

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской
академии наук

На правах рукописи

Валов Александр Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ТРЕЩИН
В СЛОИСТЫХ ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ**

Специальность 1.1.9 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор РАН
Головин Сергей Валерьевич

Новосибирск — 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Обзор литературы	20
1.1 Предмет исследования и инженерный контекст	20
1.2 Моделирование гидравлического разрыва пласта	24
1.3 Асимптотика в окрестности вершины трещины и задача пересечения границ между слоями	30
1.4 Целостность обсаженной скважины и гидравлическое отслоение цементного камня	33
1.5 Постановка задач исследования	39
Глава 2. Асимптотическое решение для полубесконечной трещины гидравлического разрыва в слоистой среде . .	43
2.1 Полубесконечная гидравлическая трещина в однородной среде. Универсальное асимптотическое решение	44
2.2 Проблема пересечения слоев с различными сжимающими напряжениями	49
2.3 Учет слоистости по сжимающим напряжениям	54
2.3.1 Численное решение интегрального уравнения	54
2.3.2 Асимптотическое решение с поправкой трещиностойкости	55
2.3.3 Аппроксимация с помощью ОДУ	57
2.4 Сравнение точности и вычислительной эффективности	59
2.5 Область применимости асимптотического решения и коэффициент релаксации напряжений	67
2.6 Выводы по асимптотическому решению	73
Глава 3. Моделирование гидравлического разрыва пласта на основе модели planar 3D ILSA	75
3.1 Математическая модель одиночной плоской трещины гидроразрыва	77
3.1.1 Уравнение упругости	78

	Стр.
3.1.2 Течение жидкости	80
3.1.3 Условия на фронте трещины	80
3.2 Численный алгоритм	82
3.2.1 Дискретизация определяющих уравнений	82
3.2.2 Алгоритм учета контакта берегов трещины	85
3.2.3 Определение положения фронта трещины	86
3.2.4 Определение объема жидкости в концевых элементах	90
3.2.5 Расчет утечек в концевых элементах	93
3.2.6 Структура численного алгоритма	94
3.3 Интеграция асимптотики, учитывающей слоистость по сжимающим напряжениям	98
3.3.1 Выбор асимптотического решения	100
3.3.2 Модификация алгоритма отслеживания фронта трещины	101
3.3.3 Адаптация процедуры вычисления объема жидкости в концевом элементе	104
3.3.4 Коэффициент релаксации напряжений для плоской трещины конечного размера	105
3.4 Верификация алгоритма и численные эксперименты	110
3.4.1 Верификация на основе полуаналитического решения для радиальной гидравлической трещины	110
3.4.2 Сравнение с экспериментальными данными	112
3.4.3 Тестирование алгоритма смыкания берегов трещины . . .	114
3.5 Анализ чувствительности к размеру сетки	116
3.5.1 Гидравлическая трещина постоянной высоты	117
3.5.2 Симметричные барьеры напряжений	120
3.5.3 Прорыв тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями	123
3.5.4 Сравнение вычислительной эффективности	126
3.6 Одновременное распространение нескольких гидравлических трещин вдоль наклонной скважины	128
3.6.1 Модель для системы нескольких трещин	129
3.6.2 Численная схема учета взаимного влияния трещин	131
3.6.3 Вычисление коэффициентов упругого влияния	134

3.6.4	Оценка слагаемого, отвечающего за касательное сопряжение трещин	136
3.6.5	Численные расчеты для наклонной скважины	142
3.7	Выводы по моделированию гидравлического разрыва пласта . . .	145

Глава 4. Модель отслоения цементного камня обсаженной скважины при закачке CO_2 , учитывающая

	термопороупругое взаимодействие	148
4.1	Постановка задачи об отслоении на границе цементного камня обсаженной скважины. Учет начального напряженного состояния	149
4.1.1	Геометрия задачи и основные предположения	150
4.1.2	Многостадийный анализ нагружения	152
4.2	Математическая модель гидравлического отслоения	158
4.2.1	Модель распространения трещины отслоения вдоль ствола скважины	160
4.2.2	Модель термопороупругого деформирования в поперечном сечении скважины	163
4.2.3	Сопряжение модели распространения трещины и термопороупругой задачи в сечениях скважины	167
4.2.4	Критерий инициации трещины отслоения	170
4.3	Численная схема	172
4.3.1	Дискретизация уравнений распространения трещины вдоль ствола скважины	172
4.3.2	Метод конечных элементов для термопороупругой задачи в сечениях скважины	177
4.4	Численные эксперименты	180
4.4.1	Верификация модели и анализ сходимости	183
4.4.2	Влияние начального напряженного состояния	189
4.4.3	Распространение гидравлического отслоения вдоль границы слоистого пласта	194
4.5	Анализ чувствительности к параметрам модели	204
4.5.1	Влияние анизотропии пластовых напряжений	204
4.5.2	Смещения обсадной колонны относительно оси скважины	206
4.5.3	Варьирование температуры закачиваемой жидкости	208

4.5.4	Эволюция пластовых условий вследствие длительной закачки CO_2	210
4.6	Анализ и количественная оценка ограничений модели	212
4.6.1	Влияние многофазного течения	212
4.6.2	Конвективный теплоперенос вдоль трещины	216
4.6.3	Количественная оценка эффекта Джоуля — Томсона	217
4.7	Выводы по модели гидравлического отслоения	218
Заключение		221
Список литературы		225

Введение

Актуальность темы исследования. Нефтегазовая отрасль остается одной из основ современной мировой энергетики, а также играет важную роль в развитии низкоуглеродных технологий, включая проекты геологического захоронения CO₂. Ключевым инженерным объектом, обеспечивающим доступ к целевому пласту как при добыче углеводородов, так и при закачке флюидов в недра, является скважина. На протяжении жизненного цикла скважины возникают две группы взаимосвязанных инженерных задач. Первая группа связана с обеспечением требуемого уровня притока флюида между скважиной и пластом, для чего в коллекторах низкой и умеренной проницаемости применяется гидравлический разрыв пласта. Вторая связана с обеспечением долговременной герметичности скважины, гарантирующей изоляцию целевого пласта от вышележащих проницаемых горизонтов, водоносных пластов и поверхности на протяжении всего срока эксплуатации. Обе группы задач связаны с процессами, в которых закачиваемая под высоким давлением жидкость взаимодействует с горной породой и элементами конструкции скважины, порождая распространение гидравлических трещин в предварительно напряженной слоистой пороупругой среде.

Гидравлический разрыв пласта является основным инструментом интенсификации добычи и одним из ключевых драйверов разработки трудноизвлекаемых запасов углеводородов. Эффективность операции определяется геометрией созданной трещины, что делает достоверное предсказание ее длины и высоты важным условием качественного проектирования гидроразрыва. Разрабатываемые коллекторы, как правило, имеют выраженное слоистое строение с существенными контрастами сжимающих напряжений между слоями, оказывающими значительное влияние на геометрию трещины. Дополнительные требования к моделированию возникают при многостадийном гидроразрыве на горизонтальных и наклонных скважинах, где из общего кластера перфораций одновременно инициируется несколько влияющих друг на друга трещин.

Обеспечение долговременной герметичности обсаженных скважин приобретает особое значение в проектах геологического захоронения CO₂, где требования по сохранению межпластовой изоляции распространяются на де-

сятилетия. Основным барьером, отделяющим целевой пласт от вышележащих проницаемых горизонтов, является цементный камень в затрубном пространстве обсадной колонны, практически недоступный для инспекции и ремонта после установки. Импульсный характер воздействия при кумулятивной перфорации нарушает целостность контактных зон цементного камня, а последующая закачка CO_2 порождает термопороупругие нагрузки в околоскважинной зоне, обусловленные перепадами температуры и долговременным изменением состояния пласта. Совместное действие этих факторов создает условия для инициации интерфейсной трещины гидравлического отслоения вдоль границ цементного камня, представляющей собой один из наиболее вероятных путей утечки CO_2 .

Проведение экспериментальных исследований распространения гидравлических и интерфейсных трещин в условиях, приближенных к промысловым, сопряжено с существенными сложностями вследствие масштабов задачи, недоступности рассматриваемых объектов для прямого наблюдения и сложности воспроизведения пластовых условий в лаборатории. Математическое моделирование становится основным инструментом анализа, обоснования проектных решений и оценки рисков в задачах гидроразрыва пласта и закачки CO_2 . Инженерные приложения предполагают проведение серийных и параметрических расчетов, что накладывает существенные ограничения на вычислительные затраты используемых моделей. Разработка математических моделей и вычислительных подходов, обеспечивающих корректное описание слоистой пороупругой среды и термопороупругих эффектов при сохранении приемлемого времени расчета, представляет собой актуальную научную и практическую задачу.

Степень разработанности темы исследования. Для моделирования распространения гидравлических трещин разработаны модели различной сложности, отличающиеся допущениями о геометрии трещины и полнотой описания сопряженных процессов. В ранних аналитических моделях форма трещины и ее преимущественное направление распространения фиксируются, что позволяет свести сопряженную задачу к одномерной. Модель Христиановича—Желтова—Гиртсмы—де Клерка (KGD) описывает вертикальную трещину, длина которой значительно меньше ее высоты, при закачке жидкости по всей высоте трещины [1; 2]. Вследствие указанных допущений каждое горизонтальное сечение находится в состоянии плоской деформации. Модель Перкинса—Керна—Нордгрена (PKN) рассматривает противоположный предельный случай, в кото-

ром высота трещины фиксирована, а ее длина значительно превышает высоту, так что условие плоской деформации выполняется в каждом вертикальном сечении [3; 4]. Радиальная модель [2; 5] описывает распространение дисковой трещины из точечного источника в однородной среде в осесимметричной постановке. Модели pseudo-3D представляют собой обобщение модели PKN, в котором допускается рост трещины по высоте при сохранении преимущественного распространения в горизонтальном направлении [6–9]. В моделях planar 3D предполагается, что трещина является плоской и имеет произвольную конфигурацию, без априорных предположений о геометрии трещины, что позволяет совместно рассматривать двумерное течение жидкости внутри трещины с трехмерным описанием упругого деформирования окружающей породы [10–13]. За счет сочетания точности и вычислительной эффективности planar 3D модели получили широкое распространение в инженерных приложениях. Полностью трехмерные модели допускают отклонение поверхности трещины от начальной плоскости и ее искривление в процессе распространения, а также обеспечивают более общее описание взаимодействия с сетью естественных трещин, однако их вычислительная стоимость по-прежнему препятствует широкому применению в инженерной практике [14–16]. Развитие технологий заканчивания скважин привело к появлению моделей одновременного распространения нескольких гидравлических трещин, инициируемых из различных перфорационных кластеров вдоль одной скважины при многостадийном гидроразрыве. В таких моделях учитывается распределение расхода закачиваемой жидкости между трещинами и их механическое взаимодействие через индуцированное поле напряжений [17–19].

Точность моделей planar 3D в слоистых по сжимающим напряжениям пластах существенно зависит от используемого условия распространения в вершине трещины. Стандартные асимптотические условия распространения теряют точность при пересечении фронтом трещины границ между слоями и требуют существенного измельчения расчетной сетки для получения корректной геометрии трещины, что затрудняет применение planar 3D моделей на грубых сетках, характерных для инженерных приложений. Асимптотическое поведение раскрытия трещины в окрестности ее вершины оказывает определяющее влияние на характер распространения трещины в целом и используется в качестве условия продвижения фронта трещины в моделях гидравлического разрыва пласта. В ряде симуляторов это условие задается классической кор-

невой асимптотикой линейной упругой механики разрушения [20; 21]. Однако анализ окрестности вершины трещины показывает, что корневая асимптотика справедлива лишь в очень малой области вблизи фронта [22; 23]. Асимптотическое решение в окрестности вершины трещины определяется балансом нескольких физических механизмов, включающих образование новой поверхности трещины, вязкую диссипацию при течении жидкости в трещине и утечки жидкости гидроразрыва в проницаемую породу [24; 25]. Доминирование одного из этих процессов соответствует одному из трех предельных асимптотических режимов: режиму доминирующей трещиностойкости, режиму доминирующей вязкости или режиму доминирующих утечек [22; 26]. Для корректного описания окрестности вершины трещины предложена универсальная асимптотика, охватывающая все три предельных режима и переходы между ними [23; 27]. В работе [28] построено эффективное неявное аналитическое приближение универсальной асимптотики, пригодное для использования в качестве условия распространения в симуляторах гидравлического разрыва пласта. Разрабатываемые коллекторы, как правило, имеют выраженную слоистую структуру с существенным контрастом сжимающих напряжений между слоями. Использование универсальной асимптотики в качестве условия распространения, без встроенного механизма учета границ слоев, приводит к существенной потере точности при пересечении фронтом трещины границ между слоями [29; 30]. Для учета влияния слоев с различными сжимающими напряжениями в асимптотическом описании окрестности вершины трещины предложены два подхода. Первый основан на прямом численном решении задачи в несингулярной интегральной постановке для полубесконечной гидравлической трещины, позволяющей точно учитывать изменение сжимающих напряжений в окрестности вершины [31]. Однако решение соответствующего нелинейного интегрального уравнения требует значительных вычислительных затрат. Вторым подход, реализованный в алгоритме Multi Layer Tip Element (MuLTiPEl), использует универсальную асимптотику совместно со значением эффективной трещиностойкости, учитывающим влияние слоев в концевом элементе [32; 33]. Такой подход проще и вычислительно эффективнее, однако существенно теряет точность при значительном влиянии вязкости жидкости.

В контексте развития низкоуглеродных технологий и, в частности, проектов геологического захоронения CO_2 , целостность существующих и вновь сооружаемых скважин является критически важным условием их успеш-

ной реализации [34—36]. Основным барьером, обеспечивающим межпластовую изоляцию, является цементный камень в затрубном пространстве обсадной колонны [37; 38]. Импульсный характер воздействия при кумулятивной перфорации приводит к образованию дефектов на границах цементного камня [39]. Такие дефекты могут служить очагами инициации гидравлического отслоения цементного камня, распространяющегося вдоль его границ и представляющего собой один из наиболее вероятных путей утечки пластовых флюидов [40]. Для описания механического поведения крепи скважины предложен многостадийный конечно-элементный подход, позволяющий отслеживать эволюцию напряженно-деформированного состояния системы «обсадная колонна — цемент — порода» в ходе последовательных этапов строительства и эксплуатации [41]. В последующих работах эта постановка была расширена за счет учета пороупругого поведения цементного камня [42; 43], а также напряжений, формируемых в процессе гидратации и объемной усадки цемента и определяющих начальное напряженное состояние цементного камня [44—46]. Для моделирования гидравлического отслоения на границах цементного камня в литературе предложены различные подходы. В работе [40] рассмотрено вертикальное распространение гидравлического отслоения при фиксированной длине дуги трещины в поперечном сечении скважины, без учета термических эффектов и начального напряженного состояния цемента. Для описания трехмерного распространения отслоения с произвольной геометрией использованы модели зоны сцепления в рамках трехмерной конечно-элементной постановки [47—49], впоследствии обобщенные до сопряженной термо-гидро-механической постановки [50]. Однако в рамках существующих моделей одновременный учет термopopopypyгих эффектов, трехмерного характера распространения отслоения и начального напряженного состояния, обусловленного строительством скважины и гидратацией цемента, обеспечивается ценой существенных вычислительных затрат, ограничивающих применение таких моделей для параметрических исследований и сценарного анализа закачки CO_2 .

Более подробный обзор литературы по моделированию гидравлического разрыва пласта, асимптотическому описанию окрестности вершины трещины и целостности обсаженной скважины при закачке CO_2 представлен в главе 1 настоящей диссертации.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка математических моделей, асимптотических решений и вычислительных подходов, описывающих распространение гидравлических трещин в слоистых поропругих средах и интерфейсных трещин с учетом термoporopругих эффектов. Разрабатываемые модели и подходы должны обеспечивать приемлемые вычислительные затраты для проведения параметрических исследований и использования в инженерных приложениях. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- Разработать асимптотическое решение для полубесконечной гидравлической трещины, распространяющейся через несколько слоев с различными сжимающими напряжениями.
- Оценить размер области в окрестности вершины трещины, в пределах которой это асимптотическое решение остается справедливым, а также расширить эту область путем введения коэффициента релаксации напряжений.
- Обобщить модель распространения гидравлической трещины planar 3D на основе подхода ILSA для использования асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям в качестве условия распространения. Провести верификацию и валидацию модели, а также исследовать влияние разрешения расчетной сетки на точность предсказываемой геометрии трещины в слоистых пластах.
- Обобщить коэффициент релаксации напряжений, введенный для полубесконечной трещины, на случай гидравлической трещины конечных размеров с произвольным расположением слоев.
- На основе разработанной модели провести параметрическое исследование влияния наклона скважины на геометрию системы одновременно распространяющихся гидравлических трещин.
- Разработать модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня, учитывающую трехмерный характер ее распространения, термoporopругое деформирование системы «обсадная колонна — цемент — порода» и начальное напряженное состояние, обусловленное строительством скважины и гидратацией цемента.
- Провести анализ чувствительности гидравлического отслоения к условиям нагружения и выявить основные факторы, определяющие риск возникновения отслоения как потенциального пути утечки CO₂.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в следующих полученных результатах:

- Построено асимптотическое решение для полубесконечной гидравлической трещины, учитывающее слоистость по сжимающим напряжениям. Решение основано на аппроксимации несингулярной интегральной формулировки с помощью обыкновенного дифференциального уравнения. Такая аппроксимация сохраняет высокую точность во всех режимах распространения трещины при вычислительных затратах, приемлемых для использования асимптотического решения в качестве условия распространения в алгоритмах отслеживания фронта.
- Получена оценка размера области в окрестности вершины трещины, в пределах которой построенное асимптотическое решение с учетом слоистости по сжимающим напряжениям согласуется с эталонным решением для гидравлической трещины конечных размеров. Показано, что размер этой области существенно сокращается по мере удаления фронта трещины от границы слоя. Введен коэффициент релаксации напряжений, расширяющий указанную область за счет эффективного уменьшения амплитуды скачка напряжений.
- Разработана модификация модели гидравлического разрыва пласта *planar 3D* на основе алгоритма *ILSA*, использующая построенное асимптотическое решение с учетом слоистости по сжимающим напряжениям в качестве условия распространения. Основные компоненты алгоритма, включая определение положения фронта трещины и вычисление объема концевых элементов, обобщены на случай многослойной среды. Показано, что предложенные модификации существенно повышают точность алгоритма *ILSA* при моделировании гидроразрыва пласта в слоистой среде, особенно при использовании грубых расчетных сеток.
- Построено обобщение коэффициента релаксации напряжений, введенного для полубесконечной трещины, на случай трещины конечных размеров с произвольным расположением слоев и произвольным режимом распространения. Полученное обобщение не зависит от геометрии слоев и увеличивает размер области в окрестности вершины трещины, в пределах которой асимптотическое решение с учетом слоистости по сжимающим напряжениям остается справедливым. За счет расширения указанной области построенное асимптотическое решение может быть

использовано в качестве условия распространения в моделях гидравлического разрыва пласта на относительно грубых расчетных сетках, характерных для инженерных расчетов.

- Разработана трехмерная модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня при закачке CO_2 , учитывающая термопорупругое деформирование околоскважинной области, а также начальное напряженное состояние, обусловленное строительством скважины и гидратацией цемента. Отличительная черта модели заключается в сведении трехмерной механической задачи к последовательности двумерных задач в отдельных поперечных сечениях скважины в приближении плоской деформации, сопряженных с моделью вертикального распространения трещины через приближение локальной упругости. Такая декомпозиция сохраняет трехмерный характер распространения трещины при вычислительных затратах, приемлемых для параметрических исследований и обоснования сценариев закачки CO_2 .
- Выявлены три характерных режима профиля раскрытия трещины гидравлического отслоения цементного камня в поперечном сечении скважины: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение с немонотонным раскрытием и полное отслоение. Переходы между режимами носят характер скачкообразных бифуркаций, чувствительных к условиям нагружения. На основе выявленных режимов установлены практические индикаторы эволюции трещины по промысловым данным: при закачке с постоянным давлением расход растет с увеличением длины дуги трещины, при закачке с постоянным расходом падает давление закачки.
- На основе разработанной модели установлены закономерности влияния условий закачки CO_2 и состояния пласта на риск гидравлического отслоения цементного камня. Показано, что ползучесть горной породы качественно меняет характер взаимодействия трещины со слоистостью пласта: в сценарии без учета ползучести распространение трещины ускоряется при пересечении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями за счет контраста упругих свойств, тогда как в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести трещина останавливается на этих границах. Также установлено, что закачка

холодной жидкости повышает риск отслоения на границе «обсадная колонна — цемент» на раннем этапе закачки и на границе «цемент — порода» на позднем этапе. Характерное для операций закачки CO_2 долгосрочное снижение пластовой температуры и рост порового давления оказывают противоположное влияние на риск отслоения: снижение температуры повышает риск, тогда как рост порового давления снижает его за счет увеличения сжимающих напряжений.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в развитии асимптотических и вычислительных методов моделирования гидравлических трещин в слоистых пороупругих средах, а также в построении модели интерфейсной трещины гидравлического отслоения цементного камня при закачке CO_2 и выявлении качественных закономерностей ее развития под действием термопороупругих эффектов.

С практической точки зрения разработанные модели и вычислительные подходы применимы в задачах проектирования операций гидравлического разрыва пласта в слоистых пластах, включая многостадийный гидроразрыв на наклонных скважинах, и в задачах обеспечения долгосрочной герметичности скважин при закачке CO_2 . Разработанные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, пригодного для инженерных расчетов дизайна ГРП. Лежащий в основе алгоритмов способ защищен патентом РФ на изобретение № 2786303 [51] (в соавторстве), два расчетных модуля комплекса зарегистрированы как программы для ЭВМ (свидетельства № 2020611805 и № 2020611608) [52; 53]. Разработанная модель включена в состав российского симулятора «КиберГРП» в качестве основной расчетной модели распространения плоских трещин гидроразрыва.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе для решения поставленных задач использовались:

- Аппарат механики сплошных сред для формулирования математических постановок задач, включая теорию термопороупругости, линейную механику разрушения и теорию смазочного течения жидкости в узком канале трещины.
- Методы асимптотического анализа окрестности вершины гидравлической трещины [24; 27].

- Метод разрывных смещений на основе метода граничных элементов для численного решения задачи об упругом деформировании горной породы [54].
- Метод конечных объемов для дискретизации уравнения смазочного течения жидкости в трещине [55].
- Метод конечных элементов [56] для численного решения термoporоупругой задачи о деформировании околоскважинной зоны, реализованный с использованием библиотеки `deal.II` [57].
- Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [58] для расчета асимптотических решений в окрестности вершины трещины.
- Методы верификации и валидации численных алгоритмов, включая сравнение с эталонными полуаналитическими решениями, сопоставление с результатами лабораторных экспериментов и анализ сходимости при измельчении расчетной сетки.
- Параметрические исследования и анализ чувствительности для выявления закономерностей влияния параметров модели на решение.

Программная реализация разработанных алгоритмов выполнена на языках Python и C++.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы:

- Разработана и реализована в виде эффективного численного алгоритма модель развития плоской трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП) на основе алгоритма неявного отслеживания фронта трещины с учетом слоистости среды по сжимающим напряжениям.
- Для решения задачи моделирования впервые построено асимптотическое решение для полубесконечной трещины ГРП, распространяющейся в проницаемой упругой среде со слоистостью по сжимающим напряжениям, а также предложен подход коэффициента релаксации напряжений, позволяющий расширить область, в которой разработанное асимптотическое решение остается справедливым.
- Построенная модель валидирована на точных решениях и лабораторных экспериментах и включена в качестве ключевой расчетной модели в состав российского симулятора гидроразрыва пласта “Кибер-ГРП”.

- Разработана трехмерная модель гидравлического отслоения цементного камня от обсадной колонны при закачке CO_2 в пласт. Трехмерная задача решена через сопряжение последовательности решений двумерных задач термопорупругости в поперечных сечениях скважины с одномерной моделью развития трещины гидроразрыва вдоль скважины.
- Выявлены три характерных режима профиля раскрытия трещины гидравлического отслоения цементного камня в поперечном сечении скважины и практические индикаторы их реализации по промысловым данным закачки. Установлены закономерности влияния ползучести горной породы, температуры закачиваемой жидкости, порового давления и температуры пласта на риск отслоения.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается использованием устоявшихся в научном сообществе уравнений и определяющих соотношений механики сплошных сред при формулировании математических постановок задач, а также применением строгих математических методов и общепринятых численных алгоритмов. Верификация разработанных программных реализаций проведена путем сравнения с эталонными аналитическими и полуаналитическими решениями, а также анализом сходимости при измельчении расчетной сетки. Валидация построенных моделей проведена путем сопоставления результатов моделирования с данными лабораторных экспериментов, опубликованными в открытых источниках. Полученные результаты находятся в качественном и количественном соответствии с известными в литературе результатами других авторов.

Представленные результаты докладывались и обсуждались на конференциях:

- Всероссийская конференция с международным участием и школа молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л. В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», Новосибирск, 13–17 мая, 2019 г.;
- The international workshop “Coupled thermo-hydro-mechanical problems of fracture mechanics”, Novosibirsk, Russia, July 1–5, 2019;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19–24 августа, 2019 г.;

- VI Всероссийская научная конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика», Севастополь, 22–29 августа, 2021 г.;
- The international workshop “Reservoir simulation for geological carbon storage studies and reservoir safety”, Shanghai, China, November 25–29 2024;
- The international workshop “Reservoir simulation for geological carbon storage studies and reservoir safety”, Shanghai, China, November 23–27 2025;

Результаты диссертации сообщались и обсуждались на следующих научных семинарах:

- Открытое заседание Ученого совета по рассмотрению важнейших результатов Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск, 2023 г.;
- Семинар «Краевые задачи механики сплошных сред» под руководством д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н., Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН;
- Семинар «Прикладная гидродинамика» под руководством чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманюка Е. В., Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН;
- Семинар научного направления «Механика деформируемого твердого тела» под руководством д.ф.-м.н. Коробейникова С. Н. и д.ф.-м.н. Шутова А. В., Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева.

Основные результаты диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах [59–63], изложены в 4 тезисах докладов. Получены патент на изобретение [51] и два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [52; 53].

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ на проведение исследований совместно с организациями Китайской Народной Республики № 075-15-2023-588 «Базовая теория и ключевые технологии обеспечения безопасности при захоронении диоксида углерода» 2023–2025 гг.

Личный вклад автора. Публикация [59] выполнена автором единолично. В работе [60] автором разработана программная реализация термopopoупругой модели разрушения цементного камня, выполнены ее верификация, численные

расчеты и анализ полученных результатов. В работе [61] автором построено асимптотическое решение для полубесконечной гидравлической трещины со слоистостью по сжимающим напряжениям, введен коэффициент релаксации напряжений, выполнена программная реализация и проведен сравнительный анализ рассмотренных подходов. В работе [62] автором выполнено обобщение алгоритма ILSA planar 3D на случай использования асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям в качестве условия распространения, получено обобщение коэффициента релаксации напряжений на случай трещины конечных размеров, выполнены программная реализация модифицированного алгоритма, его верификация и валидация, а также исследование чувствительности геометрии трещины к разрешению расчетной сетки. В работе [63] автором построена трехмерная модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня при закачке CO_2 , учитывающая термoporоупругое взаимодействие, выполнена ее программная реализация, проведены параметрические исследования и установлены закономерности влияния условий закачки и состояния пласта на риск отслоения. Постановка задач, выбор методов решения, обсуждение полученных результатов и их физическая интерпретация, а также оформление результатов в виде публикаций и научных докладов выполнены совместно с соавторами соответствующих работ.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 247 страниц, включая 71 рисунок и 12 таблиц. Список литературы содержит 218 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, показана степень разработанности по теме исследования, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, охарактеризованы новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована достоверность и представлена апробация результатов.

В **первой главе** приводится обзор состояния исследований по трем направлениям: асимптотика в окрестности вершины трещины, моделирование гидроразрыва пласта и отслоение цементного камня обсаженной и зацементированной скважины. На основе обзора литературы выявляются нерешенные вопросы и определяются задачи настоящего исследования.

Во второй главе исследуется задача о полубесконечной трещине гидравлического разрыва, распространяющаяся через слои с различными сжимающими напряжениями в проницаемой упругой среде. Предлагаются различные подходы к построению эффективного решения и выполняется оценка области в окрестности вершины трещины, в которой разработанное асимптотическое решение остается справедливым.

Третья глава посвящена обобщению модели planar 3D ILSA на случай слоистой по напряжениям среды. Предлагаются модификации алгоритма отслеживания движущегося фронта трещины на основе асимптотики, учитывающей скачки напряжений, и повышение точности расчета геометрии трещины на грубых сетках. На основе разработанной модели исследуется задача об одновременном распространении множественных трещин на наклонной скважине.

Четвертая глава посвящена разработке модели распространения трещины гидравлического отслоения вдоль интерфейсов цементного камня при закачке CO_2 , позволяющей прогнозировать риск утечки при различных условиях цементирования, режимах закачки и напряженном состоянии пласта.

Заключение содержит краткий обзор основных результатов, полученных в диссертационной работе.

Благодарности.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Головину Сергею Валерьевичу за руководство при проведении исследований, помощь в научной и организационной работе, моральную поддержку, а также Донцову Егору Владимировичу за обсуждение идей, результатов и ценные комментарии.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Предмет исследования и инженерный контекст

Настоящее исследование посвящено двум важным прикладным задачам. Первая задача связана с интенсификацией добычи углеводородов с помощью гидравлического разрыва пласта, вторая с обеспечением целостности обсаженных и зацементированных скважин на протяжении всего срока эксплуатации. Обе конфигурации показаны на рисунке 1.1: слева — распространение трещины гидроразрыва в массиве горной породы, справа — отслоение цементного камня при закачке CO_2 . Несмотря на то, что в промысловой практике эти задачи, как правило, рассматриваются отдельно, они тесно связаны между собой: как механически, через общую конструкцию скважины, так и с точки зрения математической постановки. Высокое давление закачки в ходе операции гидроразрыва нагружает не только распространяющуюся трещину, но также обсадную колонну и цементный камень, что непосредственно влияет на механическое состояние системы «обсадная колонна — цемент — порода». Перфорация обсадной колонны перед проведением гидроразрыва неизбежно повреждает цементный камень на интерфейсах «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода». Возникающие при этом дефекты в дальнейшем могут выступать очагами инициации отслоения в течение последующих десятилетий эксплуатации скважины при добыче или закачке. Таким образом, операция, обеспечивающая повышение продуктивности коллектора, одновременно создает предпосылки для последующего нарушения целостности скважины. Помимо прямой механической связи, обе задачи относятся к одному классу задач о распространении гидравлических трещин в предварительно напряженной слоистой пороупругой среде. Ключевое различие заключается лишь в том, что в одном случае трещина распространяется в массиве горной породы, а в другом вдоль границы раздела со сцеплением между двумя разнородными материалами. Несмотря на это различие, математическая постановка обеих задач основана на схожей континуальной модели, объединяющей упругую деформацию среды, вязкое течение жидкости в трещине и условие распространения на фронте.

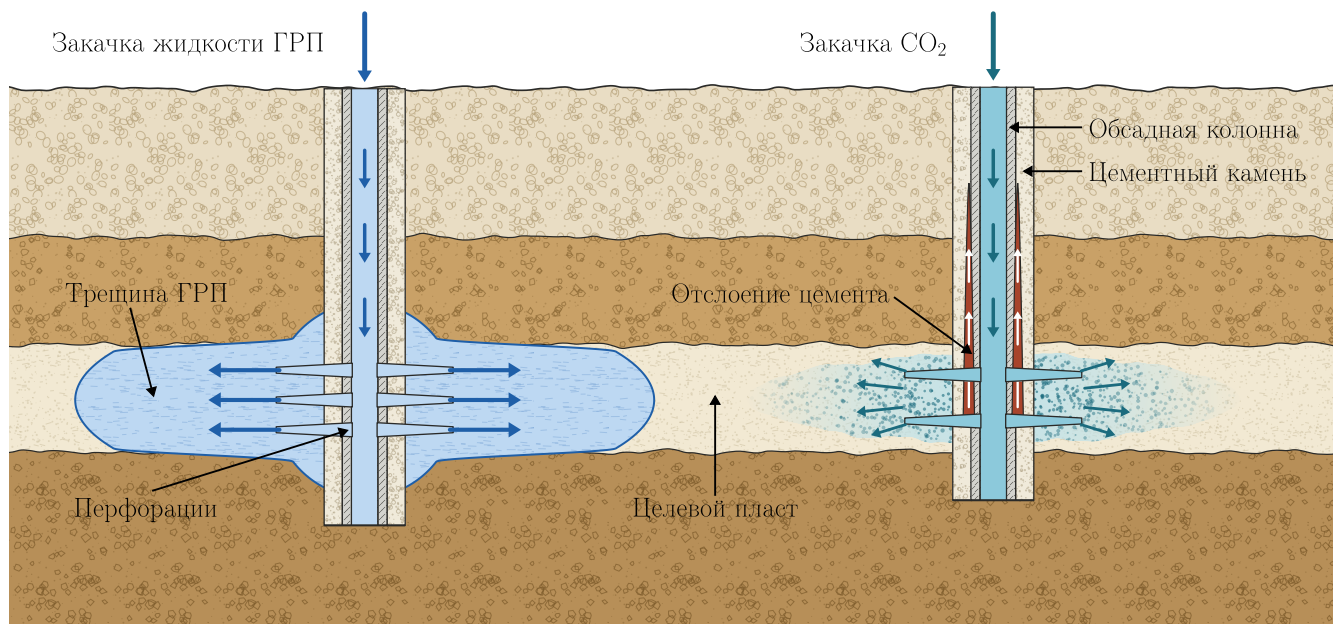


Рисунок 1.1 — Две рассматриваемые задачи в слоистом пласте. Слева: гидравлический разрыв пласта — трещина инициируется через перфорации и распространяется в массиве горной породы. Справа: закачка CO_2 — фильтрация флюида в целевой пласт сопровождается отслоением цементного камня вдоль интерфейсов «обсадная колонна — цемент» или «цемент — порода» и миграцией флюида вдоль скважины. В обоих случаях трещина распространяется под действием давления закачиваемой жидкости в предварительно напряженной слоистой поропругой среде

При проектировании современной скважины необходимо учитывать как экстремальные гидравлические нагрузки, возникающие при гидроразрыве пласта, так и строгие требования к сохранению целостности и герметичности на протяжении всего жизненного цикла скважины. Конструкция скважины формируется поэтапно, начиная с поверхности. На каждом этапе в скважину спускается обсадная колонна меньшего диаметра, которая затем цементируется, после чего бурение продолжается до большей глубины. В результате в верхней части скважины располагается несколько вложенных друг в друга обсадных колонн, разделенных слоями цементного камня. Глубина спуска колонн увеличивается от внешних к внутренним, поэтому с глубиной число вложенных слоев последовательно уменьшается. Несмотря на изменение конструкции скважины по глубине, каждое ее поперечное сечение имеет одну и ту же принципиальную структуру: систему вложенных друг в друга обсадных колонн, разделенных цементным камнем и окруженных массивом горной породы [64; 65]. В самой глубокой части скважины остается только одна, самая внутрен-

няя эксплуатационная колонна, окруженная цементным камнем и массивом горной породы. Именно эта конфигурация определяет барьерную функцию скважины в целевом интервале и служит предметом дальнейшего рассмотрения. На практике эта финальная эксплуатационная колонна устанавливается по одной из двух схем. В первой схеме колонна спускается с устья и покрывает всю глубину скважины от поверхности до забоя, повторяя ту же логику вложенности, что и вышерасположенные колонны. Во второй схеме, называемой конструкцией с хвостовиком, эксплуатационная колонна устанавливается только в нижнем интервале и подвешивается на нижнем конце (башмаке) предыдущей промежуточной колонны с небольшим перекрытием внутри нее, обеспечивающим механическую фиксацию и герметизацию соединения. Первая схема традиционно применяется в вертикальных скважинах умеренной глубины, тогда как конструкция с хвостовиком является стандартной для глубоких и горизонтальных скважин, включая многостадийный гидроразрыв на горизонтальном участке. Независимо от выбранной схемы установки, в любом поперечном сечении, перпендикулярном оси скважины, обсаженная и зацементированная скважина представляет собой трехслойную конструкцию: стальная обсадная колонна в центре, окружающий ее цементный камень в затрубном пространстве и вмещающая порода снаружи. Обсадная колонна, как правило, смещена относительно оси скважины вследствие эксцентриситета, возникающего при установке. Цементный камень обеспечивает межпластовую изоляцию на протяжении всего срока эксплуатации скважины и является единственным непрерывным барьером, отделяющим флюиды в целевом интервале закачки от других проницаемых пластов, водоносных горизонтов и, в конечном счете, от поверхности. Его разрушение приводит к миграции флюидов вдоль скважины, потере межпластовой изоляции и появлению устойчивого давления в затрубном пространстве на устье скважины, а также способно нарушить изолирующую функцию скважины в течение тех десятилетий, на которые обычно рассчитана разработка месторождения. В отличие от стальной обсадной колонны цементный камень после схватывания практически недоступен для инспекции, ремонта или замены, что накладывает на него повышенные требования по долговечности при проектировании скважины. За весь срок эксплуатации скважина подвергается существенным механическим и тепловым нагрузкам. Циклическое изменение давления происходит на этапах гидроразрыва, добычи и остановки скважины. Изменения температуры возникают при закачке

холодных технологических жидкостей в более горячий пласт или, наоборот, при закачке пара и горячих флюидов в ходе термических методов увеличения нефтеотдачи, а естественное напряженное состояние постепенно эволюционирует в процессе долговременной разработки коллектора при добыче или закачке.

Гидравлические трещины представляют собой трещины нормального отрыва, распространяющиеся в предварительно напряженной среде под действием давления закачиваемой вязкой жидкости. Основная технологическая область применения это интенсификация добычи в углеводородных коллекторах низкой и умеренной проницаемости, естественной проводимости которых недостаточно для обеспечения экономически рентабельного уровня добычи через ограниченную площадь контакта скважины с пластом. Операция гидроразрыва создает плоский канал высокой проводимости, простирающийся на десятки и сотни метров от скважины вглубь коллектора и обеспечивающий увеличенную зону дренирования, которая иначе оказалась бы недоступной [66]. Обеспечиваемое при этом увеличение продуктивности, нередко на несколько порядков по сравнению со скважиной без гидроразрыва, сделало экономически целесообразной разработку низкопроницаемых и сланцевых коллекторов и стало основным драйвером развития разработки трудноизвлекаемых запасов углеводородов на протяжении последних двух десятилетий. Помимо добычи углеводородов, гидравлический разрыв пласта применяется в горнодобывающей промышленности для предварительной подготовки массива горных пород, повышения его обрушаемости и степени дробления в рамках системы разработки блочным обрушением [67; 68], для захоронения буровых шламов и других отходов [69], для ускорения процессов очистки загрязненных грунтов [70], для повышения приемистости пластов при геологическом захоронении CO_2 [71; 72], а также для повышения эффективности извлечения тепловой энергии из геотермальных систем [73–75]. Гидравлические трещины также встречаются в природе в виде многокилометровых даек, движимых магмой из глубинных магматических очагов к поверхности Земли [76–78], что представляет собой естественный аналог того же класса задач.

Операция гидроразрыва начинается с перфорации обсадной колонны в пределах продуктивного интервала: перфоратор с кумулятивным зарядом создает серию сквозных каналов в обсадной колонне и цементном камне, обеспечивая гидравлическую связь между скважиной и пластом. Затем жидкость гидроразрыва закачивается с поверхности через обсадную колонну и посту-

пает в пласт через перфорационный интервал под давлением, превышающим минимальное сжимающее напряжение в пласте, что приводит к инициации и последующему распространению трещины в породе. В промысловой практике жидкость гидроразрыва переносит твердый гранулированный материал (проппант), который транспортируется в трещину вместе с жидкостью. После того как закачка останавливается и давление жидкости снижается, проппант остается внутри трещины и препятствует ее полному смыканию, сохраняя канал высокой проводимости для последующего притока углеводородов. В современной практике интенсификации добычи, особенно в горизонтальных скважинах, которые могут простираться на несколько километров вдоль продуктивного интервала, обработка выполняется в виде десятков последовательных стадий вдоль скважины, причем в пределах каждой стадии несколько трещин инициируются одновременно из общего кластера перфораций.

Далее в главе представлен обзор литературы, сгруппированный по трем тематическим направлениям. Раздел 1.2 посвящен математическому и численному моделированию распространения гидравлической трещины: от классических KGD, PKN и радиальной моделей до современных трехмерных симуляторов. Раздел 1.3 сфокусирован на асимптотическом поведении в окрестности вершины трещины, пересекающей границы между слоями породы с различными сжимающими напряжениями. Далее в разделе 1.4 обсуждается моделирование целостности обсаженных и зацементированных скважин и, в частности, гидравлическое отслоение вдоль интерфейсов цементного камня, включая контекст геологического захоронения CO_2 , в котором такое отслоение представляет собой критический механизм разрушения. Наконец, раздел 1.5 обобщает выявленные в обзоре открытые вопросы и формулирует задачи исследования, которым посвящена настоящая работа.

1.2 Моделирование гидравлического разрыва пласта

Для прогнозирования развития гидравлического разрыва пласта используются сопряженные континуальные модели, объединяющие три взаимодействующих компоненты [66]. Первой компонентой является задача упругого деформирования горной породы, связывающая раскрытие трещины с чистым

давлением жидкости, действующим на ее поверхность. Второй компонентой является течение жидкости в узком канале, образованном трещиной. Это течение описывается нелинейным уравнением смазки, учитывающим накопление жидкости в трещине и ее потери вследствие утечек в проницаемую породу, величина которых зависит от предшествующей истории распространения трещины. Третья компонента это распространение самой трещины, представляющее собой задачу со свободной границей, поскольку положение фронта заранее неизвестно и определяется условием, задаваемым на фронте трещины. Сильная взаимосвязь между этими компонентами в сочетании с нелинейностью уравнения течения жидкости и наличием движущейся границы определяет сложность моделирования гидравлического разрыва пласта и лежит в основе иерархии моделей, которая рассматривается в оставшейся части раздела.

Математическое моделирование гидравлического разрыва пласта берет свое начало в середине двадцатого века с группы ранних аналитических моделей, которые по сей день составляют концептуальную основу этой области. Модель Христиановича—Желтова—Гиртсмы—де Клерка (KGD) описывает вертикальную трещину, длина которой значительно меньше ее высоты, при закачке жидкости по всей высоте трещины [1; 2]. Вследствие указанных допущений каждое горизонтальное сечение находится в состоянии плоской деформации. Модель Перкинса—Керна—Нордгрена (PKN) рассматривает противоположный предельный случай, в котором высота трещины фиксирована, а ее длина значительно превышает высоту, так что условие плоской деформации выполняется в каждом вертикальном сечении [3; 4]. Радиальная модель описывает дисковую трещину, растущую осесимметрично из точечного источника, что применимо в однородном пласте при ориентации скважины вдоль направления минимального главного напряжения [2; 5]. В каждой из этих моделей форма трещины и ее преимущественное направление распространения фиксируются заранее, что сводит сопряженную задачу к одномерной и позволяет решать ее аналитически или численно с умеренными вычислительными затратами. Такие упрощенные модели по-прежнему широко применяются для быстрого проектирования операций гидроразрыва и для верификации более сложных симуляторов.

Первым шагом в направлении более общих моделей стал отказ от предположения о фиксированной высоте трещины. Pseudo-3D (P3D) модели представляют собой обобщение модели PKN, в котором допускается рост тре-

щины по высоте. Однако более высокие сжимающие напряжения в слоях, ограничивающих продуктивный пласт, сдерживают этот рост. В результате трещина значительно быстрее распространяется по длине, чем по высоте, сохраняя вытянутую форму [6; 7]. Такой подход сохраняет низкие вычислительные затраты, характерные для классических моделей, и одновременно обеспечивает описание роста трещины по высоте при пересечении слоев с повышенными сжимающими напряжениями. В последующих работах были сняты некоторые ограничения исходной модели. Так модель EP3D учитывает влияние трещиностойкости породы при вертикальном распространении, криволинейную форму вершины трещины и нелокальную упругость [8]. Модель типа stacked-height отказывается от предположения о симметричном росте трещины по высоте и заменяет его послойной дискретизацией вертикального направления, что позволяет моделировать асимметричное распространение трещины через несколько слоев [9]. Pseudo-3D модели для слоистых сред учитывают неоднородность упругих свойств между слоями, а не только различие в сжимающих напряжениях [79; 80]. Несмотря на эти усовершенствования, pseudo-3D модели по-прежнему ограничены случаем вытянутых трещин и не позволяют воспроизвести произвольные конфигурации плоской трещины, что послужило мотивацией для развития трехмерных моделей плоских трещин.

С ростом вычислительных мощностей дальнейшее развитие сместилось в сторону более точных трехмерных моделей плоских трещин (planar 3D), впервые предложенных в работах [10; 11] и позднее доведенных до надежных и эффективных реализаций [12; 13]. В таких моделях предполагается, что трещина является плоской и имеет произвольную конфигурацию, без каких-либо априорных предположений о преимущественном направлении ее распространения. Planar 3D модели основаны на сопряженном описании двумерного течения жидкости внутри трещины и полного трехмерного уравнения упругости, описывающего нелокальное упругое деформирование окружающей породы. В отличие от pseudo-3D моделей, в которых горизонтальное и вертикальное распространение описываются различными упрощенными уравнениями, planar 3D модели описывают продвижение всего фронта трещины в рамках единой задачи со свободной границей. Это позволяет получать количественные оценки для таких задач, как контроль роста трещины по высоте в многослойных пластах с различными сжимающими напряжениями и распространение трещин из перфорационных кластеров. Благодаря сочетанию высокой точности

по сравнению с pseudo-3D моделями и вычислительной эффективности по сравнению с полностью трехмерными моделями, planar 3D модели получили широкое распространение в инженерных приложениях [81–83]. Само предположение о плоской форме трещины остается разумным приближением до тех пор, пока трещина не проявляет выраженную извилистость в околоскважинной зоне, не отклоняется от начальной плоскости в процессе распространения и не развивается в разветвленную сеть трещин, характерную для коллекторов с естественной трещиноватостью.

Полностью трехмерные модели допускают отклонение поверхности трещины от начальной плоскости и ее искривление в процессе распространения. Кроме того, они обеспечивают более общее описание взаимодействия с сетью естественных трещин, недоступное для моделей с плоской конфигурацией трещины. В работах [14; 15] были разработаны полностью сопряженные конечно-элементные модели, учитывающие пороупругое поведение горной породы и позволяющие моделировать одновременное распространение нескольких гидравлических трещин. Такие модели одновременно учитывают ламинарное течение жидкости внутри трещины, фильтрацию жидкости в матрице породы по закону Дарси и пороупругое деформирование породы. Другое методологическое направление представлено вариационным подходом на основе метода фазового поля [16], в котором трещина представляется в виде диффузной области. Такое описание естественным образом подходит для моделирования распространения трещины в присутствии естественной трещиноватости. В работе [16] этот подход был также сопряжен с гидродинамическим симулятором пласта. Формулировки метода конечных элементов со специальными базисными функциями также применялись в полностью трехмерной постановке, включая обобщенный метод конечных элементов (GFEM) для одновременного распространения нескольких гидравлических трещин с произвольной начальной ориентацией [84] и расширенный метод конечных элементов (XFEM) для сопряженного гидромеханического моделирования трехмерных неплоских гидравлических трещин [85]. Высокая вычислительная стоимость полностью сопряженной трехмерной задачи по-прежнему является существенным препятствием для широкого применения таких моделей в инженерной практике.

Помимо геометрической и физической сложности рассматриваемых подходов, условие распространения, задаваемое в вершине трещины, является не менее важным элементом модели. В ряде симуляторов для определения

положения фронта трещины используется критерий линейной упругой механики разрушения (LEFM), согласно которому коэффициент интенсивности напряжений, связанный с корневой асимптотикой раскрытия трещины, должен достигать значения трещиностойкости породы [20; 21]. Другая группа моделей регуляризует сингулярность в вершине трещины с помощью модели зоны сцепления, в которой закон связи между напряжениями и раскрытием действует в небольшой зоне предразрушения перед фронтом трещины [83; 86]. Альтернативный подход, широко применяемый в современных симуляторах, использует многомасштабное асимптотическое решение в окрестности вершины трещины в качестве условия распространения. В работе [87] показано, что такой подход позволяет значительно увеличить точность на грубых расчетных сетках. Многомасштабная структура асимптотического решения в окрестности вершины трещины и потеря точности при пересечении фронтом трещины границ между слоями с различными сжимающими напряжениями рассматриваются в разделе 1.3.

Независимо от используемого условия распространения, его практическая реализация в моделях planar 3D и полностью трехмерных моделях опирается на специализированный алгоритм отслеживания фронта трещины. В подходе с согласованием расчетной области с фронтом трещины неструктурированная сетка перестраивается на каждом шаге по времени так, чтобы ее граница совпадала с текущим положением фронта трещины [88]. Другой подход, использующий фиксированную декартову сетку, реализован в алгоритме неявного множества уровня (Implicit Level Set Algorithm, ILSA) [12]. В данном подходе фронт трещины представляется как нулевой уровень функции ориентированного расстояния и его положение на каждом шаге по времени определяется неявно путем согласования численного раскрытия вблизи вершины трещины с заданным асимптотическим решением. В дальнейшем алгоритм ILSA получил развитие в нескольких направлениях. Среди них реализации упругой задачи с использованием XFEM [89—91], более точный учет утечек жидкости в окрестности вершины трещины за счет разрешения ее многомасштабной структуры [92; 93], эффективная аппроксимация универсального асимптотического решения в окрестности вершины трещины, используемая в качестве условия распространения [28], а также явная схема отслеживания фронта [94]. В более поздних работах был предложен алгоритм Multi Layer Tip Element (MuLTiPEl) [32; 33], в котором вместо представления фронта с помощью функции уровня используют

ся коэффициент заполнения ячейки и дополнительное фиктивное напряжение, локализованное в концевом элементе. Модификации этих методов отслеживания фронта, необходимые для корректного описания пересечения фронтом трещины границ между слоями с различными сжимающими напряжениями, рассматриваются в разделе 1.3.

Рассмотренные выше модели описывают распространение одиночной гидравлической трещины. Однако при современных схемах заканчивания скважин с несколькими перфорационными кластерами одновременно инициируется несколько трещин из различных кластеров вдоль одной скважины. В такой постановке распределение расхода закачиваемой жидкости между отдельными трещинами определяется давлением в каждой трещине, потерями давления при течении через перфорационные каналы, гидростатическим распределением давления вдоль ствола скважины и гидравлическими потерями давления на трение при течении жидкости в скважине [17]. Одновременно распространяющиеся трещины механически взаимодействуют друг с другом через индуцированное ими поле напряжений в окружающей породе (эффект stress shadow). Это взаимодействие приводит к возникновению дополнительных сжимающих напряжений в соседних трещинах, влияя на раскрытие и изменяя форму каждой из них. Наиболее сильное влияние этот эффект оказывает на трещины, расположенные в центральной части кластера. Задачи данного класса исследовались в рамках упрощенных трехмерных моделей, основанных на методе разрывных смещений [19], а также моделей одновременного распространения нескольких трещин, основанных на методе ILSA [18]. В последующих работах было рассмотрено влияние неравномерного расстояния между перфорационными кластерами [95], выбор их оптимального расположения [96] и влияние турбулентного течения жидкости в трещинах [97]. Во многих работах предполагается, что трещины распространяются перпендикулярно стволу скважины, что соответствует случаю, когда скважина ориентирована вдоль направления минимального главного напряжения. Влияние же наклона скважины на формирующуюся геометрию системы трещин исследовано значительно менее подробно.

1.3 Асимптотика в окрестности вершины трещины и задача пересечения границ между слоями

Моделирование распространения гидравлической трещины охватывает широкий круг фундаментальных вопросов, среди которых инициация трещины [98; 99], направление ее распространения [84; 100], влияние реологии жидкости [101—104], а также взаимодействие с неоднородностями пласта [30; 31; 105—107]. Среди них асимптотическое поведение в окрестности вершины трещины оказывает определяющее влияние на характер распространения трещины в целом [24; 26; 108; 109]. В ряде симуляторов гидравлического разрыва пласта в качестве условия распространения используется классическое корневое асимптотическое поведение в вершине трещины, отвечающее линейной упругой механике разрушения (LEFM). Однако анализ окрестности вершины трещины показывает, что корневая асимптотика зачастую справедлива лишь в очень малой области вблизи фронта трещины [22; 23]. Поэтому для корректного описания окрестности вершины трещины необходимо использовать более полное асимптотическое решение.

Численные и асимптотические исследования показали, что решение в окрестности вершины трещины определяется балансом нескольких физических механизмов, взаимодействие которых определяет глобальное поведение гидравлической трещины [24; 25]. К этим механизмам относятся образование новой поверхности трещины, вязкая диссипация при течении жидкости в трещине и утечка жидкости гидроразрыва в проницаемую породу. Когда один из этих процессов доминирует, окрестность вершины трещины описывается соответствующим предельным асимптотическим режимом: режимом доминирующей трещиностойкости, режимом доминирующей вязкости или режимом доминирующих утечек [22; 26]. В частности, классическая корневая асимптотика из LEFM соответствует режиму доминирующей трещиностойкости. По мере удаления от вершины трещины последовательно реализуются три предельных режима. В непосредственной окрестности вершины преобладает режим доминирующей трещиностойкости, на промежуточных расстояниях реализуется режим доминирующих утечек, а на больших расстояниях режим доминирующей вязкости. Однако в общем случае все три механизма одновременно вносят вклад в баланс процессов в окрестности вершины трещины, поэтому

для корректного описания этой области требуется асимптотическое решение, учитывающее все три предельных режима и многомасштабную структуру решения. В последующих работах была предложена универсальная асимптотика в окрестности вершины трещины, учитывающая три процесса, которая одновременно охватывает трещиностойкость породы, вязкость жидкости и утечки и дает единое описание переходов между предельными режимами [23; 27]. В работе [28] впоследствии было предложено эффективное неявное аналитическое приближение этой универсальной асимптотики, пригодное для реализации в симуляторе гидравлического разрыва пласта. Размер соответствующей области применимости асимптотики был охарактеризован в [28] путем сравнения с эталонным решением для радиальной гидравлической трещины. Показано, что универсальная асимптотика сохраняет точность в пределах приблизительно 15–20 % радиуса трещины от ее вершины.

Дальнейшее развитие универсальной асимптотики позволило учесть в описании окрестности вершины трещины ряд дополнительных физических эффектов, важных для задач гидравлического разрыва пласта. В ряде работ асимптотическое описание окрестности вершины трещины было обобщено на случай неньютоновских жидкостей, включающих степенную реологию [110], модель псевдопластической жидкости [102] и реологию Гершеля — Балкли [103; 104]. Отдельное направление исследований посвящено описанию окрестности вершины трещины при последовательной закачке нескольких несмешивающихся степенных жидкостей, разделенных устойчивыми границами. Такая постановка соответствует технологии закачки, при которой последовательно используются несколько различных рабочих жидкостей [111]. В работе [112] исследовано влияние пороупругих эффектов на асимптотическое решение в окрестности вершины полубесконечной трещины, распространяющейся в проницаемой пороупругой среде. Модель учитывает заполненную поровой жидкостью полость в вершине трещины, а также низкопроницаемую фильтрационную корку на ее стенках. В ряде работ были также рассмотрены обобщения классической модели утечек Картера. В частности, в работе [113] в качестве условия распространения радиальной трещины использована многомасштабная асимптотика в сочетании с моделью утечек, зависящих от давления. Для гидравлической трещины после прекращения закачки было получено асимптотическое решение в нестационарной постановке, описывающее изменение полей

в окрестности вершины трещины на стадиях остановки и последующего обратного движения фронта [114; 115].

Породы, как правило, образуют слоистую структуру, причем отдельные слои различаются сжимающими напряжениями, упругими характеристиками, трещиностойкостью и коэффициентом утечек. Взаимодействие распространяющейся трещины с такими неоднородностями рассматривалось в ряде работ [30; 105—107]. Использование универсальной асимптотики в качестве условия распространения, без встроенного механизма учета пересечения слоев, приводит к существенной потере точности при пересечении фронтом трещины границ между слоями с различными сжимающими напряжениями [29]. Среди различных типов неоднородности именно слои с различными сжимающими напряжениями оказывают определяющее влияние на точность предсказываемой геометрии трещины [29; 30]. Таким образом, учет влияния таких слоев в асимптотическом описании окрестности вершины трещины является необходимым условием для корректного отслеживания фронта в слоистых пластах.

Для учета влияния слоев с различными сжимающими напряжениями в асимптотическом описании окрестности вершины трещины были предложены различные подходы. Один из них основан на прямом численном решении несингулярной интегральной постановки для полубесконечной гидравлической трещины, которая позволяет точно учитывать изменение сжимающих напряжений в окрестности вершины [31]. Другой подход опирается на концепцию эффективной трещиностойкости, при котором универсальная асимптотика используется совместно со значением эффективной трещиностойкости, учитывающим влияние слоев с различными сжимающими напряжениями в концевом элементе. Такой подход реализован в алгоритме Multi Layer Tip Element (MuLTiPEl) [32; 33]. Интегральная постановка обеспечивает высокую точность, однако требует значительных вычислительных затрат из-за сложности решения соответствующего нелинейного интегрального уравнения. Подход, основанный на концепции эффективной трещиностойкости, существенно проще и вычислительно эффективнее, но теряет точность при существенном влиянии вязкости.

1.4 Целостность обсаженной скважины и гидравлическое отслоение цементного камня

Как было отмечено в разделе 1.1, цементный камень является основным барьером, обеспечивающим межпластовую изоляцию. Ее механическая целостность может нарушаться вследствие образования различных дефектов как в самом цементном камне, так и на интерфейсах с обсадной колонной и окружающей горной породой. В литературе обычно выделяют четыре типа дефектов цементной оболочки [116; 117], которые будут рассматривать в обзоре ниже. К первому типу относятся полости, представляющие собой участки цементной оболочки, не заполненные цементом вследствие ошибок при цементировании или непредвиденных потерь цементного раствора в процессе его размещения. В настоящее время такие дефекты встречаются редко благодаря развитию средств моделирования процесса цементирования и совершенствованию технологий контроля. Ко второму типу относятся участки вязкого бурового раствора, не вытесненного цементным раствором в процессе цементирования. Их образование обусловлено неблагоприятным сочетанием реологических свойств бурового и цементного растворов, а также эксцентриситетом обсадной колонны в стволе скважины. В настоящее время такие дефекты практически устранены благодаря применению центраторов обсадных колонн и современных технологий вытеснения бурового раствора. К третьему типу относятся каналы, образованные при усадке цемента. Они возникают в процессе затвердевания цементного раствора, когда усадка вследствие самоосушения при гидратации приводит к возникновению растягивающих напряжений в цементной оболочке. Возникающие при этом повреждения могут иметь три формы: радиальные трещины в цементном камне, отслоение на границах цементного камня, а также дисковые трещины, ориентированные перпендикулярно оси скважины. Первые два типа повреждений образуют непрерывные вертикальные каналы для миграции пластового флюида и непосредственно нарушают межпластовую изоляцию. Дисковые трещины, напротив, создают лишь локальную гидравлическую связь между пластом и границей «обсадная колонна — цемент» на отдельных глубинах. Предотвращению этого типа повреждений посвящены специальные методы расчета состава цементного раствора и технологии цементирования. Четвертый тип дефектов возникает в процессе эксплуатации скважины вследствие повы-

шения и понижения давления в стволе, а также изменения температуры на стенке обсадной колонны. Изменение давления приводит преимущественно к образованию радиальных трещин в цементном камне, тогда как изменение температуры способствует отслоению на границах «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода». Дополнительной причиной отслоения может служить сочетание неравномерного поля естественных пластовых напряжений с эксцентриситетом обсадной колонны. Именно этому типу дефектов посвящено большинство работ по моделированию, рассматриваемых в настоящем разделе. Наряду с моделированием дефектов, возникающих в процессе эксплуатации скважины, далее также рассматриваются работы, посвященные гидратации цемента и его усадке, поскольку именно эти процессы определяют начальное напряженное состояние цементной оболочки и условия контакта на ее границах.

В ранних механических моделях затвердевшего цементного камня использовалась линейно-упругая изотропная модель как для цемента, так и для окружающей породы, а разрушение цемента оценивалось путем сравнения расчетных напряжений с пределами прочности цемента на одноосное сжатие и растяжение [118; 119]. Проведенный анализ показал, что цементный камень с меньшим модулем Юнга и большей толщиной испытывает меньшие напряжения на границах «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода» и, следовательно, менее подвержен разрушению, чем более жесткий и тонкий цементный камень. Полученный вывод впоследствии был подтвержден экспериментальными исследованиями [120], в которых рассматривалось поведение затвердевшего цементного камня при условиях нагружения, соответствующих условиям эксплуатации скважины. В дальнейшем линейно-упругая постановка была расширена за счет использования более совершенных моделей материала для цемента и окружающей породы [121; 122]. В рамках того же упругого описания были выполнены отдельные исследования напряжений, вызванных избыточным внутренним давлением в обсаженной скважине. Показано, что наличие цементного камня повышает сопротивление внутреннему давлению по сравнению со случаем скважины без обсадки [123]. В другой работе с помощью метода конечных элементов был выполнен анализ термоупругого поведения различных тампонажных цементов, включая цементы, армированные волокнами [124]. Одной из первых работ, в которой в рамках линейно-упругой постановки была учтена роль предыстории нагружения, стала работа [125], посвященная анализу обсаженной горизонтальной скважины. В исследовании

последовательность этапов строительства и эксплуатации скважины была явно включена в расчетную процедуру, что стало основой для последующего развития многостадийных подходов.

Существенный концептуальный шаг за пределы упругого анализа отдельных этапов был сделан в работе [41], где предложен многостадийный конечно-элементный подход, позволяющий отслеживать эволюцию напряженно-деформированного состояния системы «обсадная колонна — цемент — порода» в ходе последовательных этапов строительства и эксплуатации скважины. Впоследствии эта многостадийная постановка была расширена и стала учитывать эволюцию пороупругих свойств цемента в процессе затвердевания, а также напряжения, вызванные циклическими изменениями температуры при закачке на протяжении всего срока эксплуатации скважины [126; 127]. В работе [128] для анализа сопряженных хемо-термо-поро-механических процессов в обсадной колонне, цементном камне и вмещающей породе был предложен подход на основе кривой отклика системы (SRC). Близкий по духу комплексный анализ представлен в работе [129], где показано, что потеря целостности цементного камня зависит не только от свойств самого цемента, но и от конструкции скважины и предыстории ее эксплуатации. В ходе этих исследований необходимость явного пороупругого описания цементного камня постепенно стала общепризнанной.

Прямое экспериментальное подтверждение того, что затвердевший цемент демонстрирует ярко выраженное пороупругое поведение, было получено в работе [42]. Показано, что механическое деформирование цемента не может быть корректно описано без учета взаимодействия между твердым скелетом и поровой жидкостью. В работе [43] была предложена методика быстрого измерения коэффициента Био затвердевшего цемента, обеспечивающая практический способ определить параметры пороупругой модели. В работе [44] было отмечено, что для корректного описания деформирования цементного камня должны быть учтены как пороупругое взаимодействие, так и начальное напряженное состояние цемента.

Гидратация цемента представляет собой сложный процесс, включающий химические, термические и механические взаимодействия, в ходе которого цементный раствор переходит из жидкой фазы в твердое состояние и постепенно приобретает прочностные и упругие свойства. Эти изменяющиеся свойства могут существенно влиять на напряженное состояние цемента [64; 130]. Напря-

женное состояние цементного камня зависит также и от изменения порового давления в процессе гидратации. Из-за низкой проницаемости цемента внутреннее поровое давление может в течение продолжительного времени приходить в равновесие с поровым давлением окружающей породы [64; 65]. Другим значимым явлением является объемная усадка тампонажного цемента, исследованию которой посвящен целый ряд работ [130–132]. Приводимые в литературе значения общей усадки за 24 часа лежат в диапазоне от 0.6 % до 6 %, причем большинство значений приходится на интервал 1.5–3 % [126; 133–135]. В среднем общая объемная усадка к моменту затвердевания составляет около 3 %. При этом основная часть усадки происходит в течение первых 10–20 часов гидратации, пока цемент еще сохраняет подвижность, а после потери подвижности дополнительное изменение объема, как правило, составляет 0.1–0.4 % [127; 130]. Прямые экспериментальные данные о таком начальном напряженном состоянии получены с помощью установки трехосного нагружения, разработанной для измерения начального напряженного состояния цемента, твердеющего внутри полужесткой стальной трубы [135]. Процессы гидратации и объемной усадки цемента непосредственно влияют на напряженное состояние в окоскважинной зоне и, следовательно, должны учитываться при анализе [136]. В более поздних исследованиях описание изменяющегося во времени состояния цемента в процессе гидратации было объединено с полностью сопряженными термопороупругими моделями системы «обсадная колонна — цемент — порода», что позволило охарактеризовать формирующееся начальное напряженное состояние и его влияние на дальнейшее поведение системы при механическом нагружении [45; 46].

Условия образования микрозазора на границах цементного камня были проанализированы в работе [137], где показано, что среди множества возможных причин наиболее значимыми являются температурные циклы и сама гидратация цемента. Влияние высокого температурного градиента на целостность цементного камня было исследовано в работе [138]. Численные результаты были подтверждены экспериментальными данными и впоследствии реализованы в промышленном симуляторе цементирования. Механические дефекты на границе цементного камня могут служить путями вертикальной миграции пластовых флюидов с высокой эффективной проницаемостью. Как показано в работе [139], наличие кольцевого зазора на границе цементного камня с раскрытием 0.01–0.3 мм приводит к существенному увеличению эффективной

проницаемости на величину до шести порядков и может достигать значений около 1 мД. В работе [140] показано, что при циклических изменениях температуры и давления доминирующим фактором увеличения проницаемости становится образование микрозазора или отслоения, а не радиальное растрескивание. Также было обнаружено, что микрозазоры, образованные при охлаждении, могут закрываться при последующем нагреве. В работе [141] с помощью рентгеновской компьютерной томографии было показано, что микрозазоры на границах цементного камня имеют нерегулярную геометрию и неравномерное раскрытие по окружности, а термическое отслоение обычно зарождается на уже существующих дефектах на границе цементного камня. В работе [142] для прогнозирования целостности цементного камня предложена осесимметричная аналитическая модель, учитывающая начальное напряженное состояние и нестационарные термопороупругие эффекты. Данная модель была валидирована на основе экспериментальных данных, полученных на образцах тампонажного цемента [143]. Согласно численным результатам работы [144], наибольшее влияние на скорость высвобождения энергии, связанную с распространением трещины, оказывает коэффициент теплового расширения цемента, а неоднородные естественные напряжения ускоряют процесс отслоения. В работе [145] с помощью многостадийной трехмерной конечно-элементной модели был выполнен количественный анализ величины снижения давления и температуры, необходимой для инициации отслоения цементного камня, а также получены оценки соответствующей ширины микрозазора. На базе сопряженной термопороупругой модели авторы работы [146] показали, что начальные дефекты и закачка CO_2 с низкой температурой ускоряют повреждение границы и образование микрозазоров, что подчеркивает их критическую роль в обеспечении целостности скважины. Роль эксцентриситета обсадной колонны как дополнительного геометрического фактора, способствующего отслоению цементного камня, была аналитически исследована для скважин, предназначенных для добычи сланцевого газа [147]. Наконец, в работе [148] разработана методика оценки утечек вдоль скважин, учитывающая механическое поведение цементного камня, ползучесть горной породы и условия эксплуатации, что обеспечивает основу для комплексной количественной оценки риска долговременной потери целостности.

Целостность существующих и вновь сооружаемых скважин является критически важным условием успешной реализации проектов улавливания

и геологического захоронения CO_2 [34–36]. Геологическое захоронение CO_2 нарушает естественные гидрогеологические и термические условия целевого пласта, что может приводить к утечке газа в атмосферу или к загрязнению вышележащих водоносных горизонтов [149; 150]. При реализации проектов захоронения CO_2 принципиально важно не допустить формирования в околоскважинной зоне каналов высокой проводимости, по которым закачиваемый CO_2 мог бы мигрировать за пределы пласта-коллектора [151–153]. В силу низкой проницаемости неповрежденного цемента [38] дефекты цементного камня рассматриваются в качестве одних из наиболее вероятных путей утечек [37]. Таким образом, обеспечение долговременной целостности цементного камня является одним из ключевых факторов сохранения межпластовой изоляции на протяжении всего срока эксплуатации скважины. Дефекты цементного камня могут возникать вследствие некачественного цементирования [154; 155], деградации материалов при воздействии кислой минерализованной пластовой воды [156; 157], а также механических нагрузок при эксплуатации скважины [158; 159]. Напряженное состояние в околоскважинной зоне является критически важным фактором риска утечек. Оно может существенно изменяться со временем вследствие изменения давления закачки, порового давления и температуры в ходе закачки [160] или в результате долговременной ползучести горной породы [161]. Сверхкритический CO_2 обычно закачивается в пласт через перфорационные интервалы. Взрывной характер процесса перфорации неизбежно приводит к образованию повреждений и дефектов на границах «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода» [39]. При высоких давлениях закачки такие дефекты могут приводить к отслоению и инициации гидравлической трещины, распространяющейся вдоль границы цементного камня.

Гидравлическое отслоение цементного камня зарождается на дефектах границы «обсадная колонна — цемент» или «цемент — порода», когда давление жидкости внутри перфораций превышает нормальные сжимающие напряжения и прочность сцепления на границах цементного камня [40]. Для моделирования распространения отслоения вдоль границ цементного камня предложен ряд взаимодополняющих подходов, рассмотренных далее. В работе [40] предложена модель вертикального распространения гидравлического отслоения, учитывающая влияние сил плавучести и вязкости при фиксированной длине дуги трещины отслоения. Тепловые эффекты и сжимающие напряжения, возникающие в процессе гидратации цемента, не учитываются. Результаты

расчетов, подтвержденные лабораторными экспериментами, показывают, что при положительной плавучести наблюдается устойчивый вертикальный рост трещины, тогда как при отрицательной плавучести распространение останавливается. Для моделирования гидравлического отслоения на границах цементного камня в работе [47] использована модель зоны сцепления в рамках трехмерной конечно-элементной постановки, не требующая априорных предположений о начальной геометрии трещины. В работе [48] предложено развитие данного подхода, позволяющее моделировать неравномерное распространение трещины отслоения вдоль границ цементного камня при неоднородном поле естественных напряжений и наличии существующих трещин. Авторы работы [49] использовали трехмерную конечно-элементную модель для описания распространения гидравлического отслоения на границах «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода». Полученные результаты показывают, что распространение отслоения преимущественно происходит в вертикальном, а не в окружном направлении. Наконец, в работе [50] разработана сопряженная термо-гидро-механическая модель гидравлического отслоения, учитывающая влияние температуры жидкости и позволяющая моделировать одновременное распространение отслоения вдоль обеих границ цементного камня с учетом их взаимного влияния.

1.5 Постановка задач исследования

В трех предыдущих разделах настоящей главы был представлен обзор современного состояния исследований в области моделирования гидравлического разрыва пласта (раздел 1.2), асимптотического решения в окрестности вершины трещины и проблемы пересечения слоев (раздел 1.3), а также целостности обсаженных скважин и отслоения цементного камня (раздел 1.4). Цель настоящего раздела заключается в том, чтобы обобщить нерешенные вопросы, выявленные в каждом из этих направлений исследований, и сформулировать на их основе задачи, решаемые в рамках данного исследования.

Как было показано в разделе 1.3, несингулярная интегральная постановка для окрестности вершины трещины обеспечивает высокую точность, однако требует решения нелинейного интегрального уравнения. В то же время подход с

использованием эффективной трещиностойкости, реализованный в алгоритме MuLTirEl, сохраняет простоту и вычислительную эффективность, но теряет точность, когда влияние вязкой диссипации становится существенным. В настоящее время в литературе отсутствует асимптотическое решение с учетом слоистости по напряжениям, которое сохраняло бы точность интегральной постановки во всех режимах распространения трещины и одновременно было бы достаточно вычислительно эффективным для использования в качестве условия распространения в алгоритмах отслеживания фронта. Отдельной не менее важной задачей является определение области, в пределах которой асимптотическое решение остается справедливым. Для универсальной асимптотики, учитывающей три механизма диссипации энергии в однородном пласте, эта область была установлена в рамках многомасштабного анализа окрестности вершины трещины, тогда как для асимптотики с учетом слоистости по напряжениям аналогичные результаты в настоящее время отсутствуют. В настоящее время в литературе отсутствуют как систематическое исследование области применимости данной асимптотики, так и способы ее расширения. В отсутствие такого анализа остается открытым вопрос о возможности использования асимптотики с учетом слоистости по напряжениям в качестве условия распространения в алгоритмах отслеживания фронта, работающих на относительно грубых расчетных сетках. Обе указанные задачи рассматриваются в главе 2. В этой главе предлагается асимптотическое решение с учетом слоистости по напряжениям для полубесконечной гидравлической трещины, распространяющейся через несколько слоев с различными сжимающими напряжениями. Предлагаемое решение требует меньших вычислительных затрат по сравнению с численным решением несингулярной интегральной постановки и обеспечивает более высокую точность по сравнению с приближением, используемым в алгоритме MuLTirEl. Кроме того, исследуется область применимости разработанной асимптотики и предлагается способ ее расширения.

На уровне асимптотического описания окрестности вершины трещины проблема пересечения слоев решается с помощью асимптотики с учетом слоистости по напряжениям. Включение этого асимптотического решения в качестве условия распространения в planar 3D симулятор на основе подхода ILSA представляет собой отдельную задачу. Алгоритм ILSA изначально ориентирован на структуру универсального асимптотического решения и требует существенных модификаций для использования предлагаемой асимптотики. В настоящее

время в литературе отсутствует planar 3D симулятор на основе подхода ILSA, использующий асимптотическое решение с учетом слоистости по напряжениям в качестве условия распространения и сохраняющий точность стандартного алгоритма ILSA на грубых расчетных сетках в условиях слоистости по напряжениям. Разработке такого симулятора посвящена глава 3. В качестве условия распространения используется асимптотическое решение с учетом слоистости по напряжениям, а также вводятся необходимые модификации алгоритма ILSA, обеспечивающие корректный учет слоев с различными сжимающими напряжениями. Для разработанного алгоритма выполнена верификация путем сравнения с эталонными полуаналитическими решениями и проведена валидация на основе результатов лабораторных экспериментов. Также показано, что алгоритм сохраняет точность на относительно грубых расчетных сетках при наличии слоев с различными сжимающими напряжениями. Помимо задачи об одиночной трещине, в разделе 1.2 было отмечено, что в существующих исследованиях систем одновременно распространяющихся трещин обычно предполагается, что трещины инициируются перпендикулярно стволу скважины, а влияние наклона скважины на формирующуюся геометрию системы изучено менее систематически. В главе 3 этот вопрос рассматривается в рамках параметрического исследования влияния наклона скважины на геометрию системы одновременно распространяющихся трещин.

Как показано в разделе 1.4, работы по моделированию гидравлического отслоения на границах цементного камня развивались в двух направлениях. К первому направлению относятся одномерные постановки, которые допускают получение аналитических соотношений подобия в замкнутой форме и требуют небольших вычислительных затрат, однако учитывают лишь ограниченный набор физических эффектов. Второе направление объединяет трехмерные конечно-элементные и сопряженные термо-гидро-механические постановки. В рамках этого направления был последовательно учтен широкий круг интерфейсных, термических и пороупругих процессов, что позволило воспроизвести полный набор физических эффектов, которые являются существенными для описания отслоения на границах цементного камня. К таким эффектам относятся трехмерное распространение трещины отслоения, термopopoупругое деформирование композитной системы «обсадная колонна — цемент — порода», а также начальное напряженное состояние, формирующееся в процессе строительства скважины и гидратации цемента. Однако вычислительные за-

траты полностью сопряженных трехмерных конечно-элементных постановок слишком велики для проведения параметрических исследований и анализа чувствительности, необходимых для обоснования сценариев закачки в проектах геологического захоронения CO_2 . В настоящее время в литературе отсутствует постановка, которая сочетала бы трехмерный характер распространения трещины отслоения, учет термопороупругих эффектов и приемлемые вычислительные затраты, позволяющие проводить параметрические исследования и анализ чувствительности. Разработке такой постановки посвящена глава 4. Вертикальное распространение трещины вдоль цилиндрических границ цементного камня моделируется на основе pseudo-3D подхода, тогда как окружное распространение описывается в рамках задачи в поперечном сечении. Термопороупругое деформирование композитной системы «обсадная колонна — цемент — порода» моделируется в отдельных поперечных сечениях, перпендикулярных оси скважины, в приближении плоской деформации, поскольку вертикальный масштаб задачи значительно превышает горизонтальный. Такая декомпозиция сводит трехмерную механическую задачу к последовательности двумерных задач в отдельных поперечных сечениях, сопряженных через pseudo-3D модель вертикального распространения трещины, сохраняя при этом трехмерный характер трещины отслоения. Разработанная постановка используется для анализа отслоения на границах цементного камня как потенциального пути утечки CO_2 в ходе закачки.

Глава 2. Асимптотическое решение для полубесконечной трещины гидравлического разрыва в слоистой среде

Как следует из обзора литературы, представленного в первой главе, существующие асимптотические решения в окрестности вершины гидравлической трещины получены преимущественно для случая однородной упругой среды. Однако в реальных условиях гидравлическая трещина распространяется в слоистом пласте, и сжимающие напряжения в разных слоях могут существенно различаться. При пересечении трещиной границы такого слоя применение универсального асимптотического решения приводит к значительному снижению точности расчета [29]. Эта проблема особенно остро стоит в современных симуляторах гидравлического разрыва пласта таких, как алгоритм `planar 3D ILSA` [28], использующих асимптотические решения для отслеживания фронта трещины.

Существующие подходы к построению асимптотического решения, учитывающего слоистость по сжимающим напряжениям, различаются по точности и вычислительной эффективности. В работе [31] предложено численное решение интегрального уравнения для полубесконечной трещины, точно учитывающее произвольное распределение сжимающих напряжений вдоль трещины. Однако такой подход обладает высокой вычислительной стоимостью, что ограничивает его применение в алгоритмах отслеживания фронта. С другой стороны, в алгоритме `MuLTipEl` [32; 33] применяется приближенное аналитическое описание слоистости. Такое описание обладает высокой вычислительной эффективностью, однако существенно теряет точность при значительном влиянии вязкой диссипации и утечек.

Целью настоящей главы является разработка алгоритма, занимающего промежуточное положение между указанными подходами, для последующего встраивания в модель `planar 3D ILSA` и другие симуляторы гидроразрыва пласта, использующие асимптотические решения в окрестности вершины трещины. Для достижения поставленной цели рассматриваются три подхода к построению асимптотических решений с учетом слоистости по сжимающим напряжениям и проводится их сравнительный анализ с точки зрения точности и вычислительной эффективности. Особое внимание уделяется исследованию области применимости полученных решений вблизи вершины трещины, по-

сколькx именно ее размер определяет возможность использования асимптотики в практических численных алгоритмах. Для расширения области применимости предлагается модифицированное асимптотическое решение.

2.1 Полубесконечная гидравлическая трещина в однородной среде. Универсальное асимптотическое решение

Как показано в работах [12; 23], решение в окрестности фронта плоской гидравлической трещины может быть аппроксимировано задачей о полубесконечной трещине гидроразрыва, распространяющейся с постоянной скоростью V в условиях плоской деформации. Стоит отметить, что скорость распространения V представляет собой мгновенную скорость вершины трещины и считается заданным параметром в задаче о полубесконечной трещине. Для удобства введем сопутствующую координату s с началом в вершине трещины, так что s определяет расстояние от точки внутри трещины до ее вершины (см. рисунок 2.1).

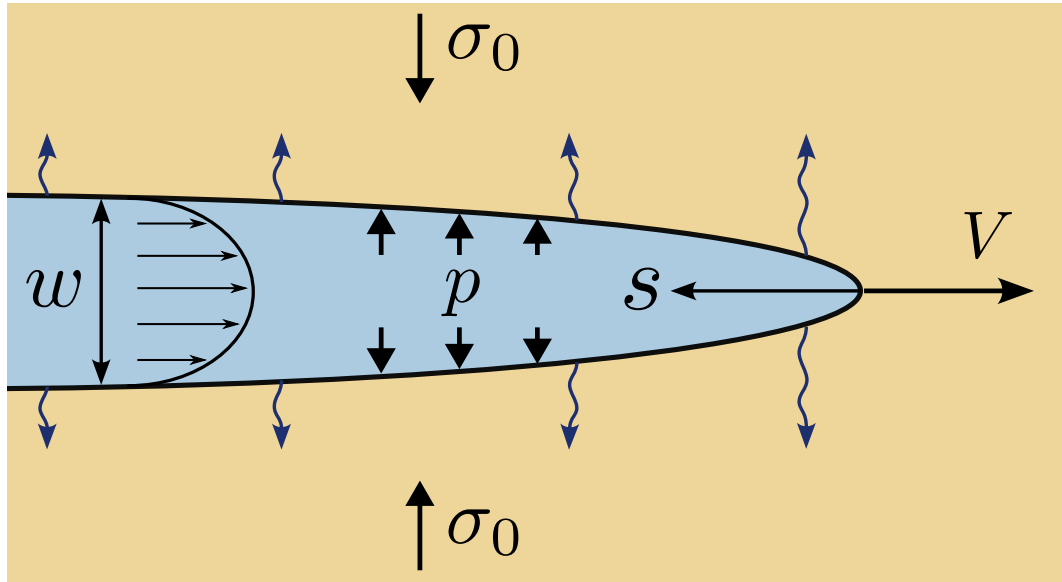


Рисунок 2.1 — Схема полубесконечной гидравлической трещины, распространяющейся в однородном пласте с постоянной скоростью V

Для упрощения дальнейших математических выражений введем следующие приведенные параметры:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{\text{Ic}}, \quad C' = 2C_L, \quad \mu' = 12\mu, \quad (2.1)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, K_{Ic} — трещиностойкость горной породы, C_L — коэффициент утечек по модели Картера, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости. Предполагается, что указанные параметры являются постоянными. Это соответствует модели гидроразрыва в однородной упругой среде, а распространение трещины описывается для жидкости с неизменными реологическими свойствами.

Условие распространения трещины $K_I = K_{Ic}$ для трещины нормального отрыва (I мода) в рамках линейной упругой механики разрушения [162] можно записать в виде асимптотики раскрытия трещины w в окрестности ее вершины:

$$w = \frac{K'}{E'} s^{1/2}, \quad s \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Стационарная форма локального баланса массы жидкости может быть записана в виде уравнения неразрывности

$$V \frac{dw}{ds} - \frac{dq}{ds} + g = 0, \quad (2.3)$$

где $g(s) = C' \sqrt{V/s}$ — скорость утечки жидкости для трещины, распространяющейся с постоянной скоростью [163]. В предположении, что поток жидкости q внутри трещины описывается законом Пуазейля,

$$q = \frac{w^3}{\mu'} \frac{dp}{ds}, \quad (2.4)$$

уравнение смазки (2.3) для несжимаемой жидкости в сопутствующей системе координат s сводится к виду [12; 23; 27]

$$\frac{w^2}{\mu'} \frac{dp}{ds} = V + 2C' V^{1/2} \frac{s^{1/2}}{w}, \quad (2.5)$$

где w — раскрытие трещины, p — давление жидкости. Согласно [162], упругое соотношение между избыточным давлением $p(s) - \sigma_0$ и раскрытием трещины $w(s)$ может быть выражено следующим интегральным уравнением:

$$p(s) - \sigma_0 = \frac{E'}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dw(x')}{dx'} \frac{dx'}{s - x'}. \quad (2.6)$$

Обращение уравнения упругости (2.6) с учетом условия распространения (2.2) принимает следующий вид [24; 27]:

$$w(s) = \frac{K'}{E'} s^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(s, x') \frac{d(p - \sigma_0)}{dx'} dx', \quad (2.7)$$

где ядро $F(s, x')$ задается выражением

$$F(s, x') = (x' - s) \ln \left| \frac{s^{1/2} + x'^{1/2}}{s^{1/2} - x'^{1/2}} \right| - 2s^{1/2}x'^{1/2}. \quad (2.8)$$

В соответствии с [12; 27], в данном разделе предполагается, что минимальное сжимающее напряжение в пласте σ_0 не зависит от пространственных координат. При таком предположении оно может быть исключено из рассмотрения и не влияет на решение локальной задачи.

Совместное использование уравнения смазки (2.5) и асимптотики раскрытия трещины (2.2) приводит к тому, что давление жидкости имеет логарифмическую особенность в вершине трещины. Для устранения этой проблемы применяется так называемая несингулярная интегральная формулировка [27]. Подставляя градиент давления из уравнения смазки (2.5) в обращенное уравнение упругости (2.7), получаем

$$w(s) = \frac{K'}{E'} s^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(s, x') \frac{\mu'}{w(x')^2} \left[V + 2C' V^{1/2} \frac{x'^{1/2}}{w(x')} \right] dx'. \quad (2.9)$$

Полученное уравнение упрощает исходную задачу, поскольку сингулярное давление исключается из решения, а уравнение (2.9) представляет собой интегральную формулировку только относительно раскрытия трещины $w(s)$.

Вводя следующие безразмерные величины [31],

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{E' w}{K' s^{1/2}}, \quad \chi = \frac{2C' E'}{V^{1/2} K'}, \quad l = \left(\frac{K'^3}{\mu' E'^2 V} \right)^2, \\ \tilde{s} &= \left(\frac{s}{l} \right)^{1/2}, \quad \tilde{x}' = \left(\frac{x'}{l} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

уравнение (2.9) можно преобразовать к виду

$$\tilde{w}(\tilde{s}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G\left(\frac{\tilde{x}'}{\tilde{s}}\right) \left[\frac{1}{\tilde{w}(\tilde{x}')^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{x}')^3} \right] d\tilde{x}', \quad (2.11)$$

где новое несингулярное ядро имеет вид

$$G(t) = \frac{1 - t^2}{t} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + 2. \quad (2.12)$$

Интегральное уравнение (2.11) представляет собой несингулярную формулировку рассматриваемой задачи.

Задача о полубесконечной трещине, распространяющейся в однородном пласте, имеет три предельных режима распространения: режим доминирующей трещиностойкости (k), режим доминирующих утечек ($\tilde{m}$) и режим доминирующей вязкости (m). В k -режиме основная диссипация энергии связана с образованием новой поверхности трещины, тогда как влияние вязкости жидкости и утечек пренебрежимо мало. m -режим характеризуется доминирующей ролью вязкой диссипации энергии, а трещиностойкостью и утечками в этом случае можно пренебречь. В то же время $\tilde{m}$ -режим соответствует случаю интенсивной утечки жидкости в пласт. Подробный асимптотический анализ полубесконечной трещины в однородном пласте приведен в работах [23; 24; 26]. Три слагаемых в правой части интегрального уравнения (2.11) соответствуют этим предельным режимам. Подставляя решение в виде $\tilde{w} = \beta \tilde{s}^\delta$ в (2.11) и сохраняя лишь одно из слагаемых, отвечающее соответственно за трещиностойкость, вязкость или утечку жидкости, получаем

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \chi^{1/4} \tilde{s}^{1/4}, \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{s}^{1/3}, \quad (2.13)$$

где $\beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6}$, $\beta_{\tilde{m}} = 4/(15(\sqrt{2} - 1))^{1/4}$. Решение $\tilde{w}_k$ соответствует режиму доминирующей трещиностойкости, $\tilde{w}_{\tilde{m}}$ — режиму доминирующих утечек, а $\tilde{w}_m$ — режиму доминирующей вязкости. Размерные выражения для (2.13) принимают следующий вид:

$$w_k = \frac{K'}{E'} s^{1/2}, \quad w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left(\frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} s^{5/8}, \quad w_m = \beta_m \left(\frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} s^{2/3}. \quad (2.14)$$

В зависимости от параметров задачи полное решение обеспечивает плавный переход между различными предельными режимами распространения трещины.

Согласно [23; 27], режим распространения полубесконечной трещины определяется параметром утечек χ и безразмерным расстоянием $\tilde{s}$. На рисунке 2.2 показано параметрическое пространство задачи о полубесконечной трещине, а также безразмерное раскрытие $\tilde{w}$, являющееся решением интегрального уравнения (2.11). Области применимости предельных режимов (2.13) и их зависимость от параметра утечек χ и безразмерного расстояния $\tilde{s}$ выделены красным (k -режим, доминирующая трещиностойкость), зеленым ($\tilde{m}$ -режим, доминирующие утечки) и синим (m -режим, доминирующая вязкость) цветами. Области применимости определены как множества точек, в которых отклонение решения интегрального уравнения (2.11) от соответствующих предельных режимов (2.13) не превышает 2%.

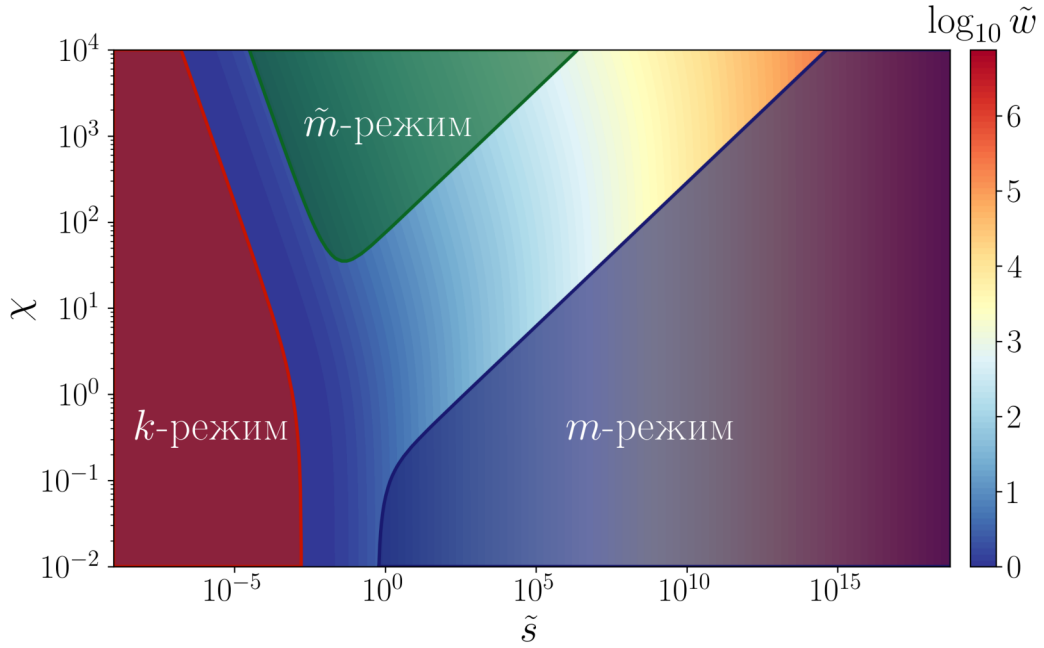


Рисунок 2.2 — Параметрическое пространство задачи о полубесконечной трещине гидроразрыва. Области применимости предельных режимов выделены красным (k -режим, доминирующая трещиностойкость), зеленым ($\tilde{m}$ -режим, доминирующие утечки) и синим (m -режим, доминирующая вязкость) цветами

Изложенное в данном разделе универсальное асимптотическое решение относится к базовой постановке без учета слоистой структуры пласта. Как будет показано в следующем разделе, использование такого решения при пересечении трещиной границы между слоями с различными напряжениями приводит к возникновению численных артефактов. В связи с этим при построении асимптотического решения необходимо учитывать влияние неоднородности поля напряжений. В то же время все модифицированные решения, учитывающие наличие слоев с различными напряжениями, должны корректно переходить в решение для однородного пласта при отсутствии скачка напряжений на границах слоев.

2.2 Проблема пересечения слоев с различными сжимающими напряжениями

Современные симуляторы гидравлического разрыва пласта, такие как алгоритм неявного множества уровня (Implicit Level Set Algorithm, ILSA) [12; 28], используют асимптотические решения в окрестности вершины трещины для отслеживания положения фронта. Это позволяет точнее описывать геометрию трещины и повышает общую точность решения. Однако, как будет показано в данном разделе, при пересечении трещиной слоя со скачком сжимающих напряжений этот подход теряет часть своих преимуществ.

Для дальнейшего изложения ниже представлен краткий обзор методологии ILSA по отслеживанию фронта применительно к случаю одиночной плоской гидравлической трещины. Площадь трещины покрывается прямоугольными элементами, которые делятся на три типа: внутренние (channel), концевые (tip) и опорные (survey), см. рисунок 2.3. Внутренние элементы полностью находятся внутри контура трещины. Концевые элементы частично заполнены жидкостью и пересекаются фронтом трещины. Опорные элементы представляют собой подмножество внутренних элементов и имеют как минимум один соседний концевой элемент. Опорные элементы используются для определения положения фронта трещины с помощью асимптотических решений.

Подход ILSA опирается на использование асимптотического решения в окрестности вершины трещины для определения расстояния до фронта. Одной из возможностей является применение так называемой универсальной асимптотики, представляющей собой решение интегрального уравнения (2.9). Приближенное решение этого уравнения представлено в работе [27] и применено в рамках подхода ILSA в работе [28]. Как было отмечено в предыдущем разделе, это решение одновременно учитывает влияние трещиностойкости породы, вязкости жидкости и утечек в окрестности вершины трещины и может быть представлено в следующем неявном виде:

$$\frac{s^2 V \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left(\frac{K' s^{1/2}}{E' w}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w V^{1/2}} \right), \quad (2.15)$$

где V — скорость фронта трещины, $w(s)$ — асимптотическое решение в окрестности вершины трещины, s — расстояние до фронта, а определение функции g_δ приведено в [28].

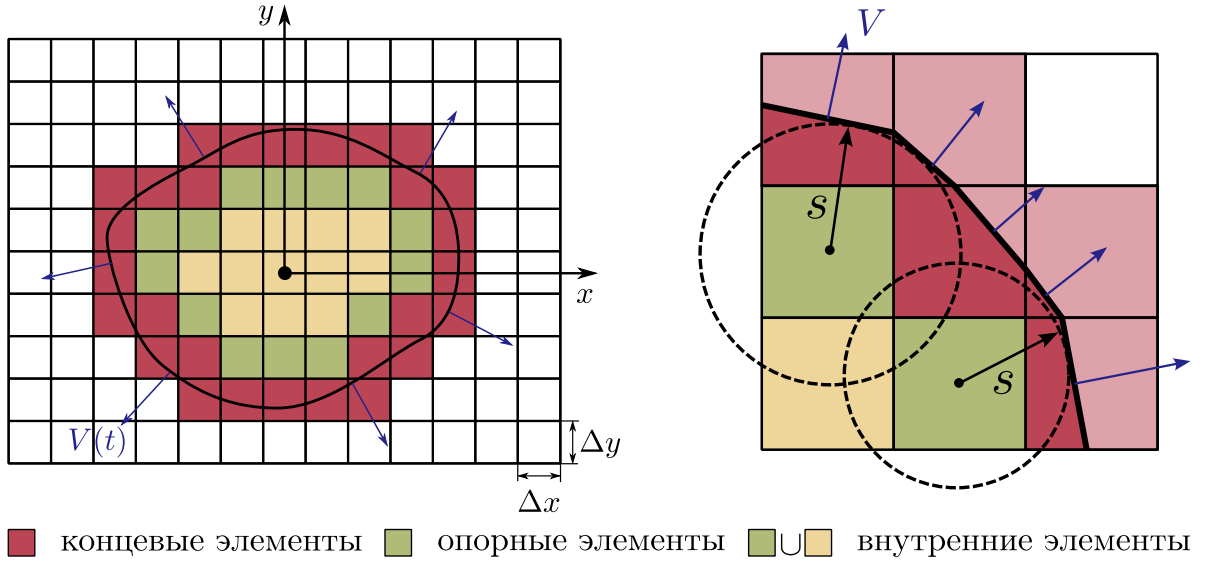


Рисунок 2.3 — Слева: дискретизация плоской трещины с использованием фиксированной прямоугольной сетки и классификация элементов трещины на внутренние (channel), концевые (tip) и опорные (survey). Черная линия показывает фронт трещины, а стрелки схематически указывают направление распространения. Справа: схема отслеживания фронта трещины и расчета объема жидкости в концевом элементе, где s — расстояние от центра опорного элемента до фронта трещины. Часть концевой элемента, заполненная жидкостью, выделена темно-красным цветом, а оставшиеся незаполненные области концевой элемента — светло-красным цветом

Для заданного раскрытия трещины w^s в центре опорного элемента расстояние до фронта s может быть вычислено путем решения нелинейного алгебраического уравнения (2.15) при $w = w^s$. Скорость фронта трещины аппроксимируется как $V = (s - s_0)/\Delta t$, где s_0 — расстояние от центра опорного элемента до фронта трещины на предыдущем временном шаге. Расстояние s вычисляется для каждого опорного элемента и используется для определения положения фронта трещины, как показано на правой части рисунка 2.3. Кроме того, жидкость в концевом элементе занимает многоугольную область, выделенную темно-красным цветом. Незаполненная часть концевой элемента выделена светло-красным цветом. Для целей численной схемы раскрытие частично заполненного концевой элемента w^t вычисляется по объему жидкости, содержащейся в этом элементе:

$$w^t = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{PR} w(x, y) dx dy, \quad (2.16)$$

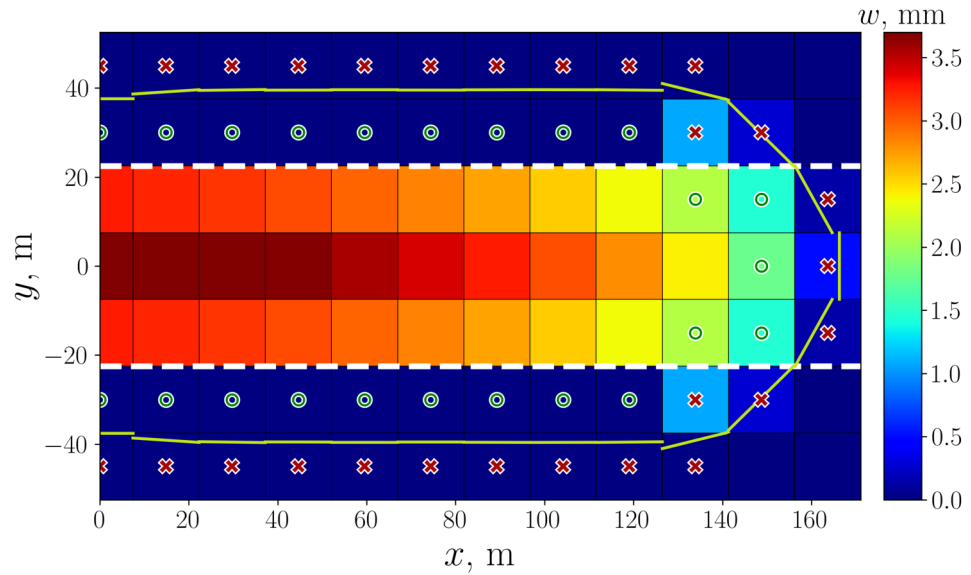
где PR — многоугольная область концевой элемента, занятая жидкостью. Эффективная процедура интегрирования асимптотического решения w по концевому элементу подробно описана в работе [28]. Важной особенностью алгоритма является то, что значения раскрытия в концевых элементах не являются независимыми и однозначно выражаются через значения раскрытия в опорных элементах.

Несмотря на то, что описанный подход учитывает несколько физических эффектов, он может приводить к значительным ошибкам в ситуациях, когда фронт трещины пересекает слой со скачком сжимающих напряжений, поскольку влияние такого слоя при этом не учитывается. Условие распространения трещины фактически формулируется для пары численных элементов — от опорного к концевому. Если между этими двумя элементами расположена геологическая граница слоев, то ее влияние полностью игнорируется. Для иллюстрации этого явления рассмотрим пример с тремя слоями, в котором внешние слои обладают существенно более высокими сжимающими напряжениями, чем средний слой. Такая ситуация соответствует сильным барьерам по сжимающим напряжениям и приводит к формированию трещины практически постоянной высоты. Результаты расчетов для таких входных параметров показаны на рисунке 2.4а, где в силу симметрии изображена только половина плоской трещины. Цветовая заливка показывает раскрытие трещины, а желтая линия соответствует фронту трещины. В окрестности перехода фронта от горизонтальной ориентации к вертикальной видно, что концевые элементы рядом с границами слоев имеют раскрытие, существенно превышающее раскрытие соседних элементов, находящихся в том же слое. Описанные локальные завышения раскрытия являются численным артефактом схемы, возникающим при пересечении трещиной границы слоя. Далее для краткости такие элементы будем называть “шипами”. Такие элементы также приводят к тому, что фронт трещины выходит за пределы центрального слоя примерно на один элемент сверху и снизу, что влечет за собой завышенную оценку высоты трещины.

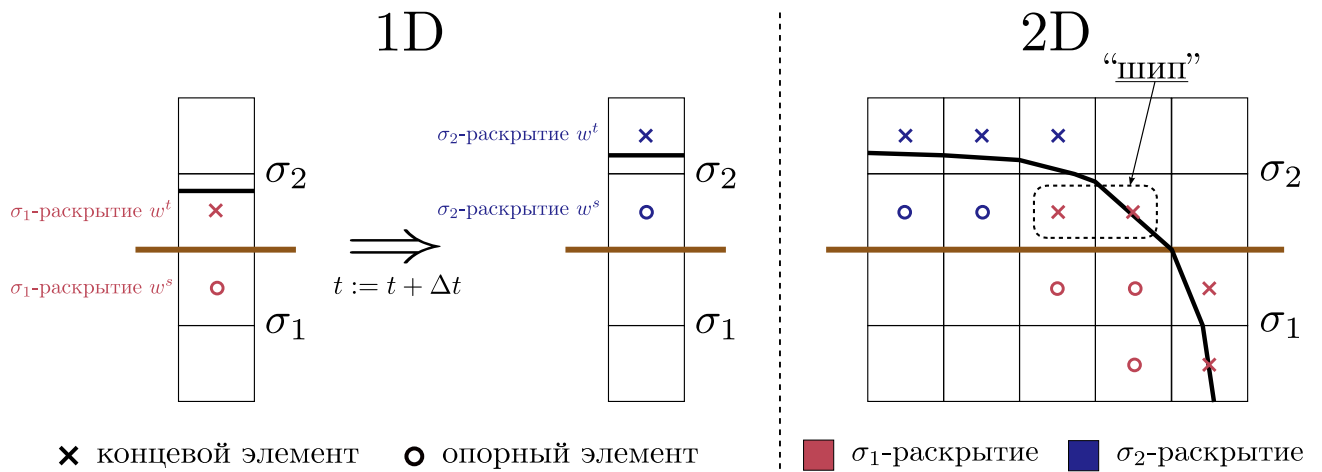
Как уже отмечалось, проблема пересечения слоев, возникает в связи с тем, что асимптотическое решение (2.15) не учитывает разницу сжимающих напряжений между опорным и концевым элементами. Для выяснения причин возникновения данного явления рассмотрим схему, представленную на рисунке 2.4б. Предполагается, что пласт состоит из двух слоев с различными напряжениями, причем $\sigma_2 > \sigma_1$. Далее анализ фокусируется исключительно на

вертикальном распространении трещины. Изначально опорный элемент находится в зоне с меньшим напряжением σ_1 . Расстояние от этого опорного элемента до фронта трещины определяется согласно уравнению (2.15). Однако, поскольку асимптотическое решение (2.15) не учитывает наличие скачка напряжений между слоями, расстояние до фронта трещины s оказывается завышенным, что, в свою очередь, приводит к завышенному раскрытию концевой элемента w^t (σ_1 -раскрытие w^t на рисунке 2.46). Стоит отметить, что этот концевой элемент находится в зоне с более высоким напряжением σ_2 , однако влияние этого напряжения в расчете не учитывается. Затем на следующем временном шаге, по мере распространения трещины, рассмотренный концевой элемент становится новым опорным, а расположенный над ним — новым концевым. Теперь новый опорный элемент находится в зоне высокого напряжения σ_2 , и его раскрытие, соответственно, становится малым (σ_2 -раскрытие w^s на рисунке 2.46). Именно этот механизм является причиной ошибки в определении положения фронта трещины, причем величина ошибки имеет порядок размера элемента. В правой части рисунка 2.46 эта проблема проиллюстрирована в двумерной постановке. Область, содержащая поворачивающийся фронт трещины, содержит элементы с завышенным раскрытием (так называемый “шип”). В контексте рассмотренного ранее одномерного примера это соответствует моментам непосредственно до и сразу после пересечения опорным элементом границы слоя. Представленные схемы также хорошо согласуются с картиной, наблюдаемой в реальных численных расчетах, показанных на рисунке 2.4а.

Для устранения проблемы возникновения “шипов” необходимо рассмотреть более общую постановку задачи о полубесконечной гидравлической трещине. В частности, для преодоления этой проблемы необходимо учесть влияние нескольких слоев с различными сжимающими напряжениями. В следующем разделе описываются три различных подхода к учету влияния таких слоев. Эти подходы различаются вычислительными затратами, трудоемкостью реализации и точностью аппроксимации.



а) Пример численного расчета для плоской гидравлической трещины в случае симметричных барьеров по сжимающим напряжениям. Цветовая заливка показывает раскрытие трещины, а желтая линия — фронт трещины



б) Схема, иллюстрирующая проблему возникновения “шипов”

Рисунок 2.4 — Проблема пересечения границы слоев в случае значительного контраста сжимающих напряжений

2.3 Учет слоистости по сжимающим напряжениям

2.3.1 Численное решение интегрального уравнения

Первый подход представляет собой наиболее точный метод и заключается в решении задачи о полубесконечной гидравлической трещине, распространяющейся с постоянной скоростью V при наличии слоев с различными сжимающими напряжениями. В отличие от раздела 2.1, далее предполагается, что сжимающее напряжение в пласте σ_0 имеет кусочно-постоянное пространственное распределение:

$$\sigma_0(s) = \sigma_1(1 - \mathcal{H}(s - s_1)) + \sum_{i=2}^n \sigma_i(\mathcal{H}(s - s_{i-1}) - \mathcal{H}(s - s_i)) + \sigma_{n+1}\mathcal{H}(s - s_n), \quad (2.17)$$

где $\mathcal{H}$ — функция Хевисайда, s_i — расстояние от вершины трещины до i -го слоя со скачком напряжений, σ_i — величина напряжения в слое, расположенном между s_{i-1} и s_i для $i = 2, \dots, n$, а первый и последний слои считаются полубесконечными. В этом случае несингулярная интегральная формулировка (2.9) может быть обобщена для учета слоев с различными сжимающими напряжениями вдоль трещины следующим образом [31]:

$$w(s) = \frac{K'}{E'} s^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(s, x') \frac{\mu'}{w(x')^2} \left[V + 2C' V^{1/2} \frac{x'^{1/2}}{w(x')} \right] dx' - \frac{4}{\pi E'} \sum_{j=1}^n \Delta\sigma_j F(s, s_j), \quad (2.18)$$

где $\Delta\sigma_j = \sigma_j - \sigma_{j+1}$ — амплитуда j -го скачка напряжений. Приведенная формулировка автоматически удовлетворяет условию распространения трещины при $s \rightarrow 0$.

С использованием безразмерных переменных, введенных в (2.10) для полубесконечной трещины, и безразмерной амплитуды скачка напряжений $\Delta\Sigma_j = \Delta\sigma_j l^{1/2} / K'$ уравнение (2.18) может быть преобразовано к виду

$$\tilde{w}(\tilde{s}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G\left(\frac{\tilde{x}'}{\tilde{s}}\right) \left[\frac{1}{\tilde{w}(\tilde{x}')^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{x}')^3} \right] d\tilde{x}' + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^n \Delta\Sigma_j \tilde{s}_j G\left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right). \quad (2.19)$$

В таких безразмерных переменных условие распространения трещины упрощается до $\tilde{w}(0) = 1$.

Для получения численного решения уравнения (2.19) интеграл аппроксимируется по формуле Симпсона, а полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона. Бесконечный верхний предел интегрирования заменяется достаточно большим конечным числом. Узлы сетки, используемые для аппроксимации интеграла, распределены равномерно в логарифмическом масштабе. Значения решения в нескольких последних узлах сетки отбрасываются для исключения дополнительных численных ошибок, связанных с конечностью верхнего предела интегрирования.

Хотя решение интегрального уравнения (2.18) всегда может быть получено численно, желательно иметь более эффективный с вычислительной точки зрения метод, поскольку асимптотическое решение многократно вызывается в рамках алгоритма распространения трещины. Например, такой подход использовался в работе [31] для трещины, распространяющейся в условиях плоской деформации, для которой требуется лишь два концевых элемента. Однако даже в этом случае использование интегрального уравнения существенно снижает эффективность численного алгоритма. К сожалению, получить приближенное решение (2.18) способом, аналогичным тому, что был применен для получения (2.15), не представляется возможным. Поэтому далее рассматриваются альтернативные подходы.

2.3.2 Асимптотическое решение с поправкой трещиностойкости

Второй подход нацелен на максимальную вычислительную эффективность и заключается в применении универсального асимптотического решения (2.15) с модифицированной трещиностойкостью. Рассмотрим упрощенную формулировку уравнения (2.18) для случая распространения в режиме доминирующей трещиностойкости, то есть с отбрасыванием слагаемых, отвечающих за вязкую диссипацию и утечки жидкости:

$$w_{\text{eff}}(s) = \frac{K'}{E'} s^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \sum_{j=1}^n \Delta \sigma_j F(s, s_j). \quad (2.20)$$

С использованием полученного выражения можно ввести эффективную трещиностойкость $K'_{\text{eff}}(s)$ как

$$K'_{\text{eff}}(s) = \frac{w_{\text{eff}}(s)E'}{s^{1/2}}. \quad (2.21)$$

Эффективная трещиностойкость учитывает влияние слоев со скачком напряжений за счет изменения кажущейся трещиностойкости в зависимости от величины скачка напряжений и расстояния до границы слоя. Комбинируя уравнения (2.15) и (2.21) можно получить асимптотическое решение, приближенно учитывающее слои с различными сжимающими напряжениями:

$$\frac{s^2 V \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left(\frac{K'_{\text{eff}}(s) s^{1/2}}{E' w}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w V^{1/2}} \right). \quad (2.22)$$

Обычно для решения уравнений такого вида применяется метод Ньютона. Однако метод Ньютона может не сходиться из-за того, что нелинейная функция в окрестности корня может быть немонотонной и невыпуклой, особенно при наличии нескольких слоев. Поэтому для обеспечения сходимости метода Ньютона необходимо выбирать начальное приближение, достаточно близкое к искомому решению. В качестве альтернативы можно использовать демпфированный метод Ньютона [164] или алгоритм Левенберга — Марквардта [165; 166], которые позволяют преодолеть проблему локальной сходимости метода Ньютона.

Для того чтобы избежать отрицательных значений эффективной трещиностойкости $K'_{\text{eff}}(s)$, необходимо ввести ограничение на величину $\Delta\sigma_j$ следующего вида:

$$\sum_{j=1}^n \Delta\sigma_j \frac{F(s, s_j)}{s^{1/2}} < \frac{\pi K'}{4}. \quad (2.23)$$

Как видно из (2.23), ограничение на $\Delta\sigma_j$ зависит от расстояния до фронта трещины s . С учетом того, что $F(s, s_j) \rightarrow -4s^{1/2}s_j^{1/2}$ при $s \rightarrow \infty$, условие (2.23) для $s \gg s_j$ можно оценить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n \Delta\sigma_j s_j^{1/2} > -\frac{\pi K'}{16}. \quad (2.24)$$

Такое ограничение, фактически приводящее к ограничению величины отрицательных скачков напряжений, вносит погрешность при пересечении границ слоев. В то же время при распространении трещины более существенную роль, как правило, играют напряженные барьеры (положительные значения скачков

напряжений $\Delta\sigma_j$), а их влияние в рамках данного подхода описывается значительно точнее.

Вычислительная сложность подхода с поправкой трещиностойкости (2.22) близка к сложности использования стандартной универсальной асимптотики (2.15). При этом данный подход позволяет учитывать влияние слоев с различными значениями сжимающих напряжений. Метод является точным только в режиме доминирующей трещиностойкости и становится приближенным в остальных случаях. Концептуально данный подход близок к методу, предложенному в работах [32; 33].

В следующем разделе предлагается еще один подход, занимающий промежуточное положение между решением интегрального уравнения и применением поправки трещиностойкости. Данный подход направлен на достижение компромисса между вычислительной эффективностью и точностью: по сравнению с решением интегрального уравнения он требует меньших вычислительных затрат, а по сравнению с простой поправкой трещиностойкости обеспечивает более высокую точность.

2.3.3 Аппроксимация с помощью ОДУ

Третий и последний подход основан на аппроксимации исходного несингулярного интегрального уравнения с помощью обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Дифференцируя безразмерную интегральную формулировку (2.19) и применяя приближение $\tilde{w} \approx \tilde{s}^\delta$ аналогично [27] можно получить приближенную постановку в форме обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tilde{s}} = \frac{\beta_m^3}{3\tilde{w}^2} + \frac{\chi\beta_m^4}{4\tilde{w}^3} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^n \Delta\Sigma_j \left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right)^2 G' \left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right), \quad \tilde{w}(0) = 1, \quad (2.25)$$

где производная ядра имеет следующий вид:

$$G'(t) = \frac{1}{t} \left(-\frac{1+t^2}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2 \right). \quad (2.26)$$

Стоит отметить, что в случае отсутствия слоев с различными сжимающими напряжениями решение уравнения (2.25) сводится к приближенному

решению нулевого порядка, представленному в работе [27]. Решение нулевого порядка имеет погрешность около 1.1% и точно воспроизводит все предельные режимы, тогда как δ -коррекция [27] уменьшая погрешность до 0.14%. При наличии слоев дополнительное слагаемое в правой части уравнения (2.25) может нарушать предположение $\tilde{w} \approx \tilde{s}^\delta$. Поэтому маловероятно, что применение δ -коррекции к уравнению (2.25) позволит повысить точность аппроксимации.

Следует отметить, что производная ядра $G'(t)$ имеет особенность при $t = 1$, что соответствует $\tilde{s} = \tilde{s}_j$. Для устранения этой особенности выполняется следующая замена:

$$\hat{w} = \tilde{w} - G_\Sigma(\tilde{s}), \quad G_\Sigma(\tilde{s}) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^n \Delta \Sigma_j \tilde{s}_j G\left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right), \quad (2.27)$$

которая приводит к несингулярной формулировке ОДУ

$$\frac{d\hat{w}}{d\tilde{s}} = \frac{\beta_m^3}{3(\hat{w} + G_\Sigma)^2} + \frac{\chi \beta_m^4}{4(\hat{w} + G_\Sigma)^3}. \quad (2.28)$$

Поскольку интегральное ядро ведет себя как $G(t) \approx 4/(3t^2)$ при $t \gg 1$, то выполняется равенство $G_\Sigma(0) = 0$ и начальное условие для несингулярной формулировки (2.28) принимает следующий вид:

$$\hat{w}(0) = 1. \quad (2.29)$$

Задача Коши (2.28), (2.29) может быть эффективно решена численно с использованием явного метода Дорманда — Принса [167] с адаптивным контролем шага [168].

В отсутствие первого и второго слагаемых в правой части уравнения (2.25) решение задачи Коши (2.25) совпадает с решением (2.20), которое было использовано для вычисления эффективной трещиностойкости (2.21). Первое и второе слагаемые в правой части уравнения (2.25) позволяют учесть влияние слоев со скачком напряжений не только в режиме доминирующей трещиностойкости, но и в других режимах. Кроме того, для решения уравнения (2.25) не требуется накладывать ограничения на величину $\Delta \Sigma_j$. Таким образом, ожидается, что ОДУ-аппроксимация может быть более точной, чем подход с поправкой трещиностойкости.

Для вычисления асимптотического раскрытия $\tilde{w}$ при заданном $\tilde{s}$ в рамках ОДУ-аппроксимации необходимо решить задачу Коши (2.28), (2.29) на

интервале $[0, \tilde{s}]$. Данная задача решается численно с помощью явного метода Дорманда — Принса. В отличие от решения обыкновенного дифференциального уравнения, при использовании интегрального уравнения требуется решить связанную систему нелинейных уравнений и выполнить интерполяцию решения в точке $\tilde{s}$. Следовательно, можно ожидать, что ОДУ-аппроксимация окажется менее вычислительно затратной по сравнению с подходом на основе интегрального уравнения.

2.4 Сравнение точности и вычислительной эффективности

В данном разделе сравниваются различные подходы к расчету асимптотического решения в окрестности вершины трещины, учитывающие влияние слоев различными сжимающими напряжениями. Целью анализа является количественная оценка точности методов и их вычислительной эффективности. Исходный код, использованный в анализе, доступен по ссылке <https://github.com/alexander-valov/StressCorrectedAsymptote>.

Для сравнения асимптотических решений при наличии слоев со скачком напряжений рассматриваются случаи положительного скачка напряжений $\Delta\Sigma_j > 0$ и отрицательного скачка напряжений $\Delta\Sigma_j < 0$. Также исследуется точность решения для так называемых k -режима (режима доминирующей трещиностойкости) и m -режима (режима доминирующей вязкости). Доминирующий режим определяется путем решения задачи без наличия слоев и оценивается в точке, соответствующей положению слоя $\tilde{s}_j$, см. рисунок 2.2. В данном разделе рассматривается только умеренный уровень утечек, которому соответствует значение параметра $\chi = 1$. Чтобы различать слабую и сильную амплитуды скачка напряжений для разных режимов, вводится относительная интенсивность скачка как

$$\Delta S_j = \frac{8\Delta\Sigma_j\tilde{s}_j}{\pi\tilde{w}_0(\tilde{s}_j)}, \quad (2.30)$$

где $\tilde{w}_0(\tilde{s})$ — раскрытие трещины, соответствующее решению в однородном пласте. Это выражение представляет собой отношение вклада j -го слоя $(4/\pi)\Delta\Sigma_j\tilde{s}_jG(\tilde{s}_j/\tilde{s})$, вычисленного на границе самого слоя $\tilde{s} = \tilde{s}_j$, к раскрытию трещины $\tilde{w}_0(\tilde{s})$, не учитывающему наличие слоев. Таким образом, амплитуда

скачка напряжений считается слабой, если относительная интенсивность скачка $|\Delta S_j| < 1/2$, и сильной, если $|\Delta S_j| > 3/2$. Для корректности сравнения относительная интенсивность скачка в расчетах полагается одинаковой для k и m -режимов.

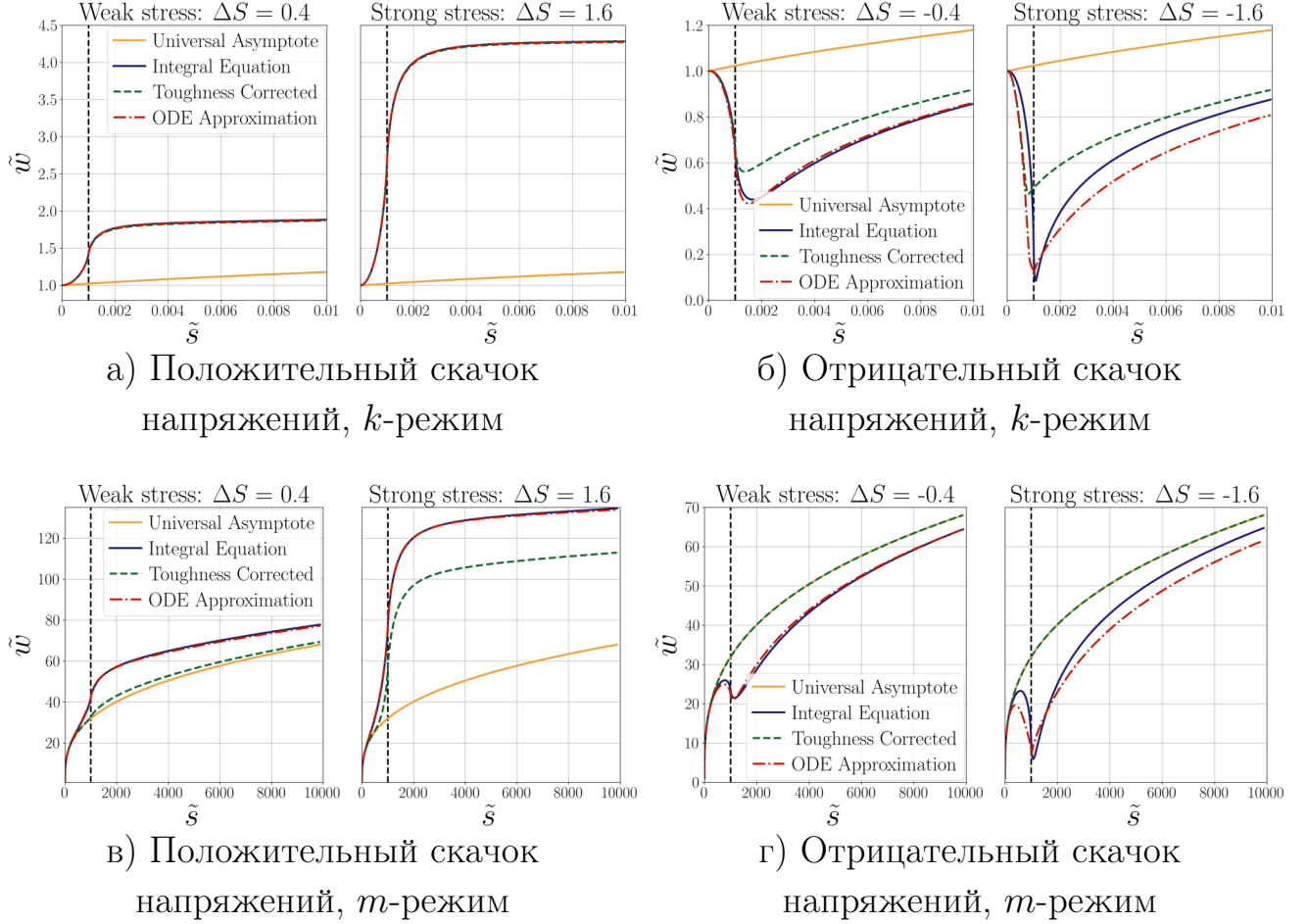


Рисунок 2.5 — Сравнение безразмерного раскрытия $\tilde{w}$ для слабого и сильного положительного и отрицательного скачков напряжений в зависимости от безразмерного расстояния $\tilde{s}$ до фронта трещины. Черные пунктирные вертикальные линии показывают границы слоев. Для k -режима граница слоев расположена при $\tilde{s}_1 = 0.001$, для m -режима — при $\tilde{s}_1 = 1000$

На рисунке 2.5 приведено решение для безразмерного раскрытия $\tilde{w}$ в зависимости от безразмерного расстояния $\tilde{s}$ для случаев одиночного положительного и одиночного отрицательного скачка напряжений (два слоя с различными значениями сжимающих напряжений). На рисунке представлены все подходы, описанные в предыдущем разделе: численное решение интегрального уравнения (сплошные синие линии), асимптотика с поправкой трещиностойкости (зеленые пунктирные линии) и ОДУ-аппроксимация (крас-

ные штрихпунктирные линии). Кроме того, для иллюстрации вклада скачка напряжений в раскрытие трещины показано универсальное асимптотическое решение, не учитывающее слоистость (сплошная желтая линия). На каждом из рисунков слева приведены результаты для слабой амплитуды скачка, справа — для сильной.

Сначала рассматривается k -режим для случая, когда граница слоя расположена при $\tilde{s}_1 = 0.001$. Слабой амплитуде скачка соответствует $|\Delta\Sigma_j| = 161$, а сильной — $|\Delta\Sigma_j| = 643$. Как видно из рисунка 2.5а, в случае положительного скачка напряжений визуальное различие между ОДУ-аппроксимацией и точным решением интегрального уравнения отсутствует. Аппроксимация с поправкой трещиностойкости также хорошо согласуется с решением интегрального уравнения. Более того, чем больше положительный скачок, тем лучше согласование. Стоит отметить, что поправка трещиностойкости является точной в режиме доминирующей трещиностойкости, поэтому такой результат является ожидаемым. Отрицательные значения амплитуды $\Delta\Sigma_j$ j -го слоя приводят к немонотонному поведению решения, что затрудняет сходимость численных алгоритмов при больших по модулю отрицательных скачках. На рисунке 2.5б приведено сравнение безразмерного раскрытия $\tilde{w}$ для отрицательных значений $\Delta\Sigma_j$. При малом отрицательном скачке ОДУ-аппроксимация близка к решению интегрального уравнения. Однако при большом по модулю отрицательном скачке ОДУ-аппроксимация совпадает с решением интегрального уравнения лишь качественно. Решение с поправкой трещиностойкости заметно занижает влияние отрицательного скачка и существенно отличается от точного решения интегрального уравнения.

Далее рассматривается m -режим для случая, когда граница слоя расположена при $\tilde{s} = 1000$. Слабой амплитуде скачка соответствует $|\Delta\Sigma_j| = 0.005$, а сильной — $|\Delta\Sigma_j| = 0.02$. Как видно из рисунка 2.5в, для случая положительного скачка напряжений ОДУ-аппроксимация и решение интегрального уравнения дают практически идентичные результаты. Однако аппроксимация с поправкой трещиностойкости оказывается существенно менее точной, поскольку в m -режиме значительную роль играет вязкость жидкости. Для отрицательных значений амплитуды $\Delta\Sigma_j$, см. рисунок 2.5г, при не слишком сильном отрицательном скачке ОДУ-аппроксимация хорошо согласуется с решением интегрального уравнения. При увеличении относительного отрицательного скачка точность ОДУ-аппроксимации снижается, аналогично случаю k -режима. Реше-

ние с поправкой трещиностойкости при малых и больших по модулю значениях отрицательного скачка практически нечувствительно к наличию слоя и совпадает с универсальным асимптотическим решением. Это ожидаемо, поскольку данное решение не учитывает влияние вязкости с достаточной точностью.

Важно отметить, что аппроксимация с поправкой трещиностойкости заметно отличается от решения интегрального уравнения уже в k -режиме и работает еще хуже в m -режиме, особенно для случая отрицательного скачка напряжений, что связано с ограничением $K'_{\text{eff}}(s) > 0$ на эффективную трещиностойкость. Согласно (2.23), в случае одного слоя для амплитуды скачка напряжений $\Delta\sigma$ выполняется следующее ограничение:

$$\Delta\sigma > \frac{\pi K'}{4} \frac{s^{1/2}}{F(s, s_j)}, \quad (2.31)$$

где $F(s, s_j) < 0$ при всех $s, s_j > 0$. При $s \gg s_j$ вместо соотношения (2.31) для оценки нижней границы $\Delta\sigma$ можно использовать выражение

$$\Delta\sigma > -\frac{\pi K'}{16s_j^{1/2}}. \quad (2.32)$$

Таким образом, асимптотика с поправкой трещиностойкости позволяет учесть отрицательный скачок напряжений лишь в тех случаях, когда граница слоя $\tilde{s}_1$ расположена на относительно малом расстоянии от вершины трещины.

Для количественной оценки погрешности аппроксимации вводится относительная ошибка как

$$\varepsilon_2 = \frac{\|\tilde{w}_{\text{num}} - \tilde{w}_{\text{int}}\|_2}{\|\tilde{w}_{\text{int}}\|_2}, \quad \|\tilde{w}\|_2 = \left(\int_0^{\tilde{s}_{\text{max}}} \tilde{w}^2 d\tilde{s} \right)^{1/2}, \quad (2.33)$$

где $\tilde{w}_{\text{int}}$ — решение интегрального уравнения, $\tilde{w}_{\text{num}}$ — решение с поправкой трещиностойкости или ОДУ-аппроксимация, $\tilde{s}_{\text{max}} = 0.01$ для k -режима и $\tilde{s}_{\text{max}} = 10^4$ для m -режима.

В таблице 1 приведены значения относительной ошибки решения с поправкой трещиностойкости и ОДУ-аппроксимации для случаев, представленных на рисунке 2.5. Для скачка напряжений в k -режиме относительная ошибка решения с поправкой трещиностойкости не превышает 1%. Однако в остальных рассмотренных случаях величина ошибки существенно возрастает и достигает 13–20%. ОДУ-аппроксимация демонстрирует высокую точность в случае скачка напряжений как в k -режиме, так и в m -режиме: относительная погрешность

не превышает 1%. В случае умеренного отрицательного скачка напряжений погрешность аппроксимации остается в пределах 2%, тогда как для большого отрицательного скачка напряжений она возрастает до 7–15%. Тем не менее, несмотря на заметное увеличение погрешности, ОДУ-аппроксимация сохраняет способность качественно воспроизводить решение интегрального уравнения в отличие от асимптотики с поправкой трещиностойкости.

Таблица 1 — Ошибка аппроксимации решения с поправкой трещиностойкости и ОДУ-аппроксимации относительно решения интегрального уравнения для k -режима и m -режима

Относительная интенсивность ΔS	Положительный скачок		Отрицательный скачок	
	0.4	1.6	-0.4	-1.6
Поправка трещиностойкости, ε_2	0.63 %	0.26 %	13.64 %	19.25 %
ОДУ-аппроксимация, ε_2	0.24 %	0.02 %	1.72 %	15.52 %

а) Относительная ошибка ε_2 для случая k -режима

Относительная интенсивность ΔS	Положительный скачок		Отрицательный скачок	
	0.4	1.6	-0.4	-1.6
Поправка трещиностойкости, ε_2	16.59 %	17.70 %	14.61 %	20.03 %
ОДУ-аппроксимация, ε_2	0.77 %	0.34 %	1.27 %	7.77 %

б) Относительная ошибка ε_2 для случая m -режима

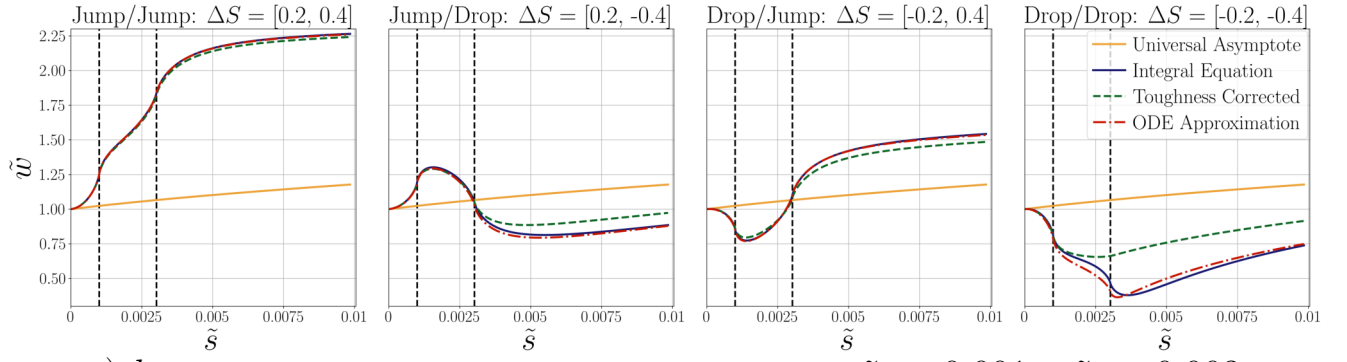
На рисунках 2.6а–2.6б представлено сравнение асимптотических решений для случая двух границ слоев. Рассматриваются четыре комбинации амплитуд скачков напряжений: два положительных скачка, положительный и отрицательный скачки, отрицательный и положительный скачки, а также два отрицательных скачка. Во всех случаях сохраняются постоянными как относительная интенсивность каждого скачка ΔS_j , так и отношение амплитуд скачков $\Delta \Sigma_1 / \Delta \Sigma_2$. В k -режиме абсолютные значения безразмерных скачков напряжений составляют $|\Delta \Sigma_1| = 80$ и $|\Delta \Sigma_2| = 54$, тогда как в m -режиме

они равны $|\Delta\Sigma_1| = 0.0025$ и $|\Delta\Sigma_2| = 0.0017$. Как видно из рисунка 2.6а, в k -режиме в случае двух положительных скачков напряжений как решение с поправкой на трещиностойкость, так и ОДУ-аппроксимация хорошо согласуются с решением интегрального уравнения. Если первый скачок напряжений является положительным, а второй отрицательным, то решение с поправкой на трещиностойкость хорошо воспроизводит решение интегрального уравнения вблизи положительного скачка. Однако после отрицательного скачка наблюдается заметное расхождение, обусловленное ограничением $K'_{\text{eff}} > 0$. Если первый скачок напряжений является отрицательным, а второй положительным, то решение с поправкой на трещиностойкость несколько занижает влияние второго скачка вследствие наличия отрицательного скачка на первой границе слоя. Наконец, при двух отрицательных скачках напряжений решение с поправкой на трещиностойкость существенно недооценивает влияние второго скачка напряжений, тогда как ОДУ-аппроксимация качественно воспроизводит решение интегрального уравнения.

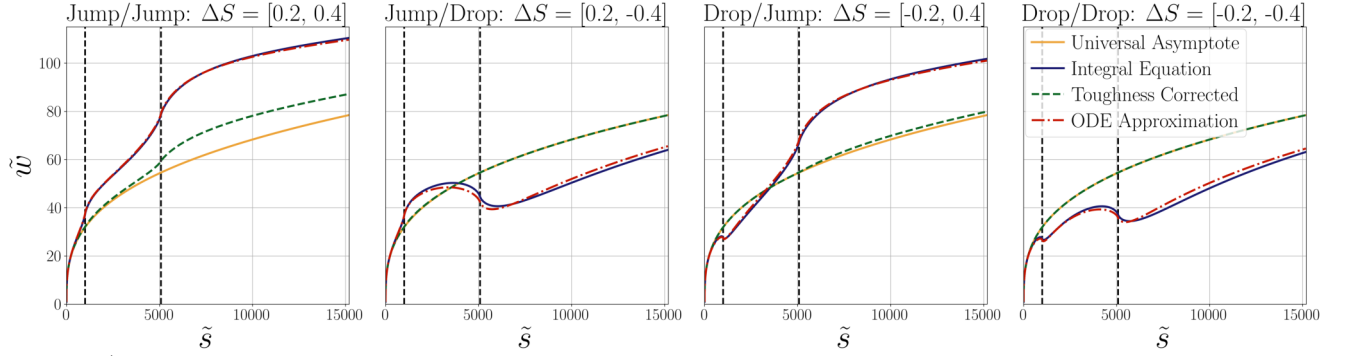
Как показано на рисунке 2.6б, в m -режиме ОДУ-аппроксимация хорошо согласуется с решением интегрального уравнения для любой комбинации слоев. В то же время асимптотика с поправкой трещиностойкости практически полностью игнорирует наличие слоев со скачком напряжений, за исключением случая двух положительных скачков напряжений.

Для сравнения вычислительной эффективности описанных выше подходов выполнены расчеты в k и m -режимах для различных значений $\Delta\Sigma_j$. В качестве начального приближения для метода Ньютона при численном решении интегрального уравнения и при аппроксимации с поправкой трещиностойкости использовалось максимальное значение безразмерного раскрытия среди предельных режимов (2.13), то есть $\max(\tilde{w}_k, \tilde{w}_{\tilde{m}}, \tilde{w}_m)$. Для численного решения ОДУ-аппроксимации применялся явный метод Дорманда — Принса с адаптивным контролем шага интегрирования. При выбранных значениях допусков среднее число узлов равно 9 для k -режима и 26 для m -режима. При численном решении интегрального уравнения использовалась фиксированная сетка, покрывающая интервал $0 \leq \tilde{z} \leq 10^{18}$, для разбиения которого использовалось 1500 узлов, распределенных по логарифмической шкале со сгущениями в окрестности границ слоев с различными напряжениями.

В таблице 2 представлено сравнение времени расчета для различных подходов. Среди представленных подходов наиболее вычислительно эффективным



а) k -режим, границы слоев расположены при $\tilde{s}_1 = 0.001$ и $\tilde{s}_2 = 0.003$



б) m -режим, границы слоев расположены при $\tilde{s}_1 = 1000$ и $\tilde{s}_2 = 5080$

Рисунок 2.6 — Сравнение безразмерного раскрытия $\tilde{w}$ для случая двух скачков напряжений в зависимости от безразмерного расстояния $\tilde{s}$ до вершины трещины. Черные пунктирные вертикальные линии показывают границы слоев

является подход с поправкой трещиностойкости. Эффективность ОДУ-аппроксимации несколько ниже, но имеет тот же порядок. Стоит отметить, что время расчета ОДУ-аппроксимации в m -режиме выше по сравнению с k -режимом. Это снижение производительности является прямым следствием увеличения вычислительной области (то есть решение строится для больших значений безразмерного расстояния $\tilde{s}$). Численное решение интегрального уравнения требует приблизительно на два порядка больше времени по сравнению с другими аппроксимациями. Это существенное различие делает подход на основе интегрального уравнения малоприменимым для реализации алгоритма отслеживания фронта трещины.

На основании результатов, представленных в данном разделе, можно сформулировать основные преимущества и недостатки рассмотренных подходов. Численное решение интегрального уравнения обеспечивает наивысшую точность. Однако высокая вычислительная стоимость делает данный подход малоприменимым для отслеживания положения фронта трещины в симулято-

Таблица 2 — Сравнение времени расчета для интегрального уравнения, асимптотики с поправкой трещиностойкости и ОДУ-аппроксимации в случае k -режима при $\tilde{s}_1 = 0.001$ и m -режима при $\tilde{s}_1 = 1000$ для различных значений относительной интенсивности скачка напряжений ΔS

Интенсивность ΔS	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
Интегральное уравнение, мс	1078.1	302.7	193.3	194.8	194.3	229.6	231.5
Поправка трещиностойкости, мс	1.61	1.60	1.50	1.26	1.67	2.11	2.86
ОДУ-аппроксимация, мс	11.35	4.68	2.32	0.47	1.97	2.23	2.01

а) Время расчета в k -режиме для $\tilde{s}_1 = 0.001$

Интенсивность ΔS	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
Интегральное уравнение, мс	736.3	190.3	191.6	191.1	190.9	192.9	192.1
Поправка трещиностойкости, мс	1.08	1.08	1.09	1.09	1.15	1.30	1.39
ОДУ-аппроксимация, мс	11.88	8.85	8.03	6.35	7.30	7.29	7.52

б) Время расчета в m -режиме для $\tilde{s}_1 = 1000$

рах гидроразрыва пласта, таких как planar 3D ILSA. Подход с поправкой трещиностойкости отличается простотой реализации, высокой вычислительной эффективностью и обеспечивает удовлетворительную точность в k -режиме. Вместе с тем его применение за пределами k -режима сопровождается существенным ростом погрешности. Кроме того, в m -режиме данный подход практически не способен корректно учитывать отрицательные скачки напряжений. ОДУ-аппроксимация занимает промежуточное положение между двумя указанными подходами. Данный подход позволяет с приемлемой точностью описывать как положительные, так и отрицательные скачки напряжений, а также случаи с двумя и более скачками напряжений. По вычислительной эффективности данный подход уступает решению с поправкой трещиностойкости, однако остается сопоставимым с ним по вычислительным затратам. Основным недо-

статком ОДУ-аппроксимации является заметное увеличение погрешности при больших отрицательных скачках напряжений.

2.5 Область применимости асимптотического решения и коэффициент релаксации напряжений

Рассмотренную ранее задачу о полубесконечной трещине при наличии слоев с различными сжимающими напряжениями можно применить для описания решения в окрестности вершины трещины конечной высоты. Как было отмечено в работе [28], в однородном пласте фактическая область применимости универсального асимптотического решения (2.15) охватывает сразу несколько элементов сетки в окрестности вершины трещины, см. рисунок 2.7а. Это обстоятельство позволяет использовать универсальное асимптотическое решение даже на относительно грубой сетке без существенной потери точности. В случае задачи о пересечении слоев с различными напряжениями типичный размер “шипа” составляет порядка одного элемента, и поэтому проблема таких численных артефактов особенно критична именно на грубой сетке. По этой причине необходимо исследовать точность асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям при использовании грубых сеток. Поэтому целью данного раздела является определение размеров области в окрестности вершины трещины, в которой асимптотическое решение сохраняет приемлемую точность.

Для определения области применимости асимптотических решений рассматривается гидравлическая трещина в условиях плоской деформации при постоянном внутреннем давлении и пересекающая два симметричных барьера напряжений [8; 169]. Высота трещины обозначается через h , высота продуктивного слоя — через H , а в ограничивающих слоях действует дополнительное сжимающее напряжение $\Delta\sigma$, как показано на рисунке 2.7б. Предположение о постоянстве давления внутри трещины позволяет получить явное выражение для профиля раскрытия трещины для заданной высоты h :

$$w_{ps}(x) = \frac{2}{E'} \sqrt{\frac{2}{\pi h}} K_{Ic} \varphi + \frac{4\Delta\sigma}{\pi E'} \left\{ -x \ln \left| \frac{H\varphi + 2x\psi}{H\varphi - 2x\psi} \right| + \frac{H}{2} \ln \left| \frac{\varphi + \psi}{\varphi - \psi} \right| \right\}, \quad (2.34)$$

где $\varphi = (h^2 - 4x^2)^{1/2}$, $\psi = (h^2 - H^2)^{1/2}$. Предположение о равномерном распределении давления неявно подразумевает, что трещина распространяется в режиме

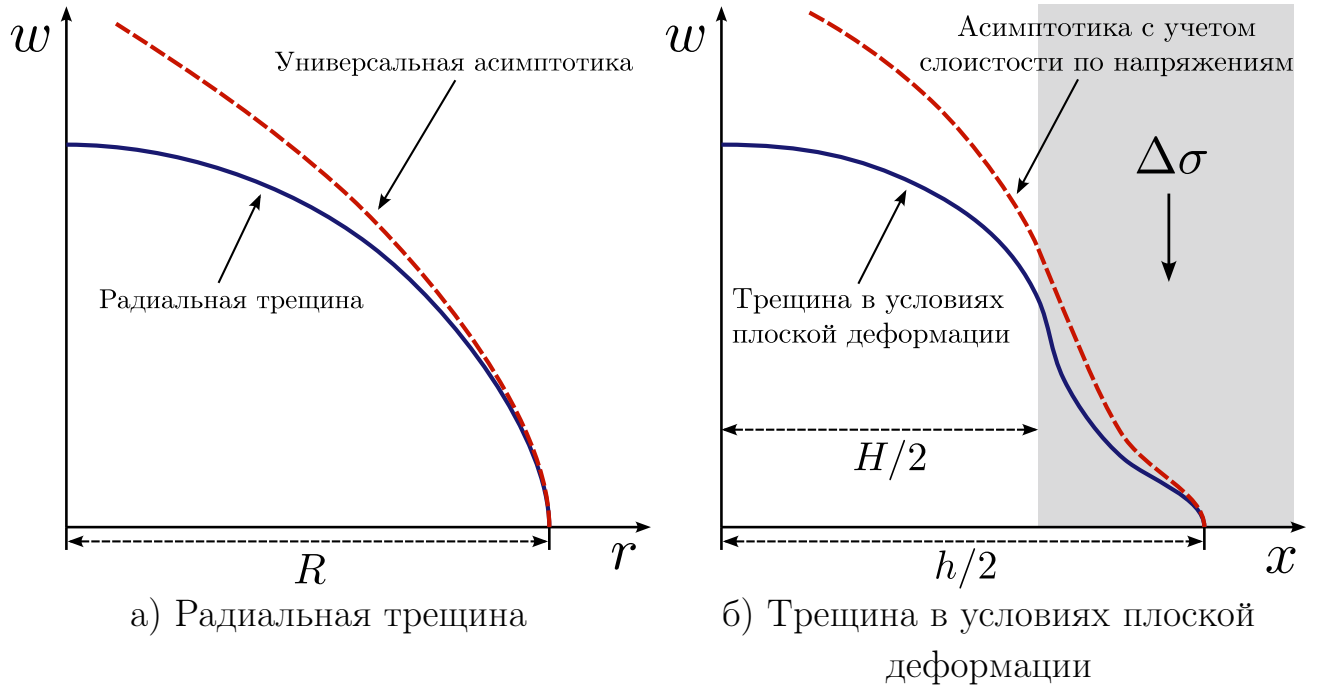


Рисунок 2.7 — Слева: схема раскрытия радиальной трещины в сравнении с универсальным асимптотическим решением (2.15). Справа: схема раскрытия трещины в условиях плоской деформации при наличии двух симметричных барьеров по сжимающим напряжениям в сравнении с асимптотическим решением, учитывающем слоистость по напряжениям. В силу симметрии показана только половина трещины

доминирующей трещиностойкости. В силу симметрии задачи рассматривается только правая половина трещины $x \geq 0$.

В случае одного барьера по сжимающим напряжениям для режима доминирующей трещиностойкости интегральное уравнение (2.18), решение с поправкой трещиностойкости (2.22) и ОДУ-аппроксимация (2.28) сводятся к одному и тому же выражению:

$$w_a(s) = \frac{K'}{E'} s^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \Delta \sigma F(s, \xi), \quad (2.35)$$

где $s = h/2 - x$ — расстояние до фронта трещины, а $\xi = (h - H)/2$ — расстояние от границы слоя до вершины трещины.

Прежде чем переходить к количественному анализу области применимости асимптотики, удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\bar{w} = \frac{E' w}{K_{Ic} H^{1/2}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{H}, \quad \bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{s} = \frac{s}{H}. \quad (2.36)$$

В этих переменных все результаты зависят только от одного безразмерного параметра, характеризующего амплитуду скачка напряжений:

$$\Delta\bar{\sigma} = \frac{\Delta\sigma H^{1/2}}{K_{Ic}}. \quad (2.37)$$

Тогда безразмерный профиль раскрытия трещины в условиях плоской деформации и безразмерное асимптотическое раскрытие принимают следующий вид:

$$\bar{w}_{ps} = \sqrt{\frac{8}{\pi\bar{h}}} \bar{\varphi} + \frac{4\Delta\bar{\sigma}}{\pi} \left\{ -\bar{x} \ln \left| \frac{\bar{\varphi} + 2\bar{x}\bar{\psi}}{\bar{\varphi} - 2\bar{x}\bar{\psi}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\bar{\varphi} + \bar{\psi}}{\bar{\varphi} - \bar{\psi}} \right| \right\}, \quad (2.38)$$

$$\bar{w}_a = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \bar{s}^{1/2} - \frac{4\Delta\bar{\sigma}}{\pi} F(\bar{s}, \bar{\xi}), \quad (2.39)$$

где $\bar{\varphi} = (\bar{h}^2 - 4\bar{x}^2)^{1/2}$, $\bar{\psi} = (\bar{h}^2 - 1)^{1/2}$, $\bar{\xi} = (\bar{h} - 1)/2$. Размер области применимости ρ_v асимптотики, учитывающей слоистость по напряжениям определяется как отношение расстояния от вершины трещины, на котором относительная погрешность $|(\bar{w}_{ps} - \bar{w}_a)/\bar{w}_{ps}|$ не превышает 5%, к полувывоте трещины $\bar{h}/2$. Например, область применимости равна 0.5, если погрешность асимптотического решения достигает 5% в середине трещины.

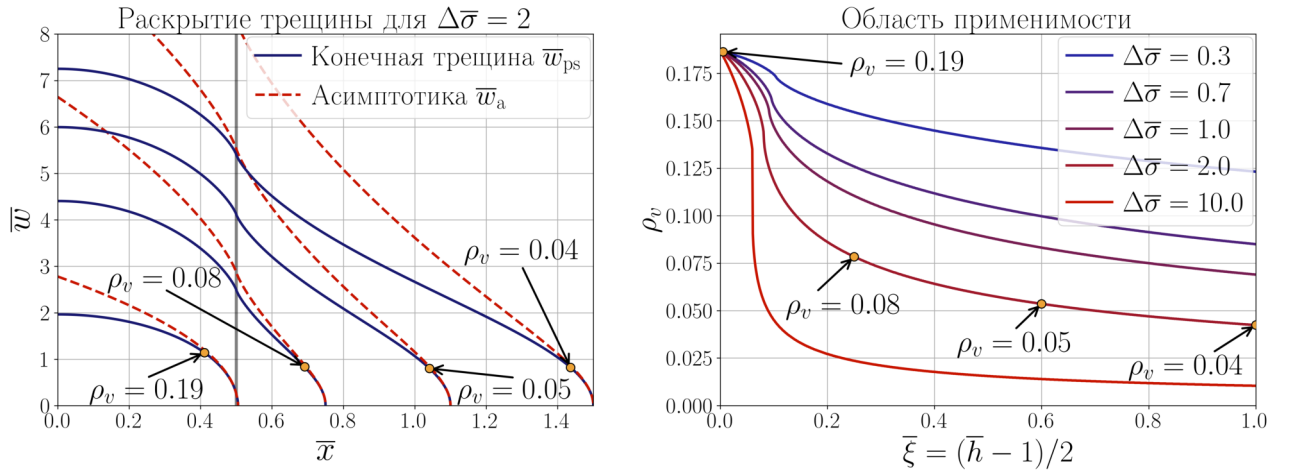


Рисунок 2.8 — Слева: сравнение решения для трещины конечной высоты (2.34) и асимптотического решения в окрестности вершины трещины (2.35) для нескольких значений высоты трещины. Желтые маркеры показывают границу области применимости асимптотики. Справа: зависимость области применимости от расстояния между вершиной трещины и границей слоя для различных значений амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$

Слева на рисунке 2.8 приведено сравнение решения для трещины конечной высоты (2.34) с асимптотическим решением в окрестности вершины

трещины (2.35) при фиксированной амплитуде скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma} = 2$. С увеличением высоты трещины погрешность между решением для трещины конечной высоты $\bar{w}_{\text{ps}}$ и асимптотикой в окрестности вершины $\bar{w}_a$ возрастает, а область применимости ρ_v существенно снижается с 19% при $\bar{h} = 1$ до 4% при $\bar{h} = 3$. Справа на рисунке 2.8 показана зависимость области применимости ρ_v от расстояния $\bar{\xi} = (\bar{h} - 1)/2$ между вершиной трещины и границей слоя для различных значений амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$. При малых амплитудах скачка область применимости слабо меняется с ростом высоты трещины. В то же время при больших амплитудах скачка напряжений область применимости ρ_v резко уменьшается по мере удаления вершины трещины от границы слоя.

Для расширения области применимости асимптотики при увеличении высоты трещины асимптотическое решение модифицируется путем введения коэффициента релаксации напряжений $\lambda(\bar{\xi})$:

$$\bar{w}_a^\lambda(\bar{s}) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \bar{s}^{1/2} - \frac{4\lambda(\bar{\xi})\Delta\bar{\sigma}}{\pi} F(\bar{s}, \bar{\xi}). \quad (2.40)$$

Далее решение (2.40) будем называть асимптотическим решением с релаксацией напряжений. Коэффициент релаксации напряжений λ определяется из условия наилучшего согласования решения для трещины конечной высоты (2.34) и асимптотического решения с релаксацией напряжений (2.40). В качестве критерия согласования используется среднеквадратичное отклонение между профилями раскрытия трещины:

$$\lambda = \arg \min_{\lambda_*} \left\{ \int_0^L \left(\bar{w}_{\text{ps}}(\bar{h}/2 - \bar{s}) - \bar{w}_a^{\lambda_*}(\bar{s}) \right)^2 d\bar{s} \right\} \quad (2.41)$$

Минимизация функционала (2.41) выполняется для различных значений безразмерной высоты трещины $\bar{h}$ и амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$. Верхний предел интегрирования L определяет размер области вблизи вершины трещины, в которой производится сравнение решений. В расчетах параметр L варьируется для моделирования различных размеров элементов расчетной сетки в симуляторе гидроразрыва пласта.

На рисунке 2.9 показан коэффициент релаксации напряжений, вычисленный по формуле (2.41), в зависимости от расстояния $\bar{\xi}$ между барьером напряжений и вершиной трещины для различных значений амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$ и размера области сравнения L . С увеличением амплитуды скачка напряжений коэффициент релаксации стремится к предельной зависимости, практически не зависящей от размера области сравнения L . Влияние

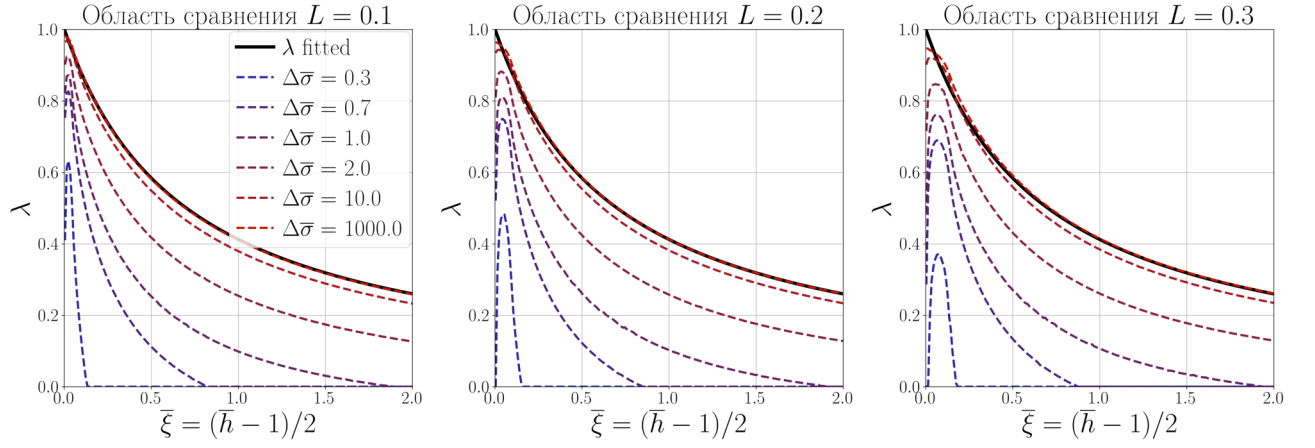


Рисунок 2.9 — Коэффициент релаксации напряжений, определяемый из условия минимизации среднеквадратичного отклонения между решением для трещины конечной высоты (2.34) и асимптотическим решением с релаксацией напряжений (2.40), для различных значений расстояния $\bar{\xi}$ между барьером напряжений и вершиной трещины, амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$ и размера области сравнения L . Сплошной черной линией показана аппроксимация (2.42) коэффициента релаксации напряжений, полученная для случая $\Delta\bar{\sigma} = 1000$

параметра L становится заметным лишь для малых значений амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$. В связи с этим для построения оптимальной аппроксимации коэффициента релаксации напряжений λ , воспроизводящей решение задачи минимизации (2.41) используется кривая, полученная при $\Delta\bar{\sigma} = 1000$. Для столь больших амплитуд скачка напряжений влияние параметра L практически отсутствует. Кроме того, именно большие скачки напряжений приводят к наиболее существенному сокращению области применимости асимптотического решения. Поэтому при построении оптимальной аппроксимации приоритет отдается корректному описанию случаев с большими значениями $\Delta\bar{\sigma}$, тогда как для меньших амплитуд возможное снижение точности является менее существенным вследствие более широкой области применимости асимптотики (см. рисунок 2.8 справа). В результате получено следующее приближение:

$$\lambda(\bar{\xi}) = \frac{0.7}{0.7 + \bar{\xi}}. \quad (2.42)$$

Полученная гиперболическая аппроксимация (2.42) показана на рисунке 2.9 сплошной черной линией. Стоит отметить, что в размерных переменных (в частности, при $H \neq 1$) коэффициент релаксации напряжений зависит от высоты продуктивного слоя следующим образом: $\lambda(\xi) = 0.7/(0.7 + \xi/H)$. Основная

трудность данного подхода заключается в том, что для произвольной конфигурации слоистого пласта высота продуктивного слоя H не является однозначно определенной величиной. Несмотря на практическую важность этой проблемы, ее подробное рассмотрение выходит за рамки настоящего раздела и будет представлено в следующей главе диссертации.

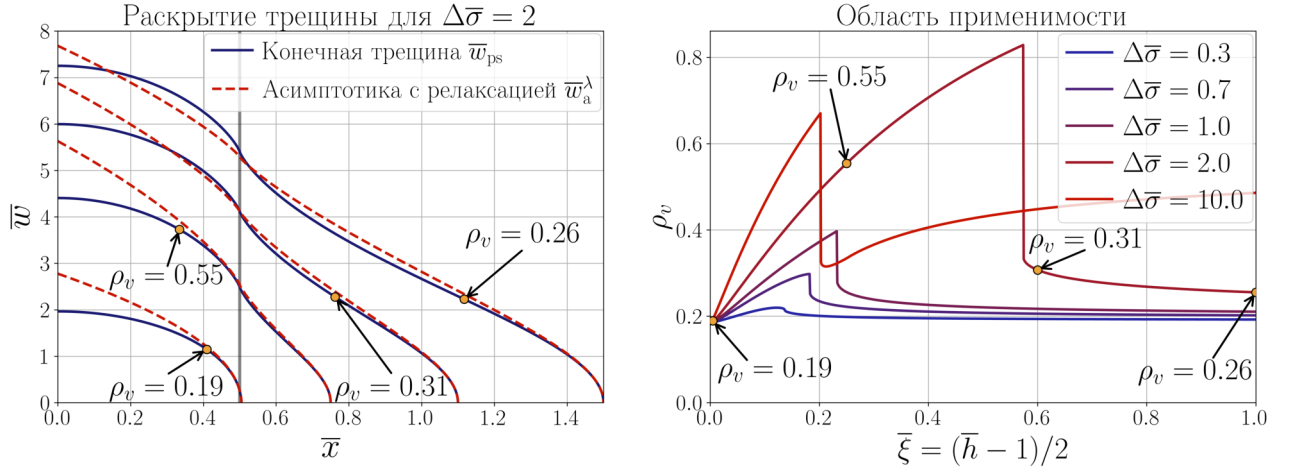


Рисунок 2.10 — Слева: сравнение решения для трещины конечной высоты (2.34) и асимптотического решения с релаксацией напряжений (2.40) в сочетании с оптимальным коэффициентом релаксации (2.42) для нескольких значений высоты трещины и амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma} = 2$. Желтыми маркерами обозначена граница области применимости асимптотического решения. Справа: зависимость области применимости асимптотического решения с релаксацией напряжений от расстояния между вершиной трещины и границей слоя для различных значений амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma}$

На рисунке 2.10 представлена область применимости асимптотического решения с релаксацией напряжений (2.40) в сочетании с оптимальным коэффициентом релаксации напряжений (2.42). На левом графике приведено сравнение решения для трещины конечной высоты (2.34) и модифицированного асимптотического решения с релаксацией напряжений (2.40) для фиксированной амплитуды скачка напряжений $\Delta\bar{\sigma} = 2$. Стоит отметить, что введение коэффициента релаксации напряжений существенно улучшает согласование асимптотического решения с решением для трещины конечной высоты по сравнению с вариантом без релаксации напряжений. На правом графике приведена область применимости модифицированного асимптотического решения с релаксацией напряжений. Для всех рассмотренных значений высоты трещины и амплитуды скачка напряжений величина области применимости не

опускается ниже 19%. Наблюдаемое увеличение области применимости с последующим резким спадом, особенно при больших значениях амплитуд скачка $\Delta\bar{\sigma}$, обусловлено немонотонным поведением относительной погрешности $|(\bar{w}_{ps} - \bar{w}_a^\lambda)/\bar{w}_{ps}|$, на основе которой оценивается область применимости. Таким образом, введение коэффициента релаксации напряжений, который фактически уменьшает эффективную амплитуду скачка напряжений, позволяет существенно расширить область применимости асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям. Благодаря этому модифицированное асимптотическое решение может использоваться в сочетании с относительно грубой расчетной сеткой без существенной потери точности, что позволяет устранить проблему “шипов”, рассмотренную в начале данной главы.

2.6 Выводы по асимптотическому решению

В данной главе была рассмотрена задача о распространении полубесконечной гидравлической трещины в проницаемой упругой среде со слоистостью по напряжениям. Показано, что широко используемое универсальное асимптотическое решение может приводить к существенным ошибкам при пересечении фронтом трещины границы слоя, поскольку влияние скачков напряжений в нем не учитывается. Для устранения данного недостатка разработан алгоритм, позволяющий учитывать как влияние слоистости по напряжениям, так и многомасштабный характер решения в окрестности вершины трещины. В частности, предложено три различных подхода к построению асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям. Эти подходы различаются вычислительными затратами, сложностью реализации и точностью аппроксимации. Первый подход основан на численном решении несингулярного интегрального уравнения. Второй подход, основанный на введении поправки к трещиностойкости, использует универсальное асимптотическое решение и концепцию эффективной трещиностойкости. Значение эффективной трещиностойкости определяется на основе асимптотики для режима доминирующей трещиностойкости, а также поправки к коэффициенту интенсивности напряжений, возникающей вследствие наличия слоев со скачками напряжений. Третий подход основан

на аппроксимации несингулярной интегральной формулировки обыкновенным дифференциальным уравнением.

Сравнение предложенных подходов показало, что решение интегрального уравнения обеспечивает наивысшую точность, однако характеризуется значительными вычислительными затратами, поскольку требует решения системы нелинейных уравнений. Основными преимуществами подхода с поправкой трещиностойкости являются простота реализации и высокая вычислительная эффективность. Однако с ростом влияния вязкой диссипации точность данного подхода в условиях слоистости по напряжениям существенно снижается. ОДУ-аппроксимация интегрального уравнения позволяет учитывать влияние скачков напряжений в условиях существенного влияния вязкой диссипации и утечек жидкости в пласт. При этом данный подход значительно эффективнее с вычислительной точки зрения по сравнению с решением интегрального уравнения. Таким образом, именно ОДУ-аппроксимация представляется наиболее перспективным вариантом для использования в алгоритмах отслеживания фронта трещины.

Кроме того, дополнительно выполнена оценка размера области применимости асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям для случая гидравлической трещины в условиях плоской деформации при постоянном внутреннем давлении. Полученные результаты показывают, что область применимости такого асимптотического решения существенно сокращается по мере удаления фронта трещины от границы слоя. Для расширения области применимости введен коэффициент релаксации напряжений, который эффективно уменьшает амплитуду скачка напряжений. Представленные в данной главе модификации позволяют повысить точность расчета задачи о пересечении слоев в современных симуляторах гидроразрыва пласта, использующих асимптотические решения в окрестности вершины трещины, а также устранить численные артефакты типа “шипов”, снижающих общую точность отслеживания фронта трещины.

Глава 3. Моделирование гидравлического разрыва пласта на основе модели planar 3D ILSA

Возможность корректного моделирования распространения гидравлической трещины имеет ключевое значение для проектирования и оптимизации операций гидроразрыва пласта. Среди существующих подходов к моделированию особый интерес представляют плоские трехмерные модели (planar 3D), которые позволяют учитывать упругие эффекты в трехмерной постановке задачи, сохраняя при этом приемлемую вычислительную эффективность благодаря предположению о плоской геометрии трещины. Одним из подходов данного класса является алгоритм ILSA (Implicit Level Set Algorithm), позволяющий достаточно точно отслеживать положение фронта трещины даже на сравнительно грубых расчетных сетках. Такая возможность достигается за счет использования универсального асимптотического решения в качестве условия распространения трещины. Настоящая глава посвящена развитию данного подхода применительно к двум практически важным ограничениям его стандартной реализации.

Первое ограничение связано со слоистой структурой горных пород. На практике коллекторы редко являются однородными и обычно состоят из слоев с существенно различающимися свойствами, которые оказывают определяющее влияние на распространение гидравлической трещины. При этом использование универсального асимптотического решения вблизи границ слоев может приводить к заметному снижению точности расчета и, как следствие, к высокой чувствительности результатов моделирования к размеру расчетной сетки. Одним из способов уменьшения этой погрешности является измельчение сетки, однако такой подход существенно увеличивает вычислительные затраты и во многом нивелирует преимущества применения асимптотического условия распространения трещины. Более эффективной альтернативой является использование асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям, которое было разработано в главе 2. Однако его применение в рамках алгоритма ILSA требует решения ряда дополнительных задач. В частности, необходимо обобщить процедуры определения положения фронта трещины и вычисления объема жидкости в окрестности фронта на случай произвольного числа горизонтальных слоев. Кроме того, необходимо исследовать

область применимости данного асимптотического решения для плоских трещин конечных размеров, поскольку исходно оно было получено для полубесконечной трещины. Для расширения области применимости в работе рассматривается модифицированный коэффициент релаксации напряжений, который не зависит от геометрии слоев.

Второе ограничение связано с моделированием многостадийного гидроразрыва пласта, при котором вдоль одной скважины одновременно распространяются несколько гидравлических трещин. В этом случае необходимо учитывать как механическое взаимодействие трещин, так и распределение закачиваемой жидкости между трещинами. Дополнительные сложности возникают при рассмотрении наклонных скважин, поскольку смещение точек закачки приводит к потере симметрии задачи и существенно влияет на геометрию трещин. Одной из основных трудностей при моделировании такой системы является учет упругого взаимодействия между трещинами. Для сохранения вычислительной эффективности алгоритма ILSA в настоящей работе используется упрощенное описание этого взаимодействия, основанное на пренебрежении касательными разрывами смещений и явном вычислении дополнительного поля напряжений по раскрытию трещин на предыдущем шаге по времени. Корректность такого подхода дополнительно исследуется в данной главе, где приводится аналитическая оценка влияния отброшенных слагаемых.

Таким образом, настоящая глава посвящена развитию модели плоской трещины *planar 3D* на основе алгоритма ILSA для задач распространения гидравлических трещин в слоистых по напряжениям пластах, а также для задач одновременного распространения нескольких трещин вдоль наклонной скважины. Точность разработанного алгоритма оценивается путем сравнения с аналитическими эталонными решениями и экспериментальными данными, а его возможности демонстрируются на примере различных конфигураций слоев и углов наклона скважины.

3.1 Математическая модель одиночной плоской трещины гидроразрыва

Рассматривается задача о распространении плоской трещины гидроразрыва пласта в трехмерной постановке в плоскости (x, y) вследствие закачки несжимаемой вязкой жидкости с объемным расходом $Q(t)$ через точечный источник, расположенный в начале координат, см. рисунок 3.1. При построении математической модели используются следующие основные предположения:

1. Поле минимальных горизонтальных сжимающих напряжений в пласте $\sigma_h(y)$ ориентировано перпендикулярно плоскости трещины.
2. Предполагается, что фронт жидкости совпадает с фронтом трещины, поскольку отставание (лаг) жидкости пренебрежимо мало для глубин, характерных для промысловых операций гидравлического разрыва пласта [24; 170].
3. Течение жидкости описывается в рамках теории смазки, при этом жидкость считается несжимаемой и ньютоновской.
4. Утечка жидкости в окружающую породу описывается моделью Картера [163], предполагающей одномерную фильтрацию в направлении, перпендикулярном плоскости трещины, и учитывающей образование фильтрационной корки.
5. Влияние неоднородности гидростатического давления в плоскости трещины для простоты не учитывается.
6. Упругие характеристики окружающей породы считаются однородными, при этом распределение минимальных сжимающих напряжений может испытывать разрывы на границах различных слоев.
7. Распространение трещины рассматривается в рамках линейной упругой механики разрушения (ЛУМР) [162]. Предполагается, что распространение трещины происходит только по механизму нормального отрыва (I мода).
8. Другие параметры, такие как трещиностойкость и коэффициент утечки, для простоты также предполагаются однородными.

Подробное обсуждение перечисленных выше предположений и границ их применимости приведено в работах [12; 28; 171; 172]. Для решения задачи требуется определить область, занимаемую трещиной $\mathcal{A}(t)$, границу этой области или

фронт трещины $\mathcal{C}(t)$, раскрытие трещины w , а также давление жидкости p как функции пространственных координат (x, y) и времени закачки t .

Для сокращения записи уравнений вводятся следующие приведенные параметры:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{\text{Ic}}, \quad C' = 2C_L, \quad \mu' = 12\mu, \quad (3.1)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, K_{Ic} — трещиностойкость породы, C_L — коэффициент утечки по модели Картера, а μ — динамическая вязкость жидкости. Данное масштабирование соответствует использованному во второй главе диссертации при рассмотрении задачи о полубесконечной гидравлической трещине.

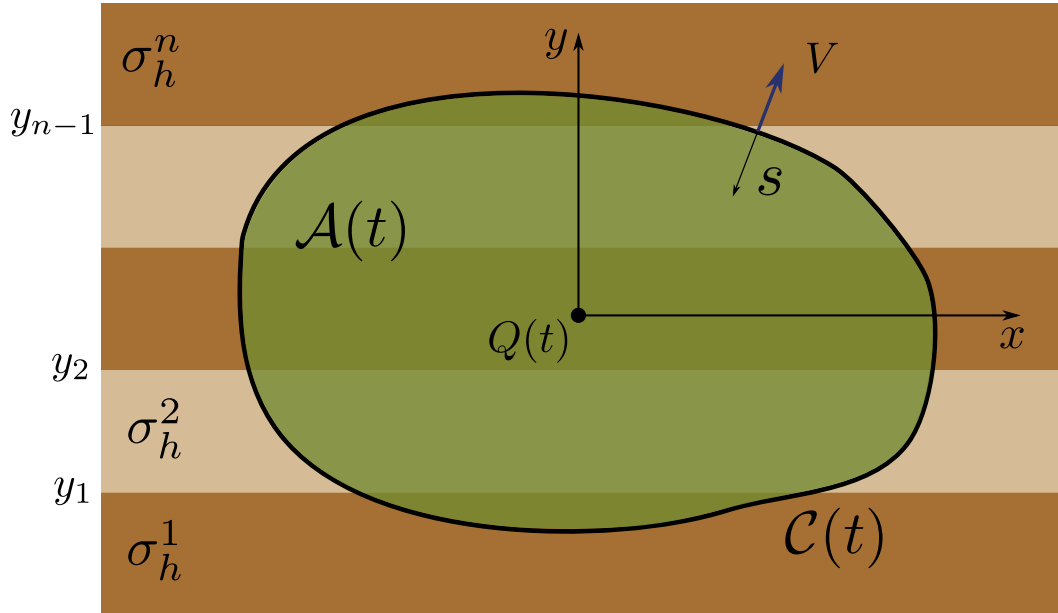


Рисунок 3.1 — Схема плоской трещины гидроразрыва, распространяющейся в слоистой среде. Область, занимаемая трещиной $\mathcal{A}(t)$, ограничена фронтом $\mathcal{C}(t)$. Точечный источник с объемным расходом $Q(t)$ расположен в начале координат. Расстояние от произвольной точки внутри контура $\mathcal{C}(t)$ до фронта трещины обозначается как s , а нормальная скорость фронта обозначается как V

3.1.1 Уравнение упругости

Уравнение упругости связывает раскрытие плоской трещины w с нормальной составляющей T_n вектора поверхностной нагрузки, приложенной к

ее берегам. В рамках метода разрывных смещений [54; 173] для одиночной плоской трещины данная зависимость записывается в виде гиперсингулярного интегрального уравнения

$$T_n(x, y, t) = \sigma_h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}}. \quad (3.2)$$

Здесь $\mathcal{A}(t)$ обозначает область, занимаемую трещиной и ограниченную фронтом $\mathcal{C}(t)$, а σ_h — поле минимальных горизонтальных сжимающих напряжений в породе. Для рассматриваемой слоистой среды предполагается, что напряжения зависят только от вертикальной координаты y . Пусть пласт состоит из n слоев с различными значениями сжимающих напряжений, тогда функция $\sigma_h(y)$ может быть представлена в виде кусочно-постоянной зависимости

$$\sigma_h(y) = \sigma_h^1(1 - \mathcal{H}(y - y_1)) + \sum_{i=2}^{n-1} \sigma_h^i(\mathcal{H}(y - y_{i-1}) - \mathcal{H}(y - y_i)) + \sigma_h^n \mathcal{H}(y - y_{n-1}), \quad (3.3)$$

где $\mathcal{H}(\cdot)$ — функция Хевисайда, а σ_h^i — сжимающее напряжение в i -м слое, занимающем интервал (y_{i-1}, y_i) (см. рисунок 3.1).

Среди возможных сценариев эволюции трещины следует выделить ее частичное или полное закрытие. Такая ситуация может возникать, например, после остановки закачки или при уменьшении расхода жидкости. Для корректного описания подобных режимов на раскрытие трещины необходимо наложить дополнительное ограничение, исключающее его падение ниже некоторой минимальной величины $w_{\min}$ (см., например, [13])

$$w(x, y, t) \geq w_{\min}(x, y, t). \quad (3.4)$$

В точках, где трещина остается раскрытой, то есть $w(x, y, t) > w_{\min}(x, y, t)$, нормальная составляющая вектора поверхностных усилий T_n , действующих на берега трещины, совпадает с давлением жидкости p внутри трещины. В областях смыкания или контакта берегов трещины величина T_n дополнительно учитывает контактное напряжение. Несмотря на то, что соответствующий алгоритм допускает произвольное распределение функции $w_{\min}$, в настоящей работе рассматривается случай отсутствия проппанта и шероховатости берегов трещины, для которого можно считать $w_{\min} = 0$.

3.1.2 Течение жидкости

В предположении ламинарного течения ньютоновской жидкости вектор потока $\mathbf{q}$ внутри трещины описывается с помощью закона Пуазейля

$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p, \quad (3.5)$$

где p — давление жидкости. Из условия несжимаемости жидкости следует уравнение неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q(t)\delta(x, y) - \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x, y)}}, \quad (3.6)$$

где первое слагаемое в правой части соответствует точечному источнику, а второе слагаемое описывает утечку жидкости в окружающую породу по модели Картера [163]. Величина $t_0(x, y)$ обозначает момент времени, в который фронт трещины достигает точки с координатами (x, y) . Подставляя закон Пуазейля (3.5) в уравнение неразрывности (3.6), получим уравнение смазки

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p \right) = Q(t)\delta(x, y) - \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x, y)}}. \quad (3.7)$$

Полученное уравнение является классическим в моделях гидроразрыва пласта и описывает эволюцию раскрытия трещины во времени.

3.1.3 Условия на фронте трещины

На фронте трещины $\mathcal{C}(t)$ задаются следующие граничные условия: нулевое раскрытие трещины $w = 0$, критерий распространения $K_I = K_{Ic}$ и условие отсутствия потока через фронт $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к фронту трещины в плоскости (x, y) . Условие отсутствия нормального потока на фронте трещины может быть представлено в следующем виде:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial s} = 0. \quad (3.8)$$

Согласно классическому решению линейной упругой механики разрушения для трещины нормального отрыва (I мода) [162; 174], раскрытие в окрестности фронта соответствует асимптотическому закону

$$w \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{K'}{E'} s^{1/2}, \quad (3.9)$$

где s — расстояние от рассматриваемой точки до фронта трещины $\mathcal{C}(t)$.

Предполагается, что распространение трещины происходит в условиях квазистатического равновесия, поэтому нормальная скорость фронта удовлетворяет условию $V > 0$. Если распространение трещины отсутствует ($V = 0$), то в выражении (3.9) вместо приведенной трещиностойкости породы K' необходимо использовать фактическое значение приведенного коэффициента интенсивности напряжений K'_I .

Однако непосредственное использование классической асимптотики (3.9) в численных схемах может быть сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Область применимости этого решения ограничена крайне малой окрестностью вершины трещины [23], для разрешения которой требуется избыточное измельчение расчетной сетки. Чтобы избежать чрезмерных вычислительных затрат вместо классического асимптотического соотношения (3.9) в данной работе используется более общее асимптотическое решение $w_a(s)$, обладающим расширенной областью применимости:

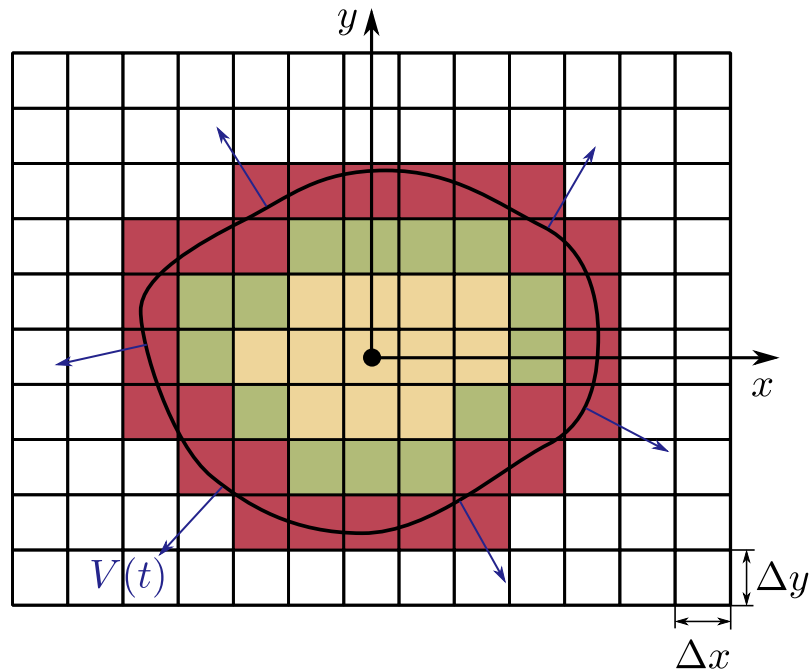
$$w(s) \approx w_a(s), \quad s \ll L, \quad (3.10)$$

где L — характерный размер трещины и $w_a(s)$ — асимптотическое решение в окрестности фронта трещины, подробно рассмотренное в главе 2. В указанной главе приведены как классическое универсальное асимптотическое решение для однородной среды, так и его модификация, учитывающая наличие слоев с различными сжимающими напряжениями. В отличие от асимптотики линейной упругой механики разрушения, данное решение сохраняет высокую точность в более широкой области вблизи фронта и позволяет корректно описывать поведение раскрытия трещины на масштабах, характерных для используемой расчетной сетки [23; 27; 61]. При этом в пределе $s \rightarrow 0$ оно переходит в классическое решение линейной упругой механики разрушения $w_a(s) \rightarrow (K'/E')s^{1/2}$.

3.2 Численный алгоритм

3.2.1 Дискретизация определяющих уравнений

Плоскость распространения гидравлической трещины покрывается фиксированной прямоугольной сеткой, как показано на рисунке 3.2. Центр ячейки с индексами (i, j) находится в точке с координатами (x_i, y_j) , а ее размеры равны Δx и Δy . Все элементы сетки разделяются на три типа: внутренние, концевые и опорные [12; 28; 92; 93]. Внутренние элементы полностью заполнены жидкостью и целиком лежат внутри области трещины $\mathcal{A}(t)$. Концевые элементы пересекаются фронтом трещины и заполнены жидкостью лишь частично. Опорные элементы представляют собой подмножество внутренних элементов, имеющих по крайней мере один соседний концевой элемент. Они используются для отслеживания положения движущегося фронта трещины с помощью асимптотического решения в его окрестности.



■ концевые ■ опорные ■ ∪ ■ внутренние

Рисунок 3.2 — Дискретизация плоской гидравлической трещины с использованием фиксированной прямоугольной сетки и классификация элементов на внутренние, концевые и опорные. Черная линия обозначает фронт трещины, стрелки схематично указывают направление его распространения

Для построения дискретизации уравнений используется кусочно-постоянная аппроксимация раскрытия трещины $w(x, y, t)$ и давления жидкости $p(x, y, t)$:

$$w(x, y, t) = \sum_{i,j} w_{i,j}(t) \mathcal{H}_{i,j}(x, y), \quad p(x, y, t) = \sum_{i,j} p_{i,j}(t) \mathcal{H}_{i,j}(x, y). \quad (3.11)$$

Предполагается, что к моменту времени $t - \Delta t$ раскрытие трещины w , давление жидкости p и положение фронта трещины уже определены.

Используя метод разрывных смещений [54] и кусочно-постоянную аппроксимацию раскрытия трещины дискретная форма уравнения упругости (3.2) для случая отсутствия контакта берегов трещины ($w(x, y, t) > w_{\min}(x, y, t)$ и $T_n = p$) принимает следующий вид:

$$p_{i,j}(t) = \sigma_{hi,j} + \sum_{k,l} C_{i,j;k,l} w_{k,l}(t), \quad (3.12)$$

где $C_{i,j;k,l}$ — коэффициенты матрицы упругости, описывающие влияние элемента (k, l) на элемент (i, j) . Для случая однородной линейно-упругой среды коэффициенты матрицы упругости можно вычислить следующим образом [12]:

$$C_{i,j;k,l} = -\frac{E'}{8\pi} \left[\frac{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_j - y)^2}}{(x_i - x)(y_j - y)} \right]_{x=x_k-\Delta x/2, y=y_l-\Delta y/2}^{x=x_k+\Delta x/2, y=y_l+\Delta y/2}, \quad (3.13)$$

где $[f]_{x=x_1, y=y_1}^{x=x_2, y=y_2} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1)$.

Дискретизация уравнения смазки (3.7) выполняется с помощью метода конечных объемов, аналогично работе [28]. При использовании неявной схемы Эйлера для интегрирования по времени на интервале от $t - \Delta t$ до t система уравнений принимает вид:

$$w_{i,j}(t) - w_{i,j}(t - \Delta t) = \Delta t [Ap]_{i,j} + \Delta t Q_{i,j} - \Delta \mathcal{L}_{i,j}, \quad (3.14)$$

где слагаемое $Q_{i,j}$ отвечает за точечный источник, а $\Delta \mathcal{L}_{i,j}$ описывает утечки жидкости для элемента (i, j) за интервал времени $[t - \Delta t, t]$. Для внутренних элементов слагаемое утечек вычисляется как

$$\Delta \mathcal{L}_{i,j} = 2C' \left(\sqrt{t - t_{0,i,j}} - \sqrt{t - \Delta t - t_{0,i,j}} \right), \quad (3.15)$$

где $t_{0,i,j}$ — момент времени, в который фронт трещины пересекал центр внутреннего элемента с координатами (x_i, y_j) . Потоки жидкости через грани элементов

вычисляются с помощью схемы центральных разностей:

$$[Ap]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \left[M_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - M_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - M_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right], \quad (3.16)$$

где соответствующие подвижности жидкости на гранях элементов определяются как

$$M_{i\pm\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left(\frac{w_{i\pm 1,j}^3}{\mu'_{i\pm 1,j}} + \frac{w_{i,j}^3}{\mu'_{i,j}} \right). \quad (3.17)$$

Для использования асимптотического решения в алгоритме отслеживания фронта трещины удобно разделить переменные на величины, относящиеся к внутренним и концевым элементам. В последующих выражениях верхний индекс “ c ” (channel) обозначает переменные внутренних элементов, а верхний индекс “ t ” (tip) — переменные концевых элементов.

Матрица упругости $\mathbb{C}$ вычисляется с помощью выражения (3.13), а матрица потоков в уравнении (3.16) определяется как $\mathbb{A} = A(\mathbf{w})$, где $\mathbf{w}$ обозначает полный вектор значений раскрытия трещины, включающий значения как во внутренних, так и в концевых элементах. Раскрытие трещины в концевых элементах $\mathbf{w}^t$ находится путем интегрирования асимптотического решения, и, таким образом, основной неизвестной в концевых элементах является вектор значений давления жидкости $\mathbf{p}^t$. Во внутренних элементах вектор значений давления жидкости $\mathbf{p}^c$ определяется из уравнения упругости (3.12), а неизвестным является вектор значений раскрытия трещины $\mathbf{w}^c$. Подстановка выражения (3.12) для внутренних элементов в уравнение (3.14) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} - \Delta t \mathbb{A}^{cc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{ct} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{tc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^c \\ \mathbf{p}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^c \\ \mathbf{R}^t - \mathbf{w}^t \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица, двойные верхние индексы указывают на соответствующие подматрицы для внутренних (c) и концевых (t) элементов, а правая часть определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}^J = \mathbf{w}_0^J + \Delta t (\mathbb{A}^{Jc} \mathbb{C}^{ct} \mathbf{w}^t + \mathbf{Q}^J + \Delta \boldsymbol{\sigma}^J) - \Delta \mathcal{L}^J, \quad J = c, t. \quad (3.19)$$

Вклад слоев с различными сжимающими напряжениями в данном выражении вычисляется как $\Delta \boldsymbol{\sigma}^J = \mathbb{A}^{Jc} \boldsymbol{\sigma}_h^c + \mathbb{A}^{Jt} \boldsymbol{\sigma}_h^t$. Вектор $\mathbf{w}_0$ обозначает известное раскрытие трещины с предыдущего временного шага $t - \Delta t$. Слагаемое утечек для внутренних элементов $\Delta \mathcal{L}^c$ вычисляется с помощью выражения (3.15).

Из уравнений (3.18), (3.19) следует, что для замыкания системы необходимо определить значения раскрытия $\mathbf{w}^t$ и объема утечек $\Delta\mathcal{L}^t$ в концевых элементах, вычисление которых связано с динамикой фронта трещины. Способ их определения рассматривается в следующих разделах. После вычисления $\mathbf{w}^t$ и $\Delta\mathcal{L}^t$ система (3.18) может быть решена относительно $\mathbf{w}^c$ и $\mathbf{p}^t$ с использованием метода простой итерации или метода Ньютона. Эффективные предобуславливатели для решения соответствующей системы линейных уравнений описаны в работах [175; 176].

Стоит отметить, что матрица упругости $\mathbb{C}$ является полностью заполненной (плотной), в то время как матрица потоков $\mathbb{A}$ — разреженная. Система (3.18) является нелинейной, поскольку матрица $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{w})$ зависит от текущего решения. Важно также отметить, что система уравнений (3.18) применима только для случая отсутствия контакта берегов трещины, т.е. при $w_{i,j} > w_{\min i,j}$ и $T_n = p$.

3.2.2 Алгоритм учета контакта берегов трещины

Если в элементе с индексами (i, j) возникает контакт берегов трещины, то выполняются условия ограничения на раскрытие трещины:

$$w_{i,j} = w_{\min i,j}, \quad T_n \neq p. \quad (3.20)$$

Раскрытие в таком элементе становится известным и равным заданной минимальной величине $w_{\min i,j}$. Соответственно, нормальная составляющая вектора поверхностной нагрузки на берегах трещины $T_{ni,j}$, представляющая контактное напряжение, становится неизвестной величиной. Здесь можно провести аналогию с концевыми элементами, в которых раскрытие также является заданным и определяется с использованием асимптотического решения. Аналогичным образом могут быть обработаны и элементы, находящиеся в контакте, поскольку раскрытие в них задается контактным условием (3.20).

Таким образом, помимо внутренних и концевых элементов необходимо ввести еще одну группу элементов, соответствующую ячейкам с активным ограничением (3.20). Величины, относящиеся к контактным элементам, далее

обозначаются верхним индексом “ d ” (deactivated). С учетом наличия контактных элементов система уравнений (3.18) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} - \Delta t \mathbb{A}^{cc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{ct} & -\Delta t \mathbb{A}^{cd} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{tc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{tt} & -\Delta t \mathbb{A}^{td} \\ -\Delta t \mathbb{A}^{dc} \mathbb{C}^{cc} & -\Delta t \mathbb{A}^{dt} & -\Delta t \mathbb{A}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^c \\ \mathbf{p}^t \\ \mathbf{T}_n^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}^c \\ \widetilde{\mathbf{R}}^t - \mathbf{w}^t \\ \widetilde{\mathbf{R}}^d - \mathbf{w}_{\min}^d \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

где правая часть определяется выражением

$$\widetilde{\mathbf{R}}^J = \mathbf{R}^J + \Delta t \mathbb{A}^{Jc} \mathbb{C}^{cd} \mathbf{w}_{\min}^d, \quad J = c, t, d. \quad (3.22)$$

Предложенный подход позволяет учитывать смыкание берегов трещины путем замены неизвестного раскрытия на неизвестное контактное напряжение в элементах с активным ограничением (3.20). Таким образом, при возникновении контакта соответствующий элемент переводится из группы внутренних элементов (“ c ”) в группу контактных элементов (“ d ”) без введения дополнительных степеней свободы. В отличие от метода штрафа, такой подход обеспечивает точное выполнение условия контакта, а число неизвестных и размерность системы уравнений остаются неизменными.

3.2.3 Определение положения фронта трещины

Роль асимптотического решения в алгоритме planar 3D ILSA удобно проиллюстрировать на одномерном примере. На рисунке 3.3 желтым цветом обозначены внутренние элементы, зеленым — опорные, а красным — концевые элементы. Асимптотическое решение в алгоритме ILSA решает две взаимосвязанные задачи. Во-первых, по известному раскрытию w^s в опорном элементе с помощью универсального асимптотического решения (2.15) определяется расстояние до фронта трещины, что позволяет определить его положение (см. рисунок 3.3а). Во-вторых, если положение фронта уже известно, то асимптотическое решение используется для вычисления среднего раскрытия в концевых элементах. Для этого асимптотическое раскрытие интегрируется по части концевого элемента, занятой жидкостью, после чего полученный объем делится на площадь элемента (см. рисунок 3.3б). Таким образом, асимптотическое решение обеспечивает взаимосвязь между положением фронта трещины и дискретными

величинами, определяемыми на расчетной сетке: по значениям раскрытия в опорных элементах восстанавливается положение фронта, а по известному положению фронта вычисляются раскрытия в концевых элементах. Именно эта идея лежит в основе алгоритма ILSA.

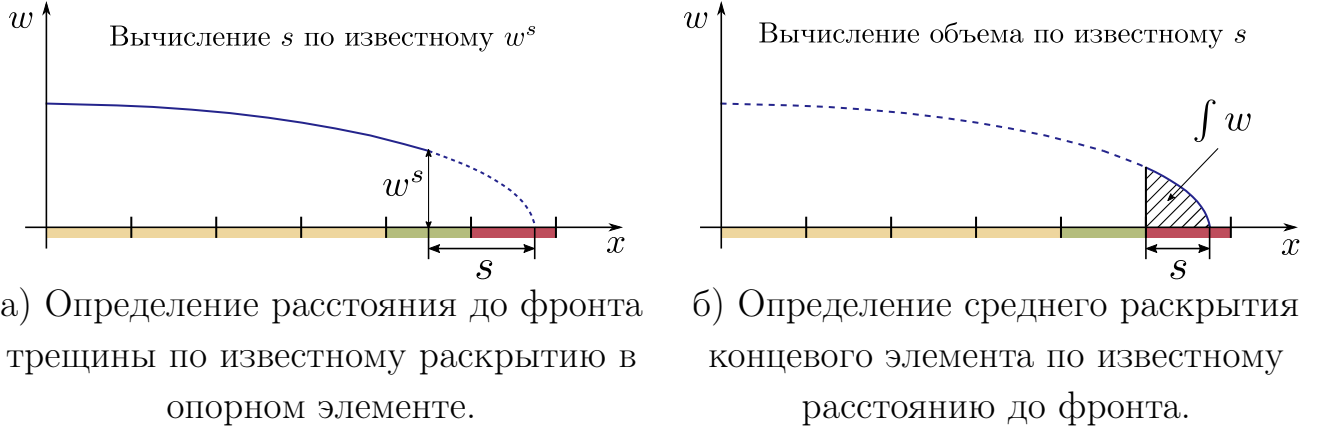


Рисунок 3.3 — Одномерный пример использования универсальной асимптотики в окрестности фронта трещины для определения расстояния до кончика и раскрытия в концевых элементах. Желтым цветом обозначены внутренние элементы, зеленым — опорные, а красным — концевые элементы. Синяя кривая схематично изображает профиль раскрытия трещины

Для определения положения движущегося фронта трещины предполагается, что в области между опорными элементами и фронтом трещины раскрытие подчиняется универсальному асимптотическому решению (2.15). В этом случае после вычисления пробных значений раскрытия w_i^s в опорных элементах, расстояние s_i от соответствующего опорного элемента до фронта трещины может быть найдено с помощью решения следующего алгебраического уравнения:

$$\frac{s_i^2 V_i \mu'}{E' (w_i^s)^3} = g_\delta \left(\frac{K' s_i^{1/2}}{E' w_i^s}, \frac{2 s_i^{1/2} C'}{w_i^s V_i^{1/2}} \right), \quad V_i = \frac{s_i - s_{i,0}}{\Delta t}, \quad (3.23)$$

где $s_{i,0}$, s_i — расстояния от центра i -го опорного элемента до фронта трещины на предыдущем и текущем шагах по времени, соответственно. При распространении фронта трещины уравнение (3.23) решается численно относительно s_i с помощью метода Ньютона. Если фронт трещины не распространяется, то функция g_δ обращается в ноль при $K' s_i^{1/2} / (E' w_i^s) > 1$, что, в свою очередь, приводит к $V_i = 0$ и $s_i = s_{i,0}$.

Для определения положения фронта трещины вводится функция ориентированного расстояния $\mathcal{T}(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

- $\mathcal{T}(x, y) < 0$ для всех точек (x, y) , расположенных внутри трещины.
- $\mathcal{T}(x, y) > 0$ для всех точек (x, y) , расположенных вне трещины.

Тогда положение фронта трещины определяется нулевой линией уровня функции $\mathcal{T}(x, y)$, то есть условием $\mathcal{T}(x, y) = 0$. Полученные из уравнения (3.23) значения расстояний s_i от центров опорных элементов до фронта трещины используются в качестве исходных данных для построения функции ориентированного расстояния [28]:

$$\mathcal{T}(x_i, y_i) = -s_i, \quad (3.24)$$

где (x_i, y_i) — координаты центров опорных элементов.

Для восстановления функции ориентированного расстояния $\mathcal{T}$ в узкой окрестности фронта, содержащей все концевые элементы, решается уравнение эйконала

$$\|\nabla \mathcal{T}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}\right)^2} = 1. \quad (3.25)$$

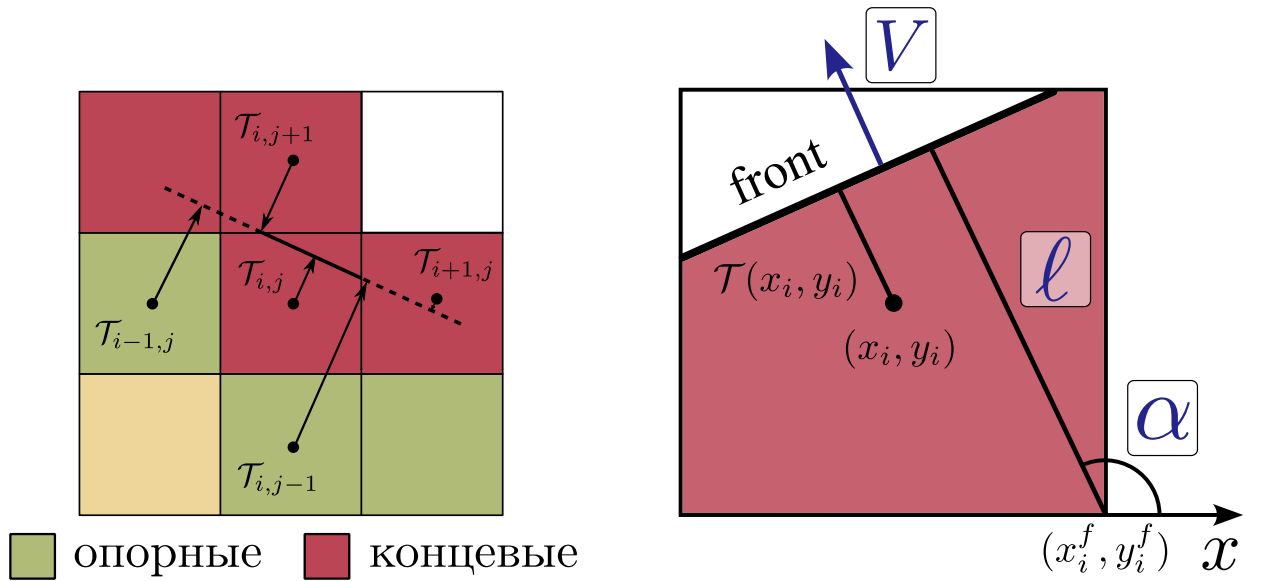


Рисунок 3.4 — Слева: решение уравнения эйконала для определения значений функции ориентированного расстояния в окрестности фронта трещины. Справа: кусочно-линейная аппроксимация фронта трещины в концевых элементах. Линейный сегмент определяется расстоянием ℓ от наиболее удаленного от фронта угла элемента и углом наклона α относительно оси x

На рисунке 3.4a схематично показаны значения функции ориентированного расстояния $\mathcal{T}$ в центрах элементов относительно прямолинейного участка

фронта трещины. Для дискретизации уравнения эйконала (3.25) используется противопоточная конечно-разностная схема первого порядка [177]

$$\max \left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i+1,j}}{\Delta x}, 0 \right)^2 + \max \left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j-1}}{\Delta y}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j+1}}{\Delta y}, 0 \right)^2 = 1. \quad (3.26)$$

Конечно-разностная схема (3.26) решается методом быстрой прогонки (Fast Marching Method, FMM) [177; 178]. Использование противопоточной аппроксимации приводит к тому, что значение функции ориентированного расстояния в рассматриваемом элементе определяется через уже известные значения в соседних элементах с меньшими значениями $\mathcal{T}$. Благодаря такой структуре вычисления могут выполняться последовательно в порядке возрастания функции ориентированного расстояния, что лежит в основе метода FMM. Эффективные реализации данного алгоритма обычно основаны на использовании структуры данных “бинарная куча” (binary heap). Более подробно вопросы реализации метода быстрой прогонки рассмотрены в работе [179].

В рамках подхода ILSA участок фронта внутри конечного элемента аппроксимируется прямой линией, как показано на рисунке 3.46. Положение этой прямой определяется расстоянием ℓ от наиболее удаленного от фронта угла элемента и углом наклона α относительно оси x . Поскольку фронт трещины соответствует нулевой линии уровня функции ориентированного расстояния $\mathcal{T}(x, y)$, его локальная ориентация определяется градиентом $\nabla \mathcal{T}$. Подробное описание процедуры вычисления градиента приведено в работе [180]. Тогда участок фронта в конечном элементе может быть представлен уравнением прямой со следующими значениями коэффициентов:

$$ax + by + c = 0, \quad a = \cos \alpha_{\mathcal{T}}, \quad b = \sin \alpha_{\mathcal{T}}, \quad c = \mathcal{T} - ax_i - by_i, \quad (3.27)$$

где (x_i, y_i) — координаты центра конечного элемента, а $\alpha_{\mathcal{T}}$ — угол между вектором $\nabla \mathcal{T}$ и осью x . Пусть (x_i^k, y_i^k) , $k = 1, \dots, 4$, обозначают координаты углов конечного элемента. Тогда наиболее удаленный от фронта угол определяется как

$$(x_i^f, y_i^f) = \arg \min_{(x_i^k, y_i^k)} (ax_i^k + by_i^k + c). \quad (3.28)$$

Ориентация фронта α , расстояние до него ℓ и нормальная скорость V определяются следующим образом

$$\alpha = \alpha_{\mathcal{T}}, \quad \ell = \left| ax_i^f + by_i^f + c \right|, \quad V = \frac{\mathcal{T}(x_i, y_i, t - \Delta t) - \mathcal{T}(x_i, y_i, t)}{\Delta t}. \quad (3.29)$$

Следует отметить, что значения скорости V , определенные описанным выше способом, могут отличаться от значений скорости распространения фронта, вычисленных с помощью уравнения (3.23).

3.2.4 Определение объема жидкости в концевых элементах

В методе разрывных смещений раскрытие в концевых элементах $\mathbf{w}^t$ определяется как среднее по элементу значение, соответствующее объему содержащейся в нем жидкости. Поэтому для вычисления $\mathbf{w}^t$ необходимо определить объем жидкости в каждом концевом элементе. После определения положения фронта ℓ , его ориентации α и нормальной скорости распространения V с использованием описанного выше алгоритма можно вычислить объем жидкости, соответствующий асимптотическому решению в окрестности вершины трещины [12].

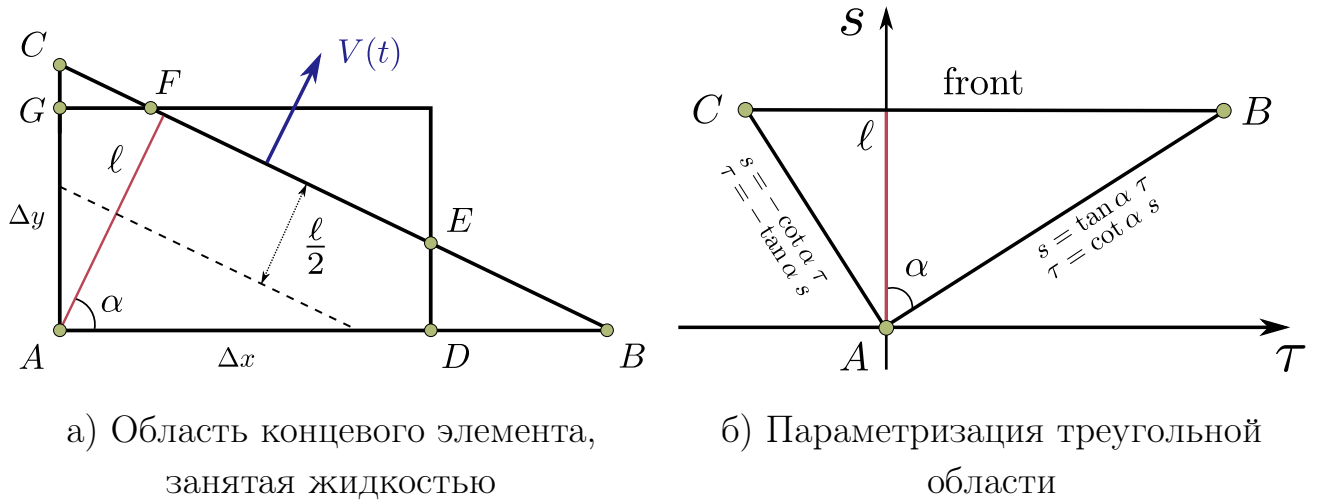


Рисунок 3.5 — Слева: схематичное изображение процедуры интегрирования асимптотического решения по многоугольной области $ADEFG$ концевого элемента, занятой жидкостью. Объем жидкости в этой области выражается через объемы в треугольных областях. Справа: параметризация треугольной области для интегрирования асимптотического решения для раскрытия трещины в окрестности фронта

Как показано на рисунке 3.5а, жидкость занимает многоугольную область $ADEFG$. Объем жидкости в этой области можно вычислить используя следу-

ющее выражение:

$$\mathcal{V}_{ADEFG} = \mathcal{V}_{ABC} - \mathcal{H}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \mathcal{V}_{GFC} - \mathcal{H}(\ell - \Delta x \cos \alpha) \mathcal{V}_{DBE}, \quad (3.30)$$

где $\mathcal{V}_{ABC}$ — объем жидкости в треугольной области ABC , $\mathcal{V}_{GFC}$ и $\mathcal{V}_{DBE}$ — объемы жидкости в треугольниках GFC и DBE соответственно, а $\mathcal{H}$ обозначает функцию Хевисайда. Следует отметить, что треугольник GFC существует только при $\ell > \Delta y \sin \alpha$, а треугольник DBE — только при $\ell > \Delta x \cos \alpha$. Таким образом, задача сводится к вычислению объема жидкости, соответствующего асимптотическому раскрытию $w_a(s)$, в пределах треугольной области.

Рассмотрим треугольную область в локальной прямоугольной системе координат $O\tau s$, см. рисунок 3.56. Начало этой системы координат расположено в вершине прямого угла, которая соответствует наиболее удаленной от фронта точке треугольника, а ось Os направлена по нормали к фронту трещины. Для вычисления объема жидкости необходимо проинтегрировать асимптотическое решение для раскрытия по данной области:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\Delta}(\ell) &= \int_0^{\ell} \int_{-\tan \alpha s}^{\cot \alpha s} w_a(\ell - s) d\tau ds = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \int_0^{\ell} s w_a(\ell - s) ds = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \int_0^{\ell} (\ell - \xi) w_a(\xi) d\xi = \frac{\ell M_0(\ell) - M_1(\ell)}{\sin \alpha \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где моменты асимптотического решения M_0 и M_1 определяются следующим образом:

$$M_0(s) = \int_0^s w_a(s') ds', \quad M_1(s) = \int_0^s s' w_a(s') ds'. \quad (3.32)$$

В случае универсального асимптотического решения раскрытие трещины $w_a(s)$ определяется неявным соотношением (2.15). Поэтому прямое вычисление моментов (3.32) требует многократного решения нелинейного уравнения для определения значения раскрытия в точках интегрирования, что приводит к существенным вычислительным затратам.

Для преодоления этой трудности в работе [28] предложена эффективная аппроксимация моментов универсальной асимптотики. Построение аппроксимации основано на том, что в безразмерных переменных (2.10) асимптотическое раскрытие трещины локально близко к степенной зависимости $\tilde{w} \propto \tilde{s}^{\delta}$, причем

показатель степени изменяется в сравнительно узком диапазоне $0 \leq \delta \leq 1/3$. Подстановка данной зависимости в выражения (3.32) приводит к следующей аппроксимации:

$$M_0(s) \approx \frac{2 w_a(s) s}{3 + \delta}, \quad M_1(s) \approx \frac{2 w_a(s) s^2}{5 + \delta}. \quad (3.33)$$

Поскольку показатель степени изменяется в сравнительно узком диапазоне $0 \leq \delta \leq 1/3$, даже использование фиксированного значения $\delta = 1/6$ обеспечивает достаточно высокую точность: относительная погрешность аппроксимации не превышает 5% для момента M_0 и 3% для момента M_1 . Способ выбора параметра δ , обеспечивающий относительную погрешность не более 0.14% для момента M_0 и 0.05% для момента M_1 , подробно описан в работе [28].

Таким образом, объем жидкости в многоугольной области $ADEFG$ определяется выражением (3.30), которое с учетом формулы для объема в треугольной области (3.31) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ADEFG} = \mathcal{V}_{\Delta}(\ell) - \mathcal{H}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \mathcal{V}_{\Delta}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \\ - \mathcal{H}(\ell - \Delta x \cos \alpha) \mathcal{V}_{\Delta}(\ell - \Delta x \cos \alpha). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Отдельного рассмотрения требуют случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. Для таких значений ориентации фронта часть конечного элемента, заполненная жидкостью, имеет прямоугольную форму, а соответствующий объем определяется соотношениями $\mathcal{V}_{ADEFG} = \Delta y M_0(\ell)$ и $\mathcal{V}_{ADEFG} = \Delta x M_0(\ell)$ соответственно. С учетом общего случая (3.34) и указанных предельных сценариев среднее раскрытие w^t в конечном элементе вычисляется по формуле

$$w^t = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{cases} \mathcal{V}_{\Delta}(\ell) - \mathcal{H}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \mathcal{V}_{\Delta}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \\ \quad - \mathcal{H}(\ell - \Delta x \cos \alpha) \mathcal{V}_{\Delta}(\ell - \Delta x \cos \alpha), & \alpha \neq 0, \pi/2, \\ \Delta y M_0(\ell), & \alpha = 0, \\ \Delta x M_0(\ell), & \alpha = \pi/2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Следует отметить, что среднее раскрытие в конечном элементе зависит от нормальной скорости фронта V . Эта зависимость возникает через асимптотическое решение $w_a(\ell)$, используемое при вычислении моментов $M_0(\ell)$ и $M_1(\ell)$.

В случае неподвижного фронта трещины ($V = 0$) вместо универсального асимптотического решения используется асимптотика линейной упругой механики разрушения

$$w_a = \frac{K'_I}{E'} s^{1/2}. \quad (3.36)$$

При этом $K'_I \neq K'$, поскольку отсутствие распространения трещины означает невыполнение критерия разрушения, то есть $K_I < K_{Ic}$. Актуальное значение приведенного коэффициента интенсивности напряжений K'_I можно оценить по данным в соседних опорных элементах методом наименьших квадратов:

$$K'_I = E' \frac{\sum_i w_i^s s_i^{1/2}}{\sum_i s_i}, \quad (3.37)$$

где w_i^s обозначает раскрытие в i -м соседнем опорном элементе, а s_i — расстояние от его центра до фронта трещины.

3.2.5 Расчет утечек в концевых элементах

Для вычисления утечек из концевых элементов используется упрощенный подход, основанный на односточечной квадратурной формуле, в которой подынтегральная функция вычисляется в центре заполненной жидкостью области. Согласно модели Картера [163], мгновенная скорость утечки жидкости через единицу площади поверхности трещины в уравнении смазки (3.7) обратно пропорциональна квадратному корню из времени, прошедшего с момента достижения данной точки фронтом трещины: $C'/\sqrt{t - t_0(x, y)}$. Интегрирование этого выражения по времени приводит к следующей формуле для накопленного объема жидкости, отфильтровавшейся через единицу площади поверхности трещины: $2C'\sqrt{t - t_0(x, y)}$, где $t_0(x, y)$ обозначает момент времени, когда фронт трещины достиг точки с координатами (x, y) .

Поскольку концевой элемент заполнен жидкостью лишь частично (см. рисунок 3.5а), интегрирование выполняется только по той части элемента, которая находится внутри трещины. В рамках используемой квадратурной формулы предполагается, что распределение накопленного объема утечек по заполненной области может быть аппроксимировано его значением в центре этой области. После интегрирования по заполненной области и деления на полную площадь элемента $\Delta x \Delta y$ средний по площади элемента накопленный объем утечек определяется выражением

$$\mathcal{L}(t) = 2C' \frac{S}{\Delta x \Delta y} \sqrt{t - t_{0m}}, \quad (3.38)$$

где S — площадь части концевой области, заполненной жидкостью, а t_{0m} — момент времени, в который фронт трещины достиг центра этой области.

При $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \pi/2$ площадь S вычисляется как разность площадей треугольных областей $S_{ABC} - S_{DBE} - S_{GFC}$. Если выполняется условие $\ell \leq \Delta x \cos \alpha$, то треугольник DBE вырождается, а при $\ell \leq \Delta y \sin \alpha$ вырождается треугольник GFC . В предельных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ заполненная жидкостью область имеет прямоугольную форму. В результате площадь определяется выражением

$$S = \begin{cases} S_{\Delta}(\ell) - S_{\Delta}(\ell - \Delta x \cos \alpha) - S_{\Delta}(\ell - \Delta y \sin \alpha), & \alpha \neq 0, \alpha \neq \pi/2 \\ \ell \Delta y, & \alpha = 0 \\ \ell \Delta x, & \alpha = \pi/2, \end{cases} \quad (3.39)$$

где $S_{\Delta}(\ell) = \ell^2 / \sin 2\alpha$ при $\ell > 0$ и $S_{\Delta}(\ell) = 0$ в противном случае.

Момент времени t_{0m} , когда фронт трещины достиг центра многоугольника определяется из условия

$$\int_{t_{0m}}^t V(\tau) d\tau = \frac{\ell}{2}, \quad (3.40)$$

которое означает, что за интервал времени $t - t_{0m}$ фронт трещины проходит расстояние от центра заполненной жидкостью области до своего текущего положения. Значение t_{0m} вычисляется на основе известной истории изменения скорости фронта $V(\tau)$.

Тогда приращение объема утечек в концевом элементе за один шаг по времени вычисляется как

$$\Delta \mathcal{L}^t = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(t - \Delta t). \quad (3.41)$$

Полученная величина используется при формировании правой части (3.19) упругогидродинамической системы (3.21) для концевых элементов.

3.2.6 Структура численного алгоритма

Описанные в предыдущих разделах этапы объединяются в единый итерационный алгоритм решения задачи на одном шаге по времени с $t - \Delta t$ до t .

Алгоритм включает два вложенных итерационных цикла: внешний цикл по положению фронта трещины и внутренний цикл нелинейных итераций для решения упругогидродинамической системы (3.21). Необходимость внешнего цикла обусловлена тем, что распространение трещины представляет собой задачу со свободной границей. В рамках этого цикла итерационно определяются положение, ориентация и скорость фронта, необходимые для расчета раскрытия $\mathbf{w}^t$ и утечек $\Delta \mathcal{L}^t$ в концевых элементах, которые определяют матрицу и правую часть системы (3.21). Внутренний цикл, в свою очередь, разрешает две нелинейности самой упругогидродинамической системы: зависимость матрицы потоков $\mathbb{A}(\mathbf{w})$ от раскрытия и нелинейность, связанную с изменением множества контактных элементов согласно условиям (3.20).

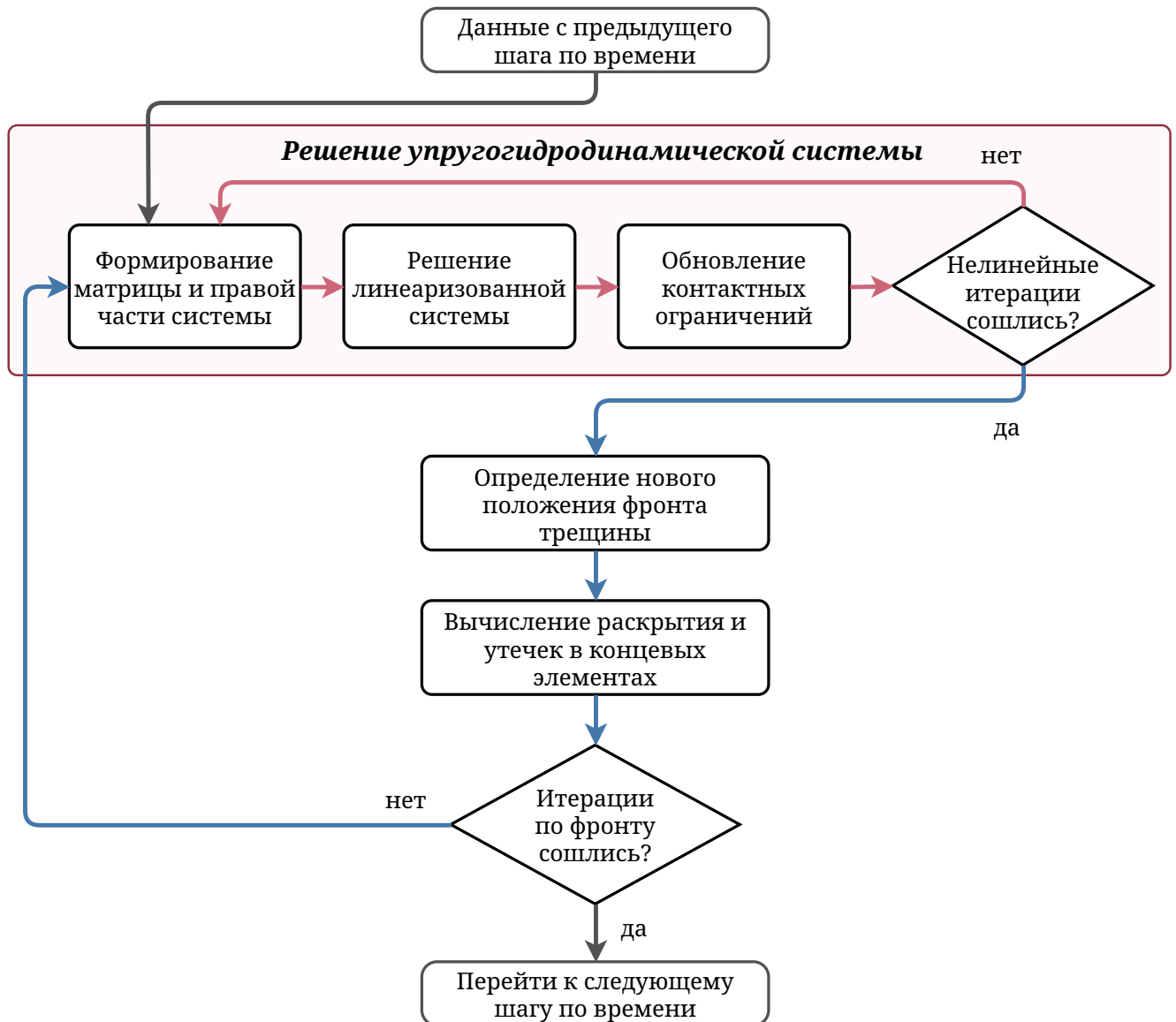


Рисунок 3.6 — Последовательность выполнения основных этапов численного алгоритма на одном шаге по времени

На протяжении всего шага по времени множества внутренних “ c ” и опорных “ s ” элементов считаются фиксированными и переносятся с конца предыдущего шага по времени. Неизменность множества опорных элементов на шаге по времени используется для корректной проверки сходимости внешних итераций на основе значений расстояния от центров опорных элементов до фронта. Множество контактных элементов “ d ” формируется на каждой внутренней итерации. По мере уточнения положения фронта трещины на внешних итерациях множество концевых элементов может изменяться. При распространении трещины часть концевых элементов может оказаться полностью заполненной жидкостью. Такие элементы по-прежнему обрабатываются единообразно с остальными концевыми элементами путем интегрирование асимптотического решения. В качестве начального приближения для внешнего итерационного цикла принимается классификация элементов и положение фронта, известные с предыдущего шага по времени.

Общая структура численного алгоритма представлена в виде блок-схемы на рисунке 3.6. На каждом шаге по времени выполняется следующая последовательность операций:

Внешний цикл по положению фронта трещины (индекс k):

1. Решение нелинейной упругогидродинамической системы с учетом контакта (внутренний цикл, индекс i):

- а) Инициализация начального приближения ${}^0\mathbf{w}_k^c = \mathbf{w}_{k-1}^c$ и стартового множества контактных элементов значениями с предыдущей итерации внешнего цикла.
- б) Формирование матрицы и правой части системы (3.21) с использованием матрицы потоков $\mathbb{A}({}^{i-1}\mathbf{w}_k)$, текущей классификации элементов, а также значений $\mathbf{w}_{k-1}^t$ и $\Delta\mathcal{L}_{k-1}^t$ с предыдущей итерации внешнего цикла.
- в) Решение линеаризованной упругогидродинамической системы (3.21) относительно ${}^i\mathbf{w}_k^c$, ${}^i\mathbf{p}_k^t$ и ${}^i\mathbf{T}_{n,k}^d$.
- г) Обновление множества контактных элементов согласно условию (3.20): элемент переносится из группы внутренних “ c ” в группу контактных “ d ” при ${}^i w_k \leq w_{\min}$, либо возвращается в группу внутренних “ c ”, если контактные напряжения в нем становятся растягивающими.

- д) Проверка сходимости внутреннего цикла: если относительное изменение раскрытия ниже порогового значения и множество контактных элементов не изменилось, то полученное решение принимается за $\mathbf{w}_k^c$, $\mathbf{p}_k^t$, $\mathbf{T}_{n,k}^d$, иначе итерации внутреннего цикла продолжаются.

2. Определение нового положения фронта трещины:

- а) Вычисление расстояний $s_{i,k}$ от центров опорных элементов до фронта трещины по обновленным значениям раскрытия $\mathbf{w}_k^s$ на основе асимптотического соотношения (3.23).
- б) Определение обновленного множества концевых элементов путем решения уравнения эйконала (3.25) с использованием найденных расстояний $s_{i,k}$ в качестве начальных данных (3.24).
- в) Вычисление расстояния до фронта ℓ , его ориентации α и скорости распространения V по формулам (3.29) для каждого концевого элемента.

3. Вычисление объемов жидкости в концевых элементах: определение значений среднего раскрытия $\mathbf{w}_k^t$ и приращения объема утечек $\Delta\mathcal{L}_k^t$ по формулам (3.35) и (3.41) на основе найденных ранее значений ℓ , α и V .

4. Проверка сходимости внешнего цикла по положению фронта: если относительное изменение расстояния до фронта трещины ниже порогового значения, то полученные значения принимаются в качестве решения на текущем шаге по времени t , иначе итерации внешнего цикла продолжаются.

После сходимости внешнего цикла, перед переходом к следующему шагу по времени, производится обновление классификации элементов сетки: все полностью заполненные жидкостью концевые элементы переводятся в группу внутренних элементов, после чего на основе обновленного множества внутренних элементов формируется новое множество опорных элементов. Сформированная таким образом классификация внутренних элементов фиксируется на протяжении всего следующего шага по времени.

Несмотря на то, что форма начальной трещины перестает оказывать влияние на решение спустя непродолжительное время после начала распространения [181], для инициализации алгоритма необходимо задать начальное состояние трещины. На рисунке 3.7 показана используемая в работе схема на-

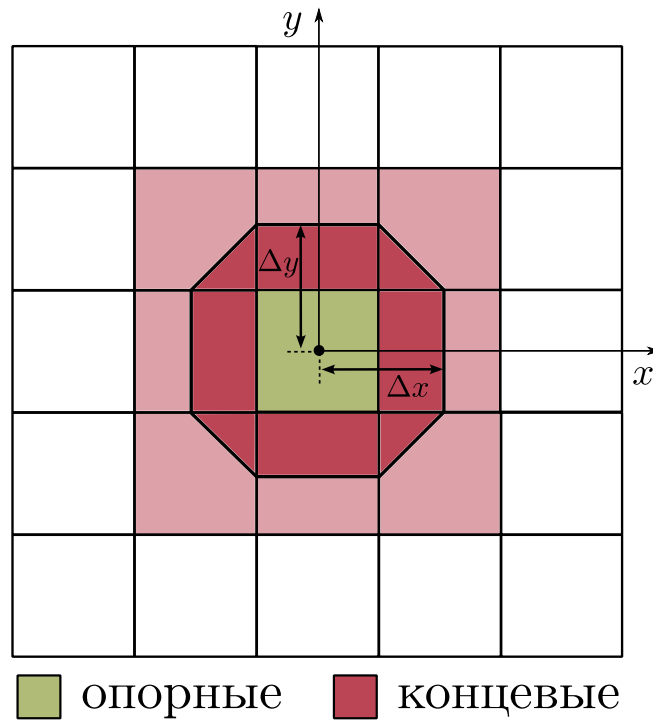


Рисунок 3.7 — Схема начальной трещины, используемой для инициализации алгоритма численного алгоритма

чальной трещины. Для запуска алгоритма ILSA требуется наличие хотя бы одного опорного элемента. Такой элемент располагается в начале координат и окружается восемью концевыми элементами. Фронт трещины проходит через середины тех концевых элементов, которые непосредственно примыкают к опорному элементу сверху, снизу, слева и справа. В результате начальная форма трещины представляет собой восьмиугольник. Раскрытие как в опорном, так и в концевых элементах на начальном шаге полагается равным нулю. Благодаря этому начальный объем трещины также равен нулю и не вносит дополнительной погрешности в расчет общего объема трещины независимо от размера расчетной сетки.

3.3 Интеграция асимптотики, учитывающей слоистость по сжимающим напряжениям

Как обсуждалось в начале раздела 3.2.3, для определения расстояния до фронта трещины и объема жидкости в концевых элементах в алгоритме ILSA используется асимптотическое решение в окрестности вершины трещи-

ны. Классическая реализация подхода ILSA [28] основана на универсальном асимптотическом решении (2.15), которое одновременно учитывает эффекты трещиностойкости породы, вязкости жидкости и утечек в окрестности вершины трещины, однако не учитывает наличия слоев с различными сжимающими напряжениями. Как было показано в главе 2, применение универсального асимптотического решения в случае, когда трещина пересекает границы слоев с различными сжимающими напряжениями, приводит к появлению численных артефактов (так называемых “шипов”) вблизи границ слоев (см. рисунок 3.8). При этом погрешность определения положения фронта трещины оказывается порядка размера одного элемента расчетной сетки. Для устранения данной проблемы в настоящей главе в качестве условия распространения трещины используется асимптотическое решение, учитывающее слоистость по напряжениям, разработанное в главе 2. В данном разделе рассматривается интеграция указанного асимптотического решения в алгоритм ILSA. Особое внимание уделяется модификации процедуры отслеживания положения фронта трещины, вычисления объема жидкости в концевых элементах, а также выбору коэффициента релаксации напряжений для случая плоской трещины конечных размеров.

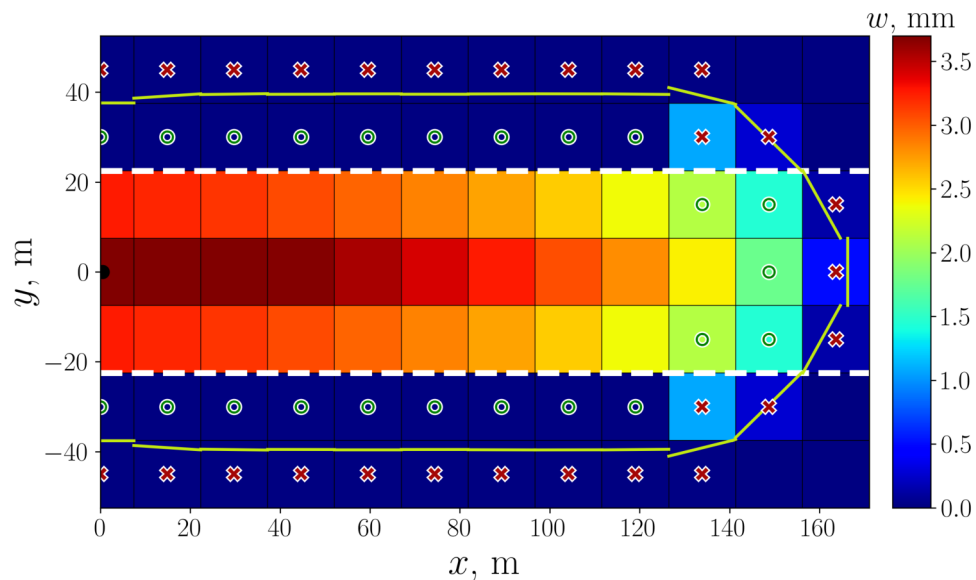


Рисунок 3.8 — Пример численного расчета гидравлической трещины для случая выраженных симметричных барьеров напряжений, иллюстрирующий проблему “шипов”, связанную с использованием универсального асимптотического решения. Пунктирные белые линии обозначают границы геологических слоев, а сплошные желтые отрезки соответствуют фронту трещины. Зеленые и красные маркеры обозначают опорные и концевые элементы соответственно

3.3.1 Выбор асимптотического решения

В главе 2 были рассмотрены три различных подхода к учету влияния слоев с различными сжимающими напряжениями в асимптотическом решении в окрестности вершины трещины: численное решение интегрального уравнения, асимптотическое решение с поправкой трещиностойкости и ОДУ-аппроксимация. Проведенное сравнение точности, вычислительной эффективности и сложности реализации показало, что ОДУ-аппроксимация обеспечивает наилучший компромисс и хорошо подходит для многократного вычисления внутри алгоритма отслеживания фронта. Поэтому в данной главе ОДУ-аппроксимация выбирается в качестве основного метода для отслеживания фронта трещины.

Для удобства дальнейшего изложения кратко напомним используемую в настоящей главе ОДУ-аппроксимацию. Введем следующие безразмерные переменные

$$\begin{aligned}\tilde{w}_a &= \frac{E' w_a}{K' s^{1/2}}, \quad \chi = \frac{2C'E'}{V^{1/2}K'}, \quad l = \left(\frac{K'^3}{\mu'E'^2V} \right)^2, \\ \Delta\Sigma_j &= \frac{\Delta\sigma_h^j l^{1/2}}{K'}, \quad \tilde{s} = \left(\frac{s}{l} \right)^{1/2}, \quad \tilde{x}' = \left(\frac{x'}{l} \right)^{1/2},\end{aligned}\tag{3.42}$$

где s — расстояние до вершины трещины, V — скорость фронта трещины, а $\Delta\sigma_h^j = \sigma_h^j - \sigma_h^{j+1}$ — амплитуда j -го скачка напряжений. Асимптотическое раскрытие $w_a^\sigma(s)$, учитывающее слоистость по напряжениям, определяется из решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d\hat{w}_a}{d\tilde{s}} = \frac{\beta_m^3}{3(\hat{w}_a + G_\Sigma)^2} + \frac{\chi\beta_{\tilde{m}}^4}{4(\hat{w}_a + G_\Sigma)^3}, \quad \hat{w}_a(0) = 1,\tag{3.43}$$

где

$$\hat{w}_a = \tilde{w}_a - G_\Sigma(\tilde{s}), \quad G_\Sigma(\tilde{s}) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \Delta\Sigma_j \tilde{s}_j G\left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right),\tag{3.44}$$

коэффициенты $\beta_m = 2^{1/3}3^{5/6}$, $\beta_{\tilde{m}} = 4/(15(\sqrt{2}-1))^{1/4}$, а функция $G(t)$ определяется как

$$G(t) = \frac{1-t^2}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2.\tag{3.45}$$

Задача Коши (3.43) решается численно явным методом Дорманда — Принса [167] с адаптивным контролем шага [168]. Подробный вывод уравнения (3.43),

сравнение с альтернативными подходами и анализ точности приведены в главе 2.

В тех случаях, когда в направлении распространения фронта трещины отсутствуют границы слоев с различными значениями минимальных сжимающих напряжений, вместо асимптотического решения на основе ОДУ-аппроксимации, используется стандартная универсальная асимптотика [27; 28], которая имеет вид

$$\frac{s^2 V \mu'}{E' w_a^3} = g_\delta \left(\frac{K' s^{1/2}}{E' w_a}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w_a V^{1/2}} \right), \quad (3.46)$$

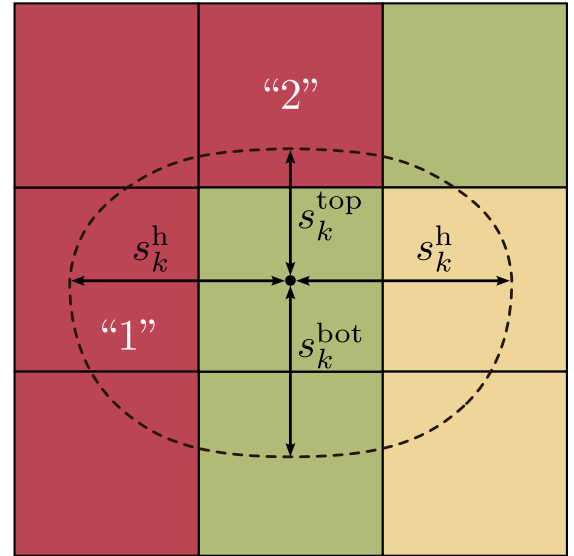
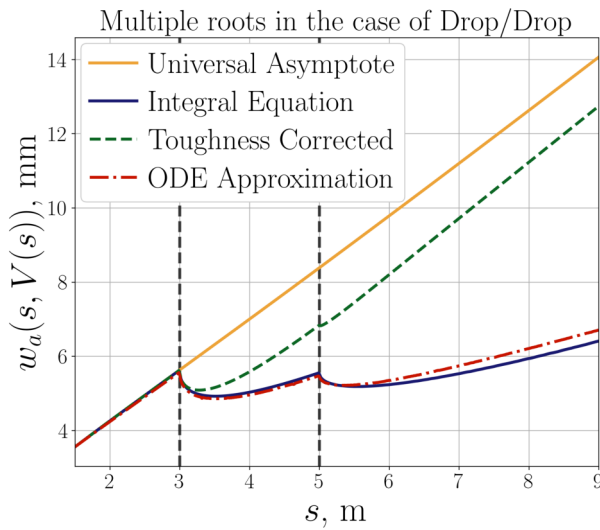
где определение функции g_δ приведено в [28]. Далее в настоящем разделе универсальное асимптотическое решение обозначается через $w_a^u(s)$, а асимптотика, учитывающая слоистость по напряжениям, — через $w_a^\sigma(s)$, поскольку оба эти решения используются одновременно при вычислении объема жидкости в концевых элементах (см. раздел 3.3.3).

3.3.2 Модификация алгоритма отслеживания фронта трещины

Для определения расстояния s до фронта трещины необходимо обратиться к асимптотическому решению $w_a(s, V)$ относительно заданного раскрытия w^s в опорном элементе. Поскольку в горизонтальном направлении изменение напряжений отсутствует, при определении расстояния по горизонтали применяется решение без учета слоистости. В то же время в вертикальном направлении сжимающие напряжения неоднородны, поэтому необходимо использовать асимптотическое решение, учитывающее слоистость по напряжениям.

В случае вертикального распространения трещины расстояние s_j от ее вершины до границы j -го слоя на текущем шаге по времени заранее неизвестно. Для устранения этой неопределенности вводится вспомогательный параметр $\rho_{\text{layer}}^j = y_j - y^s$, представляющий собой ориентированное расстояние по вертикали от центра опорного элемента до границы j -го слоя. Здесь y_j — координата по оси y границы j -го слоя, а y^s — координата центра опорного элемента. Тогда расстояние от вершины трещины до границы j -го слоя определяется как $s_j = s - \rho_{\text{layer}}^j$.

На рисунке 3.9а представлено сравнение различных асимптотических решений $w_a(s, V)$ для случая двух отрицательных скачков напряжений, расположенных на расстояниях $\rho_{\text{layer}}^1 = 3$ м и $\rho_{\text{layer}}^2 = 5$ м от центра опорного элемента. Стоит отметить, что наличие хотя бы одного отрицательного скачка напряжений может приводить к нарушению монотонности асимптотического решения. В результате уравнение $w_a(s, V(s)) = w^s$ может иметь несколько корней, соответствующих различным значениям расстояния до фронта трещины при заданном раскрытии w^s в опорном элементе. В алгоритме выбирается наименьший корень, так как остальные корни соответствуют ситуации, в которой трещина пересекает несколько слоев. Однако если существует решение, расположенное до пересечения первой границы слоя, это означает, что фронт трещины не способен пересечь данную границу слоя, и, следовательно, остальные корни не имеют физического смысла. В случае положительных скачков напряжений или при отсутствии слоев асимптотическое решение $w_a(s, V(s))$ является монотонным и имеет единственный корень.



а) Несколько корней в случае двух слоев

б) Начальные данные для уравнения эйконала

Рисунок 3.9 — Слева: сравнение асимптотических решений для случая двух слоев с отрицательным скачком напряжений, расположенных перед опорным элементом. Амплитуды скачков напряжений составляют $\Delta\sigma_h^1 = -0.3$ МПа и $\Delta\sigma_h^2 = -0.2$ МПа. Справа: расстояния от центра опорного элемента до фронта трещины в верхнем, нижнем и горизонтальном направлениях, используемые в качестве начального условия для уравнения эйконала

Согласно подходу ILSA [12; 28; 92; 93], положение фронта трещины определяется нулевой линией уровня $\mathcal{T} = 0$ функции ориентированного расстояния $\mathcal{T}(x, y)$, являющейся решением уравнения эйконала [28]. Для учета горизонтальных границ слоев в плоскости трещины выделяются три возможных направления распространения фронта: вверх, вниз и в горизонтальном направлении. Для каждого опорного элемента уравнение $w_a(s, V(s)) = w^s$ решается три раза. Сначала определяется расстояние s_k^{top} до фронта трещины в предположении его распространения вверх. Затем аналогичным образом вычисляется расстояние s_k^{bot} , соответствующее распространению фронта вниз. Наконец, определяется расстояние s_k^{h} до фронта трещины в горизонтальном направлении, для которого влияние слоев отсутствует. Полученные значения расстояния используются в качестве начальных данных при решении уравнения эйконала для функции ориентированного расстояния $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}(x_k, y_k) = \{-s_k^{\text{top}}, -s_k^{\text{bot}}, -s_k^{\text{h}}\}, \quad (3.47)$$

где (x_k, y_k) — центр k -го опорного элемента. Для остальных элементов ориентированное расстояние $\mathcal{T}$ принимает только одно значение. Для вычисления значений $\mathcal{T}$ в остальных ячейках сетки уравнение эйконала решается методом быстрой прогонки [178; 179] используя конечно-разностную схему (3.26), см. раздел 3.2.3. Для учета нескольких начальных значений в каждом опорном элементе конечные разности в уравнении (3.26) модифицируются следующим образом:

- Если элемент $(i, j - 1)$ является k -м опорным, то $\mathcal{T}_{i,j-1} = -s_k^{\text{top}}$;
- Если элемент $(i, j + 1)$ является k -м опорным, то $\mathcal{T}_{i,j+1} = -s_k^{\text{bot}}$;
- Если элемент $(i \pm 1, j)$ является k -м опорным, то $\mathcal{T}_{i\pm 1,j} = -s_k^{\text{h}}$.

Для иллюстрации процедуры вычисления конечных разностей рассмотрим рисунок 3.96. Для ячейки “1” горизонтальная разность принимает вид

$$\max\left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i+1,j}}{\Delta x}, 0\right) = \frac{\mathcal{T}_{i,j} + s_k^{\text{h}}}{\Delta x}, \quad (3.48)$$

тогда как для ячейки “2” вертикальная разность вычисляется с использованием значения s_k^{top} из соседнего опорного элемента:

$$\max\left(\frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j-1}}{\Delta y}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j+1}}{\Delta y}, 0\right) = \frac{\mathcal{T}_{i,j} + s_k^{\text{top}}}{\Delta y}. \quad (3.49)$$

Выражение для конечной разности, учитывающей расстояние s_k^{bot} , строится аналогичным образом.

3.3.3 Адаптация процедуры вычисления объема жидкости в концевом элементе

В рамках численной схемы раскрытие w^t в частично заполненном концевом элементе вычисляется через объем жидкости, содержащейся в этом элементе:

$$w^t = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{PR} w_a(x, y) dx dy, \quad (3.50)$$

где PR — многоугольная область концевого элемента, занятая жидкостью. Как уже обсуждалось в разделе 3.2.4, вычисление объема жидкости, занимающей многоугольную область $ADEFG$, может быть сведено к вычислению объема в треугольной области:

$$V_{\Delta}(s) = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \int_0^s s' w_a(s - s') ds' = \frac{s M_0(s) - M_1(s)}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad (3.51)$$

где $M_0(s)$ и $M_1(s)$ — нулевой и первый моменты асимптотического решения, определяемые как

$$M_0(s) = \int_0^s w_a(s') ds', \quad M_1(s) = \int_0^s s' w_a(s') ds'. \quad (3.52)$$

Таким образом, для вычисления объема жидкости в концевом элементе достаточно вычислить два указанных момента асимптотического решения w_a .

Поскольку границы слоев ориентированы горизонтально, они не оказывают влияния на распространение фронта трещины в горизонтальном направлении. Поэтому в случае горизонтальной ориентации фронта ($\alpha = 0$) раскрытие в окрестности вершины трещины определяется универсальным асимптотическим решением $w_a^u(s)$, введенным в уравнении (3.46). С другой стороны, при распространении трещины в вертикальном направлении ($\alpha = \pi/2$) необходимо учитывать влияние слоистой структуры пласта, и в этом случае раскрытие определяется асимптотическим решением $w_a^\sigma(s)$ из уравнения (3.43), учитывающим слоистость по сжимающим напряжениям. Для учета произвольной ориентации фронта трещины применяется следующая схема интерполяции:

$$w_a(s) = w_a^u(s) \cos^2 \alpha + w_a^\sigma(s) \sin^2 \alpha. \quad (3.53)$$

Моменты нулевого и первого порядка интерполированного асимптотического решения (3.53) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} M_0(s) &= \int_0^s w_a(s') ds' = M_0^u(s) \cos^2 \alpha + M_0^\sigma(s) \sin^2 \alpha, \\ M_1(s) &= \int_0^s s' w_a(s') ds' = M_1^u(s) \cos^2 \alpha + M_1^\sigma(s) \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где M_0^u и $M_1^u(s)$ — моменты нулевого и первого порядка универсального асимптотического решения [28], а M_0^σ и M_1^σ — соответствующие моменты асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям. Вычисление моментов в случае универсального асимптотического решения выполняется с использованием соотношений (3.33). В случае асимптотического решения, учитывающего неоднородность напряжений, моменты M_0^σ и M_1^σ вычисляются путем прямого численного интегрирования. Поскольку используемая ОДУ-аппроксимация решается явным методом, при определении $w_a^\sigma(\ell)$ одновременно находятся промежуточные значения раскрытия на интервале $0 \leq s \leq \ell$, которые затем непосредственно используются для вычисления моментов.

3.3.4 Коэффициент релаксации напряжений для плоской трещины конечного размера

Как было показано в главе 2, асимптотическое решение, учитывающее слоистость по напряжениям, имеет относительно небольшую область применимости вблизи границы слоя, что может приводить к значительным погрешностям при определении положения фронта трещины, в особенности на грубых сетках. Для устранения этого недостатка в главе 2 был введен коэффициент релаксации напряжений λ , который позволяет эффективно уменьшить величину скачка напряжений и тем самым расширить область применимости асимптотического решения. Для задачи о конечной плоской трещине в условиях плоской деформации при постоянном давлении внутри трещины и наличии симметричных барьеров сжимающих напряжений оптимальное значение коэффициента релаксации имеет следующий вид:

$$\lambda_{\text{ps}}(\xi) = \frac{0.7}{0.7 + \xi/H}, \quad (3.55)$$

где ξ — расстояние от вершины трещины до границы слоя, а H — высота центрального слоя. К сожалению, данный коэффициент релаксации явно зависит от высоты центрального слоя H , которая не имеет однозначного определения в случае произвольной конфигурации слоев пласта, встречающейся в расчетах `planar 3D`. Кроме того, для случая плоской трещины конечного размера выражение (3.55) может не обеспечивать оптимального результата. В связи с этим целью данного раздела является оценка точности асимптотического решения в окрестности вершины трещины для модели `planar 3D`, а также построение альтернативного выражения для коэффициента релаксации напряжений, не зависящего от геометрии слоев пласта.

Для калибровки альтернативного выражения для коэффициента релаксации напряжений рассматривается случай, когда продуктивный слой окружен двумя одинаковыми слоями с более высокими сжимающими напряжениями, т.е. симметричными барьерами напряжений. В расчетах используются следующие параметры: модуль Юнга $E = 10$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, трещиностойкость $K_{Ic} = 1$ МПа·м^{1/2}, коэффициент утечек $C_L = 0$, динамическая вязкость жидкости $\mu = 0.1$ Па·с, объемный расход закачки $Q = 0.2$ м³/с, высота центрального слоя $H = 15$ м, а также минимальные сжимающие напряжения $\sigma_h^1 = \sigma_h^3 = 28$ МПа и $\sigma_h^2 = 25$ МПа. Расчеты выполняются для различных значений числа элементов в центральном слое $n_c \in \{3, 5, 9, 15\}$, при этом шаг расчетной сетки выбирается одинаковым по обоим направлениям $\Delta x = \Delta y = H/n_c$.

На рисунке 3.10 представлена высота трещины, вычисленная на различных сетках для универсального асимптотического решения (3.46) и для решения, учитывающего слоистость по напряжениям, полученного с помощью ОДУ-аппроксимации (3.43) без релаксации напряжений. Горизонтальная черная сплошная линия соответствует положению границы слоя с повышенными сжимающими напряжениями. Как видно из левой части рисунка 3.10, точность универсального асимптотического решения существенно снижается вблизи границы слоя, в особенности на грубых сетках. Однако по мере увеличения высоты трещины зависимость решения от размера сетки становится менее выраженной. Напротив, асимптотическое решение с учетом слоев обеспечивает высокую точность вблизи границы слоя, однако по мере удаления фронта трещины от этой границы его точность ухудшается. Данный пример показывает, что ОДУ-аппроксимация с учетом слоев требует дополнительной модификации,

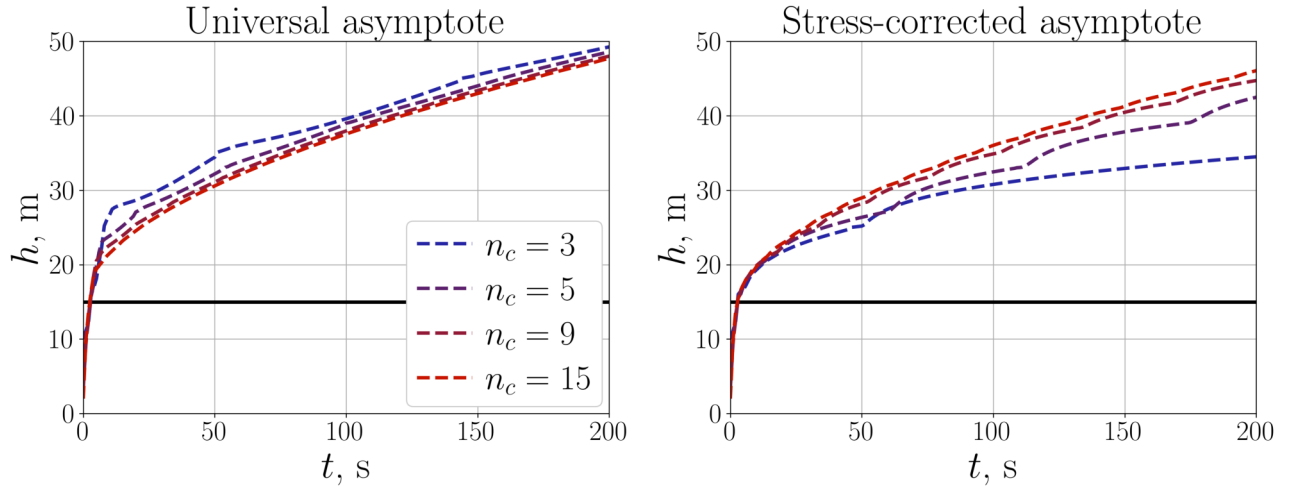


Рисунок 3.10 — Зависимость высоты трещины от времени для тестового случая симметричных барьеров напряжений, рассчитанная на различных сетках с использованием универсального асимптотического решения (слева) и асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям без коэффициента релаксации напряжений (справа). Сплошная черная горизонтальная линия соответствует положению границы слоя

позволяющей уменьшить погрешность, возникающую при удалении фронта трещины от границы слоя.

Учет коэффициента релаксации напряжений осуществляется путем модификации слагаемых, отвечающих за влияние напряжений в уравнении (3.44), следующим образом:

$$G_{\Sigma}(\tilde{s}) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda(\tilde{s}_j) \Delta \Sigma_j \tilde{s}_j G\left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right), \quad (3.56)$$

где коэффициент релаксации напряжений λ принимает значения от 0 до 1. В дальнейшем асимптотическое решение, получаемое из решения задачи Коши (3.43) с модифицированным слагаемым (3.56), будем называть асимптотическим решением с релаксацией напряжений. Результаты, представленные на рисунке 3.10, показывают, что асимптотическое решение, учитывающее слоистость по напряжениям, дает более точные результаты вблизи границы слоя, тогда как универсальное асимптотическое решение оказывается более точным вдали от границы слоя. С учетом полученных результатов коэффициент релак-

сации напряжений будем искать в следующем виде:

$$\lambda_k(\xi) = \begin{cases} 1 - \xi/(k\Delta y), & \xi < k\Delta y, \\ 0, & \xi \geq k\Delta y, \end{cases} \quad (3.57)$$

где параметр k определяет длину области релаксации, измеряемую в количестве элементов сетки. В отличие от выражения (3.55), данная зависимость определяется через размер элемента Δy , а не через высоту центрального слоя H , что позволяет использовать ее для произвольной конфигурации слоев.

Для определения оптимального значения длины области релаксации k рассмотрим тестовый пример с симметричными барьерами напряжений и параметрами, указанными в начале данного раздела. В рамках параметрического исследования независимо варьируются вязкость жидкости $\mu \in [0.01, 0.5]$ Па·с, трещиностойкость породы $K_{Ic} \in [0.001, 5]$ МПа·м^{1/2} и величина скачка напряжений $\Delta\sigma \in [1.7, 5]$ МПа, где $\Delta\sigma = \sigma_h^3 - \sigma_h^2$. Для каждого фиксированного набора параметров μ , K_{Ic} и $\Delta\sigma$ длина области релаксации изменяется в диапазоне $k \in \{2, 2.5, 3, 3.5\}$.

В качестве меры погрешности используется максимальное относительное отклонение решения, полученного на грубых сетках ($n_c < 15$), от решения на наиболее подробной сетке ($n_c = 15$):

$$\varepsilon_2 = \max_{n_c} \frac{\|h_{n_c}(t) - h_{15}(t)\|_2}{\|h_{15}(t)\|_2}, \quad \|f(t)\|_2^2 = \int_0^{t_{\max}} f^2(t) dt, \quad (3.58)$$

где индекс n_c обозначает число элементов в центральном слое, а $t_{\max} = 200$ с — общее время расчета. Значения высоты трещины h_{n_c} , входящие в выражение (3.58), вычисляются при одинаковых значениях вязкости жидкости μ , трещиностойкости породы K_{Ic} , величины скачка напряжений $\Delta\sigma$ и длины области релаксации k .

На рисунке 3.11 представлено сравнение погрешности ε_2 , определенной в (3.58), для различных значений длины области релаксации k . Рассматриваются различные значения динамической вязкости μ , трещиностойкости породы K_{Ic} и амплитуды скачка напряжений $\Delta\sigma$. Для большинства значений параметров минимум погрешности ε_2 достигается при $k = 3$. Стоит отметить, что различие между результатами для $k = 2$, $k = 2.5$ и $k = 3$ оказывается несущественным. Поэтому в дальнейшем в качестве оптимального коэффициента релаксации напряжений используется функция $\lambda_3(\xi)$.

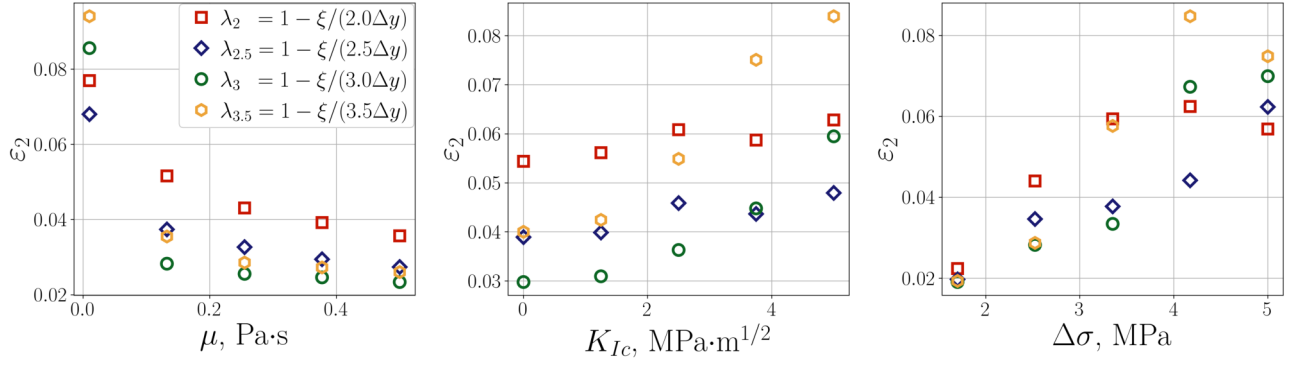


Рисунок 3.11 — Сравнение погрешности ε_2 , определенной в (3.58), для различных значений длины области релаксации $k \in \{2, 2.5, 3, 3.5\}$ при независимом варьировании вязкости жидкости μ , трещиностойкости K_{IC} и величины скачка напряжений $\Delta\sigma$

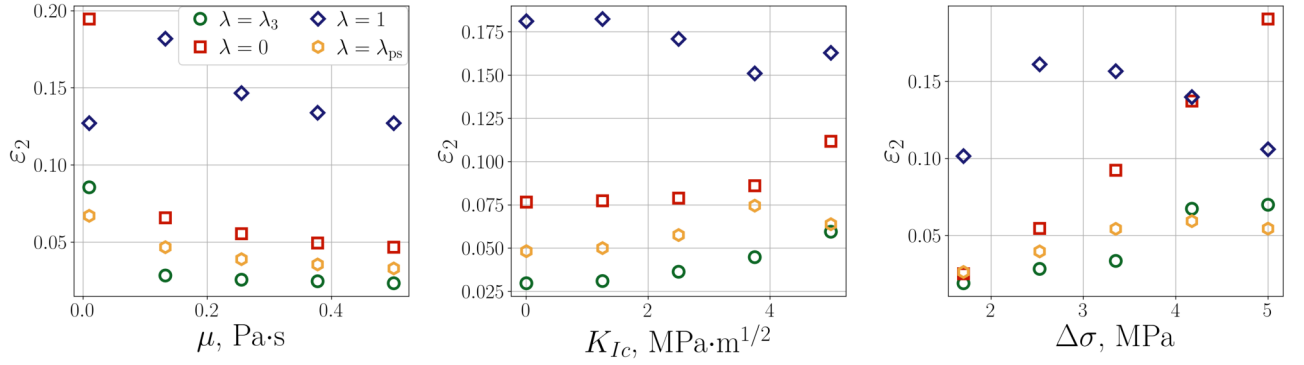


Рисунок 3.12 — Сравнение погрешности ε_2 при использовании универсального асимптотического решения ($\lambda = 0$), асимптотического решения с учетом слоев без релаксации ($\lambda = 1$), асимптотического решения с учетом слоев и оптимальным коэффициентом релаксации $\lambda_3(\xi)$, а также с коэффициентом релаксации λ_{ps} из уравнения (3.55).

Кроме того, на рисунке 3.12 приведено сравнение соответствующих значений погрешности для $\lambda_3(\xi)$ и $\lambda_{ps}(\xi)$, определенного в уравнении (3.55), в случае симметричных барьеров напряжений, для которого высота центрального слоя H определена однозначно. Также рассматриваются универсальное асимптотическое решение ($\lambda = 0$) и асимптотическое решение с учетом слоев без релаксации ($\lambda = 1$). Практически во всем исследуемом диапазоне параметров коэффициент релаксации $\lambda_3(\xi)$ обеспечивает наименьшую погрешность. При этом получаемые результаты оказываются близкими к результатам, соответствующим коэффициенту релаксации $\lambda_{ps}(\xi)$, ранее предложенному для задачи плоской деформации с симметричными барьерами напряжений. Таким обра-

зом, в дальнейших расчетах будет использоваться асимптотическое решение с учетом слоев и оптимальным коэффициентом релаксации $\lambda_3(\xi)$, получаемое путем решения задачи Коши (3.43) с модифицированным выражением для напряжений (3.56).

3.4 Верификация алгоритма и численные эксперименты

3.4.1 Верификация на основе полуаналитического решения для радиальной гидравлической трещины

Для верификации численного алгоритма сначала рассмотрим задачу о распространении радиальной (penny-shaped) гидравлической трещины при отсутствии отставания фронта жидкости от фронта трещины [182; 183]. Данная задача имеет четыре предельных режима распространения [26; 184]: M (вязкостный режим при доминировании накопления жидкости), K (режим, контролируемый трещиностойкостью при доминировании накопления жидкости), $\tilde{M}$ (вязкостный режим при доминировании утечек) и $\tilde{K}$ (режим, контролируемый трещиностойкостью при доминировании утечек). В настоящем разделе разработанный численный алгоритм сравнивается с полуаналитическим решением для радиальной гидравлической трещины [183]. Для исследования указанных режимов используются наборы параметров, соответствующие областям их применимости. Значения параметров, используемые в расчетах, приведены в таблице 3. Закачка жидкости осуществляется с постоянным объемным расходом $Q_0 = 0.01 \text{ м}^3/\text{с}$ в течение 1000 с.

В левой части рисунка 3.13 приведено сравнение изменения радиуса трещины от времени для предельных режимов распространения радиальной трещины гидроразрыва. Здесь радиус трещины определяется как протяженность трещины вдоль оси x при $y = 0$. Для K -режима численное решение имеет ступенчатый характер. Подобный характер распространения связан с дискретизацией расчетной области прямоугольными элементами и с практически постоянным давлением жидкости внутри трещины. Стоит отметить, что аналогичное поведение радиуса трещины наблюдалось ранее в работах [185;

Таблица 3 — Входные параметры для случая радиальной гидравлической трещины

Режим	E , ГПа	ν	μ , Па·с	K_{Ic} , МПа·м ^{1/2}	C_L , м/с ^{1/2}
K	32	0.3	10^{-4}	3	0
M	32	0.3	0.1	0	0
$\tilde{M}$	32	0.3	0.1	0	$5 \cdot 10^{-4}$
$\tilde{K}$	32	0.3	10^{-4}	5	$1 \cdot 10^{-4}$

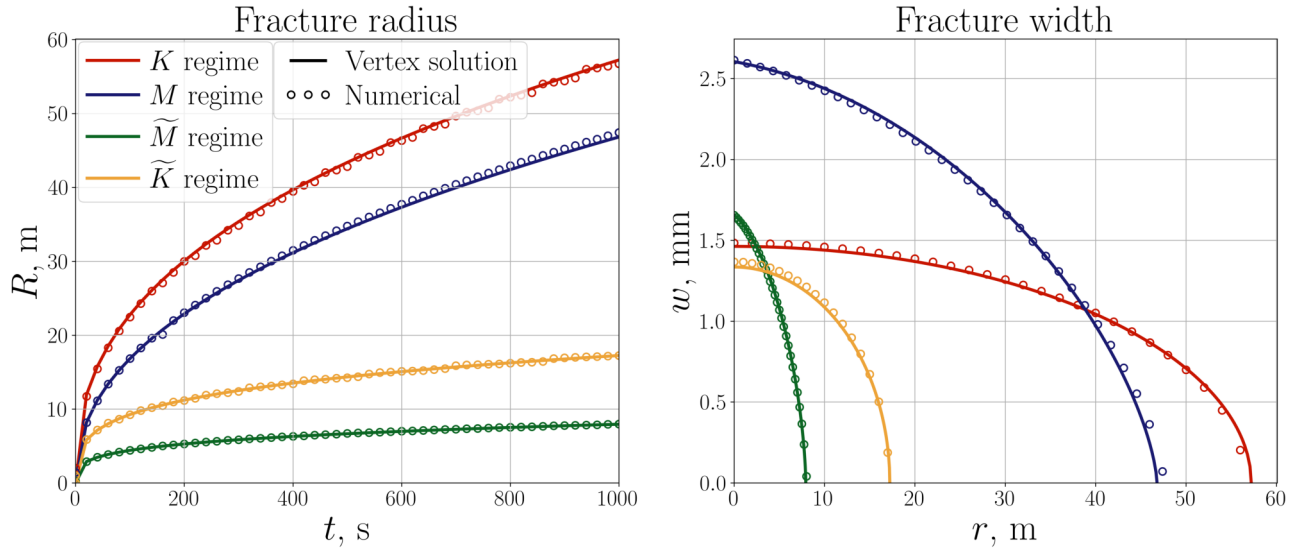


Рисунок 3.13 — Результаты расчетов для радиальной трещины гидроразрыва. Численные результаты показаны круговыми маркерами, а решение для предельных режимов — сплошными линиями. Слева: изменение радиуса трещины в зависимости от времени. Справа: профиль раскрытия трещины на момент окончания расчета $t = 1000$ с

186] для режима доминирующей трещиностойкости. Как видно из рисунка, в целом полученные численно значения радиуса трещины хорошо согласуются с предельными решениями для всех рассмотренных режимов.

В правой части рисунка 3.13 приведено сравнение профилей раскрытия трещины для различных режимов в конечный момент времени $t = 1000$ с. Во всех рассмотренных случаях наблюдается хорошее совпадение численных результатов с полуаналитическими решениями.

3.4.2 Сравнение с экспериментальными данными

Для валидации разработанного численного алгоритма результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными, представленными в работе [187]. В эксперименте гидравлическая трещина распространяется в плоскости контакта между двумя блоками из полиметилметакрилата (РММА). Поскольку блоки лишь прижимаются друг к другу с помощью домкратов и не подвергаются дополнительному склеиванию, трещиностойкость поверхности контакта полагается равной нулю. Кроме того, вследствие непроницаемости полиметилметакрилата утечки жидкости в окружающую среду также отсутствуют. Для сравнения с экспериментом используются следующие значения параметров: модуль Юнга $E = 3.3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$, трещиностойкость $K_{Ic} = 0$ и коэффициент утечек $C_L = 0$. Поверхность одного из блоков профилирована таким образом, что после сжатия в плоскости контакта эффективно создается кусочно-постоянное распределение напряжений. Границы слоев и соответствующие сжимающие напряжения приведены в таблице 4. Профиль сжимающих напряжений в плоскости контакта блоков представлен на рисунке 3.14.

Таблица 4 — Распределение значений минимальных сжимающих напряжений в плоскости контакта блоков для случая сравнения с экспериментом

Номер слоя i	y_i , м	y_{i-1} , м	σ_h^i , МПа
3	$+\infty$	25	5
2	25	-25	7
1	-25	$-\infty$	11.2

Жидкость с динамической вязкостью $\mu = 30$ Па·с закачивается с кусочно-постоянным расходом

$$Q(t) = \begin{cases} 0.9 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}, & 0 \text{ с} < t \leq 31 \text{ с}, \\ 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}, & 31 \text{ с} < t \leq 151 \text{ с}, \\ 2.3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}, & 151 \text{ с} < t. \end{cases} \quad (3.59)$$

Более подробное описание экспериментальной процедуры приведено в работе [187].

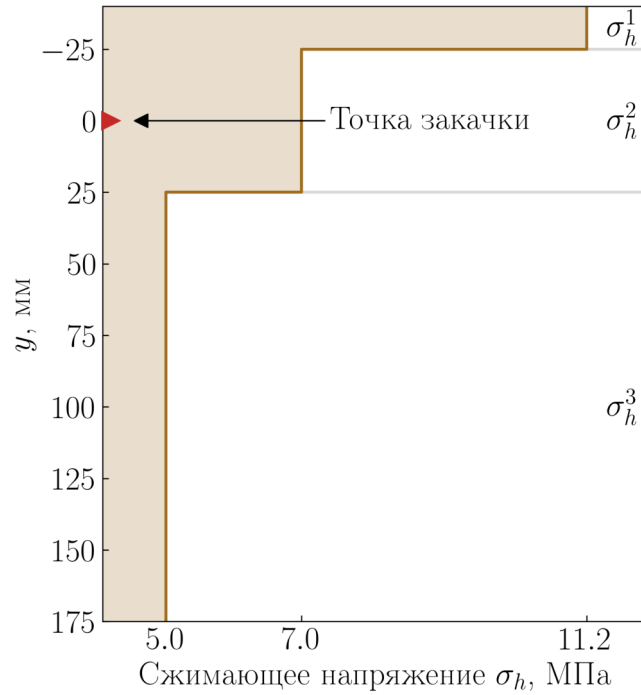


Рисунок 3.14 — Профиль минимальных сжимающих напряжений в плоскости контакта блоков для случая сравнения с экспериментом

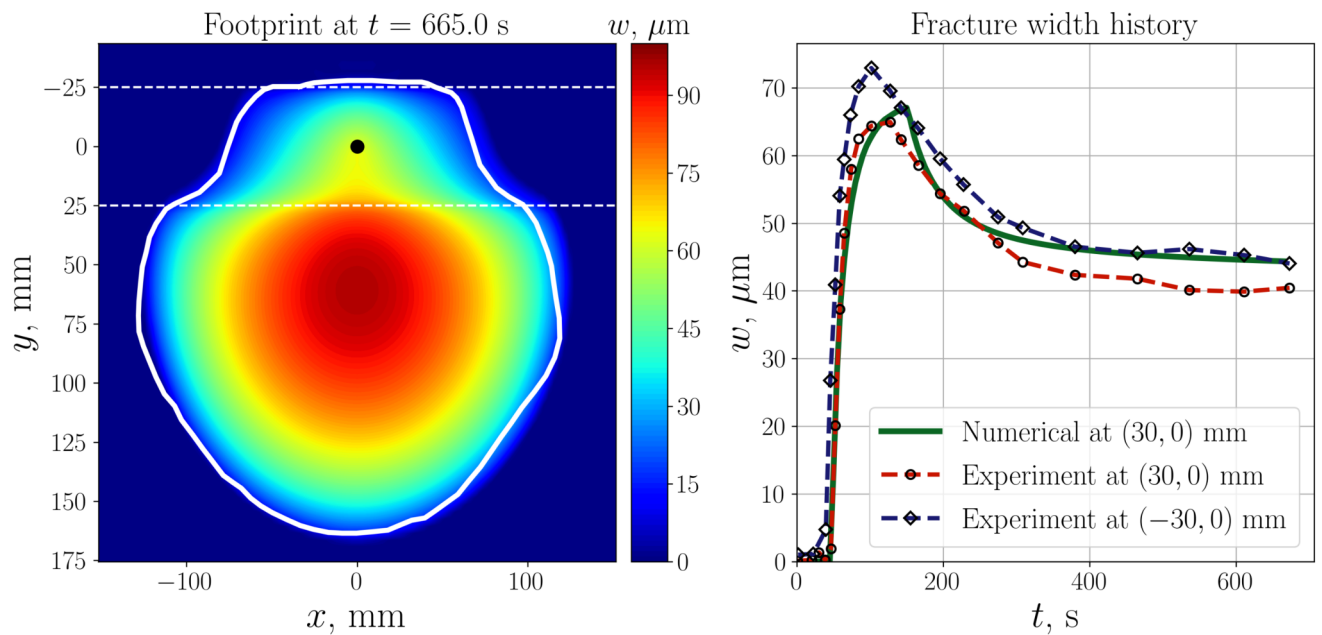


Рисунок 3.15 — Слева: численно рассчитанное раскрытие трещины (цветная заливка) и контур трещины, полученный в эксперименте (сплошная белая линия). Справа: изменение раскрытия трещины во времени. Красная и синяя пунктирные линии соответствуют экспериментальным измерениям в точках $(30, 0)$ мм и $(-30, 0)$ мм соответственно. Сплошная зеленая линия соответствует численному расчету модели

В левой части рисунка 3.15 приведены численные результаты для раскрытия трещины w в момент времени $t = 665$ с. Сплошная белая линия соответствует контуру трещины, полученному из экспериментальных данных. Горизонтальные пунктирные белые линии обозначают границы слоев с различными сжимающими напряжениями. Полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными для контура трещины. В правой части рисунка 3.15 представлено сравнение изменения раскрытия трещины в зависимости от времени в окрестности точки закачки. В эксперименте раскрытие измеряется в точках $(30, 0)$ мм и $(-30, 0)$ мм. В силу симметрии численно рассчитанное раскрытие определяется только в точке $(30, 0)$ мм. Как видно из рисунка 3.15, численные значения раскрытия трещины хорошо согласуются с экспериментальными данными в пределах точности измерений.

3.4.3 Тестирование алгоритма смыкания берегов трещины

Следующий пример иллюстрирует работу алгоритма смыкания берегов трещины. В частности, рассматривается трехслойная конфигурация сжимающих напряжений σ_h и коэффициента утечек C_L , при которой после смыкания формируются два несвязанных сегмента трещины. Для расчета используются следующие значения параметров: модуль Юнга $E = 9.5$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, трещиностойкость $K_{Ic} = 1$ МПа·м^{1/2} и динамическая вязкость жидкости $\mu = 0.1$ Па·с. Центральный слой окружен двумя слоями с меньшими сжимающими напряжениями и нулевым коэффициентом утечек. Границы слоев и соответствующие значения сжимающих напряжений и коэффициента утечек приведены в таблице 5.

Более низкий уровень сжимающих напряжений в окружающих слоях приводит к ускоренному распространению трещины после достижения границ центрального слоя. Жидкость закачивается в середину центрального слоя с кусочно-постоянным расходом

$$Q(t) = \begin{cases} 0.02 \text{ м}^3/\text{с}, & 0 \text{ с} < t \leq 550 \text{ с}, \\ 0 \text{ м}^3/\text{с}, & 550 \text{ с} < t. \end{cases} \quad (3.60)$$

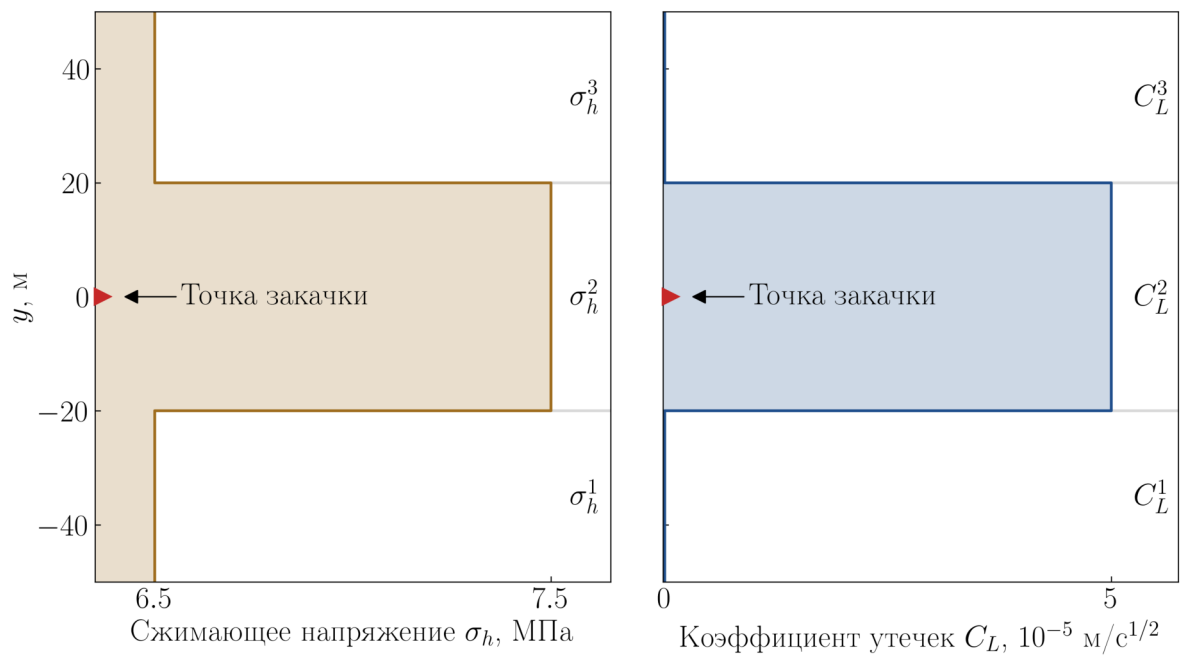


Рисунок 3.16 — Профиль минимальных сжимающих напряжений в пласте и распределение значений коэффициента утечек для случая смыкания берегов трещины

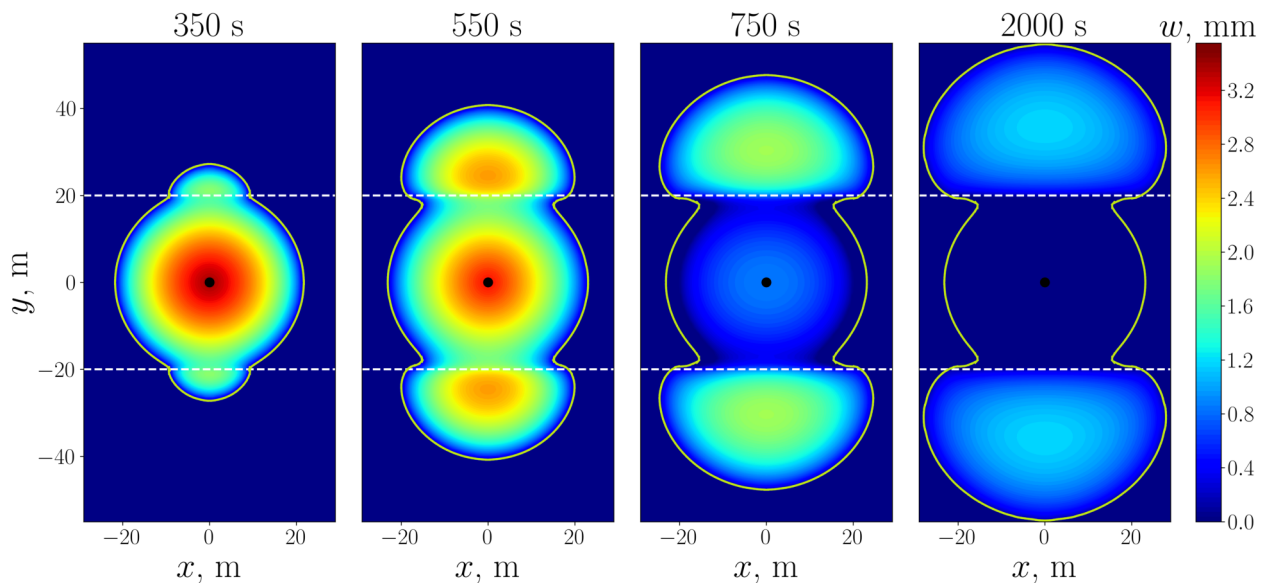


Рисунок 3.17 — Распределение раскрытия трещины для случая смыкания трещины, рассчитанное в моменты времени $t \in \{350, 550, 750, 2000\}$ с. Горизонтальные пунктирные линии обозначают границы слоев

Таблица 5 — Распределение значений минимальных сжимающих напряжений и коэффициента утечек по слоям для случая смыкания берегов трещины

Номер слоя i	y_i , м	y_{i-1} , м	σ_h^i , МПа	C_L , 10^{-5} м/с ^{1/2}
3	$+\infty$	20	6.5	0
2	20	-20	7.5	5
1	-20	$-\infty$	6.5	0

На рисунке 3.17 приведено рассчитанное раскрытие трещины в различные моменты времени. К моменту $t = 350$ с фронт трещины достигает границ центрального слоя и начинает расти быстрее за счет меньших значений сжимающих напряжений в соседних слоях. В момент $t = 550$ с закачка жидкости прекращается. После этого трещина в центральном слое начинает смыкаться вследствие утечки жидкости в пласт. В то же время части трещины в верхнем и нижнем слоях продолжают распространяться, поскольку коэффициент утечек в них равен нулю. К моменту $t = 2000$ с трещина в центральном слое полностью смыкается, и выполняется условие контакта $w(x, y) = w_{\min}(x, y)$. В результате две области трещины оказываются разделенными зоной, в которой берега трещины находятся в контакте.

3.5 Анализ чувствительности к размеру сетки

В данном разделе исследуется влияние размера элементов сетки на геометрию гидравлической трещины. Во всех расчетах используется квадратная сетка, то есть $\Delta x = \Delta y$. Поскольку точка закачки расположена в середине центрального слоя, число элементов n_c в этом слое выбирается нечетным. Это обеспечивает корректное расположение точки закачки и сохранение симметрии трещины до момента пересечения фронтом трещины границ слоев. Для обеспечения сходимости численного алгоритма используется адаптивный выбор шага по времени. Как отмечалось в начале данной главы, основная цель использования асимптотического решения с учетом слоев заключается в повышении

точности расчетов на грубых сетках, что, в свою очередь, позволяет применять такие сетки в практических задачах и сокращать вычислительные затраты.

3.5.1 Гидравлическая трещина постоянной высоты

Сначала рассматривается распространение трещины с ограниченным ростом по высоте, известной как трещина Перкинса — Керна — Нордгрена (РКН) [3; 4], в которой продуктивный центральный слой окружен двумя слоями с очень высокими сжимающими напряжениями, препятствующими росту трещины по высоте. Для РКН-модели выделяют четыре предельных режима распространения трещины [66; 188], определяемых преобладающим влиянием вязкости жидкости или трещиностойкости породы, а также наличием слабых или интенсивных утечек жидкости в окружающую породу. В настоящем разделе рассматриваются только режимы накопления жидкости, соответствующие отсутствию утечек: вязкостный режим (M) и режим, контролируемый трещиностойкостью (K).

Для оценки чувствительности геометрии трещины к размеру элементов сетки расчеты выполняются для различных значений числа элементов n_c в центральном слое. Высота центрального продуктивного слоя составляет $H = 20$ м, сжимающие напряжения в окружающих слоях равны $\sigma_h^1 = \sigma_h^3 = 30$ МПа, а в центральном слое $\sigma_h^2 = 20$ МПа. Параметры, соответствующие режимам K и M , приведены в таблице 6. Расчеты выполняются для 700 секунд закачки жидкости с постоянным объемным расходом.

Таблица 6 — Параметры расчетов для вязкостного режима (M) и режима, контролируемого трещиностойкостью (K), для трещины постоянной высоты.

Режим	E , ГПа	ν	K_{Ic} , МПа·м ^{1/2}	C_L , м/с ^{1/2}	μ , Па·с	Q , м ³ /с
K	1	0.3	1.5	0	0.01	0.05
M	3	0.3	0.5	0	0.1	0.02

В левой части рисунка 3.18 приведена зависимость высоты трещины от числа элементов n_c в центральном продуктивном слое. Синие ромбы соответствуют K -режиму и универсальному асимптотическому решению, красные

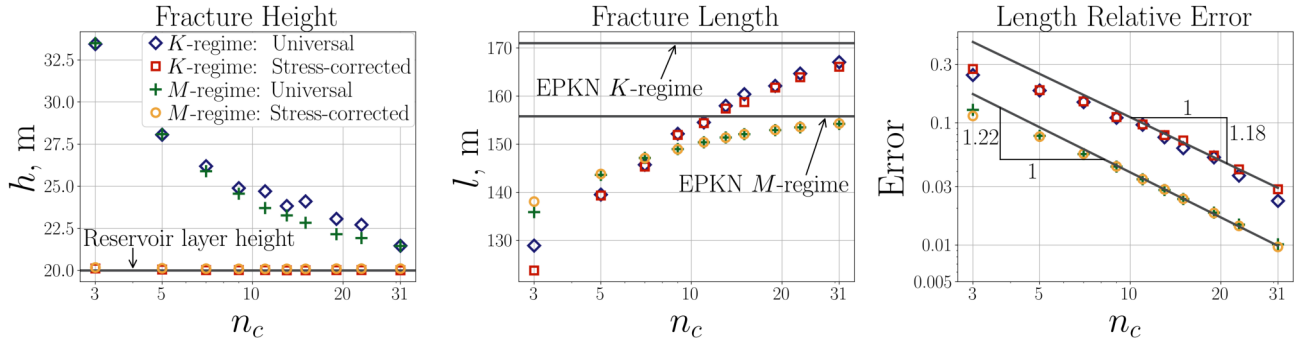


Рисунок 3.18 — Слева: высота трещины. По центру: длина трещины. Справа: погрешность длины трещины относительно эталонного решения. Все величины приведены в зависимости от числа элементов n_c в центральном слое для случая трещины постоянной высоты. Синие ромбы соответствуют K -режиму и универсальному асимптотическому решению, красные квадраты — K -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений, зеленые крестообразные маркеры — M -режиму и универсальному асимптотическому решению, желтые круги — M -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений. Серые горизонтальные линии обозначают эталонную длину, рассчитанную по модели EPKN [189]

квадраты — K -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений, зеленые крестообразные маркеры — M -режиму и универсальному асимптотическому решению, желтые круги — M -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений. Серая горизонтальная линия соответствует высоте продуктивного слоя. В случае использования универсального асимптотического решения расхождение между высотой трещины и высотой центрального продуктивного слоя в режимах K и M составляет примерно $2\Delta y$. Данная погрешность соответствует проникновению фронта трещины примерно на один элемент за границу слоя и является нежелательной особенностью исходной реализации алгоритма ILSA. При использовании асимптотического решения с релаксацией напряжений высота трещины практически точно совпадает с высотой центрального продуктивного слоя для обоих режимов и всех рассмотренных сеток.

В центральной части рисунка 3.18 приведена финальная длина трещины на момент окончания расчетов в зависимости от числа элементов n_c в центральном слое. Серые горизонтальные линии соответствуют эталонной длине трещины, рассчитанной по модели EPKN с нелокальной упругостью [189]. Для

K -режима как универсальное асимптотическое решение, так и асимптотическое решение с релаксацией напряжений дают существенно меньшую длину по сравнению с эталонным решением. Расхождение в длине между наиболее грубой ($n_c = 3$) и наиболее подробной ($n_c = 31$) сетками составляет около 25%. Для M -режима это различие снижается приблизительно до 10%. Стоит отметить, что повышение точности расчета высоты не оказывает заметного влияния на точность расчета длины трещины. Причина заключается в том, что элементы, расположенные за пределами центрального слоя, оказываются практически полностью сомкнутыми и не содержат жидкости. Поэтому объем трещины в каждом вертикальном сечении практически не зависит от используемого асимптотического решения, что в итоге приводит к близким значениям длины трещины.

В правой части рисунка 3.18 приведена погрешность длины трещины относительно эталонного решения. Наблюдаемый порядок сходимости составляет приблизительно 1.2 как для K , так и для M режимов. Стоит отметить, что длина трещины сходится с одинаковой скоростью как для универсального асимптотического решения, так и для асимптотического решения с релаксацией напряжений.

Важно отметить, что аналогичная проблема сходимости длины для трещины постоянной высоты упоминалась в работе [29]. В указанной работе в качестве основной причины погрешности длины считался неточный расчет высоты трещины. Однако при использовании асимптотического решения с релаксацией напряжений рост трещины останавливается точно на границе барьера напряжений, в то время как точность определения длины остается практически неизменной. Одно из возможных объяснений заключается в том, что асимптотическое решение становится менее точным при большой кривизне фронта трещины, когда область применимости предположения о плоской деформации, лежащего в основе асимптотического решения в окрестности фронта, существенно уменьшается. Более детальное исследование данного вопроса выходит за рамки настоящей работы.

3.5.2 Симметричные барьеры напряжений

В данном разделе исследуется влияние размера сетки на геометрию трещины в случае умеренных симметричных барьеров напряжений, которые, в отличие от РКН трещины, допускают рост трещины в высоту. Как и в предыдущем разделе, рассматриваются два набора параметров, приведенных в таблице 6. Для того чтобы трещина могла распространяться по высоте, сжимающие напряжения в окружающих слоях снижены до $\sigma_h^1 = \sigma_h^3 = 20.15$ МПа для K -режима и до $\sigma_h^1 = \sigma_h^3 = 20.35$ МПа для M -режима. Сжимающее напряжение в центральном слое остается прежним, $\sigma_h^2 = 20$ МПа.

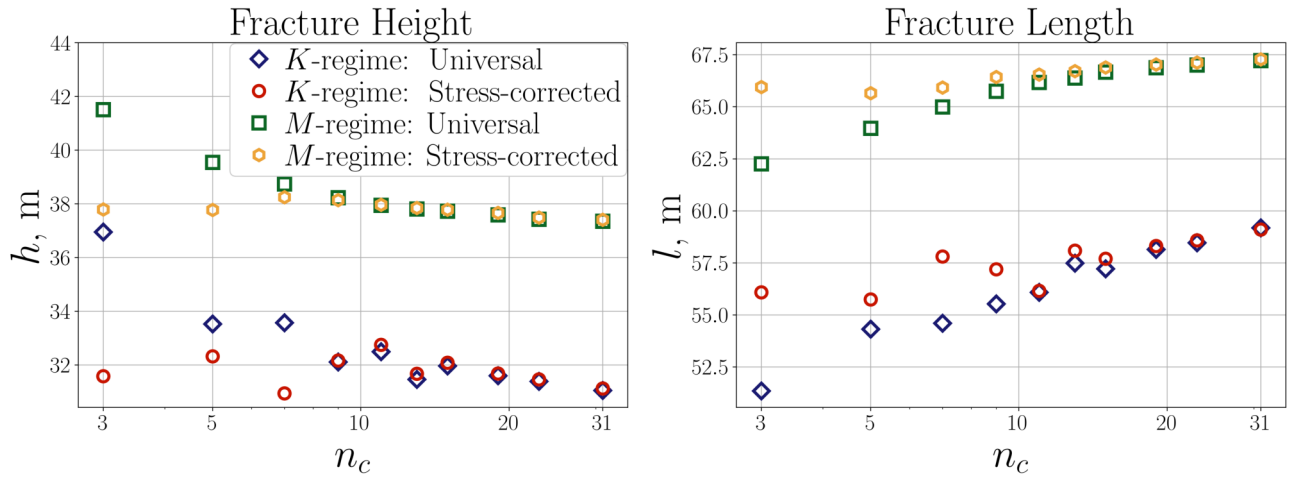


Рисунок 3.19 — Слева: высота трещины. Справа: длина трещины. Значения приведены в момент времени $t = 300$ с для случая симметричных барьеров напряжений в зависимости от числа элементов n_c в центральном слое. Синие ромбы соответствуют K -режиму и универсальному асимптотическому решению, красные круги — K -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений, зеленые квадраты — M -режиму и универсальному асимптотическому решению, желтые шестиугольники — M -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений

На рисунке 3.19 приведены высота трещины (слева) и длина трещины (справа) в зависимости от числа элементов n_c в центральном продуктивном слое. Синие ромбы соответствуют K -режиму и универсальному асимптотическому решению, красные круги — K -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений, зеленые квадраты — M -режиму и универсальному

асимптотическому решению, желтые шестиугольники — M -режиму и асимптотическому решению с релаксацией напряжений. Немонотонное поведение высоты и длины трещины в K -режиме связано со ступенчатым характером распространения трещины в этом режиме, который обсуждался ранее в разделе 3.4.1. Универсальное асимптотическое решение существенно завышает высоту трещины на грубой сетке, что также приводит к значительным погрешностям в длине, поскольку объем трещины при этом остается прежним в силу закона сохранения объема (3.7). В то же время асимптотическое решение с релаксацией напряжений дает более точную оценку высоты трещины, что обеспечивает и более точный расчет длины.

На рисунке 3.20 приведена зависимость высоты трещины от времени для K -режима и M -режима. На каждом графике слева приведена высота трещины для универсального асимптотического решения, справа — результаты для асимптотического решения с релаксацией напряжений. Черные горизонтальные линии соответствуют высоте центрального продуктивного слоя. В случае универсального асимптотического решения значения высоты трещины на грубых сетках имеет значительную погрешность по сравнению с результатами на подробных сетках. В отличие от универсальной асимптотики, асимптотическое решение с релаксацией напряжений обеспечивает значительно более точное описание процесса пересечения границ слоев. Высота трещины при пересечении границы слоя практически не зависит от размера элементов сетки.

Стоит отметить, что в K -режиме наблюдается осциллирующее поведение, аналогичное наблюдавшемуся ранее в случае радиальной трещины. Также следует подчеркнуть, что значения высоты трещины в начальный момент времени $t = 0$ различаются для разных значений числа элементов в центральном слое n_c , поскольку начальный размер трещины пропорционален размеру элементов сетки (см. раздел 3.2.6). Начальная трещина состоит из единственного опорного элемента в начале координат, окруженного двумя соседними концевыми элементами сверху и снизу. Таким образом, высота начальной трещины в точности равна $2\Delta y$, что и приводит к различию начальной высоты для разных сеток. Однако объем начальной трещины задается равным нулю, что существенно снижает влияние начального условия на дальнейшее распространение. Кроме того, как отмечено в работе [181], влияние начального условия быстро затухает после начала распространения трещины. Поэтому различие высоты трещины для

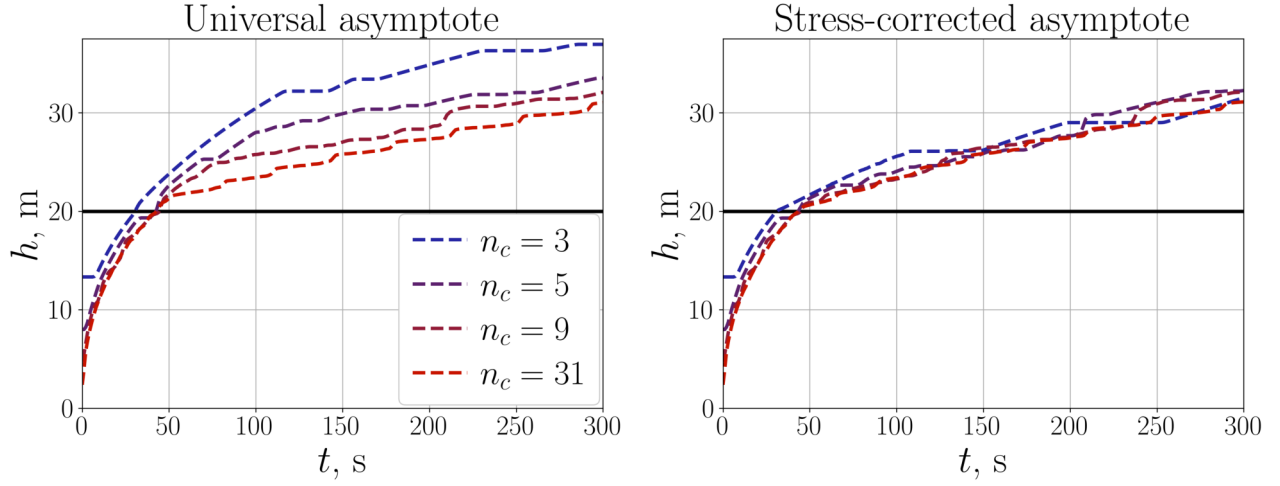
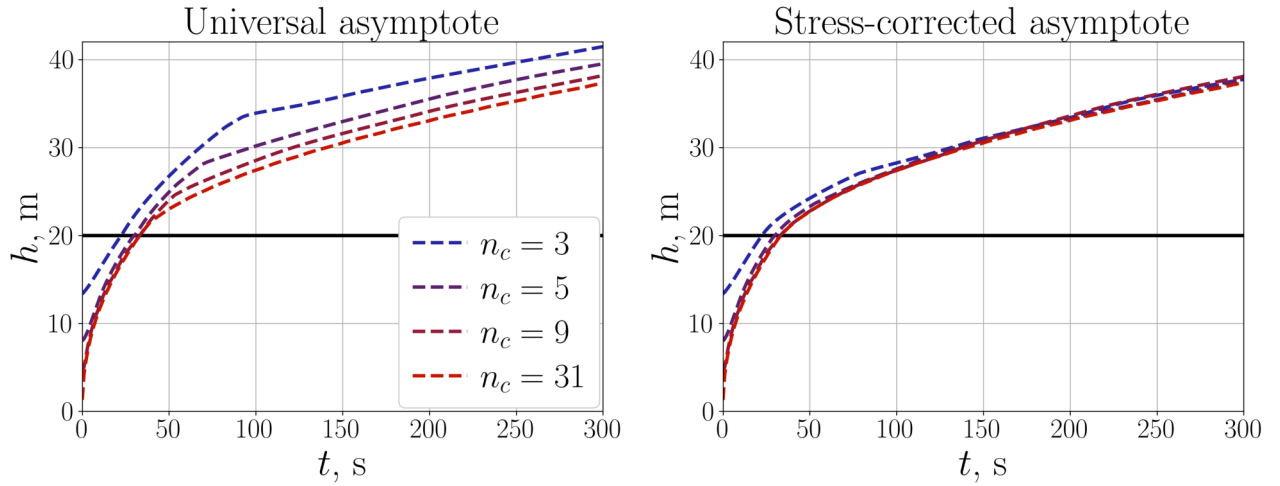
а) K -режимб) M -режим

Рисунок 3.20 — Зависимость высоты трещины от времени для K -режима и M -режима. На каждом графике слева приведена высота трещины для универсального асимптотического решения, справа — для асимптотического решения с релаксацией напряжений. Черная горизонтальная линия соответствует высоте центрального продуктивного слоя, n_c обозначает число элементов в центральном слое

разных сеток не является существенным источником погрешности, особенно на больших временах закачки.

3.5.3 Прорыв тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями

В данном разделе исследуется распространение трещины в случае наличия тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями. Для расчетов используются следующие параметры: модуль Юнга $E = 20$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, трещиностойкость породы $K_{Ic} = 0.5$ МПа·м^{1/2}, коэффициент утечек $C_L = 0$, вязкость жидкости $\mu = 0.1$ Па·с и объемный расход закачки $Q = 0.1$ м³/с. Границы слоев и соответствующие значения сжимающих напряжений приведены в таблице 7.

Таблица 7 — Распределение значений минимальных сжимающих напряжений по слоям для случая тонкой перемычки

Номер слоя i	y_i , м	y_{i-1} , м	σ_h^i , МПа
5	$+\infty$	37.5	35
4	37.5	12.5	26
3	12.5	7.5	30
2	7.5	-7.5	26
1	-7.5	$-\infty$	35

На рисунке 3.21 представлен профиль минимальных сжимающих напряжений в пласте. Красный треугольный маркер соответствует положению точки закачки. Тонкая перемычка расположена в третьем слое между $y_2 = 7.5$ м и $y_3 = 12.5$ м и характеризуется повышенным сжимающим напряжением $\sigma_h^3 = 30$ МПа. Расчеты выполняются для различного числа элементов в тонкой перемычке $n \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$, при этом шаг сетки выбирается из условия $\Delta x = \Delta y = (y_3 - y_2)/n$.

На рисунке 3.22 представлены контуры трещины в момент времени $t = 150$ с, полученные с использованием универсального асимптотического решения (слева) и асимптотического решения с релаксацией напряжений (справа).

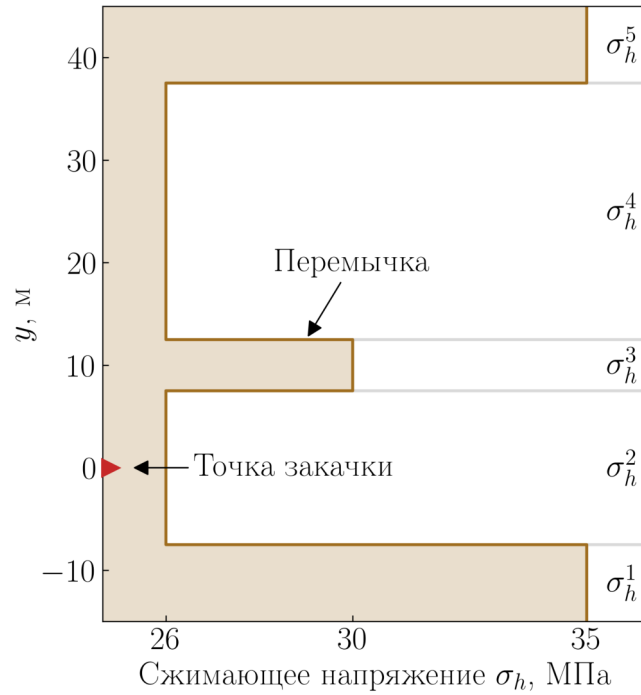


Рисунок 3.21 — Профиль минимальных сжимающих напряжений в пласте для случая тонкой перемычки

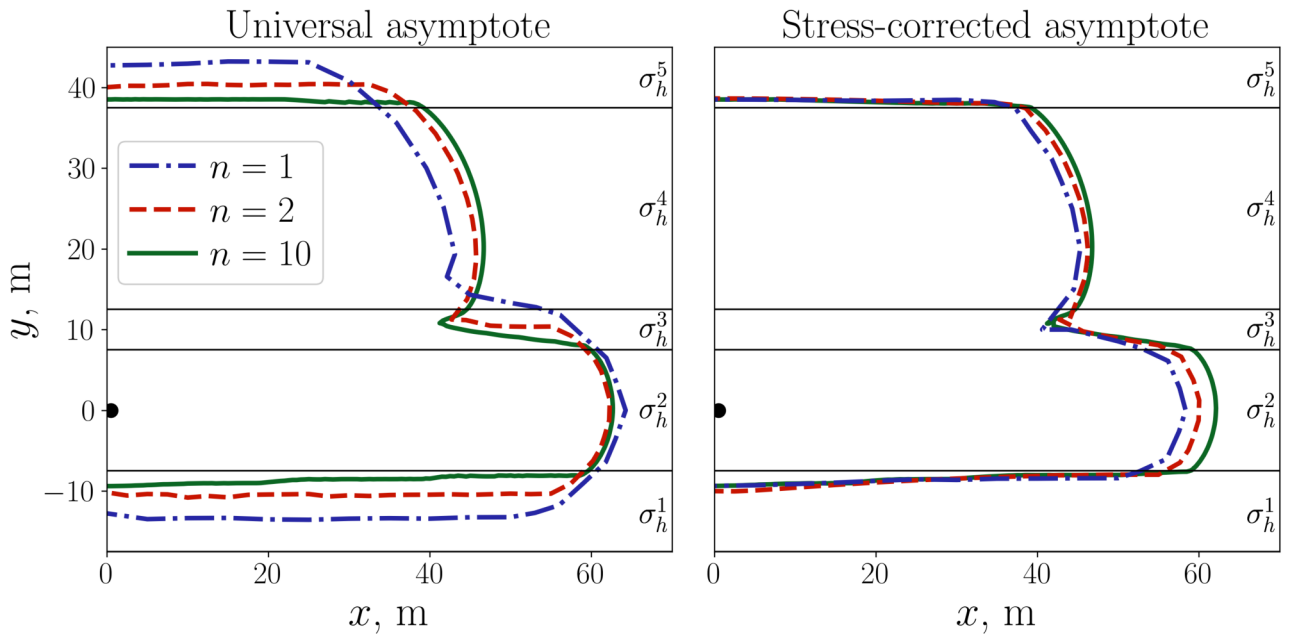


Рисунок 3.22 — Контур трещины для случая тонкого слоя с высокими сжимающими напряжениями в момент времени $t = 150$ с для универсального асимптотического решения (слева) и асимптотического решения с релаксацией напряжений (справа). Число элементов в тонком слое обозначено через n . Горизонтальные черные линии соответствуют границам слоев, а черный круглый маркер обозначает точку закачки

Синие штрихпунктирные линии соответствуют расчету на грубой сетке с $n = 1$, красные пунктирные линии — расчету на сетке с $n = 2$, а зеленые сплошные линии — расчету на подробной сетке с $n = 10$. Как видно из рисунка, асимптотическое решение с релаксацией напряжений обеспечивает высокую точность определения высоты трещины, в отличие от универсального асимптотического решения. Снижение точности при использовании универсального асимптотического решения связано с проблемой, проиллюстрированной на рисунке 3.18 слева. Поскольку концевые элементы не учитывают наличие слоев, трещина всегда распространяется как минимум на один элемент за границу слоя. Для обоих асимптотических решений длина трещины зависит от размера сетки. Однако различие между результатами, полученными на грубой и подробной сетках, не превышает 10% для универсального асимптотического решения и 6% для асимптотического решения с релаксацией напряжений, что является приемлемым для большинства практических задач. Следует отметить, что зависимость длины трещины от размера сетки может быть связана с тем, что распространение трещины в слоях, расположенных выше и ниже тонкой перемычки, по своему характеру близко к случаю PKN трещины, для которого ранее была отмечена относительно высокая чувствительность длины трещины к размеру сетки (см. обсуждение в разделе 3.5.1).

Для количественной оценки точности расчета прорыва тонкой перемычки на рисунке 3.23 представлена зависимость высоты трещины от времени. Слева показаны результаты, полученные с использованием универсального асимптотического решения, а справа — с использованием асимптотического решения с релаксацией напряжений. Рассматриваются различные значения числа элементов в тонком слое $n \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$. Круговыми маркерами отмечены моменты времени, соответствующие прорыву тонкой перемычки. В случае асимптотического решения с релаксацией напряжений время прорыва соответствует моменту появления концевой элемента над тонкой перемычкой. Для универсального асимптотического решения прорыв перемычки фиксируется при появлении опорного элемента над ней, поскольку универсальное асимптотическое решение не учитывает влияние слоев. Как видно из рисунка, при использовании универсального асимптотического решения момент прорыва тонкой перемычки существенно зависит от размера сетки. Напротив, в случае асимптотического решения с релаксацией напряжений как эволюция высоты трещины, так и момент прорыва перемычки практически не зависят от размера

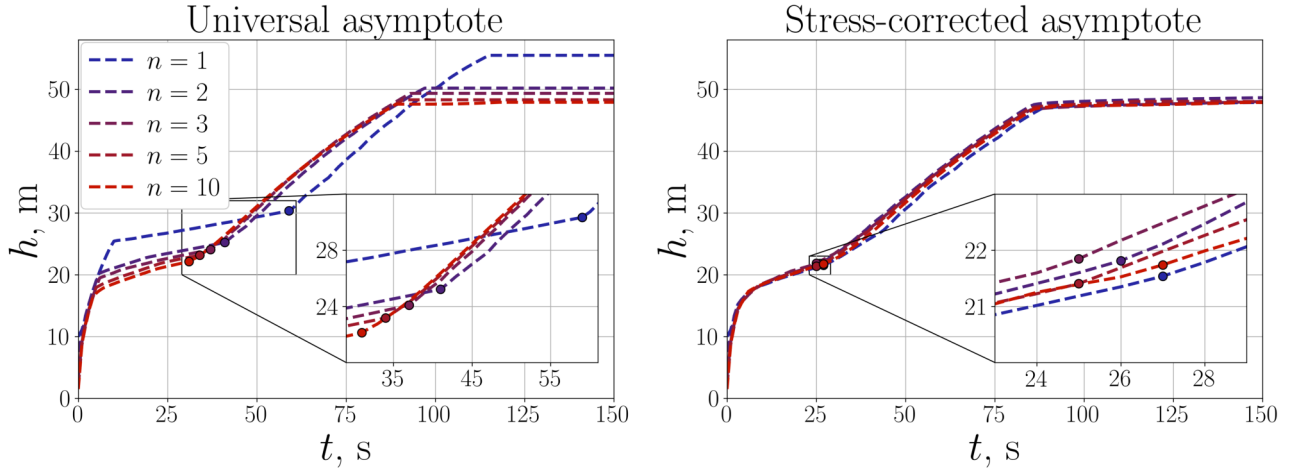


Рисунок 3.23 — Зависимость высоты трещины от времени для случая тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями. Различные кривые соответствуют разному числу элементов в перемычке $n \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$. Слева представлены результаты, полученные с использованием универсального асимптотического решения, справа — результаты, полученные с использованием асимптотического решения с релаксацией напряжений. Круговые маркеры обозначают момент прорыва тонкой перемычки

сетки. Таким образом, использование асимптотического решения с релаксацией напряжений позволяет существенно повысить точность расчетов при наличии в модели тонких слоев.

3.5.4 Сравнение вычислительной эффективности

Использование ОДУ-аппроксимации для отслеживания фронта трещины требует численного решения обыкновенного дифференциального уравнения для каждого опорного и концевой элемента на каждом шаге по времени и на каждой итерации алгоритма. Такой подход является более затратным с вычислительной точки зрения по сравнению с использованием универсального асимптотического решения. Поскольку повышение точности достигается ценой дополнительных вычислительных затрат, необходимо оценить вычислительную эффективность алгоритма ILSA при использовании асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям. Общее время вычислений зависит от множества факторов, таких как размер сетки, граничные усло-

вия, конфигурация слоев и другие особенности рассматриваемой задачи. Для оценки вычислительной эффективности рассматривается случай умеренных симметричных барьеров напряжений в вязкостном режиме (M), который уже рассматривался в разделе 3.5.2.

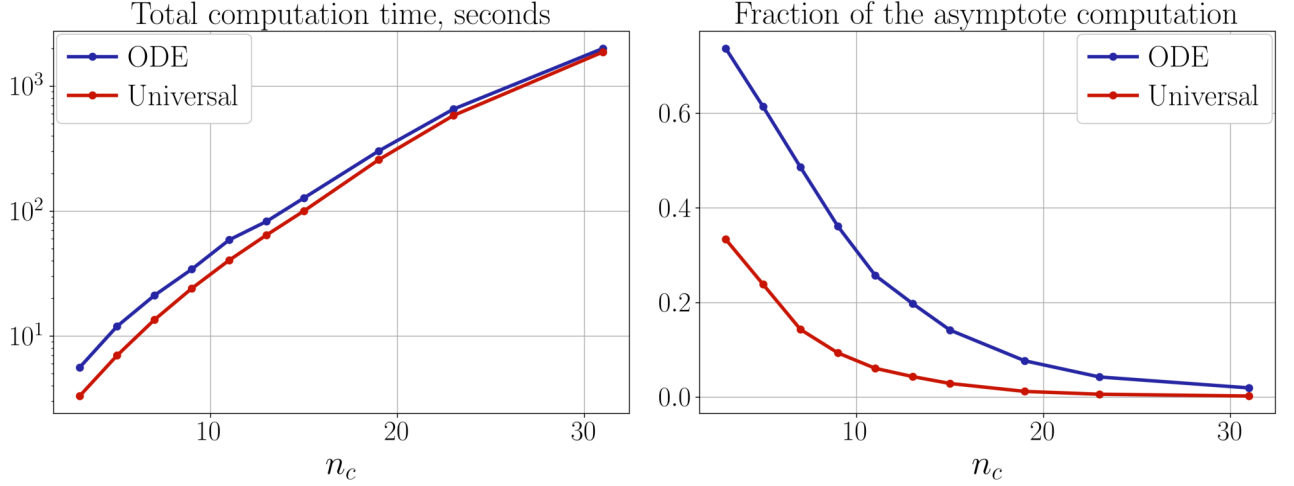


Рисунок 3.24 — Слева показана зависимость общего времени расчета от числа элементов в центральном слое n_c для универсального асимптотического решения и ОДУ-аппроксимации на примере случая умеренных барьеров по напряжениям. Справа представлена доля времени, затрачиваемого на вычисление асимптотического решения, относительно общего времени одной итерации алгоритма ILSA

В левой части рисунка 3.24 представлено полное время вычислений для рассматриваемого примера при использовании универсального асимптотического решения и ОДУ-аппроксимации в зависимости от числа элементов n_c в центральном слое. Время вычислений для алгоритма, использующего ОДУ-аппроксимацию, несколько выше по сравнению с алгоритмом, основанным на универсальном асимптотическом решении. Однако с увеличением числа элементов это различие практически исчезает. Для более детального анализа вычислительной эффективности в правой части рисунка 3.24 показана доля времени, затрачиваемого на вычисление асимптотического решения, относительно полного времени одной итерации алгоритма ILSA. Для грубых сеток число концевых элементов оказывается относительно большим по сравнению с общим числом элементов. При этом число концевых элементов масштабируется пропорционально периметру трещины, тогда как общее число элементов — пропорционально ее площади. В результате на грубых сетках вычислительные

затраты, связанные с вычислением асимптотического решения, преобладают над остальной частью расчета. На более подробных сетках, напротив, основные вычислительные затраты приходятся на решение системы уравнений, а доля времени, затрачиваемая на вычисление асимптотического решения, становится пренебрежимо малой.

Наконец, важно отметить, что использование ОДУ-аппроксимации повышает точность расчетов, как было показано в предыдущих разделах. Поэтому увеличение времени расчета может быть компенсировано возможностью использования более грубой сетки.

3.6 Одновременное распространение нескольких гидравлических трещин вдоль наклонной скважины

В данном разделе разработанный алгоритм `planar 3D ILSA` обобщается на случай одновременного распространения нескольких параллельных гидравлических трещин вдоль наклонной скважины. Целью настоящего раздела является исследование взаимного влияния одновременно распространяющихся трещин и, в частности, анализ влияния угла наклона скважины на интенсивность механического взаимодействия между трещинами (эффект *stress shadowing*) и на конечную геометрию отдельных трещин.

На рисунке 3.25 схематично показана наклонная скважина, вдоль которой одновременно распространяются N гидравлических трещин. Предполагается, что все трещины расположены в плоскостях, параллельных плоскости $z = 0$, а точки перфорации (или точки закачки) отдельных трещин могут быть смещены вдоль ствола скважины. Положение точек перфорации вдоль оси z задается координатами z^k , которые, в свою очередь, определяются углом наклона скважины φ . Каждая отдельная трещина описывается с использованием модели `planar 3D ILSA`, представленной в разделах 3.1–3.3. В данном разделе рассматриваются дополнительные элементы модели, необходимые для описания системы из нескольких трещин: описание упругого взаимодействия между трещинами, упрощения, обеспечивающие применимость подхода `ILSA` к получаемой системе уравнений, явное вычисление коэффициентов упругого влияния,

а также распределение расхода закачиваемой жидкости между перфорационными отверстиями.

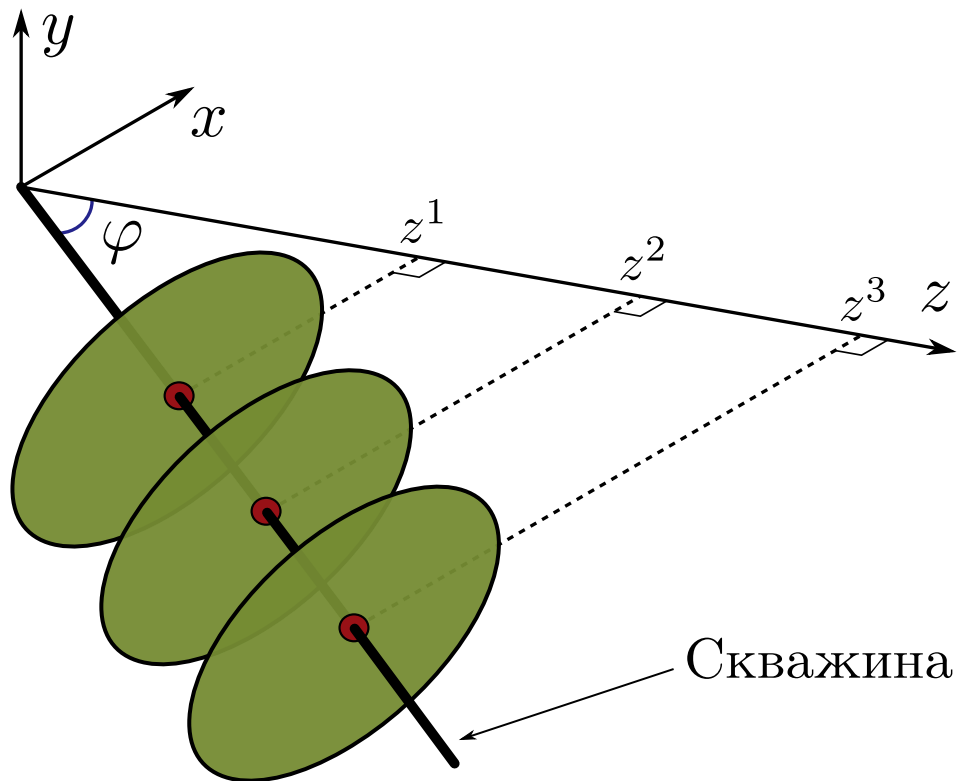


Рисунок 3.25 — Схема нескольких параллельных гидравлических трещин, инициированных вдоль наклонной скважины

3.6.1 Модель для системы нескольких трещин

Рассматривается система из N параллельных плоских гидравлических трещин, распространяющихся в однородной упругой среде. Каждая k -я трещина расположена в плоскости $z = z^k$, $k = 1, \dots, N$, где координаты z^k определяются геометрией наклонной скважины (см. рисунок 3.25). Трещины описываются с помощью разрыва смещений на ее берегах. В отличие от одиночной плоской трещины, для которой достаточно учитывать только нормальную составляющую разрыва смещения (т.е. раскрытие трещины), задача о системе нескольких трещин является более общей и включает в себя все три компоненты $D_j^k(x, y)$, $j = 1, 2, 3$, соответствующие разрывам смещения вдоль осей x , y и z . Стоит отметить, что нормальная компонента D_3^k совпадает с раскрытием трещины w^k , в то время как касательные компоненты в плоскости трещины D_1^k

и D_2^k представляют собой сдвиговые разрывы смещения, обусловленные механическим взаимодействием с соседними трещинами.

В однородной изотропной упругой среде напряжения в точке (x, y, z) , обусловленные наличием всех трещин, могут быть записаны в виде [54]

$$\sigma_{iz}(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^3 \int_{\mathcal{A}^l} C_{izj}(x - x', y - y', z - z^l) D_j^l(x', y') dx' dy', \quad (3.61)$$

где $\mathcal{A}^l$ обозначает контур l -й трещины, а ядро $C_{izj}(x - x', y - y', z - z^l)$ представляет собой iz -компоненту тензора напряжений в точке (x, y, z) , возникающую вследствие единичного разрыва смещений в направлении j , приложенного в точке (x', y', z^l) . В силу симметрии функции Грина для упругой среды независимыми являются только шесть из девяти ядер C_{izj} . Явные выражения для этих ядер через производные скалярной потенциальной функции приведены в разделе 3.6.3.

Механическое равновесие каждой трещины требует равенства нулю касательных напряжений на ее берегах, в то время как нормальное напряжение должно уравнивать давление жидкости внутри трещины. Для k -й трещины это приводит к следующей системе граничных условий:

$$\sigma_{xz}(x, y, z^k) = 0, \quad \sigma_{yz}(x, y, z^k) = 0, \quad \sigma_{zz}(x, y, z^k) + \sigma_h(y) = p^k(x, y), \quad (3.62)$$

где p^k — давление жидкости внутри k -й трещины, а $\sigma_h(y)$ — минимальное сжимающее напряжение в пласте, которое в соответствии с моделью planar 3D, описанной в разделе 3.1, зависит только от вертикальной координаты y . Уравнения (3.61) и (3.62) в совокупности представляют связанную упругую постановку задачи для системы N параллельных трещин.

Помимо упругого взаимодействия, задача о множественных трещинах требует математического описания распределения расхода закачиваемой жидкости между перфорационными отверстиями. Обозначим через q^k расход жидкости, поступающей в k -ю трещину. Закон сохранения массы жидкости в стволе скважины означает, что сумма расходов в отдельных трещинах равна общему расходу закачки Q_0 :

$$\sum_{k=1}^N q^k = Q_0. \quad (3.63)$$

Распределение расхода между трещинами в этом случае определяется из условия непрерывности давления в скважине с учетом гидравлических потерь на

трение в перфорациях [190]:

$$p^k + p_{\text{pf}}^k(q^k) = p_w, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.64)$$

где p^k — давление жидкости внутри k -й трещины в точке перфорации, $p_{\text{pf}}^k(q_k)$ — соответствующие потери давления на трение в перфорационном канале, а p_w — давление жидкости внутри ствола скважины. Для упрощения анализа и изолированного изучения эффекта взаимного механического влияния трещин (stress shadowing) далее в настоящем разделе рассматривается только случай существенных потерь давления на перфорациях, при котором распределение расхода между трещинами становится равномерным: $q^k = Q_0/N$. Такой режим характерен для так называемых компоновок заканчивания с ограничением входа (limited-entry completion), где высокое гидравлическое сопротивление перфораций намеренно используется для обеспечения равномерного распределения потока.

3.6.2 Численная схема учета взаимного влияния трещин

Для дискретизации каждой трещины используются прямоугольные элементы размера $\Delta x \times \Delta y$ в соответствии с сеткой для одиночной трещины, введенной в разделе 3.2. Для компонент разрыва смещения D_j^k и давления жидкости p^k используется кусочно-постоянная аппроксимация. Для упрощения обозначений жирными символами обозначаются глобальные векторы, объединяющие значения со всех элементов всех трещин, например $\mathbf{D}_j = (\mathbf{D}_j^1, \dots, \mathbf{D}_j^N)^T$, где вектор $\mathbf{D}_j^k$ содержит значения j -й компоненты разрыва смещения D_j^k на элементах сетки k -й трещины. В частности, $\mathbf{w} = \mathbf{D}_3$ обозначает глобальный вектор раскрытия для всех трещин.

Подстановка кусочно-постоянной аппроксимации в уравнения упругости (3.61) и граничные условия (3.62) для всех трещин приводит к следующей сопряженной дискретной системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{C}_{xx} \mathbf{D}_x + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{D}_y + \mathbf{C}_{xz} \mathbf{D}_z, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{C}_{yx} \mathbf{D}_x + \mathbf{C}_{yy} \mathbf{D}_y + \mathbf{C}_{yz} \mathbf{D}_z, \\ \mathbf{p} &= \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{C}_{zx} \mathbf{D}_x + \mathbf{C}_{zy} \mathbf{D}_y + \mathbf{C}_{zz} \mathbf{D}_z, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где матрицы $\mathbf{C}_{izj}$ имеют блочную структуру и содержат проинтегрированные значения соответствующих ядер C_{izj} , $\mathbf{p}$ — глобальный вектор давления жидкости, а $\boldsymbol{\sigma}_h$ — соответствующий вектор сжимающих напряжений в породе. Система (3.65) может быть сведена к одному матричному уравнению относительно глобального вектора раскрытия $\mathbf{w} = \mathbf{D}_z$. Вводя объединенный вектор касательных компонент и соответствующие блочные матрицы

$$\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{tt} = \begin{pmatrix} C_{xxx} & C_{xzy} \\ C_{yzx} & C_{zyy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{tz} = \begin{pmatrix} C_{xzz} \\ C_{yzz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{zt} = \begin{pmatrix} C_{zxx} & C_{zzy} \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

систему уравнений (3.65) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{C}_{tt}\mathbf{D}_t + \mathbf{C}_{tz}\mathbf{w}, \\ \mathbf{p} &= \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{C}_{zt}\mathbf{D}_t + \mathbf{C}_{zzz}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Исключая касательный разрыв смещения из первого уравнения, $\mathbf{D}_t = -\mathbf{C}_{tt}^{-1}\mathbf{C}_{tz}\mathbf{w}$, и подставляя полученное выражение во второе уравнение, можно получить приведенное уравнение упругости

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{C}^*\mathbf{w}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}_{zzz} - \mathbf{C}_{zt}\mathbf{C}_{tt}^{-1}\mathbf{C}_{tz}. \quad (3.68)$$

Уравнение (3.68) представляет собой дискретное уравнение упругости для системы N параллельных плоских трещин и определяет полностью сопряженное соотношение между раскрытием для всех трещин.

Непосредственное использование выражения (3.68) в рамках алгоритма ILSA не является оптимальным с вычислительной точки зрения. Во-первых, внедиагональные блоки модифицированной матрицы $\mathbf{C}^*$ связывают уравнения для всех трещин в единую глобальную систему, что не позволяет напрямую переиспользовать алгоритм, разработанный ранее для одиночной трещины, и приводит к увеличению вычислительных затрат. Во-вторых, вычисление матрицы $\mathbf{C}^*$ требует построения дополнительного слагаемого $\mathbf{C}_{zt}\mathbf{C}_{tt}^{-1}\mathbf{C}_{tz}$, что затрудняет его эффективную декомпозицию и усложняет реализацию алгоритма. Для упрощения вычислительной схемы далее вводятся два дополнительных упрощения, позволяющих адаптировать модель к использованию в рамках ILSA.

Первое упрощение заключается в пренебрежении поправочным слагаемым в уравнении (3.68), т.е. в замене полной матрицы $\mathbf{C}^*$ на $\mathbf{C}_{zzz}$. Такой подход основан на том, что для параллельных трещин в однородной изотропной среде

доминирующим механизмом деформирования является нормальное раскрытие трещин, тогда как ядра взаимного влияния C_{izj} при $i \neq j$ вносят лишь небольшой вклад, быстро затухающий с увеличением расстояния между трещинами. Количественная оценка поправочного слагаемого приводится далее в разделе 3.6.4. Второе упрощение заключается в использовании явной схемы учета взаимодействия между трещинами: при решении уравнений для k -й трещины раскрытия всех остальных трещин принимаются известными с предыдущего шага по времени. С учетом этих двух упрощений уравнение упругости для k -й трещины принимает вид

$$\mathbf{p}^k = \sigma_h + \sum_{l \neq k} \sigma_{ss}^{kl} + \mathbf{C}^{kk} \mathbf{w}^k, \quad \sigma_{ss}^{kl} = \mathbf{C}^{kl} \mathbf{w}_0^l, \quad (3.69)$$

где диагональный блок $\mathbf{C}^{kk}$ совпадает с матрицей упругости одиночной трещины $\mathbb{C}$, введенной в разделе 3.2.1, внедиагональный блок $\mathbf{C}^{kl}$ описывает упругое влияние l -й трещины на k -ю трещину, а $\mathbf{w}_0^l$ обозначает раскрытие l -й трещины на предыдущем временном шаге. Вектор σ_{ss}^{kl} представляет собой дополнительное сжимающее напряжение, действующее на k -ю трещину вследствие упругого взаимодействия с l -й трещиной, т.е. вклад в эффект взаимного механического влияния трещин, создаваемый l -й трещиной. Стоит отметить, что при таком разделении глобальная матрица упругости $\mathbf{C}_{zzz}$ сохраняет блочную структуру

$$\mathbf{C}_{zzz} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} & \dots & \mathbf{C}^{1N} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} & \dots & \mathbf{C}^{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}^{N1} & \mathbf{C}^{N2} & \dots & \mathbf{C}^{NN} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

однако на каждом шаге по времени в неявном виде используются только диагональные блоки $\mathbf{C}^{kk}$, тогда как внедиагональные блоки входят лишь в правую часть уравнений через заранее известные раскрытия соседних трещин, вычисленные на предыдущем шаге по времени.

При таком разделении уравнение Рейнольдса и процедура отслеживания фронта для каждой отдельной трещины полностью соответствуют алгоритму, описанному в разделах 3.2 и 3.3, а дополнительное сжимающее напряжение $\sum_{l \neq k} \sigma_{ss}^{kl}$ включается в слагаемое $\Delta \sigma^J$ в правой части (3.19) системы (3.21). В результате разработанный ранее алгоритм для одиночной трещины может быть использован без каких-либо изменений, а единственным дополнением при

переходе к модели множественного гидроразрыва является построение и применение внедиагональных блоков $\mathbf{C}^{kl}$, которое выполняется один раз на каждом шаге по времени.

Следует отметить, что дополнительного сокращения вычислительных затрат можно добиться за счет использования свойства затухания упругого взаимодействия с увеличением расстояния между трещинами. В частности, если сохранять только блоки $\mathbf{C}^{kl}$, соответствующие влиянию ближайших соседних трещин $|k - l| \leq 1$, то глобальная матрица принимает блочно-трехдиагональную структуру

$$\mathbf{C}_{zzz} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} & \mathbf{C}^{23} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{32} & \mathbf{C}^{33} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}^{NN} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Такой подход позволяет дополнительно снизить вычислительные затраты, при этом возникающая погрешность остается ограниченной даже для систем с большим числом трещин N . Однако в представленных ниже расчетах данное приближение взаимодействия только между соседними трещинами не используется, и сохраняются все внедиагональные блоки.

3.6.3 Вычисление коэффициентов упругого влияния

Для построения матриц $\mathbf{C}^{kl}$ необходимо вычислить интегралы от ядра C_{zzz} по прямоугольным элементам сетки. В более общем случае все шесть независимых ядер C_{izj} , входящих в дискретную систему уравнений (3.65), могут быть выражены через производные одной скалярной потенциальной функции [54]

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.72)$$

Тогда соответствующие выражения для ядер принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
C_{xxz} &= \frac{E'}{8\pi} [\phi_{,zz} + \nu\phi_{,yy} - z\phi_{,xxz}], \\
C_{xzy} &= C_{yzx} = \frac{E'}{8\pi} [-\nu\phi_{,xy} - z\phi_{,xyz}], \\
C_{xzz} &= C_{zzx} = \frac{E'}{8\pi} [-z\phi_{,xzz}], \\
C_{yzy} &= \frac{E'}{8\pi} [\phi_{,zz} + \nu\phi_{,xx} - z\phi_{,yyz}], \\
C_{yzz} &= C_{zzz} = \frac{E'}{8\pi} [-z\phi_{,yzz}], \\
C_{zzz} &= \frac{E'}{8\pi} [\phi_{,zz} - z\phi_{,zzz}],
\end{aligned} \tag{3.73}$$

где запятые в нижних индексах обозначают частные производные.

В случае кусочно-постоянной аппроксимации необходимо вычислить интегралы от ядер (3.73) по прямоугольному элементу-источнику. Для этого введем интегрированную потенциальную функцию как

$$I(x, y, z) = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \frac{d\chi d\eta}{\sqrt{(x - \chi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}. \tag{3.74}$$

Тогда частные производные $I_{,ijk}$, входящие в выражения для проинтегрированных ядер, могут быть выражены через значения вспомогательных функций $F_{,ijk}$ в четырех угловых точках элемента-источника:

$$I_{,ijk}(x, y, z) = \left[F_{,ijk} \right]_{\chi=x-\Delta x/2, \eta=y-\Delta y/2}^{\chi=x+\Delta x/2, \eta=y+\Delta y/2}, \tag{3.75}$$

где квадратные скобки обозначают знакопеременную сумму по вершинам элемента

$$\left[F \right]_{\chi^-, \eta^-}^{\chi^+, \eta^+} = F(\chi^+, \eta^+, z) + F(\chi^-, \eta^-, z) - F(\chi^-, \eta^+, z) - F(\chi^+, \eta^-, z). \tag{3.76}$$

Явные выражения для вспомогательных функций получаются путем интегрирования соответствующих производных потенциальной функции ϕ :

$$\begin{aligned} F_{,xx} &= \frac{x}{r(y+r)}, & F_{,yy} &= \frac{y}{r(x+r)}, & F_{,xy} &= \frac{1}{r}, \\ F_{,xxz} &= -\frac{xz(y+2r)}{(y+r)^2 r^3}, & F_{,yyz} &= -\frac{yz(x+2r)}{(x+r)^2 r^3}, & F_{,xyz} &= -\frac{z}{r^3}, \\ F_{,xzz} &= -\frac{z^2 r - (x^2 + y^2)(y+r)}{(y+r)^2 r^3}, & F_{,yzz} &= -\frac{z^2 r - (x^2 + y^2)(x+r)}{(x+r)^2 r^3}, \\ F_{,zz} &= -F_{,xx} - F_{,yy}, & F_{,zzz} &= -F_{,xxz} - F_{,yyz}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Выражения для $F_{,zz}$ и $F_{,zzz}$ следуют из гармоничности потенциала ϕ , т.е. из тождества $\phi_{,xx} + \phi_{,yy} + \phi_{,zz} = 0$. Стоит также отметить, что вспомогательные функции в (3.77) определены с точностью до произвольного слагаемого вида $f(x, z) + g(y, z)$, поскольку любой такой вклад сокращается при вычислении знакопеременной суммы (3.75).

Для упрощенной расщепленной схемы (3.69) требуется вычисление только ядра C_{zzz} . Обозначим через (x_i^k, y_i^k, z^k) центр i -го элемента k -й трещины (точку коллокации), а через (x_j^l, y_j^l, z^l) — центр j -го элемента l -й трещины (элемент-источник). Тогда элементы блока $\mathbf{C}^{kl}$ вычисляются по формуле

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = \frac{E'}{8\pi} \left[F_{,zz}(x_i^k - \chi, y_i^k - \eta, z^k - z^l) - (z^k - z^l) F_{,zzz}(x_i^k - \chi, y_i^k - \eta, z^k - z^l) \right]_{\chi=x_j^l-\Delta x/2, \eta=y_j^l-\Delta y/2}^{\chi=x_j^l+\Delta x/2, \eta=y_j^l+\Delta y/2}. \quad (3.78)$$

В случае диагональных блоков $\mathbf{C}^{kk}$, когда обе точки находятся в одной и той же плоскости ($z^k - z^l = 0$), формула (3.78) сводится к вкладу одной только функции $F_{,zz}$ и воспроизводит замкнутое выражение для коэффициентов матрицы упругости, используемое в матрице для одиночной трещины $\mathbf{C}$ из раздела 3.2.1.

3.6.4 Оценка слагаемого, отвечающего за касательное сопряжение трещин

В используемой в настоящей работе упрощенной схеме модифицированный оператор упругости

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_{zzz} - \mathbf{C}_{zt} \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{C}_{tz} \quad (3.79)$$

заменяется оператором $\mathbf{C}_{zzz}$, то есть поправка, связанная с учетом касательных разрывов смещения, $\mathbf{C}_{zt} \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{C}_{tz}$ отбрасывается. Целью данного раздела является количественная оценка величины отброшенного слагаемого по отношению к сохраняемому оператору $\mathbf{C}_{zzz}$. Такая оценка получена аналитически на основе преобразования Фурье для соответствующих непрерывных интегральных операторов, лежащих в основе рассматриваемой постановки. Для упрощения анализа рассмотрение проводится для конфигурации из двух параллельных гидравлических трещин, расположенных в плоскостях $z = 0$ и $z = d > 0$. В этом случае каждая глобальная матрица $\mathbf{C}_{ijk}$ естественным образом приобретает блочную структуру размера 2×2 , элементы которой соответствуют парам трещин $(a, b) \in \{1, 2\}^2$. При этом блок $\mathbf{C}_{ijk}^{ab}$ формируется на основе непрерывного ядра $C_{ijk}(x - x', y - y', z^a - z^b)$. Таким образом, диагональные блоки соответствуют нулевому расстоянию между плоскостями трещин, тогда как внедиагональные блоки вычисляются при расстоянии $\pm d$.

Ядра в непрерывной постановке (3.61)–(3.62) зависят от координат в плоскости только через разности $x - x'$ и $y - y'$, поэтому каждый оператор, отображающий поле разрывов смещения на одной трещине (источник) в поле напряжений на другой параллельной трещине (приемник), представляет собой свертку по координатам в плоскости. Следовательно, применение двумерного преобразования Фурье по переменным (x, y) позволяет диагонализировать каждый такой оператор, сводя его действие к умножению на соответствующий фурье-образ, а композиция операторов — к их перемножению при каждом фиксированном значении волнового вектора $\mathbf{k}$. В результате для каждого волнового вектора $\mathbf{k}$ произведение $\mathbf{C}_{zt} \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{C}_{tz}$ сводится к произведению матриц конечной размерности, которое может быть вычислено в явном виде.

Все упругие ядра выражаются через производные скалярного потенциала $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, поэтому их фурье-образы могут быть получены на основе преобразования Фурье функции ϕ при фиксированном значении координаты z . Поскольку исходная изотропная задача инвариантна относительно поворотов в плоскости трещины, систему координат в этой плоскости без ограничения общности можно повернуть таким образом, чтобы новая ось x была направлена вдоль вектора $\mathbf{k}$, то есть $\mathbf{k} = (k, 0)$, где $k = |\mathbf{k}|$. В дальнейшем предполагается, что эта система координат используется на протяжении всего анализа. Переходя к полярным координатам $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ и используя стандартное интегральное представление функции Бесселя нулево-

го порядка

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(k\rho), \quad (3.80)$$

получается следующее выражение для двумерного преобразования Фурье функции ϕ :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{k}, z) &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y, z) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{-ik\rho \cos \theta}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\theta d\rho = 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho J_0(k\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Оставшийся радиальный интеграл представляет собой преобразование Ханкеля нулевого порядка и может быть вычислен в явном виде с использованием классического тождества Вейля [191, §13.4], [192, §6.554], что приводит к выражению

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, z) = \frac{2\pi}{k} e^{-k|z|}. \quad (3.82)$$

Таким образом, каждая фурье-мода потенциала экспоненциально затухает по мере удаления от плоскости трещины, причем скорость затухания определяется соответствующим волновым числом в плоскости.

Фурье-образы упругих ядер определяются на основе выражения (3.82) и формул (3.73), связывающих ядра C_{ijk} с производными потенциала ϕ . В системе координат, связанной с волновым вектором $\mathbf{k}$, дифференцирование в плоскости трещины в пространстве Фурье сводится к умножению: $\partial_x \leftrightarrow ik$ и $\partial_y \leftrightarrow 0$, причем второе соотношение обусловлено тем, что по построению $k_y = 0$. Обозначим через $d \in \mathbb{R}$ ориентированное расстояние между плоскостями трещины-источника и трещины-приемника. Тогда фурье-образы упругих ядер в выбранной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{C}_{zzz}(\mathbf{k}, d) &= \frac{E' k}{4} (1 + k|d|) e^{-k|d|}, & \hat{C}_{xxz}(\mathbf{k}, d) &= \frac{E' k}{4} (1 - k|d|) e^{-k|d|}, \\ \hat{C}_{yzy}(\mathbf{k}, d) &= \frac{E' k (1 - \nu)}{4} e^{-k|d|}, & \hat{C}_{xzy}(\mathbf{k}, d) &= \hat{C}_{yzx}(\mathbf{k}, d) = 0, \\ \hat{C}_{xzz}(\mathbf{k}, d) &= \hat{C}_{zzx}(\mathbf{k}, d) = -\frac{iE' k^2 d}{4} e^{-k|d|}, & \hat{C}_{yzz}(\mathbf{k}, d) &= \hat{C}_{zzy}(\mathbf{k}, d) = 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Характер зависимости от d определяется четностью соответствующих ядер по переменной z : для ядер с четной симметрией она выражается через $|d|$, тогда

как для ядер с нечетной симметрией она является нечетной и содержит явный множитель d . В последнем случае соответствующие фурье-образы равны нулю при $d = 0$.

Подстановка выражений (3.83) в блочную структуру для системы из двух трещин с координатами $z^1 = 0$ и $z^2 = d$ позволяет получить матрицы в пространстве Фурье. В системе координат, связанной с волновым вектором $\mathbf{k}$, две касательные компоненты на каждой трещине естественным образом разделяются на продольную (L), направленную вдоль $\mathbf{k}$, и поперечную (T), направленную перпендикулярно $\mathbf{k}$ в плоскости трещины. Четыре касательные степени свободы упорядочиваются в виде (L^1, T^1, L^2, T^2) , а также вводится безразмерный параметр

$$\alpha = k d, \quad (3.84)$$

после чего матрица взаимодействия касательных компонент принимает вид

$$\hat{\mathbf{C}}_{tt} = \frac{E' k}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1 - \alpha) e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 1 - \nu & 0 & (1 - \nu) e^{-\alpha} \\ (1 - \alpha) e^{-\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1 - \nu) e^{-\alpha} & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

а матрица связи между касательными и нормальными компонентами, а также матрица нормальных напряжений записываются в виде

$$\hat{\mathbf{C}}_{tz} = \frac{i E' \alpha k}{4} e^{-\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{zzz} = \frac{E' k}{4} \begin{pmatrix} 1 & (1 + \alpha) e^{-\alpha} \\ (1 + \alpha) e^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Матрица $\hat{\mathbf{C}}_{zt}(\mathbf{k})$ определяется соотношением $\hat{\mathbf{C}}_{zt} = -\hat{\mathbf{C}}_{tz}^T$. Знак минус обусловлен тем, что внедиагональные фурье-образы $\hat{C}_{xzz}$ и $\hat{C}_{zzx}$, пропорциональные $d e^{-k|d|}$, являются нечетными функциями по переменной d . При транспонировании блочной матрицы источник и приемник меняются местами, что приводит к изменению знака величины $d = z^a - z^b$.

Структура матриц (3.85)–(3.86) позволяет выявить основное упрощение рассматриваемой задачи. Каждый блок матрицы $\hat{\mathbf{C}}_{tt}$ является диагональным в базисе (L, T) , а матрица $\hat{\mathbf{C}}_{tz}$ связывает нормальный скачок смещения (раскрытие) только с продольной компонентой L , тогда как строки, соответствующие

поперечной компоненте, тождественно равны нулю. Если переупорядочить четыре касательные степени свободы по типу компонент, а не по номеру трещины, то есть перейти от (L^1, T^1, L^2, T^2) к (L^1, L^2, T^1, T^2) , матрица $\hat{C}_{tt}$ приобретает блочно-диагональный вид. Два диагональных блока размера 2×2 соответствуют продольным и поперечным компонентам соответственно, тогда как матрица $\hat{C}_{tz}$ сохраняет ненулевые элементы только в строках, отвечающих за продольные компоненты (L). В результате вычисление произведения матриц определяется только продольными компонентами:

$$\hat{C}_{zt} \hat{C}_{tt}^{-1} \hat{C}_{tz} = \hat{C}_{zt}^L (\hat{C}_{tt}^{LL})^{-1} \hat{C}_{tz}^L, \quad (3.87)$$

где верхний индекс L обозначает компоненты, соответствующие продольному направлению. Три матрицы размера 2×2 , входящие в выражение (3.87), имеют вид

$$\hat{C}_{tt}^{LL} = \frac{E' k}{4} \begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha) e^{-\alpha} \\ (1 - \alpha) e^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}_{tz}^L = \hat{C}_{zt}^L = \frac{i E' \alpha k e^{-\alpha}}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

где равенство $\hat{C}_{tz}^L = \hat{C}_{zt}^L$ следует из антисимметричной структуры внедиагонального блока размера 2×2 совместно с симметрией ядер $C_{zzz} = C_{zzx}$. Прямое вычисление дает следующее явное выражение для отброшенного слагаемого:

$$\hat{C}_{zt}^L (\hat{C}_{tt}^{LL})^{-1} \hat{C}_{tz}^L = \frac{E' k \alpha^2 e^{-2\alpha}}{4 (1 - (1 - \alpha)^2 e^{-2\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha) e^{-\alpha} \\ (1 - \alpha) e^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Величина отброшенного слагаемого по отношению к сохраняемому оператору определяется путем поэлементного сравнения выражения (3.89) с матрицей $\hat{C}_{zzz}$ из (3.86). Для диагональных элементов, соответствующих взаимодействию внутри одной трещины, получается следующее отношение:

$$f_{\text{diag}}(\alpha) = \frac{(\hat{C}_{zt}^L (\hat{C}_{tt}^{LL})^{-1} \hat{C}_{tz}^L)^{aa}}{\hat{C}_{zzz}^{aa}} = \frac{\alpha^2 e^{-2\alpha}}{1 - (1 - \alpha)^2 e^{-2\alpha}}, \quad (3.90)$$

$$\max_{\alpha \geq 0} f_{\text{diag}}(\alpha) = e^{-2} \approx 0.135 \quad \text{при} \quad \alpha = 1,$$

тогда как для внедиагональных элементов, отвечающих за взаимодействие между трещинами, имеем

$$f_{\text{off}}(\alpha) = \frac{(\hat{C}_{zt}^L (\hat{C}_{tt}^{LL})^{-1} \hat{C}_{tz}^L)^{ab}}{\hat{C}_{zzz}^{ab}} = \frac{\alpha^2 (1 - \alpha) e^{-2\alpha}}{(1 + \alpha) [1 - (1 - \alpha)^2 e^{-2\alpha}]}, \quad (3.91)$$

$$\max_{\alpha \geq 0} |f_{\text{off}}(\alpha)| \approx 0.037 \quad \text{при} \quad \alpha \approx 0.358.$$

Оба отношения ограничены сравнительно небольшими величинами. При этом основное влияние отброшенного слагаемого проявляется в уменьшении эффективной жесткости отдельной трещины, которое не превышает $\sim 13.5\%$. Влияние на механическое взаимодействие между трещинами оказывается существенно меньшим: относительное изменение соответствующих напряжений не превышает $\sim 3.7\%$.

Полученные в пространстве Фурье оценки могут быть перенесены в физическое пространство с использованием теоремы о свертке и тождества Парсеваля. Согласно теореме о свертке, $\widehat{f * h} = \hat{f} \hat{h}$, каждый оператор свертки в пространстве Фурье сводится к умножению на соответствующий фурье-образ. В результате поправка к давлению, обусловленная отброшенным слагаемым, для каждой отдельной моды $\mathbf{k}$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \widehat{(C_{zt} C_{tt}^{-1} C_{tz}) \mathbf{w}(\mathbf{k})} \right| \leq f_{\max} \left| \widehat{C_{zzz} \mathbf{w}(\mathbf{k})} \right|, \quad f_{\max} \approx 0.135. \quad (3.92)$$

Использование тождества Парсеваля позволяет получить аналогичную оценку в норме $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\|C_{zt} C_{tt}^{-1} C_{tz} \mathbf{w}\|_{L^2} \leq f_{\max} \|C_{zzz} \mathbf{w}\|_{L^2}. \quad (3.93)$$

Таким образом, относительная погрешность упрощенного решения для давления в норме L^2 равномерно ограничена величиной $f_{\max}$. При этом локальная поточечная погрешность в отдельных точках может превышать $f_{\max}$, однако ее интегральная мера в норме L^2 остается ограниченной.

Проведенный выше анализ основан на предположении о бесконечном размере плоскостей трещин, которое необходимо для того, чтобы упругие операторы обладали свойствами свертки и инвариантностью относительно сдвига. На практике каждая трещина имеет конечные размеры, характеризуемые типичным масштабом ℓ_{fac} в ее плоскости. Конечная область определения функции раскрытия $\mathbf{w}$ не создает дополнительных трудностей, поскольку ее фурье-спектр сосредоточен преимущественно в области $|\mathbf{k}| \lesssim 1/\ell_{\text{fac}}$, а полученная оценка в пространстве Фурье является равномерной по $\mathbf{k}$. Поэтому оценка в норме L^2 сохраняет свою силу и для трещин конечного размера. Более тонкий эффект связан с конечными размерами самого касательного оператора. Для ограниченной трещины оператор C_{tt}^{-1} должен обеспечивать выполнение условия $\mathbf{D}_t = 0$ на фронте трещины, вследствие чего в узкой окрестности фронта трещины его влияние оказывается локально более выраженным, чем

в случае бесконечной плоскости. В этой области величина отброшенного слагаемого также может превышать оценку, полученную для бесконечной плоскости. Однако вклад окрестности фронта трещины в глобальную L^2 норму имеет порядок $\ell_{\text{tip}}/\ell_{\text{frac}} \ll 1$, где ℓ_{tip} обозначает характерный размер области вблизи фронта трещины. Поэтому существенного ухудшения полученной ранее оценки $f_{\text{max}} \approx 0.135$ не ожидается.

3.6.5 Численные расчеты для наклонной скважины

Для исследования влияния механического взаимодействия на формирование асимметричной геометрии системы трещин рассматривается наклонная скважина, ось которой отклонена на угол φ относительно оси z , как показано на рисунке 3.25. Такое отклонение приводит к смещению точек перфорации вдоль оси x , при этом расстояние между соседними трещинами вдоль оси z остается неизменным. В расчетах рассматривается система из трех параллельных трещин, а расстояние между соседними трещинами вдоль оси z составляет 20 м, то есть $z^1 = 0$ м, $z^2 = 20$ м и $z^3 = 40$ м. Предполагается, что пласт является однородным и характеризуется следующими параметрами: модуль Юнга $E = 30$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, трещиностойкость $K_{\text{Ic}} = 1$ МПа·м^{1/2}. Утечки жидкости в пласт отсутствуют ($C_L = 0$), а влияние слоистости по напряжениям не учитывается. Закачка ньютоновской жидкости с вязкостью $\mu = 0.1$ Па·с осуществляется с постоянным объемным расходом $Q_0 = 0.25$ м³/с в течение 1000 с.

Сначала рассматривается случай отсутствия наклона скважины, $\varphi = 0$. На рисунке 3.26а слева представлены распределения раскрытия $w^k(x, y)$ для всех трещин. Черными крестами обозначены точки закачки, а белые вертикальные пунктирные линии разделяют левое и правое крылья каждой трещины. При отсутствии наклона скважины трещины симметричны относительно точек закачки, а их геометрия близка к радиальной. Однако между крайними трещинами ($k = 1, 3$) и центральной трещиной ($k = 2$) наблюдается различие: крайние трещины характеризуются несколько большим раскрытием по сравнению с центральной трещиной. Этот эффект обусловлен действием дополнительного сжимающего напряжения $\sum_{l \neq k} \sigma^{kl} ss$ из уравнения (3.69), которое наиболее

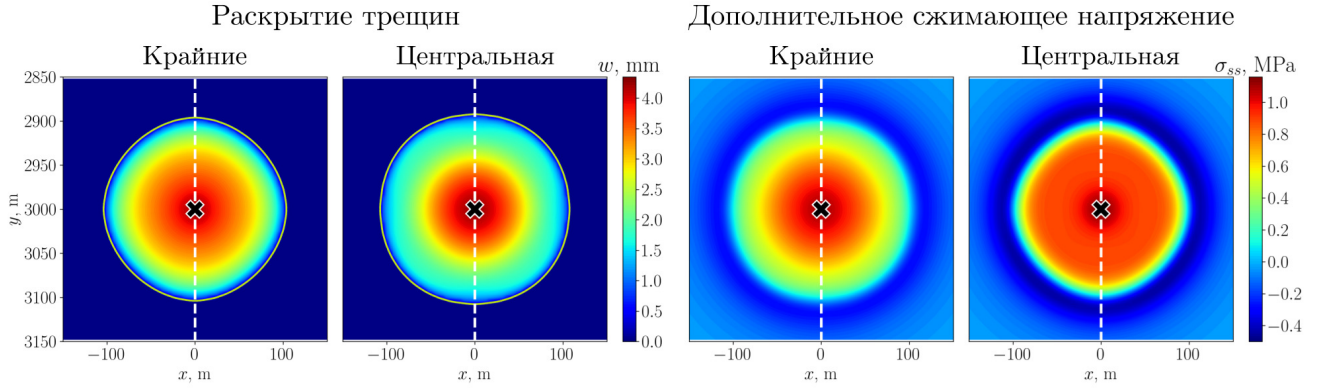
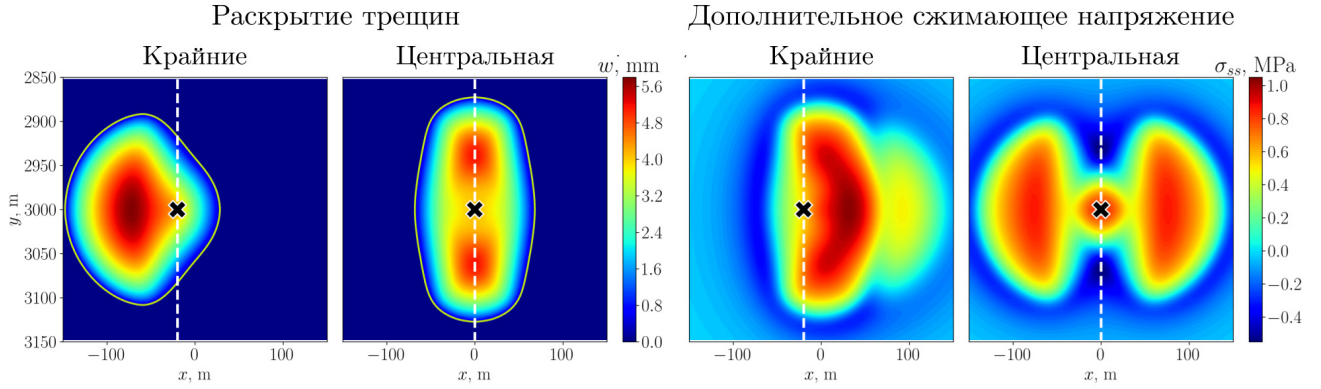
а) Угол наклона скважины $\varphi = 0$ б) Угол наклона скважины $\varphi = \pi/4$

Рисунок 3.26 — Результаты численного моделирования распространения трех гидравлических трещин вдоль наклонной скважины при угле наклона φ . В первом и третьем столбцах представлены распределения раскрытия $w^k(x, y)$ и дополнительного сжимающего напряжения, обусловленного механическим взаимодействием трещин $\sigma_{ss}^k(x, y)$ для крайних трещин ($k = 1, 3$). Во втором и четвертом столбцах показаны распределения раскрытия $w^2(x, y)$ и дополнительного сжимающего напряжения $\sigma_{ss}^2(x, y)$ для центральной трещины. Верхний рисунок 3.26а соответствует случаю $\varphi = 0$, а нижний рисунок 3.26б — случаю $\varphi = \pi/4$. Черными крестами обозначены точки закачки, а вертикальные пунктирные линии разделяют левое и правое крылья каждой трещины

интенсивно воздействует на центральную трещину, поскольку она одновременно испытывает механическое влияние двух крайних трещин. Соответствующие распределения величины σ_{ss}^k представлены в третьем и четвертом столбцах рисунка 3.26а.

Далее рассматривается случай $\varphi = \pi/4$, при котором точки перфорации смещены на 20 м вдоль оси x . На рисунке 3.26б представлены распределения раскрытия $w^k(x, y)$ и дополнительного сжимающего напряжения $\sigma_{ss}^k(x, y)$ для всех трещин. При наличии горизонтального смещения крайние трещины приобретают выраженную асимметричную форму, тогда как центральная трещина вытягивается в вертикальном направлении, а ее раскрытие в окрестности точки закачки уменьшается под действием двух крайних трещин. Это показывает, что даже сравнительно небольшое смещение точек закачки способно существенно изменить морфологию отдельных трещин даже в случае наиболее устойчивого распространения в вязкостном режиме.

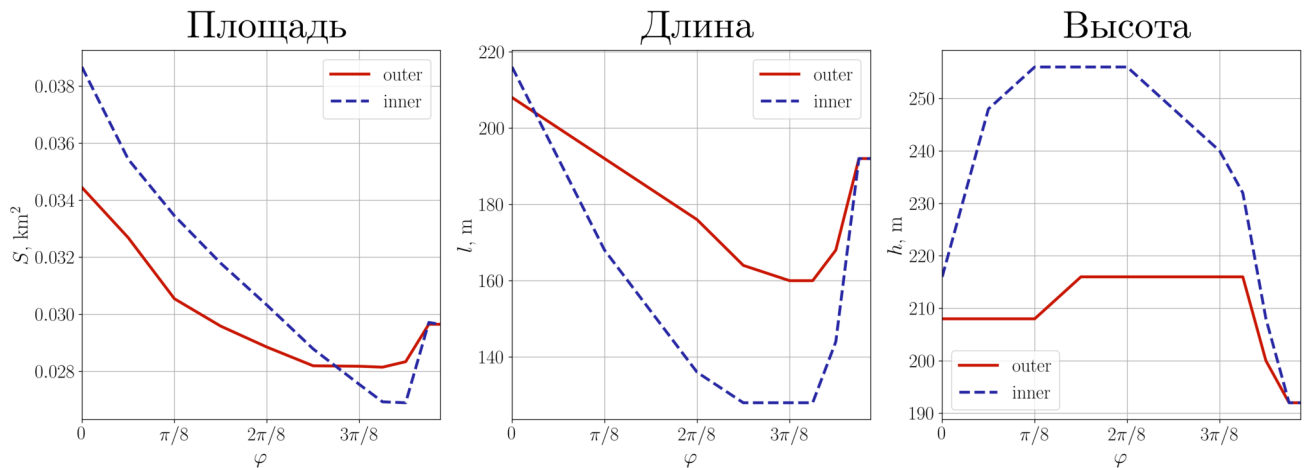


Рисунок 3.27 — Зависимость площади S , длины l и высоты h трещин от угла наклона скважины φ . Красная сплошная линия соответствует крайним трещинам, синяя пунктирная линия — центральной трещине

На рисунке 3.27 представлены зависимости площади S , длины l и высоты h центральной и крайних трещин от угла наклона скважины φ . С увеличением угла наклона площадь S и длина l трещин уменьшаются, тогда как высота центральной трещины возрастает, а высота крайних трещин остается практически неизменной. Дополнительное сжимающее напряжение σ_{ss} , создаваемое крайними трещинами, приводит к существенному уменьшению длины центральной трещины и соответствующему увеличению ее высоты. Иными словами, под действием дополнительного бокового сжатия, создаваемого соседними трещинами,

происходит перераспределение объема жидкости в центральной трещине в вертикальном направлении. При достаточно больших углах наклона расстояние между точками перфорации превышает 100 м, перекрытие между трещинами исчезает, и система фактически сводится к трем независимым радиальным трещинам одинаковой геометрии. Следует отметить, что зависимости, представленные на рисунке 3.27, могут существенно измениться, если отказаться от предположения о равномерном распределении расхода между точками закачки и решать модель трения в перфорационных каналах (3.64) в сопряжении с уравнениями упругости и течения жидкости.

3.7 Выводы по моделированию гидравлического разрыва пласта

В данной главе разработан алгоритм отслеживания фронта трещины в рамках метода неявного множества уровня (ILSA), учитывающий влияние нескольких слоев с различными значениями сжимающих напряжений. Для описания распространения фронта трещины используется асимптотическое решение, учитывающее слоистость по напряжениям, разработанное в главе 2. Для его применения основные компоненты исходного алгоритма ILSA, включая определение положения фронта трещины и вычисление объема концевых элементов, были обобщены на случай многослойной среды. Кроме того, определен коэффициент релаксации напряжений, не зависящий от геометрии слоев, позволяющий расширить область применимости асимптотического решения для трещины конечных размеров. Показано, что предложенные модификации существенно повышают точность алгоритма ILSA при моделировании гидроразрыва в слоистой среде, особенно при использовании грубых расчетных сеток. Точность разработанного алгоритма подтверждена сравнением с эталонными численными решениями для радиальной гидравлической трещины в различных режимах распространения, а также с экспериментальными данными, полученными на прозрачном блоке из полиметилметакрилата. Для демонстрации работы контактного алгоритма смыкания берегов трещины рассмотрен пример трехслойной среды, в которой после смыкания формируются два гидродинамически несвязанных сегмента трещины.

Дополнительно исследовано влияние размера элементов расчетной сетки на геометрию трещины, поскольку основная цель использования асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям, заключается в повышении точности расчетов на грубых сетках. Для трещины постоянной высоты универсальное асимптотическое решение приводит к заметной погрешности в определении ее вертикальных размеров, соответствующей распространению примерно на один элемент за границу слоя. В то же время при использовании асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям, рост трещины практически точно останавливается на границе слоя независимо от размера сетки. Тем не менее оба варианта алгоритма дают заниженную оценку длины трещины по сравнению с эталонным решением. Предполагается, что данное расхождение связано со снижением точности асимптотического решения при больших значениях кривизны фронта трещины. Для случая умеренного барьера напряжений показано, что использование асимптотического решения, учитывающего слоистость по напряжениям, позволяет повысить точность прогноза как высоты, так и длины трещины по сравнению с универсальным асимптотическим решением. Кроме того, выполнено исследование точности разработанного алгоритма для случая тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями. Показано, что предложенный алгоритм обеспечивает высокую точность расчета высоты трещины для всех рассмотренных сеток, тогда как стандартная реализация ILSA с универсальным асимптотическим решением демонстрирует выраженную зависимость результатов от размера сетки.

Также в рамках разработанной модели planar 3D ILSA рассмотрена задача одновременного распространения нескольких гидравлических трещин вдоль наклонной скважины. Анализ выполнен в предельном случае достаточно высокого гидравлического сопротивления перфорационных отверстий, при котором предполагается равномерное распределение потока жидкости между трещинами. При учете механического взаимодействия трещин касательные разрывы смещений не учитываются. Корректность такого упрощения исследована аналитически в разделе 3.6.4. Было показано, что пренебрежение касательными разрывами смещений приводит к уменьшению эффективной жесткости отдельной трещины не более чем на 13.5%, а влияние на механическое взаимодействие между различными трещинами не превышает 3.7%. Для дополнительного упрощения задачи поле дополнительных сжимающих напряжений, обусловленное

механическим взаимодействием трещин, вычисляется на основе раскрытия трещин с предыдущего шага по времени. Благодаря этим двум упрощениям задача упругости для каждой трещины решается независимо на каждом шаге по времени, без необходимости решать полностью связанную систему уравнений. Результаты моделирования показали, что при отсутствии наклона скважины трещины сохраняют симметричную форму и остаются близкими к радиальным. В то же время наклон скважины и связанное с ним горизонтальное смещение точек закачки могут приводить к формированию существенно асимметричных трещин, форма которых заметно отличается от радиальной. Представленные результаты получены для вязкостного режима распространения трещин.

Глава 4. Модель отслоения цементного камня обсаженной скважины при закачке CO_2 , учитывающая термопороупругое взаимодействие

Обеспечение долговременной герметичности скважин остается одной из ключевых задач проектов по улавливанию и подземному захоронению углекислого газа [34]. Учитывая низкую проницаемость затвердевшего цемента, дефекты цементного камня в обсаженной скважине рассматриваются как наиболее вероятные пути утечки CO_2 . Такие дефекты могут инициироваться уже на этапе перфорации проектного интервала закачки, а затем, под действием высокого давления закачки, развиваться в интерфейсные трещины, распространяющиеся вдоль границ цементного камня и формирующие протяженные гидравлические каналы для миграции CO_2 . Инициация и рост таких трещин определяются напряженным состоянием в околоскважинной зоне, которое формируется в ходе всего жизненного цикла скважины — от бурения и цементирования (включая усадку цемента при гидратации) до закачки холодного CO_2 и длительной эволюции пластовых условий.

Настоящая глава посвящена разработке трехмерной модели гидравлического отслоения цементного камня при закачке CO_2 в вертикальную скважину. Предложенная модель объединяет термопороупругое деформирование композитной системы «обсадная колонна — цемент — порода», фильтрацию жидкости из трещины в пористый цементный камень и породу, а также распространение трещины отслоения как в вертикальном, так и в окружном направлении с учетом эксцентриситета обсадной колонны, анизотропии естественных напряжений и слоистости пласта. Для описания эволюции напряженного состояния от этапа строительства скважины до стадии эксплуатации используется метод многостадийного нагружения, а сопряжение модели распространения трещины с термопороупругой моделью в поперечных сечениях скважины строится на основе предположения плоской деформации. Кроме того, выполняется верификация численной схемы и анализ чувствительности гидравлического отслоения к начальному напряженному состоянию, анизотропии естественных напряжений, температуре закачиваемой жидкости и длительной эволюции пластовых условий при захоронении CO_2 .

4.1 Постановка задачи об отслоении на границе цементного камня обсаженной скважины. Учет начального напряженного состояния

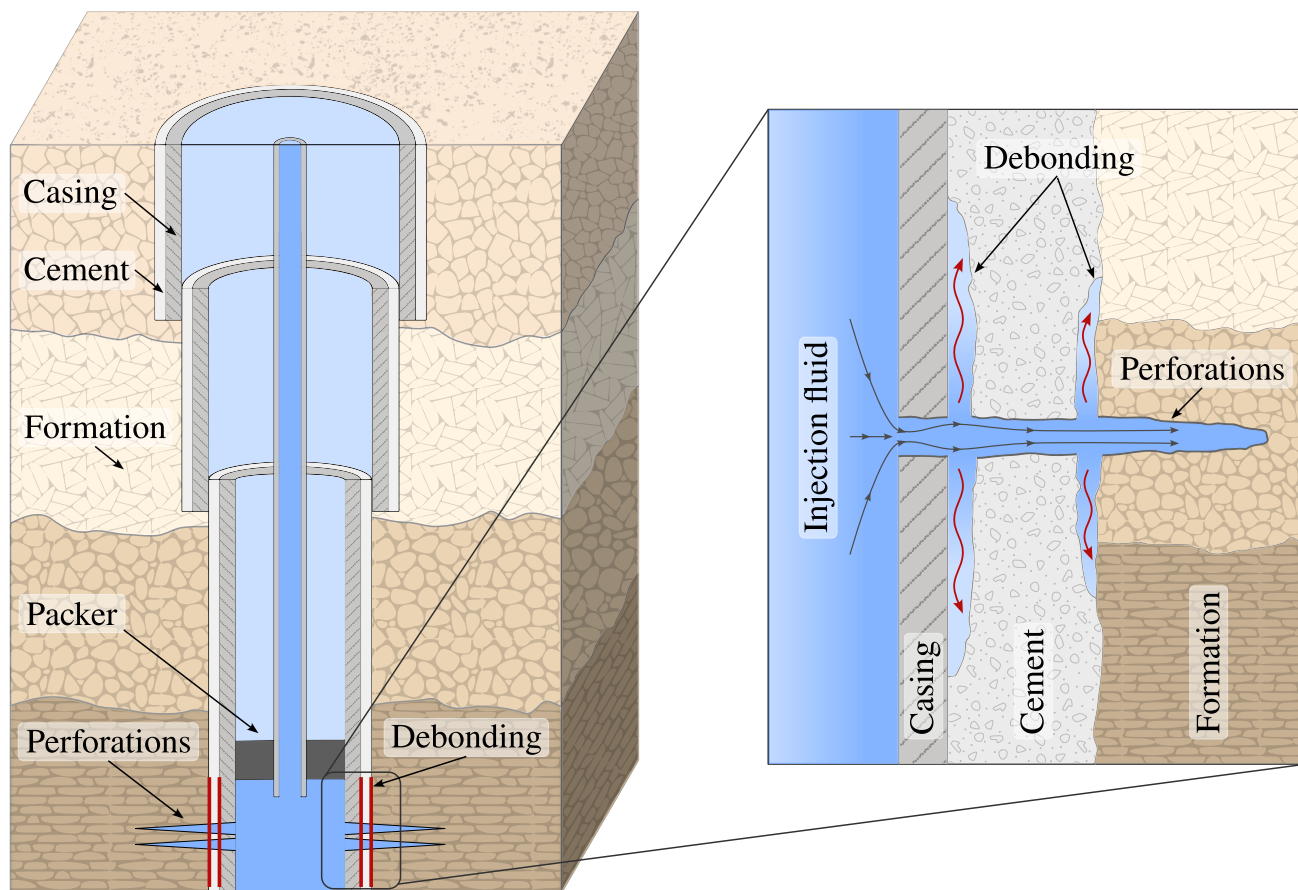


Рисунок 4.1 — Схема вертикальной скважины с гидравлическим отслоением вдоль границ раздела цемент-обсадная колонна и цемент-порода

На рисунке 4.1 представлена обсаженная и зацементированная вертикальная скважина с перфорациями в проектном интервале закачки. Кольцевое пространство между обсадной колонной и породой цементируется для обеспечения гидравлической изоляции и предотвращения миграции пластовых флюидов. Закачка флюида (CO_2) в пласт осуществляется через перфорационные отверстия, проходящие через обсадную колонну и цементный камень.

В окрестности перфорационных отверстий на границах раздела обсадная колонна-цемент и цемент-порода могут возникать начальные микроразрывы. В процессе закачки скважина одновременно подвергается как механическому, так и тепловому воздействию. На начальной стадии давление флюида в перфорационных отверстиях равно давлению флюида в скважине. Из-за контраста

жесткостей стальной обсадной колонны и цементного камня сжимающие напряжения на границе раздела могут оказаться ниже давления флюида в начальных микрозазорах. При выполнении этого условия давление флюида в области дефекта будет превышать локальное сжимающее напряжение, что может инициировать отслоение цементного камня. Образующаяся трещина формирует гидравлический канал, по которому CO_2 способен мигрировать за пределы проектного интервала закачки, что нарушает разобщение пластов и ставит под угрозу целостность скважины.

Рассматриваемая в настоящей работе задача направлена на определение критических условий инициации и распространения трещин гидравлического отслоения, обусловленных изменениями давления и температуры флюида в скважине. Основное внимание уделяется термогидромеханическому взаимодействию, определяющему распространение гидравлического отслоения.

4.1.1 Геометрия задачи и основные предположения

Рассматривается околоскважинная зона обсаженной и зацементированной вертикальной скважины. К возможным механизмам разрушения в этой зоне относятся отслоение цементного камня, сдвиговое разрушение, радиальное растрескивание и образование дисковых трещин [129]. В настоящей работе основное внимание уделено отслоению на границах цементного камня. Такое отслоение может инициироваться вблизи перфорационных отверстий из-за дефектов на границах раздела обсадная колонна-цемент или цемент-порода. Характерный вертикальный размер скважины (десятки, сотни и тысячи метров) существенно превосходит горизонтальные масштабы (десятки сантиметров). Подобная разница масштабов позволяет моделировать каждое горизонтальное сечение, перпендикулярное стволу скважины, в приближении плоской деформации. При такой геометрии задачи трещина отслоения распространяется преимущественно в вертикальном направлении вдоль оси скважины, однако допускается и ее рост в окружном направлении. Для учета несовершенного центрирования считается, что обсадная колонна может быть смещена относительно оси скважины. Это смещение определяется значением эксцентриситета и углом ориентации.

Стальная обсадная колонна моделируется как термоупругий материал, а цементная оболочка и окружающая горная порода рассматриваются как поропругие среды с конечной теплопроводностью, поровое пространство которых заполнено однофазной ньютоновской жидкостью [60]. Свойства материалов обсадной колонны и цементной оболочки считаются постоянными в пределах рассматриваемого участка вертикальной скважины. Окружающая горная порода, напротив, описывается как слоистая среда, в которой упругие модули и проницаемость изменяются с глубиной. Каждое сечение скважины представляет собой композитную систему обсадная колонна-цемент-порода, состоящую из материалов с существенно различающимися физическими свойствами. Закачиваемая жидкость считается однофазной, ньютоновской и несжимаемой, фазовые переходы не учитываются [40]. Предполагается, что жидкость внутри трещины представляет собой сверхкритический CO_2 , тогда как окружающая пористая среда насыщена водой. Хотя утечка жидкости из трещины в породу и цементную оболочку в действительности сопровождается многофазным течением, этот эффект в настоящей работе не учитывается. Такое упрощение оправдано тем, что зона проникновения, в которой одновременно присутствуют CO_2 и вода, существенно меньше зоны распространения возмущения порового давления, где под действием однофазной фильтрации изменяется только поровое давление. Таким образом, анализ ограничивается однофазной фильтрацией через пористую среду, а многофазные эффекты не рассматриваются. Учитывая разницу вертикального и горизонтального масштабов, окружная составляющая потока жидкости в трещине считается пренебрежимо малой по сравнению с вертикальной. Отсюда следует, что давление жидкости внутри трещины отслоения остается однородным в окружном направлении. Это согласуется с одним из ключевых допущений модели pseudo-3D для гидравлических трещин. Распространение трещины описывается линейной упругой механикой разрушения, причем рассматривается только механизм нормального отрыва (I мода) [162]. Теплоперенос внутри трещины отслоения не учитывается ввиду малого объема жидкости: температура жидкости в трещине считается равной температуре окружающих материалов. Температурные изменения, связанные с эффектом Джоуля — Томсона при закачке CO_2 [193], в настоящей работе также не учитываются.

Трещина отслоения способна распространяться на значительное расстояние по вертикали, тогда как длина ее дуги в поперечном сечении ограничена

диаметром скважины. Поэтому гидравлическое отслоение может быть эффективно описано в рамках классического подхода pseudo-3D для плоских трещин гидроразрыва, который адаптирован для цилиндрической геометрии скважины. Модель гидравлического отслоения основана на тех же фундаментальных предположениях, что и модель гидроразрыва пласта, включая распространение трещины под действием давления жидкости и сопряжение модели течения жидкости с механическим откликом материалов, окружающих трещину. Вместе с тем ряд существенных отличий требует более сложного подхода к численному моделированию. В отличие от плоских трещин pseudo-3D, для которых в каждом сечении используются аналитические решения, интерфейсные трещины характеризуются неоднородностью свойств материалов, анизотропией пластовых (*in-situ*) напряжений, эксцентриситетом обсадной колонны, а также нестационарными полями порового давления и температуры. Поэтому такая задача требует численного решения. Тем не менее в приближении плоской деформации механическая задача может решаться независимо для каждого сечения ствола скважины, что существенно сокращает общие вычислительные затраты.

4.1.2 Многостадийный анализ нагружения

Многостадийный анализ представляет собой один из эффективных подходов к моделированию механического нагружения системы обсаженной скважины [41; 127; 194]. Ключевым вопросом является то, каким образом различные условия нагружения на протяжении жизненного цикла скважины могут приводить к разрушению и отслоению цементного камня в условиях эксплуатации. В рамках данного подхода учитываются пластовые условия (естественные напряжения в горной породе, поровое давление, давление в скважине и температура), гидратация и объемная усадка цемента, механизмы разрушения цементного камня с учетом термопороупругих свойств как цемента, так и породы, а также влияние ключевых технологических этапов строительства скважины.

Вязкоупругие эффекты, такие как ползучесть и усадка, оказывают существенное влияние на эволюцию напряженного состояния на протяжении всего жизненного цикла скважины [161; 195]. Несмотря на то, что построение полной

нестационарной вязкоупругой модели выходит за рамки данного исследования, в настоящей работе вводятся два предельных сценария нагружения, ограничивающих диапазон возможных напряженных состояний цементного камня:

- **Сценарий без учета ползучести (доминирование усадки):** данный сценарий описывает напряженное состояние, определяемое естественными пластовыми условиями, параметрами цементирования и объемной усадкой цемента. Он соответствует нижней границе сжимающих напряжений в цементном камне. Предполагается, что вязкоупругая релаксация горной породы еще не компенсировала снижение напряжений, вызванное усадкой цемента.
- **Сценарий полной релаксации напряжений вследствие ползучести:** данный сценарий соответствует теоретической верхней границе и описывает гипотетическое состояние, в котором все неоднородности напряженного состояния, вызванные бурением и усадкой цемента, полностью релаксировали. Предполагается, что в результате длительной ползучести напряженное состояние возвращается к гидростатическому распределению или к исходному состоянию массива.

Следует отметить, что оба рассмотренных сценария представляют собой теоретические предельные случаи. На практике наиболее распространенные коллекторы для захоронения CO_2 (например, песчаники и карбонатные породы), характеризуются значительно меньшей ползучестью по сравнению с соляными отложениями. Кроме того, хотя цементный камень и крышка из глинистых сланцев также способны проявлять вязкоупругое поведение, их ползучесть реализуется лишь при превышении некоторого порогового уровня напряжений. Для цементного камня этот порог обычно составляет лишь долю от его предела прочности, тогда как для глинистых сланцев и аргиллитов анизотропия естественного напряженного состояния, как правило, препятствует полной релаксации напряжений до гидростатического состояния [42; 136]. Следовательно, сценарий полной релаксации напряжений вследствие ползучести соответствует степени восстановления напряженного состояния, которая в обычных пластах для захоронения CO_2 , вероятнее всего, недостижима за практически значимые интервалы времени. В свою очередь, сценарий без учета ползучести отражает снижение напряжений, обусловленное объемной усадкой цемента, однако не учитывает их частичное восстановление вследствие ползучести окружающей горной породы. Таким образом, фактическое напряженное

состояние, вероятнее всего, находится между двумя рассмотренными предельными сценариями и ближе к состоянию, в котором доминирует влияние усадки, поскольку развитие ползучести в цементном камне и горной породе начинается лишь после достижения порогового уровня напряжений.

Сценарий без учета ползучести

Ранняя стадия жизненного цикла скважины включает бурение, спуск обсадной колонны и цементирование. В процессе гидратации цемент переходит из жидкого в твердое состояние, что сопровождается его объемной усадкой. Усадка приводит к существенной разгрузке сжимающих напряжений на стенке скважины, частично снимая упругие напряжения, созданные гидростатическим давлением в конце стадии продавки. Анализ напряженного состояния разделяется на три стадии, отражающие основные этапы строительства и эксплуатации скважины (см. рисунок 4.2). Первая стадия описывает напряженное состояние, формирующееся после бурения скважины и цементирования обсадной колонны. Вторая стадия учитывает разгрузку напряжений вследствие объемной усадки при затвердевании цемента. Третья стадия соответствует операциям закачки жидкости, когда давление и температура в скважине могут претерпевать существенные изменения. В рамках данного сценария горная порода рассматривается как упругая среда, что дает консервативную оценку сжимающих напряжений, действующих на цементный камень.

Стадия цементирования. На данной стадии считается, что цемент находится в жидкой фазе. Соответственно, стенка скважины и внешняя поверхность обсадной колонны находятся под гидростатическим давлением p_c , создаваемым цементным раствором. Внутренняя поверхность обсадной колонны нагружена гидростатическим давлением продавочной жидкости p_d . Напряжения в обсадной колонне определяются на основе решения Ламе для толстостенной трубы [196]. В области цемента решение соответствует однородному гидростатическому напряженному состоянию с давлением p_c :

$$\sigma_{rr}^{0c} = -p_c, \quad \sigma_{\theta\theta}^{0c} = -p_c. \quad (4.1)$$

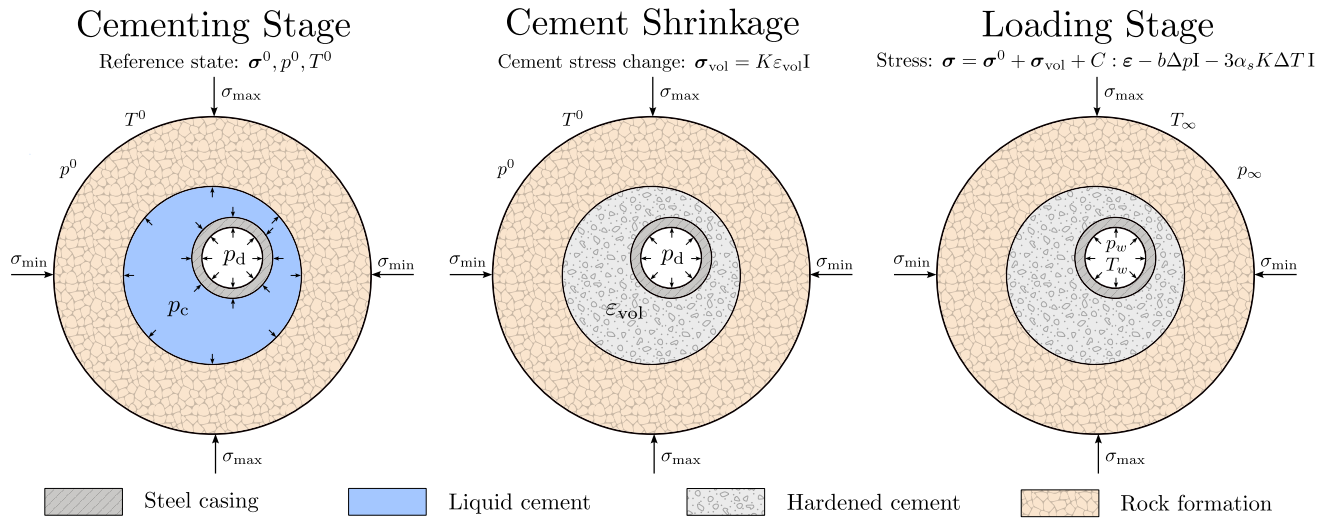


Рисунок 4.2 — Стадии эволюции напряженного состояния в сценарии без учета ползучести: исходное гидростатическое нагружение при размещении цемента, изменение упругих напряжений вследствие остаточной объемной усадки после затвердевания цемента, термопорупругие напряжения, формирующиеся при закачке CO_2

Пока цемент остается в жидкой фазе, давление p_c равно гидростатическому давлению цементного раствора. По мере гидратации цемента давление p_c может изменяться за счет трения на границах раздела цемента с обсадной колонной и горной породой, а также в результате фильтрации жидкости в пласт [142]. Поскольку жидкий цементный раствор способен поддерживать только гидростатическое напряженное состояние, считается, что после затвердевания цемента в нем не возникает касательных напряжений [41]. Для расчета напряжений в горной породе используется решение Кирша в постановке плоской деформации [197; 198], предполагающее анизотропное естественное напряженное состояние, задаваемое главными напряжениями $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$.

Объемная усадка цемента. Данная стадия учитывает влияние остаточной объемной усадки, развивающейся после момента схватывания цемента, что обычно происходит примерно через 10 часов после его размещения. Усадка, происходящая до момента схватывания цемента, считается пренебрежимо малой, поскольку изменения объема в этот период могут быть компенсированы течением цементного раствора (снижением высоты цементного столба). В настоящем исследовании процесс гидратации цемента явно не моделируется, и рассматривается только итоговое изменение напряженного состояния, возника-

ющее в цементном камне вследствие остаточной объемной усадки:

$$\sigma_{\text{vol}} = K \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I}, \quad (4.2)$$

где K — модуль объемного сжатия затвердевшего цемента, ε_{vol} — объемная деформация (положительные значения соответствуют усадке).

Стадия эксплуатационного нагружения. После гидратации и усадки цемента скважина переходит на основную стадию эксплуатационного нагружения, связанную с закачкой CO_2 . Считается, что цемент полностью затвердел и обладает ненулевым модулем сдвига G . На границах раздела цементного камня также предполагается выполнение условия идеального сцепления. На данной стадии решение получается численно с учетом изменения температуры и порового давления. Начальное напряженное состояние на этой стадии складывается из напряжений, формирующихся на стадии цементирования, и напряжений, обусловленных остаточной объемной усадкой цемента (4.2). Начальное поровое давление p^0 и температура T^0 соответствуют пластовым условиям.

Сценарий полной релаксации напряжений вследствие ползучести

В данном режиме нагружения закачка CO_2 моделируется в предположении, что прошло достаточно времени для полной релаксации возмущений напряжений, вызванных бурением и усадкой цемента, за счет вязкоупругих эффектов. Таким образом, предполагается отсутствие порогового значения девиаторных напряжений (предела текучести) в горной породе и цементе, что позволяет системе вернуться к исходному состоянию массива или гидростатическому равновесию. Несмотря на то, что для пород, не подверженных ползучести, такой сценарий, по-видимому, завышает степень восстановления напряжений, он позволяет проанализировать целостность скважины при максимально возможных сжимающих напряжениях. Анализ напряженного состояния обсаженной и зацементированной скважины разделяется на две стадии, показанные на рисунке 4.3.

Следует пояснить, каким образом в данном предельном сценарии учитывается анизотропия напряжений. Теоретически полная вязкоупругая релаксация

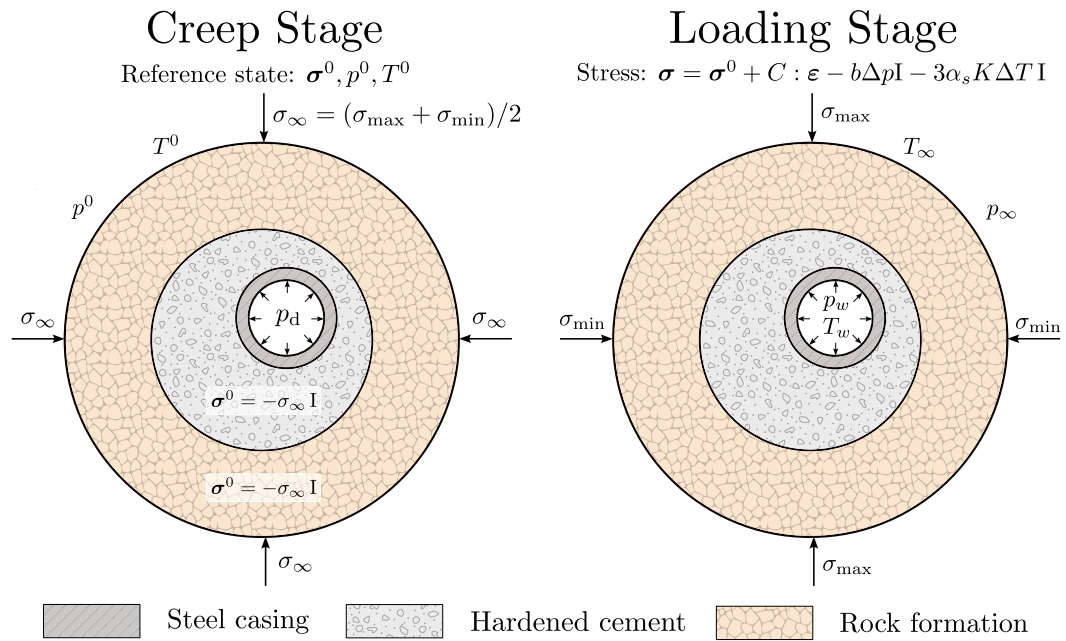


Рисунок 4.3 — Стадии сценария полной релаксации напряжений вследствие ползучести: релаксация напряжений в цементном камне и окружающей горной породе до гидростатического состояния с последующим наложением фактической анизотропии пластовых напряжений на этапе закачки CO_2

полностью устранила бы девиаторную составляющую напряженного состояния, приводя его к гидростатическому. Вместе с тем в реальных геологических условиях горные массивы способны сохранять значительную анизотропию напряжений на геологических временных масштабах вследствие устойчивых тектонических напряжений, а также существования порогового уровня напряжений, ниже которого ползучесть практически не развивается. Поскольку сопряженный нестационарный вязкоупругий анализ выходит за рамки настоящей работы, напряженное состояние на больших временных масштабах приближенно оценивается с помощью метода суперпозиции. Сначала предполагается, что локальные возмущения напряжений, обусловленные бурением и цементированием, релаксируют к среднему гидростатическому уровню σ_∞ , что отражает релаксацию возмущений в околоскважинной зоне. Затем, на этапе эксплуатационного нагружения, в качестве граничного условия задается фактическая анизотропия пластовых напряжений. В результате удастся описать состояние скважины, в котором устранены локальные возмущения напряжений, обусловленные бурением, при сохранении фактической анизотропии пластовых напряжений.

Стадия ползучести. Для построения аналитического решения на первой стадии предполагается, что анизотропия естественных напряжений отсутствует, а исходное напряжение массива задается выражением $\sigma_\infty = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$. Согласно моделям Максвелла и Бюргерса [161], неоднородности напряжений как в горной породе, так и в цементном камне полностью релаксируют при $t \rightarrow \infty$. Соответственно, начальное напряженное состояние в цементе и окружающей горной породе определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}^{0c} = -\sigma_\infty \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{0r} = -\sigma_\infty \mathbf{I}. \quad (4.3)$$

Напряжения в обсадной колонне определяются на основе решения Ламе. Следует отметить, что условия цементирования (давление цементного раствора p_c и объемная усадка ε_{vol}) не влияют на начальное напряженное состояние вследствие релаксации напряжений в цементном камне и окружающей горной породе.

Стадия эксплуатационного нагружения. Основная стадия эксплуатационного нагружения учитывает анизотропию естественных напряжений $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$, возникающую вследствие тектонического нагружения окружающей горной породы [199]. Задача решается численно с использованием начального напряженного состояния $\boldsymbol{\sigma}^0$, сформировавшегося на стадии ползучести. Считается, что начальное поровое давление p^0 и температура T^0 соответствуют пластовым условиям.

4.2 Математическая модель гидравлического отслоения

В настоящем разделе рассматривается математическая постановка задачи вертикального распространения трещины отслоения вдоль границы цементного камня. Схема гидравлического отслоения представлена на рисунке 4.4, где z — вертикальная ось (начало координат расположено на поверхности, а координата убывает с глубиной, то есть равна истинной вертикальной глубине (TVD), взятой со знаком минус), а θ — азимутальное (окружное) направление. Закачка жидкости в пласт осуществляется через перфорационные отверстия, расположенные на уровне $z = z_{\text{perf}}$, где в рамках рассматриваемой задачи задаются давление закачки и расход жидкости. Трещина отслоения распространяется

либо по границе «обсадная колонна — цемент», либо по границе «цемент — порода». Предполагается, что полная длина трещины $\ell = \ell^t + \ell^b$ существенно превышает длину ее дуги в поперечном сечении, где ℓ^t и ℓ^b обозначают вертикальную протяженность верхнего и нижнего сегментов трещины соответственно. Требуется определить раскрытие трещины w , давление жидкости p_f и длину трещины ℓ . Основными искомыми величинами в каждом поперечном сечении скважины являются тензор напряжений σ , поровое давление p , температура T и угол дуги трещины γ .

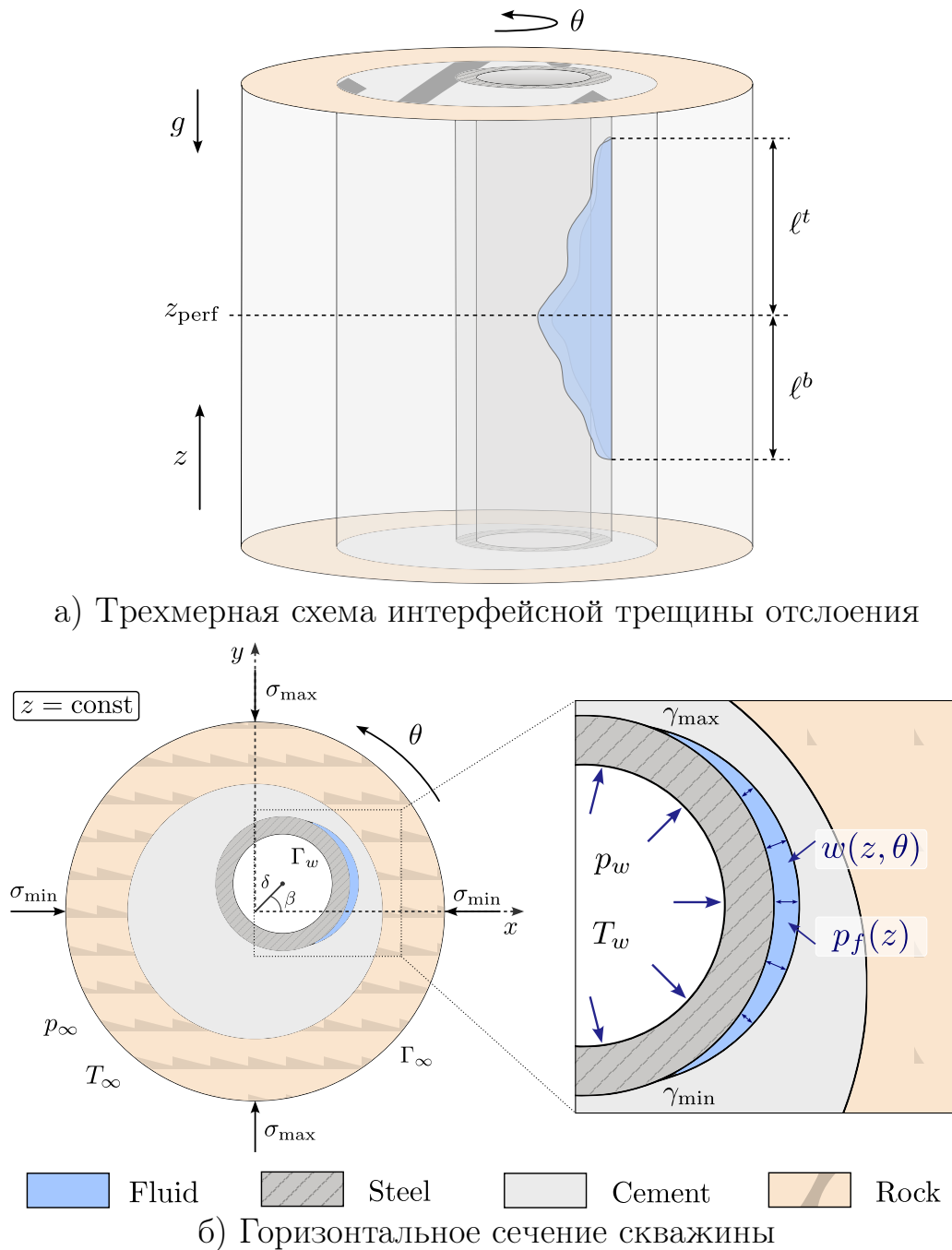


Рисунок 4.4 — Схема распространения трещины отслоения вдоль границы цементного камня в обсаженной и зацементированной вертикальной скважине

4.2.1 Модель распространения трещины отслоения вдоль ствола скважины

Для трещины отслоения с цилиндрической геометрией среднее раскрытие в поперечном сечении скважины определяется выражением

$$\bar{w}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z, \theta) d\theta, \quad w(z, \theta) = \Omega(z, \theta) \bar{w}(z), \quad (4.4)$$

где $\Omega(z, \theta)$ задает форму профиля раскрытия в азимутальном направлении. Уравнение течения жидкости, представляющее собой уравнение смазки, усредненное по азимутальному направлению [8; 200], может быть записано в виде

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial z} = \frac{Q_{\text{inj}}}{2\pi R} \delta(z - z_{\text{perf}}) - \bar{q}_L, \quad (4.5)$$

где Q_{inj} — объемный расход жидкости, закачиваемой в трещину отслоения, а $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. В предположении, что закачиваемая жидкость является ньютоновской, а течение ламинарным, средний вертикальный поток $\bar{q}_z$ внутри трещины описывается законом Пуазейля

$$\bar{q}_z = -\Lambda(z) \frac{\bar{w}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho g \right), \quad \Lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega^3(z, \theta) d\theta, \quad (4.6)$$

где p_f — давление жидкости в трещине, μ — динамическая вязкость закачиваемой жидкости, ρ — плотность закачиваемой жидкости, g — ускорение свободного падения, а Λ — безразмерная гидравлическая проводимость трещины, зависящая от безразмерного профиля раскрытия (4.4). Уравнение (4.5) представляет собой закон сохранения массы для усредненного по азимуту течения, тогда как уравнение (4.6) получено из закона сохранения импульса. Слагаемое $\bar{q}_L$ в правой части уравнения смазки (4.5) представляет собой среднюю скорость утечек жидкости в окружающую среду. В настоящей работе используется модель утечек, зависящих от давления, в которой скорость утечек линейно зависит от локального давления жидкости внутри трещины. Соответствующая зависимость имеет вид:

$$\bar{q}_L = \mathcal{L}_1 p_f + \mathcal{L}_0, \quad (4.7)$$

где $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ — параметры, определяющие зависящие от давления утечки.

Длина дуги трещины по окружности не может превышать $2\pi R$ (где R — радиус трещины отслоения), тогда как осевая длина трещины ℓ вдоль ствола скважины может достигать десятков метров и более. В предположении $\ell \gg 2\pi R$ нормальная компонента поверхностной нагрузки определяется в каждом сечении скважины в рамках локального приближения плоской деформации

$$T_n = \sigma_0 \Sigma_n + C_0 \Pi \bar{w}, \quad C_0 = \frac{E'_0}{2\pi R}, \quad (4.8)$$

где Σ_n — безразмерные нормальные напряжения, приложенные к поверхности трещины, σ_0 — характерное значение сжимающего напряжения, Π — безразмерный коэффициент упругости, а $C_0 = E'_0/(2\pi R)$ — масштабирующий коэффициент упругости. Характерное напряжение σ_0 и характерный модуль плоской деформации E'_0 считаются постоянными и определяются пластовыми напряжениями и свойствами породы. В процессе развития отслоения трещина может смыкаться — например, в результате уменьшения или даже изменения знака объемного расхода на перфорациях. Для исключения отрицательных значений среднего раскрытия трещины $\bar{w}$ используются следующие условия контакта:

$$\bar{w} \geq \bar{w}_{\min}, \quad (T_n - p_f)(\bar{w} - \bar{w}_{\min}) = 0, \quad (4.9)$$

где $\bar{w}_{\min}$ — минимальное допустимое значение среднего раскрытия трещины. В раскрытой трещине нормальное напряжение T_n на ее поверхности равно давлению жидкости p_f внутри трещины. В противном случае нормальное напряжение T_n включает также контактное напряжение. Несмотря на то, что контактный алгоритм допускает произвольные значения $\bar{w}_{\min}$, в настоящей работе рассматривается случай $\bar{w}_{\min} = 0$.

Инициация отслоения происходит на границе цементного камня вблизи перфорационных отверстий за обсадной колонной. С учетом падения давления на перфорациях давление жидкости внутри трещины определяется выражением

$$p_f(z_{\text{perf}}) = p_w - \Delta p_p, \quad (4.10)$$

где z_{perf} — глубина расположения перфорационных отверстий, p_w — заданное давление жидкости в скважине, а Δp_p — падение давления на перфорациях. Величина Δp_p оценивается с помощью уравнений Бернулли и уравнения неразрывности [201] в предположении, что закачиваемая жидкость равномерно распределяется между перфорационными отверстиями на заданной глубине,

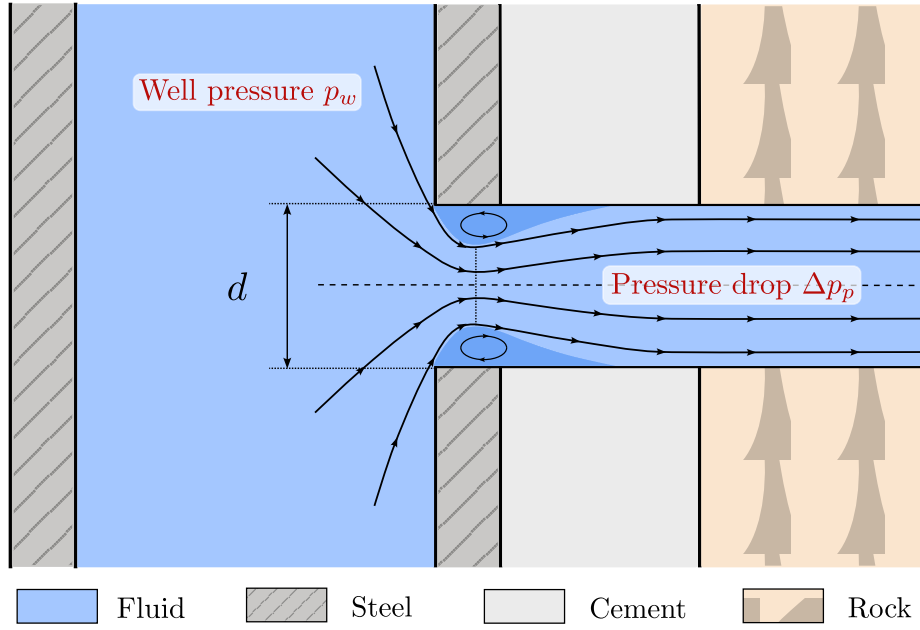


Рисунок 4.5 — Схематическое изображение падения давления на перфорациях, иллюстрирующее изменение давления между стволом скважины и перфорированным интервалом, а также влияние геометрии перфорационных каналов и параметров течения на эффективные потери давления

см. рисунок 4.5:

$$\Delta p_p = \frac{8\rho}{\pi^2 d^4 C_d^2} \left(\frac{Q_w}{n} \right)^2, \quad (4.11)$$

где Q_w — суммарный объемный расход закачки, d — диаметр перфорационного отверстия, n — число перфорационных отверстий, а C_d — безразмерный коэффициент расхода.

Наконец, граничное условие в вертикальных вершинах трещины формулируется на основе энергетических соображений [202] с использованием критической скорости высвобождения энергии G_c и может быть записано в виде

$$p_f^{\text{tip}} - \sigma_0 \Sigma_n^{\text{tip}} = \sqrt{\frac{C_0 \Pi^{\text{tip}} \gamma^{\text{tip}} G_c}{\pi}}, \quad \bar{w}^{\text{tip}} = \sqrt{\frac{\gamma^{\text{tip}} G_c}{\pi C_0 \Pi^{\text{tip}}}}, \quad (4.12)$$

где верхний индекс “tip” обозначает величины, вычисленные в вершине трещины ℓ^t или ℓ^b .

В классических моделях гидравлического разрыва PKN и pseudo-3D в вершине трещины задается условие нулевого раскрытия $\bar{w}(\ell) = 0$ [3; 4]. Тем не менее это условие не учитывает влияние трещиностойкости в направлении распространения. Альтернативное граничное условие, учитывающее трещиностойкость на основе энергетических соображений, было предложено

в работе [202] для плоской трещины постоянной высоты. Ниже представлено обобщение этого подхода на случай трещины с цилиндрической геометрией. Внутренняя энергия, накопленная в сегменте толщиной dz с центром в точке z , может быть оценена как $U_{ps}(z) dz$, где плотность внутренней энергии определяется выражением

$$U_{ps}(z) = \int p_{\text{net}} dV, \quad (4.13)$$

причем $p_{\text{net}} = p_f - \sigma_0 \Sigma_n$ — чистое давление. Приращение объема трещины оценивается как $dV = 2\pi R d\bar{w}$. С учетом уравнения упругости (4.8) внутренняя энергия твердого тела на единицу длины сводится к виду

$$U_{ps}(z) = \int p_{\text{net}} \frac{2\pi R}{C_0 \Pi} dp_{\text{net}} = \frac{\pi R}{C_0 \Pi} p_{\text{net}}^2. \quad (4.14)$$

Скорость высвобождения энергии, соответствующая приращению поверхности трещины $dS = 2\gamma R d\ell$, принимает следующий вид:

$$G = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_p \approx \frac{2U_{ps}(\ell) d\ell}{2\gamma R d\ell} = \frac{\pi}{C_0 \Pi \gamma} p_{\text{net}}^2(\ell), \quad (4.15)$$

где γ — угол дуги трещины. Согласно теории хрупких трещин Гриффитса [203], инициация распространения трещины происходит, когда скорость высвобождения энергии достигает критического значения $G = G_c$. Это приводит к критерию распространения фронта трещины в виде (4.12).

4.2.2 Модель термoporoupryгoгo деформирования в поперечном сечении скважины

Для определения упругих коэффициентов, гидравлической проводимости трещины и параметров утечек, зависящих от давления, требуется решить механическую задачу в каждом горизонтальном сечении скважины. В рамках приближения плоской деформации каждое сечение рассматривается независимо. В модели учитывается эксцентриситет обсадной колонны, задаваемый смещением ее оси δ относительно оси ствола скважины и углом ориентации β , см. рисунок 4.46. Координатные оси x и y ориентированы вдоль направлений минимального $\sigma_{\min}$ и максимального $\sigma_{\max}$ горизонтальных напряжений в пласте

соответственно. Тензор деформаций определяется как $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) / 2$, где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$ — вектор перемещений. Моделирование основано на предположениях о малых деформациях $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$, малых изменениях пористости $|\phi - \phi^0| / \phi^0 \ll 1$ и малых изменениях плотности поровой жидкости $|\rho_f - \rho_f^0| / \rho_f^0 \ll 1$.

Механическая задача в поперечном сечении скважины формулируется в рамках несвязанной термoporоупругости [60; 204]. Определяющие уравнения включают уравнение равновесия для термoporоупругой среды, закон сохранения массы жидкости и уравнение теплопроводности. С учетом закона Дарси и закона Фурье определяющие уравнения принимают следующий вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\varepsilon} - b(p - p^0)\mathbf{I} - 3\alpha_s K(T - T^0)\mathbf{I}, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{k}{\eta} \nabla p \right), \quad (4.17)$$

$$C_m \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T). \quad (4.18)$$

В этих уравнениях λ — первый параметр Ламе, G — модуль сдвига, $K = (3\lambda + 2G)/3$ — модуль объемного сжатия скелета, а b — коэффициент Био. Коэффициент термического расширения насыщенной пористой среды определяется как $\alpha_m = \alpha_s(b - \phi^0) + \alpha_f\phi^0$, где α_s и α_f — коэффициенты линейного термического расширения скелета и поровой жидкости соответственно. Модуль Био определяется выражением

$$\frac{1}{M} = \frac{(b - \phi^0)(1 - b)}{K} + \frac{\phi^0}{K_f}, \quad (4.19)$$

где K_f — модуль объемного сжатия поровой жидкости. Коэффициент k представляет собой проницаемость, а η — динамическую вязкость поровой жидкости. В отличие от вязкости жидкости в трещине μ , характеризующей закачиваемый CO_2 внутри трещины, η описывает вязкость поровой жидкости в окружающем пористом цементе и горной породе. Параметр κ обозначает теплопроводность, а $C_m = (1 - \phi^0)\rho_s C'_s + \phi^0\rho_f C'_f$ — объемную теплоемкость насыщенной среды, где C'_s и C'_f — удельные теплоемкости скелета и поровой жидкости соответственно. Свойства скелета λ , G , α_s и C'_s относятся к дренированным условиям (то есть к случаю нулевого изменения порового давления). Конвективное слагаемое в уравнении теплопроводности не учитывается, поскольку считается, что объем жидкости в трещине пренебрежимо мал по сравнению с объемом пор окружающего пласта в околоскважинной зоне.

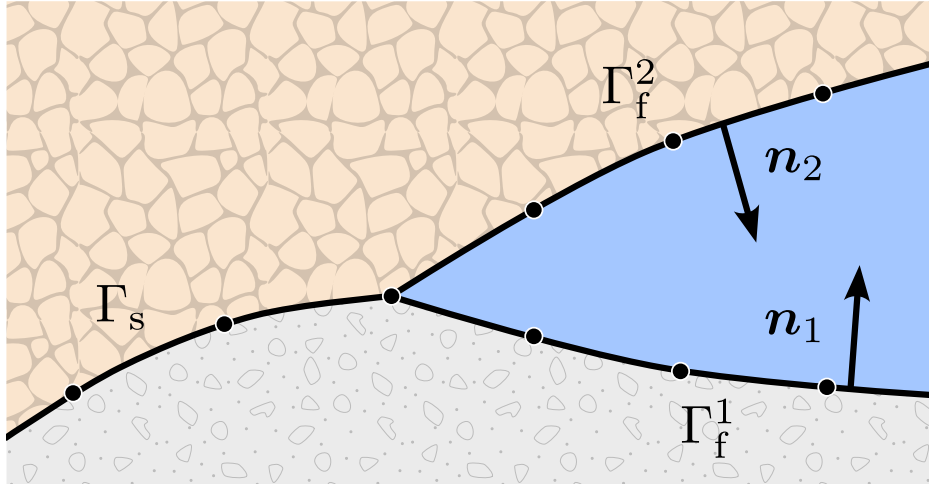


Рисунок 4.6 — Граница трещины Γ_f , состоящая из двух противоположных поверхностей Γ_f^1 и Γ_f^2 , и часть Γ_s границы цементного камня с ненарушенным сцеплением

Граница цементного камня, вдоль которой распространяется отслоение, разделяется на часть Γ_f , соответствующую трещине отслоения, и часть Γ_s , сохраняющую сцепление с цементным камнем. Граница трещины состоит из двух противоположных поверхностей $\Gamma_f = \Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2$, как показано на рисунке 4.6. Раскрытие трещины в поперечном сечении скважины определяется как скачок нормальных перемещений на берегах трещины $w = -(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)$, причем $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ в предположении малых деформаций.

Граничные условия для уравнения равновесия включают давление закачиваемой жидкости (с учетом гидростатической компоненты давления в скважине и без учета трения о стенки трубы) на внутренней границе обсадной колонны Γ_w и пластовые напряжения на внешней границе Γ_∞ :

$$\Gamma_w: \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -(p_w + \rho g(z_{\text{perf}} - z))\mathbf{n}, \quad \Gamma_\infty: \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -\text{diag}(\sigma_{\min}, \sigma_{\max}) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.20)$$

где p_w — давление внутри скважины, а $\text{diag}(\sigma_{\min}, \sigma_{\max})$ — диагональный тензор размера 2×2 . Давление жидкости в трещине p_f , определяемое из уравнения смазки (4.5), задается на границе трещины Γ_f . Кроме того, на границе трещины прикладывается дополнительное напряжение $\sigma_f(w)$, учитывающее напряжение сцепления и контактное напряжение. На неповрежденной части Γ_s границы цементного камня с сохраняющимся сцеплением предполагается непрерывность перемещений:

$$\Gamma_f: \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -(p_f - \sigma_f(w))\mathbf{n}, \quad \Gamma_s: [\mathbf{u}] = 0. \quad (4.21)$$

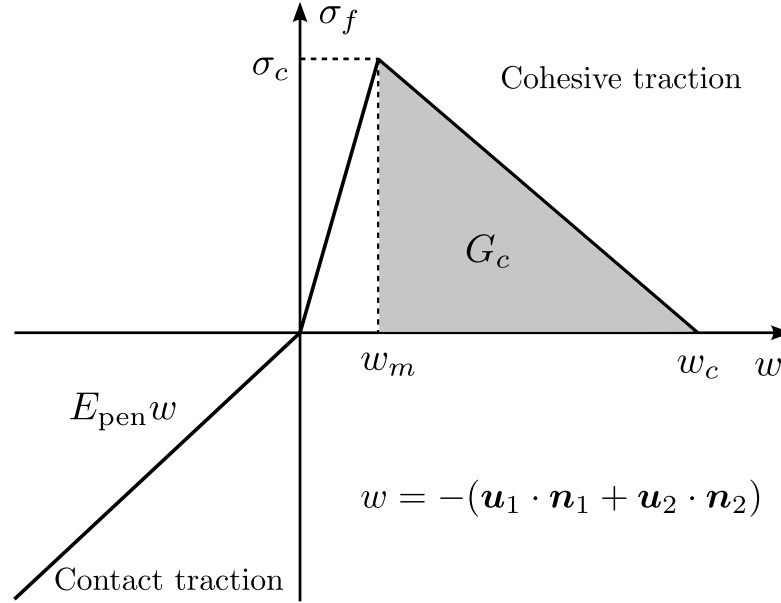


Рисунок 4.7 — Билинейный закон связи между напряжениями и раскрытием, используемый для интерфейсных элементов трещины: изображены упругий режим, режим разупрочнения, а также штрафная составляющая, обеспечивающая отсутствие взаимного проникновения берегов трещины

В настоящей работе распространение трещины отслоения в азимутальном направлении в поперечном сечении скважины моделируется с использованием подхода зоны сцепления, первоначально предложенного Дагдейлом [205] и Баренблаттом [206]. Такая постановка исключает сингулярность напряжений в вершине трещины и пригодна для моделирования в рамках метода конечных элементов (МКЭ). Для вычисления напряжения сцепления, а также для предотвращения взаимного проникновения берегов трещины при контакте используется следующий закон связи между напряжениями и раскрытием, см. рисунок 4.7:

$$\sigma_f(w) = \begin{cases} E_{\text{pen}} w, & w < 0, \\ \sigma_c \frac{w}{w_m}, & 0 \leq w \leq w_m, \\ \sigma_c \left(\frac{w_c - w}{w_c - w_m} \right), & w_m < w < w_c, \\ 0, & w \geq w_c, \end{cases} \quad (4.22)$$

где σ_c — прочность сцепления, E_{pen} — штрафная жесткость контакта, а $w_m = 10^{-3} w_c$ — параметр регуляризации [207]. Критическое раскрытие w_c определяется из условия, что работа напряжений сцепления равна критической скорости

высвобождения энергии G_c :

$$G_c = \frac{1}{2} \sigma_c w_c. \quad (4.23)$$

Граничные условия для уравнения фильтрации включают условие непротекания поровой жидкости на границе обсадной колонны и цемента Γ_{sc} , пластовое поровое давление p_∞ на внешней границе Γ_∞ , давление жидкости в трещине p_f на границе Γ_f , а также непрерывность порового давления на неповрежденной части Γ_s границы:

$$\Gamma_{sc}: \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \Gamma_\infty: p = p_\infty, \quad \Gamma_f: p = p_f, \quad \Gamma_s: [p] = 0. \quad (4.24)$$

Граничные условия для уравнения теплопроводности включают заданную температуру T_w закачиваемой жидкости на внутренней границе обсадной колонны Γ_w , пластовую температуру T_∞ на внешней границе Γ_∞ , а также непрерывность температуры на границах цемента:

$$\Gamma_w: T = T_w, \quad \Gamma_\infty: T = T_\infty, \quad \Gamma_f \cup \Gamma_s: [T] = 0. \quad (4.25)$$

Начальное состояние, характеризуемое начальным напряжением σ^0 , начальным поровым давлением p^0 и начальной температурой T^0 , формируется в процессе бурения и цементирования скважины (см. раздел 4.1.2):

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0, \quad p = p^0, \quad T = T^0. \quad (4.26)$$

Задача решается численно методом конечных элементов с использованием открытой библиотеки `deal.II` на языке C++ [57].

4.2.3 Сопряжение модели распространения трещины и термопороупругой задачи в сечениях скважины

Для расчета вертикального распространения трещины отслоения необходимо знать ряд гидравлических и упругих параметров. К ним относятся безразмерная гидравлическая проводимость трещины Λ , используемая для вычисления среднего вертикального потока (4.6). Помимо этого, требуется знать параметры зависящих от давления утечек $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$, входящие в выражение для средней скорости утечек (4.7), а также безразмерное нормальное

напряжение Σ_n и безразмерный коэффициент упругости Π , необходимые для определения нормального напряжения на поверхности трещины (4.8). Для сопряжения модели распространения трещины с термoporоупругой механической задачей в поперечном сечении необходимо определить, как изменяются нормальные напряжения на поверхности трещины и скорость утечек жидкости при изменении ее раскрытия. При отсутствии распространения трещины в азимутальном направлении обе зависимости оказываются линейными. Поэтому соответствующие коэффициенты могут быть определены численно путем вычисления производных нормальных напряжений и скорости утечек жидкости по среднему раскрытию трещины и соответствующему изменению давления жидкости. Хотя давление жидкости является естественным граничным условием в механической модели (4.21), на практике удобнее задавать объем трещины в сечении в виде

$$\int_{\Gamma_f^1} w \, dS = 2\pi R \bar{w} \quad (4.27)$$

и рассматривать соответствующее давление на поверхности трещины как неизвестную величину, зависящую от заданного объема трещины. Такой подход позволяет вычислить требуемые производные путем решения термoporоупругой задачи для двух различных значений заданного объема трещины с последующей оценкой соответствующих изменений нормальных напряжений и скорости утечек жидкости.

На рисунке 4.8 приведена схема работы сопряженного алгоритма для моделирования распространения трещины отслоения вдоль границы цементного камня на одном шаге по времени. Алгоритм использует последовательную схему расчета: на каждом шаге по времени сначала решается задача вертикального распространения трещины вдоль ствола скважины, а затем в каждом поперечном сечении решается механическая задача. Сначала на основе коэффициентов сопряжения с предыдущего шага по времени решается задача вертикального распространения трещины для определения среднего раскрытия $\bar{w}$ вдоль ствола скважины. Полученное распределение объема жидкости в трещине затем используется для решения механической задачи. Нелинейная механическая задача в каждом поперечном сечении скважины решается с помощью метода конечных элементов для заданного объема жидкости, полученного на этапе расчета распространения трещины. В результате вычисляются поля напряжений, перемещений, порового давления, температуры и профиль раскрытия трещины

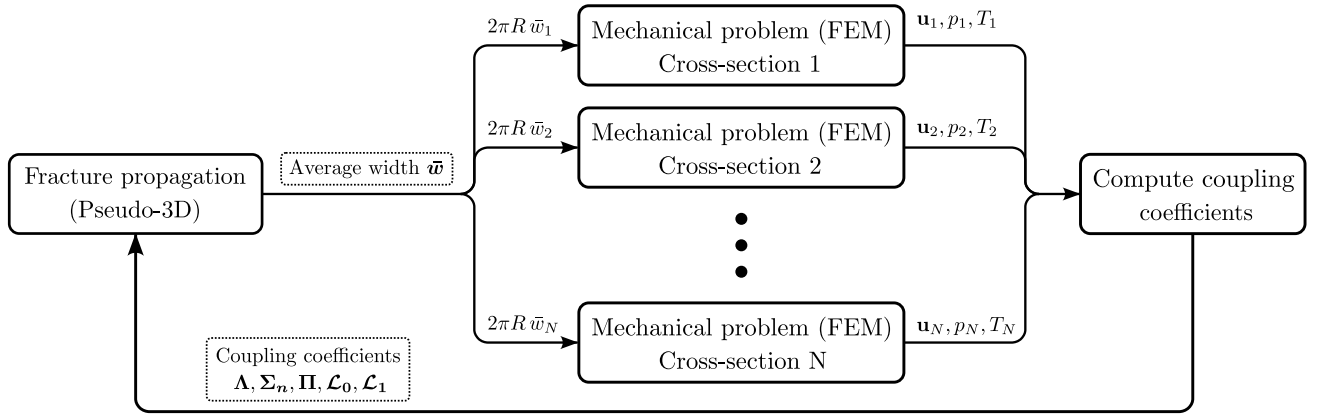


Рисунок 4.8 — Блок-схема сопряженного алгоритма для моделирования распространения трещины отслоения вдоль границы цементного камня на одном шаге по времени. Сначала в рамках модели вертикального распространения вычисляется распространение трещины и соответствующее распределение объема жидкости вдоль ствола скважины, которое выступает в качестве входных данных для конечно-элементной модели в сечениях скважины. В результате расчета в сечении определяются напряжения, перемещения и локальный профиль раскрытия трещины, по которым вычисляются коэффициенты сопряжения. Эти коэффициенты затем возвращаются в модель распространения, что обеспечивает согласованное взаимодействие вертикальной и поперечной моделей на протяжении всего моделирования

в данном сечении. Затем на основе полученного решения вычисляются коэффициенты сопряжения независимо для каждого сечения. Для удобства индекс, обозначающий номер сечения, в дальнейших выражениях опускается. Вычисление коэффициентов сопряжения включает следующие шаги:

1. Пусть p_*^1 — давление жидкости в трещине, полученное из решения механической задачи при заданном среднем раскрытии $\bar{w}^1$. На основе полученной границы трещины Γ_f в сечении и безразмерного профиля раскрытия Ω безразмерная проводимость Λ и средняя скорость утечек $\bar{q}_{\mathcal{L}}^1$ вычисляются по формулам

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega^3(\theta) d\theta, \quad \bar{q}_{\mathcal{L}}^1 = -\frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_f} \frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (4.28)$$

2. При фиксированной границе трещины Γ_f механическая задача решается для увеличенного значения среднего раскрытия $\bar{w}^2 = \bar{w}^1 + \Delta\bar{w}$, что позволяет определить соответствующие значения давления жидкости p_*^2 и средней скорости утечек $\bar{q}_{\mathcal{L}}^2$.

3. На основе полученных значений среднего раскрытия $\bar{w}^1, \bar{w}^2$, соответствующих значений давления жидкости p_*^1, p_*^2 и средней скорости утечек $\bar{q}_L^1, \bar{q}_L^2$ коэффициенты сопряжения для уравнения упругости вычисляются по формулам

$$\Sigma_n = \frac{p_*^1 \bar{w}^2 - p_*^2 \bar{w}^1}{\sigma_0(\bar{w}^2 - \bar{w}^1)}, \quad \Pi = \frac{p_*^2 - p_*^1}{C_0(\bar{w}^2 - \bar{w}^1)}. \quad (4.29)$$

Аналогично коэффициенты зависящих от давления утечек имеют вид

$$\mathcal{L}_0 = \frac{p_*^2 \bar{q}_L^1 - p_*^1 \bar{q}_L^2}{p_*^2 - p_*^1}, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{\bar{q}_L^2 - \bar{q}_L^1}{p_*^2 - p_*^1}. \quad (4.30)$$

Вычисленные коэффициенты сопряжения используются на следующем шаге по времени при решении задачи распространения трещины вдоль ствола скважины.

Таким образом, алгоритм на каждом шаге по времени объединяет расчет вертикального распространения трещины вдоль ствола скважины и расчет ее поведения в каждом поперечном сечении. Модель вертикального распространения предсказывает рост трещины и определяет ее объем в сечениях вдоль ствола скважины. Полученные значения используются как входные данные для конечно-элементных расчетов в каждом сечении, где определяются напряжения, перемещения и локальный профиль раскрытия трещины. По этим результатам вычисляются коэффициенты сопряжения, количественно описывающие взаимодействие между моделью вертикального распространения и термопороупругой моделью в сечениях скважины. На следующем шаге по времени обновленные коэффициенты сопряжения используются в модели вертикального распространения, что обеспечивает согласованность расчетов на протяжении всего моделирования.

4.2.4 Критерий инициации трещины отслоения

Считается, что инициация отслоения происходит либо на границе обсадной колонны и цемента, либо на границе цемента и породы. Для проверки критерия инициации достаточно рассмотреть одно поперечное сечение скважины, расположенное на глубине перфорационных отверстий. Кроме того, модель

инициации не предполагает моделирования распространения трещины отслоения, благодаря чему задача остается линейной. Модель инициации базируется на тех же уравнениях несвязанной термopoppyryгocти (4.16)–(4.18), что и механическая задача в поперечных сечениях скважины. Граничные условия на внутренней поверхности обсадной колонны и на внешней границе остаются без изменений. На границах цементного камня задаются условия непрерывности перемещений, порового давления, температуры, нормального напряжения, потока поровой жидкости и теплового потока.

Считается, что инициация трещины отслоения происходит, когда давление жидкости в перфорационных отверстиях превышает нормальное сжимающее напряжение $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ на границе цементного камня и предел прочности сцепления на растяжение σ_t :

$$p_w - \Delta p_p > -\sigma_n + \sigma_t. \quad (4.31)$$

Знак минус перед σ_n соответствует принятому в работе соглашению о знаках, в соответствие с которым сжимающие напряжения считаются отрицательными. Проверка критерия инициации выполняется как на границе обсадной колонны и цемента, так и на границе цемента и породы. Если критерий выполнен на обеих границах, то выбирается та граница, для которой превышение левой части критерия над правой больше. Азимут θ^* инициации трещины отслоения определяется как угол, при котором критерий инициации принимает максимальное значение вдоль границы:

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} (p_w - \Delta p_p + \sigma_n - \sigma_t). \quad (4.32)$$

Начальный угол дуги трещины отслоения полагается равным $\pi/4$, поскольку именно при такой азимутальной протяженности трещины критическое чистое давление, необходимое для ее инициации, близко к минимальному значению, как показано в работе [40]. Также была выполнена проверка, что небольшие вариации начального угла дуги оказывают пренебрежимо малое влияние на результат. Для вновь создаваемых в процессе распространения концевых элементов начальный угол дуги также полагается равным $\pi/4$. При этом угол дуги трещины не фиксируется и может увеличиваться в процессе расчета. В критерии распространения (4.12) используется значение γ^{tip} , соответствующее текущему значению угла дуги трещины в поперечном сечении, связанном с концевым элементом.

4.3 Численная схема

4.3.1 Дискретизация уравнений распространения трещины вдоль ствола скважины

Область трещины отслоения вдоль ствола скважины покрывается фиксированными ячейками расчетной сетки, как показано на рисунке 4.9. Центр ячейки с индексом i расположен в точке z_i , а размер ячейки равен Δz_i . Все элементы сетки разделяются на два типа. Внутренние элементы полностью заполнены жидкостью и целиком расположены внутри области трещины. Концевые элементы заполнены жидкостью лишь частично и пересекаются фронтом трещины. Предполагается, что множество внутренних и концевых элементов не изменяется в течение одного шага по времени. При этом фактическая концевая область может выходить за пределы одного элемента сетки (см. рисунок 4.9).

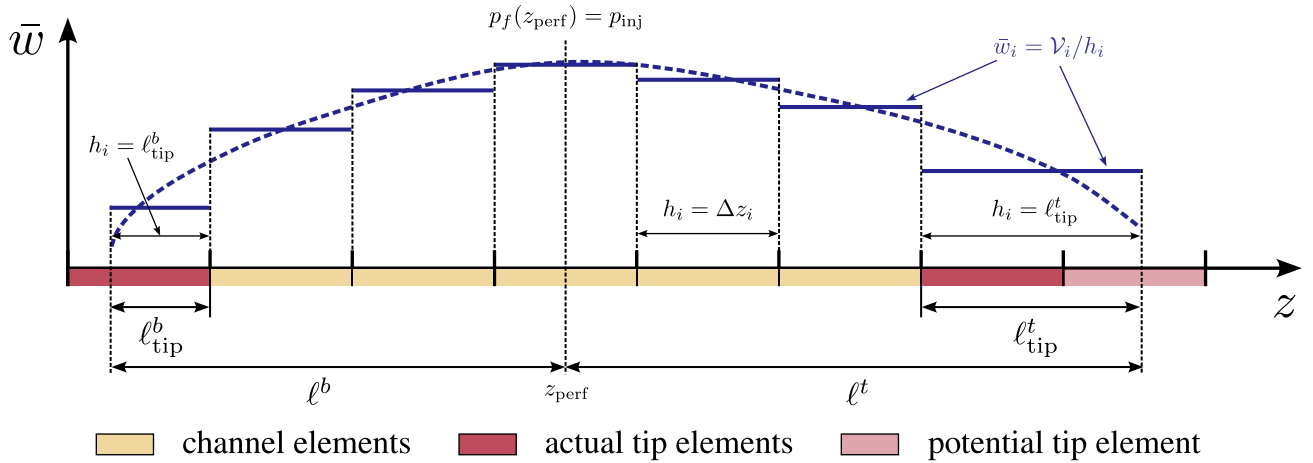


Рисунок 4.9 — Дискретизация трещины отслоения, распространяющейся вдоль ствола скважины, на фиксированной сетке. Пунктирная синяя линия изображает непрерывный профиль раскрытия трещины, а сплошные горизонтальные синие линии соответствуют его кусочно-постоянному приближению

Раскрытие трещины и давление жидкости аппроксимируются кусочно-постоянными функциями на элементах сетки. Для дискретизации по времени используется неявный метод Эйлера, а для пространственной дискретизации применяется метод конечных объемов. Такой подход является одним из наиболее распространенных при решении задач данного класса [12; 28]. Дискретизация уравнения смазки формулируется относительно объемов жидкости

в ячейках $\mathcal{V}_i = h_i \bar{w}_i$, где h_i обозначает размер i -й ячейки. Для внутренних элементов размер ячейки считается равным размеру элемента сетки $h_i = \Delta z_i$. Для фактического конечного элемента размер ячейки определяется длиной конечной области $h_i = \ell^t$. Таким образом, конечная ячейка может занимать более одного элемента сетки, см. рисунок 4.9.

Дискретизация уравнения смазки (4.5) с помощью метода конечных объемов приводит к следующему соотношению:

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}^0 - \Delta t \mathbb{A}(\mathbf{p}_f + \rho g \mathbf{z}) + \Delta t \mathbb{H}(\mathbb{L}_1 \mathbf{p}_f + \mathcal{L}_0) - \frac{\Delta t Q_{\text{inj}}}{2\pi R} \boldsymbol{\delta}_{i_0} = 0, \quad (4.33)$$

где Δt — размер шага по времени, $\mathbf{V}$ обозначает вектор объемов жидкости $\mathcal{V}_i$ на текущем шаге по времени, $\mathbf{V}^0$ — соответствующие объемы жидкости с предыдущего шага, $\mathbf{p}_f$ содержит значения давления жидкости в каждой ячейке, а $\mathbf{z}$ — вектор координат центров ячеек. Диагональная матрица $\mathbb{H}$ содержит размеры ячеек, а ее элементы имеют вид $(\mathbb{H})_{ii} = h_i$. Матрица $\mathbb{L}_1$ также является диагональной, причем ее диагональные элементы равны коэффициентам $\mathcal{L}_1$ линейной зависимости утечек от давления. Вектор $\mathcal{L}_0$ содержит соответствующие коэффициенты $\mathcal{L}_0$. Матрица потоков $\mathbb{A}$ определяется соотношением

$$[\mathbb{A} \mathbf{p}_f]_i = K_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{f,i+1} - p_{f,i}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_{f,i} - p_{f,i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad h_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{h_i + h_{i\pm 1}}{2}, \quad (4.34)$$

где коэффициенты подвижности жидкости в трещине $K_{i\pm\frac{1}{2}}$ на гранях ячеек имеют вид

$$K_{i\pm\frac{1}{2}} = \Lambda_{i\pm 1} \frac{\bar{w}_{i\pm 1}^3}{12\mu} \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i\pm 1}} \right) + \Lambda_i \frac{\bar{w}_i^3}{12\mu} \left(\frac{h_{i\pm 1}}{h_i + h_{i\pm 1}} \right). \quad (4.35)$$

Для реализации условия заданного давления жидкости p_{inj} внутри перфораций объемный расход закачки Q_{inj} рассматривается как дополнительная неизвестная величина. При этом неизвестный расход Q_{inj} играет роль множителя Лагранжа, соответствующего граничному условию на давление (4.10), и входит в уравнение смазки (4.33) в виде точечного источника. Вектор $\boldsymbol{\delta}_{i_0}$ является единичным вектором, у которого i_0 -я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Здесь индекс i_0 соответствует ячейке закачки. С учетом того, что давление в ячейке закачки i_0 не может быть меньше сжимающего напряжения $\sigma_0(\boldsymbol{\Sigma}_n)_{i_0}$, условие заданного давления закачки принимает вид:

$$(\mathbf{p}_f)_{i_0} = \max\{p_w - \Delta p_p, \sigma_0(\boldsymbol{\Sigma}_n)_{i_0}\}, \quad (4.36)$$

где Σ_n обозначает вектор безразмерных нормальных напряжений.

Для дискретизации локального уравнения упругости (4.8) используется поточечная коллокация в центрах всех ячеек, расположенных внутри текущей области трещины. Для моделирования смыкания трещины и исключения отрицательных значений ее объема в каждой ячейке применяется метод штрафа [208]:

$$\mathbf{p}_f - \mathbb{D}_{\text{pen}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{\min}) = \sigma_0 \Sigma_n + \mathbb{C} \mathbb{H}^{-1} \mathbf{v}, \quad (4.37)$$

где вектор $\mathbf{v}^{\min}$ содержит минимально допустимые объемы ячеек, равные $h_i \bar{w}_{\min}$, а диагональная матрица $\mathbb{C}$ содержит упругие коэффициенты $C_0 \Pi_i$. Диагональная матрица штрафа $\mathbb{D}_{\text{pen}}$ имеет вид

$$(\mathbb{D}_{\text{pen}})_{ii} = E_{\text{pen}} \mathcal{H}(\mathbf{v}_i^{\min} - \mathbf{v}_i), \quad (4.38)$$

где E_{pen} — штрафная жесткость контакта, а $\mathcal{H}$ обозначает функцию Хевисайда.

Уравнения (4.33), (4.36) и (4.37) объединяются в нелинейную упругогидродинамическую систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} & \Delta t (\mathbb{H} \mathbb{L}_1 - \mathbb{A}) & -\frac{\Delta t}{2\pi R} \boldsymbol{\delta}_{i_0} \\ -\mathbb{C}_{\text{pen}} & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\delta}_{i_0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p}_f \\ Q_{\text{inj}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^0 + \Delta t (\mathbb{A}(\rho g \mathbf{z}) - \mathbb{H} \mathcal{L}_0) \\ \sigma_0 \Sigma_n - \mathbb{D}_{\text{pen}} \mathbf{v}^{\min} \\ \max\{p_w - \Delta p_p, \sigma_0 (\Sigma_n)_{i_0}\} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

где $\mathbb{C}_{\text{pen}} = \mathbb{C} \mathbb{H}^{-1} + \mathbb{D}_{\text{pen}}$. Получаемая разреженная система решается итерационно методом простой итерации, который обладает устойчивостью и обеспечивает высокую точность при решении задач данного класса.

Для определения расстояния до подвижного фронта трещины предполагается, что среднее раскрытие трещины в окрестности вершины имеет вид

$$\bar{w}_a(s) = (As + B)^{1/3}, \quad (4.40)$$

где s — расстояние до фронта трещины, а коэффициенты A и B определяются на основе формы трещины в окрестности вершины и критерия распространения. Такая форма среднего раскрытия точно описывает решение для полубесконечной трещины постоянной высоты, распространяющейся с постоянной скоростью в случае отсутствия утечек [188]. На рисунке 4.10 представлена схема области в окрестности вершины трещины. Алгоритм отслеживания положения фронта формулируется единообразно, без различия между

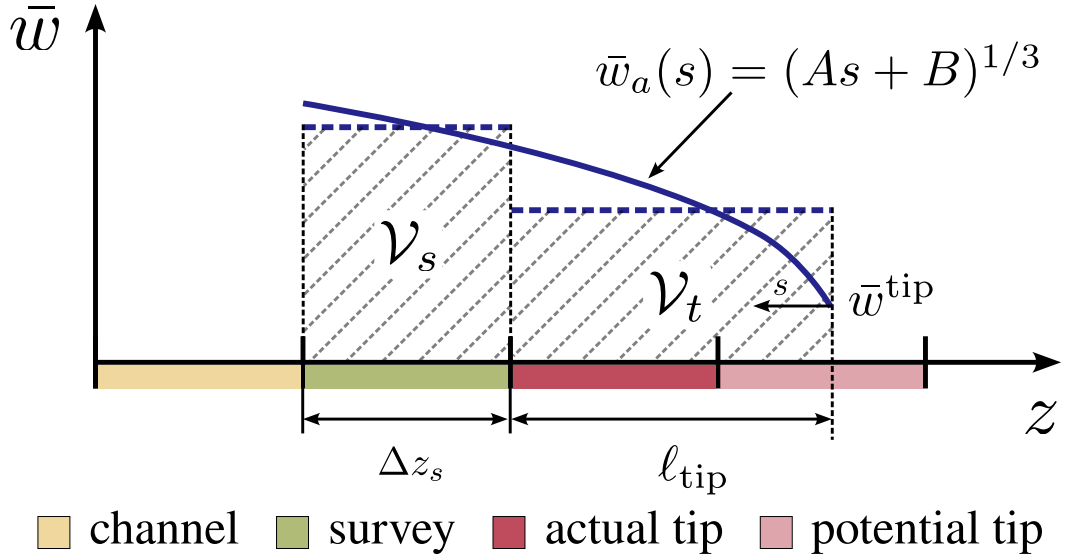


Рисунок 4.10 — Схема области в окрестности вершины трещины отслоения. Сплошная синяя линия изображает асимптотический профиль раскрытия трещины, а закрашенные области под горизонтальными пунктирными синими линиями соответствуют объему жидкости в концевой и опорной ячейках

верхней и нижней частями трещины отслоения. Соответственно, ℓ_{tip} обозначает размер концевой ячейки, отвечающей либо верхней, либо нижней части трещины. Внутренняя ячейка, примыкающая к концевому элементу, далее для краткости называется опорной, а Δz_s обозначает ее размер.

Расстояние до фронта трещины ℓ_{tip} и коэффициенты A , B определяются из условия сохранения объема жидкости и граничного условия (4.12), задающего среднее раскрытие $\bar{w}^{\text{tip}}$ в вершине трещины:

$$\int_0^{\ell_{\text{tip}}} \bar{w}_a(s) ds = \mathcal{V}_t, \quad \int_{\ell_{\text{tip}}}^{\ell_{\text{tip}} + \Delta z_s} \bar{w}_a(s) ds = \mathcal{V}_s, \quad \bar{w}_a(0) = \bar{w}^{\text{tip}}, \quad (4.41)$$

где $\mathcal{V}_t$ и $\mathcal{V}_s$ — объемы жидкости в концевой и опорной ячейках соответственно. Из граничного условия в вершине трещины следует, что $B = (\bar{w}^{\text{tip}})^3$, а условия сохранения объемов приводят к системе уравнений относительно A и ℓ_{tip} :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4A} \left((A\ell_{\text{tip}} + B)^{4/3} - B^{4/3} \right) &= \mathcal{V}_t, \\ \frac{3}{4A} \left((A(\ell_{\text{tip}} + \Delta z_s) + B)^{4/3} - (A\ell_{\text{tip}} + B)^{4/3} \right) &= \mathcal{V}_s. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Данная система решается численно методом Ньютона относительно A и ℓ_{tip} . Если полученное расстояние ℓ_{tip} меньше размера трещины с предыдущего шага

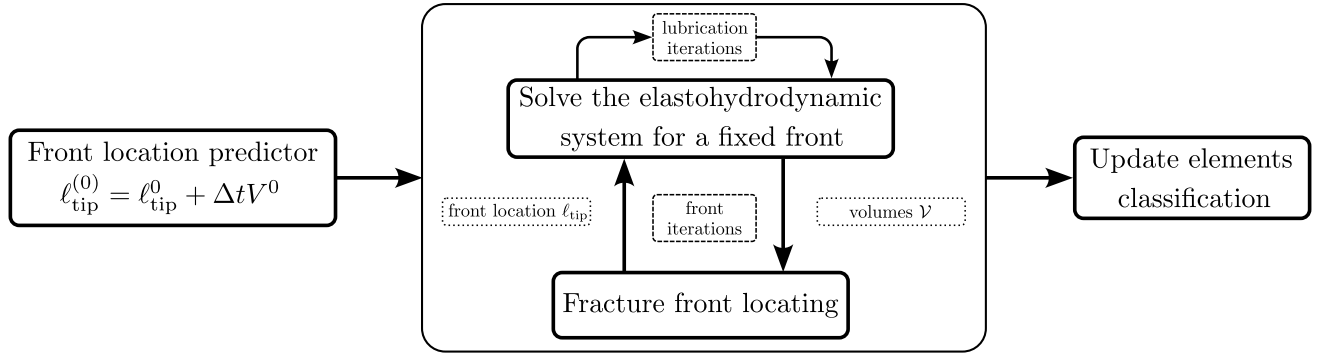


Рисунок 4.11 — Блок-схема алгоритма, используемого для моделирования распространения трещины отслоения вдоль вертикальной скважины на одном шаге по времени

по времени ℓ_{tip}^0 , то трещина не распространяется ($G < G_c$), а положение фронта не изменяется $\ell_{\text{tip}} = \ell_{\text{tip}}^0$.

На рисунке 4.11 представлена блок-схема алгоритма, используемого для моделирования распространения трещины отслоения вдоль вертикальной скважины на одном шаге по времени. Расчет начинается с продвижения фронта трещины на основе скорости V^0 с предыдущего шага: $\ell_{\text{tip}}^{(0)} = \ell_{\text{tip}}^0 + \Delta t V^0$. Полученное значение служит начальным приближением для положения фронта. Далее при фиксированном положении фронта нелинейная упругогидродинамическая система (4.39) решается итерационно до достижения сходимости по объему жидкости $\mathcal{V}$. На основе полученного распределения объемов жидкости по ячейкам обновляется положение фронта, после чего упругогидродинамическая система решается заново. Итерации повторяются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость по положению фронта. В конце шага по времени обновляется классификация элементов в соответствии с вычисленным положением фронта: фактические концевые элементы, которые полностью заполнены жидкостью, становятся внутренними элементами, а потенциальные концевые элементы становятся фактическими. В алгоритме используется адаптивный выбор шага по времени: при отсутствии сходимости в пределах заданного числа итераций размер шага автоматически уменьшается.

4.3.2 Метод конечных элементов для термопороупругой задачи в сечениях скважины

Для решения термопороупругой задачи в каждом поперечном сечении скважины применяется метод конечных элементов. Дискретизация уравнений реализуется с помощью открытой библиотеки `deal.II` на языке C++ [57]. Пространственная дискретизация выполняется с помощью четырехузловых лагранжевых элементов, а производные по времени аппроксимируются с помощью неявной схемы Эйлера.

Слабая форма уравнения теплопроводности (4.18) записывается в виде

$$\int_{\mathcal{D}} C_m \frac{\partial T}{\partial t} \bar{T} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \kappa \nabla T \cdot \nabla \bar{T} d\mathcal{D} = 0, \quad (4.43)$$

где $\mathcal{D}$ — расчетная область, а $\bar{T}$ — произвольная тестовая функция для поля температуры, удовлетворяющая граничным условиям $\bar{T}|_{\Gamma_w} = 0$, $\bar{T}|_{\Gamma_\infty} = 0$ и $[\bar{T}]|_{\Gamma_f \cup \Gamma_s} = 0$. Применение метода конечных элементов приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} M_T + K_T \right] \mathbf{T}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} M_T \mathbf{T}^n, \quad (4.44)$$

где Δt — шаг по времени, $\mathbf{T}^n$ и $\mathbf{T}^{n+1}$ — векторы узловых значений температуры на предыдущем и текущем шагах по времени соответственно. Матрица масс и матрица жесткости для уравнения теплопроводности вычисляются по формулам

$$M_T^{ij} = \int_{\mathcal{D}} C_m \varphi_i \varphi_j d\mathcal{D}, \quad K_T^{ij} = \int_{\mathcal{D}} \kappa \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\mathcal{D}, \quad (4.45)$$

где φ_i — функции формы для поля температуры, соответствующая i -му узлу сетки.

Уравнение фильтрации (4.17) решается только в области пористого цемента $\mathcal{D}_c$ и области горной породы $\mathcal{D}_r$. Соответствующая слабая формулировка имеет вид

$$\int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} \bar{p} d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} 3\alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} \bar{p} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} \frac{k}{\eta} \nabla p \cdot \nabla \bar{p} d\mathcal{D} = 0, \quad (4.46)$$

где $\bar{p}$ — произвольная тестовая функция для порового давления, удовлетворяющая граничным условиям $\bar{p}|_{\Gamma_f} = 0$, $\bar{p}|_{\Gamma_\infty} = 0$ и $[\bar{p}]|_{\Gamma_s} = 0$. Конечно-элементная дискретизация приводит к следующей линейной системе:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} M_P + K_P \right] \mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} M_P \mathbf{p}^n + M_{PT} \dot{\mathbf{T}}^{n+1}, \quad (4.47)$$

где $\mathbf{p}^n$ и $\mathbf{p}^{n+1}$ — векторы узловых значений порового давления на предыдущем и текущем шагах по времени соответственно. Матрица масс, матрица жесткости и матрица сопряжения давления и температуры вычисляются по формулам

$$M_P^{ij} = \int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} \frac{1}{M} \zeta_i \zeta_j \, d\mathcal{D}, \quad K_P^{ij} = \int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} \frac{k}{\eta} \nabla \zeta_i \cdot \nabla \zeta_j \, d\mathcal{D}, \quad M_{PT}^{ij} = \int_{\mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_r} 3\alpha_m \varphi_i \zeta_j \, d\mathcal{D} \quad (4.48)$$

где ζ_i — функции формы для порового давления, соответствующая i -му узлу сетки.

Как отмечалось в разделе 4.2.3, при численной реализации сопряженного алгоритма удобнее задавать объем трещины в сечении вместо давления жидкости на поверхности трещины, а давление рассматривать в качестве дополнительного неизвестного. Пусть p_* — давление жидкости в трещине, соответствующее заданному объему трещины. Следует отметить, что в такой формулировке граничное условие (4.24) для порового давления на поверхности трещины Γ_f принимает вид $p = p_*$. Слабая форма уравнения равновесия (4.16) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}, p_*) = & \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})) \, d\mathcal{D} - \\ & - \int_{\mathcal{D}} b(p - p^0) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} 3\alpha_s K(T - T^0) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \, d\mathcal{D} + \\ & + \int_{\Gamma_w} (p_w + \rho g(z_{\text{perf}} - z)) \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS + \int_{\Gamma_\infty} \operatorname{diag}(\sigma_{\min}, \sigma_{\max}) \cdot \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS + \\ & + \int_{\Gamma_f} (p_* - \sigma_f(w)) \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS = 0, \quad (4.49) \end{aligned}$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ — произвольная тестовая функция для перемещений, удовлетворяющая условию $[\bar{\mathbf{u}}]|_{\Gamma_s} = 0$. Условие заданного объема трещины (4.27) записывается в виде

$$F_V(\mathbf{u}) = 2\pi R \bar{w} - \int_{\Gamma_f^1} w \, dS = 2\pi R \bar{w} + \int_{\Gamma_f} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad (4.50)$$

Уравнения (4.49) и (4.50) являются нелинейными, поскольку граница трещины Γ_f зависит от напряженного состояния и определяется в процессе решения. Кроме того, слагаемое $\sigma_f(w)$, учитывающее контактные напряжения и напряжения сцепления, нелинейно относительно вектора перемещений. После применения метода Ньютона — Рафсона и дискретизации системы с помощью метода конечных элементов получается следующая система:

$$\begin{bmatrix} K_U(\mathbf{U}^{(k)}) & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(k+1)} \\ \Delta p_*^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(k)}, p_*^{(k)}) \\ -F_V(\mathbf{U}^{(k)}) \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

где $\mathbf{U}^{(k)}$ — вектор узловых перемещений на k -й итерации, а $p_*^{(k)}$ — давление жидкости в трещине, соответствующее заданному объему трещины V^* на k -й итерации. Касательная матрица жесткости имеет вид

$$(K_U)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j} = \int_D (\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_j \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_i + 2G \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}_j) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}_i)) \, dD + \\ + \int_{\Gamma_f} \frac{\partial \sigma_f}{\partial w}(w^{(k)}) ([\boldsymbol{\psi}_j] \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}_i) \, dS, \quad (4.52)$$

где $\boldsymbol{\psi}_i$ — функции формы для перемещений. Скачок функции формы $\boldsymbol{\psi}_j$ определяется как $[\boldsymbol{\psi}_j] = \boldsymbol{\psi}_j|_{\Gamma_f^1} - \boldsymbol{\psi}_j|_{\Gamma_f^2}$, где $\boldsymbol{\psi}_j|_{\Gamma_f^k}$ — след функции формы на поверхности трещины Γ_f^k . Выражения для следа функции на Γ_f^1 и Γ_f^2 соответствуют степеням свободы на двух противоположных берегах трещины. Матрица, соответствующая условию на заданный объем трещины в сечении, определяется как

$$(P)_i = \frac{\partial F_i}{\partial p_*} = \frac{\partial F_V}{\partial U_i} = \int_{\Gamma_f} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, dS. \quad (4.53)$$

Обновленные узловые перемещения и давление жидкости в трещине на итерации $(k+1)$ вычисляются по формулам

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + \Delta \mathbf{U}^{(k+1)}, \quad p_*^{(k+1)} = p_*^{(k)} + \Delta p_*^{(k+1)}. \quad (4.54)$$

На рисунке 4.12 представлена схема алгоритма решения механической задачи в поперечном сечении скважины. На первом этапе решается уравнение теплопроводности, что позволяет определить температуру $\mathbf{T}^{n+1}$ и ее производную по времени $\dot{\mathbf{T}}^{n+1}$ на текущем шаге по времени. Поскольку рассматривается несвязанная термopорopуrность, а конвективный перенос тепла не учитывается, уравнение теплопроводности достаточно решить один раз в начале шага

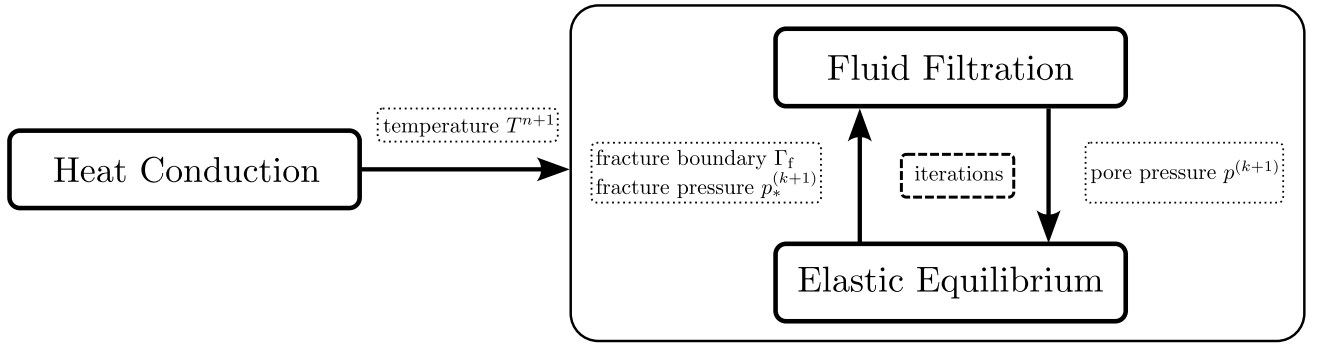


Рисунок 4.12 — Блок-схема алгоритма решения механической задачи в поперечном сечении скважины на одном шаге по времени

по времени. Для решения уравнения фильтрации требуются давление жидкости p_*^{n+1} в трещине и текущая граница трещины Γ_f^{n+1} , которые определяются в процессе решения уравнения равновесия. В свою очередь, решение уравнения равновесия зависит от текущего порового давления $\mathbf{p}^{n+1}$, определяемого из уравнения фильтрации. Таким образом, для решения сопряженной задачи необходимо использовать итерационную схему. Далее для краткости верхние индексы, обозначающие шаг по времени $(n+1)$, опускаются, а верхние индексы (k) и $(k+1)$ обозначают номер итерации на текущем шаге по времени. Сначала на основе давления жидкости $p_*^{(k)}$ в трещине и границы трещины $\Gamma_f^{(k)}$ с предыдущей итерации решается уравнение фильтрации, что позволяет обновить поровое давление $p^{(k+1)}$. Полученное значение порового давления используется для решения уравнения равновесия, из которого определяются обновленный вектор перемещений $\mathbf{u}^{(k+1)}$, давление жидкости в трещине $p_*^{(k+1)}$ и граница трещины $\Gamma_f^{(k+1)}$. Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость по положению границы трещины и распределению порового давления.

4.4 Численные эксперименты

В настоящем разделе представлены результаты расчетов в рамках представленной выше сопряженной модели. Результаты включают верификацию компонентов модели, исследование сходимости, анализ влияния начального напряженного состояния на инициацию гидравлического отслоения и исследование распространения трещины отслоения вдоль границы слоистого пласта.

Во всех расчетах размер ячеек сетки в модели распространения трещины вдоль ствола скважины составляет $\Delta z = 1$ м. Расчетная сетка для механической задачи в поперечных сечениях скважины изображена на рисунке 4.13. Число узлов на внутренней границе обсадной колонны составляет 64, на границе раздела цемента и горной породы 400, на внешней границе расчетной области 20. В таблице 8 представлены геометрические параметры скважины, параметры перфораций, а также параметры закачиваемой и поровой жидкости. Конструкция скважины включает стальную обсадную колонну, цементный камень и окружающую горную породу. В таблице 9 приведены свойства материалов каждого из этих компонентов. Во всех расчетах критическая скорость высвобождения энергии равна $G_c = 25$ Дж/м², а прочность сцепления $\sigma_c = 1.5$ МПа. Для обеих границ цементного камня предел прочности сцепления на растяжение полагается равным $\sigma_t = 0.2$ МПа.

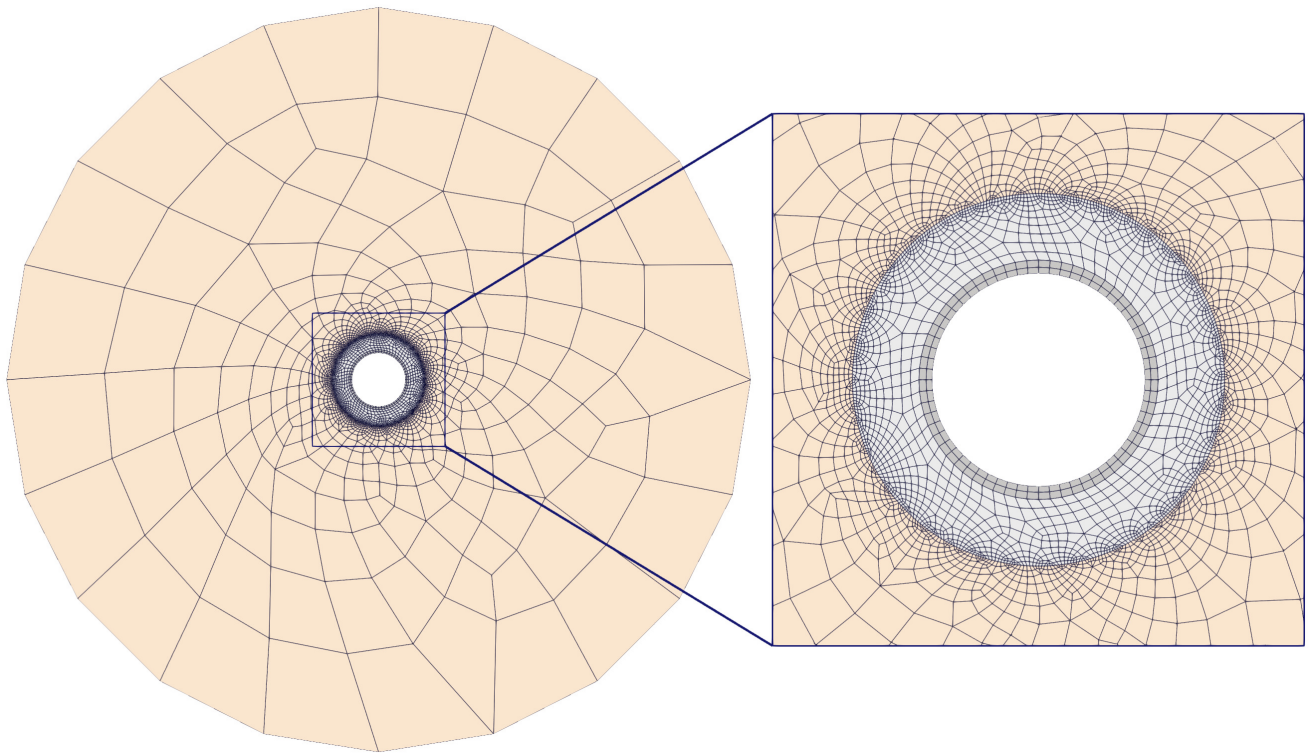


Рисунок 4.13 — Расчетная четырехугольная сетка для механической задачи в каждом поперечном сечении скважины

Таблица 8 — Геометрия скважины, параметры перфораций и свойства жидкостей

Параметр	Значение	Ед. изм.
Геометрия конструкции скважины		
Внутренний радиус обсадной колонны	0.08	м
Внешний радиус обсадной колонны	0.09	м
Радиус ствола скважины	0.14	м
Смещение оси обсадной колонны, δ	0	м
Угол смещения обсадной колонны, β	0	рад
Параметры перфораций		
Истинная вертикальная глубина перфораций (TVD)	2000	м
Число перфорационных отверстий, n	10	—
Диаметр перфорационного отверстия, d	0.0095	м
Безразмерный коэффициент расхода, C_d	0.7	—
Свойства жидкостей		
Вязкость закачиваемой жидкости, μ	$5 \cdot 10^{-5}$	Па·с
Плотность закачиваемой жидкости, ρ	500	кг/м ³
Вязкость поровой жидкости, η	10^{-3}	Па·с
Плотность поровой жидкости, ρ_f	1000	кг/м ³
Модуль объемного сжатия поровой жидкости, K_f	0.2	ГПа
Коэффициент линейного термического расширения поровой жидкости, α_f	$70 \cdot 10^{-6}$	К ⁻¹
Удельная теплоемкость поровой жидкости, C'_f	2100	Дж/(кг К)

Таблица 9 — Свойства материалов обсадной колонны, цемента и горной породы

Параметр	Сталь	Цемент	Порода	Ед. изм.
Модуль Юнга, E	200	12.4	15.0	ГПа
Коэффициент Пуассона, ν	0.3	0.22	0.25	—
Пористость, ϕ^0	—	0.2	0.2	—
Коэффициент Био, b	—	0.6	0.6	—
Проницаемость, k	—	10^{-18}	10^{-17}	м^2
Плотность скелета, ρ_s	7936	2000	2280	$\text{кг}/\text{м}^3$
Удельная теплоемкость скелета, C'_s	500	1600	950	$\text{Дж}/(\text{кг К})$
Теплопроводность, κ	40	0.8	2.3	$\text{Вт}/(\text{м К})$
Коэффициент линейного термического расширения скелета, α_s	$12 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	К^{-1}

4.4.1 Верификация модели и анализ сходимости

Для верификации численного алгоритма распространения трещины рассматривается задача распространения гидравлической трещины постоянной высоты в случае отсутствия отставания фронта жидкости от фронта трещины [3; 4]. Данная задача обладает четырьмя предельными режимами распространения [188]: вязкостный режим при доминировании накопления жидкости (M), режим, контролируемый трещиностойкостью при доминировании накопления жидкости (K), вязкостный режим при доминировании утечек ($\tilde{M}$) и режим, контролируемый трещиностойкостью при доминировании утечек ($\tilde{K}$). Для простоты основное внимание уделяется K и M режимам (в предположении нулевых утечек), а также переходному решению вдоль KM -ребра. Ниже приводится сравнение предложенного численного метода с полуаналитическим решением для гидравлической трещины постоянной высоты [188]. Для проверки предельных режимов рассматривается трещина высотой $H = 20$ м. Параметры, соответствующие предельным режимам приведены в таблице 10. Жидкость закачивается с постоянным объемным расходом Q_{inj} в течение 1000 с. Чтобы воспроизвести плоскую геометрию трещины в численном алгоритме радиус отслоения полагается равным $R = H/(2\pi)$, угол дуги трещины $\gamma = 2\pi$, коэффициенты упругости $\Sigma_n = 1$ и $\Pi = 2/\pi$, безразмерная гидравлическая про-

водимость $\Lambda = 12/\pi^2$, параметры утечек $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 = 0$, а критическая скорость высвобождения энергии вычисляется как $G_c = K_{Ic}^2/E'$, где $E' = E/(1 - \nu^2)$ — модуль плоской деформации, а K_{Ic} — трещиностойкость.

Таблица 10 — Параметры для предельных режимов распространения плоской гидравлической трещины постоянной высоты

Режим	E , ГПа	ν	K_{Ic} , МПа·м ^{1/2}	μ , Па·с	Q_{inj} , м ³ /с
K -режим	20	0.2	3	0.001	0.001
M -режим	20	0.2	0	0.01	0.001
KM -ребро	20	0.2	1	0.005	0.001

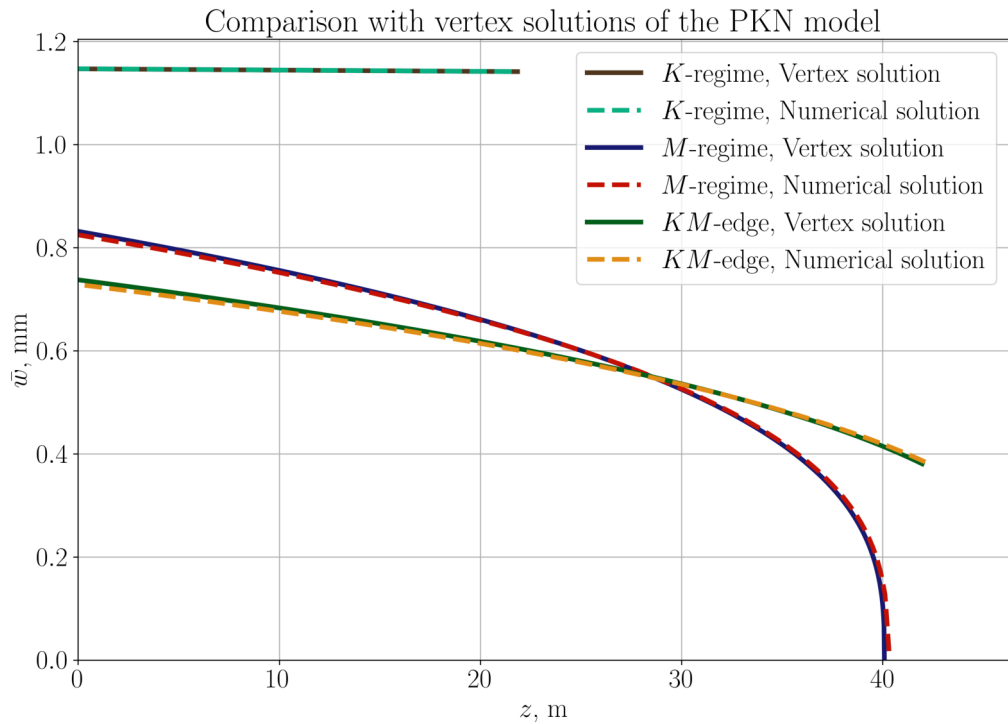


Рисунок 4.14 — Верификация модели: результаты расчетов для гидравлической трещины постоянной высоты. Пунктирными линиями показаны численные результаты, а сплошными линиями изображены предельные решения

На рисунке 4.14 представлено сравнение среднего раскрытия трещины для предельных режимов распространения гидравлической трещины постоянной высоты в финальный момент времени $t = 1000$ с. Из рисунка видно, что результаты расчетов среднего раскрытия трещины в целом хорошо согласуется с полуаналитическими решениями во всех предельных режимах.

Для верификации численного алгоритма решения механической задачи в поперечном сечении скважины рассматривается случай полного отслоения, охватывающего всю границу цемента и породы. Для построения аналитического решения рассматривается стационарная осесимметричная термопороупругая постановка с учетом начального напряженного состояния:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (4.55)$$

где компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0 + \lambda \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{du_r}{dr} - b(p - p^0) - 3\alpha_s K(T - T^0), \quad (4.56)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^0 + \lambda \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{u_r}{r} - b(p - p^0) - 3\alpha_s K(T - T^0). \quad (4.57)$$

Решение представленной выше системы уравнений имеет следующий вид

$$T = c_1 + c_2 \ln r, \quad p = c_3 + c_4 \ln r, \quad u_r = c_5 r + \frac{c_6}{r} + \frac{bc_2 + 3\alpha_s K c_4}{2(\lambda + G)} r \ln r. \quad (4.58)$$

Данное решение применяется в каждой области (сталь/цемент/порода) с использованием констант, которые определяются свойствами материалов каждой из областей. Пусть r_0, r_1, r_2, r_∞ — радиусы внутренней поверхности обсадной колонны, границы обсадной колонны и цемента, границы цемента и породы и внешней границы расчетной области соответственно. Значения констант определяются на основе следующих граничных условий:

$$T(r_0) = T_w, \quad T(r_\infty) = T^0, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(r_1) = 0, \quad p(r_2^-) = p(r_2^+) = p_*, \quad p(r_\infty) = p^0, \quad (4.60)$$

$$\sigma_{rr}(r_0) = -p_w, \quad \sigma_{rr}(r_2^-) = \sigma_{rr}(r_2^+) = -p_*, \quad \sigma_{rr}(r_\infty) = -\sigma_\infty, \quad (4.61)$$

где r_2^- и r_2^+ обозначают две противоположных границы интерфейса отслоения. Давление жидкости p_* в трещине отслоения определяется из условия заданного раскрытия трещины $u_r(r_2^+) - u_r(r_2^-) = \Delta u$. На обеих границах цементного камня выполняются условия непрерывности температуры и теплового потока. Кроме того, на неповрежденной границе обсадной колонны и цемента выполняются условия непрерывности перемещений и радиального напряжения.

Давление продавочной жидкости и давление цементного раствора полагаются равными $p_d = 24$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно. Пластовое

поровое давление считается равным $p^0 = 20$ МПа, а пластовая температура $T^0 = 50, ^\circ\text{C}$. Давление и температура закачки полагаются равными $p_w = 30$ МПа и $T_w = 35, ^\circ\text{C}$ соответственно, а пластовое напряжение составляет $\sigma_\infty = 35$ МПа. Заданное раскрытие трещины отслоения равно $\Delta u = 0.1$ мм. Остальные свойства материалов соответствуют данным, представленным в таблицах 8 и 9.

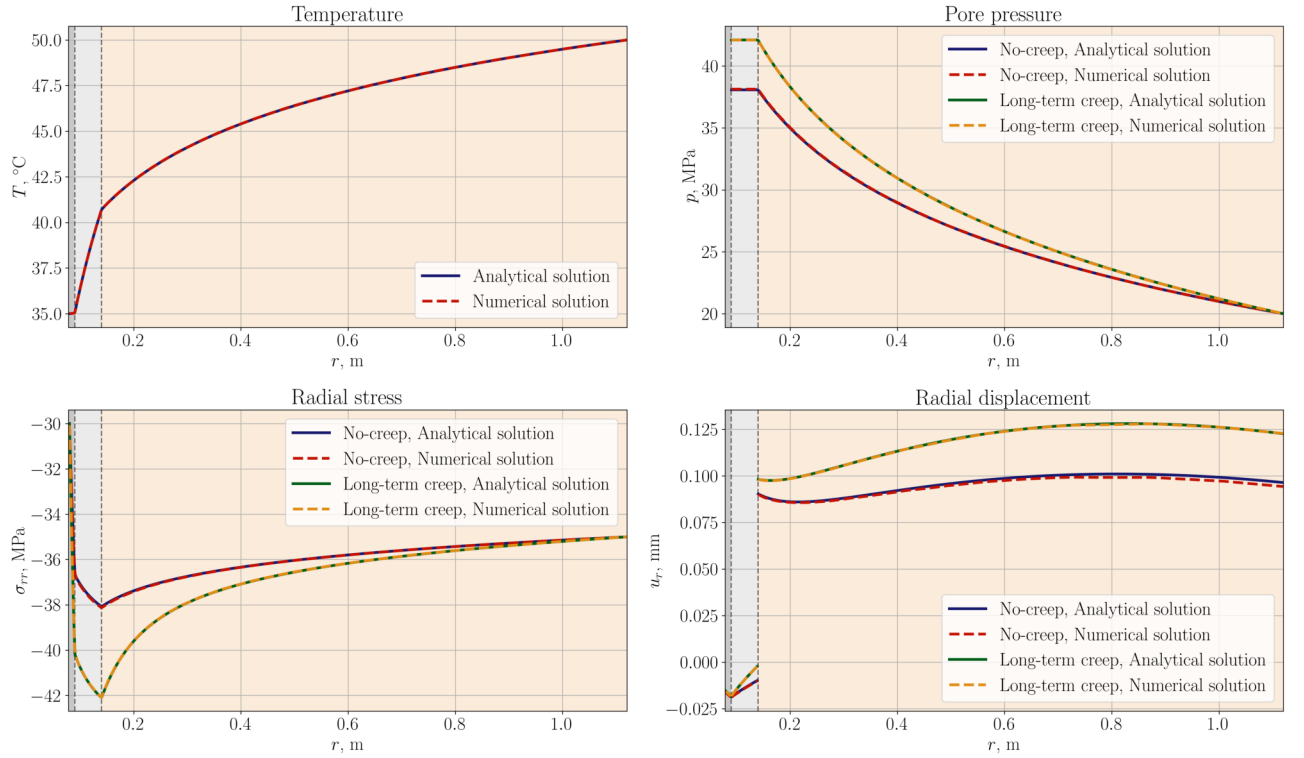


Рисунок 4.15 — Верификация модели: сравнение температуры, порового давления, радиального напряжения и радиального перемещения с аналитическим решением для сценария без учета ползучести и сценария полной релаксации напряжений вследствие ползучести

На рисунке 4.15 представлено сравнение температуры, порового давления, радиального напряжения и радиального перемещения для сценария без учета ползучести и сценария полной релаксации напряжений вследствие ползучести. Следует отметить, что поровое давление различается для двух рассматриваемых сценариев нагружения. В стационарной постановке уравнение порового давления формально не связано с уравнениями равновесия, однако давление жидкости, задаваемое в трещине отслоения, соответствует заданному скачку перемещений и потому зависит от механического нагружения. Сравнение показывает, что полученные численные результаты хорошо согласуются с аналитическим решением.

Для оценки устойчивости и численной сходимости предложенной схемы сопряжения было выполнено исследование сеточной сходимости, а также анализ соответствующих вычислительных затрат и числа итераций. Для дискретизации расчетной области рассматривается последовательность из шести сеток с последовательно увеличивающимся пространственным разрешением как в вертикальном направлении, так и в поперечных сечениях трещины. Итоговое число поперечных сечений и число конечных элементов в каждом сечении увеличивается при сгущении сетки, как показано в таблице 11. Расчеты были выполнены с использованием адаптивного выбора шага по времени. Полученное общее число шагов по времени для каждой из сеток также представлено в таблице 11.

Таблица 11 — Сводные данные результатов сгущения сетки и статистика сходимости сопряженного алгоритма. Среднее число итераций вычисляется относительно итогового числа поперечных сечений

Номер сетки	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Итоговое число поперечных сечений	35	64	87	115	142	173
Число конечных элементов на одно сечение	864	2548	4130	6400	8782	11428
Общее число шагов по времени	142	276	559	888	1263	1967
Общее число итераций МКЭ	4125	30733	81523	164052	271096	447117
Среднее число итераций на одно сечение за один шаг по времени	0.83	1.73	1.67	1.60	1.51	1.31
Время расчета (мин)	2.8	31.8	189.0	869.9	2094.4	4680.7

Общее число шагов по времени последовательно возрастает с измельчением сетки. Такое поведение обусловлено адаптивным выбором шага по времени. Адаптивная схема приводит к уменьшению шага по времени для сохранения общей точности решения и предотвращения доминирования погрешности дискретизации по времени над погрешностью пространственной дискретизации при сгущении сетки. В результате возрастает общее число итераций метода

конечных элементов по всем поперечным сечениям. Это связано с увеличением числа обновлений при вычислении механического отклика, поскольку инкремент приращения фронта трещины в азимутальном направлении зависит от размера элементов сетки. Несмотря на этот рост, среднее число итераций на одно сечение за один шаг по времени остается относительно стабильным для всех сеток и укладывается в диапазон примерно 1–2 итераций. Такое малое значение обусловлено тем, что среднее значение вычисляется на основе итогового числа поперечных сечений, соответствующего максимуму, который был достигнут в ходе расчета. На ранних стадиях роста трещины, когда число сечений еще невелико, алгоритму обычно требуется лишь 1–3 итерации на один шаг по времени при условии, что трещина не распространяется в азимутальном направлении. Повышенное число итераций возникает главным образом при распространении трещины в азимутальном направлении, и требуемое число итераций зависит от разрешения сетки, поскольку фронт трещины продвигается постепенно в процессе итерационного решения нелинейной задачи. Несколько неожиданное значение 0.83 итерации для самой грубой сетки является результатом описанной процедуры усреднения. Поскольку в знаменателе используется итоговое число сечений, среднее значение оказывается меньше единицы даже с учетом ранних шагов по времени, когда число сечений еще мало.

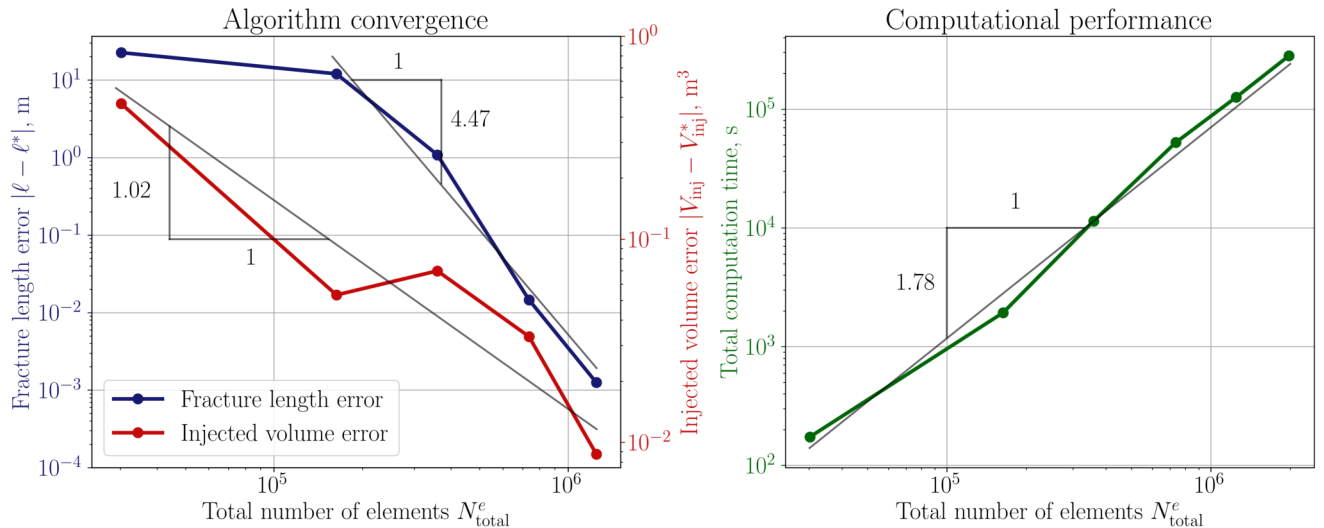


Рисунок 4.16 — Слева: сходимость длины трещины и закачанного объема жидкости при измельчении сетки. Погрешности $|\ell - \ell^*|$ и $|V_{inj} - V_{inj}^*|$ вычисляются относительно решения ℓ^* , V_{inj}^* на самой подробной сетке. Результаты представлены в зависимости от общего числа конечных элементов, определяемого как произведение числа элементов в сечении на итоговое число сечений. Справа: полное время расчета в зависимости от общего числа элементов

Результаты анализа сходимости также проиллюстрирована на рисунке 4.16, где представлены зависимости погрешности дискретизации и вычислительных затрат от общего числа конечных элементов, которое определяется как произведение числа элементов в сечении на итоговое число сечений. В левой части рисунка представлены погрешности длины трещины и закачанного объема, вычисленные как $|\ell - \ell^*|$ и $|V_{\text{inj}} - V_{\text{inj}}^*|$ соответственно, где ℓ^* и V_{inj}^* обозначают эталонное решение, полученное на самой подробной сетке. Полученные результаты свидетельствуют об устойчивой сходимости: наблюдаемый порядок сходимости составляет примерно 4.47 для длины трещины и приблизительно 1.02 для закачанного объема жидкости в трещину. В правой части рисунка 4.16 представлена зависимость полного времени расчета в зависимости от общего числа конечных элементов. Результаты показывают, что вычислительные затраты при сгущении сетки возрастают приблизительно с порядком 1.78. Такой рост обусловлен одновременным увеличением числа шагов по времени и числа итераций механической задачи при переходе к более подробным сеткам.

4.4.2 Влияние начального напряженного состояния

Для исследования влияния условий цементирования рассматривается осесимметричная задача о нагружении скважины. В настоящем разделе анализируется только упругое решение, а поровое давление и температура считаются постоянными $p = p^0$ и $T = T^0$. В осесимметричном случае уравнение равновесия принимает следующий вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (4.62)$$

а компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0 + K\varepsilon_{\text{vol}} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (4.63)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^0 + K\varepsilon_{\text{vol}} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2G \frac{u_r}{r}, \quad (4.64)$$

где радиальное перемещение имеет вид $u_r = c_1 r + c_2/r$. Данное решение применяется в каждой из областей (сталь, цемент, порода) с константами, определяемыми свойствами материала соответствующей области. Значения этих

констант определяются из граничных условий $\sigma_{rr} = -p_w$ на внутренней поверхности обсадной колонны, $\sigma_{rr} = -\sigma_\infty$ на бесконечности, а также из условий непрерывности перемещений и радиальных напряжений на внутренних границах раздела материалов. Для сохранения осевой симметрии рассматривается равномерное естественное напряженное состояние в пласте $\sigma_\infty = \sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 35$ МПа. Явные выражения для констант не приводятся в силу их громоздкости.

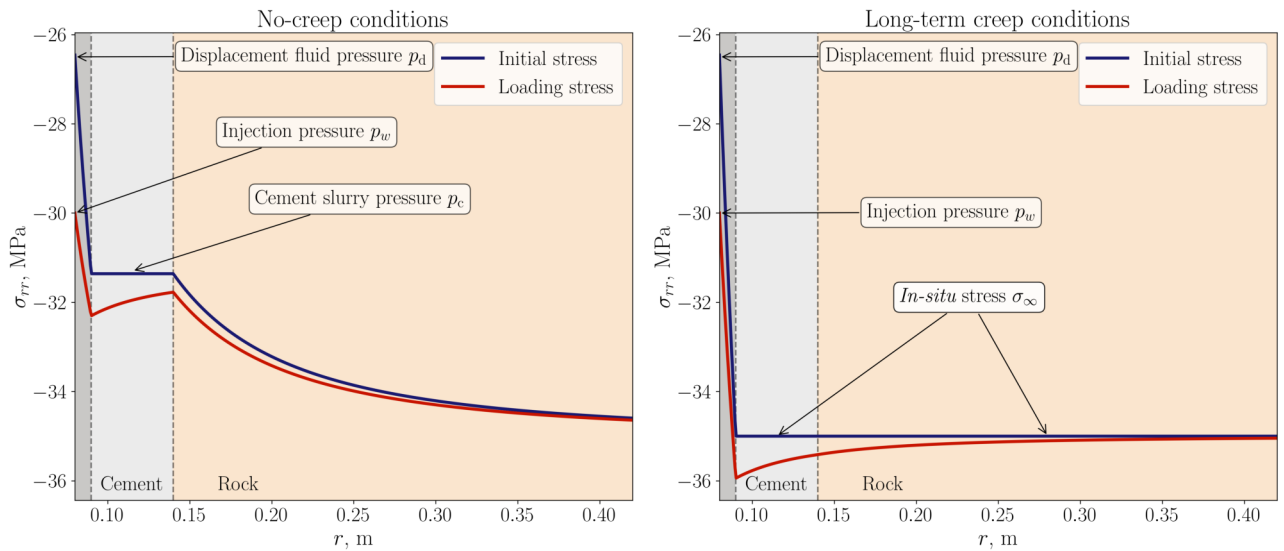


Рисунок 4.17 — Влияние начального напряженного состояния: распределение начального радиального напряжения σ_{rr}^0 (синяя линия) и радиального напряжения на стадии нагружения σ_{rr} (красная линия) в зависимости от радиуса. Слева: начальное состояние без учета ползучести. Справа: начальное состояние в условиях полной релаксации напряжений вследствие ползучести

На рисунке 4.17 показаны различия между сценарием без учета ползучести и сценарием полной релаксации напряжений вследствие ползучести. Синими линиями обозначены начальные напряжения, возникающие на стадии цементирования скважины, а красные линии обозначают напряжения на стадии эксплуатационного нагружения. В сценарии без учета ползучести напряжения на стадии нагружения существенно зависят от условий цементирования. В сценарии полной релаксации, напротив, предполагается, что все неоднородности напряжений, возникшие при бурении, полностью релаксировали за счет ползучести. В результате получаемые напряжения не зависят ни от давления цементного раствора, ни от объемной усадки цемента.

Для оценки риска отслоения в сценарии без учета ползучести значения давления p_d и p_c варьируются в диапазоне от 20 до 40 МПа. Давление закач-

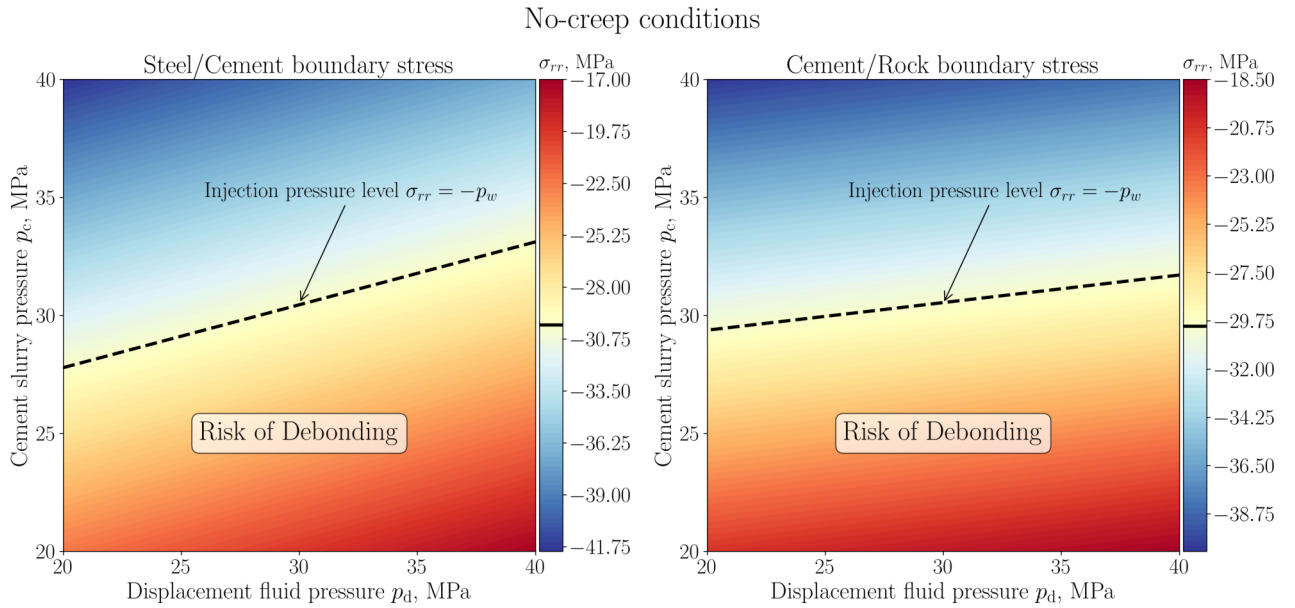


Рисунок 4.18 — Влияние начального напряженного состояния в сценарии без учета ползучести: нормальное напряжение σ_{rr} на границах цементного камня как функция давления продавочной жидкости p_d и давления цементного раствора p_c . Слева изображены напряжения на внутренней границе, справа представлены напряжения на внешней границе цемента. Черные пунктирные линии соответствуют уровню давления, при котором нормальное напряжение совпадает с давлением закачки. Превышение этого уровня соответствует риску инициации трещины отслоения

ки на стадии нагружения считается равным $p_w = 30$ МПа, а объемная усадка цемента полагается равной нулю $\varepsilon_{vol} = 0$. На рисунке 4.18 представлены нормальные напряжения σ_{rr} на границах цементного камня как функции давления продавочной жидкости p_d и давления цементного раствора p_c . Черная пунктирная линия соответствует уровню, при котором нормальное напряжение σ_{rr} на границе совпадает с давлением закачки p_w . Благодаря осевой симметрии значение σ_{rr} равномерно по азимуту. Если нормальные напряжения превышают этот уровень (сжатие на границе оказывается ниже давления закачки), возникает риск инициации трещины отслоения. Высокое давление продавочной жидкости p_d увеличивает риск отслоения, поскольку сжимающее напряжение на границах цементного камня может снижаться на стадии нагружения. Высокое давление цементного раствора p_c , напротив, снижает риск отслоения, так как граница цементного камня оказывается под сильным сжатием.

В сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести давление цементного раствора p_c и объемная усадка цемента ε_{vol} не влияют на

Long-term creep conditions

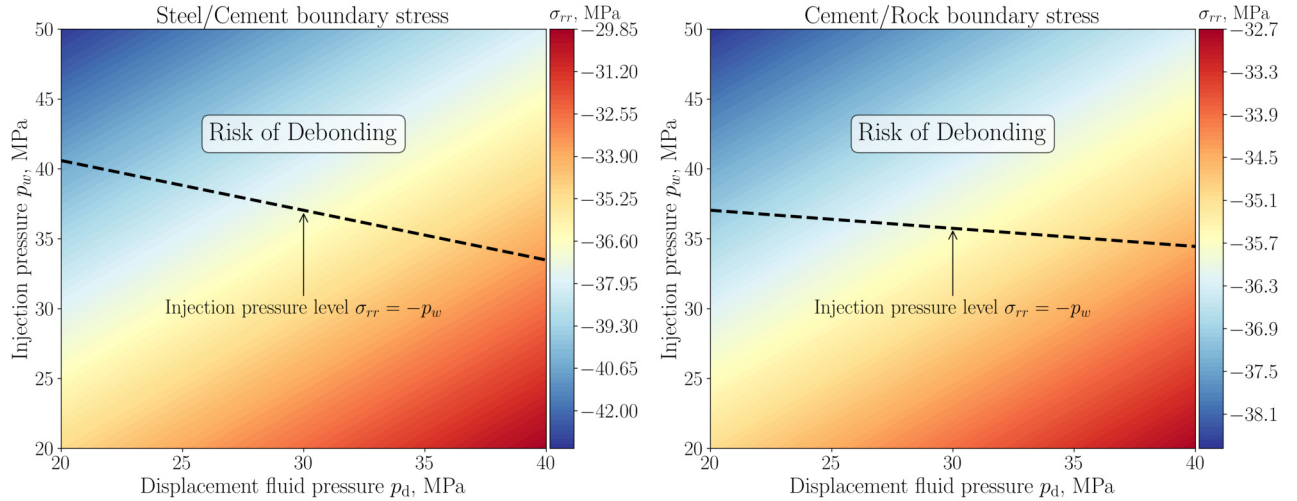


Рисунок 4.19 — Влияние начального напряженного состояния в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести: нормальное напряжение σ_{rr} на границах цементного камня как функция давления продавочной жидкости p_d и давления закачки p_w . Слева изображены напряжения на внутренней границе, справа представлены напряжения на внешней границе цемента. Черные пунктирные линии соответствуют уровню давления, при котором нормальное напряжение совпадает с давлением закачки. Превышение этого уровня соответствует риску инициации трещины отслоения

напряженное состояние. Поэтому для оценки риска отслоения давление продавочной жидкости p_d варьируется от 20 до 40 МПа, а давление закачки p_w от 20 до 50 МПа. На рисунке 4.19 представлены нормальные напряжения σ_{rr} на границах цементного камня в зависимости от давления продавочной жидкости p_d и давления закачки p_w . Как и в сценарии без учета ползучести, высокое давление продавочной жидкости p_d увеличивает риск отслоения, поскольку сжимающее напряжение на границах цементного камня может уменьшаться на стадии эксплуатационного нагружения. Более высокое давление закачки p_w также повышает риск отслоения: оно создает более высокое давление внутри перфорационных отверстий, при этом жесткая стальная обсадная колонна играет экранирующую роль и ограничивает передачу напряжений на цементный камень. В сценарии полной релаксации инициация отслоения возможна при давлениях, приближающихся к пластовому напряжению σ_∞ или превышающих его. В умеренных режимах закачки, когда давление закачки p_w ниже пластового напряжения σ_∞ , риск отслоения в сценарии полной релаксации становится

минимальным. Тем не менее другие факторы, связанные с закачкой CO_2 (изменение температуры, анизотропия напряжений и нестационарные пластовые условия), могут смещать пороговое значение возможного отслоения в сторону более низких значений давления закачки.

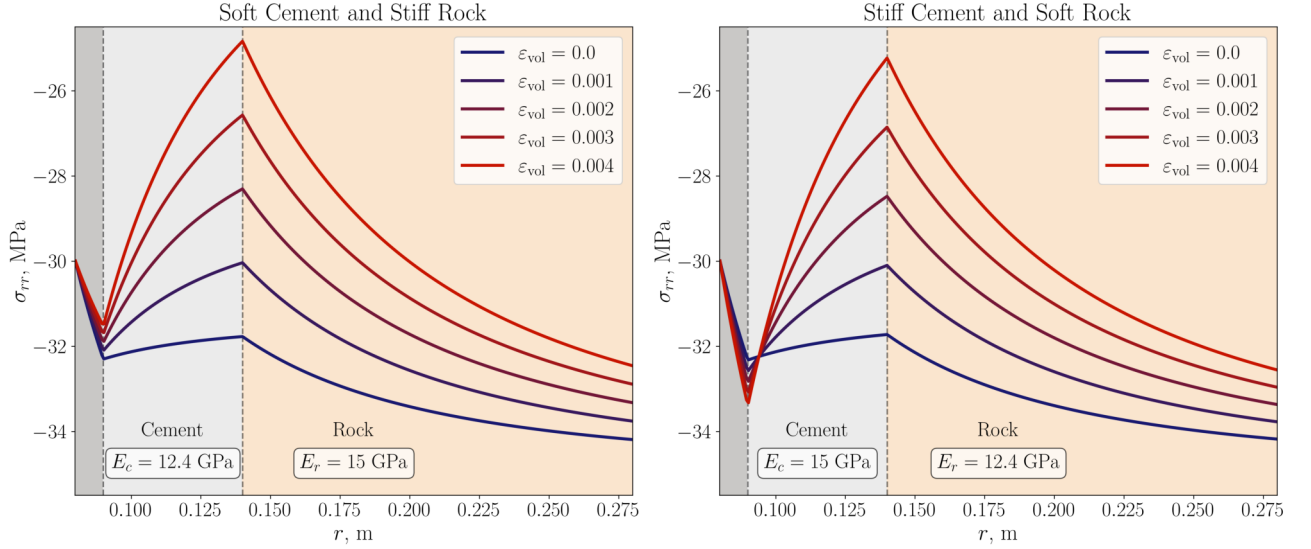


Рисунок 4.20 — Влияние начального напряженного состояния в сценарии без учета ползучести: распределение радиальных напряжений на стадии эксплуатационного нагружения для различных значений объемной усадки цемента $\varepsilon_{\text{vol}} \in \{0, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004\}$. Слева изображен случай, когда порода жестче цемента (увеличение объемной усадки приводит к уменьшению сжатия на границах цементного камня). Справа представлен случай, когда цемент жестче породы (увеличение объемной усадки приводит к дополнительному сжатию на границе обсадной колонны и цемента)

Далее анализируется влияние объемной усадки цемента без учета ползучести, поскольку возникающие вследствие усадки напряжения полностью релаксируют за счет ползучести и не влияют на итоговое напряженное состояние. Как отмечалось в разделе 4.1.2, учитывается только остаточная объемная усадка, возникающая после застывания цемента. Напряжения в цементе, обусловленные объемной усадкой, вычисляются по формуле (4.2). Кольцевая геометрия цементного камня оказывает влияние на распределение напряжений внутри цемента. На рисунке 4.20 показано распределение нормальных напряжений на стадии эксплуатационного нагружения для различных значений объемной усадки цемента ε_{vol} . В левой части рисунка представлен случай, когда модуль Юнга цемента $E_c = 12.4$ ГПа меньше модуля Юнга окружающей

породы $E_r = 15$ ГПа. При увеличении объемной усадки сжатие на границах цементного камня уменьшается, причем этот эффект сильнее проявляется на внешней границе. В правой части рисунка изображен обратный случай, когда цемент оказывается жестче породы ($E_c = 15$ ГПа, $E_r = 12.4$ ГПа). Сжатие на внешней границе также уменьшается, тогда как на внутренней границе сжимающие напряжения, напротив, возрастают. Такое поведение согласуется с экспериментальными наблюдениями, представленными в работе [209].

4.4.3 Распространение гидравлического отслоения вдоль границы слоистого пласта

Наиболее характерная конфигурация геологического хранения CO_2 предусматривает закачку в проницаемый пласт-коллектор, ограниченный сверху и снизу пластами с существенно более высокими сжимающими пластовыми напряжениями. Повышенные напряжения в покрывке и подстилающих пластах служат естественными барьерами для вертикальной миграции закачиваемого CO_2 . Бурение и цементирование скважины оказывают существенное влияние на напряженное состояние в околоскважинной зоне. Неоднородность напряжений может изменяться со временем вследствие ползучести горной породы и цементного камня. Для анализа такой задачи в настоящем разделе исследуется распространение трещины отслоения в слоистом пласте как в сценариях без учета ползучести, так и с полной релаксацией напряжений вследствие ползучести.

Сначала рассматривается ранний этап жизненного цикла скважины, когда влиянием ползучести можно пренебречь. Давления продавочной жидкости и цементного раствора считаются равными $p_d = 24$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно, а объемная усадка цемента составляет $\varepsilon_{\text{vol}} = 0.002$ (0.2%). Пластовое поровое давление считается равным $p_\infty = 25$ МПа, а пластовая температура $T_\infty = 50^\circ\text{C}$. Давление закачки p_w линейно возрастает от 20 до 35 МПа в течение 15000 секунд (4 часа 10 минут), после чего остается постоянным. Температура закачиваемой жидкости равна $T_w = 40^\circ\text{C}$. Значения горизонтальных пластовых напряжений и модуля Юнга слоев породы вдоль ствола скважины приведены в таблице 12. Стоит отметить, что в настоящем разделе градиент пластовых напряжений внутри слоев не учитывается, а значения напряжений считаются

постоянными в пределах каждого интервала. Вместе с тем давление закачиваемой жидкости в скважине имеет вертикальный градиент, который влияет на нормальное напряжение на границах цементного камня. Кроме того, анизотропия горизонтальных пластовых напряжений приводит к неоднородности в азимутальном направлении, что может влиять на профиль раскрытия трещины отслоения.

Таблица 12 — Горизонтальные пластовые напряжения и модуль Юнга слоев породы вдоль ствола скважины

TVD кровли, м	TVD подошвы, м	$\sigma_{\min}$, МПа	$\sigma_{\max}$, МПа	E , ГПа
1900	1975	38	39	20
1975	2025	34.5	35.5	15
2025	2100	38	39	20

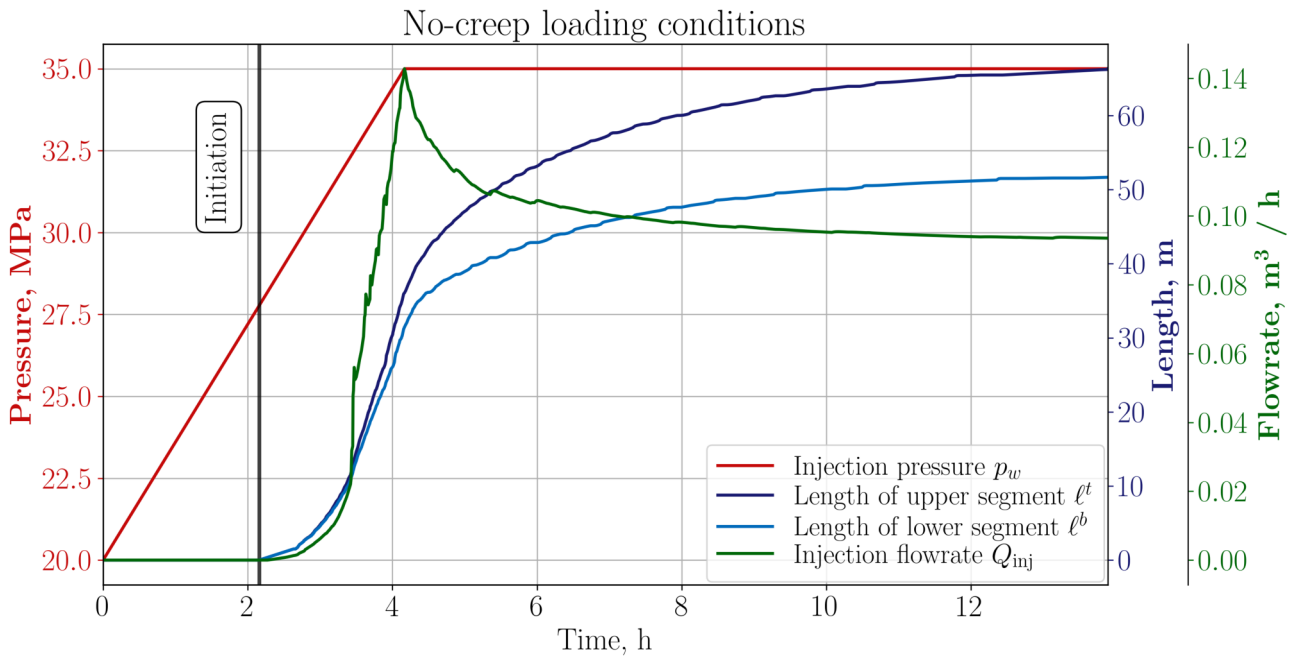


Рисунок 4.21 — Распространение гидравлического отслоения в сценарии без учета ползучести: давление закачки p_w , длина верхнего ℓ^t и нижнего ℓ^b сегментов трещины, а также вычисленный объемный расход закачки Q_{inj} , соответствующий заданному давлению закачки, в зависимости от времени. Серая вертикальная линия отражает момент инициации отслоения

На рисунке 4.21 представлено давление закачки p_w , длина верхнего ℓ^t и нижнего ℓ^b сегментов трещины, а также вычисленный объемный расход закачки

Q_{inj} , соответствующий заданному давлению закачки, в зависимости от времени для сценария без учета ползучести. Инициация трещины отслоения на границе цемент и горной породы происходит через 2.16 часа после начала закачки. Стоит отметить, что верхний сегмент трещины распространяется быстрее нижнего вследствие гидростатического давления жидкости в скважине и гидростатического распределения начальных напряжений на границах цементного камня. Объемный расход закачиваемой жидкости возрастает с ростом давления закачки, однако при постоянном давлении расход постепенно уменьшается. При длительной закачке с постоянным давлением закачиваемая жидкость постепенно фильтруется в пористый цементный камень и горную породу, что приводит к остановке трещины.

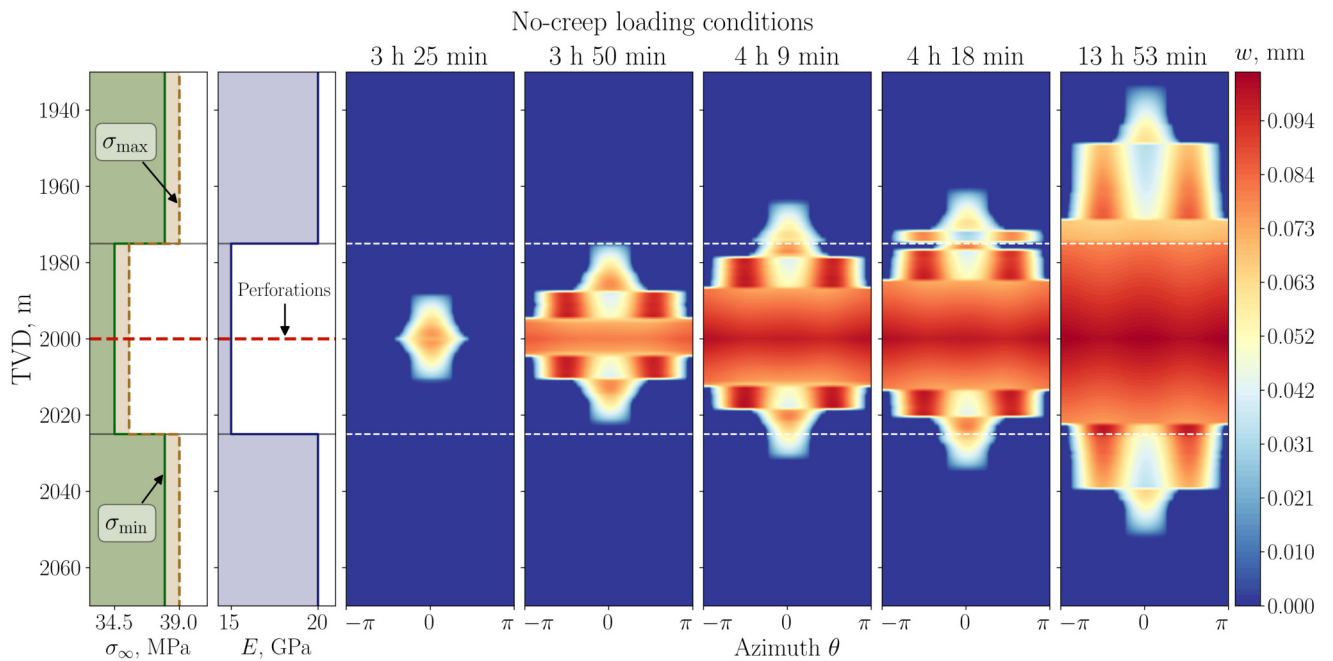


Рисунок 4.22 — Распространение гидравлического отслоения в сценарии без учета ползучести: вертикальное распределение горизонтальных пластовых напряжений σ_{max} , σ_{min} и модуля Юнга породы E_r по слоям пласта, а также раскрытие трещины отслоения $w(z, \theta)$ в различные моменты времени. Красная горизонтальная пунктирная линия соответствует расположению перфорационных отверстий. Белые горизонтальные пунктирные линии обозначают границы между слоями

На рисунке 4.22 представлено вертикальное распределение горизонтальных пластовых напряжений и модуля Юнга породы по слоям пласта, а также раскрытие трещины отслоения $w(z, \theta)$ в различные моменты времени в сценарии без учета ползучести. Белые горизонтальные пунктирные линии

обозначают границы между слоями. На начальной стадии трещина распространяется преимущественно в вертикальном направлении. По мере роста давления жидкости в трещине отслоение начинает быстро распространяться в азимутальном направлении, что в итоге приводит к полному отслоению вдоль всей границы. Следует отметить, что максимальное раскрытие трещины не превышает 0.1 миллиметра, что обусловлено низкой вязкостью закачиваемого сверхкритического CO_2 .

Важно также отметить, что вдоль трещины можно выделить три характерные зоны, в которых изменение раскрытия трещины вдоль окружности качественно различается. В верхнем ряду рисунка 4.23 показано раскрытие трещины $w(z, \theta)$ в конечный момент времени. Белые вертикальные пунктирные линии обозначают границы слоев, а прямоугольники выделяют три характерные зоны трещины. В среднем ряду представлено изменение порового давления $\Delta p = p - p^0$ в деформированной конфигурации (перемещения увеличены в 500 раз), серые линии соответствуют изолиниям порового давления. В нижнем ряду приведены профили раскрытия трещины в поперечных сечениях. Первая зона отвечает случаю, когда поперечное сечение трещины имеет серповидную форму с полным углом меньше π . Раскрытие трещины в поперечном сечении принимает максимальное значение в направлении минимального горизонтального напряжения и монотонно убывает к вершинам трещины. Вторая характерная зона возникает, когда центральный угол трещины превышает π . Переход к этому режиму сопровождается скачкообразной бифуркацией профиля раскрытия трещины, который становится немонотонным. Увеличенное раскрытие в направлении максимального горизонтального напряжения обусловлено симметричным нагружением, при котором давление жидкости деформирует цементный камень и обсадную колонну с обеих противоположных сторон скважины. В направлении же минимального горизонтального напряжения трещина является асимметричной, поэтому давление нагружает цементный камень только с одной стороны. Третья характерная зона соответствует полному отслоению цементного камня и характеризуется резким изменением профиля раскрытия. В этом случае раскрытие трещины определяется напряжениями на границе отслоения: максимальное значение раскрытия достигается в направлении минимального горизонтального напряжения.

Для формирования практических рекомендаций применительно к технологическим операциям захоронения CO_2 удобно связать три характерные

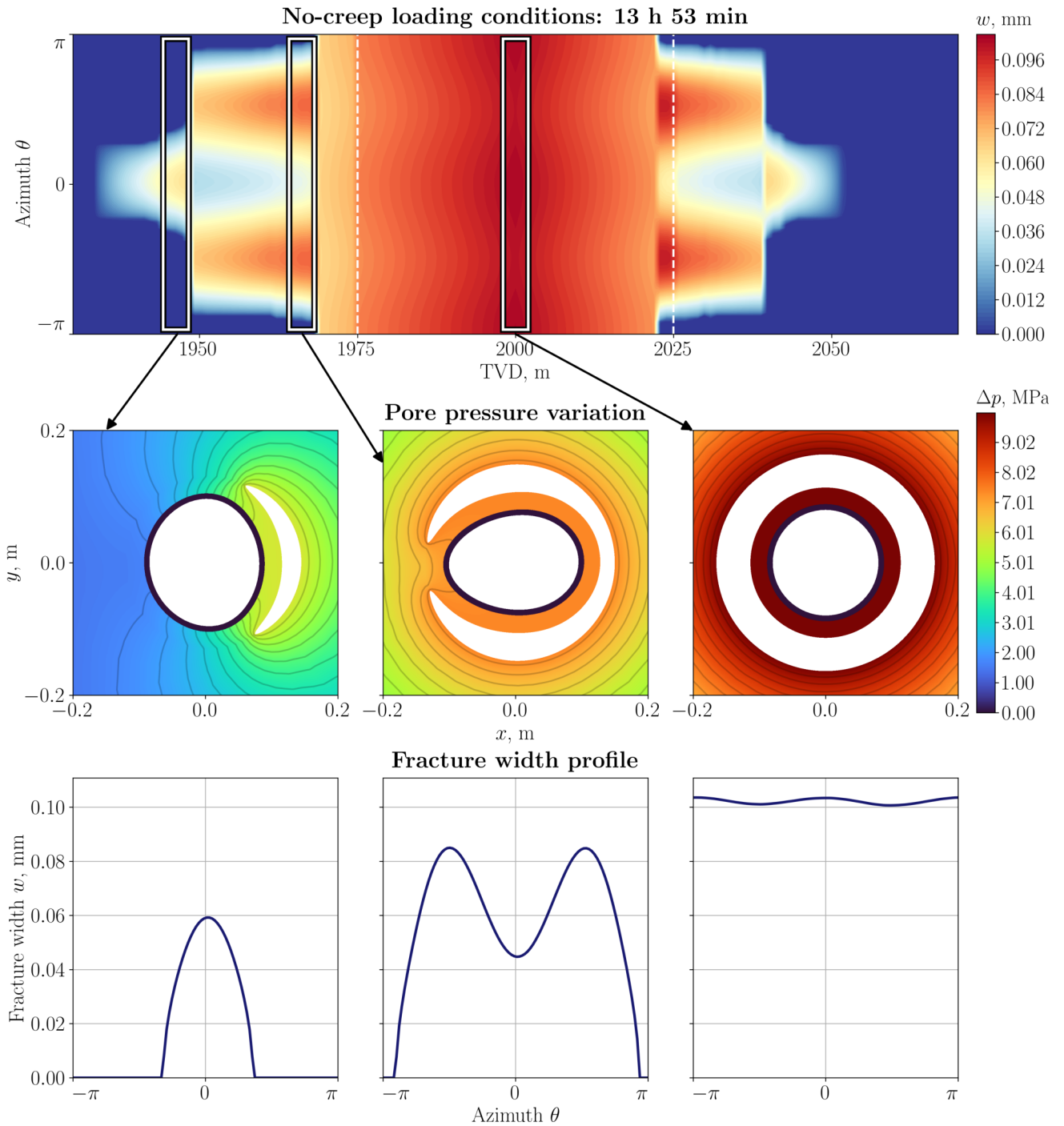


Рисунок 4.23 — Три характерные зоны при распространении гидравлического отслоения вдоль вертикальной скважины: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение и полное отслоение. В верхнем ряду показано раскрытие трещины $w(z, \theta)$ в конечный момент времени, белые вертикальные пунктирные линии обозначают границы слоев, а прямоугольники выделяют три характерные зоны. В среднем ряду представлено изменение порового давления $\Delta p = p - p^0$ в деформированной конфигурации (перемещения увеличены в 500 раз), серые линии соответствуют изолиниям порового давления. В нижнем ряду приведены профили раскрытия трещины в поперечных сечениях

зоны трещины с возможными рисками утечек и диагностическими признаками мониторинга. Рассматриваются два характерных сценария закачки. Первый сценарий соответствует закачке при постоянном давлении $p_w = 35$ МПа, для которой отслеживается соответствующий объемный расход жидкости. Второй сценарий представляет собой закачку с постоянным расходом $Q_{inj} = 0.05$ м³/ч, при которой отслеживается соответствующее фактическое давление закачки. Значения остальных параметров остаются неизменными. Для каждого сценария рассматриваются три случая, соответствующие характерным зонам трещины при фиксированном угле дуги трещины: серповидная трещина с полным углом меньше π , развитое неполное отслоение с центральным углом больше π и немонотонным раскрытием, а также полное отслоение цементного камня.

В верхней части рисунка 4.24 показан вычисленный расход закачки для сценария закачки при постоянном давлении, а в нижней части приведено вычисленное давление закачки для сценария закачки с постоянным расходом. Результаты представлены для трех случаев, соответствующих характерным зонам трещины отслоения, каждый из которых характеризуется фиксированным углом дуги трещины. Черные стрелки схематически указывают направление увеличения угла дуги трещины. В правой части рисунка изображены три характерные зоны в деформированной конфигурации (перемещения увеличены в 500 раз), серые линии соответствуют изолиниям порового давления. Для обоих сценариев закачки прослеживаются отчетливые закономерности. При постоянном давлении закачки объемный расход возрастает по мере перехода трещины из зоны серповидного отслоения в зону развитого неполного отслоения, а затем в режим полного отслоения, что отражает возрастание приемистости трещины и рост потенциала нежелательных утечек вдоль ствола скважины. При постоянном расходе, напротив, фактическое давление закачки убывает с ростом угла дуги трещины, поскольку увеличение размеров трещины снижает ее гидравлическое сопротивление. Полученные результаты показывают, что мониторинг расхода в условиях контроля давления либо мониторинг давления в условиях контроля расхода может позволить получить информативные признаки, отражающие эволюцию трещины. В частности, резкие изменения расхода или давления закачки могут указывать на переходы между различными режимами распространения отслоения.

Еще одно важное наблюдение, следующее из рисунка 4.22, состоит в том, что в сценарии без учета ползучести распространение трещины отслоения уско-

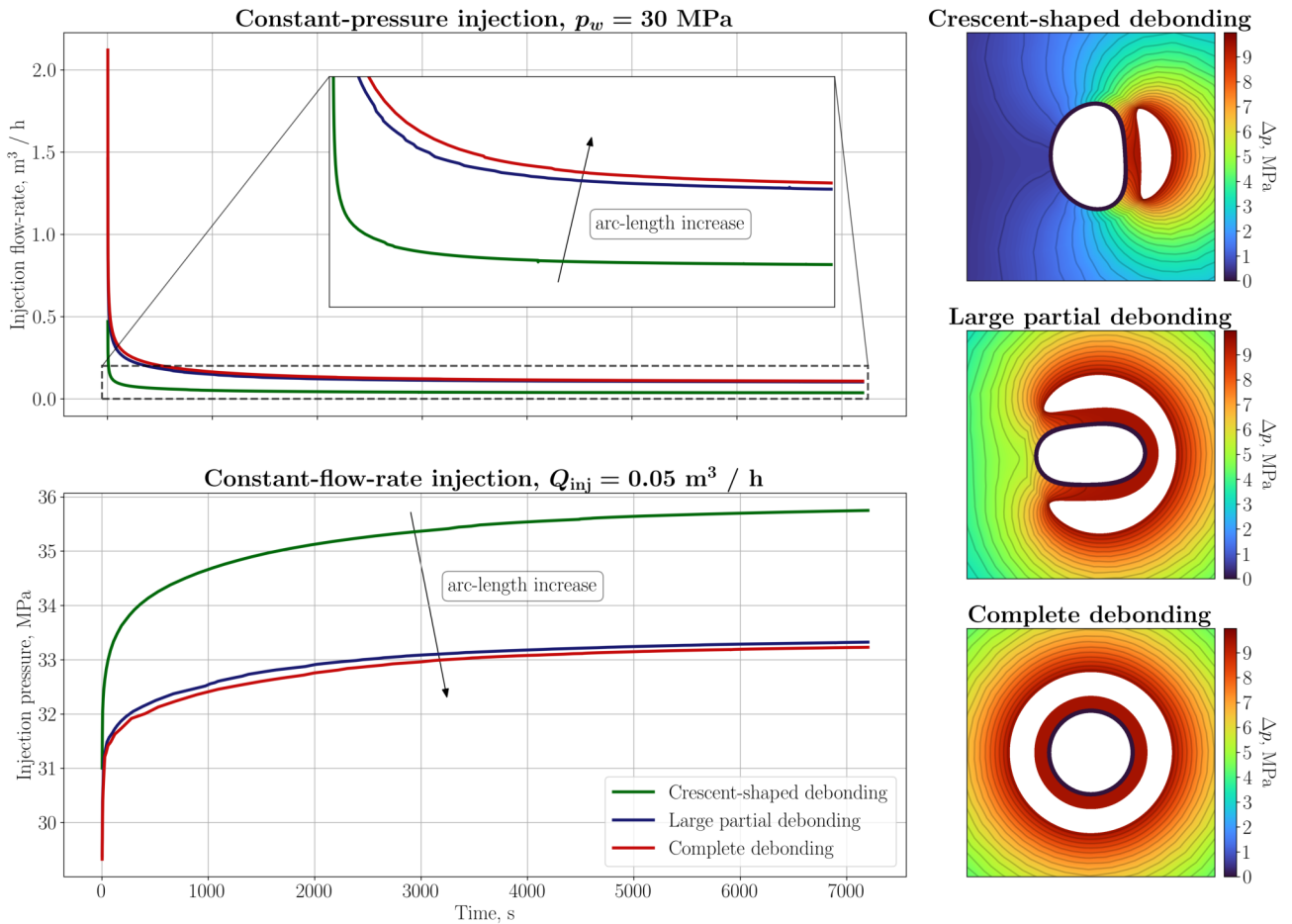


Рисунок 4.24 — Расчетный отклик системы на закачку для различных режимов распространения трещины. В верхней части приведен вычисленный объемный расход в сценарии закачки при постоянном давлении. В нижней части изображено вычисленное давление закачки в сценарии закачки с постоянным расходом. Результаты представлены для трех случаев, соответствующих зонам серповидного, развитого неполного и полного отслоения. Стрелки указывают направление увеличения угла дуги трещины. Справа приведена схема трех характерных зон трещины в деформированной конфигурации (перемещения увеличены в 500 раз), серые линии соответствуют изолиниям порового давления

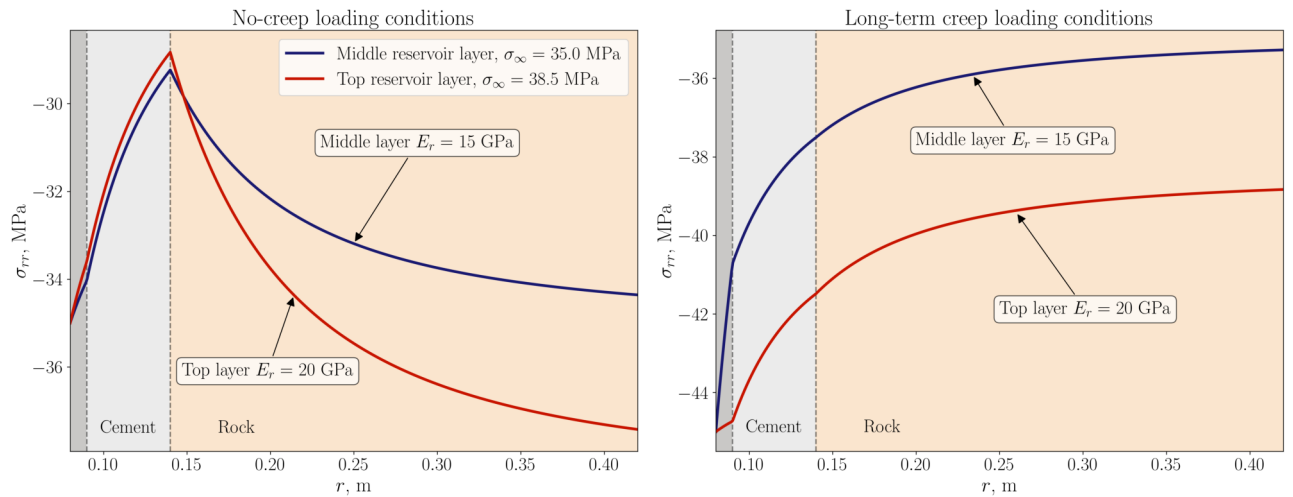


Рисунок 4.25 — Распространение гидравлического отслоения: осесимметричное решение для радиального напряжения σ_{rr} в центральном ($E_r = 15$ ГПа) и верхнем ($E_r = 20$ ГПа) слоях. Слева представлен сценарий без учета ползучести, справа изображен сценарий полной релаксации напряжений вследствие ползучести. В сценарии без учета ползучести сжатие в верхнем слое породы уменьшается, что ускоряет распространение трещины

ряется при достижении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями. На первый взгляд такое поведение может показаться парадоксальным, поскольку можно было ожидать замедления или даже полной остановки трещины при встрече с барьерами напряжений. Однако, как обсуждалось в разделе 4.1.2, в случае отсутствия ползучести неоднородность пластовых напряжений слабо влияет на напряжения на границах цементного камня. Напряжения на границах цементного камня определяются преимущественно условиями цементирования, которые характеризуются гидростатическим напряженным состоянием. Ускоренное вертикальное распространение трещины при достижении границ слоев обусловлено контрастом упругих свойств. В левой части рисунка 4.25 показаны радиальные напряжения для центрального ($E_r = 15$ ГПа) и верхнего ($E_r = 20$ ГПа) слоев в осесимметричном случае, который рассматривался в разделе 4.4.2 в сценарии без учета ползучести. Примечательно, что сжатие на границах цементного камня в верхнем слое ниже, чем в центральном, несмотря на более высокие пластовые напряжения. Пониженное сжатие на границах цементного камня в верхнем слое приводит к ускоренному распространению трещины даже при более высоких сжимающих напряжениях в пласте.

Далее рассматривается сценарий полной релаксации напряжений вследствие ползучести. В этом сценарии давление закачки p_w увеличено до 45 МПа,

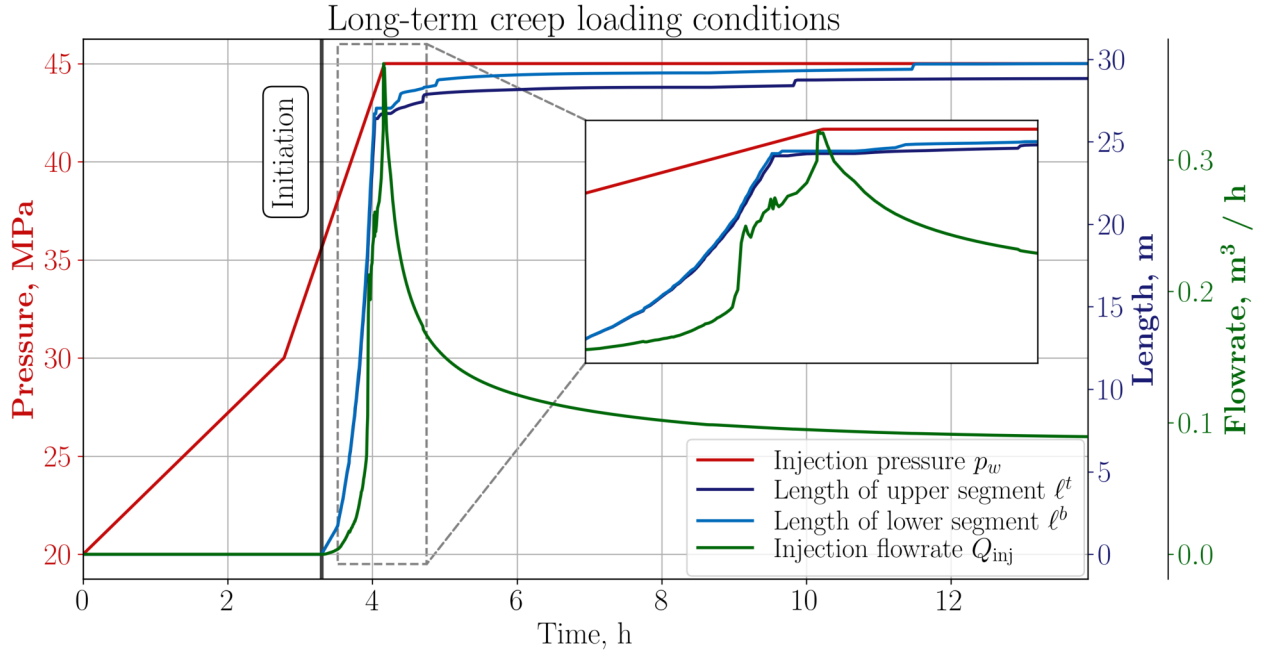


Рисунок 4.26 — Распространение гидравлического отслоения в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести: давление закачки p_w , длина верхнего ℓ^t и нижнего ℓ^b сегментов трещины, а также вычисленный объемный расход закачки Q_{inj} , соответствующий заданному давлению закачки, в зависимости от времени. Серая вертикальная линия отражает момент инициации отслоения

а пластовое поровое давление p_∞ полагается равным 30 МПа. Значения остальных параметров остаются без изменений. На рисунке 4.26 показаны давление закачки p_w , длина верхнего ℓ^t и нижнего ℓ^b сегментов трещины, а также вычисленный объемный расход закачки Q_{inj} в зависимости от времени для сценария полной релаксации напряжений вследствие ползучести. В этом сценарии нагружения верхний и нижний сегменты трещины распространяются практически синхронно, поскольку кусочно-постоянные пластовые напряжения существенно влияют на нормальные напряжения на границах цементного камня.

На рисунке 4.27 представлено вертикальное распределение горизонтальных пластовых напряжений и модуля Юнга породы по слоям пласта, а также раскрытие трещины отслоения $w(z, \theta)$ в различные моменты времени в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести. На поздней стадии жизненного цикла скважины распространение трещины отслоения останавливается при достижении границ слоев с высокими значениями сжимающих напряжений. В этом случае неоднородность пластовых напряжений ограни-

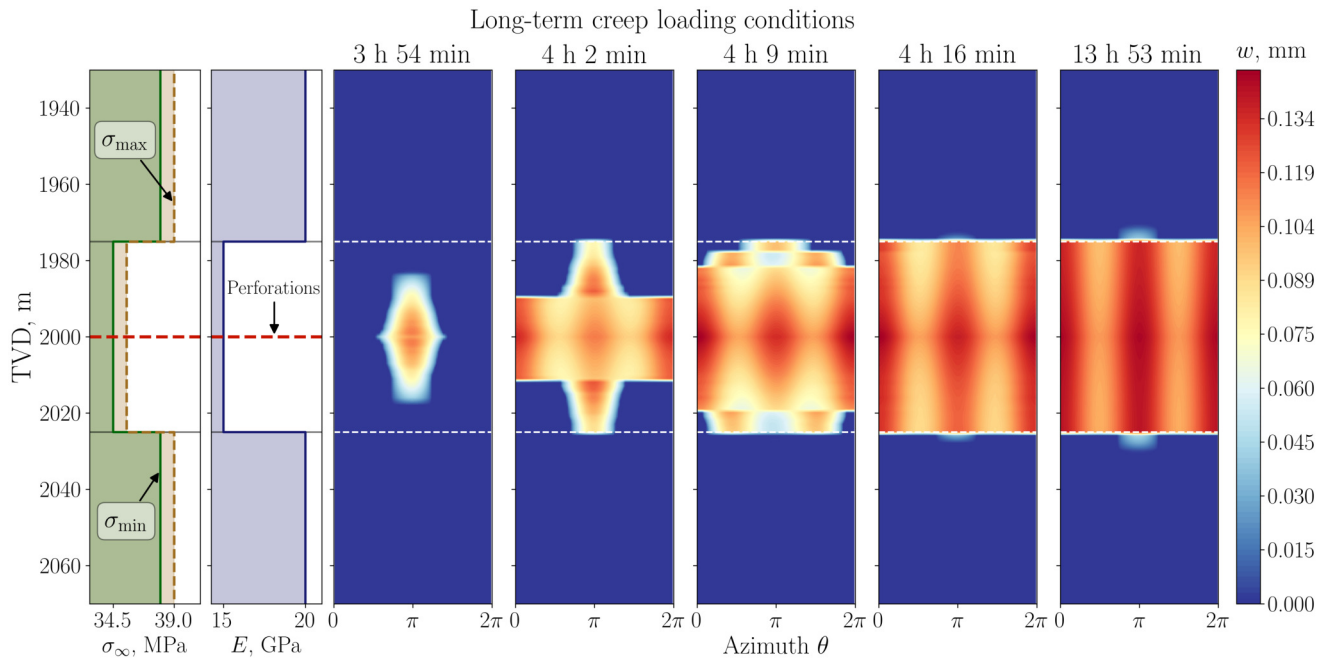


Рисунок 4.27 — Распространение гидравлического отслоения в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести: вертикальное распределение горизонтальных пластовых напряжений $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ и модуля Юнга породы E_r по слоям пласта, а также раскрытие трещины отслоения $w(z, \theta)$ в различные моменты времени. Красная горизонтальная пунктирная линия соответствует расположению перфорационных отверстий. Белые горизонтальные пунктирные линии обозначают границы между слоями. Повышенные сжимающие напряжения в верхнем и нижнем слоях играют роль барьеров и приводят к остановке вертикального распространения

чивает вертикальное распространение трещины отслоения. В правой части рисунка 4.25 показано радиальное напряжение для центрального ($E_r = 15$ ГПа) и верхнего ($E_r = 20$ ГПа) слоев в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести. Более высокие сжимающие пластовые напряжения приводят к увеличению сжатия на границах цементного камня, что ограничивает вертикальное распространение отслоения.

4.5 Анализ чувствительности к параметрам модели

4.5.1 Влияние анизотропии пластовых напряжений

Конструкция скважины часто находится в анизотропном поле пластовых напряжений, особенно в тектонически активных или неоднородных пластах. Анизотропия горизонтальных напряжений может существенно влиять на напряженное состояние внутри цементного камня и на его границах, что напрямую сказывается на целостности скважины и риске отслоения. Для исследования влияния анизотропии пластовых напряжений давление продавочной жидкости и цементного раствора фиксируются на уровнях $p_d = 27$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно. Пластовое поровое давление задается равным $p_\infty = 20$ МПа, а пластовая температура $T_\infty = 50^\circ\text{C}$. Жидкость закачивается под давлением $p_w = 30$ МПа при температуре $T_w = 50^\circ\text{C}$, что позволяет исключить влияние температуры закачки на напряженное состояние. Минимальное горизонтальное напряжение фиксируется на уровне $\sigma_{\min} = 35$ МПа, а максимальное горизонтальное напряжение варьируется в диапазоне $\sigma_{\max} \in [35, 40]$ МПа. Предполагается, что цемент не испытывает объемной усадки при затвердевании: $\varepsilon_{\text{vol}} = 0$.

Сначала рассматривается сценарий без учета ползучести. На рисунке 4.28 представлены нормальные напряжения на границах цементного камня в зависимости от азимута. Слева приведены результаты для границы обсадной колонны и цемента, справа представлены результаты для границы цемента и горной породы. Вертикальные пунктирные линии обозначают направления главных напряжений. С ростом максимального горизонтального напряжения $\sigma_{\max}$ на границах цементного камня формируется неравномерное распределение нормальных напряжений. Тем не менее контраст напряжений остается небольшим и не превышает 0.3 МПа. Влияние анизотропии напряжений достаточно ограничено, поскольку в сценарии без учета ползучести начальное напряженное состояние в цементе определяется преимущественно давлением цементного раствора. Анизотропия пластовых напряжений не оказывает существенного влияния на цемент, так как в момент размещения он находился в жидком состоянии и не обладал сдвиговой жесткостью, а на ранних временных этапах

No-creep conditions

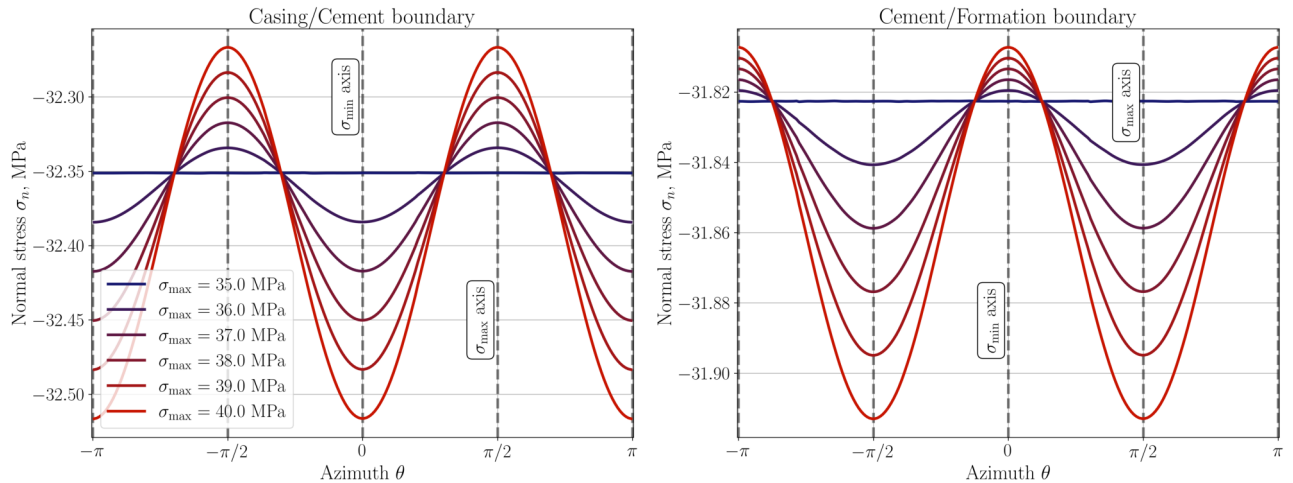


Рисунок 4.28 — Влияние анизотропии пластовых напряжений: нормальные напряжения на границах цементного камня в сценарии без учета ползучести в зависимости от азимута. Слева приведены результаты для границы обсадной колонны и цемента, справа представлены результаты для границы цемента и породы. Минимальное горизонтальное напряжение зафиксировано на уровне $\sigma_{\min} = 35$ МПа, а максимальное горизонтальное напряжение варьируется в диапазоне $\sigma_{\max} \in [35, 40]$ МПа. Вертикальные пунктирные линии обозначают направления главных напряжений

эффекты ползучести пренебрежимо малы. В настоящем разделе объемная усадка при гидратации цемента полагается равной нулю. При этом ненулевая усадка могла бы повысить чувствительность к анизотропии пластовых напряжений в сценарии без учета ползучести. Следует отметить, что на границе обсадной колонны и цемента наблюдается инверсия нормальных напряжений относительно направлений главных напряжений. Такое поведение может быть связано с высокой жесткостью стальной обсадной колонны и кольцевой геометрией скважины.

Далее рассматривается поздняя стадия жизненного цикла скважины. На рисунке 4.29 показаны нормальные напряжения на границах цементного камня в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести в зависимости от азимута. Слева приведены результаты для границы обсадной колонны и цемента, справа представлены результаты для границы цемента и породы. В отличие от сценария без учета ползучести, в сценарии полной релаксации напряжений увеличение максимального горизонтального пластового напряжения $\sigma_{\max}$ приводит к существенному увеличению сжатия по всей границе цементного камня. В этом случае неоднородность напряжений выражена значительно

Long-term creep conditions

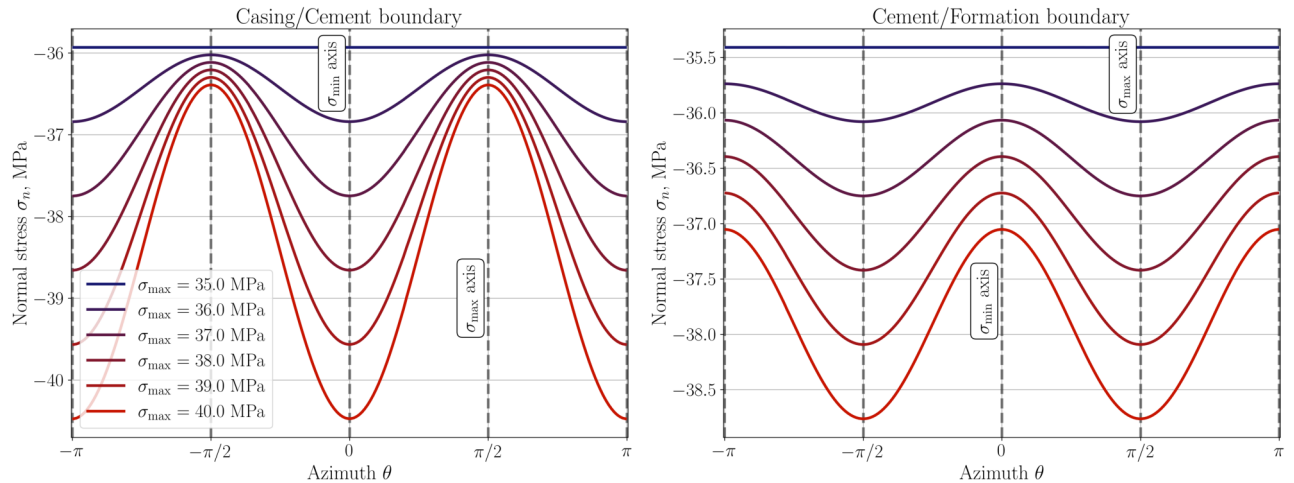


Рисунок 4.29 — Влияние анизотропии пластовых напряжений: нормальные напряжения на границах цементного камня в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести в зависимости от азимута. Слева приведены результаты для границы обсадной колонны и цемента, справа представлены результаты для границы цемента и породы. Минимальное горизонтальное напряжение фиксируется на уровне $\sigma_{\min} = 35$ МПа, а максимальное горизонтальное напряжение варьируется в диапазоне $\sigma_{\max} \in [35, 40]$ МПа. Вертикальные пунктирные линии обозначают направления главных напряжений

сильнее: максимальная разница между минимальным и максимальным нормальными напряжениями на границах цементного камня достигает 4 МПа. Как и в сценарии без учета ползучести, между границами «обсадная колонна — цемент» и «цемент — порода» наблюдается инверсия нормальных напряжений. Значительный контраст напряжений на границе обсадной колонны и цемента обусловлен высокой жесткостью стальной обсадной колонны.

4.5.2 Смещения обсадной колонны относительно оси скважины

Смещение обсадной колонны может изменять локальное распределение напряжений в цементе и окружающей породе, что способно повлиять на инициацию и распространение трещины. Для исследования влияния эксцентриситета обсадной колонны давление продавочной жидкости и цементного раствора пола-

гаются равными $p_d = 27$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно. Пластовое поровое давление составляет $p_\infty = 20$ МПа, а пластовая температура $T_\infty = 50^\circ\text{C}$. Давление закачки p_w возрастает до 35 МПа для сценария без учета ползучести и до 40 МПа для сценария полной релаксации напряжений вследствие ползучести, а температура закачки в обоих случаях снижена до $T_w = 35^\circ\text{C}$. Горизонтальные пластовые напряжения являются однородными $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 38$ МПа, а объемная усадка цемента полагается равной нулю $\varepsilon_{\text{vol}} = 0$.

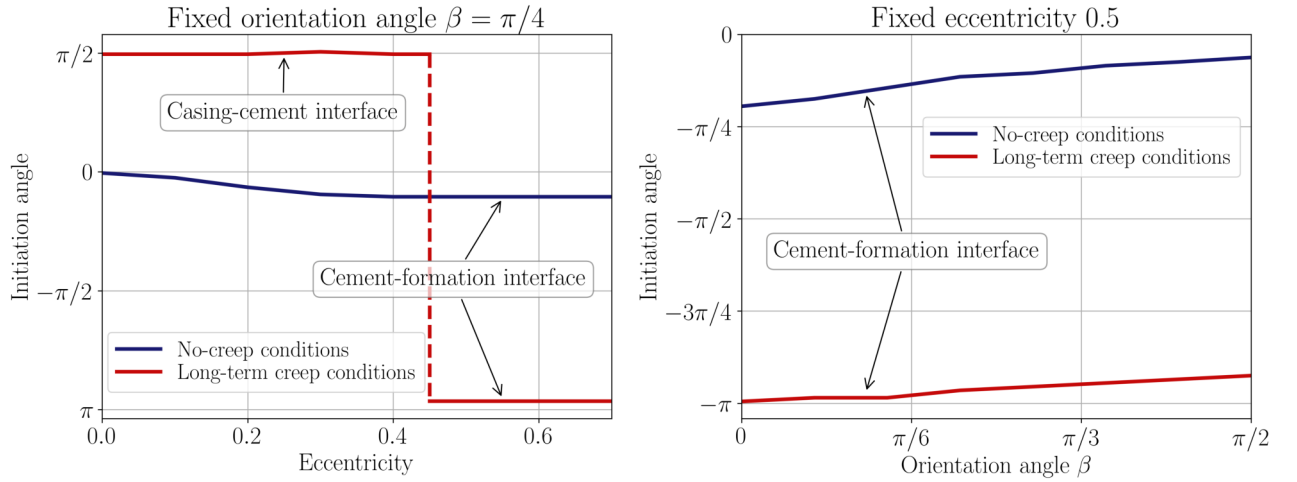


Рисунок 4.30 — Влияние эксцентриситета и угла ориентации смещения обсадной колонны на инициацию отслоения. Слева показан азимут инициации трещины для различных значений эксцентриситета при фиксированном угле ориентации $\beta = \pi/4$ в сценариях без учета ползучести и полной релаксации напряжений вследствие ползучести. Справа представлен азимут инициации трещины для различных значений угла ориентации при фиксированном значении эксцентриситета 0.5 в тех же сценариях. Подписи указывают, на какой из границ (обсадная колонна–цемент или цемент–порода) иницируется отслоение

Безразмерная величина эксцентриситета обсадной колонны определяется как $\delta/(r_2 - r_1)$, где δ — смещение обсадной колонны, r_1 — внешний радиус обсадной колонны, r_2 — радиус скважины. Анализируются два расчетных сценария: варьирование эксцентриситета при фиксированном угле ориентации $\beta = \pi/4$ и варьирование угла ориентации при фиксированном значении эксцентриситета 0.5. В левой части рисунка 4.30 показан азимут инициации трещины для случая фиксированного угла ориентации. В сценарии без учета ползучести азимут инициации постепенно смещается по часовой стрелке и стабилизируется при значении эксцентриситета 0.4, причем отслоение иницируется на границе цемента и породы. В сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести

азимут инициации остается практически неизменным вплоть до эксцентриситета 0.45, а отслоение возникает на границе обсадной колонны и цемента. При эксцентриситете больше 0.45 инициация отслоения происходит на границе цемента и породы, что сопровождается резким изменением азимута инициации. В правой части рисунка показан азимут инициации для случая фиксированного эксцентриситета. В обоих сценариях (без учета ползучести и с полной релаксацией напряжений вследствие ползучести) отслоение возникает на границе цемента и породы, а азимут инициации постепенно смещается против часовой стрелки при изменении угла ориентации.

4.5.3 Варьирование температуры закачиваемой жидкости

Температура закачиваемого CO_2 обычно ниже пластовой температуры. Нестационарные изменения температуры в околоскважинной зоне могут существенно влиять на напряжения в цементном камне. Для оценки характерной скорости изменения температуры и возникающих термических напряжений исследуется влияние изменения температуры закачки. Чтобы изолировать температурный эффект, рассматривается только сценарий без учета ползучести. Давление продавочной жидкости и цементного раствора фиксируются на уровнях $p_d = 27$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно. Пластовые условия определяются поровым давлением $p_\infty = 20$ МПа и пластовой температурой $T_\infty = 50^\circ\text{C}$. Жидкость закачивается под давлением $p_w = 30$ МПа, а температура закачиваемой жидкости варьируется в диапазоне $T_w = \{50, 45, 40, 35, 32\}^\circ\text{C}$ при однородных пластовых напряжениях $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 35$ МПа и нулевой объемной усадке цемента $\varepsilon_{\text{vol}} = 0$.

В верхнем ряду рисунка 4.31 представлена температура на границах цементного камня в зависимости от времени для различных значений температуры закачки T_w . Температура на границе обсадной колонны и цемента стабилизируется в течение первых 100 секунд закачки благодаря высокой теплопроводности стали. Температура на границе цемента и породы изменяется существенно позднее и значительно медленнее, что обусловлено низкой теплопроводностью цемента. В нижнем ряду показаны нормальные напряжения на границах цементного камня в зависимости от времени. На границе обсад-

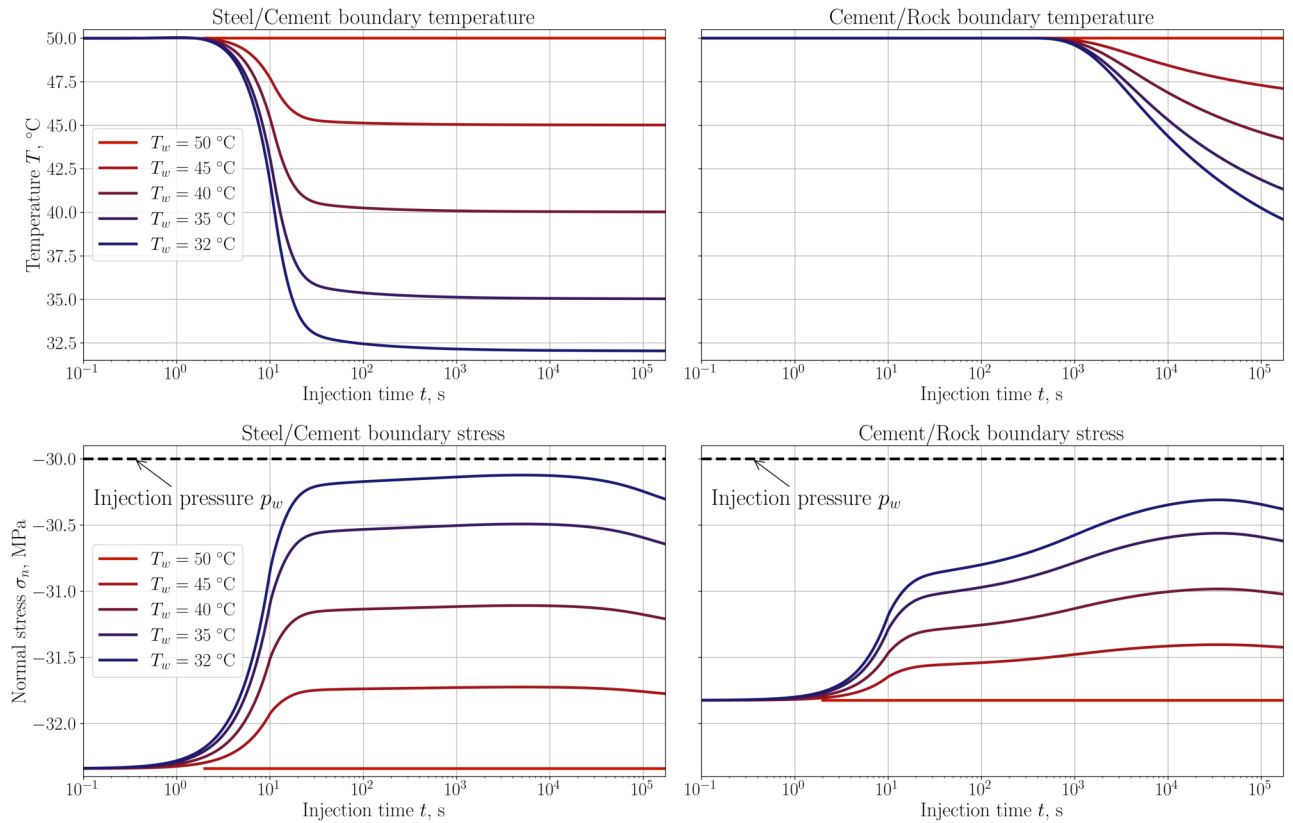


Рисунок 4.31 — Влияние температуры закачиваемой жидкости в сценарии без учета ползучести. В верхнем ряду представлена эволюция температуры на границах цементного камня в зависимости от времени для различных значений температуры закачки в диапазоне $T_w = \{50, 45, 40, 35, 32\}$ °C. Слева приведены результаты для внутренней границы, справа — для внешней границы. В нижнем ряду показана эволюция нормальных напряжений на границах цементного камня в зависимости от времени. Черные пунктирные линии соответствуют уровню, при котором нормальное напряжение на границе совпадает с давлением закачки

ной колонны и цемента радиальное напряжение быстро возрастает (сжатие уменьшается) вследствие быстрого охлаждения и возникающей объемной усадки стальной обсадной колонны. В распределении нормальных напряжений на границе цемента и породы наблюдаются два пика. Первый пик соответствует быстрому охлаждению обсадной колонны, которое вызывает упругую деформацию цементного камня. Второй пик возникает в момент, когда тепловой фронт достигает внешней границы цементного камня. Таким образом, закачка холодной жидкости повышает риск отслоения как на границе обсадной колонны и цемента (главным образом на начальной стадии закачки), так и на границе цемента и породы (главным образом на более поздней стадии закачки).

4.5.4 Эволюция пластовых условий вследствие длительной закачки CO_2

При длительной закачке CO_2 поровое давление в пласте, как правило, возрастает, а пластовая температура снижается вследствие закачки большого объема холодной жидкости. Существенные изменения пластовых условий могут заметно повлиять на напряженное состояние в околоскважинной зоне и, как следствие, на риск инициации трещины отслоения. Для оценки влияния этих факторов выполняется вариация пластовых условий, и анализируются соответствующие изменения нормальных напряжений на границах цементного камня. Чтобы изолировать влияние пластовых условий, рассматривается только сценарий без учета ползучести.

Давление продавочной жидкости и цементного раствора фиксируются на уровнях $p_d = 27$ МПа и $p_c = 32$ МПа соответственно. Пластовое поровое давление варьируется в диапазоне $p_\infty \in [20, 28]$ МПа, а пластовая температура в интервале $T_\infty \in [50, 32]^\circ\text{C}$. Жидкость закачивается под давлением $p_w = 30$ МПа при температуре $T_w = 50^\circ\text{C}$. Давление и температура закачки поддерживаются постоянными, чтобы оценить эффекты эволюционирующих во времени пластовых условий. Значения остальных параметров также остаются неизменными. Рассматривается случай однородных пластовых напряжений $\sigma_\infty^0 = \sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 35$ МПа, а объемная усадка цемента считается равной нулю $\varepsilon_{\text{vol}} = 0$. Изменение как порового давления, так и температуры пласта влияет на пластовое напряженное состояние. Влияние отклонения от исходных пластовых условий на текущее пластовое напряжение $\sigma_\infty = \sigma_\infty^0 + \Delta\sigma$ учитывается с помощью модифицированного уравнения Итана [199]:

$$\Delta\sigma = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} (b\Delta p_\infty + 3\alpha_s K \Delta T_\infty), \quad (4.65)$$

где $\Delta p_\infty = p_\infty - p^0$ обозначает отклонение порового давления в пласте от исходного состояния, а $\Delta T_\infty = T_\infty - T^0$ — отклонение пластовой температуры.

На рисунке 4.32 представлены нормальные напряжения на границах цементного камня при увеличении пластового порового давления p_∞ (слева) и снижении пластовой температуры T_∞ (справа). Зеленая кривая соответствует изменению пластового напряжения σ_∞ , обусловленному увеличением порового давления и охлаждением пласта. Повышение порового давления в пласте

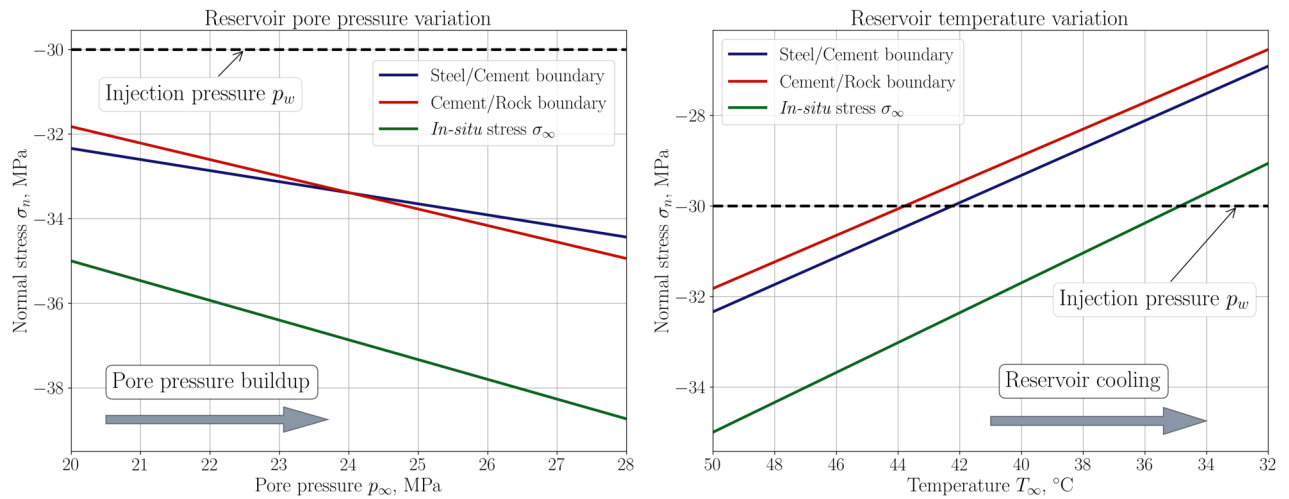


Рисунок 4.32 — Влияние эволюции пластовых условий при длительном захо-
ронении CO_2 : нормальные напряжения на границах цементного камня при
увеличении пластового порового давления p_∞ в диапазоне $[20, 28]$ МПа (сле-
ва) и снижении пластовой температуры T_∞ в диапазоне $[50, 32]$ °C (справа).
Зеленая кривая соответствует изменению пластового напряжения σ_∞ , обуслов-
ленному эволюцией пластовых условий согласно уравнению (4.65)

приводит к увеличению пластовых напряжений и большему сжимающему на-
пряжению на границах цементного камня, что снижает риск отслоения (при
фиксированном давлении закачки). Примечательно, что сжимающее напряже-
ние на границе цемента и породы возрастает быстрее, чем на границе обсадной
колонны и цемента, поскольку стальная обсадная колонна непроницаема, а
повышение порового давления внутри цементного камня приводит к увели-
чению обратного напряжения, действующего на обсадную колонну. Напротив,
снижение пластовой температуры приводит к уменьшению как пластовых на-
пряжений, так и нормальных напряжений на границах цементного камня, тем
самым повышая риск отслоения. Важно отметить, что при охлаждении пла-
ста нормальные напряжения на обеих границах цементного камня изменяются
практически одновременно. Это связано с тем, что снижение температуры вы-
зывает объемное сжатие всех материалов (стали, цемента и породы), в отличие
от изменений порового давления, которые затрагивают только пористый це-
мент и породу.

4.6 Анализ и количественная оценка ограничений модели

4.6.1 Влияние многофазного течения

В настоящей работе для описания распространения трещины отслоения, вызванного закачкой CO_2 , используется однофазная модель течения. Следует, однако, отметить, что в реальных условиях течение CO_2 в дефектах конструкции скважины, таких как микрозазоры, может иметь более сложный характер [210—212]. При определенных значениях давления и температуры возможны фазовые переходы при пересечении линии фазового равновесия жидкость — пар (VLE). Однако значительно чаще микрозазоры и каналы содержат воду, поступающую в них вследствие карбонизации цемента или из пласта. В этом случае реализуется многофазный режим течения, при котором CO_2 мигрирует в виде пузырьков по заполненному водой каналу. Динамика такого пузырькового течения в каналах малого размера до сих пор остается предметом активных исследований [213—216]. Существенное влияние оказывают также химические процессы. Карбонизация цементного камня приводит к временному связыванию CO_2 , тогда как последующее образование карбоната кальция (CaCO_3) может вызывать кольматацию и в конечном итоге приводить к герметизации трещины. Поэтому однофазная модель в наибольшей степени подходит для прогнозирования распространения трещины на начальных и промежуточных стадиях процесса, когда определяющую роль играет закачка CO_2 под высоким давлением. В этих условиях модель обеспечивает консервативную оценку размеров трещины до того, как долговременные химические процессы (герметизация) или сложные многофазные режимы течения (пузырьковое течение) начинают определять характер утечки. Для описания таких долговременных процессов, контролируемых реакционным переносом, требуется переход к полной термо-гидро-механо-химической модели (ТНМС).

В рамках принятых в работе допущений многофазные эффекты не должны оказывать существенного влияния ни на течение в трещине, которое описывается в предположении однофазного течения CO_2 , ни на отклик удаленной области пласта, где рассматривается однофазная фильтрация воды. Наиболее существенное влияние многофазные эффекты могут оказывать

в переходной зоне проникновения CO_2 в пласт, где происходит вытеснение пластового флюида и относительные фазовые проницаемости способны изменять локальные характеристики подвижности и распределение давления. Для количественной оценки возможного влияния многофазного течения рассматривается упрощенная задача фильтрации, согласованная с классической моделью Картера [163]. Предполагается, что фильтрация происходит в одномерной постановке по нормали к поверхности трещины. Жидкость из трещины поступает в пласт, вытесняя пластовый флюид и формируя зону проникновения, которая постепенно расширяется со временем. В пределах этой зоны возникает дополнительное гидравлическое сопротивление, обусловленное вытеснением одной фазы другой. Поскольку пластовый флюид смещается из первоначального положения, в удаленной области пласта возникает дополнительное повышение давления. Схематичное представление рассматриваемой задачи приведено на рисунке 4.33а.

Обозначим через q_{leak} полную скорость утечек через один берег трещины отслоения, отнесенную к единице площади. Течение через зону проникновения описывается следующими уравнениями [66]:

$$q_{\text{leak}} = \phi^0 \frac{dh_i}{dt}, \quad q_{\text{leak}} = \frac{k_r}{\mu} \frac{\Delta p_i}{h_i}, \quad (4.66)$$

где h_i — размер зоны проникновения, ϕ^0 — пористость, k_r — проницаемость пласта, μ — вязкость жидкости в трещине, Δp_i — падение давления в зоне проникновения. Решение уравнений (4.66) с нулевым начальным условием для размера зоны проникновения h_i имеет вид

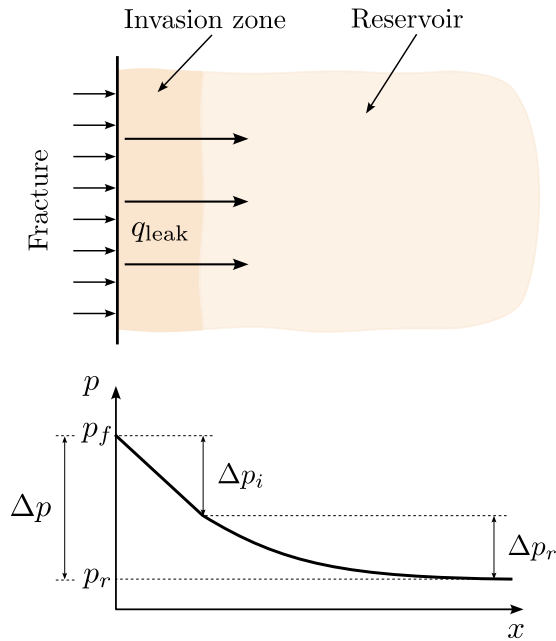
$$q_{\text{leak}} = \frac{C_i}{\sqrt{t}}, \quad h_i = \frac{2C_i}{\phi^0} \sqrt{t}, \quad C_i = \sqrt{\frac{\phi^0 k_r \Delta p_i}{2\mu}}. \quad (4.67)$$

Течение в пласте описывается в рамках одномерного уравнения диффузии, которое формулируется следующим образом:

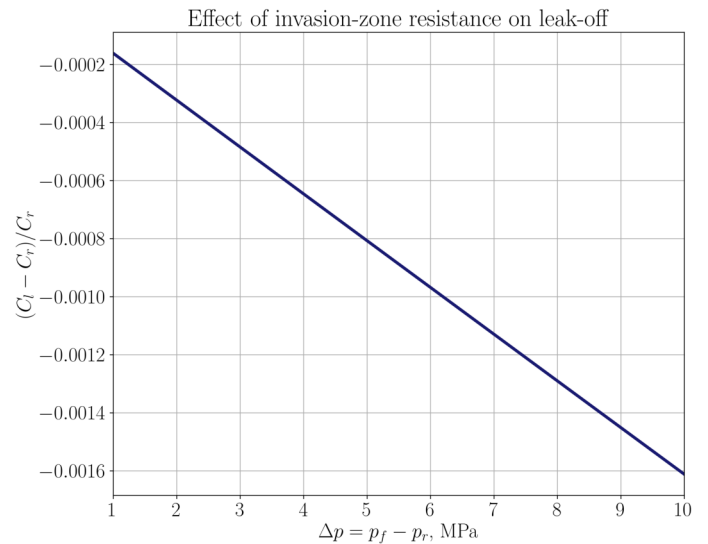
$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_r}{\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad p|_{t=0} = p_r, \quad p|_{x=0} = p_r + \Delta p_r, \quad (4.68)$$

где M — модуль Био, η — вязкость пластовой (поровой) жидкости, Δp_r — падение давления в пласте. Решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному и граничным условиям, имеет вид

$$p = p_r + \Delta p_r \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right), \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (4.69)$$



а) Схема задачи об утечках
жидкости из трещины в
пористый пласт



б) Влияние сопротивления зоны
проникновения на утечки

Рисунок 4.33 — Слева: Схема проникновения жидкости в пористую среду и соответствующего распределения давления. В верхней части показана фильтрация жидкости из трещины с высоким давлением в прилегающий низкопроницаемый пласт с образованием зоны проникновения. В нижней части приведен профиль давления, иллюстрирующий суммарный перепад давления Δp в различных областях течения. Справа: Относительное отклонение $(C_l - C_r)/C_r$ в зависимости от суммарного перепада давления Δp . Учет гидравлического сопротивления зоны проникновения приводит к уменьшению эффективного коэффициента утечки C_l по сравнению с коэффициентом C_r , соответствующим фильтрации только в пласте

где $D = M k_r / \eta$ — коэффициент диффузии. Тогда скорость утечек вычисляется на основе закона Дарси следующим образом:

$$q_{\text{leak}} = -\frac{k_r}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{C_r}{\sqrt{t}}, \quad C_r = \sqrt{\frac{k_r}{\pi \eta M}} \Delta p_r. \quad (4.70)$$

Скорости утечки, определяемые выражениями (4.67) и (4.70), должны совпадать, а сумма перепадов давления в зоне проникновения и в пласте должна быть равна полному перепаду давления между давлением в трещине и невозмущенным пластовым давлением:

$$q_{\text{leak}} = \frac{C_l}{\sqrt{t}} = \frac{C_i}{\sqrt{t}} = \frac{C_r}{\sqrt{t}}, \quad \Delta p_i + \Delta p_r = \Delta p, \quad (4.71)$$

где C_l — эффективный коэффициент утечек, Δp — перепад давления между жидкостью в трещине и невозмущенным пластом. Исключая Δp_i и Δp_r из системы (4.71), получаем

$$q_{\text{leak}} = \frac{C_l}{\sqrt{t}}, \quad C_l = \frac{2\bar{C}_i\bar{C}_r}{\bar{C}_i + \sqrt{\bar{C}_i^2 + 4\bar{C}_r^2}}, \quad (4.72)$$

где модифицированные коэффициенты утечек для всех рассматриваемых механизмов выражаются через полный перепад давления Δp следующим образом:

$$\bar{C}_i = \sqrt{\frac{\phi^0 k_r \Delta p}{2\mu}}, \quad \bar{C}_r = \sqrt{\frac{k_r}{\pi \eta M}} \Delta p. \quad (4.73)$$

На рисунке 4.33б представлено относительное отклонение $(C_l - C_r)/C_r$ эффективного коэффициента утечки C_l , учитывающего сопротивление зоны проникновения, от коэффициента утечки C_r , соответствующего фильтрации только в пласте, в зависимости от суммарного перепада давления Δp . Расчет выполнен с использованием параметров, приведенных в таблицах 8 и 9. Как видно из рисунка, учет гидравлического сопротивления зоны проникновения лишь незначительно уменьшает эффективный коэффициент утечки. Для рассмотренного диапазона параметров отклонение не превышает 0.2%, что свидетельствует о незначительном влиянии сопротивления зоны проникновения и связанных с ним многофазных эффектов на величину эффективного коэффициента утечки.

4.6.2 Конвективный теплоперенос вдоль трещины

Для оценки возможного влияния конвективного переноса тепла вдоль вертикальной трещины отслоения рассматривается предельный сценарий, соответствующий максимально возможному вкладу конвекции. Пусть длина трещины отслоения равна L , а объемный расход закачки составляет Q_{inj} . Предполагается, что жидкость в трещине идеально перемешана и сохраняет температуру закачиваемой жидкости T_w по всей длине трещины. Кроме того, предполагается, что вся закачиваемая в трещину жидкость фильтруется в окружающий пласт. В рамках этих допущений тепловой поток, направленный из трещины в пласт, определяется выражением

$$q_{\text{frac}} = -\rho C' \frac{Q_{\text{inj}}}{L} (T_{\infty} - T_w), \quad (4.74)$$

где ρ — плотность жидкости в трещине, C' — удельная теплоемкость жидкости в трещине, T_{∞} — невозмущенная температура пласта.

Для сравнения оценивается теплопроводность непосредственно от ствола скважины на основе стационарной модели радиальной теплопроводности. Для простоты температура скважины рассчитывается с учетом только горной породы, без учета обсадной колонны и цементного камня. При температуре на стенке скважины T_w и невозмущенной температуре пласта T_{∞} стационарное распределение температуры имеет вид

$$T(r) = T_w + (T_{\infty} - T_w) \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(r_{\infty}/r_w)}, \quad (4.75)$$

где r_w — радиус скважины, r_{∞} — характерный радиус на бесконечности. Соответствующий тепловой поток через стенку скважины равен

$$q_{\text{well}} = -\kappa 2\pi r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_w} = -\kappa \frac{2\pi(T_{\infty} - T_w)}{\ln(r_{\infty}/r_w)}, \quad (4.76)$$

где κ — теплопроводность пласта.

Расчет проводится с использованием значений параметров, приведенных в таблицах 8 и 9. Дополнительно в расчете используются следующие значения: длина трещины $L = 100$ м, объемный расход закачки $Q_{\text{inj}} = 0.1$ м³/ч, невозмущенная температура пласта $T_{\infty} = 50$ °С, температура закачиваемой жидкости $T_w = 40$ °С, характерный радиус на бесконечности $r_w = 1$ м, а также удельная

теплоемкость пласта $C' = 2600$ Дж/(кг·К) при $p = 15$ МПа и $T = 40$ °С [217]. При указанных значениях получается

$$|q_{\text{frac}}| \approx 3.6 \ll |q_{\text{well}}| \approx 57.2, \quad (4.77)$$

то есть тепловой поток, обусловленный конвективным переносом вдоль трещины, почти на два порядка меньше теплового потока, обусловленного теплопроводностью непосредственно от скважины. Следовательно, в рассматриваемых условиях влиянием конвективного переноса тепла вдоль трещины на температурное поле можно пренебречь.

4.6.3 Количественная оценка эффекта Джоуля — Томсона

Для количественной оценки возможного влияния эффекта Джоуля — Томсона при закачке CO₂ рассматривается стандартное определение коэффициента Джоуля — Томсона при постоянной энтальпии H :

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H. \quad (4.78)$$

При небольших перепадах давления соответствующее изменение температуры можно оценить с помощью линейного приближения:

$$\Delta T \approx \mu_{JT} \Delta p. \quad (4.79)$$

В качестве характерного примера рассматривается закачка в пласт, расположенный на глубине от 1 до 2 км. При гидростатическом распределении давления пластовое давление в этом диапазоне глубин составляет от 9.8 до 19.6 МПа. Если принять температуру земной поверхности равной 288 К (15 °С), а геотермический градиент 25 К/км, то температура пласта изменяется приблизительно от 313 К (40 °С) до 338 К (65 °С). При таких условиях значение коэффициента Джоуля — Томсона для CO₂ лежит в диапазоне от 2 до 4 К/МПа, что согласуется с данными работы [218]. Тогда при перепаде давления на перфорациях порядка 1 МПа ожидаемое снижение температуры вследствие эффекта Джоуля — Томсона составляет от 2 до 4 К. Следовательно, для рассматриваемых условий закачки влияние эффекта Джоуля—Томсона хотя и является измеримым, однако остается сравнительно небольшим.

4.7 Выводы по модели гидравлического отслоения

В данной главе рассмотрена задача распространения гидравлического отслоения вдоль границ цементного камня при закачке CO_2 . Разработан подход к моделированию, основанный на сопряжении pseudo-3D модели распространения трещины, адаптированной для цилиндрической геометрии, с термoporоупругой моделью механического поведения в каждом поперечном сечении скважины. Предложенный вычислительный алгоритм учитывает порoупругое поведение цементного камня и окружающей горной породы, а также влияние изменений давления и температуры закачиваемой жидкости. Модель термoporоупругого деформирования отражает композитную структуру системы «обсадная колонна — цемент — порода» и учитывает анизотропию естественных пластовых напряжений, слоистую структуру окружающей породы, эксцентриситет обсадной колонны и начальное напряженное состояние, обусловленное строительством скважины и гидратацией цемента. Модель распространения трещины учитывает влияние плавучести и вязкости жидкости, зависящих от давления утечек, прочности сцепления на внутренних границах раздела (через критическую скорость высвобождения энергии), а также позволяет моделировать распространение трещины как в вертикальном, так и в окружном направлении. Численная схема для модели вертикального распространения трещины основана на методе конечных объемов, а для механической задачи в каждом горизонтальном сечении скважины применяется метод конечных элементов. Алгоритм сопряжения модели распространения трещины и термoporоупругой механической модели основан на предположении плоской деформации, что позволяет использовать приближение локальной упругости и свести трехмерную механическую задачу к последовательности двумерных задач, решаемых в каждом поперечном сечении скважины. В представленной модели не учитываются фазовые переходы CO_2 , многофазная фильтрация в пористой среде, конвективный перенос тепла и эффект Джоуля — Томсона. Несмотря на принятые упрощения, модель описывает основные механизмы гидравлического отслоения на границах цементного камня и позволяет получить представление об основных закономерностях развития трещины.

Задача гидравлического отслоения исследована для двух предельных сценариев нагружения, ограничивающих возможный диапазон начального на-

пряженного состояния перед началом эксплуатационного нагружения. Первый сценарий соответствует отсутствию ползучести, когда определяющее влияние оказывает разгрузка, обусловленная объемной усадкой цемента. Второй соответствует полной релаксации напряжений вследствие ползучести и представляет собой теоретический предельный случай, в котором неоднородности напряжений в цементе и породе полностью релаксируют. Были обнаружены три характерные зоны профиля раскрытия трещины: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение с немонотонным раскрытием, а также полное отслоение. Переходы между этими режимами характеризуются скачкообразными бифуркациями, отражающими чувствительность к условиям нагружения и анизотропии напряжений. Мониторинг расхода или давления закачки позволяет получить практические индикаторы эволюции трещины и потенциального риска утечек. При закачке с постоянным давлением расход увеличивается по мере роста длины дуги трещины, тогда как при закачке с постоянным расходом давление уменьшается с увеличением длины дуги трещины. Еще одно важное наблюдение заключается в том, что в сценарии без учета ползучести распространение трещины отслоения ускоряется при достижении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями вследствие контраста упругих свойств, тогда как на поздних стадиях жизненного цикла скважины трещина останавливается при достижении барьеров напряжений. Согласно анализу чувствительности, анизотропия пластовых напряжений почти не оказывает влияние на цемент в сценарии без учета ползучести, в то время как в сценарии полной релаксации напряжений вследствие ползучести анизотропия приводит к выраженной неоднородности напряжений на границах цементного камня. Эксцентриситет обсадной колонны может существенно влиять на азимут инициации трещины, а также на то, на какой именно границе возникает отслоение. Закачка холодной жидкости повышает риск отслоения как на границе обсадной колонны и цемента (главным образом на начальной стадии закачки), так и на границе цемента и породы (главным образом на более поздних стадиях). В работе также учтены изменения пластовых условий при длительной закачке CO_2 . Увеличение порового давления снижает риск отслоения вследствие увеличения сжимающих напряжений, тогда как снижение пластовой температуры повышает этот риск. Полученные результаты демонстрируют сложное взаимодействие различных физических механизмов, проявляющихся при длительной закачке жидкости, что в ряде случаев приводит к контринтуитивным результатам. Это подчерки-

вает необходимость разработки подобных полностью связанных моделей для описания процесса гидравлического отслоения.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, можно сформулировать в следующем виде:

1. Разработаны три подхода к построению асимптотического решения для полубесконечной гидравлической трещины, распространяющейся в проницаемой упругой среде со слоистостью по сжимающим напряжениям. Первый подход основан на прямом численном решении несингулярного интегрального уравнения и обеспечивает наивысшую точность ценой значительных вычислительных затрат. Вторым подход, использующий универсальное асимптотическое решение с эффективной трещиностойкостью, обеспечивает простоту реализации и высокую вычислительную эффективность, однако его точность существенно снижается с ростом влияния вязкой диссипации. Третий подход основан на аппроксимации несингулярной интегральной формулировки обыкновенным дифференциальным уравнением и сохраняет высокую точность во всех режимах распространения трещины при вычислительных затратах, приемлемых для использования в алгоритмах отслеживания фронта. Показано, что размер области в окрестности вершины трещины, в пределах которой построенная асимптотика остается справедливой, существенно сокращается по мере удаления фронта трещины от границы слоя. Для расширения области применимости асимптотики введен коэффициент релаксации напряжений, эффективно уменьшающий амплитуду скачка напряжений на границе слоя. Расширение области применимости позволяет использовать построенное асимптотическое решение в качестве условия распространения в алгоритмах отслеживания фронта гидравлической трещины.
2. Разработана модификация модели гидравлического разрыва пласта *planar 3D* на основе алгоритма ILSA, использующая построенное в главе 2 асимптотическое решение с учетом слоистости по сжимающим напряжениям в качестве условия распространения. Основные компоненты алгоритма, включая определение положения фронта трещины и вычисление объема концевых элементов, обобщены на случай многослойной среды. Построено обобщение коэффициента релаксации

напряжений на случай гидравлической трещины конечных размеров с произвольным расположением слоев и произвольным режимом распространения. Полученное обобщение не зависит от геометрии слоев и позволяет использовать построенное асимптотическое решение в качестве условия распространения в моделях гидравлического разрыва пласта на грубых расчетных сетках, характерных для инженерных приложений. Разработанный алгоритм верифицирован на эталонных численных решениях для радиальной гидравлической трещины в различных режимах распространения и валидирован на основе экспериментальных данных [187] по распространению гидравлической трещины в плоскости контакта двух блоков из полиметилметакрилата с профилированной поверхностью, воспроизводящей слоистость по сжимающим напряжениям. Исследование сходимости при измельчении расчетной сетки, выполненное для трещины постоянной высоты, умеренного барьера напряжений и тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями, показало, что предложенные модификации существенно повышают точность алгоритма ILSA на грубых сетках по сравнению со стандартной реализацией с универсальным асимптотическим решением.

3. На основе разработанной модели planar 3D ILSA рассмотрена задача одновременного распространения нескольких гидравлических трещин вдоль наклонной скважины в предельном случае равномерного распределения потока жидкости между трещинами, соответствующем достаточно высокому гидравлическому сопротивлению перфорационных отверстий. При учете механического взаимодействия трещин касательные разрывы смещений не учитываются, что обосновано аналитической оценкой отбрасываемых слагаемых: уменьшение эффективной жесткости отдельной трещины не превышает 13.5%, а влияние на механическое взаимодействие между различными трещинами не превышает 3.7%. Поле дополнительных сжимающих напряжений от взаимодействия трещин вычисляется на основе раскрытия трещин с предыдущего шага по времени, что позволяет решать задачу упругости для каждой трещины независимо. Показано, что при отсутствии наклона скважины трещины сохраняют симметричную форму, близкую к радиальной, тогда как наклон скважины и связанное с ним

- горизонтальное смещение точек закачки приводят к формированию существенно асимметричных трещин. Представленные результаты получены для вязкостного режима распространения трещин.
4. Разработана трехмерная модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня при закачке CO_2 . Модель учитывает термопороупругое деформирование системы «обсадная колонна — цемент — порода», анизотропию пластовых напряжений, слоистую структуру окружающей породы, эксцентриситет обсадной колонны и начальное напряженное состояние, обусловленное строительством скважины и гидратацией цемента. Начальное напряженное состояние рассматривается в двух предельных сценариях жизненного цикла скважины: раннем — при отсутствии ползучести горной породы, и позднем — при полной релаксации напряжений вследствие ползучести. В модели распространения трещины учитывается влияние плавучести и вязкости жидкости, а также фильтрация из трещины в окружающую пористую среду. Модель описывает распространение трещины как в вертикальном, так и в окружном направлении. Трехмерная механическая задача сведена к последовательности двумерных задач в поперечных сечениях скважины в приближении плоской деформации, сопряженных с моделью вертикального распространения трещины через приближение локальной упругости. Такая декомпозиция сохраняет трехмерный характер распространения трещины при вычислительных затратах, приемлемых для параметрических исследований и обоснования сценариев закачки CO_2 .
 5. Обнаружены три характерных режима профиля раскрытия трещины гидравлического отслоения цементного камня в поперечном сечении скважины: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение с немонотонным раскрытием и полное отслоение. Переходы между этими режимами характеризуются скачкообразными бифуркациями, отражающими чувствительность к условиям нагружения и анизотропии напряжений. Мониторинг расхода или давления закачки позволяет получить практические индикаторы эволюции трещины: при закачке с постоянным давлением расход увеличивается по мере роста длины дуги трещины, тогда как при закачке с постоянным расходом давление уменьшается с увеличением длины дуги трещины. Установ-

лено, что ползучесть горной породы качественно меняет характер взаимодействия трещины со слоистостью пласта: без учета ползучести распространение трещины ускоряется при достижении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями вследствие контраста упругих свойств, тогда как при полной релаксации напряжений вследствие ползучести трещина останавливается на этих границах. Закачка холодного CO_2 сопровождается охлаждением цементного камня и породы в околоскважинной зоне, что снижает сжимающие напряжения на границах цементного камня и повышает риск отслоения. Долговременная закачка CO_2 сопровождается снижением пластовой температуры и повышением порового давления. Эти изменения пластовых условий влияют на риск отслоения противоположным образом: снижение температуры увеличивает риск отслоения, а рост порового давления его снижает за счет увеличения сжимающих напряжений.

Список литературы

1. *Khristianovic, S.* Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid [Текст] / S. Khristianovic, Y. P. Zheltov // World petroleum congress proceedings. — 1955. — С. 579—586.
2. *Geertsma, J.* A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures [Текст] / J. Geertsma, F. De Klerk // Journal of petroleum technology. — 1969. — Т. 21, № 12. — С. 1571—1581.
3. Widths of hydraulic fractures [Текст] / Т. Perkins, L. Kern [и др.] // Journal of Petroleum Technology. — 1961. — Т. 13, № 09. — С. 937—949.
4. *Nordgren, R.* Propagation of a vertical hydraulic fracture [Текст] / R. Nordgren // Society of petroleum engineers journal. — 1972. — Т. 12, № 04. — С. 306—314.
5. *Abe, H.* Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks, 2 [Текст] / H. Abe, L. Keer, T. Mura // Journal of Geophysical Research. — 1976. — Т. 81, № 35. — С. 6292—6298.
6. *Palmer, I. D.* Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variations [Текст] / I. D. Palmer, H. Carroll // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1983. — Т. 23, № 06. — С. 870—878.
7. *Settari, A.* Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry [Текст] / A. Settari, M. P. Cleary // SPE Production Engineering. — 1986. — Т. 1, № 06. — С. 449—466.
8. *Dontsov, E.* An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness [Текст] / E. Dontsov, A. Peirce // Engineering Fracture Mechanics. — 2015. — Т. 142. — С. 116—139.
9. *Cohen, C.-E.* A new stacked height growth model for hydraulic fracturing simulation [Текст] / C.-E. Cohen, O. Kresse, X. Weng // 49th US rock mechanics/geomechanics symposium. — OnePetro. 2015.

10. *Clifton, R. J.* A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures [Текст] / R. J. Clifton, A. S. Abou-Sayed // SPE/DOE low permeability gas reservoirs symposium. — OnePetro. 1981.
11. *Barree, R. D.* A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media [Текст] / R. D. Barree // SPE reservoir simulation symposium. — OnePetro. 1983.
12. *Peirce, A.* An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures [Текст] / A. Peirce, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Т. 197, № 33—40. — С. 2858—2885.
13. *Zia, H.* PyFrac: A planar 3D hydraulic fracture simulator [Текст] / H. Zia, B. Lecampion // Computer Physics Communications. — 2020. — Т. 255. — С. 107368.
14. *Kumar, D.* A three-dimensional analysis of simultaneous and sequential fracturing of horizontal wells [Текст] / D. Kumar, A. Ghassemi // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2016. — Т. 146. — С. 1006—1025.
15. Finite element simulations of interactions between multiple hydraulic fractures in a poroelastic rock [Текст] / S. Salimzadeh [и др.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2017. — Т. 99. — С. 9—20.
16. *Yoshioka, K.* A variational hydraulic fracturing model coupled to a reservoir simulator [Текст] / K. Yoshioka, B. Bourdin // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2016. — Т. 88. — С. 137—150.
17. *Lecampion, B.* Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore [Текст] / B. Lecampion, J. Desroches // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2015. — Т. 82. — С. 235—258.
18. *Bunger, A. P.* Numerical simulation of simultaneous growth of multiple interacting hydraulic fractures from horizontal wells [Текст] / A. P. Bunger, A. P. Peirce // Shale Energy Engineering 2014: Technical Challenges, Environmental Issues, and Public Policy. — 2014. — С. 201—210.
19. *Wu, K.* A simplified three-dimensional displacement discontinuity method for multiple fracture simulations [Текст] / K. Wu, J. E. Olson // International Journal of Fracture. — 2015. — Т. 193, № 2. — С. 191—204.

20. Applications of the fast multipole fully coupled poroelastic displacement discontinuity method to hydraulic fracturing problems [Текст] / A. Rezaei [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2019. — Т. 399. — С. 108955.
21. An explicit algorithm for modeling planar 3D hydraulic fracture growth based on a super-time-stepping method [Текст] / M. Chen [и др.] // International Journal of Solids and Structures. — 2020. — Т. 191. — С. 370—389.
22. *Garagash, D. I.* Plane-Strain Propagation of a Fluid-Driven Fracture: Small Toughness Solution [Текст] / D. I. Garagash, E. Detournay // Journal of Applied Mechanics. — 2005. — Апр. — Т. 72, № 6. — С. 916—928.
23. *Garagash, D. I.* Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off [Текст] / D. I. Garagash, E. Detournay, J. I. Adachi // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Т. 669. — С. 260—297.
24. *Garagash, D.* The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium [Текст] / D. Garagash, E. Detournay // J. Appl. Mech. — 2000. — Т. 67, № 1. — С. 183—192.
25. *Mitchell, S. L.* An Asymptotic Framework for the Analysis of Hydraulic Fractures: The Impermeable Case [Текст] / S. L. Mitchell, R. Kuske, A. P. Peirce // Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Март. — Т. 74, № 2. — С. 365—372.
26. *Detournay, E.* Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks [Текст] / E. Detournay // International Journal of Geomechanics. — 2004. — Т. 4, № 1. — С. 35—45.
27. *Dontsov, E.* A non-singular integral equation formulation to analyse multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures [Текст] / E. Dontsov, A. Peirce // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Т. 781.
28. *Dontsov, E.* A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics [Текст] / E. Dontsov, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — Т. 313. — С. 53—84.

29. *Dontsov, E. V.* A Comparison of Hydraulic Fracture Front Tracking Algorithms [Текст] / E. V. Dontsov, C. W. Hewson, M. W. McClure // 56th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. All Days. — 06.2022. — (U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium).
30. *Dontsov, E.* Representation of high resolution rock properties on a coarser grid for hydraulic fracture modeling [Текст] / E. Dontsov, R. Suarez-Rivera // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2021. — Т. 198. — С. 108144.
31. *Dontsov, E. V.* A homogenization approach for modeling a propagating hydraulic fracture in a layered material [Текст] / E. V. Dontsov // Geophysics. — 2017. — Т. 82, № 6. — MR153—MR162.
32. *Dontsov, E.* A continuous fracture front tracking algorithm with multi layer tip elements (MuLTiPEl) for a plane strain hydraulic fracture [Текст] / E. Dontsov // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2022. — Т. 217. — С. 110841.
33. *Dontsov, E.* A New Crack Propagation Algorithm That Enables Accurate Simulation of Propagation Across Thin Layers in a Practical Field-Scale Fracturing Model [Текст] / E. Dontsov, C. Hewson, M. McClure // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition. Day 2 Wed, February 02, 2022. — 02.2022. — (SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition).
34. A review of well integrity based on field experience at carbon utilization and storage sites [Текст] / J. Iyer [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2022. — Т. 113. — С. 103533.
35. *Anderson, S.* Prospects for carbon capture and storage technologies [Текст] / S. Anderson, R. Newell // Annu. Rev. Environ. Resour. — 2004. — Т. 29, № 1. — С. 109—142.
36. *Coninck, H. de.* Carbon dioxide capture and storage: issues and prospects [Текст] / H. de Coninck, S. M. Benson // Annual review of environment and resources. — 2014. — Т. 39, № 1. — С. 243—270.
37. *Loizzo, M.* Long-term well integrity [Текст] / M. Loizzo //. — 03.2014.
38. Why permeability to water is anomalously lower than that to many other fluids for cement-based material? [Текст] / C. Zhou [и др.] // Cement and Concrete Research. — 2017. — Т. 100. — С. 373—384.

39. *Li, Y.* A numerical study on the feasibility of evaluating CO₂ injection wellbore integrity through casing deformation monitoring [Текст] / Y. Li, R. Nygaard // Greenhouse Gases: Science and Technology. — 2018. — Т. 8, № 1. — С. 51–62.
40. Interface debonding driven by fluid injection in a cased and cemented wellbore: Modeling and experiments [Текст] / B. Lecampion [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2013. — Т. 18. — С. 208–223.
41. *Gray, K. E.* Finite-element studies of near-wellbore region during cementing operations: Part I [Текст] / K. E. Gray, E. Podnos, E. Becker // SPE drilling & completion. — 2009. — Т. 24, № 01. — С. 127–136.
42. Poromechanical behaviour of hardened cement paste under isotropic loading [Текст] / S. Ghabezloo [и др.] // Cement and Concrete research. — 2008. — Т. 38, № 12. — С. 1424–1437.
43. Rapid measurement of Biot effective stress coefficient for Class-G Oil Well Cements [Текст] / M. Meng [и др.] // ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — ARMA. 2020. — ARMA–2020.
44. Initial state of stress: the key to achieving long-term cement-sheath integrity [Текст] / J. Saint-Marc, A. Garnier, A.-P. Bois [и др.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 2008.
45. *Corina, A. N.* On the Evolution of Cement Sheath Stress in Wells During Curing [Текст] / A. N. Corina, A. Moghadam // Cement and Concrete Composites. — 2025. — С. 106102.
46. *Alsubaih, A.* Comprehensive analysis of cement integrity in CO₂ storage wells: Integrating thermomechanical and chemical effects [Текст] / A. Alsubaih, K. Sepehrnoori // Geoenergy Science and Engineering. — 2025. — С. 214152.
47. *Wang, W.* Three-dimensional analysis of cement sheath integrity around Wellbores [Текст] / W. Wang, A. D. Taleghani // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2014. — Т. 121. — С. 38–51.
48. *Feng, Y.* Development of a 3D numerical model for quantifying fluid-driven interface debonding of an injector well [Текст] / Y. Feng, X. Li, K. Gray // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2017. — Т. 62. — С. 76–90.

49. *Gao, Q.* Numerical investigation of fluid-driven debonding fracture propagation along wellbore interfaces during hydraulic fracturing [Текст] / Q. Gao, Y. Cheng // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. — 2018. — Т. 40, № 10. — С. 1215—1225.
50. Fluid-driven debonding of cement interfaces of an injector well: a coupled thermo–hydro–mechanical approach [Текст] / С. Gu [и др.] // Rock Mechanics and Rock Engineering. — 2024. — Т. 57, № 7. — С. 4513—4531.
51. Способ определения геометрии трещин ГРП с учётом разделения и взаимодействия потоков жидкости ГРП между трещинами [Текст] : патент на изобретение 2786303 С1 RU / Е. В. Шель [и др.] ; О. с ограниченной ответственностью "Газпромнефть-Технологические партнерства" (ООО "Газпромнефть-Технологические партнерства") (RU). — Заявл. 19.12.2022. — Заявка № 2022118046, заявл. 01.07.2022. Бюл. № 35.
52. Модуль расчёта многостадийного ГРП в слоистой по сжимающим напряжениям среде в рамках модели Planar 3D ILSA [Текст] : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020611805 RU / С. В. Головин [и др.] ; О. с ограниченной ответственностью «Газпромнефть Научно-Технический Центр» (ООО «Газпромнефть НТЦ») (RU). — Заявл. 11.02.2020. — Заявка № 2020610741, заявл. 28.01.2020. Бюл. № 2.
53. Модуль расчета геометрии плоской трещины ГРП в слоистой по сжимающим напряжениям среде по модели Planar 3D ILSA [Текст] : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020611608 RU / С. В. Головин [и др.] ; О. с ограниченной ответственностью «Газпромнефть Научно-Технический Центр» (ООО «Газпромнефть НТЦ») (RU). — Заявл. 05.02.2020. — Заявка № 2020610753, заявл. 28.01.2020. Бюл. № 2.
54. *Crouch, S.* Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering [Текст] / S. Crouch, A. M. Starfield. — Allen & Unwin, 1983.
55. *Eymard, R.* Finite volume methods [Текст] / R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin // Handbook of numerical analysis. — 2000. — Т. 7. — С. 713—1018.

56. *Wriggers, P.* Nonlinear finite element methods [Текст] / P. Wriggers. — Springer Science & Business Media, 2008.
57. The deal. II finite element library: Design, features, and insights [Текст] / D. Arndt [и др.] // Computers & Mathematics with Applications. — 2021. — Т. 81. — С. 407–422.
58. *Butcher, J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations [Текст] / J. C. Butcher. — John Wiley & Sons, 2016.
59. *Valov, A.* On the simultaneous growth of multiple hydraulic fractures emanating from an inclined well [Текст] / A. Valov // Journal of Physics: Conference Series. Т. 2057. — IOP Publishing. 2021. — С. 012079.
60. Thermoporoelastic model for the cement sheath failure in a cased and cemented wellbore [Текст] / A. Valov [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2022. — Т. 210. — С. 109916.
61. *Valov, A.* On the layer crossing problem for a semi-infinite hydraulic fracture [Текст] / A. Valov, E. Dontsov // Engineering Fracture Mechanics. — 2023. — Т. 293. — С. 109730.
62. An implicit level set algorithm for hydraulic fracturing with a stress-layer asymptote [Текст] / A. Valov [и др.] // Engineering Fracture Mechanics. — 2023. — Т. 292. — С. 109662.
63. *Valov, A.* Thermoporoelastic model for fluid-driven debonding of cement during CO₂ injection in a vertical well [Текст] / A. Valov, E. Dontsov, F. Zhang // Geomechanics for Energy and the Environment. — 2026. — С. 100785.
64. *Nelson, E.* Well Cementing [Текст] / E. Nelson, D. Guillot. — Schlumberger, 2006. — (Developments in petroleum science).
65. *Lavrov, A.* Physics and mechanics of primary well cementing [Текст] / A. Lavrov, M. Torsæter. — Springer, 2016.
66. Reservoir stimulation [Текст]. Т. 2 / M. J. Economides, K. G. Nolte [и др.]. — Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1989.

67. *Jeffrey, R.* Hydraulic Fracturing Applied to Inducing Longwall Coal Mine Goaf Falls [Текст] / R. Jeffrey, K. Mills // 4th North American rock mechanics symposium. All Days. — 07.2000. — (North America Rock Mechanics Symposium). — ARMA-2000-0423.
68. Hydraulic fracturing operations in mining: conceptual approach and DFN modeling example [Текст] / Т. Katsaga [и др.] // Mining Technology. — 2015. — Т. 124, № 4. — С. 255—266.
69. *Abou-Sayed, A.* Evaluation of Oily Waste Injection Below the Permafrost in Prudhoe Bay Field [Текст] / A. Abou-Sayed, D. Andrews, I. Buhidma // SPE California Regional Meeting. All Days. — 04.1989. — (SPE Western Regional Meeting).
70. *Frank, U.* Remediation of low permeability subsurface formations by fracturing enhancement of soil vapor extraction [Текст] / U. Frank, N. Barkley // Journal of hazardous materials. — 1995. — Т. 40, № 2. — С. 191—201.
71. Hydraulic fracturing to enhance injectivity and storage capacity of CO₂ storage reservoirs: Benefits and risks [Текст] / N. J. Huerta [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2020. — Т. 100. — С. 103105.
72. The influence of hydraulic fracturing on carbon storage performance [Текст] / P. Fu [и др.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2017. — Т. 122, № 12. — С. 9931—9949.
73. Hydraulic fracturing under high temperature and pressure conditions with micro CT applications: Geothermal energy from hot dry rocks [Текст] / W. Kumari [и др.] // Fuel. — 2018. — Т. 230. — С. 138—154.
74. Geothermal energy exploitation and power generation via a single vertical well combined with hydraulic fracturing [Текст] / G. Cui [и др.] // Journal of Energy Engineering. — 2022. — Т. 148, № 1. — С. 04021058.
75. *Akdas, S. B.* Analytical solutions for predicting and optimizing geothermal energy extraction from an enhanced geothermal system with a multiple hydraulically fractured horizontal-well doublet [Текст] / S. B. Akdas, M. Onur // Renewable Energy. — 2022. — Т. 181. — С. 567—580.

76. *Rubin, A. M.* Propagation of magma-filled cracks [Текст] / A. M. Rubin // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. — 1995. — Т. 23, № 1. — С. 287—336.
77. *Roper, S.* Buoyancy-driven crack propagation: the limit of large fracture toughness [Текст] / S. Roper, J. Lister // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Т. 580. — С. 359—380.
78. A review of mechanical models of dike propagation: Schools of thought, results and future directions [Текст] / E. Rivalta [и др.] // Tectonophysics. — 2015. — Т. 638. — С. 1—42.
79. A pseudo-3D model for hydraulic fracture growth in a layered rock [Текст] / X. Zhang [и др.] // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — Т. 115. — С. 208—223.
80. A model for hydraulic fracture growth across multiple elastic layers [Текст] / X. Zhang [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2018. — Т. 167. — С. 918—928.
81. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures [Текст] / S. Cherny [и др.] // International Journal of Fracture. — 2016. — Т. 201, № 2. — С. 181—211.
82. 3D coupled HM–XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference [Текст] / B. Paul [и др.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Т. 342. — С. 321—353.
83. *Baykin, A.* Application of the fully coupled planar 3D poroelastic hydraulic fracturing model to the analysis of the permeability contrast impact on fracture propagation [Текст] / A. Baykin, S. Golovin // Rock Mechanics and Rock Engineering. — 2018. — Т. 51. — С. 3205—3217.
84. *Shauer, N.* A three-dimensional Generalized Finite Element Method for simultaneous propagation of multiple hydraulic fractures from a wellbore [Текст] / N. Shauer, C. A. Duarte // Engineering Fracture Mechanics. — 2022. — Т. 265. — С. 108360.
85. *Shi, F.* A fully coupled hydromechanical XFEM model for the simulation of 3D non-planar fluid-driven fracture propagation [Текст] / F. Shi, J. Liu // Computers and Geotechnics. — 2021. — Т. 132. — С. 103971.

86. A 3D nonlinear fluid-solid coupling model of hydraulic fracturing for multilayered reservoirs [Текст] / H. Wang [и др.] // Petroleum science and technology. — 2012. — Т. 30, № 21. — С. 2273—2283.
87. The impact of the Near-Tip Logic on the Accuracy and Convergence Rate of Hydraulic Fracture Simulators Compared to Reference solutions [Текст] / B. Lecampion [и др.] // Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing / под ред. A. Bunger, J. McLennan, R. Jeffrey. — ISBN 978-953-51-1137-5, (Intech), 2013. — Гл. 43. С. 855—873.
88. *Napier, J.* An unstructured mesh algorithm for simulation of hydraulic fracture [Текст] / J. Napier, E. Detournay // Journal of Computational Physics. — 2020. — Т. 419. — С. 109691.
89. *Gordeliy, E.* Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM [Текст] / E. Gordeliy, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2013. — Т. 253. — С. 305—322.
90. *Gordeliy, E.* Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the XFEM [Текст] / E. Gordeliy, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2013. — Т. 266. — С. 125—143.
91. *Gordeliy, E.* Enrichment strategies and convergence properties of the XFEM for hydraulic fracture problems [Текст] / E. Gordeliy, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2015. — Т. 283. — С. 474—502.
92. *Peirce, A.* Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm [Текст] / A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2015. — Т. 283. — С. 881—908.
93. *Peirce, A.* Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation [Текст] / A. Peirce // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2016. — Т. 374, № 2078. — С. 20150423.
94. *Linkov, A. M.* Modern theory of hydraulic fracture modeling with using explicit and implicit schemes [Текст] / A. M. Linkov // arXiv preprint arXiv:1905.06811. — 2019.

95. *Peirce, A. P.* Interference fracturing: nonuniform distributions of perforation clusters that promote simultaneous growth of multiple hydraulic fractures [Текст] / A. P. Peirce, A. P. Bunger // SPE Journal. — 2015. — Т. 20, № 02. — С. 384—395.
96. Optimal perforation location and limited entry design for promoting simultaneous growth of multiple hydraulic fractures [Текст] / C. Cheng, A. P. Bunger, A. P. Peirce [и др.] // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2016.
97. Modeling the effect of turbulence on the simultaneous propagation of multiple parallel hydraulic fractures [Текст] / A. Peirce, E. Dontsov [и др.] // 51st us rock mechanics/geomechanics symposium. — American Rock Mechanics Association. 2017.
98. *Hossain, M.* Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes [Текст] / M. Hossain, M. Rahman, S. Rahman // Journal of petroleum science and engineering. — 2000. — Т. 27, № 3/4. — С. 129—149.
99. 3D lattice modeling of hydraulic fracture initiation and near-wellbore propagation for different perforation models [Текст] / L. Huang [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2020. — Т. 191. — С. 107169.
100. *Leblond, J.-B.* Crack paths in three-dimensional elastic solids. i: Two-term expansion of the stress intensity factors—Application to crack path stability in hydraulic fracturing [Текст] / J.-B. Leblond // International Journal of Solids and Structures. — 1999. — Т. 36, № 1. — С. 79—103.
101. *Wrobel, M.* On the influence of fluid rheology on hydraulic fracture [Текст] / M. Wrobel, G. Mishuris, P. Papanastasiou // International Journal of Engineering Science. — 2021. — Т. 158. — С. 103426.
102. *Moukhtari, F.-E.* A semi-infinite hydraulic fracture driven by a shear-thinning fluid [Текст] / F.-E. Moukhtari, B. Lecampion // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 838. — С. 573—605.
103. *Bessmertnykh, A. O.* A semi-infinite hydraulic fracture driven by a herschel–bulkley fluid [Текст] / A. O. Bessmertnykh, E. V. Dontsov // Journal of Applied Mechanics. — 2019. — Т. 86, № 12. — С. 121008.

104. A radial hydraulic fracture driven by a Herschel–Bulkley fluid [Текст] / E. A. Kanin [и др.] // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2021. — Т. 295. — С. 104620.
105. On averaging of toughness heterogeneity when modelling hydraulic fracture evolution [Текст] / G. Da Fies [и др.] // ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — ARMA. 2022. — ARMA–2022.
106. Effective toughness of disordered brittle solids: A homogenization framework [Текст] / M. Lebihain [и др.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2021. — Т. 153. — С. 104463.
107. *Peirce, A. P.* Uniform asymptotic Green’s functions for efficient modeling of cracks in elastic layers with relative shear deformation controlled by linear springs [Текст] / A. P. Peirce, H. Gu, E. Siebrits // International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. — 2009. — Т. 33, № 3. — С. 285–308.
108. *Spence, D.* Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow [Текст] / D. Spence, P. Sharp // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1985. — Т. 400, № 1819. — С. 289–313.
109. The crack tip region in hydraulic fracturing [Текст] / J. Desroches [и др.] // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. — 1994. — Т. 447, № 1929. — С. 39–48.
110. *Dontsov, E.* A semi-infinite hydraulic fracture with leak-off driven by a power-law fluid [Текст] / E. Dontsov, O. Kresse // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 837. — С. 210–229.
111. *Bessmertnykh, A.* Semi-Infinite Hydraulic Fracture Driven by a Sequence of Power-Law Fluids [Текст] / A. Bessmertnykh, E. Dontsov, R. Ballarini // Journal of Engineering Mechanics. — 2021. — Т. 147, № 10. — С. 04021064.
112. *Kovalyshen, Y.* Propagation of a semi-infinite hydraulic fracture in a poroelastic medium [Текст] / Y. Kovalyshen, E. Detournay // Poromechanics V: Proceedings of the Fifth Biot Conference on Poromechanics. — 2013. — С. 431–437.

113. A radial hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off [Текст] / E. A. Kanin [и др.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2020. — Т. 143. — С. 104062.
114. *Peirce, A.* Multiscale tip asymptotics for a deflating hydraulic fracture with leak-off [Текст] / A. Peirce, E. Detournay // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Т. 947. — A17.
115. *Peirce, A.* The arrest and recession dynamics of a deflating rectangular hydraulic fracture in a permeable elastic medium [Текст] / A. Peirce // Journal of Fluid Mechanics. — 2025. — Т. 1017. — A42.
116. Interface debonding as a controlling mechanism for loss of well integrity: Importance for CO2 injector wells [Текст] / B. Lecampion [и др.] // Energy Procedia. — 2011. — Т. 4. — С. 5219—5226.
117. Quantifying the risk of CO2 leakage through wellbores [Текст] / M. Loizzo [и др.] // SPE Drilling & Completion. — 2011. — Т. 26, № 03. — С. 324—331.
118. A soil mechanics approach to predict cement sheath behavior [Текст] / M. Thiercelin, C. Baumgarte, D. Guillot [и др.] // SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. — Society of Petroleum Engineers. 1998.
119. Cement design based on cement mechanical response [Текст] / M. Thiercelin [и др.] // SPE drilling & completion. — 1998. — Т. 13, № 04. — С. 266—273.
120. Cement sheath stress failure [Текст] / K. Goodwin, R. Crook [и др.] // SPE Drilling Engineering. — 1992. — Т. 7, № 04. — С. 291—296.
121. Cements for Long Term Isolation-Design Optimization by Computer Modelling and Prediction [Текст] / G. Di Lullo, P. Rae [и др.] // IADC/SPE Asia Pacific Drilling Technology. — Society of Petroleum Engineers. 2000.
122. Design approach to sealant selection for the life of the well [Текст] / M. Bosma [и др.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 1999.
123. *Fleckenstein, W.* Burst-induced stresses in cemented wellbores [Текст] / W. Fleckenstein, A. Eustes III, M. Miller // SPE Drilling & Completion. — 2001. — Т. 16, № 02. — С. 74—82.

124. Mechanical response and characterization of well cements [Текст] / A. Philippacopoulos, M. Berndt [и др.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 2002.
125. Analysis of horizontal casing integrity in the Valhall field [Текст] / P. Pattillo, T. Kristiansen [и др.] // SPE/ISRM Rock Mechanics Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2002.
126. *Zhang, W.* Numerical investigation of the influence of cement failure to micro-annuli generation [Текст] / W. Zhang, A. Eckert // ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — ARMA. 2018. — ARMA—2018.
127. *Zhang, W.* Micro-annulus generation under downhole conditions: Insights from three-dimensional staged finite element analysis of cement hardening and wellbore operations [Текст] / W. Zhang, A. Eckert // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2020. — Т. 12, № 6. — С. 1185—1200.
128. Efficient wellbore cement sheath design using the SRC (System Response Curve) method [Текст] / D. M. Fourmaintraux, A.-P. Bois, B. Fraboulet [и др.] // SPE Europec/EAGE Annual Conference. — Society of Petroleum Engineers. 2005.
129. Use of a mechanistic model to forecast cement-sheath integrity [Текст] / A.-P. Bois [и др.] // SPE Drilling & Completion. — 2012. — Т. 27, № 02. — С. 303—314.
130. *Chenevert, M.* Chemical shrinkage properties of oilfield cements [Текст] / M. Chenevert, B. Shrestha // SPE Drilling Engineering. — 1991. — Т. 6, № 01. — С. 37—231.
131. *Sabins, F.* Interrelationship between critical cement properties and volume changes during cement setting [Текст] / F. Sabins, D. Sutton // SPE Drilling Engineering. — 1991. — Т. 6, № 02. — С. 88—94.
132. Chemical shrinkage of oil well cement slurries [Текст] / H. Justnes [и др.] // Advances in cement research. — 1995. — Т. 7, № 26. — С. 85—90.
133. Shrinkage of oil well cement slurries [Текст] / K. Backe [и др.] // Journal of Canadian Petroleum Technology. — 1998. — Т. 37, № 09.

134. *Samudio, M.* Modelling of an oil well cement paste from early age to hardened state: hydration kinetics and poromechanical behaviour [Текст] : дис. ... канд. / Samudio Marcos. — Université Paris-Est, 2017.
135. Cement stress and microstructure evolution during curing in semi-rigid high-pressure environments [Текст] / M. Meng [и др.] // Cement and Concrete Research. — 2021. — Т. 149. — С. 106555.
136. *Moghadam, A.* Quantitative assessment of well leakage, part I: Cement stress evolution [Текст] / A. Moghadam, M. Loizzo // Geomechanics for Energy and the Environment. — 2024. — Т. 40. — С. 100586.
137. How to prevent loss of zonal isolation through a comprehensive analysis of microannulus formation [Текст] / A.-P. Bois [и др.] // SPE Drilling & Completion. — 2011. — Т. 26, № 01. — С. 13—31.
138. An innovative methodology for designing cement-sheath integrity exposed to steam stimulation [Текст] / A. Garnier [и др.] // SPE Drilling & Completion. — 2010. — Т. 25, № 01. — С. 58—69.
139. *Bachu, S.* Experimental assessment of brine and/or CO₂ leakage through well cements at reservoir conditions [Текст] / S. Bachu, D. B. Bennion // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2009. — Т. 3, № 4. — С. 494—501.
140. Large scale testing & modelling for cement zonal isolation of water injection wells [Текст] / E. Therond [и др.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition? — SPE. 2016. — D021S023R004.
141. *Vrålstad, T.* Digital cement integrity: A methodology for 3D visualization of cracks and microannuli in well cement [Текст] / T. Vrålstad, R. Skorpa // Sustainability. — 2020. — Т. 12, № 10. — С. 4128.
142. Predicting cement-sheath integrity with consideration of initial state of stress and thermoporoelastic effects [Текст] / M. Meng [и др.] // SPE Journal. — 2021. — Т. 26, № 06. — С. 3505—3528.
143. *Ghabezloo, S.* The effect of undrained heating on a fluid-saturated hardened cement paste [Текст] / S. Ghabezloo, J. Sulem, J. Saint-Marc // Cement and Concrete Research. — 2009. — Т. 39, № 1. — С. 54—64.

144. Cement integrity loss due to interfacial debonding and radial cracking during CO₂ injection [Текст] / H. Dou [и др.] // *Energies*. — 2020. — Т. 13, № 17. — С. 4589.
145. Wellbore characteristics that control debonding initiation and microannuli width in finite element simulations [Текст] / J. Wise [и др.] // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2020. — Т. 191. — С. 107157.
146. *Hosking, L. J.* Damage modeling of CO₂ injection well interfaces under coupled thermal, hydraulic and mechanical behavior [Текст] / L. J. Hosking, X. Zhou // *Deep Underground Science and Engineering*. — 2025.
147. *Liu, K.* Impact of casing eccentricity on cement sheath [Текст] / K. Liu, D. Gao, A. D. Taleghani // *Energies*. — 2018. — Т. 11, № 10. — С. 2557.
148. *Moghadam, A.* Quantitative assessment of well leakage, part II: Case studies for CCS [Текст] / A. Moghadam, S. Amiri // *Geomechanics for Energy and the Environment*. — 2025. — Т. 42. — С. 100675.
149. Key factors for determining groundwater impacts due to leakage from geologic carbon sequestration reservoirs [Текст] / S. A. Carroll [и др.] // *International Journal of Greenhouse Gas Control*. — 2014. — Т. 29. — С. 153—168.
150. Potential chemical impacts of CO₂ leakage on underground source of drinking water assessed by quantitative risk analysis [Текст] / T. Xiao [и др.] // *International Journal of Greenhouse Gas Control*. — 2016. — Т. 50. — С. 305—316.
151. *Gasda, S. E.* Spatial characterization of the location of potentially leaky wells penetrating a deep saline aquifer in a mature sedimentary basin [Текст] / S. E. Gasda, S. Bachu, M. A. Celia // *Environmental geology*. — 2004. — Т. 46, № 6. — С. 707—720.
152. Development of a hybrid process and system model for the assessment of wellbore leakage at a geologic CO₂ sequestration site [Текст] / H. S. Viswanathan [и др.] // *Environmental science & technology*. — 2008. — Т. 42, № 19. — С. 7280—7286.
153. *Reinicke, K.* Measurement strategies to evaluate the integrity of deep wells for CO₂ applications [Текст] / K. Reinicke, C. Fichter // *Underground Storage of CO₂ and Energy*. — 2010. — Т. 67.

154. Well completion and integrity evaluation for CO₂ injection wells [Текст] / M. Bai [и др.] // Renewable and Sustainable Energy Reviews. — 2015. — Т. 45. — С. 556—564.
155. *Bai, M.* A review on well integrity issues for CO₂ geological storage and enhanced gas recovery [Текст] / M. Bai, Z. Zhang, X. Fu // Renewable and Sustainable Energy Reviews. — 2016. — Т. 59. — С. 920—926.
156. Role of chemistry, mechanics, and transport on well integrity in CO₂ storage environments [Текст] / S. Carroll [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2016. — Т. 49. — С. 149—160.
157. *Nygaard, R.* Wabamun area co₂ sequestration project (wasp) [Текст] / R. Nygaard // Energy and environmental systems group (EES). — 2010.
158. *Zhang, M.* Review of integrity of existing wells in relation to CO₂ geological storage: What do we know? [Текст] / M. Zhang, S. Bachu // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2011. — Т. 5, № 4. — С. 826—840.
159. *Goodarzi, S.* Geomechanical Modelling and Analysis Wabamun Area CO₂ Sequestration Project (WASP) [Текст] / S. Goodarzi, A. T. Settari // Institute for Sustainable Energy, Environment and Economy. — 2009.
160. *Dusseault, M. B.* Casing shear: causes, cases, cures [Текст] / M. B. Dusseault, M. S. Bruno, J. Barrera // SPE Drilling & Completion. — 2001. — Т. 16, № 02. — С. 98—107.
161. *Loizzo, M.* The role of geological barriers in achieving robust well integrity [Текст] / M. Loizzo, B. Lecampion, S. Mogilevskaya // Energy Procedia. — 2017. — Т. 114. — С. 5193—5205.
162. *Rice, J. R.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture [Текст] / J. R. Rice // Fracture: an advanced treatise. — 1968. — Т. 2. — С. 191—311.
163. *Carter, E.* Optimum fluid characteristics for fracture extension [Текст] / E. Carter // Howard GC, Fast CR, editors. Drilling and production practices. — 1957. — С. 261—270.
164. *Ortega, J. M.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables [Текст]. Т. 30 / J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt. — Siam, 1970.
165. *Moré, J. J.* The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory [Текст] / J. J. Moré // Numerical analysis. — Springer, 1978. — С. 105—116.

166. *Fan, J.* The modified Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations with cubic convergence [Текст] / J. Fan // Mathematics of Computation. — 2012. — Т. 81, № 277. — С. 447—466.
167. *Dormand, J.* A family of embedded Runge-Kutta formulae [Текст] / J. Dormand, P. Prince // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1980. — Т. 6, № 1. — С. 19—26.
168. *Macdonald, C. B.* The Predicted Sequential Regularization Method for Differential-Algebraic Equations [Текст] : дис. . . . канд. / Macdonald Colin Barr. — Acadia University, 2001.
169. *Adachi, J. I.* Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers [Текст] / J. I. Adachi, E. Detournay, A. P. Peirce // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2010. — Т. 47, № 4. — С. 625—639.
170. *Lecampion, B.* An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag [Текст] / B. Lecampion, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2007. — Т. 196, № 49—52. — С. 4863—4880.
171. *Detournay, E.* Mechanics of hydraulic fractures [Текст] / E. Detournay // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2016. — Т. 48. — С. 311—339.
172. *Lecampion, B.* Numerical methods for hydraulic fracture propagation: A review of recent trends [Текст] / B. Lecampion, A. Bungier, X. Zhang // Journal of natural gas science and engineering. — 2018. — Т. 49. — С. 66—83.
173. Solution of crack problems: the distributed dislocation technique [Текст]. Т. 44 / D. A. Hills [и др.]. — Springer Science & Business Media, 2013.
174. *Detournay, E.* On the moving boundary conditions for a hydraulic fracture [Текст] / E. Detournay, A. Peirce // International Journal of Engineering Science. — 2014. — Т. 84. — С. 147—155.
175. *Peirce, A.* A dual mesh multigrid preconditioner for the efficient solution of hydraulically driven fracture problems [Текст] / A. Peirce, E. Siebrits // International journal for numerical methods in engineering. — 2005. — Т. 63, № 13. — С. 1797—1823.

176. *Peirce, A.* Localized Jacobian ILU preconditioners for hydraulic fractures [Текст] / A. Peirce // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2006. — Т. 65, № 12. — С. 1935—1946.
177. *Malladi, R.* Level set and fast marching methods in image processing and computer vision [Текст] / R. Malladi, J. A. Sethian // Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing. Т. 1. — IEEE. 1996. — С. 489—492.
178. *Sethian, J. A.* A fast marching level set method for monotonically advancing fronts [Текст] / J. A. Sethian // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1996. — Т. 93, № 4. — С. 1591—1595.
179. *Bærentzen, J. A.* On the implementation of fast marching methods for 3D lattices [Текст] : тех. отч. / J. A. Bærentzen ; Informatics ; Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU. — Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby, 2001.
180. *Sethian, J. A.* Theory, algorithms, and applications of level set methods for propagating interfaces [Текст] / J. A. Sethian // Acta numerica. — 1996. — Т. 5. — С. 309—395.
181. *Zia, H.* Impact of the anisotropy of fracture toughness on the propagation of planar 3D hydraulic fracture [Текст] / H. Zia, B. Lecampion, W. Zhang // International Journal of Fracture. — 2018. — Т. 211. — С. 103—123.
182. *Madyarova, M. V.* Fluid-driven penny-shaped fracture in elastic medium [Текст] : дис. ... канд. / Madyarova Mary V. — University of Minnesota, 2003.
183. *Dontsov, E.* An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off [Текст] / E. Dontsov // Royal Society open science. — 2016. — Т. 3, № 12. — С. 160737.
184. *Savitski, A.* Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions [Текст] / A. Savitski, E. Detournay // International journal of solids and structures. — 2002. — Т. 39, № 26. — С. 6311—6337.
185. Numerical investigation into the simultaneous growth of two closely spaced fluid-driven fractures [Текст] / X. Chen [и др.] // SPE Journal. — 2019. — Т. 24, № 01. — С. 274—289.

186. *Shovkun, I.* Propagation of toughness-dominated fluid-driven fractures in reactive porous media [Текст] / I. Shovkun, D. N. Espinoza // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2019. — Т. 118. — С. 42—51.
187. A comparison of numerical and experimental results of hydraulic fracture growth into a zone of lower confining stress [Текст] / R. Wu [и др.] // The 42nd US rock mechanics symposium (USRMS). — American Rock Mechanics Association. 2008.
188. *Dontsov, E.* Analysis of a constant height hydraulic fracture [Текст] / E. Dontsov // Mechanics of Hydraulic Fracturing: Experiment, Model, and Monitoring. — 2022. — С. 127—139.
189. *Dontsov, E.* Comparison of toughness propagation criteria for blade-like and pseudo-3D hydraulic fractures [Текст] / E. Dontsov, A. Peirce // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Т. 160. — С. 238—247.
190. *Crump, J.* Effects of perforation-entry friction on bottomhole treating analysis [Текст] / J. Crump, M. Conway // J. Petroleum Technol. — 1988. — Т. SPE 15474. — С. 1041—1049.
191. *Watson, G.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions [Текст] / G. Watson. — Cambridge University Press, 1995. — (Cambridge Mathematical Library).
192. *Gradshteyn, I. S.* Table of Integrals, Series, and Products [Текст] / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik ; под ред. A. Jeffrey, D. Zwillinger. — 7th. — Amsterdam : Academic Press, 2007. — С. xlviii, 1171.
193. *Oldenburg, C. M.* Joule-Thomson cooling due to CO₂ injection into natural gas reservoirs [Текст] / C. M. Oldenburg // Energy Conversion and Management. — 2007. — Т. 48, № 6. — С. 1808—1815. — Geologic Carbon Sequestration and Methane Hydrates Research from the TOUGH Symposium 2006.
194. *Feng, Y.* Well integrity analysis: 3D numerical modeling of cement interface debonding [Текст] / Y. Feng, E. Podnos, K. Gray // ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. — ARMA. 2016. — ARMA—2016.

195. Identification and qualification of shale annular barriers using wireline logs during plug and abandonment operations [Текст] / S. Williams [и др.] // SPE/IADC drilling conference and exhibition. — SPE. 2009. — SPE—119321.
196. *Timoshenko, S.* Theory of Elasticity [Текст] / S. Timoshenko, J. Goodier. — McGraw-Hill, 1969. — (Engineering mechanics series).
197. *Kirsch, E. G.* Die Theorie der Elastizität und die Ergebnisse der Festigkeitslehre [Текст] / E. G. Kirsch // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. — 1898. — T. 42. — С. 797—807.
198. *Hazrati Aghchai, M.* On analytic solutions of elastic net displacements around a circular tunnel [Текст] / M. Hazrati Aghchai, P. Moarefvand, H. Salari Rad // Journal of Mining and Environment. — 2020. — T. 11, № 2. — С. 419—432.
199. *Guo, B.* Chapter 14 - Hydraulic Fracturing [Текст] / B. Guo, X. Liu, X. Tan // Petroleum Production Engineering (Second Edition) / под ред. B. Guo, X. Liu, X. Tan. — Second Edition. — Boston : Gulf Professional Publishing, 2017. — С. 389—501.
200. *Batchelor, G. K.* An introduction to fluid dynamics [Текст] / G. K. Batchelor. — Cambridge university press, 2000.
201. *Cramer, D.* The application of limited-entry techniques in massive hydraulic fracturing treatments [Текст] / D. Cramer // SPE Oklahoma City Oil and Gas Symposium/Production and Operations Symposium. — SPE. 1987. — SPE—16189.
202. *Sarvaramini, E.* Breakdown of a pressurized fingerlike crack in a permeable solid [Текст] / E. Sarvaramini, D. I. Garagash // Journal of Applied mechanics. — 2015. — T. 82, № 6. — С. 061006.
203. *Griffith, A. A.* VI. The phenomena of rupture and flow in solids [Текст] / A. A. Griffith // Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character. — 1921. — T. 221, № 582—593. — С. 163—198.
204. *Coussy, O.* Poromechanics [Текст] / O. Coussy. — John Wiley & Sons, 2004.
205. *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits [Текст] / D. S. Dugdale // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1960. — T. 8, № 2. — С. 100—104.

206. *Barenblatt, G. I.* The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture [Текст] / G. I. Barenblatt // Advances in applied mechanics. — 1962. — Т. 7. — С. 55—129.
207. *Carrier, B.* Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model [Текст] / B. Carrier, S. Granet // Engineering fracture mechanics. — 2012. — Т. 79. — С. 312—328.
208. *Wriggers, P.* Computational contact mechanics [Текст] / P. Wriggers // Computational Mechanics. — 2003. — Т. 32, № 1/2. — С. 141—141.
209. Experimental and theoretical study of the restrained shrinkage cracking of early age well cement [Текст] / Y. Zhang [и др.] // Construction and Building Materials. — 2020. — Т. 262. — С. 120368.
210. Fracture opening or self-sealing: Critical residence time as a unifying parameter for cement–CO₂–brine interactions [Текст] / J.-P. L. Brunet [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2016. — Т. 47. — С. 25—37.
211. Experimental evidence for self-limiting reactive flow through a fractured cement core: Implications for time-dependent wellbore leakage [Текст] / N. J. Huerta [и др.] // Environmental science & technology. — 2013. — Т. 47, № 1. — С. 269—275.
212. Assessment of leakage pathways along a cemented annulus [Текст] / L. Deremble [и др.] // SPE international conference on CO₂ capture, storage, and utilization. — SPE. 2010. — SPE—139693.
213. 3D micro-structural changes of an artificial flow channel in wellbore cement under geologic CO₂ storage conditions: Combined effect of effective stress and flow [Текст] / M. Gan [и др.] // Construction and Building Materials. — 2022. — Т. 325. — С. 126761.
214. Effect of stress-dependent microannulus aperture on well leakage [Текст] / M. Meng [и др.] // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2024. — Т. 16, № 6. — С. 1967—1976.
215. *Wasch, L.* Injection of a CO₂-Reactive Solution for Wellbore Annulus Leakage Remediation [Текст] / L. Wasch, M. Koenen // Minerals. — 2019. — Т. 9, № 10.

216. Taylor bubble formation and flowing in a straight millimetric channel with a cross-junction inlet geometry Part II: Gas-liquid mass transfer [Текст] / M. Mei [и др.] // Chemical Engineering Science. — 2022. — Т. 258. — С. 117752.
217. Numerical analysis on heat transfer characteristics of supercritical CO₂ in heated vertical up-flow tube [Текст] / C. Yan [и др.] // Materials. — 2020. — Т. 13, № 3. — С. 723.
218. Wang, J. Improved equation of CO₂ Joule–Thomson coefficient [Текст] / J. Wang, Z. Wang, B. Sun // Journal of CO₂ Utilization. — 2017. — Т. 19. — С. 296–307.