На правах рукописи

Ядр

Ядрихинский Христофор Васильевич

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЛЭКА — ШОУЛЗА ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Якутск — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова».

Научный руководитель:

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа

Официальные оппоненты:

Газизов Рафаил Кавыевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский университет науки и технологий», профессор кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Талышев Александр Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», доцент кафедры математического моделирования

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет»

Защита состоится 05 ноября 2024 года в 16:30 часов на заседании Диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: igil@hydro.nsc.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте http://www.hydro.nsc.ru Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 20 08 2024 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
24.1.055.01, д. ф.-м. н. Прок Прокудин Дмитрий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В основе классических теорий ценообразования опционов, в том числе теории Блэка — Шоулза — Мертона, лежит гипотеза совершенного рынка, означающая, в частности, что участники рынка используют только сложившиеся на рынке цены и не могут своими операциями оказать влияние на них. Это не соответствует рыночной практике, тем не менее построенные в рамках таких теорий модели ценообразования опционов, в основе которых лежит параболическое уравнение с младшими членами и с обратным направлением времени, широко используются. Они дают полезные результаты во многих случаях, например, когда базовый актив ликвиден и номинал опциона не слишком большой для рынка. Однако в случае неликвидного рынка или в случае необходимости операций с опционами больших номиналов уже нельзя исключать из рассмотрения влияние операций на рынок. Географическое, качественное и количественное расширение рынка производных ценных бумаг и развитие современных вычислительных технологий привели к росту интереса исследователей к более сложным, нелинейным моделям ценообразования опционов, которые получены в предположении отказа от тех или иных составляющих гипотезы совершенного рынка. Одной из таких моделей является исследуемая в данной работе модель Геана — Пу[1], которая учитывает влияние сделок на цену опциона и затраты на хеджирование.

Еще одним направлением в исследовании ценообразования опционов является использование дробного интегро-дифференциального исчисления. Как показывает практика, реальному финансовому рынку присущи нелинейность и эффекты памяти, которые могут быть более точно реализованы при моделировании с помощью дробных производных и интегралов. Из-за наличия у реальных процессов долговременной памяти и «тяжелых хвостов» у соответствующих распределений традиционные методы могут не в полной мере отражать реальную ситуацию. Нелокальные свойства дробных производных и наличие фрактальных характеристик в структуре процессов на финансовых рынках проложили путь к внедрению и быстрому развитию дробного исчисления в финансах[2]. Это позволяет лучше моделировать экстремальные события и сложные рыночные явления, а, например, дробные уравнения типа Блэка — Шоулза могут более точно отображать колебания цен на реальных финансовых рынках, обеспечивая надежную основу для моделирования ценообразования производных финансовых инструментов и управления рисками.

Одним из важнейших инструментов аналитического исследования нелинейных дифференциальных уравнений является групповой анализ. В последние несколько лет развивается теория симметрий для дробных дифференциальных уравнений[3]. В настоящей работе проведено исследование симметрийных свойств моделей Геана — Пу как целого, так и дробного порядков.

В силу всех этих причин исследование нелинейных моделей ценообразования опционов, включая дробные нелинейные модели, в том числе изучение их групповой структуры, весьма актуально.

Объект исследования. Данная диссертационная работа посвящена груп-

[1] Guéant O., Pu J. Option pricing and hedging with execution costs and market impact // Mathematical Finance. 2017. Vol. 27, No. 3. P. 803–831.

[2] Zhang H., Zhang M., Liu F., Shen M. Review of the fractional Black — Scholes equations and their solution techniques // Fractal and Fractional. 2024. Vol. 8, No. 2. P. 101.

[3] Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. In: Fractional Differential Equations. Vol. 2. Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019. P. 353–382.

повому анализу модели, полученной в работах О. Геана и Дж. Пу, и ее дробных аналогов. Это модель ценообразования опционов, учитывающая транзакционные издержки и долгосрочное влияние операций на рынок. Она также является нелинейной модификацией уравнения Блэка — Шоулза, но в отличие от большинства таких уравнений содержит, помимо переменных времени t и цены базового актива S, еще и переменную количества акций q. Функция $\theta(t, S, q)$, моделирующая цену безразличия колл-опциона со сроком исполнения T, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + V_t H(\theta_q),$$

в котором

1) $r\theta$ — классическое слагаемое, связанное с дисконтированием на безрисковую ставку r;
2) $(\mu - rS)q$ соответствует премии, связанной с владением акциями вместо наличных денег; если держать q акций, в среднем состояние по рыночной оценке будет увеличиваться на μq за единицу времени (μ — прогноз тренда ожидаемой доходности базового актива), тогда как денежный эквивалент q акций (т. е. qS, где S — цена акции) увеличивает состояние по рыночной оценке на rqS за единицу времени;
3) слагаемые $-\mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS}$ связаны с динамикой цены акции, где σ — волатильность цены акции;
4) из слагаемого $-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2$ вытекает взаимозависимость между количеством акций q в хеджирующем портфеле и динамикой цены акции S, γ — фактор неприятия риска продавцом опциона;
5) $V_t H(\theta_q)$ моделирует затраты на исполнение и лимит участия; здесь V_t — детерминированный, неотрицательный и ограниченный процесс рыночного объема, функция H моделирует затраты на исполнение обязательств.

Далее в работе функция $V_t H(\theta_q)$ будет заменяться более общей функцией двух переменных $F(t, \theta_q)$, которая будет свободным элементом при получении групповой классификации соответствующих уравнений. Функцию F будем называть функцией затрат.

Степень разработанности темы исследования. Одной из первых работ по ценообразованию опционов является диссертация L. Bachelier. На основе предложенной в ней модели вычислены цены опционов на акции базового актива и проведено их сравнение с текущими ценами. В модели цена базового актива (акции) $S = \{S_t\}_{t \leqslant T}$ подчиняется закону линейного броуновского движения с дрейфом $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, $t \leqslant T$, где μ — снос, σ — среднеквадратичное отклонение цен акции, а $W = \{W_t\}_{t \leqslant T}$ — винеровский процесс, такой, что $W_0 = 0$, $\mathbb{E}W_t = 0$ и $\mathbb{E}W_t^2 = t$.

G. P. Samuelson использовал для описания динамики цены акций геометрическое (или экономическое) броуновское движение, которое затем легло в основу модели Блэка — Шоулза — Мертона. Эта модель не учитывает цену исполнения, воздействие сделок участников рынка на текущие цены, поэтому исследователи стали активно разрабатывать изменения модели, которые могут учесть эти факторы.

Одна из первых моделей, которая берет во внимание сделки (транзакции) при определении цены опциона, предложена в работе H. E. Leland. Модель предложенная в работе G. Barles и H. M. Soner учитывает цену исполнения и фактор неприятия риска хеджерами. Модифицированная волатильность принимает вид $\sigma_{BS}^2 = \sigma^2\left(1 + Y\left(e^{r(T-t)}a^2S^2C_{SS}\right)\right)$, где $a = \mu\sqrt{\gamma N}$ — параметр, учитывающий транзакционные издержки μ, количество опционов для продажи N и фактор неприятия риска γ, а Y — функция корректировки волатильности. При этом Y удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{df}[Y(f)] = \frac{Y(f)+1}{2\sqrt{fY(f)} - f}, \quad Y(0) = 0.$$

Подход «кривой предложения» принимает во внимание воздействие на цены торгуемого актива операций большого объема или недостаточной ликвидности, см. работы P. Bank и D. Baum; U. Çetin, R. Jarrow и P. Protter (модель имеет вид нелинейного параболического уранвения с обратным временем $w_t + \frac{1}{2}\sigma^2x^2w_{xx}(1+2\rho x w_{xx}) = 0$, где t — время, x — цена акции, w — цена опциона, σ — волатильность акции, ρ — транзакционные издержки).

Влияние дельта-хеджирования (динамического хеджирования) на динамику базового актива и на цену опциона моделируется в работах J. Cvitanić и I. Karatzas; S. Grossman, E. Platen и M. Schweizer.

R. Sircar и G. Papanicolaou в своей работе для получения уравнения цены опциона использовали процесс совокупного дохода «реферальных» трейдеров. Авторами получено семейство нелинейных параболических уравнений с обратным временем, в случае отсутствия «программных» трейдеров ($\rho \to 0$) сводящееся к классическому уравнению Блэка — Шоулса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})U'(V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x}))}{V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})U'(V(1-\rho\frac{\partial C}{\partial x})) - \rho x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}\right]^2 \sigma^2x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial C}{\partial x} - C\right) = 0.$$

Здесь $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$, где $U(\cdot)$ — функция относительного спроса «реферальных» трейдеров.

В статье P. Schönbucher и P. Wilmott построили общую модель стоимости опциона $P(S,t)$ на неликвидном рынке, учитывающую эффекты обратной связи между процессом цены базового актива и торговой стратегией крупного трейдера $f(S,t)$:

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)^2 P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0,$$

где $\chi(S,W,t)$ — избыточный спрос, W — броуновское движение, а S — цена базового актива. Согласованные с моделью Блэка — Шоулса (т. е. когда отсутствует крупный трейдер и цены подчиняются логнормальному случайному блужданию) снос и волатильность получены авторами в виде

$$\sigma(S,t) = \frac{l\widetilde{\sigma}S'}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}},\ \mu(S,t) = \frac{1}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\left[l\widetilde{\mu}S' + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{l^2\widetilde{\sigma}^2S'^2}{2\left(l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\right)}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right],$$

где l — параметр ликвидности рынка, $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\sigma}$ — снос и волатильность из модели Блэка — Шоулса соответственно.

С помощью теории оптимального исполнения обязательств в работах L. C. Rogers и L. S. Singh, R. Almgren и N. Chriss строятся модели, учитывающие транзакционные издержки.

В конце XX века было обнаружено, что финансовые рынки демонстрируют фрактальные характеристики и наличие долговременной памяти. Нелокальные свойства дробных производных позволяют содержащим их моделям описывать различные распределения цен на активы, в том числе, с «острыми пиками» или «тяжелыми хвостами», это дает возможность моделировать как крупные скачки за небольшие промежутки времени, так и долгосрочные зависимости на рынках. В предположении, что динамика цен на акции обусловлена процессами скачкообразной диффузии или процессами Леви, установленная динамика цен на производные финансовые инструменты удовлетворяет уравнению типа Блэка — Шоулза с дробными производными. Например, дробные производные по «пространственной» переменной (т. е. по цене базового актива) в таком уравнении получаются после замены в соответствующей модели стандартного броуновского движения дробным броуновским движением или специальными процессами Леви. Дробные производные по времени получаются при рассмотрении изменения цены опциона с течением времени как фрактальной системы передачи. Можно выделить дробные пространственные, дробные пространственно-временные модели и дробные по времени модели типа Блэка — Шоулза[4].

Перечисленные модели изучались различными методами многими авторами, осуществлялся поиск их решений как численно, так и аналитически. Исследование уравнения Блэка — Шоулза[5] методами группового анализа[6] проведено Н. Х. Ибрагимовым и Р. К. Газизовым[7].

Групповой (или симметрийный) анализ дифференциальных уравнений является одной из немногих теорий, которые предоставляют методы для нахождения точных решений широких классов нелинейных дифференциальных уравнений и систем уравнений. С середины XX века получено большое число результатов по групповой структуре, точным решениям, законам сохранения многих уравнений и систем уравнений, моделирующих динамику различных физических процессов, в том числе в газовой динамике, гидродинамике, теории упругости и т.д. Отметим наличие работ по разработке и применению методов группового анализа для интегро-дифференциальных уравнений, учитывая, что дробные производные являются интегро-дифференциальными операторами, и других уравнений с нелокальными операторами[8].

В последнее десятилетие исследуются групповые свойства различных нелинейных моделей типа Блэка — Шоулза, вычисляются их инвариантные решения и подмодели в работах L. A. Bordag, В. Е. Федорова и М. М. Дышаева.

Для исследования уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля в работах Р. К. Газизова, А. А. Касаткина и С. Ю. Лукащука[9] получены соответствующие формулы продолжения для коэффициентов продолженного допускаемого оператора. В работе Z.-Y. Zhang и J. Zheng[10] получена

[4] Zhang H., Zhang M., Liu F., Shen M. Review of the fractional Black — Scholes equations and their solution techniques // Fractal and Fractional. 2024. Vol. 8, No. 2. P. 101.

[5] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–659.

[6] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[7] Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Lie symmetry analysis of differential equations in finance // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 17. P. 387–407.

[8] Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. Symmetries of integro-differential equation with applications in mechanics and plasma physics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. xiii+305 p.

[9] Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3. С. 125–135.

[10] Zhang Z.-Y., Zheng J. Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential

структура симметрий для эволюционных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной Римана — Лиувилля по времени порядка $\alpha \in (0,1)$. А именно, доказано, что все симметрии у такого уравнения имеют линейно-автономный вид.

Цели и задачи. Цель диссертационной работы заключается в исследовании групповых свойств уравнения Геана — Пу и его дробных аналогов с производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по времени при различных спецификациях функции затрат $F(t, \theta_q)$. При этом решаются задачи групповой классификации таких уравнений, поиска их инвариантных подмоделей и решений, а также проведения сравнительного анализа между симметрийными свойствами уравнения Геана — Пу первого порядка по времени и дробных уравнений Геана — Пу.

Научная новизна. Ранее методами группового анализа уравнения Геана — Пу не исследовались, поэтому все полученные результаты об их групповых свойствах являются новыми. Отметим кроме того, что симметрийный анализ дробных дифференциальных уравнений ранее проводился в работах Р. К. Газизова, А. А. Касаткина и С. Ю. Лукащука и некоторых других авторов в основном только в случае дробной производной Римана — Лиувилля, за редким исключением.Для проведения группового анализа уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто автором диссертации была проделана подготовительная теоретическая работа: получена удобная для использования версия аналога обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка, с ее помощью выведена полная формула продолжения для коэффициента при дробной производной в продолжении допускаемого оператора, в том числе в случае оператора группы линейно-автономных преобразований.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа имеет теоретический характер, она посвящена исследованию групповой структуры некоторых классов нелинейных уравнений типа Блэка — Шоулза первого или дробного порядка по времени. Результаты работы развивают теорию дифференциальных уравнений, в частности они вносят свой вклад в развитие методов группового анализа для уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто.

Исследуемые в работе уравнения являются важными моделями в теории финансовых рынков. Полученные групповые классификации таких уравнений позволили получить ряд инвариантных подмоделей и решений исследуемых моделей Геана — Пу. Получение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений важно само по себе и может быть практически значимо при разработке и тестировании численных методов их решения.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе исследуется групповая структура нелинейных дифференциальных уравнений Геана — Пу первого и дробного порядка по времени. Используется единая схема для исследования трех классов уравнений Геана — Пу: с первой производной, с дробной производной Римана — Лиувилля и с дробной производной Герасимова — Капуто по временно́й переменной. Методом Ли — Овсянникова сначала осуществляется поиск групп преобразований эквивалентности, а затем с их использованием проводится полная групповая классификация рассматриваемого класса уравнений. Затем для каждой спецификации свободного элемента из групповой классификации рассматривается алгебра Ли генераторов допускаемых групп уравнения. Осуществляется поиск внутренних и

equations // Nonlinearity. 2021. Vol. 34, No. 8. P. 5186–5212.

зеркальных автоморфизмов алгебры Ли, с помощью которых находятся оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр. Для подалгебр из этих систем выводятся инвариантные подмодели, в некоторых случаях удается их проинтегрировать и получить инвариантные решения.

Для исследования уравнений Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто использовались методы дробного интегро-дифференциального исчисления и группового анализа для дробных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу первого порядка по времени в случаях нелинейной и линейной функции затрат.
2. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля по времени в случае нелинейной функции затрат.
3. Найдены группы преобразований эквивалентности, групповая классификация и инвариантные подмодели и решения для уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени в случае нелинейной функции затрат.
4. Получен аналог обобщенного правила Лейбница для дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка. Выведена полная формула продолжения для коэффициента при дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка в генераторе допускаемой группы в общем и линейно-автономном случае.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Всероссийская научная конференция с международным участием, посвященная 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, доктора технических наук, профессора Э. А. Бондарева, «Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики», Якутск, 2021; Всероссийская научно-практическая конференция «Эрэл-2021», Якутск, 2021; 61-я Международная научная студенческая конференция, Новосибирск, 2023; XXV научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Лаврентьевские чтения», посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), Якутск, 2023; X Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, 2023; Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», Уфа, 2024.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 №075-02-2024-1441.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из которых 8 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены лично соискателем. В работе [3] В. Е. Федоровым написано введение, С. М. Ситнику принадлежит идея использования фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами при описании базиса алгебры Ли и корректировка некоторых рассуждений при ее осуществлении. В статье [8] В. Е. Федоровым написана основная часть введения, М. М. Дышаевым — п. 1.1 с описанием исследуемой модели. В работе [4] В. Е. Федорову принадлежит доказательство теоремы 3.1, в статьях [1,2,5,6,7] В. Е. Федоровым осуществлена постановка задачи, скорректированы некоторые доказательства. В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объемом в 175 страниц содержит введение, 3 главы, заключение, список литературы, состоящий из 84 источников.

Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановка задачи, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

В **первой главе** рассмотрено уравнение Геана — Пу первого порядка по времени

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t,\theta_q), \qquad (1)$$

где $\gamma\sigma \neq 0$ и $\theta = \theta(t,S,q)$. Для проведения групповой классификации в §1.1 проводится вычисление преобразований эквивалентности в форме $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F$, где $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

Теорема 1. 1. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (1) *при* $r = 0$ *образуют*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = q\partial_\theta, \quad Y_\phi = \phi(t)\partial_\theta + \phi_t\partial_F,$$
$$Y_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\partial_\theta + \left(-\frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2} - F\right)\partial_F,$$
$$Y_\psi = \psi(t)\partial_S - \frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \psi q\partial_\theta + \left(\mu\frac{\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F.$$

2. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (1) *при* $r \neq 0$ *образуют*

$$Y_1 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = e^{rt}q\partial_\theta,$$
$$Y_\psi = \psi(t)\partial_S - \frac{\int_{t_0}^t e^{rs}\psi_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}}\partial_q + \left(\psi q + S\left(\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} - \frac{\int_{t_0}^t e^{rs}\psi_{tt}ds}{\gamma\sigma^2 e^{rT}}\right)\right)\partial_\theta +$$
$$+\left(\mu\frac{e^{r(t-T)}\psi_t}{\gamma\sigma^2} + \theta_q\frac{e^{r(t-T)}\psi_{tt}}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F, \quad Y_\phi = \phi(t)\partial_\theta + (\phi_t - r\phi)\partial_F.$$

С помощью полученных преобразований эквивалентности в §1.2 найдены спецификации свободного элемента и соответствующие допускаемые алгебры Ли.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$, $r = 0$.

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при функции* $F = F(t, \theta_q)$, *такой, что* $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *которая не эквивалентна функциям* $f(t)\theta_q^2$, $\tilde{F}(\theta_q)$ *и* $t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$, *имеет вид* $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$, $X_3 = \partial_S$.

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при функции* $F = \tilde{F}(\theta_q)$, $\tilde{F}'' \neq 0$, *которая не эквивалентна* $f(t)\theta_q^2$ *и* $t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t.$$

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = C/\theta_q^2$ *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

4. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = f(t)\theta_q^2$, *которая не эквивалентна* $Ct^{-2}\theta_q^2$ *и* $\pm\theta_q^2$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta.$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *— линейно независимые решения линейного уравнения* $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 N$.

5. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = Ct^{-2}\theta_q^2$, $C \neq 0$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$
$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2 *имеют следующий вид:*

$\varphi_1 = t^{(1+\sqrt{1+8C\gamma\sigma^2})/2}$, $\varphi_2 = t^{(1-\sqrt{1+8C\gamma\sigma^2})/2}$ *при* $1 + 8C\gamma\sigma^2 > 0$;

$\varphi_1 = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{-1-8C\gamma\sigma^2}}{2}\ln|t|\right)$, $\varphi_2 = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{-1-8C\gamma\sigma^2}}{2}\ln|t|\right)$ *при условии* $1 + 8C\gamma\sigma^2 < 0$;

$\varphi_1 = \sqrt{t}$, $\varphi_2 = \sqrt{t}\ln|t|$ *при* $1 + 8C\gamma\sigma^2 = 0$.

6. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = t^{-1}W(t^{-1/2}\theta_q)$, $W'' \neq 0$, *не эквивалентной* $f(t)\theta_q^2$ *и* C/θ_q^2, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S,$$

$$X_4 = t\partial_t + \frac{S}{2}\partial_S - \frac{q}{2}\partial_q + \left(\frac{\mu^2 t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{\mu}{2\gamma\sigma^2}S\right)\partial_\theta.$$

7. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = n\theta_q^2$, $n = \pm 1$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_S, \quad X_4 = \partial_t,$$
$$X_5 = \varphi_1(t)\partial_S - \frac{(\varphi_1(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_1(t)q - \frac{\mu\varphi_1(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$
$$X_6 = \varphi_2(t)\partial_S - \frac{(\varphi_2(t))_t}{\gamma\sigma^2}\partial_q + \left(\varphi_2(t)q - \frac{\mu\varphi_2(t)}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2 *имеют следующий вид:*
$\varphi_1 = e^{\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t}$, $\varphi_2 = e^{-\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t}$ *при* $n\gamma > 0$;
$\varphi_1 = \sin(\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t)$, $\varphi_2 = \cos(\sqrt{|2\gamma\sigma^2|}t)$ *при* $n\gamma < 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$, $r \neq 0$.

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при функции* F, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *которая не эквивалентна* $f(t)\theta_q^2$, $e^{rt}\tilde{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$, *имеет вид*

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при функции* $F = e^{rt}\tilde{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$, $\tilde{F}'' \neq 0$, *которая не эквивалентна* $f(t)\theta_q^2$, *имеет вид*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_3 = \partial_t + \gamma\sigma^2 e^{rT} fe^{rt}\partial_S + \left(rq - \frac{rf}{2}e^{2rt}\right)\partial_q + \left(r\theta + \frac{rf}{2}e^{2rt}S - \mu fe^{2rt}\right)\partial_\theta.$$

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при функции* $F = f(t)\theta_q^2$, $f(t) \neq 0$, *которая не эквивалентна* $fe^{rt}\theta_q^2$, *имеет вид*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_1(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'(t) - 2S\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_1(s)ds + \varphi_1(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1(t)\right)\partial_\theta,$$
$$X_4 = \varphi_2(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_2(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2'(t) - 2S\int_{t_0}^{t} f(s)\varphi_2(s)ds + \varphi_2(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2(t)\right)\partial_\theta,$$
$$X_5 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} f(s)\Psi(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi'(t) + re^{rt}) - 2S\int_{t_0}^{t} f(s)\Psi(s)ds + \Psi(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi(t) + e^{rt})\right)\partial_\theta,$$

где $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *— линейно независимые решения однородного уравнения* $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N$ *и* $\Psi(t)$ *— частное решение неоднородного уравнения* $N_{tt} = 2f(t)\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N - r^2e^{rt}$.

4. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (1) *при* $F = fe^{rt}\theta_q^2$, $f \neq 0$, *имеет вид*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta,$$

$$X_4 = \varphi_1(t)\partial_S - 2f\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)e^{rs}ds\partial_q +$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1'(t) - 2fS\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)e^{rs}ds + \varphi_1(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_1(t)\right)\partial_\theta,$$

$$X_5 = \varphi_2(t)\partial_S - 2f\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)e^{rs}ds\partial_q +$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2'(t) - 2fS\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)e^{rs}ds + \varphi_2(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\varphi_2(t)\right)\partial_\theta,$$

$$X_6 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2f\int_{t_0}^{t}\Psi(s)e^{rs}ds\partial_q +$$

$$+\left(S\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi'(t) + re^{rt}) - 2fS\int_{t_0}^{t}\Psi(s)e^{rs}ds + \Psi(t)q - \mu\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\Psi(t) + e^{rt})\right)\partial_\theta,$$

где φ_1, φ_2, Ψ *имеют вид*:

$\varphi_1(t) = e^{\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t}$, $\varphi_2(t) = e^{-\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t}$, $\Psi(t) = \frac{r^2e^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT}-r^2}$ *при* $f\gamma > 0$, $r^2 \neq 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$;

$\varphi_1(t) = e^{rt}$, $\varphi_2(t) = e^{-rt}$, $\Psi(t) = -\frac{rt}{2}e^{rt}$ *при* $f\gamma > 0$, $r^2 = 2f\gamma\sigma^2e^{rT}$;

$\varphi_1(t) = \cos(\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t)$, $\varphi_2(t) = \sin(\sqrt{|2f\gamma\sigma^2e^{rT}|}t)$, $\Psi(t) = \frac{r^2e^{rt}}{2f\gamma\sigma^2e^{rT}-r^2}$ *при* $f\gamma < 0$.

В линейном случае свободной функции $F = a(t)\theta_q$ уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + a(t)\theta_q, \qquad (2)$$

заменой переменных

$$t = -u, \quad S = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}h + I_3(-u), \quad q = v - I_4(-u),$$

$$\theta = Sq + e^{rt}\frac{\ln z}{\gamma e^{rT}} + e^{rt}I_2(t) + e^{rt}I_1(t)S,$$

переводится в уравнение теплопроводности $z_u = z_{hh}$ с неявной дополнительной переменной v. Использованные в замене сокращения имеют вид

$$I_1(t) = \int_{t_1}^{t}ae^{-rs}ds, \quad I_2(t) = \int_{t_2}^{t}\left(-\mu\int_{t_1}^{p}ae^{-rs}ds - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{rT}\left(\int_{t_1}^{p}ae^{-rs}ds\right)^2\right)dp,$$

$$I_3(t) = \int_{t_3}^{t}\left(\mu + \gamma\sigma^2e^{rT}\int_{t_1}^{p}ae^{-rs}ds\right)dp, \quad I_4(t) = \int_{t_4}^{t}ads.$$

При помощи данной замены переменных получена следующая алгебра Ли

$$
\begin{gathered}
X_1 = c_1\left(\partial_S + (q + e^{rt} I_1(t))\partial_\theta\right), \\
X_2 = c_2\left(-\partial_t + a(t)\partial_q - (\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))\partial_S + \right. \\
\left. + \left(-(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))q - r\theta + rSq - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT} e^{rt} I_1(t)^2\right)\partial_\theta\right), \\
X_3 = c_3 e^{rt}\partial_\theta, \\
X_4 = c_4\left(2t\partial_t - 2ta(t)\partial_q + \left(S - I_3(t) + 2t\mu + 2t\gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t)\right)\partial_S + \right. \\
+ \left(2t(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))q + 2rt\theta - 2rtSq + t\gamma\sigma^2 e^{rT} e^{rt} I_1(t)^2 + 2tb + \right. \\
\left.\left. + \left(S - I_3(t)\right)\left(q + e^{rt} I_1(t)\right)\right)\partial_\theta\right), \\
X_5 = c_5(t\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_S + (tq\gamma\sigma^2 e^{rT} + (S - I_3(t) + t\gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))e^{rt})\partial_\theta), \\
X_6 = c_6\Bigg(-2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_t + 2a(t)t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\partial_q - \\
-\Bigg(2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t)) + 2t\gamma\sigma^2 e^{rT}(S - I_3(t))\Bigg)\partial_S + \\
+\Bigg(- 2t^2\gamma\sigma^2 e^{rT}(\mu + \gamma\sigma^2 e^{rT} I_1(t))q - 2rt^2\gamma\sigma^2 e^{rT}\theta + 2rt^2\gamma\sigma^2 e^{rT} Sq - \\
-t^2(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{rt} I_1(t)^2 - 2t\gamma\sigma^2 e^{rT}(S - I_3(t))(q + e^{rt} I_1(t)) - \\
-(S - I_3(t))^2 e^{rt} + \sigma^2 t e^{rt}\Bigg)\partial_\theta\Bigg), \\
X_7 = c_7(\partial_q + S\partial_\theta), \\
X_K = K\left(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(S - I_3(t)\right), q + I_4(t)\right) \times \\
\times \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}} \exp\left(-\gamma e^{r(T-t)}(\theta - Sq) + S\gamma e^{rT} I_1(t) + \gamma e^{rT} I_2(t)\right)\partial_\theta,
\end{gathered}
$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 зависят от $v = q + I_4(t)$, а функция $K = K(u, h, v)$ удовлетворяет уравнению $K_u = K_{hh}$.

Раздел §1.3 посвящен поиску одномерных и двумерных оптимальных систем подалгебр для полученных при групповой классификации алгебр Ли и вычислению связанных с ними инвариантных решений и подмоделей.

Для алгебры Ли соответствующей случаю $r \neq 0$ и $F = e^{rt}\bar{F}(\theta_q) + rfe^{2rt}\theta_q$ найдена следующая оптимальная система подалгебр

Лемма 1. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $f \neq 0$ являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3 + bX_1\rangle, \langle rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1\rangle, \langle rX_2 - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1\rangle, b \in \mathbb{R}\}$ *и* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_3 + bX_1, rX_2 - f\gamma\sigma^2 e^{rT} X_1\rangle, b \in \mathbb{R}\}$.

Лемма 2. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $f = 0$ являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_1 + X_2\rangle, \langle bX_1 + X_3\rangle, b \in \mathbb{R}\}$ *и* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_2, bX_1 + X_3\rangle, b \in \mathbb{R}\}$.

К примеру, при $f = 0$ инварианты подалгебры $\langle X_3 + bX_1, X_2\rangle$ имеют вид

$J_1 = S$, $J_2 = e^{-rt}\theta - e^{-rt} - bt$. Получаем инвариантную подмодель

$$\theta = Sq + bte^{rt} + e^{rt}\varphi(S), \quad b + \mu\varphi' + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi'' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi'^2 = \bar{F}(S).$$

Для алгебры Ли, соответствующей случаю $r = 0$, $\mu \neq 0$ и $F = C/\theta_q^2$ найдена следующая оптимальная система подалгебр

Лемма 3. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_5 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle aX_1 + X_4\rangle, \langle aX_1 + X_5\rangle, \langle X_2 + X_4\rangle, \langle X_3 - X_4\rangle, \langle X_3 + X_4\rangle, \langle X_2 + X_3 + aX_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$ *и* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_5\rangle, \langle X_1, X_2 + X_4\rangle, \langle X_1, X_3 + X_4\rangle, \langle X_1, X_3 - X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + X_3 + aX_4\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_4\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_5\rangle, \langle aX_1 + X_5, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle, \langle aX_1 + X_5, X_4 + \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}X_1\rangle, \langle X_2 + X_3, aX_1 + X_4\rangle, \langle X_3, aX_1 + X_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

К примеру, подалгебра $\langle X_3, aX_1 + X_4\rangle$ имеет инварианты $J_1 = q$, $J_2 = \theta - at$ и ей соответствует инвариантная подмодель

$$\theta = at + \varphi(q), \quad a - \mu q + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 = \frac{C}{(\varphi')^2}.$$

Для алгебры Ли соответствующей случаю $r = 0$, $\mu \neq 0$ и $F = t^{-1}W\left(t^{-1/2}\theta_q\right)$ найдена следующая оптимальная система подалгебр

Лемма 4. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_4 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle\langle X_2 + X_3\rangle, \langle aX_1 + X_4\rangle, a \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + X_3\rangle, \langle X_2, aX_1 + X_4\rangle, \langle aX_1 + X_4, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

К примеру, подалгебра $\langle aX_1 + X_4, X_3 - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}X_1\rangle$ обладает инвариантами $J_1 = z = tq^2$, $J_2 = \theta - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S - \frac{a}{2}\ln t$ и имеет инвариантную подмодель

$$\theta = \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}t - \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}S + \frac{a}{2}\ln t + \varphi(z), \quad \frac{a}{2} + z\varphi' + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 z = W(2\sqrt{z}\varphi').$$

Для алгебры Ли, соответствующей случаю $r = 0$ и $F = \tilde{F}(\theta_q)$, найдена следующая оптимальная система подалгебр.

Лемма 5. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_4 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle aX_1 + X_4\rangle, \langle X_2 + aX_3 + bX_4\rangle, \langle X_3 + aX_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_4\rangle, \langle X_1, X_2 + aX_3 + bX_4\rangle, \langle X_1, X_3 + aX_4\rangle, \langle X_2 + aX_3, bX_1 + X_4\rangle, \langle X_3, aX_1 + X_4\rangle, a, b \in \mathbb{R}\}$.

В частности, подалгебра $\langle X_3, X_4 + aX_1\rangle$ обладает инвариантами $\theta - at$ и q, ей соответствует подмодель

$$\theta = at + \varphi(q), \quad a = \mu q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 q^2 + \widetilde{F}\left(\varphi_q\right).$$

Для алгебры Ли, соответствующей случаю $r = 0$ и произвольной функции F, найдена следующая оптимальная система подалгебр.

Лемма 6. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли* L_3 *являются* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2 + aX_3\rangle, \langle X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$ *и* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2 + aX_3\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + f(t)\theta_q^2, \qquad (3)$$

которое соответствует одному классу реальных моделей Геана — Пу.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (3) *допускает одномерную подалгебру, порождённую оператором* $X = a(t)\partial_S + b(t)\partial_q + (d(t)S + g(t)q + p(t))\partial_\theta, \quad a \neq 0$. *Тогда оно имеет инвариантную относительно этой подалгебры подмодель*

$$\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{(g-a)^2}{2a^4}z^2 + \frac{a-g}{a^2}\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right)z +$$
$$+\varphi_t + \varphi_z\left(b\left(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p}{a}\right) + \frac{da-bg}{a^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}z\right) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\varphi_{zz} +$$
$$+\varphi_z^2\left(\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}b^2 - f(t)a^2\right) = r\varphi - \mu\frac{p}{a} - \sigma^2\frac{da-bg}{2a^2} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{p^2}{a^2},$$

$$z = b(t)S - a(t)q, \quad \theta = \frac{p(t)}{a(t)}S + \frac{g(t)}{a(t)}Sq + \frac{a(t)d(t) - b(t)g(t)}{2a(t)^2}S^2 + \varphi(t,z).$$

Получен следующий результат о точных инвариантных решениях для широкого класса двумерных подалгебр Ли.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (3) *допускает двумерную подалгебру с базисом*

$$X = a(t)\partial_S + b(t)\partial_q + (d(t)S + g(t)q + p(t))\partial_\theta,$$
$$Y = \alpha(t)\partial_S + \beta(t)\partial_q + (\delta(t)S + \epsilon(t)q + \rho(t))\partial_\theta, \quad \det A(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ \alpha(t) & \beta(t)\end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда инвариантное относительно данной подалгебры решение имеет вид

$$\theta = Sq - \frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + n(t)S^2 + m(t)Sq + w(t)q^2 + k(t)S + l(t)q + \varphi(t),$$

где

$$n(t) = \frac{\beta(t)d(t) - b(t)\delta(t)}{2\det A(t)}, \quad m(t) = \frac{a(t)(\delta(t) - \beta(t)) - \alpha(t)(d(t) - b(t))}{\det A(t)} =$$
$$= \frac{\beta(t)(g(t) - a(t)) - b(t)(\epsilon(t) - \alpha(t))}{\det A(t)}, \quad w(t) = \frac{a(t)\epsilon(t) - \alpha(t)g(t)}{2\det A(t)},$$
$$k(t) = \frac{\beta(t)p(t) - b(t)\rho(t)}{\det A(t)} + \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}, \quad l(t) = \frac{a(t)\rho(t) - \alpha(t)p(t)}{\det A(t)},$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{rt} + \mu^2\frac{te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \mu e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}k(s)ds - \sigma^2 e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}n(s)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\int_{t_0}^t e^{-2rs}k^2(s)ds + e^{rt}\int_{t_0}^t e^{-rs}f(s)l^2(s)ds.$$

В §1.4 рассматривается уравнение (2) с линейной по θ_q свободной функцией. Определим $J[f(t)] = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$ с фиксированным t_0 и $J^2[f(t)] = J[J[f(t)]]$.

Теорема 6. *Уравнение* (2) *имеет операторы рекурсии*

$$R_1 = D_q + \gamma e^{r(T-t)}(\theta_q - S),$$
$$R_2 = \sigma^2 D_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q) + \mu - \gamma\sigma^2 J[a(t)e^{r(T-t)}],$$
$$R_3 = tR_1 - S + \gamma\sigma^2 J^2[a(t)e^{r(T-t)}].$$

Ввиду их коммутирования (в одном из трех случаев — с точностью до аддитивной константы) показано, что найденные три оператора рекурсии порождают трехпараметрическое счетное семейство обобщенных симметрий исследуемого уравнения.

Вторая глава посвящена исследованию уравнения Геана — Пу с дробной производной Римана — Лиувилля по времени

$${}_cD_t^{\alpha}\theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \quad (4)$$

Раздел §2.1 содержит предварительные сведения о дробном интеграле и дробной производной Римана — Лиувилля, некоторых их свойствах, дана формула продолжения по дробной производной Римана-Лиувилля

$$\eta^{\alpha} = {}_cD_t^{\alpha}(\eta - \theta_t\tau - \theta_S\xi - \theta_q\beta) + \xi\, {}_cD_t^{\alpha}\theta_S + \beta\, {}_cD_t^{\alpha}\theta_q + \tau D_t\, {}_cD_t^{\alpha}\theta,$$

которую ранее получили Р. К. Газизов, С. Ю. Лукащук и А. А. Касаткин в своих работах с ее раскрытием для оператора линейно-автономного вида, т. е. при выполнении условий

$$\xi_\theta = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0, \quad \eta = p(t, S, q)\theta + g(t, S, q).$$

Далее речь идет только о линейно-автономных операторах, так как они не меняют форму дробной производной. При этом Z.-Y. Zhang и J. Zheng[11] показали, что эволюционные уравнения, разрешенные относительно производной Римана — Лиувилля порядка менее единицы, имеют только линейно-автономные симметрии.

В §2.2 получены следующие линейно-автономные генераторы групп преобразований эквивалентности уравнения (4) со свободным элементом $F(t, \theta_q)$ при $\alpha > 0$ для случаев нулевой и ненулевой безрисковой ставки r.

Теорема 7. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$, *тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Базис алгебры Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r = 0$ *образуют операторы*

$$Y_1 = \partial_S, \quad Y_{2,j} = (t-c)^{\alpha - j} q\partial_\theta, \quad j = 1, \dots,$$
$$Y_3 = 2\gamma\sigma^2(t-c)\partial_t + \alpha\gamma\sigma^2 S\partial_S + \left(-\alpha\gamma\sigma^2 q + \mu\alpha\right)\partial_q +$$
$$+ \left(-2\alpha\gamma\sigma^2 F - \alpha\mu^2\right)\partial_F, \quad Y_V = V\partial_\theta + {}_cD_t^{\alpha}V\partial_F.$$

2. *Базис алгебры Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r \neq 0$ *образуют операторы*

$$Y_1 = \partial_S - r(t-c)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(r(t-c)^{\alpha})q\partial_\theta, \quad Y_V = V\partial_\theta + ({}_cD_t^{\alpha}V - rV)\partial_F,$$
$$Y_{3,j} = (t-c)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^{\alpha})q\partial_\theta, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

[11] Zhang Z.-Y., Zheng J. Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential equations // Nonlinearity. 2021. Vol. 34, No. 8. P. 5186–5212.

В §2.3 для уравнения (4) с $\alpha > 0$ и нелинейной по θ_q функцией затрат F получены следующие допускаемые алгебры линейно-автономных операторов.

Теорема 8. *Пусть $\gamma\sigma \neq 0$, $n-1 < \alpha < n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения (4) при $r \neq 0$ и произвольной F, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, имеет вид $X_j = (t-c)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения (4) при $r = 0$ и произвольной F, $\widetilde{F}'' \neq 0$, которая не эквивалентна $(t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, имеет вид $X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $X_2 = \partial_S$.*

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения (4) при $r = 0$ и $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$, имеет вид*

$$X_{1,j} = (t-c)^{\alpha-j}\partial_\theta,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad X_2 = \partial_S,$$
$$X_3 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S\partial_S + \alpha\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} - q\right)\partial_q + \left(\frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\frac{(t-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

В §2.4 найдены оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр для алгебр Ли из полученной групповой классификации в случае $\alpha \in (0, 1)$. Для подалгебр из оптимальных систем вычислены инвариантные подмодели.

Для алгебры Ли соответствующей случаю $r = 0$ и спецификации свободной функции $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$ найдена следующая оптимальная система подалгебр

Лемма 7. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $\alpha \neq 2/3$ являются $\Theta_1 = \{\langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_1 + X_2\rangle\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_2, X_3\rangle\}$.*

Лемма 8. *Оптимальными системами одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 при $\alpha = 2/3$ являются $\Theta_1 = \{\langle X_2\rangle, \langle X_3\rangle, \langle X_1 + bX_2\rangle, b \geq 0\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_2, X_3\rangle, \langle X_1, X_2\rangle, \langle X_3, X_1 + bX_2\rangle, b \geq 0\}$.*

В **третьей главе** исследуется групповая структура уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени

$$ {}_c^C D_t^\alpha \theta = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q). \quad (5)$$

Как и во второй главе, рассматриваются только линейно-автономные операторы, поскольку они не меняют форму дробной производной.

В §3.1 получен следующий аналог обобщенного правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка.

Теорема 8. *Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и аналитических функций f, g имеет место равенство*

$$ {}_c^C D_t^{\alpha+k}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{n} D_t^n f(t) J_t^n\, {}_c^C D_t^{\alpha+k} g(t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i}\binom{\alpha+k}{i-j}\frac{(t-c)^j}{j!} D_t^j\, {}_c^C D_t^{\alpha+k-i} f(t).$$

С его помощью в §3.2 на основе формул продолжения, полученных Р. К. Газизовым, С. Ю. Лукащуком, А. А. Касаткиным и T. Bakkyaraj получена формула продолжения по дробной производной Герасимова — Капуто произвольного порядка.

В §3.3 для случая $0 < \alpha < 1$ найдены генераторы групп преобразований эквивалентности уравнения (5).

Теорема 9. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$.

1. *Алгебра Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (5) *при* $r = 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_S, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = q\partial_\theta, \quad Y_V = V\partial_\theta + {}_cD_t^\alpha V\partial_F,$$
$$Y_4 = 2(t-c)\partial_t + \alpha S\partial_S - \alpha q\partial_q - \frac{\alpha\mu}{\gamma\sigma^2}\partial_\theta + \left(-2\alpha F - \frac{\alpha\mu^2}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F.$$

2. *Алгебра Ли генераторов групп преобразований эквивалентности уравнения* (5) *при* $r \neq 0$ *порождается операторами* $Y_V = V\partial_\theta + ({}_cD_t^\alpha V - rV)\partial_F$,

$$Y_1 = \partial_S + q\partial_\theta, \quad Y_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad Y_3 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)q\partial_\theta,$$

В §3.4 получена групповая классификация уравнения Геана — Пу с дробной производной Герасимова — Капуто по времени порядка меньше единицы и с нелийнейной функцией затрат получено

Теорема 10. *Пусть* $\gamma\sigma \neq 0$.

1. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (5) *при* $r \neq 0$ *и функции* F, *такой, что* $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *имеет вид* $X_1 = E_{\alpha,1}(r(t-c)^\alpha)\partial_\theta$, $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$.

2. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (5) *при* $r = 0$ *и функции* F, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *не эквивалентной функции* $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, *имеет вид* $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_S$, $X_3 = \partial_q + S\partial_\theta$.

3. *Базис допускаемой алгебры Ли уравнения* (5) *при* $r = 0$ *и* $F = (t-c)^{-\alpha}\widetilde{F}\left((t-c)^{-\alpha/2}\theta_q\right)$, $\widetilde{F}'' \neq 0$, *имеет вид* $X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_S$, $X_3 = \partial_q + S\partial_\theta$,

$$X_4 = (t-c)\partial_t + \frac{\alpha}{2}S\partial_S - \frac{\alpha}{2}q\partial_q + \left(-\frac{\alpha\mu}{2\gamma\sigma^2}S + \frac{\alpha\mu^2(t-c)^\alpha}{2\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

В §3.5 осуществлен поиск оптимальных систем одномерных и двумерных подгалгебр и соответствующих им инвариантных подмоделей.

Для алгебры Ли соответствующей $r = 0$ и произвольной функции F найдена оптимальная система одномерных и двумерных подалгебр в виде $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle bX_2 + X_3\rangle, b \in \mathbb{R}\}$, $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, bX_2 + X_3\rangle, b \in \mathbb{R}\}$.

К примеру, подалгебра $\langle bX_2 + X_3\rangle$, $b \in \mathbb{R}$, обладает инвариантами $J_1 = t$, $J_2 = z = S - bq$, $J_3 = \theta - Sq + \frac{b}{2}q^2$. Инвариантное решение ищется в виде $\theta = Sq - \frac{b}{2}q^2 + \varphi(t,z)$. Получаем инвариантную подмодель

$${}_c^C D_t^\alpha\varphi + \mu\varphi_z + \frac{\sigma^2}{2}\varphi_{zz} + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\varphi_z^2 = F\left(t, z - b\varphi_z\right).$$

В §3.6 проведен сравнительный анализ групповых структур уравнений Геана — Пу с целой и дробными производными по времени.

Заключение

В диссертационной работе исследована групповая структура уравнения Геана — Пу с первой и дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по времени и осуществлен поиск инвариантных подмоделей и инвариантных решений этих уравнений. Отметим также получение аналога правила Лейбница для производной Герасимова — Капуто произвольного порядка и формулы продолжения для коэффициента при такой производной в операторе допускаемой группы, в том числе группы линейно-автономных преобразований.

Дальнейшие перспективы развития тематики данной работы связаны с поиском законов сохранения для уравнений Геана — Пу, исследованием групповой структуры уравнений Геана — Пу с дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто по переменным цены акции S и количества акций q, других уравнений и систем уравнений с дробными производными, в том числе с производными Лиувилля, Хилфера и др. Это потребует разработки соответствующей теории, в частности, получения формул продолжения для коэффициентов при таких производных в операторе допускаемой группы, для чего потребуется получить обобщенное правило Лейбница или его аналоги для таких производных.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Ядрихинский, Х. В. Инвариантные решения модели Геана — Пу ценообразования опционов и хеджирования / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2021. — Т. 6, № 1. — С. 42–51.
2. Ядрихинский, Х. В. О линейно-автономных симметриях дробной модели Геана — Пу / Х. В. Ядрихинский, В. Е. Федоров // Уфимск. мат. журн. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 110–123.
3. Sitnik, S. M. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging / S. M. Sitnik, K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov. // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, No. 9. — P. 1841.
4. Yadrikhinskiy, K. V. Linearly autonomous symmetries of a fractional Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Mathematical Notes. — 2023. — Vol. 114, No. 6. — P. 1368–1380.
5. Yadrikhinskiy, K. V. Recursion operators for the Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No. 3. — P. 1236–1240.
6. Yadrikhinskiy, K. V. Symmetries of fractional Guéant — Pu model with Gerasimov — Caputo time-derivative / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 244, No. 4. — P. 552–566.
7. Yadrikhinskiy, K. V. Symmetry analysis of the Guéant — Pu model / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov // AIP Conference Proceedings. — 2022. — Vol. 2528. — P. 020035-1–020035-4.
8. Yadrikhinskiy, K. V. Group analysis of the Guéant and Pu model of option pricing and hedging / K. V. Yadrikhinskiy, V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Chapter in Symmetries and Applications of Differential Equations / ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov. — Singapore : Springer, 2021. — P. 173–203.

Ядрихинский Христофор Васильевич
Симметрийный анализ некоторых уравнений типа Блэка — Шоулза
целого и дробного порядков
Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук
Подписано в печать 24.07.2023. Заказ № 203
Формат 60×84/16. Объем 1,3 п.л. Тираж 75 экз.
Экспресс типография
640018, г. Курган, ул.Советская, 128, офис 505
Тел. 8(3522) 46-11-14. E-mail: er-express@mail.ru