}$$

инвариантное решение ищем в виде $\theta = Sq - \frac{q^2}{2} + \varphi(z,y)$. Получаем инвариантную подмодель

$$\mu\varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 - \varphi_z = \frac{C}{(y + a\varphi_z - \varphi_y)^2}.$$

Рассматриваем полалгебру $\langle X_3 - X_4\rangle$ с инвариантами $J_1 = q$, $J_2 = y = S + t$, $J_3 = \theta$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + qt + \varphi(q,y)$. Подстановка в основное уравнение дает инвариантую подмодель

$$q + \varphi_y + \mu\varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 = \frac{C}{(y + \varphi_q)^2}.$$

Для подалгебры $\langle X_3 + X_4\rangle$ имеем инварианты $J_1 = q$, $J_2 = y = S - t$, $J_3 = \theta$. Инвариантное решение будем искать в виде $\theta = Sq - qt + \varphi(q,y)$ и получим подмодель

$$q - \varphi_y + \mu\varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 = \frac{C}{(y + \varphi_q)^2}.$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2 + X_4\rangle$ с инвариантами $J_1 = S$, $J_2 = y = q - t$, $J_3 = \theta - Sq$. Инвариантное решение ищем в виде $\theta = Sq + \varphi(S,y)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$-\varphi_y + \mu\varphi_S + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = \frac{C}{(S + \varphi_y)^2}.$$

Подалгебра $\langle X_2\rangle$ имеет инварианты $J_1 = S$, $J_2 = t$, $J_3 = \theta - Sq$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + \varphi(S,t)$. Получаем инвариантую подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = \frac{C}{S^2}.$$

Для подалгебры $\langle X_3\rangle$ с инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = q$, $J_3 = \theta$ инвариантное решение будем искать в виде $\theta = \varphi(t,q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\varphi_t = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + \frac{C}{\varphi_q^2}.$$

Рассматриваем подалгебру $\langle aX_1 + X_4\rangle$. с инвариантами $J_1 = S$, $J_2 = q$, $J_3 = \theta - at$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = at + Sq + \varphi(S,q)$. Получаем инвариантную подмодель

$$a + \mu\varphi_S + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = \frac{C}{(S+\varphi_q)^2}.$$

Подалгебры $\langle X_1\rangle$, $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$, $\langle X_1, X_4\rangle$, $\langle X_1, X_5\rangle$, $\langle X_1, X_2 + X_3 + aX_4\rangle$, $\langle X_1, X_3 + X_4\rangle$, $\langle X_1, X_3 - X_4\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, не обладают инвариантами, зависящими от θ, и не приводят к инвариантным подмоделям.

1.3.4. Случай $r = 0$, $\mu \neq 0$ и $F = t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right)$

Рассматриваем уравнение

$$\theta_t = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right), \quad W'' \neq 0.$$

Базис его алгебры L_4 имеет вид

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = 2t\partial_t + S\partial_S - q\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

Вычисляем коммутаторы:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = 0, \quad [X_2, X_3] = -X_1,$$
$$[X_2, X_4] = -X_2, \quad [X_3, X_4] = X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1.$$

Отсюда получаем ненулевые структурные константы

$$C^1_{2,3} = -C^1_{3,2} = -1, \quad C^2_{2,4} = -C^2_{4,2} = -1, \quad C^1_{3,4} = -C^1_{4,3} = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2},$$
$$C^3_{3,4} = -C^3_{4,3} = 1.$$

Поэтому генераторы внутренних автоморфизмов алгебры L_4 имеют вид

$$E_2 = -e_3\partial_{e_1} - e_5\partial_{e_2}, \quad E_3 = -e_2\partial_{e_1} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}e_4\partial_{e_1} + e_4\partial_{e_3},$$

$$E_4 = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_3 \partial_{e_1} + e_2 \partial_{e_2} - e_3 \partial_{e_3}.$$

Решение уравнения Ли для них дает соответствующие непрерывные внутренние автоморфизмы

$$E_2 : \bar{e}_1 = e_1 - e_3 a_2, \quad \bar{e}_2 = e_2 - e_4 a_2, \quad E_3 : \bar{e}_1 = e_1 - e_2 a_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_4 a_3,$$

$$\bar{e}_3 = e_3 + e_4 a_3, \quad E_4 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} e_3 (1 - e^{-a_4}), \quad \bar{e}_2 = e^{a_4} e_2, \quad \bar{e}_3 = e^{-a_4} e_3.$$

Добавляем к ним отражение $E_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_3 = -e_3$, которое не меняет таблицы коммутаторов.

Рассматриваем вектор (e_1, e_2, e_3, e_4), соответствующий оператору $X = \sum\limits_{k=1}^{4} e_k X_k$.

1. Пусть $e_4 \neq 0$. Тогда применением автоморфизмов E_2, E_3 получаем вектор $(e_1, 0, 0, 1)$ и, следовательно, подалгебру $\langle X_4 + aX_3 \rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $e_4 = 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 \neq 0$. Применяем E_- и получаем, что $e_2 e_3 > 0$. Затем с помощью E_4 получим вектор $(e_1, 1, 1, 0)$. Применением одного из автоморфизмов E_2, E_3 получим $e_1 = 0$ и вектор $(0, 1, 1, 0)$. Следовательно, получаем подалгебру $\langle X_2 + X_3 \rangle$.

3. Пусть $e_4 = 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 = 0$. Применяем E_3 и получаем вектор $(0, 1, 0, 0)$ и подалгебру $\langle X_2 \rangle$. При $e_4 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 \neq 0$ аналогичным образом получаем $\langle X_3 \rangle$.

4. Пусть $e_4 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$. В этом случае получаем $\langle X_1 \rangle$.

Вычисляем двумерные подалгебры.

Рассматриваем вектор $aX_1 + X_4$, $a \in \mathbb{R}$, второй базисный вектор двумерной подалгебры ищем в виде $bX_1 + cX_2 + dX_3$. Их коммутатор имеет вид

$$[aX_1 + X_4, bX_1 + cX_2 + dX_3] = cX_2 - dX_3 + d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} X_1 =$$

$$= m(aX_1 + X_4) + n(bX_1 + cX_2 + dX_3).$$

Результат вычисления коммутатора не может зависеть от $aX_1 + X_4$ ввиду отсутствия X_4 в сумме. Поэтому $m = 0$, $nc = c$, $nd = -d$, $bn = d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$.

Следовательно, ввиду того что все найденные непрерывные автоморфизмы меняют вид первого вектора $aX_1 + X_4$, то получаем подалгебры $\langle X_1, X_4\rangle$, $\langle X_2, aX_1 + X_4\rangle$, $\langle aX_1 + X_4, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle$.

Рассматриваем вектор $X_2 + X_3$. Второй базисный вектор ищем в виде $bX_1 + cX_3 + dX_4$. Коммутатор имеет вид

$$[X_2 + X_3, bX_1 + cX_3 + dX_4] = -cX_1 - dX_2 + dX_3 - d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 =$$
$$= m(X_2 + X_3) + n(bX_1 + cX_3 + dX_4).$$

Отсюда получаем $nb = -c - d\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$, $m = -d$, $m + nc = d$, $nd = 0$. Если $d \neq 0$, то $m = d$, $m = -d$, $m = 2d$. Следовательно, $m = 0$ и тогда получаем $d = 0$. Противоречие. Если $d = 0$, то получаем равенства $m = 0$, $nc = 0$, $nd = 0$, $nb = -c$. Тогда если $n \neq 0$, то $b = d = c = 0$ и получаем нулевой второй вектор. Противоречие. Поэтому $m = n = 0$, $c = 0$ и получаем подалгебру $\langle X_1, X_2 + X_3\rangle$.

Рассматриваем вектор X_2. Второй вектор ищем в виде $bX_1 + cX_3 + dX_4$. Их коммутатор есть

$$[X_2, bX_1 + cX_3 + dX_4] = -cX_1 - dX_2 = mX_2 + n(bX_1 + cX_3 + dX_4 + gX_5).$$

Поэтому $nb = -c$, $m = -d$, $nc = 0$, $nd = 0$. Если $d \neq 0$, то получаем равенства $n = 0$, $c = 0$, $m = -d$. В этом случае приходим к раннее полученной подалгебре $\langle X_2, X_4 + aX_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Если $d = 0$, то получаем $m = 0$, $nc = 0$, $nb = -c$. Тогда, если $n \neq 0$, то $b = d = c = 0$ и получаем нулевой второй вектор. Противоречие. Следовательно, $m = n = 0$, $c = 0$ и получаем подалгебру $\langle X_1, X_2\rangle$.

Аналогично рассматривая вектор X_3, получаем подалгебры $\langle X_3, X_4 + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_2 + aX_1\rangle$, $\langle X_3, X_1\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Подалгебра $\langle X_3, X_5 + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_2 + aX_1\rangle$ переходит в ранее полученную $\langle X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1, X_5 + aX_1\rangle$ при помощи автоморфизма E_2.

Рассматриваем вектор X_1. Второй вектор ищем в виде $bX_2 + cX_3 + dX_4$. Так как автоморфизмы влияют на первый вектор только сменой знака и не меняют вида вектора, то повторяя вывод для одномерной системы подалгебр снова получаем подалгебры $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$, $\langle X_1, X_4\rangle$, $\langle X_1, X_2 + X_3\rangle$.

Лемма 1.3.4. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_4 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle\langle X_2{+}X_3\rangle, \langle aX_1{+}X_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + X_3\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_4\rangle, \langle aX_1 + X_4, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2, aX_1 + X_4\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = \frac{S}{\sqrt{t}}, \quad J_2 = \theta - Sq - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z).$$

Подстановка в основное уравнение дает инвариантную подмодель

$$\frac{a}{2} - \frac{z}{2}\varphi' + \frac{\sigma^2}{2}\varphi'' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi'^2 = W(z).$$

Для подалгебры $\langle aX_1 + X_4, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = tq^2, \quad J_2 = \theta - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

инвариантное решение ищем в виде

$$\theta = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z)$$

и получаем инвариантную подмодель

$$\frac{a}{2} + z\varphi' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 z = W(2\sqrt{z}\varphi').$$

Рассматриваем подалгебру $\langle aX_1 + X_4\rangle$. Ее инварианты

$$J_1 = z = Sq, \quad J_2 = y = tq^2, \quad J_2 = \theta - Sq - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t.$$

Подстановка инвариантного решения в виде

$$\theta = Sq + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z, y).$$

в основное уравнение дает подмодель

$$\frac{a}{2y} + \varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = \frac{1}{y}W\left(\frac{z + z\varphi_z + 2y\varphi_y}{\sqrt{y}}\right).$$

Подалгебра $\langle X_2 + X_3 \rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = t, \quad J_2 = y = S - q, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{q^2}{2}.$$

Инвариантное решение в виде $\theta = Sq - \frac{q^2}{2} + \varphi(t, y)$. подставляем в основное уравнение и получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_y + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 = \frac{1}{t}W\left(\frac{y - \varphi_y}{\sqrt{t}}\right).$$

Для подалгебры $\langle X_2 \rangle$ с инвариантами $J_1 = S$, $J_2 = t$, $J_3 = \theta - Sq$ инвариантное решение ищем в виде $\theta = Sq + \varphi(S, t)$. и получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_S + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = \frac{1}{t}W\left(\frac{S}{\sqrt{t}}\right).$$

Подалгебра $\langle X_3 \rangle$ имеет инварианты $J_1 = t$, $J_2 = q$, $J_3 = \theta$. Инвариантное решение ищем в виде $\theta = \varphi(t, q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\varphi_t = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + \frac{1}{t}W\left(\frac{\varphi_q}{\sqrt{t}}\right).$$

Подалгебры $\langle X_1 \rangle$, $\langle X_2 + X_3, X_1 \rangle$, $\langle X_3, X_1 \rangle$, $\langle X_4, X_1 \rangle$, $\langle X_2, X_1 \rangle$, $a \in \mathbb{R}$ не обладают инвариантами, зависящими от θ.

1.3.5. Случай $r = 0$, $F = \tilde{F}(\theta_q)$

Основное уравнение имеет вид

$$\theta_t = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + \tilde{F}(\theta_q).$$

Его допускаемая алгебра L_4 имеет базис

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t.$$

Коммутаторы есть

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = 0,$$
$$[X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] = 0,$$

поэтому ненулевыми структурными константами являются $C^1_{2,3} = -C^1_{3,2} = -1$, а генераторами внутренних автоморфизмов — $E_2 = -e_3\partial_{e_1}$, $E_3 = -e_2\partial_{e_1}$. Они порождают непрерывные внутренние автоморфизмы

$$E_2 : \bar{e}_1 = e_1 - e_3a_2, \quad E_3 : \bar{e_1} = e_1 - e_2a_3.$$

Добавляем к ним отражения $E_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e_3} = -e_3$.

Рассуждая, как в предшествующих разделах, получим оптимальные системы подалгебр.

Лемма 1.3.5. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_4 являются $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle aX_1 + X_4\rangle, \langle X_2 + aX_3 + bX_4\rangle, \langle X_3 + aX_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + aX_3 + bX_4\rangle, \langle X_1, X_3 + aX_4\rangle, \langle X_2 + aX_3, bX_1 + X_4\rangle, \langle X_3, aX_1 + X_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}$.*

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2 + aX_3 + bX_4\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = t - aq, \quad J_2 = y = S - bq, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{bq^2}{2}.$$

Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq - \frac{bq^2}{2} + \varphi(z, y)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\varphi_z + \mu\varphi_y + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 = \widetilde{F}\left(y - \varphi_y\right).$$

Подалгебра $\langle X_3 + aX_4\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = q, \quad J_2 = y = t - aS, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{bq^2}{2}.$$

Инвариантное решение виде $\theta = \varphi(q, y)$ подставляем в основное уравнение и получаем подмодель

$$\varphi_y = \mu q + a\mu\varphi_y - \frac{a^2}{2}\sigma^2\varphi_{yy} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(a\varphi_y + q)^2 + \widetilde{F}\left(\varphi_q\right).$$

Для подалгебры $\langle X_4 + aX_1\rangle$ с инвариантами $J_1 = q$, $J_2 = S$, $J_3 = \theta - at$ инвариантное решение в виде $\theta = at + Sq + \varphi(S, q)$ подставляем в основное уравнение. Получаем подмодель

$$a + \mu\varphi_S + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_S^2 = \widetilde{F}\left(S + \varphi_q\right).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2 + aX_3, X_4 + bX_1\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = z = S - aq, \quad J_2 = \theta - bt - Sq + \frac{aq^2}{2}.$$

Подстановка инвариантного решения в виде $\theta = bt + Sq - \frac{aq^2}{2} + \varphi(z)$ в основное уравнение дает подмодель

$$b + \mu\varphi_z + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = \widetilde{F}\left(z - a\varphi_z\right).$$

Подалгебра $\langle X_3, X_4 + aX_1\rangle$ имеет инварианты $J_1 = q$, $J_2 = \theta - at$. Инвариантное решение ищем в виде $\theta = at + \varphi(q)$, подставляем в основное уравнение и получаем подмодель

$$a = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + \widetilde{F}\left(\varphi_q\right).$$

Подалгебры $\langle X_1\rangle$, $\langle X_2 + aX_3 + aX_4, X_1\rangle$, $\langle X_3 + aX_4, X_1\rangle$, $\langle X_1, X_4\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, не обладают инвариантами, зависящими от θ.

1.3.6. Случай $r = 0$ и произвольной функции F

Рассматриваем основное уравнение

$$\theta_t = \mu q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q), \quad F''_{\theta_q\theta_q} \neq 0.$$

Его допускаемая алгебра L_3 имеет базис

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S.$$

В силу равенств для коммутаторов $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = -X_1$ имеем ненулевые структурные константы $C^1_{2,3} = -C^1_{3,2} = -1$. Следовательно, генераторы $E_2 = -e_3\partial_{e_1}$, $E_3 = -e_2\partial_{e_1}$ порождают непрерывные внутренние автоморфизмы $E_2 : \bar{e_1} = e_1 - e_3 a_2$, $E_3 : \bar{e_1} = e_1 - e_2 a_3$. С их помощью путем стандартных рассуждений получим следующее утверждение.

Лемма 1.3.6. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 являются $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2 + aX_3\rangle, \langle X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$ и $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2 + aX_3\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.*

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2 + aX_3\rangle$ с инвариантами

$$J_1 = t, \quad J_2 = y = S - aq, \quad J_3 = \theta - Sq + \frac{aq^2}{2}.$$

Инвариантное решение в виде $\theta = Sq - \frac{aq^2}{2} + \varphi(t, y)$ подставляем в основное уравнение и получаем подмодель

$$\varphi_t + \mu\varphi_y + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{yy} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_y^2 = F\left(t, y - a\varphi_y\right).$$

Для подалгебры $\langle X_3\rangle$. инварианты имеют вид $J_1 = t$, $J_2 = q$, $J_3 = \theta$, а инвариантное решение ищется в виде $\theta = \varphi(t, q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$\varphi_t = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + F\left(t, \varphi_y\right).$$

Подалгебры $\langle X_1\rangle$, $\langle X_1, X_2 + aX_3\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$, $a \in \mathbb{R}$, не обладают инвариантами, зависящими от θ.

1.3.7. Подмодели для одного класса одномерных подалгебр в случае $F = f(t)\theta_q^2$

В случае свободного элемента $F = f(t)\theta_q^2$ в уравнении большинство допускаемых операторов имеет схожую форму. Абстрагирование от конкретной формы зависящих от t функций, все равно позволяет найти инварианты. При попытке вычисления подмодели образуются дифференциальные уравнения от t, которые можно решить используя критерий инвариантности. Эти наблюдения используются для поиска инвариантных решений для уравнения

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + f(t)\theta_q^2. \quad (1.3.1)$$

Пусть генератор допускаемой группы имеет вид

$$X = a(t)\partial_S + b(t)\partial_q + (d(t)S + g(t)q + p(t))\partial_\theta, \quad (1.3.2)$$

где $a(t) \neq 0$, и его продолжение имеет вид

$$\underset{2}{X} = X + (d_t S + g_t q + p_t - a_t\theta_S - b_t\theta_q)\partial_{\theta_t} + d\partial_{\theta_S} + g\partial_{\theta_q}.$$

Действуем оператором на рассматриваемое уравнение (1.3.1) и после перехода на многообразие M получаем

$$d_t S + g_t q + p_t - a_t\theta_S - b_t\theta_q = rdS + rgq + rp + \mu b - \mu d -$$
$$-rbS - raq - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(d - b) + 2gf(t)\theta_q.$$

Разделение переменных дает

$$\theta_S : a_t = \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d - b), \quad \theta_q : b_t = -2gf(t), \quad S : d_t = rd - rb, \quad (1.3.3)$$
$$q : g_t = rg - ra + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d - b), \quad 1 : p_t = rp + \mu b - \mu d. \quad (1.3.4)$$

Инвариантами оператора (1.3.2) являются

$$J_1 = t, \quad J_2 = z = bS - aq, \quad J_3 = \theta - \hat{C}(t)S - \hat{B}(t)Sq - \hat{A}(t)S^2,$$
$$\hat{C} = \frac{p}{a}, \quad \hat{B} = \frac{g}{a}, \quad \hat{A} = \frac{da - bg}{2a^2}. \quad (1.3.5)$$

Следовательно инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = \hat{C}S + \hat{B}Sq + \hat{A}S^2 + \varphi(t, z).$$

Его подстановка в рассматриваемое уравнение (1.3.1) дает

$$\hat{C}_t S + \hat{B}_t S q + \hat{A}_t S^2 + \varphi_t + \varphi_z(b_t S - a_t q) = r\hat{C}S + r\hat{B}Sq + r\hat{A}S^2 +$$
$$+ r\varphi + \mu q - rSq - \mu\hat{C} - \mu\hat{B}q - 2\mu\hat{A}S - b\mu\varphi_z - \frac{\sigma^2 b^2}{2}\varphi_{zz} - \sigma^2\hat{A} -$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\hat{C} + \hat{B}q - q + 2\hat{A}S + b\varphi_z)^2 + f(t)(\hat{B}S - a\varphi_z)^2.$$

Переносим в правую часть, раскрываем скобки и выносим множители:

$$S^2\left(\hat{A}_t - r\hat{A} + 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\hat{A}^2 - f(t)\hat{B}^2\right) +$$
$$+ Sq\left(\hat{B}_t - r\hat{B} + r + 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\hat{A}(\hat{B}-1)\right) + q^2\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\hat{B}-1)^2 +$$
$$+ S\left(\hat{C}_t - r\hat{C} + 2\mu\hat{A} + 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\hat{A}\hat{C}\right) +$$
$$+ q\left(-\mu + \mu\hat{B} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\hat{B}-1)\hat{C}\right) + \varphi_t +$$
$$+ \varphi_z\left(b_t S - a_t q + b\mu + b\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\hat{C} + \hat{B}q - q + 2\hat{A}S) + 2f(t)\hat{B}aS\right) +$$
$$+ \frac{\sigma^2 b^2}{2}\varphi_{zz} + \varphi_z^2\left(\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}b^2 - f(t)a^2\right) =$$
$$= r\varphi - \mu\hat{C} - \sigma^2\hat{A} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\hat{C}^2. \tag{1.3.6}$$

Выписываем отсюда коэффициенты при S^2, Sq, S и φ и подставляем в них $\hat{C}$, $\hat{B}$, $\hat{A}$ из (1.3.5):

$$S^2: \frac{d_t}{2a} - a_t\frac{d}{2a^2} - \frac{b_t g + b g_t}{2a^2} + a_t\frac{bg}{a^3} - r\frac{da - bg}{2a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{(da-bg)^2}{2a^4} - f(t)\frac{g^2}{a^2},$$
$$Sq: \frac{g_t}{a} - a_t\frac{g}{a^2} - r\frac{g}{a} + r + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{da - bg}{a^2}\left(\frac{g}{a} - 1\right),$$
$$S: \frac{p_t}{a} - a_t\frac{p}{a^2} - r\frac{p}{a} + \mu\frac{da - bg}{a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{dap - bgp}{a^3},$$
$$\varphi_z: b_t S - a_t q + b\mu + b\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(\frac{p}{a} + \frac{g}{a}q - q + \frac{da - bg}{a^2}S\right) + 2gf(t)S.$$

Теперь подставим в полученное равенства (1.3.3), (1.3.4) и получим

$$S^2: \frac{rd - rb}{2a} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)\frac{d}{2a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)\frac{bg}{a^3} - r\frac{da - bg}{2a^2} +$$
$$-\frac{-2g^2 f + rbg - rba + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(db - b^2)}{2a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{(da-bg)^2}{2a^4} - f(t)\frac{g^2}{a^2},$$

$$Sq: \frac{rg - ra + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)}{a} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)\frac{g}{a^2} - r\frac{g}{a} + r+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{da-bg}{a^3}(g-a),$$
$$S: \frac{rp + \mu b - \mu d}{a} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)\frac{p}{a^2} - r\frac{p}{a}+$$
$$+\mu\frac{da-bg}{a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{dap-bgp}{a^3},$$
$$\varphi_z: -\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b)q + b\mu + b\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(\frac{p}{a} + \frac{g}{a}q - q + \frac{da-bg}{a^2}S\right).$$

Перегруппируем относительно общих множителей, тогда

$$S^2: r\left(\frac{d-b}{2a} + \frac{-bg+ba-da+bg}{2a^2}\right) + \frac{g^2 f}{a^2}+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(\frac{-(d-b)d - b(d-b)}{2a^2} + (d-b)\frac{bg}{a^3} + \frac{(da-bg)^2}{2a^4}\right) - f(t)\frac{g^2}{a^2},$$
$$Sq: r\left(\frac{g-a}{a} - \frac{g}{a} + 1\right)+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(\frac{(d-b)}{a} - (d-b)\frac{g}{a^2} + \frac{dag - bg^2 - da^2 + abg}{a^3}\right),$$
$$S: r\left(\frac{p}{a} - \frac{p}{a}\right) + \mu\left(\frac{b-d}{a} + \frac{da-bg}{a^2}\right) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(-(d-b)\frac{p}{a^2} + \frac{dap-bgp}{a^3}\right),$$
$$\varphi_z: b\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right) + b\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(q\left(\frac{g}{a} - 1 - \frac{d}{b} + 1\right) + \frac{da-bg}{a^2}S\right).$$

Сокращение дает

$$S^2: \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{b^2a^2 - 2b^2ga + b^2g^2}{2a^4}, \quad Sq: \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{-ba^2 + 2abg - bg^2}{a^3},$$
$$S: \mu\frac{ba-bg}{a^2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{bap-bgp}{a^3},$$
$$\varphi_z: b\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right) + \frac{da-bg}{a^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}z.$$

Используя перегруппировку и вынос множителей, получим

$$S^2: \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} b^2\frac{(g-a)^2}{2a^4}, \quad Sq: -\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} b\frac{(g-a)^2}{a^3},$$
$$S: \frac{ba-bg}{a^2}\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right), \quad \varphi_z: b\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right) + \frac{da-bg}{a^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}z.$$

Подставляем полученное обратно в (1.3.6)

$$S^2\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}b^2\frac{(g-a)^2}{2a^4}-Sq\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}b\frac{(g-a)^2}{a^3}+q^2\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\hat{B}-1)^2+$$
$$+Sb\frac{a-g}{a^2}\left(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right)+q(\hat{B}-1)\left(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\hat{C}\right)+$$
$$+\varphi_t+\varphi_z\left(b\left(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right)+\frac{da-bg}{a^2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}z\right)+$$
$$+\frac{\sigma^2b^2}{2}\varphi_{zz}+\varphi_z^2\left(\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}b^2-f(t)a^2\right)=$$
$$=r\varphi-\mu\hat{C}-\sigma^2\hat{A}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\hat{C}^2.$$

Подставив в полученное выражения (1.3.5), получаем подмодель

$$\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{(g-a)^2}{2a^4}z^2+\frac{a-g}{a^2}\left(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right)z+$$
$$+\varphi_t+\varphi_z\left(b\left(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right)+\frac{da-bg}{a^2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}z\right)+$$
$$+\frac{\sigma^2b^2}{2}\varphi_{zz}+\varphi_z^2\left(\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}b^2-f(t)a^2\right)=$$
$$=r\varphi-\mu\frac{p}{a}-\sigma^2\frac{da-bg}{2a^2}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{p^2}{a^2}. \qquad (1.3.7)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть уравнение*

$$\theta_t=r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2+f(t)\theta_q^2,$$

допускает одномерную подалгебру, порожденную оператором

$$X=a(t)\partial_S+b(t)\partial_q+(d(t)S+g(t)q+p(t))\partial_\theta,\quad a\neq0.$$

Тогда оно имеет инвариантную относительно этой подалгебры подмодель (1.3.7), *где*

$$z=b(t)S-a(t)q,\quad \theta=\frac{p(t)}{a(t)}S+\frac{g(t)}{a(t)}Sq+\frac{a(t)d(t)-b(t)g(t)}{2a(t)^2}S^2+\varphi(t,z).$$

1.3.8. Инвариантные решения двумерных подалгебр при $F = f(t)\theta_q^2$

Дана допускаемая основным уравнением

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + f(t)\theta_q^2. \quad (1.3.1)$$

двумерная подалгебра L_2 имеющая базис

$$X = a(t)\partial_S + b(t)\partial_q + (d(t)S + g(t)q + p(t))\partial_\theta,$$
$$Y = \alpha(t)\partial_S + \beta\partial_q + (\delta(t)S + \epsilon(t)q + \rho(t))\partial_\theta,$$

где

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

По условию подалгебры коммутатор равен нулю:

$$[X, Y] = a\delta + b\epsilon - \alpha d - \beta g = 0,$$

отсюда

$$\begin{vmatrix} a & d \\ \alpha & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & b \\ \epsilon & \beta \end{vmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Вычислим продолженные операторы

$$\tilde{X} = X + (d_t S + g_t q + p_t - a_t\theta_S - b_t\theta_q)\partial_{\theta_t} + d(t)\partial_{\theta_S} + g(t)\partial_{\theta_q},$$
$$\tilde{Y} = Y + (\delta_t S + \epsilon_t q + \rho_t - \alpha_t\theta_S - \beta_t\theta_q)\partial_{\theta_t} + \delta(t)\partial_{\theta_S} + \epsilon(t)\partial_{\theta_q},$$

тогда из условия инвариантности уравнения следуют равенства

$$d_t S + g_t q + p_t - a_t\theta_S - b_t\theta_q = rdS + rgq + rp + \mu b - rbS - raq - \mu d -$$
$$-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(d - b) + 2gf(t)\theta_q,$$
$$\delta_t S + \epsilon_t q + \rho_t - \alpha_t\theta_S - \beta_t\theta_q = r\delta S + r\epsilon q + r\rho + \mu\beta - rS\beta - rq\alpha - \mu\delta -$$
$$-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\delta - \beta) + 2\epsilon f(t)\theta_q,$$

на многообразии M. Тогда

$$\theta_S : a_t = \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b), \quad \theta_q : b_t = -2gf(t), \quad S : d_t = rd - rb, \tag{1.3.3}$$

$$q : g_t = rg - ra + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b), \quad 1 : p_t = rp + \mu b - \mu d, \tag{1.3.4}$$

$$\theta_S : \alpha_t = \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\delta-\beta), \quad \theta_q : \beta_t = -2\epsilon f(t), \quad S : \delta_t = r\delta - r\beta, \tag{1.3.5}$$

$$q : \epsilon_t = r\epsilon - r\alpha + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\delta-\beta), \quad 1 : \rho_t = r\rho + \mu\beta - \mu\delta. \tag{1.3.6}$$

Переходим к поиску инвариантов. В качестве первого инваринта берем t, а второй инвариант ищем в виде

$$J_2 = -\theta + Sq - \frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + n(t)S^2 + m(t)Sq + w(t)q^2 + k(t)S + l(t)q.$$

Действуем на J_2 операторами X и Y и получаем

$$-dS - gq - p - a\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + aq + bS + 2naS +$$

$$+maq + mbS + 2wbq + ka + lb = 0,$$

$$-\delta S - \epsilon q - \rho - \alpha\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \alpha q + \beta S + 2n\alpha S +$$

$$+m\alpha q + m\beta S + 2w\beta q + k\alpha + l\beta = 0.$$

Отсюда

$$2na + mb + b - d = 0, \; ma + 2wb + a - g = 0, \; ka + lb - p - a\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = 0,$$

$$2n\alpha + m\beta + \beta - \delta = 0, \; m\alpha + 2w\beta + \alpha - \epsilon = 0, \; k\alpha + l\beta - \rho - \alpha\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = 0.$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-b \\ \delta-\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g-a \\ \epsilon-\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + a\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} \\ \rho + \alpha\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем решение

$$n=\frac{\beta d-b\delta}{2\det A}=\frac{\begin{vmatrix} d & b\\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{2\det A},\quad m=\frac{a(\delta-\beta)-\alpha(d-b)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} a & d-b\\ \alpha & \delta-\beta\end{vmatrix}}{\det A},\tag{1.3.7}$$

$$m=\frac{\beta(g-a)-b(\epsilon-\alpha)}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} g-a & b\\ \epsilon-\alpha & \beta\end{vmatrix}}{\det A},\quad w=\frac{a\epsilon-\alpha g}{2\det A}=\frac{\begin{vmatrix} a & g\\ \alpha & \epsilon\end{vmatrix}}{2\det A},\tag{1.3.8}$$

$$k=\frac{\beta p-b\rho}{\det A}+\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}=\frac{\begin{vmatrix} p & b\\ \rho & \beta\end{vmatrix}}{\det A}+\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2},\quad l=\frac{a\rho-\alpha p}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} a & p\\ \alpha & \rho\end{vmatrix}}{\det A}.\tag{1.3.9}$$

Используя (1.3.2), получаем, что

$$\frac{a(\delta-\beta)-\alpha(d-b)}{\det A}=\frac{\beta(g-a)-b(\epsilon-\alpha)}{\det A}.$$

Следовательно, m в обоих содержащих его наборах уравнений совпадает. Теперь рассматриваем инвариант J_2. При помощи него ищем инвариантное решение в виде

$$\theta=Sq-\frac{\mu Se^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+n(t)S^2+m(t)Sq+w(t)q^2+k(t)S+l(t)q+\varphi(t).$$

Подставляем его в (1.3.1):

$$n_tS^2+m_tSq+w_tq^2+k_tS+l_tq+\varphi_t=rnS^2+rmSq+rwq^2+$$
$$+rkS+rlq+r\varphi-\mu\left(-\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+2nS+mq+k\right)-\sigma^2n-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\left(\mu^2\left(\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right)^2-4\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}nS-2\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}mq-2\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}k+\right.$$
$$\left.+4nmSq+4n^2S^2+4nSk+m^2q^2+2mqk+k^2\right)+f(t)(S^2+2mS^2+$$
$$+4wSq+2Sl+m^2S^2+4mwSq+2mlS+4w^2q^2+4wlq+l^2).$$

Следовательно, получаем уравнения

$$S^2: n_t=rn-2n^2\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+f(m+1)^2,\tag{1.3.10}$$

$$Sq: m_t = rm - 2nm\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + f(4w + 4mw), \tag{1.3.11}$$

$$q^2: w_t = rw - \frac{1}{2}m^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4w^2 f, \tag{1.3.12}$$

$$S: k_t = rk - 2nk\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + f(2l + 2ml), \tag{1.3.13}$$

$$q: l_t = rl - mk\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4wlf, \tag{1.3.14}$$

$$1: \varphi_t = r\varphi - \mu k + \mu^2 \frac{e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \sigma^2 n - \frac{1}{2}k^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + fl^2. \tag{1.3.15}$$

Далее вычисляем производную

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\det A} = -\frac{1}{(\det A)^2}\left(\begin{vmatrix} a_t & b \\ \alpha_t & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_t \\ \alpha & \beta_t \end{vmatrix}\right)$$

Используем (1.3.3)–(1.3.6), тогда

$$-\frac{1}{(\det A)^2}\left(\begin{vmatrix} a_t & b \\ \alpha_t & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_t \\ \alpha & \beta_t \end{vmatrix}\right) = -\frac{1}{(\det A)^2}\left(\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\begin{vmatrix} d & b \\ \delta & \beta \end{vmatrix} - 2f\begin{vmatrix} a & g \\ \alpha & \epsilon \end{vmatrix}\right).$$

В силу (1.3.7)–(1.3.9)

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\det A} = \frac{1}{\det A}\left(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw\right) \tag{1.3.16}$$

Тогда используя (1.3.3)–(1.3.9) получаем

$$n_t = \frac{1}{2\det A}\left(\begin{vmatrix} d_t & b \\ \delta_t & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b_t \\ \delta & \beta_t \end{vmatrix}\right) + \frac{\begin{vmatrix} d & b \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{2\det A}\left(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det A}\left(r\begin{vmatrix} d & b \\ \delta & \beta \end{vmatrix} - 2f\begin{vmatrix} d & g \\ \delta & \epsilon \end{vmatrix}\right) + n\left(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw\right) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(-f\begin{vmatrix} d & g \\ \delta & \epsilon \end{vmatrix}\right) + rn - 2n^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fwn.$$

Имеем

$$4wn - \frac{\begin{vmatrix} d & g \\ \delta & \epsilon \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{(\det A)^2}\left(\begin{vmatrix} d & b \\ \delta & \beta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & g \\ \alpha & \epsilon \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & g \\ \delta & \epsilon \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\det A)^2}\left((a\epsilon - \alpha g)(\beta d - \delta b) - (\epsilon d - \delta g)(a\beta - \alpha b)\right) =$$
$$= \frac{\alpha b d\epsilon + a\beta\delta g - ab\delta\epsilon - \alpha\beta d g}{(\det A)^2} = \frac{(a\delta - \alpha d)(\beta g - b\epsilon)}{(\det A)^2}.$$

Используем равенство $\det A = a\beta - \alpha b$ и формулы для m из (1.3.7), (1.3.8) для получения

$$\frac{(a\delta - \alpha d)(\beta g - b\epsilon)}{(\det A)^2} =$$
$$= \frac{(a(\delta - \beta) - \alpha(d - b) + \det A)(\beta(g - a) - b(\epsilon - \alpha) + \det A)}{(\det A)^2} =$$
$$= (m+1)^2.$$

Теперь дифференцируем m в (1.3.7) с использованием (1.3.3)–(1.3.6), (1.3.16). Тогда получаем

$$m_t = \frac{\begin{vmatrix} a_t & d-b \\ \alpha_t & \delta-\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d_t-b_t \\ \alpha & \delta_t-\beta_t \end{vmatrix}}{\det A} + \frac{\begin{vmatrix} a & d-b \\ \alpha & \delta-\beta \end{vmatrix}}{\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} a & rd - rb + 2gf \\ \alpha & r\delta - r\beta + 2\epsilon f \end{vmatrix}}{\det A} + m(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$
$$= rm + 4fw + m(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw).$$

Полученное m_t совпадает с выражением в (1.3.11).

Дифференцируем w из (1.3.8) с использованием (1.3.3)–(1.3.6), (1.3.16). Тогда получаем

$$w_t = \frac{\begin{vmatrix} a_t & g \\ \alpha_t & \epsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & g_t \\ \alpha & \epsilon_t \end{vmatrix}}{2\det A} + \frac{\begin{vmatrix} a & g \\ \alpha & \epsilon \end{vmatrix}}{2\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$
$$= \frac{\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\begin{vmatrix} d-b & g \\ \delta-\beta & \epsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & rg - ra + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(d-b) \\ \alpha & r\epsilon - r\alpha + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\delta-\beta) \end{vmatrix}}{2\det A} +$$

$$+w(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$
$$= \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \frac{\epsilon(d-b) - g(\delta-\beta) + a(\delta-\beta) - \alpha(d-b)}{2\det A} -$$
$$-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \frac{(a\epsilon - \alpha g)(\beta d - b\delta)}{2(\det A)^2} + rw + 4fw^2.$$

С использованием (1.3.2) получим

$$\frac{\epsilon(d-b) - g(\delta-\beta) + a(\delta-\beta) - \alpha(d-b)}{2\det A} - \frac{(a\epsilon - \alpha g)(\beta d - b\delta)}{2(\det A)^2} =$$
$$= \frac{-ab\beta\epsilon - a\beta\delta g + a\beta^2 g + a^2\beta\delta - a^2\beta^2 - a\alpha\beta d}{2(\det A)^2} +$$
$$+\frac{a\alpha b\beta - \alpha bd\epsilon + \alpha b^2\epsilon - \alpha b\beta g - a\alpha b\delta + a\alpha b\beta + \alpha^2 bd - \alpha^2 b^2 + ab\delta\epsilon + \alpha\beta dg}{2(\det A)^2} =$$
$$= \frac{-a\beta(\delta-\beta)(g-a) - \alpha b(d-b)(\epsilon-\alpha)}{2(\det A)^2} +$$
$$+\frac{ab(\delta-\beta)(\epsilon-\alpha) + \alpha\beta(d-b)(g-a)}{2(\det A)^2} =$$
$$= \frac{(-b(\epsilon-\alpha) + \beta(g-a))(-a(\delta-\beta) + \alpha(d-b))}{2(\det A)^2} = -\frac{1}{2}m^2.$$

Следовательно, производная w_t сводится к уравнению (1.3.12).

Дифференцируем k из (1.3.9) с использованием (1.3.3)–(1.3.6), (1.3.16). Тогда получаем

$$k_t = \frac{\begin{vmatrix} \beta_t & \rho \\ b_t & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \rho_t \\ b & p_t \end{vmatrix}}{\det A} + r\mu \frac{e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2} + \frac{\begin{vmatrix} \beta & \rho \\ b & p \end{vmatrix}}{\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$
$$= \frac{-2f\begin{vmatrix} \epsilon & \rho \\ g & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & r\rho + \mu\beta - \mu\delta \\ b & rp + \mu b - \mu d \end{vmatrix}}{\det A} + r\mu\frac{e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2} +$$
$$+\frac{\begin{vmatrix} \beta & \rho \\ b & p \end{vmatrix}}{\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$

$$= \frac{-2f\begin{vmatrix}\epsilon & \rho\\ g & p\end{vmatrix} - \mu\begin{vmatrix}\beta & \delta\\ b & d\end{vmatrix}}{\det A} + rk + \left(k - \mu\frac{e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2}\right)(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$

$$= -2f\frac{\begin{vmatrix}\epsilon & \rho\\ g & p\end{vmatrix}}{\det A} + rk - 2nk\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \frac{\begin{vmatrix}\beta & \rho\\ b & p\end{vmatrix}}{\det A}(4fw).$$

Используя (1.3.2), получим

$$-\frac{\begin{vmatrix}\epsilon & \rho\\ g & p\end{vmatrix}}{\det A} + \frac{\begin{vmatrix}\beta & \rho\\ b & p\end{vmatrix}}{\det A}\frac{\begin{vmatrix}a & g\\ \alpha & \epsilon\end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-(\epsilon p - g\rho)(a\beta - \alpha b) + (\beta p - \rho b)(a\epsilon - \alpha g)}{(\det A)^2} =$$

$$= \frac{-a\beta\epsilon p + \alpha b\epsilon p + a\beta g\rho - \alpha b g\rho + a\beta\epsilon p - \alpha\beta g p - ab\epsilon\rho + \alpha b g\rho}{(\det A)^2} =$$

$$= \frac{\alpha b\epsilon p + a\beta g\rho - \alpha\beta g p - ab\epsilon\rho}{(\det A)^2} = \frac{(a\rho - \alpha p)(\beta g - b\epsilon)}{(\det A)^2} = (m+1)l.$$

Следовательно, обратная подстановка дает уравнение на k_t, которое совпадает с (1.3.13).

Дифференцируем l из (1.3.9) с использованием (1.3.3)–(1.3.6), (1.3.16). Имеем

$$l_t = \frac{\begin{vmatrix}a_t & p\\ \alpha_t & \rho\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & p_t\\ \alpha & \rho_t\end{vmatrix}}{\det A} + \frac{\begin{vmatrix}a & p\\ \alpha & \rho\end{vmatrix}}{\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fw) =$$

$$= \frac{\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\begin{vmatrix}d-b & p\\ \delta-\beta & \rho\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & rp+\mu b-\mu d\\ \alpha & r\rho+\mu\beta-\mu\delta\end{vmatrix}}{\det A} + \frac{\begin{vmatrix}a & p\\ \alpha & \rho\end{vmatrix}}{\det A}(-2n\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + 4fwl =$$

$$= \frac{\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\begin{vmatrix}d-b & p\\ \delta-\beta & \rho\end{vmatrix}}{\det A} - \frac{\begin{vmatrix}a & p\\ \alpha & \rho\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d & b\\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{(\det A)^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + rl - \mu m + 4fwl.$$

Используем (1.3.2):

$$\frac{\begin{vmatrix} d-b & p \\ \delta-\beta & \rho \end{vmatrix}}{\det A} - \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ \alpha & \rho \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d-b & b \\ \delta-\beta & \beta \end{vmatrix}}{(\det A)^2} =$$

$$= \frac{(\rho(d-b) - p(\delta-\beta))(a\beta - \alpha b) - (\beta(d-b) - b(\delta-\beta))(a\rho - \alpha p)}{(\det A)^2} =$$

$$= \frac{a\beta\rho(d-b) - \alpha b\rho(d-b) - a\beta p(\delta-\beta) + \alpha bp(\delta-\beta) - a\beta\rho(d-b)}{(\det A)^2} +$$

$$+ \frac{\alpha\beta p(d-b) + ab\rho(\delta-\beta) - \alpha bp(\delta-\beta)}{(\det A)^2} =$$

$$= \frac{-\alpha b\rho(d-b) - a\beta p(\delta-\beta) + \alpha\beta p(d-b) + ab\rho(\delta-\beta)}{(\det A)^2} =$$

$$= -\frac{(a(\delta-\beta) - \alpha(d-b))(\beta p - b\rho)}{(\det A)^2} = -m\frac{\begin{vmatrix} p & b \\ \rho & \beta \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Обратная подстановка дает равенство

$$l_t = -m\frac{\begin{vmatrix} p & b \\ \rho & \beta \end{vmatrix}}{\det A}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + rl - \mu m + 4fwl = rl - mk\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + 4fwl.$$

Это совпадает с уравнением (1.3.14) на l_t.

Решение уравнения (1.3.15) дает

$$\varphi = \varphi_0 e^{rt} + \mu^2 \frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \mu e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rs}kds - \sigma^2 e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rs}nds -$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\int_{t_0}^{t} e^{-2rs}\Delta^2 ds + e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rs}fl^2 ds.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. *Пусть уравнение*

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + f(t)\theta_q^2 \quad (1.3.17)$$

допускает двумерную подалгебру с базисом

$$X = a(t)\partial_S + b(t)\partial_q + (d(t)S + g(t)q + p(t))\partial_\theta,$$

$$Y = \alpha(t)\partial_S + \beta(t)\partial_q + (\delta(t)S + \epsilon(t)q + \rho(t))\partial_\theta, \quad \det A(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда инвариантное относительно данной подалгебры решение имеет вид

$$\theta = Sq - \frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + n(t)S^2 + m(t)Sq + w(t)q^2 + k(t)S + l(t)q + \varphi(t),$$

где

$$n(t) = \frac{\beta(t)d(t) - b(t)\delta(t)}{2\det A(t)}, \quad m(t) = \frac{a(t)(\delta(t) - \beta(t)) - \alpha(t)(d(t) - b(t))}{\det A(t)} =$$
$$= \frac{\beta(t)(g(t) - a(t)) - b(t)(\epsilon(t) - \alpha(t))}{\det A(t)}, \quad w(t) = \frac{a(t)\epsilon(t) - \alpha(t)g(t)}{2\det A(t)},$$
$$k(t) = \frac{\beta(t)p(t) - b(t)\rho(t)}{\det A(t)} + \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}, \quad l(t) = \frac{a(t)\rho(t) - \alpha(t)p(t)}{\det A(t)},$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{rt} + \mu^2 \frac{t e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \mu e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}k(s)ds - \sigma^2 e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}n(s)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\int_{t_0}^t e^{-2rs}k^2(s)ds + e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}f(s)l^2(s)ds.$$

Замечание 1.3.1. Эта теорема в совокупности с теоремой дают возможность построить 10-параметрическое пространство решений уравнения (1.3.17), где параметры – это коэффициенты при пяти базисных операторах алгебры Ли, определяющие операторы X и Y. При этом, естественно, надо учитывать ограничения — линейная независимость X и Y, условие $\det A(t) \neq 0$.

Пример 1. К примеру, можно взять одну из алгебр Ли при $F(t,\theta_q) = fe^{rt}\theta_q^2$ из пункта 4 теоремы 1.2.2. Тогда при $f\gamma > 0$, $r^2 = 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}$ получаем операторы

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta,$$
$$X_4 = e^{rt}\partial_S - \frac{f}{r}e^{2rt}\partial_q + \left(S\frac{f}{r}e^{2rt} + e^{rt}q - \mu\frac{2fe^{2rt}}{r^2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_5 = e^{-rt}\partial_S - 2ft\partial_q + \left(-2fS(t+\frac{1}{r}) + e^{-rt}q - \mu\frac{2f}{r^2}\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = e^{rt}(1-\frac{rt}{2})\partial_S + fe^{2rt}(\frac{t}{2}-\frac{1}{4r})\partial_q +$$

$$+\left(Sfe^{2rt}(\frac{3}{4r}-\frac{t}{2}) - \frac{rt}{2}e^{rt}q - \mu fe^{2rt}(\frac{2}{r^2}-\frac{t}{r})\right)\partial_\theta,$$

где $|r| = \sqrt{|2f\gamma\sigma^2 e^{rT}|}$. Ее ненулевые коммутаторы, не содержащие X_3, равны

$$[X_2, X_6] = -X_1, \quad [X_4, X_5] = -4\frac{f}{r}X_1, \quad [X_5, X_6] = 3\frac{f}{r}X_1.$$

Следовательно, если $X = aX_4 + bX_5 + KX_6 + UX_2$, $Y = \alpha X_4 + \beta X_5 + \kappa X_6 + \Omega X_2$, тогда вычисление коммутатора дает

$$[X, Y] = \left(-4\frac{f}{r}a\beta + 4\frac{f}{r}\alpha b + 3\frac{f}{r}b\kappa - 3\frac{f}{r}\beta K + K\Omega - U\kappa\right)X_1 = 0.$$

Можно выбрать коэффициенты $a = \beta = 1$, $\alpha = b = \kappa = 0$, $K = -1$, $\Omega = -\frac{f}{r}$. Тогда получаем

$$X = X_4 - X_6 + UX_2 = \frac{rt}{2}e^{rt}\partial_S + \left(U - fe^{2rt}(\frac{t}{2}+\frac{3}{4r})\right)\partial_q +$$

$$+\left(Sfe^{2rt}(\frac{1}{4r}+\frac{t}{2}) + US + (1+\frac{rt}{2})e^{rt}q - \mu fe^{2rt}\frac{t}{r}\right)\partial_\theta,$$

$$Y = X_5 - \frac{f}{r}X_2 = e^{-rt}\partial_S - f(2t+\frac{1}{r})\partial_q + \left(-fS(2t+\frac{3}{r}) + e^{-rt}q - \mu\frac{2f}{r^2}\right)\partial_\theta.$$

Вычисления по теореме дают

$$\det A = fe^{rt}\left(\frac{3}{4r} - rt^2\right) - e^{-rt}U,$$

$$n(t) = \frac{2rfU + f^2e^{2rt}\left(-2r^2t^2 - 4rt - \frac{5}{2}\right)}{2r^2\det A},$$

$$m = \frac{-fe^{rt}(2rt+1)}{r\det A}, \quad w = \frac{-1}{2\det A},$$

$$k = \frac{\mu\frac{2f}{r^2}U + \mu f^2e^{2rt}\left(\frac{2t^2}{r} - \frac{3}{2r^3}\right)}{\det A} + \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = -\mu\frac{2f}{r^2}e^{rt} + \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = 0,$$

$$l = 0, \quad \varphi = Ce^{rt} - \mu^2\frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \sigma^2e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rs}n(s)ds.$$

Далее рассматриваем пункт 3 теоремы 1.2.2. Тогда выбираем получаем

$$X = X_2 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$Y = X_3 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_1(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'(t) - 2S\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_1(s)ds + \varphi_1(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1(t)\right)\partial_\theta.$$

Коммутатор данной подалгебры равен нулю. Тогда

$$n(t) = \frac{\beta(t)-\delta(t)}{-2\alpha} = \frac{e^{r(t-T)}\varphi_1'(t)}{2\gamma\sigma^2\varphi_1(t)}, \quad m(t) = 0, \quad w(t) = 0,$$
$$k(t) = \frac{-\rho(t)}{-\alpha} + \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = 0, \quad l(t) = 0,$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{rt} + \mu^2\frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \sigma^2 e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rs}n(s)ds.$$

И следовательно

$$\theta = Sq - \frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + S^2\frac{e^{r(t-T)}\varphi_1'(t)}{2\gamma\sigma^2\varphi_1(t)} + \varphi_0 e^{rt} + \mu^2\frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \sigma^2\frac{e^{r(t-T)}\ln|\varphi_1(t)|}{2\gamma\sigma^2}.$$

Пример 2. Рассматриваем пункт 4 теоремы 1.2.1. Тогда при $r = 0$ получаем

$$X = X_2 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$Y = X_4 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta.$$

Коммутатор данной подалгебры равен нулю. Тогда

$$n(t) = \frac{\beta(t)-\delta(t)}{-2\alpha} = \frac{\varphi_1'(t)}{2\gamma\sigma^2\varphi_1(t)}, \quad m(t) = 0, \quad w(t) = 0,$$
$$k(t) = \frac{-\rho(t)}{-\alpha} + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} = 0, \quad l(t) = 0,$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \mu^2\frac{t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\ln|\varphi_1(t)|}{2\gamma\sigma^2}.$$

И следовательно

$$\theta = Sq - \frac{\mu S}{\gamma\sigma^2} + S^2\frac{\varphi_1'(t)}{2\gamma\sigma^2\varphi_1(t)} + \varphi_0 + \mu^2\frac{t}{2\gamma\sigma^2} - \sigma^2\frac{\ln|\varphi_1(t)|}{2\gamma\sigma^2}.$$

Пример 3. Далее рассматриваем пункт 7 теоремы 1.2.1. Тогда выбираем случай $F = f\theta_q^2$, $f = \pm 1$, $f\gamma\sigma^2 > 0$ и $\varphi_1 = e^{vt}$, $\varphi_2 = e^{-vt}$, $v = \sqrt{2f\gamma\sigma^2}$. Выбираем базис $X = X_5 + X_3$, $Y = X_6 + \frac{4f}{v}X_2$ и после замены $\gamma\sigma^2 = \frac{v^2}{2f}$ получаем

$$X = X_5 + X_3 = (e^{vt}+1)\partial_S - \frac{2fe^{vt}}{v}\partial_q + \left(e^{vt}q - \frac{\mu 2fe^{vt}}{v^2}\right)\partial_\theta,$$

$$Y = X_6 + \frac{4n}{v}X_2 = e^{-vt}\partial_S + \frac{2f}{v}(e^{-vt}+2)\partial_q + \left(\frac{4f}{v}S + e^{-vt}q - \frac{\mu 2fe^{-vt}}{v^2}\right)\partial_\theta.$$

Тогда получаем

$$\det A = \frac{2f}{v}(4 + 2e^{vt} + e^{-vt}), \quad n = \frac{4f^2e^{vt}}{v^2 \det A},$$

$$m = -\frac{2f(e^{-vt}+2)}{v \det A}, \quad w = \frac{e^{-vt}}{2\det A}, \quad k = -\mu\frac{8f^2(e^{vt}+1)}{v^3\det A} + \mu\frac{2f}{v^2},$$

$$l = -\mu\frac{2fe^{-vt}}{v^2\det A},$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{rt} + \mu^2\frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \mu e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}k(s)ds - \sigma^2 e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}n(s)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\int_{t_0}^t e^{-2rs}k^2(s)ds + e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}f(s)l^2(s)ds.$$

1.4. Операторы рекурсии в случае $F = a(t)\theta_q$

Для работы с операторами рекурсии будут использоваться определения и методы главы 5 монографии [14].

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — независимые переменные и $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — набор из m зависимых переменных. Тогда функция P называется дифференциальной, если зависит от x, u и частных производных от u до некоторого конечного порядка. Так как порядок частных производных заранее не задан, то обозначаем такие функции как $P[u]$. Такие $P[u]$ образуют пространство дифференциальных функций A. Через A^q обозначается пространство наборов q дифференциальных функций.

Обозначаем систему уравнений как $\Delta[u] = 0$, где $\Delta[u] \in A^q$.

Для поиска генераторов обобщенных групп Ли вводят обобщение инфинитезимального оператора

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i [u] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \eta^i [u] \frac{\partial}{\partial u_i},$$

где коэффициенты оператора, в отличие от классических симметрий, также зависят от частных производных до некоторого конечного порядка.

Пусть $Q[u] \in A^m$ — набор из m дифференциальных функций. Оператор

$$X_Q = \sum_{i=1}^{m} Q_i [u] \frac{\partial}{\partial u_i}$$

называется эволюционным, а $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ называется его характеристикой.

Всякий оператор X обладает эволюционным представителем

$$X_Q = \sum_{i=1}^{m} Q_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad Q_i = \eta^i - \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Как показано в [14, предложение 5.5], система Δ допускает оператор X тогда и только тогда, когда рассматриваемая система Δ допускает оператор X_Q.

Для X_Q формула продолжения оператора Q_i по производной $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ принимает вид $Q_i^{x_j} = D_{x_j} Q_i$. Для более общего случая, если $\nu = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, имеем $D^\nu = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, а формула продолжения оператора Q_i по производной $D^\nu u_i$ принимает вид $Q_i^\nu = D^\nu Q_i$.

Пусть Δ — система дифференциальных уравнений. Оператор рекурсии для системы Δ это линейный оператор $R : A^q \to A^q$ в пространстве наборов q дифференциальных функций, обладающий тем свойством, что если система Δ допускает X_Q, то Δ также допускает $X_{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{Q} = RQ$.

Пусть $P[u] \in A^q$. Производная Фреше от P — это дифференциальный оператор $D_P : A^m \to A^q$, который при любом $Q \in A^m$ удовлетворяет

$$D_P(Q) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} P[u + \varepsilon Q[u]].$$

Теорема 1.4.1. [14, теорема 5.30]. *Пусть* $\Delta[u] \in A^q$. *Если* $R : A^m \to A^m$ *— линейный оператор, такой, что* $D_\Delta R = \widetilde{R} D_\Delta$ *для всех решений системы* $\Delta[u] = 0$, *где* $\widetilde{R} : A^m \to A^m$ *— линейный дифференциальный оператор, то* R *— оператор рекурсии для этой системы.*

Рассматриваем уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + a(t)\theta_q, \quad (1.4.18)$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$. Определим $J[f(t)] = \int_{t_0}^t f(s)ds$ с фиксированным t_0 и $J^2[f(t)] = J[J[f(t)]]$.

Теорема 1.4.2. *Операторы*

$$R_1 = D_q + \gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S),$$
$$R_2 = \sigma^2 D_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q) + \mu - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}],$$
$$R_3 = tR_1 - S + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}].$$

являются операторами рекурсии уравнения (1.4.18).

Доказательство. Производная Фреше уравнения (1.4.18) есть

$$D_P = D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S \qquad (1.4.19)$$

Имеем

$$D_P R_1 Q = (D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times(D_q + \gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S))Q =$$
$$= D_q(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)Q -$$
$$-D_q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S Q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S D_q Q - r\gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S)Q +$$
$$+\gamma e^{r(T-t)}(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)(\theta_q - S)Q =$$
$$= D_q D_P Q - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_{Sq} - 1)D_S Q - r\gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S)Q +$$
$$+\gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S)(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)Q +$$

$$+\gamma e^{r(T-t)}(\theta_{qt} - a\theta_{qq} + \mu(\theta_{Sq} - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SSq} + \sigma^2(\theta_{Sq} - 1)D_S +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\theta_{Sq} - 1))Q. \qquad (1.4.20)$$

Вычисляем полную производную по q (1.4.18)

$$\theta_{qt} = r\theta_q + \mu - rS - \mu\theta_{Sq} - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SSq} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\theta_{Sq} - 1) + a\theta_{qq}.$$

Ее подстановка в выражение на оператор рекурсии (1.4.20) дает

$$(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times(D_q + \gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S))Q = D_q D_P Q + \gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S)D_P Q -$$
$$-r\gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S)Q + \gamma e^{r(T-t)}(r\theta_q - rS)Q = R_1 D_P Q.$$

Следовательно, $D_P R_1 Q = R_1 D_P Q$ и R_1 — оператор рекурсии.

Теперь рассматриваем оператор R_2:

$$D_P R_2 Q = (D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times(\sigma^2 D_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q) + \mu - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}])Q =$$
$$= \mu D_P Q + (D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\sigma^2 D_S Q +$$
$$+(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q -$$
$$-\gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}]D_P Q =$$
$$= \mu D_P Q + \sigma^2 D_S(D_P - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)Q + \gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S^2 Q +$$
$$+(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times(\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q) - \gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}]D_P Q =$$
$$= (\mu + \sigma^2 D_S - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}])D_P Q - \gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}\theta_{SS}D_S Q - \gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q +$$
$$+(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q =$$
$$= (\mu + \sigma^2 D_S - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}])D_P Q - \gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}\theta_{SS}D_S Q - \gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q +$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)(\theta_S - q)Q-$$
$$-r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q =$$
$$= (\mu + \sigma^2 D_S - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}])D_P Q - \gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}\theta_{SS}D_S Q - \gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_{St} + (\theta_S - q)D_t)Q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-a(\theta_{Sq} - 1) - a(\theta_S - q)D_q)Q-$$
$$-r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\mu\theta_{SS} + \mu(\theta_S - q)D_S)Q+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{1}{2}\sigma^2(\theta_{SSS} + 2\theta_{SS}D_S + (\theta_S - q)D_S^2)Q+$$
$$+(\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})^2(\theta_S - q)(\theta_{SS} + (\theta_S - q)D_S)Q - r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)Q =$$
$$= (\mu + \sigma^2 D_S - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}] + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))D_P Q-$$
$$-\gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}\theta_{SS}D_S Q - \gamma\sigma^2 a e^{r(T-t)}Q+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_{St} - r(\theta_S - q) - a(\theta_{Sq} - 1) + \mu\theta_{SS} + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SSS}+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\theta_{SS})Q + \gamma\sigma^4 e^{r(T-t)}\theta_{SS}D_S Q =$$
$$= R_2 D_P Q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_{St} - r(\theta_S - q) - a\theta_{Sq} + \mu\theta_{SS} + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SSS}+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\theta_{SS})Q. \qquad (1.4.21)$$

Полная производная (1.4.18) по S равна

$$\theta_{St} = r\theta_S - rq - \mu\theta_{SS} - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SSS} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\theta_{SS} + a\theta_{Sq}.$$

Подстановка в (1.4.21) дает $D_P R_2 Q = R_2 D_P Q$.

Наконец,

$$D_P R_3 Q = (D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)\times$$
$$\times(tR_2 - S + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}])Q =$$
$$= tD_P R_2 Q + R_2 Q + \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}]Q + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}]D_P Q-$$
$$-(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S)(SQ) =$$
$$= (tR_2 + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}])D_P Q + \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}]Q+$$
$$+(\sigma^2 D_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q) + \mu - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}])Q-$$

$$-S(D_t - aD_q - r)Q-$$
$$-(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(1 + SD_S)Q - \frac{1}{2}\sigma^2(2D_S + SD_S^2)Q =$$
$$= (tR_2 + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}])D_P Q-$$
$$-S(D_t - aD_q - r + \mu D_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)D_S + \frac{1}{2}\sigma^2 D_S^2)Q =$$
$$= (tR_2 + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}] - S)D_P Q = R_3 D_P Q.$$

Таким образом, R_1, R_2, R_3 — операторы рекурсии. $\square$

Следствие 1.4.1. *Уравнение* (1.4.18) *имеет операторы рекурсии, представляющие собой линейные комбинации операторов вида* $R_1^k R_2^l R_3^m$, $k, l, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что $R_1R_2 = R_2R_1$, $R_1R_3 = R_3R_1$, $R_2R_3 = R_3R_2 - \sigma^2$, поэтому произвольная композиция нескольких операторов вида R_1, R_2, R_3 может быть представлена как линейная комбинация операторов вида $R_1^k R_2^l R_3^m$, $k, l, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. $\square$

2. Уравнение Геана — Пу с производной Римана — Лиувилля по времени

Как уже было сказано во введении, в последние десятилетия обнаружено наличие у финансовых рынков фрактальных характеристик [56, 59] и долговременной памяти [38, 55]. Получило распространение использование дробных производных при моделировании процессов на финансовых рынках, так как нелокальные свойства таких производных позволяют получать математические модели с указанными свойствами. Можно выделить дробные пространственные [32,49], дробные пространственно-временные модели [50,54]) и дробные по времени (см., например [35,67]) модели типа Блэка — Шоулза. В последующих двух главах будут рассмотрены дробные по времени уравнения Геана — Пу.

2.1. Предварительные сведения

Напомним определения гамма-функции и функции Миттаг-Леффлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}$$

Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$ {}_cJ_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_c^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds; \quad {}_cJ_t^0 f(t) = f(t).$$

Операторы дробного интегрирования образуют полугруппу:

$$ {}_cJ_t^\alpha\, {}_cJ_t^\beta f(t) = {}_cJ_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$ {}_cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_c^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds = D_t^n\, {}_cJ_t^{n-\alpha} f(t).$$

Она имеет свойства

$$D_t {}_cD_t^\alpha f(t) = {}_cD_t^{\alpha+1} f(t), \quad {}_cD_t^\alpha {}_cJ_t^\alpha f(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$$

Для дальнейшей работы выделяем производные Римана — Лиувилля следующих функций:

$${}_cD_t^\alpha 1 = \frac{(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad {}_cD_t^\alpha (t-c)^{\nu-1} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\alpha)}(t-c)^{\nu-\alpha-1}, \quad \nu > 0.$$

Справедливо равенство

$${}_cD_t^\alpha (t-c)^{\alpha-k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},\, k < \alpha + 1.$$

Неоднородное линейное уравнение с производной Римана — Лиувилля

$${}_cD_t^\alpha y(t) - \lambda y = f(t),$$

при $\lambda \in \mathbb{C}$, $n - 1 < \alpha \le n$ имеет общее решение (см. [51, теорема 4.1])

$$y = \sum_{j=1}^{n} b_j (t-c)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(\lambda(t-c)^\alpha) +$$
$$+ \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds.$$

Производная Римана — Лиувилля удовлетворяет обобщенному правилу Лейбница [17, теорема 15.1]:

$${}_cD_t^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_cD_t^{\alpha-n} f(t) D_t^n g(t),$$

где ${}_cD_t^{-\zeta} = {}_cJ_t^\zeta$ и биномиальных коэффициенты имеют вид

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)}.$$

Из формулы связи производной Римана — Лиувилля с производной Герасимова — Капуто (см. [51, лемма 2.2]) вытекает равенство

$${}_cD_t^\alpha \theta_t = {}_cD_t^{\alpha+1} \theta - \frac{(t-c)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \theta(c, S, q). \tag{2.1.1}$$

В дальнейшем рассматривается оператор вида

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F.$$

Формула продолжения для коэффициента при дробной производной Римана — Лиувилля получена в [4–6, 13, 44], она имеет вид

$$\eta^\alpha = {}_cD_t^\alpha(\eta - \tau\theta_t - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \tau {}_cD_t^{\alpha+1}\theta + \xi {}_cD_t^\alpha(\theta_S) + \beta {}_cD_t^\alpha(\theta_q).$$

После замены $\tau\theta_t = (\tau\theta)_t - \tau_t\theta$ и использования (2.1.1) получаем при условии $\tau|_{t=c} = 0$ равенство

$$\eta^\alpha = {}_cD_t^\alpha(\eta - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \xi {}_cD_t^\alpha(\theta_S) + \beta {}_cD_t^\alpha(\theta_q) +$$
$$+ {}_cD_t^\alpha(\theta D_t\tau) - {}_cD_t^{\alpha+1}(\tau\theta) + \tau {}_cD_t^{\alpha+1}\theta$$

После применения обобщенной формулы Лейбница получаем

$$\eta^\alpha = {}_cD_t^\alpha\eta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{n-\alpha}{n+1} {}_cD_t^{\alpha-n}\theta D_t^{n+1}\tau.$$

Для сохранения нижнего предела интегрирования накладывается условие $\tau(c, S, q) = 0$. Ввиду необходимости сохранения формы дробной производной операторы ищутся в линейно-автономном виде

$$\xi_\theta = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \eta = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q).$$

Замечание 2.1.1. В работе [70] доказано, что при $0 < \alpha < 1$ все допускаемые операторы эволюционного уравнения с дробной производной имеют линейно-автономный вид.

Для линейно-автономных операторов формулы продолжения имеют вид

$$\eta^t = p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t,$$

$$\eta^S = p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S,$$

$$\eta^q = p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q,$$

$$\eta^{SS} = p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} -$$

$$-2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S),$$

$$\eta^\alpha = {}_cD_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta.$$

2.2. Группы преобразований эквивалентности

Рассматриваем уравнение

$${}_cD_t^\alpha\theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \tag{2.2.1}$$

Считаем $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и $\theta = \theta(t, S, q)$. Для поиска групп преобразований эквивалентности рассматриваем F и все её производные как дополнительные переменные. Оператор ищется в виде

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F$$

с условием $\tau\theta|_{t=c} = 0$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ и ζ зависит от t, S, q, θ, θ_t, θ_S, θ_q, ${}_cD_t^\alpha\theta$. Для учета зависимости произвольного элемента F от θ_q и t вводим дополнительные условия

$$F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{{}_cD_t^\alpha\theta} = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0. \tag{2.2.2}$$

Уравнения (2.2.1), (2.2.2) задают многообразие M в пространстве продолженных переменных. Действуем продолженным оператором

$$\tilde{X} = X + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^\alpha\partial_{{}_cD_t^\alpha\theta} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} +$$

$$+\zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^t\partial_{F_\theta} + \zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{{}_cD_t^\alpha\theta}\partial_{F_{{}_cD_t^\alpha\theta}}.$$

на уравнение (2.2.1) и после сужения результата на многообразие M получаем

$$\eta^{\alpha}-r\eta-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu\eta^{S}+\frac{\sigma^{2}}{2}\eta^{SS}-$$
$$-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^{2}e^{e(T-t)}(\theta_{S}-q)^{2}+\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)(\eta_{S}-\beta)-\zeta|_{M}=0. \qquad (2.2.3)$$

Аналогично действуем продолженным оператором X на (2.2.2), тогда

$$\zeta^{S}|_{M}=0,\quad \zeta^{q}|_{M}=0,\quad \zeta^{\theta}|_{M}=0, \qquad (2.2.4)$$
$$\zeta^{\theta_{t}}|_{M}=0,\quad \zeta^{\theta_{S}}|_{M}=0,\quad \zeta^{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}|_{M}=0. \qquad (2.2.5)$$

Коэффициенты продолжения для оператора ζ имеют вид

$$\zeta^{S}=\tilde{D}_{S}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{S}\tau-F_{S}\tilde{D}_{S}\xi-F_{q}\tilde{D}_{S}\beta-F_{\theta}\tilde{D}_{S}\eta-$$
$$-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{S}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{S}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{S}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{S}\eta^{q},$$
$$\zeta^{q}=\tilde{D}_{q}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{q}\tau-F_{S}\tilde{D}_{q}\xi-F_{q}\tilde{D}_{q}\beta-F_{\theta}\tilde{D}_{q}\eta-$$
$$-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{q}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{q}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{q}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{q}\eta^{q},$$
$$\zeta^{\theta}=\tilde{D}_{\theta}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{\theta}\tau-F_{S}\tilde{D}_{\theta}\xi-F_{q}\tilde{D}_{\theta}\beta-F_{\theta}\tilde{D}_{\theta}\eta-$$
$$-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{\theta}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{\theta}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{\theta}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{\theta}\eta^{q},$$
$$\zeta^{\theta_{t}}=\tilde{D}_{\theta_{t}}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{\theta_{t}}\tau-F_{S}\tilde{D}_{\theta_{t}}\xi-F_{q}\tilde{D}_{\theta_{t}}\beta-F_{\theta}\tilde{D}_{\theta_{t}}\eta-$$
$$-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{\theta_{t}}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{\theta_{t}}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{\theta_{t}}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{\theta_{t}}\eta^{q},$$
$$\zeta^{\theta_{S}}=\tilde{D}_{\theta_{S}}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{\theta_{S}}\tau-F_{S}\tilde{D}_{\theta_{S}}\xi-F_{q}\tilde{D}_{\theta_{S}}\beta-F_{\theta}\tilde{D}_{\theta_{S}}\eta-$$
$$-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{\theta_{S}}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{\theta_{S}}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{\theta_{S}}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{\theta_{S}}\eta^{q},$$
$$\zeta^{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}=\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\zeta-F_{t}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tau-F_{S}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\xi-F_{q}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\beta-$$
$$-F_{\theta}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\eta-F_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\eta^{\alpha}-F_{\theta_{t}}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\eta^{t}-F_{\theta_{S}}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\eta^{S}-F_{\theta_{q}}\tilde{D}_{{}_{c}D_{t}^{\alpha}\theta}\eta^{q},$$

где операторы полной производной имеют вид

$$D_{t}=\frac{\partial}{\partial t}+\theta_{t}\frac{\partial}{\partial\theta}+\ldots,\quad D_{S}=\frac{\partial}{\partial S}+\theta_{S}\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta_{SS}\frac{\partial}{\partial\theta_{S}}+\ldots,$$
$$D_{q}=\frac{\partial}{\partial q}+\theta_{q}\frac{\partial}{\partial\theta}+\ldots,\ \tilde{D}_{t}=\frac{\partial}{\partial t}+F_{t}\frac{\partial}{\partial F}+\ldots,\ \tilde{D}_{S}=\frac{\partial}{\partial S}+F_{S}\frac{\partial}{\partial F}+\ldots,$$
$$\tilde{D}_{q}=\frac{\partial}{\partial q}+F_{q}\frac{\partial}{\partial F}+\ldots,\ \tilde{D}_{\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}+F_{\theta}\frac{\partial}{\partial F}+\ldots,$$

$$\tilde{D}_{\theta_t} = \frac{\partial}{\partial \theta_t} + F_{\theta_t}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \frac{\partial}{\partial \theta_S} + F_{\theta_S}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$
$$\tilde{D}_{{}_cD_t^\alpha\theta} = \frac{\partial}{\partial {}_cD_t^\alpha\theta} + F_{{}_cD_t^\alpha\theta}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \frac{\partial}{\partial \theta_S} + F_{\theta_S}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots.$$

Расписав (2.2.4), (2.2.5) и подставив их в (2.2.2), получаем

$$\zeta^S|_M = \zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_M = 0, \quad \zeta^q|_M = \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_M = 0, \quad (2.2.6)$$
$$\zeta^\theta|_M = \zeta_\theta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_{\theta_q}\eta^q_\theta|_M = 0, \quad \zeta^{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_M = 0, \quad (2.2.7)$$
$$\zeta^{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_M = 0, \quad \zeta^{{}_cD_t^\alpha\theta}|_M = \zeta_{{}_cD_t^\alpha\theta}|_M = 0. \quad (2.2.8)$$

Раскрывая η^q в (2.2.6)–(2.2.8) и используя (2.2.1) для перехода на многообразие по ${}_cD_t^\alpha\theta$, имеем

$$\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(p_{Sq}\theta + g_{Sq} + p_S\theta_q - \theta_t\tau_{Sq} - \theta_S\xi_{Sq} - \theta_q\beta_{Sq}) = 0,$$
$$\zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(p_{qq}\theta + g_{qq} + p_q\theta_q - \theta_t\tau_{qq} - \theta_S\xi_{qq} - \theta_q\beta_{qq}) = 0, \quad \zeta_\theta - F_{\theta_q}p_q = 0,$$
$$\zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}\tau_q = 0, \quad \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \quad \zeta_{{}_cD_t^\alpha\theta} = 0.$$

Разделение переменных дает равенства

$$\zeta_{{}_cD_t^\alpha\theta} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \tau_S = 0, \quad \tau_q = 0, \quad (2.2.9)$$
$$p_q = 0, \quad p_S - \beta_{Sq} = 0, \quad \beta_{qq} = 0, \quad \xi_q = 0, \quad g_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0. \quad (2.2.10)$$

Теперь подставляем полученные формулы продолжения и равенства (2.2.9), (2.2.10) в (2.2.3):

$$ {}_cD_t^\alpha g + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta - rp\theta - rg-$$
$$-(\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S)+$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S))-$$
$$-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2+$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta|_M = 0.$$

Переходя здесь на многообразие M, подставляем ${}_cD_t^\alpha\theta$ из (2.2.1), тогда

$$(p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right) +$$

$$+{}_cD_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_cD_t^{\alpha-n}\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S D_t^n\xi - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q D_t^n\beta - rp\theta - rg-$$

$$-(\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S)+$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S))-$$

$$-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2+$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta = 0. \qquad (2.2.11)$$

Дифференцирование этого уравнения по θ_{Sq} дает $\beta_S = 0$. Тогда равенство $p_S - \beta_{Sq} = 0$ из (2.2.10) влечет $p_S = 0$. Разделением переменных уравнения (2.2.11) получаем

$${}_cD_t^\alpha\theta : D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \qquad (2.2.12)$$

$${}_cD_t^\alpha\theta_S : D_t^n\xi = 0, \quad {}_cD_t^\alpha\theta_q : D_t^n\beta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2.2.13)$$

$$\theta_{SS} : \frac{\sigma^2}{2}(-(p - \alpha\tau_t) + p - 2\xi_S) = 0, \qquad (2.2.14)$$

$$\theta_{Sq} : \beta_S = 0, \quad p_S = 0, \qquad (2.2.15)$$

$$\theta_S^2 : -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \alpha\tau_t) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \xi_S) = 0, \qquad (2.2.16)$$

$$\theta_S : (p - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu(p - \xi_S)-$$

$$-\frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS} + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta - q(p - \xi_S)) = 0, \qquad (2.2.17)$$

$$1 : (p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) +$$

$$+{}_cD_t^\alpha g - rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S+$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}g_{SS}-\frac{r\tau q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}-q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(g_S-\beta)-\zeta=0. \qquad (2.2.18)$$

Из (2.2.13) получаем, что $\xi_t = 0$, $\beta_t = 0$. С учетом этого, того что $\alpha \neq 0$ и $\tau_S = 0$ из (2.2.9) получаем из выражения $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ (2.2.14) дифференцированием по t и S $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$. Следовательно, подставляя $\tau_{tt} = 0$ в (2.2.12) получаем $p_t = 0$ при $n = 1$.

Таким образом, для p получаем уравнения $p_q = 0$ из (2.2.10), $p_S = 0$ из (2.2.15) и выше полученное $p_t = 0$. Откуда следует, что $p = \text{const}$.

Для функций τ, ξ, β получаем уравнения $\tau_{tt} = 0$, $\tau_q = \tau_S = 0$, $\xi_{SS} = 0$, $\xi_t = \xi_q = 0$ из (2.2.9), ранее полученное $\beta_t = 0$, $\beta_S = 0$ из (2.2.15) и $\beta_{qq} = 0$ из (2.2.10). Следовательно, с учетом равенства $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ из (2.2.14) и условия на неподвижность нижнего предела $\tau(c) = 0$ интегрирование дает

$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = Bq + D, \quad p = \text{const}. \qquad (2.2.19)$$

Теперь из (2.2.16), (2.2.17) получаем

$$\theta_S^2 : \alpha\tau_t - r\tau + p - 2\xi_S = 0, \qquad (2.2.20)$$

$$\theta_S : \mu(\alpha\tau_t - \xi_S) + r\tau q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+$$
$$+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(g_S - \beta + q(\xi_S - \alpha\tau_t)) = 0, \qquad (2.2.21)$$

Подставляем (2.2.19) в (2.2.20), (2.2.21), (2.2.18) и получаем

$$\theta_S^2 : -rM(t-c) + p = 0, \qquad (2.2.22)$$

$$\theta_S : \mu\frac{\alpha M}{2} + rM(t-c)q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+$$
$$+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\left(g_S - Bq - D - q\frac{\alpha M}{2}\right) = 0, \qquad (2.2.23)$$

$$1 : (p-\alpha M)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)} + F\right) + {}_cD_t^\alpha g-$$
$$-rp\theta - rg - (\mu - rS)(Bq + D) + rq\left(\frac{\alpha M}{2}S + A\right) + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2}g_{SS}-$$
$$-\frac{rM(t-c)q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)} - q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(g_S - Bq - D) - \zeta = 0. \qquad (2.2.24)$$

Из (2.2.22) дифференцированием по t получаем, что $rM = 0$, $p = 0$. Так как $g_{Sq} = 0$ в (2.2.10), то дифференцированием (2.2.23) по q получаем $b = -rMc - \frac{\alpha M}{2} = -\alpha M/2$. Поэтому из (2.2.22), (2.2.23) следуют равенства

$$rM = 0, \quad p = 0, \quad b = -\frac{\alpha M}{2}, \quad g_S = D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}. \tag{2.2.25}$$

Так как в (2.2.10) $g_{qq} = 0$, $g_{Sq} = 0$, интегрирование g_S дает

$$g = S\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + N(t)q + V(t). \tag{2.2.26}$$

Подстановкой (2.2.25), (2.2.26) в (2.2.24) получим

$$\begin{gathered}
-\alpha M\left((\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + q\,{}_cD_t^\alpha N + \\
+ S\,{}_cD_t^\alpha\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + {}_cD_t^\alpha V - rS\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) - \\
- rNq - rV - (\mu - rS)\left(-\frac{\alpha M}{2}q + D\right) + rqA + \mu D - \\
- \mu^2\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} + q\mu\frac{\alpha M}{2} - q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{\alpha M}{2} - \zeta = 0.
\end{gathered} \tag{2.2.27}$$

Учитывая равенства $\zeta_S = 0$, $\zeta_q = 0$, $\zeta_\theta = 0$ из (2.2.9), заметим, что левая часть равенства (2.2.27) является многочленом от S, q, θ, тогда

$$\begin{gathered}
q^2 : \frac{\alpha M q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{\alpha M}{2} = 0, \quad Sq : r\alpha M - r\frac{\alpha M}{2} = 0, \\
q : -\mu\alpha M + {}_cD_t^\alpha N - rN + \mu\frac{\alpha M}{2} + rA + \mu\frac{\alpha M}{2} = 0, \\
S : {}_cD_t^\alpha\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) - r\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + rD = 0, \\
-\alpha MF + {}_cD_t^\alpha V - rV - \mu^2\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \zeta = 0.
\end{gathered}$$

Сокращение с использованием равенства $rM = 0$ из (2.2.25) дает

$$\begin{gathered}
q : {}_cD_t^\alpha N - rN + rA = 0, \quad S : {}_cD_t^\alpha\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) = 0, \\
-\alpha MF + {}_cD_t^\alpha V - rV - \mu^2\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \zeta = 0.
\end{gathered} \tag{2.2.28}$$

Из (2.2.19), (2.2.25), (2.2.26) следует, что

$$\eta = S\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + N(t)q + V(t), \quad rM = 0,$$
$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = -\frac{\alpha M}{2}q + D.$$

Предполагаем, что $r \neq 0$, тогда $M = 0$ и второе уравнение из (2.2.28) дает ${}_cD_t^\alpha D = D(t-c)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha) = 0$. Следовательно, $D = 0$. Первое уравнение в (2.2.28) имеет решение

$$N = \sum_{j=1}^{n} n_j (t-c)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha) - rA\int_c^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(r(t-s)^\alpha)ds,$$

где $n-1 < \alpha < n$. Вычисляем интеграл

$$r\int_c^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(r(t-s)^\alpha)ds = r\int_c^t (t-s)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k (t-s)^{\alpha k}}{\Gamma((k+1)\alpha)}ds =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{k+1}(t-c)^{\alpha(k+1)}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} = r(t-c)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(r(t-c)^\alpha).$$

Тогда

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} n_j (t-c)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha) q -$$
$$- rA(t-c)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(r(t-c)^\alpha) q + V(t),$$
$$\zeta = {}_cD_t^\alpha V - rV, \quad \tau = 0, \quad \xi = a, \quad \beta = 0.$$

Если же $r = 0$, то имеем уравнения

$$q : {}_cD_t^\alpha N = 0, \quad S : {}_cD_t^\alpha\left(D - \mu\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}\right) = 0, \tag{2.2.29}$$
$$-\alpha M F + {}_cD_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} - \zeta = 0.$$

Отсюда

$$\eta = S\left(D - \mu\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}\right) + N(t)q + V(t),$$

$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2} S + A, \quad \beta = -\frac{\alpha M}{2} q + D.$$

Решая (2.2.29) при $\tau(c) = 0$ получаем

$$N = \sum_{i=1}^{n} H_i (t-c)^{\alpha - i}, \quad D = \mu \frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}.$$

В итоге доказана теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\gamma\sigma \neq 0$, тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения (2.2.1) при $r = 0$ образуют*

$$Y_1 = \partial_S, \quad Y_V = V\partial_\theta + {}_cD_t^\alpha V \partial_F, \quad Y_{2,j} = (t-c)^{\alpha - j} q \partial_\theta,$$
$$Y_3 = 2\gamma\sigma^2 (t-c)\partial_t + \alpha\gamma\sigma^2 S \partial_S +$$
$$+ \left(-\alpha\gamma\sigma^2 q + \mu\alpha\right)\partial_q + \left(-2\alpha\gamma\sigma^2 F - \alpha\mu^2\right)\partial_F, \quad j = 1, \ldots.$$

2. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения (2.2.1) при $r \neq 0$ образуют*

$$Y_1 = \partial_S - r(t-c)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(r(t-c)^\alpha) q \partial_\theta, \quad Y_2 = V\partial_\theta + ({}_cD_t^\alpha V - rV)\partial_F,$$
$$Y_{3,j} = (t-c)^{\alpha - j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha) q \partial_\theta, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

2.3. Групповая классификация

Рассматриваем уравнение

$${}_cD_t^\alpha \theta = r\theta + (\mu - rS) q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \tag{2.3.1}$$

Считаем $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и $\theta = \theta(t, S, q)$. Генератор допускаемой группы ищется в виде $\eta = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$. Действие продолженного оператора

$$\tilde{X} = X + \eta^t \partial_{\theta_t} + \eta^S \partial_{\theta_S} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \eta^q \partial_{\theta_q} + \eta^\alpha \partial_{{}_cD_t^\alpha \theta}.$$

на рассматриваемое уравнение дает

$$\eta^{\alpha}-r\eta-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu\eta^{S}+\frac{\sigma^{2}}{2}\eta^{SS}-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)^{2}+$$
$$+\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)(\eta_{S}-\beta)-F_{t}\tau-F_{\theta_{q}}\eta^{q}|_{M}=0. \tag{2.3.2}$$

Генераторы ищутся в линейно-автономном виде и при условии $\tau(c)=0$. Подставляем вычисленные раннее формулы продолжения в (2.3.2):

$$ {}_{c}D_{t}^{\alpha}g+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta\left(D_{t}^{n}p+\frac{n-\alpha}{n+1}D_{t}^{n+1}\tau\right)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta_{S}D_{t}^{n}\xi-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta_{q}D_{t}^{n}\beta-r(p\theta+g)-$$
$$-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu\left(p_{S}\theta+g_{S}+p\theta_{S}-\theta_{t}\tau_{S}-\theta_{S}\xi_{S}-\theta_{q}\beta_{S}\right)+$$
$$+\frac{\sigma^{2}}{2}(p_{SS}\theta+g_{SS}+2p_{S}\theta_{S}-\theta_{t}\tau_{SS}-\theta_{S}\xi_{SS}-\theta_{q}\beta_{SS}-2\theta_{St}\tau_{S}-$$
$$-2\theta_{Sq}\beta_{S}+\theta_{SS}(p-2\xi_{S}))-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)^{2}+$$
$$+\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)(p_{S}\theta+g_{S}+p\theta_{S}-\theta_{t}\tau_{S}-\theta_{S}\xi_{S}-\theta_{q}\beta_{S}-\beta)-$$
$$-F_{t}\tau-F_{\theta_{q}}(p_{q}\theta+g_{q}+p\theta_{q}-\theta_{t}\tau_{q}-\theta_{S}\xi_{q}-\theta_{q}\beta_{q})|_{M}=0.$$

Переход на многообразие M дает

$$(p-\alpha\tau_{t})\left(r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_{S}-\frac{\sigma^{2}}{2}\theta_{SS}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)^{2}+F\right)+$$
$$+{}_{c}D_{t}^{\alpha}g+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta\left(D_{t}^{n}p+\frac{n-\alpha}{n+1}D_{t}^{n+1}\tau\right)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta_{S}D_{t}^{n}\xi-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{c}D_{t}^{\alpha-n}\theta_{q}D_{t}^{n}\beta-r(p\theta+g)-$$
$$-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu\left(p_{S}\theta+g_{S}+p\theta_{S}-\theta_{t}\tau_{S}-\theta_{S}\xi_{S}-\theta_{q}\beta_{S}\right)+$$
$$+\frac{\sigma^{2}}{2}(p_{SS}\theta+g_{SS}+2p_{S}\theta_{S}-\theta_{t}\tau_{SS}-\theta_{S}\xi_{SS}-\theta_{q}\beta_{SS}-2\theta_{St}\tau_{S}-$$
$$-2\theta_{Sq}\beta_{S}+\theta_{SS}(p-2\xi_{S}))-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^{2}e^{r(T-t)}(\theta_{S}-q)^{2}+$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta)-$$

$$-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (2.3.3)$$

Рассматриваем здесь переменные θ_t, θ_S, θ_q, θ_{SS}, θ_{Sq}, θ_{St} и ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta$, ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q$, ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S$ при $n = 1, 2, \ldots$ как независимые. Дифференцируем (2.3.3) по θ_{Sq}, θ_{St} и получаем

$$\tau_S = 0, \quad \beta_S = 0. \qquad (2.3.4)$$

После этого проводим разделение переменных в (2.3.3) относительно θ_t, θ_S, θ_{SS}, θ_{Sq}, θ_{St}, ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta$, ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q$, ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S$:

$${}_cD_t^{\alpha-n}\theta : D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \quad {}_cD_t^{\alpha-n}\theta_S : D_t^n\xi = 0, \qquad (2.3.5)$$

$${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q : D_t^n\beta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2.3.6)$$

$$\theta_{SS} : -\frac{\sigma^2}{2}(p - \alpha\tau_t) + \frac{\sigma^2}{2}(p - 2\xi_S) = 0, \qquad (2.3.7)$$

$$\theta_S^2 : -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \alpha\tau_t) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \xi_S) = 0, \qquad (2.3.8)$$

$$\theta_S : (p - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu(p - \xi_S)+$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}(2p_S - \xi_{SS}) + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}+$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p_S\theta + g_S - \beta - q(p - \xi_S)) + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \qquad (2.3.9)$$

$$\theta_t : F_{\theta_q}\tau_q = 0, \qquad (2.3.10)$$

$$1 : (p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F\right)+$$

$$+{}_cD_t^{\alpha}g - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\,(p_S\theta + g_S)+$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS}) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p_S\theta + g_S - \beta)-$$

$$-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (2.3.11)$$

Из (2.3.5), (2.3.6) получаем $\xi_t = 0$, $\beta_t = 0$. Из (2.3.7) получаем равенство $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$, применение которого к (2.3.8) дает $p = r\tau$. Из ранее полученных равенств $\xi_t = 0$, $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$, $\alpha \neq 0$, $\tau_S = 0$ из (2.3.4) следует, что $\tau_{tt} = 0$,

$\xi_{SS}=0$. Следовательно, из (2.3.5) получаем $p_t=0$. Таким образом,

$$\alpha\tau_t-2\xi_S=0,\quad \tau_{tt}=0,\quad r\tau_t=0,\quad p_t=0,\quad \xi_{SS}=0,\quad \xi_t=0, \tag{2.3.12}$$

$$\beta_t=0,\quad p=r\tau. \tag{2.3.13}$$

Дифференцируя (2.3.11) по θ, получаем

$$r(p-\alpha\tau_t)-rp+\mu p_S+\frac{\sigma^2}{2}p_{SS}-q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}p_S-F_{\theta_q}p_q=0.$$

Подстановка $r\tau_t=0$ и $p=r\tau$ из (2.3.12), (2.3.13) и $\tau_S=0$ из (2.3.4) дает $r\tau_qF_{\theta_q}=0$, что является следствием из (2.3.10). Подставляя (2.3.12), (2.3.13) в (2.3.7)–(2.3.11), получим

$$\theta_S:(r\tau-\alpha\tau_t)(-\mu+q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)})+\mu\left(r\tau-\frac{\alpha\tau_t}{2}\right)+r\tau q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+$$
$$+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\left(g_S-\beta-q\left(r\tau-\frac{\alpha\tau_t}{2}\right)\right)+F_{\theta_q}\xi_q=0, \tag{2.3.14}$$

$$\theta_t:F_{\theta_q}\tau_q=0, \tag{2.3.15}$$

$$1:(r\tau-\alpha\tau_t)\left((\mu-rS)q-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2+F\right)+{}_cD_t^\alpha g-rg-$$
$$-(\mu-rS)\beta+rq\xi+\mu g_S+\frac{\sigma^2}{2}g_{SS}-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2-$$
$$-q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(g_S-\beta)-F_t\tau-F_{\theta_q}(g_q+\theta_q(r\tau-\beta_q))=0. \tag{2.3.16}$$

Интегрирование (2.3.12), (2.3.13) при условии $\tau(c)=0$ дает

$$\eta=rA(q)\theta+g(t,S,q),\quad \tau=A(q)(t-c),\quad \xi=\frac{\alpha A(q)}{2}S+E(q), \tag{2.3.17}$$

$$\beta=\beta(q),\quad rA(q)=0. \tag{2.3.18}$$

Так как $rA=r\tau_t=0$, то $r\tau=0$. Подставляем равенства (2.3.17), (2.3.18) и $r\tau=0$ в (2.3.14)–(2.3.16):

$$\theta_S:-\alpha A(-\mu+q\gamma\sigma^2e^{r(T-t)})-\mu\frac{\alpha A}{2}+$$
$$+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\left(g_S-\beta+q\frac{\alpha A}{2}\right)+F_{\theta_q}\left(\frac{\alpha A_q}{2}S+E_q\right)=0,$$

$$\theta_t:F_{\theta_q}A_q(t-c)=0,$$

$$1 : -\alpha A \left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 + F \right) + {}_cD_t^\alpha g - rg -$$
$$-(\mu - rS)\beta + rq \left(\frac{\alpha A(q)}{2} S + E \right) + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} -$$
$$-q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}(g_q - \theta_q \beta_q) = 0.$$

После сокращения получаем

$$\theta_S : \mu \frac{\alpha A}{2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \left(g_S - \beta - q\frac{\alpha A}{2} \right) + F_{\theta_q} \left(\frac{\alpha A_q}{2} S + E_q \right) = 0, \quad (2.3.19)$$
$$\theta_t : F_{\theta_q} A_q = 0, \quad (2.3.20)$$
$$1 : -\alpha A \left(\mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 + F \right) + {}_cD_t^\alpha g -$$
$$-rg - (\mu - rS)\beta + rqE + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} -$$
$$-q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}(g_q - \theta_q\beta_q) = 0. \quad (2.3.21)$$

2.3.1. Случай нелинейной функции F

Дифференцированием (2.3.19)–(2.3.21) по θ_q получим

$$A_q = 0, \quad E_q = 0, \quad (2.3.22)$$
$$(\beta_q - \alpha A)F_{\theta_q} - F_{t\theta_q} A(t-c) - F_{\theta_q\theta_q}(g_q - \theta_q\beta_q) = 0. \quad (2.3.23)$$

Дифференцируем (2.3.23) по S и получаем $g_{Sq} = 0$. Дифференцируем (2.3.19) по q и получаем с подстановкой (2.3.22)

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \left(g_{Sq} - \beta_q - \frac{\alpha A}{2} \right) = 0.$$

Отсюда $\beta_q = -\alpha A/2$. Следовательно, ввиду (2.3.22), $\beta_{qq} = 0$ и дифференцирование (2.3.23) по q дает $g_{qq} = 0$. Итак,

$$\beta_q = -\frac{\alpha A}{2}, \quad g_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0. \quad (2.3.24)$$

Интегрирование (2.3.4), (2.3.12), (2.3.24) дает

$$\beta = -\frac{\alpha A}{2} q + L. \quad (2.3.25)$$

Подстановка (2.3.25) и (2.3.22) в (2.3.19) дает

$$g_S = L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}.$$

Интегрированием получим

$$g = \left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) S + N(t)q + M(t). \tag{2.3.26}$$

Подстановка (2.3.25), (2.3.26) в (2.3.21) дает

$$-\alpha A\left(\mu q + F\right) + S_c D_t^\alpha \left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + q_c D_t^\alpha N +$$

$$+ {}_c D_t^\alpha M - r\left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) S - rNq - rM -$$

$$-(\mu - rS)\left(-\frac{\alpha A}{2} q + L\right) + rqE + \mu\left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) +$$

$$+\mu\frac{\alpha A q}{2} - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q\frac{\alpha A}{2}\right) = 0.$$

Рассматриваем полученное выражение как многочлен от S и q, тогда

$$Sq : -\frac{\alpha A}{2} r = 0,$$

$$S : {}_c D_t^\alpha \left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) - r\left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + rL = 0,$$

$$q : -\mu\alpha A + {}_c D_t^\alpha N - rN + \mu\frac{\alpha A}{2} + rE + \mu\frac{\alpha A}{2} = 0,$$

$$1 : {}_c D_t^\alpha M - rM - \mu L + \mu\left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) -$$

$$-\alpha A F - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q\frac{\alpha A}{2}\right) = 0.$$

С помощью равенства $rA = 0$ из (2.3.17) получаем

$$S : {}_c D_t^\alpha \left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) = 0, \quad q : {}_c D_t^\alpha N - rN + rE = 0, \tag{2.3.27}$$

$$1 : {}_c D_t^\alpha M - rM - \mu^2\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} -$$

$$-\alpha A F - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q\frac{\alpha A}{2}\right) = 0. \tag{2.3.28}$$

Выпишем (2.3.17), (2.3.25), (2.3.26) с подстановкой $rA=0$:

$$\tau = A(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha A}{2}S + E, \quad \beta = -\frac{\alpha A}{2}q + L, \tag{2.3.29}$$

$$\eta = \left(L - \mu\frac{\alpha A e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)S + N(t)q + M(t). \tag{2.3.30}$$

Отсюда видно, что необходимо рассмотреть случаи $r=0$ и $r\neq 0$.

2.3.2. Случай $r \neq 0$

Если $r\neq 0$, то из равенства $rA=0$ (2.3.17) следует, что $A=0$. Тогда уравнения (2.3.27)–(2.3.30) имеют вид

$$ {}_cD_t^\alpha L = 0, \quad {}_cD_t^\alpha N - rN + rE = 0, \quad {}_cD_t^\alpha M - rM - F_{\theta_q}N = 0, \tag{2.3.31}$$

$$\tau = 0, \quad \xi = E, \quad \beta = L, \quad \eta = LS + N(t)q + M(t). \tag{2.3.32}$$

Дифференцируем третье уравнение в (2.3.31) по θ_q и получаем $N=0$, тогда в силу второго уравнения в (2.3.31) $E=0$. Первое уравнение в (2.3.31) дает $Lx^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)=0$, следовательно, $L=0$. С учетом (2.3.32) теперь имеем

$$E=0, \quad N=0, \quad L=0, \quad {}_cD_t^\alpha M - rM = 0,$$
$$\tau=0, \quad \xi=0, \quad \beta=0, \quad \eta=M(t).$$

Следовательно, мы приходим к случаю произвольной F. При этом решение уравнения ${}_cD_t^\alpha M - rM = 0$ есть $M = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j (t-c)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha)$. Отсюда получаем при $n-1<\alpha<n$

$$X_j = (t-c)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta, \quad j=1,2,\ldots,n..$$

2.3.3. Случай $r=0$

Подставляем $r=0$ в (2.3.27)–(2.3.30) и получаем

$$ {}_cD_t^\alpha\left(L - \mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}\right) = 0, \quad {}_cD_t^\alpha N = 0, \tag{2.3.33}$$

$$ {}_cD_t^\alpha M - \mu^2 \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - \alpha A F - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}\left(N + \theta_q \frac{\alpha A}{2}\right) = 0. \qquad (2.3.34) $$

Решение уравнений (2.3.33) дает

$$ L = \mu\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}, \quad N = \sum_{j=1}^{n} n_j (t-c)^{\alpha-j}. \qquad (2.3.35) $$

Подстановка в (2.3.29), (2.3.30) дает

$$ \tau = A(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha A}{2} S + E, \quad \beta = -\frac{\alpha A}{2} q + \mu \frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}, \qquad (2.3.36) $$
$$ \eta = \sum_{j=1}^{n} n_j (t-c)^{\alpha-j} q + M(t). $$

Перепишем (2.3.34) с учетом (2.3.35):

$$ \kappa(t) - \alpha A F - F_t A(t-c) - F_{\theta_q}\left(\sum_{j=1}^{n} n_j (t-c)^{\alpha-j} + \theta_q \frac{\alpha A}{2}\right) = 0. \qquad (2.3.37) $$

1. Если $A \neq 0$, делаем замену переменных

$$ F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F} + (t-c)^{-\alpha}\int \frac{\kappa(t)}{A}(t-c)^{\alpha-1}dt, $$
$$ \theta_q = \widetilde{\theta}_q + \sum_{j=1}^{n} \frac{n_j}{A(\alpha/2-j)}(t-c)^{\alpha-j}. $$

Тогда уравнение (2.3.37) имеет вид $(t-c)\widetilde{F}_t + \frac{\alpha}{2}\widetilde{\theta}_q \widetilde{F}_{\widetilde{\theta}_q} = 0$, его решение $\widetilde{F} = \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\widetilde{\theta}_q\right)$. Обратные замены дают

$$ F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (t-c)^{\alpha-j}}{A(\alpha/2-j)}\right) + $$
$$ +(t-c)^{-\alpha}\int_{t_1}^{t} \kappa(t)(t-c)^{\alpha-1}dt. $$

Применение групп преобразований эквивалентности, порождаемых операторами $Y_{2,j} = (t-c)^{\alpha-j} q\partial_\theta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, дает

$$ F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right) + (t-c)^{-\alpha}\int_{t_1}^{t} \kappa(t)(t-c)^{\alpha-1}dt. $$

А с помощью группы преобразований эквивалентности, порожденной оператором Y_V, получим $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$. Его подстановка в определяющее уравнение (2.3.34) дает

$$
{}_cD_t^\alpha M - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - A(t-c)^{1-\alpha}\left(-\frac{\alpha}{2}(t-c)^{-1-\alpha/2}\theta_q\right)\widetilde{F}'-
$$
$$
-\left(N + \theta_q\frac{\alpha A}{2}\right)(t-c)^{-3\alpha/2}\widetilde{F}' =
$$
$$
= {}_cD_t^\alpha M - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} - N(t-c)^{-3\alpha/2}\widetilde{F}' = 0.
$$

Ввиду того, что $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ по предположению, получаем два уравнения

$$
N = 0, \quad {}_cD_t^\alpha M - \mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2} = 0.
$$

Следовательно,

$$
M = \sum_{j=1}^{n} b_j(t-c)^{\alpha-j} + \frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\mu^2\frac{\alpha A}{2\gamma\sigma^2}.
$$

Получен базис допускаемой алгебры линейно-автономных операторов

$$
X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad X_2 = \partial_S,
$$
$$
X_3 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S\partial_S + \alpha\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - q\right)\partial_q + \frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.
$$

2. Если $A = 0$, то по предположению $F_{\theta_q\theta_q} = 0$ получаем $n_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $N = 0$, $\kappa = {}_cD_t^\alpha M = 0$. Следовательно, F — произвольная функция. Получили базис допускаемой алгебры линейно-автономных операторов

$$
X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad X_2 = \partial_S.
$$

2.3.4. Теорема о групповой классификации в нелинейном случае

Теорема 2.3.1. *Пусть $\gamma\sigma \neq 0$, $n-1 < \alpha < n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (2.2.1) *при* $r \neq 0$ *и произвольной* F, $F_{\theta_q \theta_q} \neq 0$, *имеет вид*

$$X_j = (t-c)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^{\alpha})\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (2.2.1) *при* $r = 0$ *и произвольной* F, *которая не эквивалентна* $F = (t-c)^{-\alpha} \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$, *имеет вид*

$$X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad X_2 = \partial_S.$$

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (2.2.1) *при* $r = 0$ *и* $F = (t-c)^{-\alpha} \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$, *имеет вид*

$$X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad X_2 = \partial_S,$$
$$X_3 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S \partial_S + \alpha\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - q\right)\partial_q + \left(\frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

2.4. Инвариантные решения и подмодели при $0 < \alpha < 1$

Для простоты вычислений будем рассматривать только случай $0 < \alpha < 1$.

В случае когда $r \neq 0$ и F — произвольная нелинейная по θ_q функция, оператор $X_1 = (t-c)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(r(t-c)^{\alpha})\partial_\theta$ не имеет инвариантов, зависящих от θ.

2.4.1. Инвариантные решения при $r = 0$ и $F = (t-c)^{-\alpha} \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$

При $r = 0$ и $F = (t-c)^{-\alpha} \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$ базис алгебры Ли L_3 имеет вид

$$X_1 = (t-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S,$$
$$X_3 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S \partial_S + \alpha\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - q\right)\partial_q + \frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

Вычисление коммутаторов дает

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = -2(\alpha-1)X_1, \quad [X_2, X_3] = \alpha X_2.$$

Следовательно, ненулевые структурные константы алгебры L_3 имеют вид

$$C^1_{1,3} = -C^1_{3,1} = -2(\alpha-1), \quad C^2_{2,3} = -C^2_{3,2} = \alpha.$$

Тогда генераторы непрерывных внутренних автоморфизмов имеют вид

$$E_1 = -2(\alpha-1)e_3\partial_{e_1}, \quad E_2 = \alpha e_3\partial_{e_2}, \quad E_3 = 2(\alpha-1)e_1\partial_{e_1} - \alpha e_2\partial_{e_2}.$$

К ним добавляются автоморфизмы отражения $E^1_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $E^2_- : \bar{e}_2 = -e_2$. Вычисление непрерывных внутренних автоморфизмов дает

$$E_1 : \bar{e}_1 = e_1 - 2(\alpha-1)e_3a_1, \quad E_2 : \bar{e}_2 = e_2 - \alpha e_3 a_2, \tag{2.4.1}$$

$$E_3 : \bar{e}_1 = e_1 e^{2(\alpha-1)a_3}, \quad \bar{e}_2 = e_2 e^{-\alpha a_3}. \tag{2.4.2}$$

1. Если $e_3 \neq 0$, то применение автоморфизмов E_1, E_2 дает подалгебру $\langle X_3 \rangle$.

2. Если $e_3 = 0$, $e_1e_2 \neq 0$, то с помощью E^1_- получим $e_1 > 0$ и $e_2 > 0$. Тогда при $\alpha \neq 2/3$ возьмем

$$a_3 = \frac{1}{3\alpha - 2} \ln \frac{e_2}{e_1}$$

и с помощью E_3 получим подалгебру $\langle X_1 + X_2 \rangle$. Если $\alpha = 2/3$, получим семейство подалгебр $\langle X_1 + bX_2 \rangle$, $b \geq 0$ за счет E^2_-.

3. Осталась подалгебра $\langle X_2 \rangle$.

Теперь рассматриваем двумерные подалгебры.

1. Для вектора X_2 рассматриваем второй базисный вектор $b_1X_1 + b_3X_3$. Рассматриваем коммутатор $[X_2, b_1X_1 + b_3X_3] = \alpha b_3 X_2$. Получили подалгебру. Тогда если $b_3 \neq 0$, то применением автоморфизма E_1 к $b_1X_1 + b_3X_3$ получаем подалгебру $\langle X_2, X_3 \rangle$, а если $b_3 = 0$, то подалгебру $\langle X_1, X_2 \rangle$.

2. Для X_3 возьмем второй базисный вектор $b_1X_1 + b_2X_2$. Вычисляя коммутатор получаем $[X_3, b_1X_1 + b_2X_2] = 2(\alpha-1)b_1X_1 - \alpha b_2X_2$. Вычисление определителя

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ 2(\alpha-1)b_1 & -\alpha b_2 \end{vmatrix}$$

дает $b_1 b_3(2-3\alpha)=0$. Это равенство выполняется при $b_1=0$, или при $b_3=0$, или в случае $\alpha=2/3$. Тогда получаем подалгебры $\langle X_1, X_3\rangle$, $\langle X_2, X_3\rangle$. При $\alpha=2/3$ получаем семейство подалгебр $\langle X_3, X_1+bX_2\rangle$, $b\geq 0$.

3. Для вектора X_1+X_2 возьмем второй базисный вектор $b_2X_2+b_3X_3$. Вычисляя коммутатор получаем $[X_1+X_2, b_2X_2+b_3X_3]=\alpha b_3X_2-2(\alpha-1)b_3X_1$. Если $b_3\neq 0$, то получаем $\alpha=2/3$. Применяя автоморфизм E_2, получим подалгебру $\langle X_1+X_2, X_3\rangle$ при $\alpha=2/3$. Если $b_3=0$, то получаем $\langle X_1+X_2, X_2\rangle$.

4. Для X_1+bX_2 при $\alpha=2/3$ рассматриваем второй базисный вектор $b_2X_2+b_3X_3$. Вычислим коммутатор $[X_1+bX_2, b_2X_2+b_3X_3]=\frac{2}{3}bb_3X_2+\frac{2}{3}b_3X_1=\frac{2}{3}b_3(X_1+bX_2)$. Следовательно, условие подалгебры выполнено всегда. Тогда если $b_3\neq 0$, то применением автоморфизма E_2 к $b_2X_2+b_3X_3$ получаем подалгебру $\langle X_1+bX_2, X_3\rangle$, иначе — подалгебру $\langle X_1+bX_2, X_2\rangle$.

Следовательно получаем

Лемма 2.4.1. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $\alpha\neq 2/3$ являются $\Theta_1=\{\langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_1+X_2\rangle\}$, $\Theta_2=\{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_2, X_3\rangle\}$.*

Лемма 2.4.2. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $\alpha=2/3$ являются $\Theta_1=\{\langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_1+bX_2\rangle, b\geq 0\}$, $\Theta_2=\{\langle X_2, X_3\rangle, \langle X_1, X_2\rangle, \langle X_3, X_1+bX_2\rangle, b\geq 0\}$.*

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2\rangle$. Инварианты имеют вид t, q, θ. Тогда решение ищется в виде $\theta=\varphi(t,q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$
{}_cD_t^{\alpha}\varphi=\mu q-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2q^2+(t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\varphi_q\right).
$$

Подалгебра $\langle X_3\rangle$. имеет инварианты

$$
J_1=\theta-\frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\quad J_2=y=(t-c)^{-\alpha/2}S,
$$
$$
J_3=z=(t-c)^{\alpha/2}q-\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}(t-c)^{\alpha/2}.
$$

Тогда инвариантное решение ищем в виде

$$\theta = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + Sq - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \varphi(y,z)$$

и получаем подмодель

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{(1-s)^\alpha}\varphi\left(s^{-\alpha/2}y, s^{\alpha/2}z\right)ds-\\ &-\frac{\alpha y}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{s^{-\alpha/2}}{(1-s)^\alpha}\varphi_y\left(s^{-\alpha/2}y, s^{\alpha/2}z\right)ds+\\ &+\frac{\alpha z}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{s^{\alpha/2}}{(1-s)^\alpha}\varphi_z\left(s^{-\alpha/2}y, s^{\alpha/2}z\right)ds+\\ &+\frac{yz}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{yy} + \frac{\gamma\sigma^2}{2}\varphi_y^2 = \widetilde{F}\left(\varphi_z + S\right).\end{aligned}$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_1 + X_2\rangle$ при $\alpha \neq 2/3$. Инварианты имеют вид t, q, $\theta - S(t-c)^{\alpha-1}$. Тогда решение ищется в виде $\theta = S(t-c)^{\alpha-1} + \varphi(t,q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$${}_cD_t^\alpha\varphi = \mu q - \mu(t-c)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\left((t-c)^{\alpha-1} - q\right)^2 + (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\varphi_q\right).$$

Рассматриваем алгебру $\langle X_2, X_3\rangle$. Ее инварианты

$$J_1 = \theta - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad J_2 = z = (t-c)^{\alpha/2}q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}(t-c)^{\alpha/2}. \qquad (2.4.3)$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \varphi(z).$$

Тогда получаем подмодель

$$\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{\varphi(s^{\alpha/2}z)}{(1-s)^\alpha}ds + \frac{\alpha z}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{\varphi_z(s^{\alpha/2}z)}{(1-s)^\alpha}ds + \frac{\gamma\sigma^2}{2}z^2 = \widetilde{F}(\varphi'(z)).$$

Подалгебры $\langle X_1\rangle$, $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$ не обладают инвариантами зависящими от θ.

Теперь рассмотрим те из подалгебр из оптимальных систем для случая $\alpha = 2/3$, которые не присутствуют в оптимальных системам для случая $\alpha \neq 2/3$.

Подалгебра $\langle X_1 + bX_2\rangle$, $b > 0$, имеет инварианты t, q, $b\theta - S(t-c)^{\alpha-1}$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = b^{-1}S(t-c)^{\alpha-1} + b^{-1}\varphi(t,q)$. Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$
{}_cD_t^\alpha\varphi = \mu q - \frac{\mu}{b}(t-c)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\left(\frac{1}{b}(t-c)^{\alpha-1} - q\right)^2 + (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\varphi_q\right).
$$

При при $\alpha = 2/3$ рассмотрим подалгебру $\langle X_1 + bX_2, X_3\rangle$, $b > 0$. Ее инварианты

$$
J_1 = \theta - \frac{1}{b}(t-c)^{-1/3}S - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^{2/3}}{\Gamma(5/3)}, \quad J_2 = z = (t-c)^{1/3}q - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}(t-c)^{1/3}.
$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$
\theta = \frac{1}{b}(t-c)^{-1/3}S + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^{2/3}}{\Gamma(5/3)} + \varphi(z).
$$

Тогда получаем подмодель

$$
\frac{1}{3\Gamma(1/3)}\int_0^1 \frac{\varphi\left(s^{1/3}z\right)}{(1-s)^{2/3}}ds + \frac{z}{3\Gamma(1/3)}\int_0^1 \frac{\varphi_z\left(s^{1/3}z\right)}{(1-s)^{2/3}}ds = -\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(z - \frac{1}{b}\right)^2 + \widetilde{F}\left(\varphi_z\right).
$$

2.4.2. Инвариантные решения при $r = 0$ и F - произвольная

В случае $r = 0$ и произвольной функции F имеем алгебру Ли L_2 с базисом

$$
X_1 = \partial_S, \quad X_2 = (t-c)^{\alpha-1}\partial_\theta.
$$

Коммутатор имеет вид $[X_1, X_2] = 0$, поэтому оптимальная система подалгебр состоит из $\langle X_1 + bX_2\rangle$, $b \in \mathbb{R}$, $\langle X_2\rangle$.

Инвариантную подмодель имеют подалгебры $\langle X_1 + bX_2\rangle$, так как содержат зависящие от θ инварианты t, q, $\theta - b(t-c)^{\alpha-1}S$. Следовательно, инвариантное решение ищется в виде

$$
\theta = b(t-c)^{\alpha-1}S + \varphi(t,q). \tag{2.4.4}
$$

Подстановка в основное уравнение дает подмодель

$$
{}_cD_t^\alpha\varphi = \mu q - \mu b(t-c)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\left(b(t-c)^{\alpha-1} - q\right)^2 + F(t,\varphi_q).
$$

3. Уравнение Геана — Пу с производной Герасимова — Капуто по времени

3.1. Аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто

Бета-функция Эйлера при $x > 1$, $y > 1$ определяется как

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Производная Герасимова — Капуто имеет вид

$${}_c^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds = {}_c J_t^{n-\alpha} D_t^n f(t),$$

где $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. Производная Герасимова — Капуто и производная Римана — Лиувилля одинакового порядка связаны соотношением

$${}_c D_t^\alpha f(t) = {}_c^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(c)}{\Gamma(i-\alpha+1)} (t-c)^{i-\alpha}.$$

Решение задачи Коши для линейного уравнения с производной Герасимова — Капуто

$${}_c^C D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t) + f(t), \quad y^{(k)}(c) = b_k,\ k = 0, \dots, n-1, \quad n-1 < \alpha \le n$$

имеет вид [51, теорема 4.3]

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k (t-c)^k E_{\alpha,k+1}(\lambda(t-c)^\alpha) + \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds.$$

Мы будем использовать следующие биномиальные формулы и тождества для них [17]:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}, \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j} = \binom{\alpha+\beta}{k}. \tag{3.1.1}$$

Лемма 3.1.1. *При $\alpha \notin \mathbb{Z}$, n, $j \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{\Pi_{j=0}^k (n-\alpha-j)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^k (-1)^{k-j}}{k!(n-\alpha-j)}.$$

Доказательство. При $k=0$ формула справедлива. Предполагаем, что формула верна для $k \geq 1$. Тогда для $k+1$ имеем

$$\frac{1}{\Pi_{j=0}^{k+1}(n-\alpha-j)} = \frac{1}{(n-\alpha-k-1)\Pi_{j=0}^{k}(n-\alpha-j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^k(-1)^{k-j}}{k!(n-\alpha-k-1)(n-\alpha-j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^k(-1)^{k-j}(k+1-j)}{k!(k+1-j)(n-\alpha-k-1)(n-\alpha-j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^k(-1)^{k-j}}{k!(k+1-j)} \left(\frac{1}{n-\alpha-k-1} - \frac{1}{n-\alpha-j}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!k!(k+1-j)} \left(\frac{1}{n-\alpha-k-1} - \frac{1}{n-\alpha-j}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{(k+1)!(-1)^{k-j}}{j!(k+1-j)!(k+1)!} \left(\frac{1}{n-\alpha-k-1} - \frac{1}{n-\alpha-j}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^{k+1}(-1)^{k-j}}{(k+1)!} \left(\frac{1}{n-\alpha-k-1} - \frac{1}{n-\alpha-j}\right) =$$

$$= -\frac{\sum_{j=0}^{k} C_j^{k+1}(-1)^{k+1-j}}{(k+1)!(n-\alpha-k-1)} + \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^{k+1}(-1)^{k+1-j}}{(k+1)!(n-\alpha-j)}.$$

По формуле бинома Ньютона получаем

$$-\frac{(1-1)^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}1}{(k+1)!(n-\alpha-k-1)} + \sum_{j=0}^{k} \frac{C_j^{k+1}(-1)^{k+1-j}}{(k+1)!(n-\alpha-j)} = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{C_j^{k+1}(-1)^{k+1-j}}{(k+1)!(n-\alpha-j)}.$$

Лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение доказывается по определению дробного интеграла Римана — Лиувилля.

Лемма 3.1.2. *При $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено*

$${}_cJ_t^n \frac{(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} = \frac{(t-c)^{1-\alpha+j+n}}{\Gamma(2+j-\alpha+n)}.$$

Лемма 3.1.3. *Пусть* $g \in C^{k+1}([c,T])$, $0 < \alpha < 1$, $k, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i < k+1$. *Тогда при* $t \in (c,T]$

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^i g(t) = \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(t-c)^{1-\alpha+j} g^{(i+j)}(c)}{\Gamma(2+j-\alpha)} + {}_cJ_t^{k-i+1} {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t). \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Имеем

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds = $$
$$ = -\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g(s) \Big|_{s=c}^{s=t} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{1-\alpha} g'(s) ds = $$
$$ = \frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g(c) + {}_cJ_t^{2-\alpha} g'(t). $$

Исходя из равенства ${}_cJ_t^{\alpha} {}_cJ_t^{\beta} g = {}_cJ_t^{\alpha+\beta} g$, справедливого при $\alpha, \beta > 0$, и предположения $0 < \alpha < 1$ получаем ${}_cJ_t^{2-\alpha} g' = {}_cJ_t^1 {}_cJ_t^{1-\alpha} g' = {}_cJ_t^1 {}_c^C D_t^{\alpha} g$. Тогда получаем

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} g(t) = \frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g(c) + {}_cJ_t^1 {}_c^C D_t^{\alpha} g(t). \tag{3.1.3}$$

Рассматриваем индукцию по k при $k \geq i$ и фиксированном i. Подстановка в (3.1.3) вместо g производной $D_t^i g$ дает базис индукции $k = i$. Если $k = i+1$, то последовательным применением (3.1.3) получаем

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^i g(t) = \frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g^{(i)}(c) + {}_cJ_t^1 {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^{i+1} g(t) = $$
$$ = \frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g^{(i)}(c) + {}_cJ_t^1 \left(\frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g^{(i+1)}(c) + {}_cJ_t^1 {}_c^C D_t^{\alpha} D_t^{i+1} g(t) \right). $$

Применением леммы 3.1.2 получаем

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^i g(t) = \frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g^{(i)}(c) + \frac{(t-c)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} g^{(i+1)}(c) + {}_cJ_t^2 {}_c^C D_t^{\alpha+i+1} g(t). $$

Следовательно выполнено при $k = i+1$.

Пусть (3.1.2) верно для k и тогда применение (3.1.3) при ${}_c^C D_t^{\alpha+k} g = {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^{k+1} g$ дает

$$ {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^i g(t) = \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} g^{(i+j)}(c) + {}_cJ_t^{k-i+1} {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^{k+1} g(t) = $$

$$= \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} g^{(i+j)}(c) + {}_cJ_t^{k-i+1} \left(\frac{(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} g^{(k+1)}(c) + {}_cJ_t^{1}{}_c^CD_t^{\alpha} D_t^{k+1} g(t) \right).$$

Применением леммы 3.1.2 получаем

$${}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^i g(t) = \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} g^{(i+j)}(c) + \frac{(t-c)^{k-i+2-\alpha}}{\Gamma(k-i+3-\alpha)} g^{(k+1)}(c) +$$

$$+ {}_cJ_t^{k-i+2}{}_c^CD_t^{\alpha+k+1} g(t) = \sum_{j=0}^{k+1-i} \frac{(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} g^{(i+j)}(c) + J_t^{k-i+2}{}_c^CD_t^{\alpha+k+1} g(t).$$

Лемма доказана. □

Теорема 3.1.1. [17, теорема 15.3]. *Для функции f, аналитической на интервале (c,T), при $\alpha > 0$ выполнено равенство*

$${}_cD_t^{\alpha} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(t-c)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(t), \quad t \in (c,T).$$

Лемма 3.1.4. *Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $k, n, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено равенство*

$$\frac{\binom{\alpha+k}{n}}{\Gamma(n-\alpha-k+i+1)} = \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{\alpha+k}{i-j}\binom{\alpha+k+j-i}{n}}{j!\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)}.$$

Доказательство. С помощью (3.1.1) получаем

$$\frac{\binom{\alpha+k}{n}}{\Gamma(n-\alpha-k+i+1)} = \frac{(-1)^{n-1}(\alpha+k)\Gamma(n-\alpha-k)}{\Gamma(1-\alpha-k)\Gamma(n+1)\Gamma(n-\alpha-k+i+1)}$$

По свойству гамма-функции $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ последнее выражение преобразуем к виду

$$\frac{(-1)^{n-1}(\alpha+k)}{\Gamma(1-\alpha-k)\Gamma(n+1)\prod_{j=0}^{i}(n-\alpha-k+i-j)}.$$

Применяем лемму 3.1.1, тогда получим

$$\frac{(-1)^{n-1}(\alpha+k)}{\Gamma(1-\alpha-k)\Gamma(n+1)} \sum_{j=0}^{i} \frac{C_j^i(-1)^{i-j}}{i!(n-\alpha-k+i-j)} =$$

$$
= \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{n-1}(\alpha+k)}{\Gamma(1-\alpha-k)\Gamma(n+1)} \frac{C_j^i(-1)^{i-j}}{i!(n-\alpha-k+i-j)} =
$$

$$
= \sum_{j=0}^{i} \frac{C_j^i(-1)^{i-j}(\alpha+k)}{i!\Gamma(1-\alpha-k)} \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n+i-\alpha-k-j)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)}.
$$

Применяем (3.1.1) и получаем

$$
\sum_{j=0}^{i} \frac{C_j^i(-1)^{i-j}(\alpha+k)}{i!\Gamma(1-\alpha-k)} \frac{\Gamma(1+i-\alpha-k-j)\begin{pmatrix}\alpha+k+j-i\\ n\end{pmatrix}}{(\alpha+k+j-i)\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)} =
$$

$$
= \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i-j-1}(\alpha+k)\Gamma(i-\alpha-k-j)}{j!(i-j)!\Gamma(1-\alpha-k)\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)} \begin{pmatrix}\alpha+k+j-i\\ n\end{pmatrix} =
$$

$$
= \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ i-j\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha+k+j-i\\ n\end{pmatrix}.
$$

Лемма доказана. $\square$

Рассматриваем обобщенное правило Лейбница для производной Римана — Лиувилля порядка $\alpha+k$, $0<\alpha<1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ n\end{pmatrix} D_t^n f {}_cD_t^{\alpha+k-n} g.
$$

Далее используем обозначение ${}_cD_t^{-\alpha} = {}_cJ_t^{\alpha}$ и получаем

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg) = \sum_{n=0}^{k} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ n\end{pmatrix} D_t^n f {}_cD_t^{\alpha+k-n} g + \sum_{n=k+1}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ n\end{pmatrix} D_t^n f {}_cJ_t^{n-\alpha-k} g.
$$

Используя связь между дробными производными Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля, получим

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{k} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ n\end{pmatrix} D_t^n f(t) \left({}_c^C D_t^{\alpha+k-n} g(t) + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{i=0}^{k-n} \frac{g^{(i)}(c)(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{\Gamma(n+i-\alpha-k+1)} \right) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha+k\\ n\end{pmatrix} D_t^n f(t) {}_cJ_t^{n-\alpha-k} g(t).
$$

С помощью леммы 3.1.2 и 3.1.3 и полугруппового свойства дробного интеграла получаем

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{k} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(k-n+1+j)}(c)(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} + \right.
$$

$$
\left. + J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) + \sum_{i=0}^{k-n} \frac{g^{(i)}(c)(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{\Gamma(n+i-\alpha-k+1)} \right) +
$$

$$
+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \left({}_cJ_t^{n-k-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(c)(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} + \right.
$$

$$
\left. + {}_cJ_t^{n-k-1} J_t^{k+1} {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) \right).
$$

Еще раз используем лемму 3.1.2 и выносим дробные производные из скобки с перегруппировкой и заменой $j = i - k + n - 1$. Тогда получаем

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +
$$

$$
+ \sum_{n=0}^{k} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(i)}(c)(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{\Gamma(n+i-\alpha-k+1)} \right) +
$$

$$
+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \left({}_cJ_t^{n-k-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(c)(t-c)^{1-\alpha+j}}{\Gamma(2+j-\alpha)} \right).
$$

С помощью леммы 3.1.2 и смены порядка суммирования получаем

$$
{}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +
$$

$$
+ \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \frac{(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{\Gamma(n+i-\alpha-k+1)}. \tag{3.1.4}
$$

Используя лемму 3.1.4, имеем

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) \frac{(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{\Gamma(n+i-\alpha-k+1)} =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{D_t^n f(t)(t-c)^{n+i-\alpha-k}}{j!\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)} \binom{\alpha+k}{i-j} \binom{\alpha+k+j-i}{n} =
$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k+j-i}{n} \frac{D_t^n f(t)(t-c)^{n+i-\alpha-k-j}}{\Gamma(n+i-\alpha-k-j+1)}.$$

Применяем теорему 3.1.1, тогда

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} {}_cD_t^{\alpha+k+j-i} f.$$

Подставляем полученное в (3.1.4):

$${}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +$$

$$\sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} {}_cD_t^{\alpha+k+j-i} f(t).$$

Имеем ${}_cD_t^{\alpha+k+j-i} f = D_t^j \, {}_cD_t^{\alpha+k-i} f$, поэтому используя связь между производными Римана — Лиувилля и производными Герасимова — Капуто, получаем

$${}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} \times$$

$$\times D_t^j \left({}_c^C D_t^{\alpha+k-i} f(t) + \sum_{l=0}^{k-i} \frac{f^{(l)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) + \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} \times$$

$$\times \left(D_t^j \, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} f(t) + \sum_{l=0}^{k-i} \frac{f^{(l)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k-j}}{\Gamma(l+i-\alpha-k-j+1)} \right). \qquad (3.1.5)$$

В выражении

$$\sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} \sum_{l=0}^{k-i} \frac{f^{(l)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k-j}}{\Gamma(l+i-\alpha-k-j+1)}$$

поменяем порядок суммирования, вынесем $(t-c)^{l+i-\alpha-k-j}$ и домножим числитель и знаменатель на $\Gamma(l+i-\alpha-k+1)$:

$$\sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c)\sum_{l=0}^{k-i}\frac{f^{(l)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}\sum_{j=0}^{i}\frac{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}{j!\Gamma(l+i-\alpha-k-j+1)}\binom{\alpha+k}{i-j}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\frac{f^{(l)}(c)g^{(i)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}\sum_{j=0}^{i}\binom{l+i-\alpha-k}{j}\binom{\alpha+k}{i-j}.$$

Используя (3.1.1), получаем

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\frac{f^{(l)}(c)g^{(i)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}\sum_{j=0}^{i}\binom{l+i-\alpha-k}{j}\binom{\alpha+k}{i-j}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\binom{l+i}{i}\frac{f^{(l)}(c)g^{(i)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}.$$

Следовательно, (3.1.5) принимает вид

$$ {}_cD_t^{\alpha+k}(fg)(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n}D_t^n f(t)J_t^n\,{}_c^CD_t^{\alpha+k}g(t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}g^{(i)}(c)\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j}D_t^j\,{}_c^CD_t^{\alpha+k-i}f(t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\binom{l+i}{i}\frac{f^{(l)}(c)g^{(i)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}.$$

Делаем замену в последней сумме $l+i=m$ и переходим к производной Герасимова — Капуто:

$$ {}_c^CD_t^{\alpha+k}(fg)(t)+\sum_{i=0}^{k}\frac{(fg)^{(i)}(c)(t-c)^{i-\alpha-k}}{\Gamma(i-\alpha-k+1)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n}D_t^n f(t)J_t^n\,{}_c^CD_t^{\alpha+k}g(t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}g^{(i)}(c)\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j}D_t^j\,{}_c^CD_t^{\alpha+k-i}f(t)+$$

$$+\sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{f^{(m-i)}(c)g^{(i)}(c)(t-c)^{m-\alpha-k}}{\Gamma(m-\alpha-k+1)}.$$

Следовательно, с учетом формулы Лейбница для обычных производных, получаем утверждение.

Теорема 3.1.2. *Для* $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и аналитических функций* f, g *имеет место равенство*

$$
\begin{aligned}
{}_c^C D_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) + \\
+\sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c)\sum_{j=0}^{i}\binom{\alpha+k}{i-j}\frac{(t-c)^j}{j!} D_t^j \, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} f(t). \qquad (3.1.6)
\end{aligned}
$$

Замечание 3.1.1. Из (3.1.6) нетрудно получить формулу

$$
\begin{aligned}
{}_c^C D_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) + \\
+\sum_{l=0}^{k}\binom{\alpha+k}{l} J_t^l \, {}_c^C D_t^{\alpha+k} f(t)\sum_{i=l}^{k}\frac{g^{(i)}(c)(t-c)^{(i-l)}}{(i-l)!} + \\
+\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=k-i+1}^{k}\frac{g^{(i)}(c)f^{(l)}(c)(t-c)^{l+i-\alpha-k}}{\Gamma(l+i-\alpha-k+1)}\binom{l+i}{i}.
\end{aligned}
$$

Замечание 3.1.2. В монографии [37, теорема 3.17] доказан аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто порядка $0 < \alpha < 1$. В работе [24] он использовался в виде

$$ {}_c^C D_t^{\alpha}(fg)(t) = f(t) {}_c^C D_t^{\alpha} g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_c J_t^n \, {}_c^C D_t^{\alpha} g(t) D_t^n f(t) + g(c) {}_c^C D_t^{\alpha} f(t)$$

и является частным случаем формулы (3.1.6) при $k = 0$.

В работе [66] получен аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$, но в форме, существенно отличающейся от представленной в теореме 3.1.2.

3.2. Формула продолжения для коэффициента при производной Герасимова — Капуто

Рассматриваем оператор вида

$$\eta = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F.$$

Формула продолжения для коэффициента при производной Герасимова — Капуто, предложенная в работах [5, 24], имеет вид

$$\eta^{\alpha+k} = {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\eta - \theta_t\tau - \theta_S\xi - \theta_q\beta) + \xi\, D_S\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$
$$+\beta\, D_q\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta + \tau\, D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta, \quad 0<\alpha<1, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \qquad (3.2.1)$$

Для неподвижности нижней границы интеграла вводится условие $\tau(c,S,q) = 0$. Для неизменности вида оператора используется условие линейной автономности:

$$\eta = p(t,S,q)\theta + g(t,S,q), \quad \tau_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0.$$

Для вычисления формулы продолжения необходимо вычислить выражение $\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t)$. Используя формулу (3.1.6), имеем

$$\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) = \tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\tau\, {}_cJ_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta -$$
$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau. \qquad (3.2.2)$$

Пользуясь леммами 3.1.2 и 3.1.3, получаем

$${}_cJ_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta = {}_cJ_t^{n-1}\, {}_cJ_t^{1-\alpha} D_t^{k+1}\theta - {}_cJ_t^{n-1}\frac{D_t^{k+1}\theta|_{t=c}(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} =$$
$$= {}_cJ_t^{n-1}\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_cJ_t^{n-1}\frac{D_t^{k+1}\theta|_{t=c}(t-c)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} =$$
$$= {}_cJ_t^{n-1}\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \frac{D_t^{k+1}\theta|_{t=c}(t-c)^{n-\alpha}}{\Gamma(1+n-\alpha)}.$$

Подставляем в (3.2.2):

$$\tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) =$$

$$= \tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \tau {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau \frac{\theta_t^{(k+1)}(c,S,q)(t-c)^{n-\alpha}}{\Gamma(1+n-\alpha)} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau.$$

Применяем лемму 3.1.4 и получаем

$$\tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) =$$

$$= \tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \tau {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+D_t^{k+1}\theta|_{t=c}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{D_t^n\tau(t-c)^{n-\alpha}}{j!\Gamma(n-\alpha-j+1)}\binom{\alpha+k}{k-j}\binom{\alpha+j}{n} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau =$$

$$= \tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \tau {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+D_t^{k+1}\theta|_{t=c}\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+k}{k-j}\frac{(t-c)^j}{j!}\sum_{n=1}^{\infty} D_t^n\tau\frac{(t-c)^{n-\alpha-j}}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}\binom{\alpha+j}{n} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau =$$

$$= \tau D_t {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - \tau {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+D_t^{k+1}\theta|_{t=c}\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+k}{k-j}\frac{(t-c)^j}{j!}\left({}_c D_t^{\alpha+j}\tau - \tau\frac{(t-c)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau.$$

С помощью равенств $D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta = D_t\, {}_c J_t^{1-\alpha} D_t^{k+1}\theta = {}_c D_t^{\alpha} D_t^{k+1}\theta$ переходим к производным Герасимова — Капуто:

$$\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) = \tau\, {}_c^C D_t^{\alpha} D_t^{k+1}\theta + \frac{D_t^{k+1}\theta|_{t=c}(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} -$$

$$-\tau\, {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+D_t^{k+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha+k}{k-j} \frac{(t-c)^j}{j!} \left(D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha}\tau + \tau(c,S,q) \frac{D_t^j (t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) -$$

$$-D_t^{k+1}\theta|_{t=c}\tau \frac{(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha+k}{k-j} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{j!\Gamma(-\alpha-j+1)} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau.$$

В силу равенств $\tau(c,S,q) = 0$, ${}_c^C D_t^{\alpha} D_t^{k+1}\theta = {}_c^C D_t^{\alpha+k+1}\theta$

$$\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) =$$

$$= \frac{D_t^{k+1}\theta|_{t=c}(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta -$$

$$-D_t^{k+1}\theta|_{t=c}\tau \frac{(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha+k}{k-j} \binom{-\alpha}{j} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau.$$

Используем формулы (3.1.1), тогда

$$\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta - {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\tau\theta_t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n \tau J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} D_t^{i+1}\theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau.$$

Подставляем полученное в (3.2.1) с использованием формулы (3.1.6):

$$\eta^{\alpha+k} = {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\eta - \theta_t\tau - \theta_S\xi - \theta_q\beta) + \xi\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_S + \beta\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_q +$$

$$+\tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta = {}_c^C D_t^{\alpha+k}\eta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\tau J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} D_t^{i+1}\theta|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\xi J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_S -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^i\theta_S|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\xi + \xi\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_S -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\beta J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_q + \beta\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_q -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^i\theta_q|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\beta =$$

$$= {}_c^C D_t^{\alpha+k}\eta - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\tau J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} D_t^{i+1}\theta|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\tau -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\xi\, J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_S - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n\beta J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_q -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^i\theta_S|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\xi -$$

$$-\sum_{i=0}^{k} D_t^i\theta_q|_{t=c}\sum_{j=0}^{i}\frac{(t-c)^j}{j!}\binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i}\beta.$$

Для линейно-автономных преобразований получаем

$$\eta^{\alpha+k} = {}_c^C D_t^{\alpha+k}(\eta - \theta_t\tau - \theta_S\xi - \theta_q\beta) + \xi\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_S +$$

$$+\beta\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta_q + \tau D_t\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta =$$

$$= {}_c^C D_t^{\alpha+k} g + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} \left(D_t^n p + \frac{n-\alpha-k}{n+1} D_t^{n+1}\tau \right) J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k}\theta +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} D_t^i \theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} p -$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} D_t^{i+1} \theta|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} \tau -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n \xi J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k} \theta_S - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+k}{n} D_t^n \beta J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k} \theta_q -$$

$$- \sum_{i=0}^{k} D_t^i \theta_S|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} \xi -$$

$$- \sum_{i=0}^{k} D_t^i \theta_q|_{t=c} \sum_{j=0}^{i} \frac{(t-c)^j}{j!} \binom{\alpha+k}{i-j} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} \beta.$$

При $0 < \alpha < 1$ таким образом имеем

$$\eta^t = p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t, \tag{3.2.3}$$

$$\eta^S = p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S, \tag{3.2.4}$$

$$\eta^q = p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q, \tag{3.2.5}$$

$$\eta^{SS} = p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} -$$

$$-2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S), \tag{3.2.6}$$

$$\eta^\alpha = {}_c^C D_t^\alpha g + {}_c^C D_t^\alpha \theta\, (p - \alpha\tau_t) + \theta(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha p +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\, {}_cJ_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta \left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1}\tau \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\, {}_cJ_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_S D_t^n \xi - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\, {}_cJ_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_q D_t^n \beta -$$

$$-\theta_q(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha \beta - \theta_S(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha \xi. \tag{3.2.7}$$

3.3. Группы преобразований эквивалентности

Рассматриваем уравнение

$$ {}_c^C D_t^\alpha \theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \tag{3.3.1} $$

Пусть $0 < \alpha < 1$, $\gamma\sigma \neq 0$ и $\theta = \theta(t, S, q)$. Для учета зависимости произвольного элемента F от θ_q и t вводим дополнительные условия

$$ F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0, \quad F_{{}_c^C D_S^\alpha \theta} = 0. \tag{3.3.2} $$

Генератор группы преобразований эквивалентности ищется в виде

$$ \eta = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F. $$

где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ и ζ зависит от t, S, q, θ, θ_t, θ_S, θ_q, ${}_c^C D_t^\alpha \theta$. Действуем продолженным оператором

$$ \begin{gathered} \tilde{X} = X + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^\alpha\partial_{{}_c^C D_t^\alpha\theta} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} + \\ + \zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^\theta\partial_{F_\theta} + \zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\partial_{F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}}. \end{gathered} $$

на уравнение (3.3.1) и после сужения результата на многообразие M, задаваемое равенствами (3.3.1), (3.3.2), получаем

$$ \begin{gathered} \eta^\alpha - r\eta - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS} - \\ - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{e(T-t)}(\theta_S - q)^2 + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta^S - \beta) - \zeta|_M = 0. \end{gathered} \tag{3.3.3} $$

Будем использовать условие $\tau|_{t=c} = 0$ и линейно-автономные операторы X, для которых

$$ \tau_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \eta = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q). $$

Формулы продолжения по F и ее производным имеют ид

$$ \zeta^S = \tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\beta - F_\theta\tilde{D}_S\eta - F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_S\eta^\alpha - $$

$$-F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q,$$

$$\zeta^q = \tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\beta - F_\theta\tilde{D}_q\eta - F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_q\eta^\alpha -$$

$$-F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q,$$

$$\zeta^\theta = \tilde{D}_\theta\zeta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_S\tilde{D}_\theta\xi - F_q\tilde{D}_\theta\beta - F_\theta\tilde{D}_\theta\eta - F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_\theta\eta^\alpha -$$

$$-F_{\theta_t}\tilde{D}_\theta\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_\theta\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_\theta\eta^q,$$

$$\zeta^{{}_c^C D_t^\alpha\theta} = \tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\zeta - F_t\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tau - F_S\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\xi - F_q\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\beta - F_\theta\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\eta -$$

$$-F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\eta^q,$$

$$\zeta^{\theta_t} = \tilde{D}_{\theta_t}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_t}\eta - F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^\alpha -$$

$$-F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q,$$

$$\zeta^{\theta_S} = \tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_S}\eta - F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^\alpha -$$

$$-F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q,$$

где операторы полной производной имеют вид

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \theta_t\frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots, \quad D_S = \frac{\partial}{\partial S} + \theta_S\frac{\partial}{\partial\theta} + \theta_{SS}\frac{\partial}{\partial\theta_S} + \ldots,$$

$$D_q = \frac{\partial}{\partial q} + \theta_q\frac{\partial}{\partial\theta} + \ldots, \quad \tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + F_t\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_S = \frac{\partial}{\partial S} + F_S\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_q = \frac{\partial}{\partial q} + F_q\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} + F_\theta\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_{\theta_t} = \frac{\partial}{\partial\theta_t} + F_{\theta_t}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \frac{\partial}{\partial\theta_S} + F_{\theta_S}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_{\theta_q} = \frac{\partial}{\partial\theta_q} + F_{\theta_q}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{{}_c^C D_t^\alpha\theta} = \frac{\partial}{\partial {}_c^C D_t^\alpha\theta} + F_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}\frac{\partial}{\partial F} + \ldots$$

После действия продолженного оператора $\tilde{X}$ на (3.3.2) и сужения на многообразие M получаем

$$\zeta^S|_M = 0,\ \zeta^q|_M = 0,\ \zeta^\theta|_M = 0,\ \zeta^{{}_c^C D_t^\alpha\theta}|_M = 0,\ \zeta^{\theta_t}|_M = 0,\ \zeta^{\theta_S}|_M = 0.$$

Распишем их:

$$\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(p_{Sq}\theta + g_{Sq} + p_S\theta_q - \theta_t\tau_{Sq} - \theta_S\xi_{Sq} - \theta_q\beta_{Sq})|_M = 0,$$

$$\zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(p_{qq}\theta + g_{qq} + p_q\theta_q - \theta_t\tau_{qq} - \theta_S\xi_{qq} - \theta_q\beta_{qq})|_M = 0,$$

$$\zeta_\theta - F_{\theta_q}p_q|_M = 0, \quad \zeta_{{}_c^C D_t^\alpha\theta}|_M = 0, \quad \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\tau_q|_M = 0, \quad \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\xi_q|_M = 0.$$

Разделение переменных дает равенства

$$\zeta_{{}_c^C D_t^\alpha\theta} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \tau_q = 0, \quad \tau_S = 0, \quad (3.3.4)$$

$$p_q = 0, \quad p_S - \beta_{Sq} = 0, \quad \beta_{qq} = 0, \quad \xi_q = 0, \quad g_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0. \quad (3.3.5)$$

Теперь подставляем (3.2.3) в (3.3.3) с учетом равенства $\tau_S = 0$ из (3.3.4):

$$\begin{gathered}
{}_c^C D_t^\alpha g + {}_c^C D_t^\alpha\theta(p - \alpha\tau_t) + \theta(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha p - \theta_S(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha\xi + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta_S D_t^n\xi - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta_q D_t^n\beta - \theta_q(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha(\beta) - rp\theta - rg - \\
-(\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) + \\
+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) - \\
-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + \\
+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta|_M = 0. \quad (3.3.6)
\end{gathered}$$

Переходя на многообразие M в (3.3.6), подставляем ${}_c^C D_t^\alpha\theta$ из (3.3.1):

$$\begin{gathered}
(p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right) + \\
+{}_c^C D_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) + \\
+\theta(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha p - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta_S D_t^n\xi - \theta_S(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha(\xi) - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^C D_t^\alpha\theta_q D_t^n\beta - \theta_q(c,S,q)\,{}_c^C D_t^\alpha\beta -
\end{gathered}$$

$$-rp\theta - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S) +$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{Sq}\beta_S + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) -$$
$$-\frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \zeta = 0. \qquad (3.3.7)$$

Дифференцирование (3.3.7) по θ_{Sq} дает $\beta_S = 0$. Его подстановка в равенство $p_S - \beta_{Sq} = 0$ из (3.3.5) влечет $p_S = 0$. Разделение по переменным θ, θ_S, θ_{SS}, θ_{Sq}, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_S$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q$ дает уравнения

$${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta: \; D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3.3.8)$$

$${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_S: \; D_t^n\xi = 0, \quad {}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q: \; D_t^n\beta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3.3.9)$$

$$\theta_{SS}: \frac{\sigma^2}{2}(-(p - \alpha\tau_t) + p - 2\xi_S) = 0, \qquad (3.3.10)$$

$$\theta_{Sq}: \beta_S = 0, \quad p_S = 0, \qquad (3.3.11)$$

$$\theta_S^2: -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \alpha\tau_t) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \xi_S) = 0, \quad (3.3.12)$$

$$\theta_S: (p - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu(p - \xi_S) -$$
$$-\frac{\sigma^2}{2}\xi_{SS} + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta - q(p - \xi_S)) = 0, \qquad (3.3.13)$$

$$\theta: r(p - \alpha\tau_t) - rp = 0, \qquad (3.3.14)$$

$$1: (p - \alpha\tau_t)\left((\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) +$$
$$+{}_c^CD_t^\alpha g + \theta(c, S, q)\,{}_c^CD_t^\alpha p - \theta_S(c, S, q)\,{}_c^CD_t^\alpha\xi - \theta_q(c, S, q)\,{}_c^CD_t^\alpha\beta -$$
$$-rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2}g_{SS} -$$
$$-\frac{r\tau q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - \zeta = 0. \qquad (3.3.15)$$

Из (3.3.9) и (3.3.14) ввиду условия $0 < \alpha < 1$ получаем, что $\xi_t = 0$, $\beta_t = 0$, $r\tau_t = 0$. С учетом этих равенств и того, что $\alpha \neq 0$ и $\tau_S = 0$ из (3.3.4), получаем из выражения $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ (3.3.10) дифференцированием по t и S $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$. Следовательно, подставляя $\tau_{tt} = 0$ в (3.3.8), получаем $p_t = 0$ при

$n = 1$.

Следовательно, для p получаем уравнения $p_q = 0$ из (3.3.5), $p_S = 0$ из (3.3.11) и выше полученное $p_t = 0$. Отсюда $p = \text{const}$.

Для функций τ, ξ, β имеем уравнения $\tau_{tt} = 0$, τ_q и $\tau_S = 0$ из (3.3.4), $\xi_t = 0$, $\xi_{SS} = 0$, $\xi_q = 0$ из (3.3.5), $\beta_t = 0$, $\beta_S = 0$ из (3.3.11) и $\beta_{qq} = 0$ из (3.3.5). Поэтому с учетом $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ из (3.3.10) и условия на неподвижность нижнего предела $\tau|_{t=c} = 0$, и равенства $r\tau_t = 0$ из (3.3.14) интегрирование дает

$$p = \text{const},\ \tau = M(t-c),\ rM = 0,\ \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A,\ \beta = Bq + D. \tag{3.3.16}$$

Из (3.3.12), (3.3.13) получаем

$$\theta_S^2 : \alpha\tau_t - r\tau + p - 2\xi_S = 0, \tag{3.3.17}$$

$$\theta_S : \mu(\alpha\tau_t - \xi_S) + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} +$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta + q(\xi_S - \alpha\tau_t)) = 0, \tag{3.3.18}$$

Теперь подставляем (3.3.16) в (3.3.17), (3.3.18), (3.3.15) с использованием ${}_c^C D_t^\alpha 1 = 0$ и получаем

$$\theta_S^2 : -rM(t-c) + p = 0, \tag{3.3.19}$$

$$\theta_S : \mu\frac{\alpha M}{2} + rM(t-c)q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} +$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - Bq - D - q\frac{\alpha M}{2}) = 0, \tag{3.3.20}$$

$$1 : (p - \alpha M)\left((\mu - rS)q - \frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + {}_c^C D_t^\alpha g - rg -$$

$$-(\mu - rS)(Bq + D) + rq\left(\frac{\alpha M}{2}S + A\right) + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2}g_{SS} -$$

$$-\frac{rM(t-c)q^2}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - Bq - D) - \zeta = 0. \tag{3.3.21}$$

Подставляя в (3.3.19) уже полученное в (3.3.16) $rM = 0$, получаем, что $p = 0$. Так как $g_{Sq} = 0$ в (3.3.5), дифференцированием (3.3.20) по q получаем $B =$

$rM(t-c)-\frac{\alpha M}{2}=-\alpha M/2$. Поэтому из (3.3.19), (3.3.20) следует, что

$$p=0, \quad B=-\frac{\alpha M}{2}, \quad g_S=D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}. \tag{3.3.22}$$

Поскольку в (3.3.5) $g_{qq}=0$, $g_{Sq}=0$, то интегрирование g_S дает

$$g=S\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)+N(t)q+V(t). \tag{3.3.23}$$

Следовательно, подстановкой (3.3.22), (3.3.23) и $rM=0$ в (3.3.21) получим

$$-\alpha M\left((\mu-rS)q-\frac{q^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+F\right)+S\,{}_c^CD_t^\alpha\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)+$$
$$+q{}_c^CD_t^\alpha N+{}_c^CD_t^\alpha V-rS\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)-rNq-rV-$$
$$-(\mu-rS)\left(-\frac{\alpha M}{2}q+D\right)+rqA+\mu D-\mu^2\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}+$$
$$+q\mu\frac{\alpha M}{2}-q^2\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{\alpha M}{2}-\zeta=0.$$

Из равенств $\zeta_S=0$, $\zeta_q=0$, $\zeta_\theta=0$ из (3.3.4) следуют уравнения

$$q^2:\frac{\alpha Mq^2}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}-q^2\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\frac{\alpha M}{2}=0, \quad Sq: r\alpha M-r\frac{\alpha M}{2}=0,$$
$$q:-\mu\alpha M+{}_c^CD_t^\alpha N-rN+\mu\frac{\alpha M}{2}+rA+\mu\frac{\alpha M}{2}=0,$$
$$S:{}_c^CD_t^\alpha\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)-r\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)+rD=0,$$
$$-\alpha MF+{}_c^CD_t^\alpha V-rV-\mu^2\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\zeta=0.$$

Сокращение с использованием $rM=0$ дает

$$q:{}_c^CD_t^\alpha N-rN+rA=0, \tag{3.3.24}$$

$$S:{}_c^CD_t^\alpha\left(D-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)=0, \tag{3.3.25}$$

$$-\alpha MF+{}_c^CD_t^\alpha V-rV-\mu^2\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\zeta=0. \tag{3.3.26}$$

Тогда из (3.3.16), (3.3.22) и (3.3.23) получаем

$$\eta = S\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) + N(t)q + V(t), \quad rM = 0, \tag{3.3.27}$$

$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = -\frac{\alpha M}{2}q + D. \tag{3.3.28}$$

Вычисляем производную Герасимова — Капуто в (3.3.25):

$$\begin{gathered}{}_c^C D_t^\alpha \left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^t (t-s)^{-\alpha}\frac{d}{ds}\left(D - \mu\frac{\alpha M e^{r(s-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)ds = \\ = \mu\frac{\alpha r M}{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^t (t-s)^{-\alpha}e^{rs}ds = 0,\end{gathered}$$

так как $rM = 0$. Следовательно уравнение (3.3.25) выполняется.

3.3.1. Случай $r \neq 0$

Из предположения $r \neq 0$ и (3.3.16) получаем $M = 0$. Уравнение (3.3.24) при $0 < \alpha < 1$ после замены вида $N = A + \tilde{N}$ имеет решение $\tilde{N} = bE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)$, тогда получаем $N = A + bE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)$. Из (3.3.26), (3.3.27) следует

$$\eta = DS + (A + bE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha))q + V(t), \tag{3.3.29}$$

$$\tau = 0, \quad \xi = A, \quad \beta = D, \quad \zeta = {}_c^C D_t^\alpha V - rV. \tag{3.3.30}$$

3.3.2. Случай $r = 0$

Если $r = 0$, то решение (3.3.24) имеет вид $N = b$. Тогда из (3.3.26), (3.3.27) получаем

$$\eta = S\left(D - \mu\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}\right) + bq + V(t), \tag{3.3.31}$$

$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = -\frac{\alpha M}{2}q + D,$$

$$-\alpha M F + {}_c^C D_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} - \zeta = 0.$$

3.3.3. Теорема о порождении групп преобразований эквивалентности

Таким образом, получено утверждение.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$.

1. *Алгебры Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (3.3.1) *при* $r = 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_S, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = q\partial_\theta,$$
$$Y_4 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S\partial_S - \alpha q\partial_q - \frac{\alpha\mu}{\gamma\sigma^2}\partial_\theta + \left(-2\alpha F - \frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F,$$
$$Y_V = V\partial_\theta + {}_cD_t^\alpha V\partial_F.$$

2. *Алгебра Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (3.3.1) *при* $r \neq 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_S + q\partial_\theta, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)q\partial_\theta,$$
$$Y_V = V\partial_\theta + ({}_cD_t^\alpha V - rV)\partial_F.$$

3.4. Групповая классификация

Рассматриваем уравнение

$$ {}_c^CD_t^\alpha\theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t,\theta_q). \tag{3.4.1}$$

Пусть $0 < \alpha < 1, \gamma\sigma \neq 0, \theta = \theta(t,S,q)$. Генератор допускаемой группы будем искать в виде $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$. Его действие на уравнение (3.4.1) дает равенство

$$\eta^\alpha - r\eta - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\eta^S + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{SS} - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(\eta^S - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_M = 0. \tag{3.4.2}$$

Подставляем формулы продолжения (3.2.3) в (3.4.2) и получаем

$$
\begin{gathered}
{}_c^C D_t^\alpha g + {}_c^C D_t^\alpha(\theta)(p-\alpha\tau) - \theta_S(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha \xi + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1}\tau\right) + \\
+\theta(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha p - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_S D_t^n \xi - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_q D_t^n \beta - \theta_q(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha \beta - \\
-r(p\theta+g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\left(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S\right) + \\
+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \\
+\theta_{SS}(p - 2\xi_S)) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + \\
+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) - \\
-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q)|_M = 0.
\end{gathered}
$$

Переход на многообразие M дает

$$
\begin{gathered}
(p-\alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right) + \\
+{}_c^C D_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1} D_t^{n+1}\tau\right) + \\
+\theta(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha p - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_S D_t^n \xi - \theta_S(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha \xi - \\
-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\, {}_c J_t^n\, {}_c^C D_t^\alpha \theta_q D_t^n \beta - \theta_q(c,S,q)\, {}_c^C D_t^\alpha (\beta) - \\
-r(p\theta+g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\left(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S\right) + \\
+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_t\tau_{SS} - \theta_S\xi_{SS} - \theta_q\beta_{SS} - 2\theta_{St}\tau_S - 2\theta_{Sq}\beta_S + \\
+\theta_{SS}(p - 2\xi_S)) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 +
\end{gathered}
$$

$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_t\tau_S - \theta_S\xi_S - \theta_q\beta_S - \beta) -$$
$$-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (3.4.3)$$

Рассматриваем здесь переменные θ, θ_t, θ_S, θ_q, θ_{SS}, θ_{Sq}, θ_{St}, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_S$ при $n = 1, 2, \ldots$ как независимые. Дифференцируем (3.4.3) по θ_{St}, θ_{Sq}, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_S$ и получаем

$$\tau_S = 0, \quad \beta_S = 0, \quad \xi_t = 0, \quad \beta_t = 0. \qquad (3.4.4)$$

Подставляем эти равенства в (3.4.3) и учитываем, что ${}_c^CD_t^\alpha 1 = 0$:

$$(p - \alpha\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F\right) +$$
$$+{}_c^CD_t^\alpha g + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\,{}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta\left(D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau\right) +$$
$$+\theta(c,S,q)\,{}_c^CD_t^\alpha p - r(p\theta + g) - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu\left(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S\right) +$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}(p_{SS}\theta + g_{SS} + 2p_S\theta_S - \theta_S\xi_{SS} + \theta_{SS}(p - 2\xi_S)) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(p_S\theta + g_S + p\theta_S - \theta_S\xi_S - \beta) -$$
$$-F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (3.4.5)$$

После этого проводим разделение переменных в (3.4.5) относительно θ, θ_t, θ_S, θ_{St}, θ_{SS}, θ_{Sq}, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_S$, ${}_cJ_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q$ и получаем

$${}_cD_t^{\alpha-n}\theta : D_t^n p + \frac{n-\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3.4.6)$$
$$\theta_{SS} : -\frac{\sigma^2}{2}(p - \alpha\tau_t) + \frac{\sigma^2}{2}(p - 2\xi_S) = 0, \qquad (3.4.7)$$
$$\theta_S^2 : -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \alpha\tau_t) - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(p - \xi_S) = 0, \qquad (3.4.8)$$
$$\theta_S : (p - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu(p - \xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}(2p_S - \xi_{SS}) +$$
$$+r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta - q(p - \xi_S)) + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \qquad (3.4.9)$$
$$\theta_S\theta : \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} p_S = 0, \quad \theta_t : F_{\theta_q}\tau_q = 0, \qquad (3.4.10)$$

$$\theta : r(p - \alpha\tau_t) - rp + \mu p_S + \frac{\sigma^2}{2} p_{SS} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} p_S - F_{\theta_q} p_q = 0, \qquad (3.4.11)$$

$$1 : (p - \alpha\tau_t)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 + F\right) +$$
$$+{}_cD_t^\alpha g - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 -$$
$$-q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (3.4.12)$$

Из (3.4.7) получаем $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$. Учитывая это равенство в (3.4.8), получаем $p = r\tau$. Применяя $\tau_S = 0$ и $\xi_S = 0$ из (3.4.4) к $\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0$ из (3.4.4) при $\alpha \neq 0$ получаем $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$. Поэтому в силу равенства $p_t + \frac{1-\alpha}{2}\tau_{tt} = 0$ из (3.4.6) получаем $p_t = 0$, а значит, $r\tau_t = 0$. Из (3.4.10) получаем $p_S = 0$. Таким образом,

$$\alpha\tau_t - 2\xi_S = 0,\ \ \tau_{tt} = 0,\ \ r\tau_t = 0,\ \ p_t = 0,\ \ p_S = 0,\ \ \xi_{SS} = 0,\ \ p = r\tau. \qquad (3.4.13)$$

Подставляя эти равенства в (3.4.6)–(3.4.12) и учитывая, что $\xi_S = \alpha\tau_t/2$, получим

$$\theta_S : (r\tau - \alpha\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu\left(r\tau - \frac{\alpha\tau_t}{2}\right) + r\tau q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} +$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(g_S - \beta - q\left(r\tau - \frac{\alpha\tau_t}{2}\right)\right) + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \qquad (3.4.14)$$

$$\theta_t : F_{\theta_q}\tau_q = 0, \qquad (3.4.15)$$

$$1 : (r\tau - \alpha\tau_t)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 + F\right) +$$
$$+{}_c^CD_t^\alpha g - rg - (\mu - rS)\beta + rq\xi + \mu g_S + \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 -$$
$$-q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(g_S - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + \theta_q(r\tau - \beta_q)) = 0. \qquad (3.4.16)$$

Интегрирование (3.4.4) и (3.4.13) при условии $\tau|_{t=c} = 0$ дает

$$\eta = rM(q)\theta + g(t, S, q), \quad \tau = M(q)(t - c), \quad \xi = \frac{\alpha M(q)}{2} S + A(q), \qquad (3.4.17)$$

$$\beta = \beta(q), \quad rM(q) = 0. \qquad (3.4.18)$$

Так как $rM = 0$, то $r\tau = 0$. Подставляем (3.4.17), (3.4.18) в (3.4.14)–(3.4.16):

$$\theta_S : \mu\frac{\alpha M}{2} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(g_S - \beta - q\frac{\alpha M}{2}\right) + F_{\theta_q}\left(\frac{\alpha M_q}{2} S + A_q\right) = 0, \qquad (3.4.19)$$

$$\theta_t : F_{\theta_q} M_q = 0, \tag{3.4.20}$$

$$1 : -\alpha M \left(\mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2 + F \right) + {}_c^C D_t^\alpha g - rg - (\mu - rS)\beta + rqA + \mu g_S +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2} g_{SS} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} (g_S - \beta) - F_t M(t-c) - F_{\theta_q}(g_q - \theta_q \beta_q) = 0. \tag{3.4.21}$$

3.4.1. Уравнение с нелинейной функцией F

Дифференцированием (3.4.19)–(3.4.21) по θ_q получим

$$M_q = 0, \quad A_q = 0, \tag{3.4.22}$$

$$(\beta_q - \alpha M) F_{\theta_q} - F_{t\theta_q} M(t-c) - F_{\theta_q\theta_q}(g_q - \theta_q \beta_q) = 0. \tag{3.4.23}$$

Дифференцируем (3.4.23) по S и получаем $g_{Sq} = 0$. После дифференцирования (3.4.19) по q и подстановки (3.4.22) имеем

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} \left(g_{Sq} - \beta_q - \frac{\alpha M}{2} \right) = 0$$

Отсюда $\beta_q = -\alpha M/2$. Так как $\beta_{qq} = 0$ в (3.4.22), дифференцирование (3.4.23) по q дает $g_{qq} = 0$. Тогда

$$\beta_q = -\frac{\alpha M}{2}, \quad g_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0. \tag{3.4.24}$$

Интегрирование (3.4.24) дает

$$\beta = -\frac{\alpha M}{2} q + L, \tag{3.4.25}$$

а подстановкой в (3.4.19) получим $g_S = L - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}$. Интегрированием получаем

$$g = \left(L - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} \right) S + N(t) q + V(t). \tag{3.4.26}$$

Подстановка (3.4.25), (3.4.26) в (3.4.21) дает

$$-\alpha M (\mu q + F) + S {}_c^C D_t^\alpha \left(L - \mu \frac{\alpha M e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} \right) + q {}_c^C D_t^\alpha N + {}_c^C D_t^\alpha V -$$

$$-r\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)S-rNq-rV-(\mu-rS)\left(-\frac{\alpha M}{2}q+L\right)+rqA+$$
$$+\mu\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)+\mu\frac{\alpha Mq}{2}-F_tM(t-c)-F_{\theta_q}\left(N+\theta_q\frac{\alpha M}{2}\right)=0.$$

Рассматриваем полученное как многочлен от S и q, тогда

$$S:{}_c^CD_t^\alpha\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)-r\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)+rL=0,$$
$$Sq:-r\frac{\alpha M}{2}=0,\quad q:-\mu\alpha M+{}_c^CD_t^\alpha N-rN+\mu\frac{\alpha M}{2}+rA+\mu\frac{\alpha M}{2}=0,$$
$$1:{}_c^CD_t^\alpha V-rV-\mu L+\mu\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)-$$
$$-\alpha MF-F_tM(t-c)-F_{\theta_q}\left(N+\theta_q\frac{\alpha M}{2}\right)=0.$$

Сокращаем полученное с использованием $rM=0$ из (3.4.17) и получаем

$$S:{}_c^CD_t^\alpha\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)=-\mu\frac{\alpha rMe^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}{}_cJ_t^{1-\alpha}e^{rt}=0,$$
$$q:{}_c^CD_t^\alpha N-rN+rA=0, \tag{3.4.27}$$
$$1:{}_c^CD_t^\alpha V-rV-\mu^2\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\alpha MF-F_tM(t-c)-$$
$$-F_{\theta_q}\left(N+\theta_q\frac{\alpha M}{2}\right)=0. \tag{3.4.28}$$

Выписываем (3.4.17), (3.4.25), (3.4.26) с подстановкой $rM=0$:

$$\tau=M(t-c),\quad \xi=\frac{\alpha M}{2}S+A,\quad \beta=-\frac{\alpha M}{2}q+L, \tag{3.4.29}$$
$$\eta=\left(L-\mu\frac{\alpha Me^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\right)S+N(t)q+V(t). \tag{3.4.30}$$

3.4.2. Случай $r\neq 0$

Пусть $r\neq 0$, тогда $M=0$. Следовательно, (3.4.27)–(3.4.30) придут к виду

$${}_c^CD_t^\alpha N-rN+rA=0,\quad {}_c^CD_t^\alpha V-rV-F_{\theta_q}N=0, \tag{3.4.31}$$
$$\tau=0,\quad \xi=A,\quad \beta=L,\quad \eta=LS+N(t)q+V(t). \tag{3.4.32}$$

Дифференцируем второе уравнение в (3.4.31) по θ_q и получаем $N=0$. Тогда из первого уравнения в (3.4.31) следует, что $A=0$. Тогда (3.4.31), (3.4.32) имеют вид $E=0$, $N=0$, ${}_c^C D_t^\alpha V - rV = 0$, $\tau=0$, $\xi=0$, $\beta=L$, $\eta=LS+M(t)$. Приходим к случаю произвольной функции F, операторы имеют вид

$$X_1 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

3.4.3. Случай $r=0$

Подстановка $r=0$ в (3.4.27)–(3.4.29) дает $N=b$,

$${}_c^C D_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} - \alpha MF - F_t M(t-c) - F_{\theta_q}\left(b+\theta_q\frac{\alpha M}{2}\right) = 0. \qquad (3.4.33)$$

Теперь из (3.4.29), (3.4.30) получаем

$$\tau = M(t-c), \quad \xi = \frac{\alpha M}{2}S + A, \quad \beta = -\frac{\alpha M}{2}q + L,$$
$$\eta = \left(L - \mu\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2}\right)S + bq + V(t).$$

Представим (3.4.33) в виде

$$\alpha MF + F_t M(t-c) + F_{\theta_q}\left(\lambda + \theta_q\frac{\alpha M}{2}\right) - \kappa(t) = 0.$$

1. Если $A \neq 0$, сделаем замену переменных, учитывая, что $0<\alpha<1$:

$$F = \widetilde{F}(t-c)^{-\alpha} + (t-c)^{-\alpha}\int\frac{\kappa(t)}{M}(t-c)^{\alpha-1}dt, \quad \theta_q = \widetilde{\theta}_q - \frac{2\lambda}{\alpha M}.$$

Тогда получаем уравнение $(t-c)\widetilde{F}_t + \frac{\alpha}{2}\widetilde{\theta}_q\widetilde{F}_{\widetilde{\theta}_q} = 0$, решение которого имеет вид $\widetilde{F} = \widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\widetilde{\theta}_q\right)$. Отсюда

$$F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q + \tilde{\lambda}(t-c)^{-\alpha/2}\right) + (t-c)^{-\alpha}\int_{t_1}^t \kappa(t)(t-c)^{\alpha-1}dt.$$

Применение группы преобразований эквивалентности, порожденной оператором Y_3, дает

$$F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right) + (t-c)^{-\alpha}\int_{t_1}^t \kappa(t)(t-c)^{\alpha-1}dt.$$

а с помощью группы преобразований эквивалентности, порожденной оператором Y_V, получим $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$. Его подстановка в определяющее уравнение (3.4.33) дает

$$
{}_cD_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} - \alpha M(t-c)^{-\alpha}\widetilde{F} + \alpha M(t-c)^{-\alpha}\widetilde{F} + \frac{\alpha}{2}M(t-c)^{-3\alpha/2}\widetilde{F}'\theta_q -
$$

$$
-(t-c)^{-3\alpha/2}\widetilde{F}'\left(b + \theta_q\frac{\alpha M}{2}\right) = 0.
$$

Отсюда ${}_c^CD_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} - b\widetilde{F}' = 0$. Поскольку $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ по предположению, получаем два уравнения

$$
N = b = 0, \quad {}_c^CD_t^\alpha V - \mu^2\frac{\alpha M}{2\gamma\sigma^2} = 0,
$$

$$
V = c + \frac{\alpha\mu^2 M}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
$$

Следовательно, получаем

$$
X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S, \quad X_3 = \partial_q + S\partial_\theta,
$$

$$
X_4 = (t-c)\partial_t + \frac{\alpha}{2}S\partial_S - \frac{\alpha}{2}q\partial_q + \left(-\frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}S + \frac{\alpha\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta,
$$

для специализации свободного элемента $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$.

2. Если $M = 0$, то по предположению $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ получаем $N = 0$ и следовательно F — произвольная функция, а соответсвующий базис операторов имеет вид

$$
X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S, \quad X_3 = \partial_q + S\partial_\theta.
$$

3.4.4. Теорема о групповой классификации

Сформулируем полученные в разделе 3.4 результаты.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$.

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (3.3.1) *при* $r \neq 0$ *и произвольной функции* F, *такой, что* $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *имеет вид*

$$
X_1 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.
$$

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (3.3.1) *при* $r = 0$ *и произвольной функции* F, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *которая не эквивалентна функции* $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S, \quad X_3 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (3.3.1) *при* $r = 0$ *и* $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S, \quad X_3 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_4 = (t-c)\partial_t + \frac{\alpha}{2}S\partial_S - \frac{\alpha}{2}q\partial_q + \left(-\frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}S + \frac{\alpha\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

3.5. Инвариантные подмодели и решения

3.5.1. Инвариантные решения при $r = 0$ и $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$

При $r = 0$, $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$ допускаемая алгебра L_4 имеет базис

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_S, \quad X_3 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_4 = (t-c)\partial_t + \frac{\alpha}{2}S\partial_S - \frac{\alpha}{2}q\partial_q + \left(-\frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}S + \frac{\alpha\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta, .$$

Ненулевые коммутаторы имеют вид

$$[X_2, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_4] = \frac{\alpha}{2}X_2 - \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}X_1, \quad [X_3, X_4] = -\frac{\alpha}{2}X_3.$$

Используя структурные константы L_4 по формуле $E_i = \sum_{j,k=1}^{n} C_{i,j}^k e_j\partial_{e_k}$ получаем

$$E_1 = 0, \quad E_2 = e_3\partial_{e_1} + \frac{\alpha}{2}e_4\partial_{e_2} - \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}e_4\partial_{e_1},$$
$$E_3 = -e_2\partial_{e_1} - \frac{\alpha}{2}e_4\partial_{e_3}, \quad E_4 = -\frac{\alpha}{2}e_2\partial_{e_2} + \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}e_2\partial_{e_1} + \frac{\alpha}{2}e_3\partial_{e_3}.$$

Тогда непрерывные внутренние автоморфизмы имеют вид

$$E_2 : \bar{e}_1 = e_1 + e_3a_2 - \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}e_4a_2, \quad \bar{e}_2 = e_2 + \frac{\alpha}{2}e_4a_2,$$

$$E_3 : \bar{e}_1 = e_1 - e_2 a_3, \quad \bar{e}_3 = e_3 - \frac{\alpha}{2} e_4 a_3,$$
$$E_4 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} e_2 (1 - e^{-\frac{\alpha}{2} a_4}), \quad \bar{e}_2 = e_2 e^{-\frac{\alpha}{2} a_4}, \quad \bar{e}_3 = e_3 e^{\frac{\alpha}{2} a_4}.$$

Также отметим автоморфизм $E_- : \bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_2 = -e_2$.

1. Предполагаем $e_4 \neq 0$. Тогда, используя E_2, получаем $e_2 = 0$, а при помощи E_3 — $e_3 = 0$. Получаем подалгебру $(b, 0, 0, 1)$, т. е. $\langle X_4 + bX_1 \rangle$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Предполагаем, что $e_4 = 0$.

2.1. Если $e_3 \neq 0$, то с помощью E_2 получим $e_1 = 0$, а используя E_-, придем к вариантам $(0, 1, 1, 0)$ и $(0, 0, 1, 0)$, т. е. $\langle X_2 + X_3 \rangle$ и $\langle X_3 \rangle$.

2.2. При $e_3 = e_4 = 0$, $e_2 \neq 0$, применением автоморфизма E_3 получим $e_1 = 0$, имеем подалгебру $\langle X_2 \rangle$.

2.3. Остался случай $e_3 = e_4 = e_2 = 0$. Получаем подалгебру $\langle X_1 \rangle$.

Рассмотрим двумерные подалгебры.

Для вектора X_1 рассматриваем второй базисный вектор в виде $\delta X_2 + \epsilon X_3 + \kappa X_4$. Вычисляем коммутатор $[X_1, \delta X_2 + \epsilon X_3 + \kappa X_4] = 0$. Если $\kappa \neq 0$, то внутренние автоморфизмы E_2, E_3 дают подалгебру $\langle X_1, X_4 \rangle$. Если $\kappa = 0$, то при $\epsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$ получаем при помощи E_4, E_- подалгебру $\langle X_1, X_2 + X_3 \rangle$. Остаются подалгебры $\langle X_1, X_2 \rangle$, $\langle X_1, X_3 \rangle$.

Для вектора X_2 рассматриваем второй базисный вектор в виде $\delta X_1 + \epsilon X_3 + \kappa X_4$. Вычисляем коммутатор $[X_2, \delta X_1 + \epsilon X_3 + \kappa X_4] = \epsilon X_1 + \frac{\alpha}{2}\kappa X_2 - \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}\kappa X_1 = 0$. Если $\kappa \neq 0$, то получаем $\epsilon = \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}\kappa$. При помощи E_3 получаем $\epsilon = \kappa = 0$ и подалгебру $\langle X_1, X_2 \rangle$. Если же $\kappa = 0$, то получаем коммутатор $[X_2, \delta X_1 + \epsilon X_3] = \epsilon X_1 = 0$, а значит, вновь подалгебру $\langle X_1, X_2 \rangle$.

Для вектора X_3 рассматриваем второй базисный вектор в виде $\delta X_1 + \epsilon X_2 + \kappa X_4$. Вычисление коммутатора дает $[X_3, \delta X_1 + \epsilon X_2 + \kappa X_4] = -\epsilon X_1 - \frac{\alpha}{2}\kappa X_3 = 0$. Тогда при $\kappa \neq 0$ из условий на коммутатор получаем, что $\epsilon = 0$. Получена подалгебра $\langle X_3, X_4 + bX_1 \rangle$. Если $\kappa = 0$, то получается ранее полученная подалгебра $\langle X_1, X_3 \rangle$.

Для вектора $X_2 + X_3$ рассматриваем второй базисный вектор в виде

$\delta X_1+\epsilon X_2+\kappa X_4$. Вычисление коммутатора дает $[X_2+X_3, \delta X_1+\epsilon X_2+\kappa X_4] = -\epsilon X_1 - \frac{\alpha}{2}\kappa X_3 + \frac{\alpha}{2}\kappa X_2 - \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}\kappa X_1$. Так как оператор $-\frac{\alpha}{2}\kappa X_3 + \frac{\alpha}{2}\kappa X_2$ линейно независим от $X_2 + X_3$ при $\kappa \neq 0$, то $\kappa = 0$. Следовательно, $\epsilon = 0$ и получаем ранее полученную подалгебру $\langle X_1, X_2 + X_3\rangle$.

Для вектора $X_4 + bX_1$ рассматриваем второй базисный вектор в виде $\delta X_1+\epsilon X_2+\kappa X_3$. Вычисление коммутатора дает $[X_4+bX_1, \delta X_1+\epsilon X_2+\kappa X_3] = -\frac{\alpha}{2}\epsilon X_2 + \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}\epsilon X_1 + \frac{\alpha}{2}\kappa X_3$. Так как результат вычисления коммутатора не содержит X_4, то он должен линейно зависеть от второго базисного вектора. Следовательно,

$$\frac{\alpha}{2}n\delta X_1 + \frac{\alpha}{2}n\epsilon X_2 + \frac{\alpha}{2}n\kappa X_3 = -\frac{\alpha}{2}\epsilon X_2 + \frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}\epsilon X_1 + \frac{\alpha}{2}\kappa X_3.$$

При $\varepsilon \neq 0$ имеем $n = -1$, $\kappa = 0$, $\delta = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}\epsilon$. Получена подалгебра $\langle X_4 + bX_1, -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 + X_2\rangle$. Если же $\varepsilon = 0$, то $\delta = 0$, $n = 1$. Отсюда получена подалгебра $\langle X_4 + bX_1, X_3\rangle$. А если $\varepsilon = 0$, $\kappa = 0$ то получаем ранее полученную $\langle X_4, X_1\rangle$.

Лемма 3.5.1. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_4 являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_2 + X_3\rangle, \langle bX_1 + X_4\rangle, b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + X_3\rangle, \langle X_3, bX_1 + X_4\rangle, \langle -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 + X_2, bX_1 + X_4\rangle\}$.

Рассматриваем подалгебру $\langle X_4 + bX_1\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Она обладает следующими инвариантами

$$J_1 = z = (t-c)^{-\frac{\alpha}{2}}S, \quad J_2 = y = (t-c)^{\frac{\alpha}{2}}q, \tag{3.5.1}$$

$$J_3 = \theta + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} + b\frac{2}{\alpha}\ln|q|. \tag{3.5.2}$$

Тогда ищем решение в виде

$$\theta = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} - b\frac{2}{\alpha}\ln|q| + zy + \varphi(z,y) =$$
$$= -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} - b\frac{2}{\alpha}\ln|q| + Sq + \varphi(z,y) \tag{3.5.3}$$

Тогда получаем подмодель

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\frac{d}{dx}\varphi\left(x^{-\frac{\alpha}{2}}z, x^{\frac{\alpha}{2}}y\right)dx + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = \\ = \widetilde{F}\left(\varphi_y + z - \frac{2b}{\alpha y}\right), \tag{3.5.4}$$

$$\theta = -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} - b\frac{2}{\alpha}\ln|q| + Sq + \varphi(z,y), \\ z = (t-c)^{-\frac{\alpha}{2}}S, \quad y = (t-c)^{\frac{\alpha}{2}}q. \tag{3.5.5}$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_3 + X_2\rangle$. Она обладает инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = z = S - q$, $J_3 = \theta - Sq + \frac{q^2}{2}$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq - \frac{q^2}{2} + \varphi(t,z)$. Его подстановка обратно в основное уравнение дает

$${}^C_cD_t^\alpha\varphi + \mu\varphi_z + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}(z-\varphi_z)\right).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_3\rangle$. Она обладает инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = S$, $J_3 = \theta - Sq$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq + \varphi(t,S)$. Его подстановка обратно в основное уравнение дает

$${}^C_cD_t^\alpha\varphi + \mu\varphi_z + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}S\right).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2\rangle$. Она обладает инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = q$, $J_3 = \theta$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = \varphi(t,q)$. Его подстановка обратно в основное уравнение дает

$${}^C_cD_t^\alpha\varphi = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2q^2 + (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\varphi_q\right).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_1\rangle$. Она обладает инвариантами t, S, q. Следовательно ввиду того, что инвариантны не зависят от θ, она не обладает инвариантными решениями. Также содержащие X_1 двумерные подалгебры тоже не обладают инвариантными решениями $\langle X_1, X_4\rangle$, $\langle X_1, X_2 + X_3\rangle$, $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$.

Рассматриваем подалгебру $\langle -\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1 + X_2, bX_1 + X_4\rangle$. Ее инварианты равны

$$z = (t-c)^{\alpha/2}q, \quad J = \theta + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} + b\frac{2}{\alpha}\ln|q|.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = \frac{\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - b\frac{2}{\alpha}\ln|q| + \varphi(z).$$

Тогда получаем подмодель

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{\alpha}{2}\frac{zs^{\alpha/2-1}}{(1-s)^\alpha}\varphi_z\left(s^{\alpha/2}z\right)ds + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 z^2 = \widetilde{F}\left(\varphi_z - \frac{2b}{\alpha z}\right).$$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_3, bX_1 + X_4\rangle$. Ее инварианты имеют вид

$$z = (t-c)^{-\alpha/2}S. \quad J = \theta - Sq + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - b\frac{2}{\alpha}\ln|S|.$$

Инвариантное решение ищется в виде

$$\theta = Sq - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + b\frac{2}{\alpha}\ln|S| + \varphi(z).$$

Тогда обратная подстановка дает

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{\alpha}{2}\frac{zs^{-\alpha/2-1}}{(1-s)^\alpha}\varphi_z\left(s^{-\alpha/2}z\right)ds + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}\frac{2b}{\alpha z^2} - \gamma\sigma^2\frac{2b^2}{\alpha^2 z^2} - \gamma\sigma^2\frac{2b}{\alpha z}\varphi_z + \widetilde{F}(z).$$

3.5.2. Инвариантные подмодели при $r = 0$ и произвольной функции F

Теперь рассматриваем произвольную F, не эквивалентную

$$F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right).$$

Базис допускаемой алгебры Ли имеет вид $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_S$, $X_3 = \partial_q + S\partial_\theta$, при этом $[X_2, X_3] = X_1$, $E_2 = e_3\partial_{e_1}$, $E_3 = -e_2\partial_{e_1}$. Тогда непрерывные внутренние автоморфизмы имеют вид $E_2 : \bar{e}_1 = e_1 + e_3 a_2$, $E_3 : \bar{e}_1 = e_1 - e_2 a_3$.

К ним добавляется автоморфизм $\tilde{E}: \bar{e}_1 = -e_1,\ \bar{e_2} = -e_2$. Отсюда получаем $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle bX_2 + X_3\rangle,\ b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, bX_2 + X_3\rangle,\ b \in \mathbb{R}\}$.

Рассматриваем подалгебру $\langle bX_2 + X_3\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Она обладает инвариантами $J_1 = t,\ J_2 = z = S - bq,\ J_3 = \theta - Sq + \frac{b}{2}q^2$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq - \frac{b}{2}q^2 + \varphi(t, z)$. Его подстановка в основное уравнение дает инвариантную подмодель

$$ {}_c^C D_t^\alpha \varphi + \mu\varphi_z + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = F\left(t, z - b\varphi_z\right). $$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_2\rangle$. Она обладает инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = q,\ J_3 = \theta$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = \varphi(t, q)$. Подстановкой в основное уравнение получаем инвариантную подмодель

$$ {}_c^C D_t^\alpha \varphi = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + F\left(t, \varphi_q\right). $$

Рассматриваем подалгебру $\langle X_1\rangle$. Она обладает инвариантами t, S, q. Следовательно ввиду того, что инвариантны не зависят от θ, она не обладает инвариантными решениями. Содержащие X_1 двумерные подалгебры также не обладают инвариантными решениями $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, bX_2 + X_3\rangle$.

3.5.3. Инвариантные подмодели при $r \neq 0$

В случае произвольной нелинейной функции F получаем базис алгебры Ли

$$ X_1 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta. $$

Коммутатор этих операторов равен нулю, поэтому $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle bX_1 + X_2\rangle,\ b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_2, X_1\rangle\}$.

Инварианты подалгебр $\langle X_2, X_1\rangle$, $\langle X_1\rangle$ не содержат θ и не имеют инвариантных подмоделей. Подалгебра $\langle bX_1 + X_2\rangle$ обладает инвариантами

$$ J_1 = t, \quad J_2 = S, \quad J_3 = \theta - Sq - bqE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha). $$

Поэтому инвариантное решение ищется в виде

$$ \theta = Sq + bqE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha) + \varphi(t, S). $$

Подстановка в основное уравнение дает следующую подмодель

$$ {}_c^C D_t^\alpha \varphi(t,S) = r\varphi - \mu\varphi_S - \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\varphi_S^2 + F(t, S + bE_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)). $$

3.6. Сравнительный анализ групповых структур уравнений Геана — Пу с целой и дробными производными по времени

При первом порядке временнóй производной и ненулевой безрисковой ставке r в уравнении Геана — Пу имеются следующие спецификации нелинейного свободного элемента $F(t,\theta_q)$: произвольная F, $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$, $F = f(t)\theta_q^2$ и 3 случая спецификации $F = fe^{rt}\theta_q^2$ в зависимости от значения f. Случаю произвольной F соответствует двухмерный базис алгебры Ли с операторами $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$ и $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$. При $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$ дополнительно появляется третий оператор со сдвигом по времени. При решении классифицирующего уравнения $a(t)+b(t)\theta_q+n(t)F_{\theta_q} = 0$ получаем спецификацию $F = f(t)\theta_q^2$ с пятимерной алгеброй Ли. При $f(t) = fe^{rt}$, $f \neq 0$, уравнение Геана — Пу допускает также оператор сдвига по t и растяжения по q и θ и возникает три варианта решения уравнения $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N - r^2Ke^{rt}$ в зависимости от константы f.

В случае производной повремени первого порядка и $r = 0$ существенное отличие дают появление в случае произвольной F дополнительного оператора $X_3 = \partial_S$, означающего автономность изучаемого уравнения по S, упрощение уравнения $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N - r^2Ke^{rt}$ при $r = 0$ и появление спецификации $F = t^{-1}\tilde{F}(t^{-1/2}\theta_q)$, которой соответствует дополнительная симметрия с растяжением по t, S, q. Дополнительные спецификации появляются также на стыке различных спецификаций, к примеру, при $\tilde{F}(z) = Cz^2$ спецификация $F = t^{-1}\tilde{F}(t^{-1/2}\theta_q) = Ct^{-2}\theta_q^2$ также является частным случаем спецификации $F = f(t)\theta_q^2$.

В случае уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля или Герасимова — Капуто по времени исчезает спецификация $F = e^{rt}\widetilde{F}(\theta_q)$ ввиду того, что исчезает связанный с ней оператор со сдвигом по времени из-за требования неподвижности нижней границы дробного интеграла.

Квадратичные по θ_q спецификации вида $f(t)\theta_q^2$ исчезают в силу того, что при дробных производных возникает условие $\beta_t = 0$ согласно тому факту, что в формуле продолжения θ_q в дробных уравнениях заменяется на ${}_cD_t^{\alpha-n}\theta_q$ в случае Римана-Лиувилля и на $J_t^n\,{}_c^CD_t^\alpha\theta_q$ в случае Герасимова — Капуто. Как следствие, не возникает классифицирующего уравнения вида $a(t) + b(t)\theta_q + n(t)F_{\theta_q} = 0$.

Оператор $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$ сохраняется в случае производной Герасимова — Капуто. При производной Римана — Лиувилля эта симметрия исчезает ввиду того, что производная Римана — Лиувилля от константы не является нулем.

Таким образом, при $r \neq 0$ для уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля или Герасимова — Капуто по времени остается только случай произвольной нелинейной по θ_q функции $F(t, \theta_q)$. При $r = 0$ дополнительно к случаю произвольной $F(t, \theta_q)$ имеется спецификация $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, которая связана с оператором, включающим растяжение по времени, и являющаяся дробным аналогом, имеющейся для уравнения Геана — Пу первого порядка по времени спецификации $F = t^{-1}\tilde{F}\left(t^{-1/2}\theta_q\right)$.

Заключение

В диссертационной работе исследована групповая структура уравнения Геана — Пу с первой и дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по времени и осуществлен поиск инвариантных подмоделей и инвариантных решений этих уравнений. Отметим также получение аналога правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка и формулы продолжения для коэффициента при такой производной в операторе допускаемой группы, в том числе группы линейно-автономных преобразований.

Дальнейшие перспективы развития тематики данной работы связаны с поиском законов сохранения для уравнений Геана — Пу, исследованием групповой структуры уравнений Геана — Пу с дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по переменным цены акции S и количества акций q, других уравнений и систем уравнений с дробными производными, в том числе с производными Лиувилля, Хилфера и др. Это потребует разработки соответствующей теории, в частности, получения формул продолжения для коэффициентов при таких производных в операторе допускаемой группы, для чего потребуется получить обобщенное правило Лейбница или его аналоги для таких производных.

Список литературы

[1] Аннин, Б. Д. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. В. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Отв. ред. В. В. Пухначев. — Новосибирск: Наука: Сиб. отд-е, 1985. — 142 с.

[2] Боровских, А. В. Геометрия группы Ли. Инвариантные метрики и динамические системы, двойственная алгебра и их приложения в групповом анализе одномерного кинетического уравнения / А. В. Боровских // Теорет. и мат. физика. — 2023. — Т. 217, № 1. С. 127–141.

[3] Боровских, А. В. Уравнение эйконала для анизотропной среды / А. В. Боровских // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 2013. — Т. 29. — С. 162–229.

[4] Газизов, Р. К. Групповая классификация и симметрийные редукции нелинейного трехмерного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Уфимск. мат. журн. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 14–28.

[5] Газизов Р. К. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Вестник УГАТУ. — 2007. — Т. 9, № 3. — С. 125–135.

[6] Газизов, Р. К. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Уфимск. мат. журн. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 54–68.

[7] Головин, С. В. Точные решения стационарных уравнений идеальной магнитогидродинамики в естественной системе координат / С. В. Головин, Л. Т. Сэсма // Приклад. механика и техн. физика. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 58–73.

[8] Дышаев, М. М. Групповой анализ одного нелинейного обобщения уравнения Блэка — Шоулза / М. М. Дышаев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 7–14.

[9] Дышаев, М. М. О некоторых моделях ценообразования опционов на неликвидных рынках / М. М. Дышаев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, вып. 1. — С. 18–29.

[10] Дышаев, М. М. Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Уфим. мат. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 29–41.

[11] Дышаев, М. М. Симметрийный анализ и точные решения одной нелинейной модели теории финансовых рынков / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2016. — Т. 23, № 1 (89). — С. 28–45.

[12] Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[13] Касаткин, А. А. Симметрии и точные решения уравнений с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2013. — 118 с.

[14] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер ; Пер. с англ. И. Г. Щербак ; Под ред. А. Б. Шабата. — Москва : Мир, 1989. — 637 с.

[15] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[16] Овсянников, Л. В. Программа подмодели. Газовая динамика / Л. В. Овсянников // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 30–55.

[17] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

[18] Черевко, А. А. Об автомодельном вихре Овсянникова / А. А. Черевко, А. П. Чупахин // Тр. МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 276–287.

[19] Чесноков, А. А. Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке / А. А. Чесноков // Приклад. механика и техн. физика. — 2008. — Т. 49, № 5. — С. 41–54

[20] Чиркунов, Ю. А. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. — 659 с.

[21] Almgren, R. Optimal execution of portfolio transactions / R. Almgren, N. Chriss // Journal of Risk. — 2001. — Vol. 3, — P. 5–40.

[22] Andreev, V. K. Applications of Group Theoretical Methods in Hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1998. — xii, 396 p.

[23] Bachelier, L. Théorie de la spaculation / Louis Bachelier // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. —1900. — V. 17. —P. 21–86.

[24] Bakkyaraj, T. Lie symmetry analysis of system of nonlinear fractional partial differential equations with Caputo fractional derivative / T. Bakkyaraj // The European Physical Journal Plus. — 2020. — Vol. 135, No. 1. — P. 126.

[25] Bank, P. Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader / P. Bank, D. Baum // Mathematical Finance. — 2004. — Vol. 14. — P. 1–18.

[26] Barles, G. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation / G. Barles, H. M. Soner // Finance and Stochastics. — 1998. —Vol. 2. — P. 369–397.

[27] Black, F. The pricing of Commodity Contracts / F. Black // J. of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 167–179.

[28] Black, F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.

[29] Bordag, L. A. Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives / L. A. Bordag, A. Y. Chmakova // International J. of Theoretical and Applied Finance. — 2007. — Vol. 10, No. 1. — P. 1–21.

[30] Bordag, L. A. Geometrical Properties of Differential Equations: Applications of the Lie Group Analysis in Financial Mathematics / L. A. Bordag. — World Scientific Publishing Company, Singapore, 2015 — 340 p.

[31] Bordag, L. A. Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions / L. A. Bordag, A. Mikaelyan // J. Letters in Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 96, No. 1–3. — P. 191–207.

[32] Cartea, Á. Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps / Á. Cartea, D. del-Castillo-Negrete // Physica A. — 2007. — Vol. 374, No. 2. — P. 749–763.

[33] Çetin, U. Liquidity risk and arbitrage pricing theory / U. Çetin, R. Jarrow, P. Protter // Finance and Stochastic. — 2004. — Vol. 8. — P. 311–341.

[34] Çetin, U. Modelling liquidity effects in discrete time / U. Çetin, L. C. Rogers // Mathematical Finance. — 2007. — Vol. 17. — P. 15–29.

[35] Chen, W. Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black — Scholes equation / W. Chen, X. Xu, S.-P. Zhu //

Computers & Mathematics with Applications. — 2015. — Vol. 69, No. 12. — P. 1407–1419.

[36] Cvitanić, J. Hedging and portfolio optimization under transaction costs: a martingale approach / J. Cvitanić, I. Karatzas // Mathematical Finance. — 1996. — Vol. 6. — P. 133–165.

[37] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — 247 p.

[38] Duppati, G. Long memory volatility in Asian stock markets / G. Duppati, A. S. Kumar, F. Scrimgeour, L. Li // Pacific Accounting Review,. — 2017. — Vol. 29, No. 3. — P. 423–442.

[39] Fall, A. N. Black — Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative / A. N. Fall, S. N. Ndiaye, N. Sene // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — Vol. 125. — P. 108–118.

[40] Fedorov, V. E. Group classification for a class of non-linear models of the RAPM type / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Vol. 92. — P. 105471

[41] Fedorov, V. E. Group classification for a general nonlinear model of option pricing / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Ural Mathematical J. — 2016. — Vol. 2, No. 2. — P. 37–44.

[42] Fedorov, V. E. Invariant solutions for nonlinear models in illiquid markets / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, No. 18. — P. 8963–8972.

[43] Gazizov, R. K. Lie symmetry analysis of differential equations in finance / R. K. Gazizov, N. H. Ibgimov // Nonlinear Dynamics. — 1998. — Vol. 17. — P. 387–407.

[44] Gazizov, R. K. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Y. Lukashchuk // Fractional Differential Equations Vol. 2. — Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019. — P. 353–382.

[45] Grigoriev, Yu. N. Symmetries of integro-differential equation with applications in mechanics and plasma physics / Yu. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — xiii+305 p.

[46] Grossman, S. An Analysis of the Implications for Stock and Futures Price Volatility of Program Trading and Dynamic Hedging Strategies / S. Grossman // The Journal of Business, — 1998. — Vol. 61. — No. 3. — P. 275–298.

[47] Guéant, O. The financial mathematics of market liquidity: from optimal execution to market making / O. Guéant. — London; New York; Chapman & Hall /CRC, 2016. — 302 p.

[48] Guéant, O. Option pricing and hedging with execution costs and market impact / O. Guéant, J. Pu // Mathematical Finance, — 2017. — Vol. 27. No. 3. — P. 803–831.

[49] Guo, C. Derivation and application of some fractional Black — Scholes equations driven by fractional G-Brownian motion / C. Guo, S. Fang, Y. He // Computational Economics. — 2023. — Vol. 61. — P. 1681–1705.

[50] Jumarie, G. Stock exchange fractional dynamics defined as fractional exponential growth driven by (usual) Gaussian white noise. Application to fractional Black — Scholes equations / G. Jumarie // Insurance: Mathematics and Economics. — 2008. — Vol. 42, No. 1. — P. 271–287.

[51] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg : Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.

[52] Kumar, S. Analytical solution of fractional Black — Scholes European option pricing equations using Laplace transform / S. Kumar, A. Yildirin, Y. Khan, H. Jafari, K. Sayevand, L. Wei // Journal of Fractional Calculus and Applications. — 2012. — Vol. 2. — P. 1–9.

[53] Leland, H. E. Option pricing and replication with transactions costs / H. E. Leland // The Journal of Finance. — 1985. — Vol. 40. — P. 1283–1301.

[54] Liang, J. R. The solution to a bi-fractional Black — Scholes — Merton differential equation / J. R. Liang, J. Wang, W. J. Zhang, W. Y. Qiu, F. Y. Ren // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 58. — P. 99–112.

[55] Maheshchandra, K. P. Long Memory Volatility of Stock Markets of India and China / K. P. Maheshchandra // International Journal of Science and Research. — 2014. — Vol. 3, Iss. 3. — P. 1198–1200.

[56] Mandelbrot, B. B. The variation of certain speculative prices / B. B. Mandelbrot // The Journal of Business of the University of Chicago. — 1963. — Vol. 36, No. 4. — P. 394–413.

[57] Meleshko, S. V. Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations. — N. Y.: Springer, 2005. — xvi+352 p.

[58] Merton, R. C. Theory of Rational Option Pricing / R. C. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. —1973. — No 4. — P. 141–183.

[59] Peters, E. E. Fractal structure in the capital markets / E. E. Peters // Financial Analysts Journal. — 1989. — Vol. 45, No. 4. — P. 32–37.

[60] Platen, E. On feedback effects from hedging derivatives / E. Platen, M. Schweizer // Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 8. — P. 67–84.

[61] Rogers, L. The cost of illiquidity and its effects on hedging / L. C. Rogers, L. S. Singh // Mathematical Finance. — October 2010. — Vol. 20, Issue 4. — P. 597–615.

[62] Samuelson, P. A. Rational theory of warrant pricing / P. A. Samuelson // Industrial Management Review. — 1965. — V. 6. — P. 13–31.

[63] Sawangtong, P. The analytical solution for the Black – Scholes equation with two assets in the Liouville–Caputo fractional / P. Sawangtong, K. Trachoo, W. Sawangtong, B. Wiwattanapataphee // Mathematics. — 2018. — Vol. 6, No. 8. — P. 129.

[64] Schönbucher, P. The feedback-effect of hedging in illiquid markets / P. Schönbucher, P. Wilmott // SIAM J. on Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 61. — P. 232–272.

[65] Sircar, R. Generalized Black — Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies / R. Sircar, G. Papanicolaou // Applied Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 5, No. 1. — P. 45–82.

[66] Wei, Y. Discussion on the Leibniz rule and Laplace transform of fractional derivatives using series representation / Y. Wei, D.-Y. Liu, P. W. Tse, Y. Wang // arXiv:1901.11138. 2019.

[67] Wyss, W. The fractional Black — Scholes equation / W. Wyss // Fractional Calculus & Applied Analysis. — 2000. — Vol. 3, No. 1. — P. 51–61.

[68] Yavuz, M. European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel / M. Yavuz, N. Özdemir // Fractal Fract. — 2018. — Vol. 2, No. 1. — P. 3.

[69] Zhang, H. Review of the fractional Black — Scholes equations and their solution techniques / H. Zhang, M. Zhang, F. Liu, M. Shen // Fractal and Fractional. — 2024. — Vol. 8, No. 2. — P. 101.

[70] Zhang, Z.-Y. Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential equations / Z.-Y. Zhang, J. Zheng // Nonlinearity. — 2021. — Vol. 34, No. 8. — P. 5186–5212.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в Перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

[71] Ядрихинский, Х. В. Инвариантные решения модели Геана — Пу ценообразования опционов и хеджирования / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2021. — Т. 6, № 1. — С. 42–51.

[72] Ядрихинский, Х. В. О линейно-автономных симметриях дробной модели Геана — Пу / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // Уфимск. мат. журн. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 110–123.

[73] Sitnik, S. M. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging / S. M. Sitnik, K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov. // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, No. 9. — P. 1841.

[74] Yadrikhinskiy, K. V. Linearly autonomous symmetries of a fractional Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Mathematical Notes. — 2023. — Vol. 114, No. 6. — P. 1368–1380.

[75] Yadrikhinskiy, K. V. Recursion operators for the Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No. 3. — P. 1236–1240.

[76] Yadrikhinskiy, K. V. Symmetries of fractional Guéant — Pu model with Gerasimov — Caputo time-derivative / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 244, No. 4. — P. 552–566.

[77] Yadrikhinskiy, K. V. Symmetry analysis of the Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // AIP Conference Proceedings. — 2022. — Vol. 2528. — P. 020035-1–020035-4.

[78] Yadrikhinskiy, K. V. Group analysis of the Guéant and Pu model of option pricing and hedging / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Chapter in Symmetries and Applications of Differential Equations / ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov. — Singapore : Springer, 2021. — P. 173–203.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[79] Федоров, В. Е. Групповая классификация и инвариантные решения системы уравнений динамики неизотермической двухфазной среды / В. Е. Федоров, Х. В. Ядрихинский // Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики: тез. докл. Всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием, посвященной 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, д.т.н., профессора Э.А. Бондарева. Якутск, 12–17 июля 2021 г. — Киров : Межрегион. центр инновац. технологий в образовании, 2021. — С. 268.

[80] Ядрихинский, Х. В. Аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто / Х. В. Ядрихинский // Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации: сб. материалов

Междунар. науч. конф. 8–12 июня 2024 г. — Уфа : Аэтерна, 2024. — С. 57–58.

[81] Ядрихинский, Х. В. Групповая классификация одного уравнения ценообразования опционов в частном случае / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // Математика: Материалы 61-й Междунар. науч. студ. конф. Под. ред. Р. Н. Гарифуллина. 17–26 апреля 2023 г. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2023. — С. 115.

[82] Ядрихинский, Х. В. Групповая классификация одной модели ценообразования опционов с учетом затрат на исполнение / Х. В. Ядрихинский // ЭРЭЛ-2021 : сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции / 17–19 февраля 2021 г. — Якутск : Издательский дом СВФУ, 2021. — С. 24.

[83] Ядрихинский, Х. В. Операторы рекурсии одной модели ценообразования опционов / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // X Междунар. конф. по мат. моделированию: тез. докл. Под ред. Н. П. Лазарева. 16–20 июля 2023 г. — Якутск : СВФУ, 2023. — С. 83.

[84] Ядрихинский, Х. В. Преобразования эквивалентности одного уравнения ценообразования опционов в частном случае / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // XXV Лаврентьевские чтения, посвященные 30-летию Академии наук РС(Я) : материалы научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / 10–13 апреля 2023 г. — Якутск : Издательский дом СВФУ, 2023. — С. 39.