

«УТВЕРЖДАЮ»  
Директор ФГБНУ Федеральный  
исследовательский центр  
«Красноярский научный центр  
Сибирского отделения  
Российской академии наук»  
член-корреспондент РАН  
Шнегт Александр Артурович



« 11 » ноября 2025 г.

### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный  
исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения  
Российской академии наук»

на диссертационную работу Николаевой Натальи Афанасьевны  
«Краевые задачи о равновесии упругих тел и пластин с тонкими включениями и  
трещинами», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук по специальности

1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

**Актуальность темы исследования.** В современных условиях интенсивного развития науки и технологий наблюдается активное расширение применения композитных материалов в различных отраслях промышленности. Особую значимость приобретает использование армирующих волоконных элементов, а именно включений различного назначения. Они существенно улучшают эксплуатационные характеристики композитов. Возникает необходимость в теоретическом обосновании методов анализа свойств и построении математических моделей такого рода материалов. При этом краевые задачи выступают одним из фундаментальных инструментов математического моделирования. Таким образом, диссертационное исследование Николаевой Н.А. представляет собой актуальную научную работу, направленную на решение значимых теоретических задач современной науки.

**Анализ содержания диссертационной работы.** Диссертационное исследование имеет последовательную структуру, которая соответствует требованиям к оформлению

научных работ. Работа изложена на 119 страницах и включает в себя введение, основную часть, состоящую из двух глав, заключение и список использованных источников.

**Введение** содержит полный набор обязательных элементов научного исследования: обоснование актуальности темы, обзор литературы по тематике, формулировку цели и задач, определение объекта и предмета исследования, описание методологии и других ключевых характеристик работы.

Основной текст работы представлен двумя главами, каждая из которых посвящена конкретному аспекту изучаемой проблемы.

**Первая глава** диссертации посвящена анализу в двумерной постановке задач о сопряжении тонких включений в упругих телах. Рассматриваются задачи, в которых наличие трещины приводит к сопряжению включений в точке их пересечения. Оригинальным аспектом является задание граничных условий непроникания на берегах трещины в виде системы уравнений и неравенств, гарантирующих непроникание конструктивных элементов друг в друга. Проводится подробный анализ дифференциальной постановки, содержащей условия сопряжения тонких включений. Теоретическая значимость главы заключается в развитии существующих представлений о задачах сопряжения и расширении круга изучаемых проблем.

**Во второй главе** анализируется полная модель пластины Кирхгофа–Лява с плоским жёстким включением при наличии сквозной трещины. Значительные трудности вызывает постановка нелинейных краевых условий типа неравенств на берегах трещины, поскольку при учёте вертикальных и горизонтальных перемещений точек срединной поверхности данное условие приобретает сложную структуру. Автором изучены различные конфигурации расположения плоского жёсткого включения в пластину с дефектами типа трещин. Исследования данной главы создают основу для дальнейших научных разработок в этой области.

В целом, **в основных двух главах** диссертационной работы материал изложен кратко и в то же время доступно, на высоком научном уровне. Автор демонстрирует хорошую математическую квалификацию и способность к научному анализу исследуемой проблематики.

**Заключительный раздел** работы содержит обобщающие выводы и практические рекомендации, логически вытекающие из проведённого исследования. К диссертации прилагается список использованных литературных источников.

**Новизна полученных результатов.** Новизна представленного исследования заключается в анализе новых задач, постановка которых ранее не исследовалась, а именно:

задач о сопряжении тонких включений при наличии трещин в упругих телах и анализе равновесия пластин Кирхгофа–Лява с тонкими плоскими включениями.

**Научная и практическая значимость результатов.** Научная значимость результатов исследования заключается в развитии теоретических основ механики деформируемого твёрдого тела и расширении класса исследуемых задач в этой области. Практическая значимость работы состоит в возможности применения полученных результатов при расчёте и проектировании конструкций с учётом дефектов в виде включений и трещин, а также при их численном моделировании.

**Рекомендации по использованию результатов и выводов.**

Результаты работы могут быть полезны специалистам в области теоретических и прикладных аспектов механики композитных материалов и конструкций.

Полученные в работе результаты исследований рекомендуются к использованию в научных лабораториях ведущих российских учреждений, таких как Механико-математический факультет и Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики при Нижегородском государственном университете имени Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Дальневосточный федеральный университет, Математический институт Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Институт математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институт проблем машиностроения РАН, Институт проблем машиноведения РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения РАН».

**Научная обоснованность** полученных результатов подтверждаются 14 научными публикациями по теме исследования, среди которых 5 статей опубликованы в рецензируемых научных журналах. Результаты исследования докладывались на 11 конференциях и трёх научных семинарах, что подтверждает их **достоверность**.

**Соответствие автореферата основным положениям диссертации.** Автореферат диссертации полностью соответствует содержанию диссертационного исследования. В нём точно и полно представлены ключевые характеристики работы, основные положения и выводы, которые выносятся на защиту.

### **Вопросы и замечания.**

1. На рисунках 1.1 и 1.2 приняты одинаковые обозначения для векторов нормали к жесткому включению и к параллельным берегам сквозной трещины, поэтому не ясно, какой этих векторов участвует в формулировке третьего условия в (1.6). Почему направление, в котором исключается проникание включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  друг в друга, связано с направлением нормали, а не с касательной в точке сопряжения?

2. В рассматриваемых задачах включение (жесткое или упругое) до приложения внешних нагрузок разделено трещиной на две части, контактирующие между собой и с окружающей упругой средой. Альтернативная постановка, имеющая важное прикладное значение в механике композитов и, в частности, в строительной механике, состоит в том, что армирующее включение сохраняет свою целостность, обеспечивая тем самым несущую способность конструкции. Можно ли результаты диссертации распространить на такую постановку?

3. В задаче о равновесии упругой пластины с жестким включением, выходящим под нулевым углом на границу области  $\Omega$ , функции из пространства  $H^2(\Omega)$  с однородными граничными условиями можно продолжить нулём на любую более широкую область, на которой выполняется неравенство Корна. При этом задача приведётся к вариационному неравенству с дополнительным ограничением:  $u = 0$  в  $\Omega$ . По-видимому, такая техника позволит получить более простое доказательство разрешимости, чем то, которое получено в диссертационной работе с помощью метода фиктивных областей.

4. При оформлении работы допущены незначительные погрешности. Например, ссылки [69] и [70] в списке литературы относятся к одной и той же статье.

Указанные замечания не снижают общей высокой оценки работы, поскольку в основном их можно рассматривать как пожелания к продолжению исследований по этому важному научному направлению.

### **Заключение.**

Представленное исследование является завершённой научно-квалификационной работой, выполненной на актуальную тему на высоком научном уровне. Диссертация «Краевые задачи о равновесии упругих тел и пластин с тонкими включениями и трещинами» соответствует требованиям пп. 9-14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842 (в действующей редакции), предъявляемым к диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Николаева Наталья Афанасьевна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Отзыв подготовлен главным научным сотрудником, заведующим отделом Вычислительной механики деформируемых сред, руководителем отдела регионального научно-образовательного математического центра «Красноярский математический центр» Садовским Владимиром Михайловичем.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании семинара Красноярского математического центра по прикладной математике, протокол № 10 от «22» октября 2025 г.

Главный научный сотрудник,  
заведующий отделом Вычислительной механики деформируемых сред,  
руководитель отдела регионального научно-образовательного математического центра «Красноярский математический центр»,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, член- корреспондент РАН  Садовский Владимир Михайлович

Подпись Садовского Владимира Михайловича удостоверяю:  
ученый секретарь ФИЦ КНЦ СО РАН  
к.ф.-м.н.



П.Г. Шкуряев

Телефон: +7 (391) 243-96-33

**Сведения о ведущей организации:**

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Адрес: 660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50.

Телефон: +7 (391) 243-45-12.

Email: fic@ksc.krasn.ru