

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение Северо – Восточный федеральный университет им.
М.К.Аммосова

На правах рукописи



Николаева Наталья Афанасьевна

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ
ТЕЛ И ПЛАСТИН С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ
И ТРЕЩИНАМИ**

1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Хлуднев Александр Михайлович

Якутск — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	4
 Глава 1. Задачи о сопряжении тонких упругих включений	
в упругих телах при наличии трещины	16
1.1 Задача о сопряжении тонких жестких включений	18
1.1.1 Случай без отслоения	19
1.1.2 Случай с отслоением	26
1.2 Сопряжение тонких упругих включений Бернулли–Эйлера .	32
1.2.1 Случай без отслоения	33
1.2.2 Предельный переход по параметру жесткости	39
1.2.3 Случай с отслоением	42
1.3 Сопряжение жесткого и упругого включений	49
1.3.1 Постановка задачи	49
1.3.2 Предельный переход	56
1.4 О сопряжении тонких упругих включений Тимошенко . . .	60
1.4.1 Случай без отслоения	61
1.4.2 Предельный переход по параметру жесткости	69
1.4.3 Случай с отслоением	72
 Глава 2. Пластина Кирхгофа–Лява с плоским жестким	
включением	78
2.1 Задача о равновесии упругой пластины с плоским жестким включением	79
2.1.1 Постановка задачи. Дифференциальная формулировка	79
2.1.2 Вариационная формулировка	83
2.1.3 Эквивалентность	84
2.2 Контактная задача для упругой пластины с плоским жестким включением	91
2.2.1 Постановка задачи	92

2.2.2	Существование и единственность решения	94
2.2.3	Эквивалентность вариационной и дифференциальной формулировок	96
2.3	Плоское жесткое включение в упругой пластине, выходящее на границу под нулевым углом	98
2.3.1	Постановка задачи	98
2.3.2	Эквивалентность двух формулировок	101
2.3.3	Разрешимость задачи	103
Заключение		109
Список литературы		111

Введение

Актуальность темы исследования. С каждым годом наблюдается рост распространенности и востребованности композиционных материалов с тонкими включениями в инженерных приложениях. Это создает необходимость в обосновании теоретических методов анализа их свойств и требует разработки и уточнения математических моделей. Моделирование процессов в форме краевых задач представляет собой важный инструмент в современных инженерных и научных исследованиях. Эти задачи позволяют эффективно описывать и анализировать сложные системы, что делает их актуальными в контексте требований науки и техники, а также в решении практических проблем в различных областях.

Изучение задач о равновесии упругих тел с включениями, особенно в условиях наличия трещин, требует уточнения существующих моделей. Трещины, возникающие по различным причинам, значительно усложняют задачу, так как они влияют на распределение напряжений и деформаций. Это требует более точного подхода к моделированию, способного учитывать нелинейность, вызванную различными параметрами и свойствами матрицы и включений. В дополнение к вышеизложенному, важно рассмотреть взаимосвязь между включениями и матрицей, а также влияние трещин на механические характеристики материалов. Таким образом, актуальность изучения задач о равновесии упругих тел с тонкими включениями и трещинами заключается в необходимости уточнения математических моделей и обоснования теоретических методов анализа их свойств.

Обзор исследований по теме диссертации. В исследовании задач равновесия упругих тел с включениями и трещинами ключевую роль играет выбор краевых условий на берегах трещины. В классическом подходе на берегах трещины задаются линейные краевые условия. Эти условия имеют вид равенства. В основном это выражается в равенстве компонентов вектора перемещений заданным функциям или, альтернативно, в равенстве компонентов тензора напряжений, умноженных на компоненты

вектора нормали к поверхности трещины, заданным функциям. Задачи теории трещин с классическими краевыми условиями широко изучены (см., например, [1–7]). Однако применение линейных краевых условий в моделировании трещин нередко приводит к физически противоречивым ситуациям, когда противоположные берега трещины могут проникать друг в друга. Это существенно снижает точность моделей в прикладных задачах. Чтобы предотвратить это, в формулировке задач можно задать нелинейные краевые условия, которые имеют вид неравенств. Данные условия относятся к типу условий Синьорини. В 1933 году, исследуя задачу о контакте упругого тела с жестким препятствием, Эти условия относятся к типу условий Синьорини. В 1933 году, исследуя задачу о контакте упругого тела с жестким препятствием, А. Синьорини предложил использовать ограничения в виде неравенств на границе контакта. Впоследствии, в монографии [8], впервые были представлены исследования, касающиеся этой задачи, а также сформулированы необходимые и достаточные условия существования ее решения. Важно подчеркнуть, что эта работа стала отправной точкой для развития теории вариационных неравенств, которая на сегодняшний день достаточно глубоко исследована [9–12]. В работах [13–16] представлены примеры вариационных задач, которые эквивалентны краевым, а также их физическая интерпретация. В частности, в работе [13] была получена система краевых условий для задачи Синьорини, которая включает как уравнения, так и неравенства, и установлена эквивалентность краевой задачи вариационному неравенству. Исследования свойств решений краевых задач для эллиптических операторов, а также их регулярности вблизи границы представлены в работах [17;18]. Результаты, касающиеся гладкости решений некоторых вариационных неравенств, можно найти в источниках [19–21]. Вопросы численного анализа вариационных неравенств и связанных с ними задач обсуждаются в работах [22–26].

Систематическое изучение краевых задач о равновесии упругих тел с трещинами при краевых условиях взаимного непроникания берегов было положено в 1992 г. В настоящее время существует широкий спектр научных публикаций, в которых была развита математическая постановка данного класса задач. Подробный обзор этих исследований

и ссылки на соответствующие работы можно найти в монографиях [27; 28]. Одним из важных аспектов этих исследований является использование указанных нелинейных краевых условий для анализа отслоения тонких включений, поскольку отслоение подразумевает формирование трещины между включением и матрицей материала. Широкий класс задач данного направления можно разделить по способу моделирования тонких включений, расположенных в упругих телах.

Исследования математических моделей тонких жестких включений с возможным отслоением в упругих телах берут свое начало с публикации [29], в которой рассматриваются различные случаи расположения включений и трещин. В дальнейшем, в работе [30] была рассмотрена задача об изгибе неоднородной анизотропной пластины, содержащей тонкое жесткое включение как без отслоения, так и с отслоением. В работах [31; 32] представлены исследования, посвященные задачам оптимального управления параметрами включения, а в [33] приведено численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением. В [34–37] рассматриваются различные контактные задачи. Исследования тонких жестких включений в двумерных вязкоупругих телах представлены в работах [38; 39], что подчеркивает сложность и многообразие поведения таких систем. Задачи сопряжения тонких жестких включений в упругих телах изучены в работах [40–43]. В частности, работа [40] посвящена анализу задачи сопряжения между тонким жестким и упругим включением Бернулли-Эйлера, где были установлены условия существования решений как для случая с отслоением, так и без него. Важным результатом стали различные эквивалентные формулировки задачи и анализ предельных случаев. В работе [41] исследуется взаимосвязь существующих математических моделей и предельные переходы по параметрам, характеризующим жесткость тонких включений. В [42] рассмотрены сопряжения тонких жестких, а также упругих включений Бернулли-Эйлера, возникающие в результате пересечения с трещиной в упругом теле, а в [43] — их поведение в случае отслоения.

Модель Бернулли-Эйлера является одной из ключевых для описания поведения тонких упругих включений в упругом теле.

В работе [44] представлены вариационные и дифференциальные формулировки задачи равновесия с тонким включением Бернулли-Эйлера и проанализировано анизотропное поведение балки. Задача равновесия двумерного вязкоупругого тела с таким включением рассмотрена в [45], а в [46] проанализированы задачи для двумерных упругих тел с двумя тонкими включениями при наличии повреждений. Исследования равновесия пластины Кирхгофа-Лява, сопряженной с препятствием и включением Бернулли-Эйлера, опубликованы в [47]. В работе [48] изучается контакт упругого тела с балкой Бернулли и асимптотика решений при изменении параметров жесткости и длины балки. Сингулярные интегралы энергии, не зависящие от траектории, для тел с включениями Эйлера—Бернулли рассмотрены в [49], а задача об изгибе конструкции, состоящей из пластины Тимошенко и тонкой балки Эйлера-Бернулли – в [50]. Вопросы сопряжения тонких упругих включений Бернулли-Эйлера в двумерных упругих телах обсуждены в работах [40–43; 51]. В частности, в работе [51] анализируется задача сопряжения включений Эйлера—Бернулли и Тимошенко в двумерном упругом теле, где доказано существование решений, обсуждены эквивалентные формулировки задачи и исследована сходимость параметра жесткости упругих включений к бесконечности и нулю. Также отметим исследования, касающиеся полужестких включений в упругих телах [52–54].

Математические модели тонких упругих включений Тимошенко с возможным отслоением сформулированы в работах [55; 56]. В [57] исследована зависимость свойств этих включений от физических параметров, а также рассмотрены анизотропные включения с параметрами, стремящимися к нулю и бесконечности. В работе [58] получена формула Гриффитса. Анализ случая, когда включение пересекает внешнюю границу тела под нулевым углом, представлен в [59]. Численные методы решения краевых задач с включениями Тимошенко разработаны и апробированы в [60]. Работы [51; 61–63] посвящены задачам сопряжения в упругих телах. В [61] рассматривается сопряжение тонкого упругого включения Тимошенко с тонким жестким включением в двумерном теле, где доказано существование решений, представлены эквивалентные формулировки и проанализирована

сходимость параметра жесткости. В [62] анализируется сопряжение упругого включения Тимошенко с полужестким включением, а в [63] — сопряжение тонких упругих включений Тимошенко, возникающих при пересечении с трещиной.

Отдельно отметим работы, где обсуждаются общие и всесторонние вопросы сопряжения математических моделей линейной теории упругости. В [64] на основе бигармонического уравнения сформулированы условия сопряжения для стержней и пластин, что послужило теоретической основой для последующих исследований. В последующих публикациях [65–67] рассмотрены разнообразные задачи сопряжения линейных структур и стержней, расширяющие представления о механическом взаимодействии элементов конструкции. Исследования [68–70] фокусируются на условиях сопряжения в рамках теории упругих балок. Сопряжения линейных включений и трещин рассмотрены в [71–73].

Часть данной диссертации посвящена исследованию задачи о равновесии пластины Кирхгофа-Лява с тонким жестким включением при наличии отслоения. В работах [29; 30; 35; 36; 74–76] рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с моделированием, анализом и оптимальным управлением пластины Кирхгофа-Лява, содержащей тонкие жесткие включения и трещины, с использованием нелинейных краевых условий. Так, в работе [30] изучается изгиб неоднородной анизотропной пластины с тонким жестким включением как в случае отсутствия, так и при наличии отслоения. Статья [29] посвящена анализу упругой пластины с отслоившимися тонкими жесткими включениями, где доказано существование решений для различных положений включения. В работе [74] решается задача оптимального управления для эллиптической системы уравнений, описывающей равновесие пластины Кирхгофа-Лява с отслоившимся тонким жестким включением; при этом доказывается существование экстремальной формы включения. В статье [75] устанавливается связь между задачами равновесия пластины с отслоившимися тонкими и объемными включениями. Доказательство разрешимости задачи равновесия упругой пластины Кирхгофа-Лява с тонким жестким включением, выходящим на границу под нулевым углом и частично контактирующим с недеформируемым

телом, приведено в статье [35]. В работе [76] проведён анализ равновесия пластины Кирхгофа-Лява, содержащей как объемное, так и плоское жесткое включение. В ходе исследования доказана однозначная разрешимость соответствующих задач, а также разрешимость задачи оптимального управления. В статье [36] получены дифференциальные формулировки задачи равновесия пластины с плоским жестким включением.

В данной диссертации представлен ряд значимых результатов, среди которых одним из ключевых является обоснование метода фиктивных областей [77]. Далее будет представлен литературный обзор, который освещает существующие исследования и подходы в этой области.

Метод фиктивных областей впервые был сформулирован в работе [78] как метод приближенного решения краевых задач в сложных областях с помощью ЭВМ. В книге [79] представлен подробный анализ литературы, посвященной развитию этого метода, а также его теоретическое обоснование и практическое применение при решении разнообразных линейных задач математической физики. Метод фиктивных областей и его применение к исследованию задач с нелинейными краевыми условиями подробно рассмотрены в работах [35; 77; 80–88]. В числе первых исследований в данном направлении следует выделить работу [80], где представлено обоснование метода фиктивных областей применительно к эллиптическому уравнению с нелинейными краевыми условиями типа Синьорини. Позже данный подход получил дальнейшее развитие и анализ в исследованиях [81; 82], где рассматриваются краевые задачи с односторонними граничными условиями. В работах [83; 84] представлены результаты применения метода фиктивных областей для доказательства существования решения задач о равновесии упругих тел с трещинами, которые выходят на внешнюю границу под нулевым углом. В исследовании [85] данный метод используется для анализа задачи о деформации трансверсально-изотропных пластин модели Тимошенко. Также следует отметить статью [86], где с помощью метода фиктивных областей решается задача оптимального управления для краевой задачи о квазистатическом деформировании линейного вязкоупругого тела с трещиной. Что касается применения метода фиктивных областей в полной модели пластины Кирхгофа-Лява, можно

обратиться к работам [35; 77; 87].

Цель и задачи исследования. Основная цель данного диссертационного исследования состоит в строгом математическом обосновании и анализе краевых задач о равновесии упругих тел, содержащих тонкие включения и трещины. Для достижения цели необходимо было решить следующие задачи:

- 1) исследовать задачи о сопряжении различных типов тонких включений в двумерных упругих телах при наличии трещины и получить соответствующие дифференциальные постановки, содержащие условия сопряжения;
- 2) провести анализ предельных переходов по параметру жесткости тонких включений для рассматриваемых задач сопряжения;
- 3) исследовать задачи равновесия упругой пластины с плоским жестким включением и проанализировать взаимосвязь между краевыми задачами и соответствующими вариационными постановками;
- 4) доказать теоремы о существовании и единственности решений в задачах равновесия упругой пластины с плоским жестким включением.

Методология исследования. В работе используются методы и подходы, ориентированные на исследование, анализ и обоснование нелинейных математических моделей для упругих тел с неоднородной структурой, включая методы дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и функционального анализа, а также метод вариационных неравенств.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В задаче о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и тонким жестким включением, где трещина делит включение на две части, доказано существование и единственность решения. Для вариационной формулировки задач получены эквивалентные дифференциальные постановки, включающие условия сопряжения частей жесткого включения. Также проанализирован случай задачи в контексте тонких жестких включений с отслоением.

2. Получены условия сопряжения тонких упругих включений Бернулли-Эйлера, возникающего в результате пересечения с трещиной в упругом теле. Представлены корректные вариационные и дифференциальные постановки, а также доказано существование единственного решения. При этом исследована задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое упругое включение с отслоением. Рассмотрен также случай прямолинейного пересечения трещины с тонким включением. Кроме того, проанализирован предельный переход при стремлении параметра жесткости включений к бесконечности.

3. Установлены условия сопряжения жесткого и упругого включения в упругом теле. Сформулированы эквивалентные вариационные и дифференциальные постановки. Обоснован предельный переход при стремлении параметра жесткости к бесконечности. Также изучена получаемая при этом предельная задача.

4. Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения тонких упругих включений Тимошенко в двумерном упругом теле, где сопряжение возникло в результате пересечения с трещиной. Получены условия сопряжения для дифференциальной постановки. При этом дифференциальная постановка исследована в двух случаях: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения, и 2) когда имеется отслоение одного из включений. Также был рассмотрен предельный переход, в зависимости от параметра жесткости включений.

5. Предложена дифференциальная постановка для задачи равновесия упругой пластины, содержащей плоское жесткое включение. Доказано, что полученная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

6. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Получена эквивалентная дифференциальная постановка.

7. Исследована задача о равновесии пластины, содержащей плоское жесткое включение с трещиной на его границе, которое выходит на границу под нулевым углом и частично контактирует с недеформируемым телом. С использованием метода фиктивных областей установлено существование решения поставленной задачи.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность и достоверность результатов, представленных в данной диссертационной работе, обеспечиваются через корректную формулировку исследуемых задач, строгое применение математических методов, правильное использование математического инструментария и сопоставление с результатами других исследователей.

Научная новизна. Исследован ряд новых задач равновесия двумерных упругих тел и пластин с тонкими включениями и трещинами. Формулировки этих задач являются оригинальными и не были исследованы в научной практике ранее. Все результаты, представленные в данной диссертации, получены автором лично.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Диссертационное исследование является теоретическим и способствует расширению класса изучаемых задач в данной области. Полученные результаты могут стать основой для последующих теоретических и практических исследований, а также находить применение при численном анализе указанных задач.

Апробация результатов диссертации. Апробация результатов данной диссертационной работы осуществлялась через участие в научных конференциях и семинарах, а также через публикацию статей в рецензируемых научных журналах. Основные выводы исследования были представлены на следующих конференциях:

1. IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, Новосибирск, 7-11 сентября 2020 г.
2. Международная конференция “Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные”, г. Якутск, 18-25 июля 2021 г.
3. XXI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова “Информационные технологии и математическое моделирование” (ИТММ – 2022), г. Карши Республика Узбекистан, 25–29 октября 2022 г.

4. Modern Achievements in Symmetries of Differential Equations (Symmetry 2022) School of Mathematics, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand, 13-16 December 2022.
5. XXV Лаврентьевские чтения РС(Я), посвященных 30-летию Академии наук РС(Я), г. Якутск, 10-13 апреля 2023 г.
6. X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), г. Якутск, 16-20 июля 2023 г.
7. Международная научная конференция “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”, г. Ташкент, 23-25 ноября 2023 г.
8. The 8th International school-seminar “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2024), Irkutsk, Russia, 24-28 June 2024.
9. XII Международная научная конференция “Математическое и компьютерное моделирование”, г. Омск, 14 марта 2025 г.
10. XXXVIII Международная Воронежская весенняя математическая школа “Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXVI”, г. Воронеж, 30 апреля-4 мая 2025 г.

Кроме того, результаты работы докладывались на научных семинарах, таких как:

1. расширенное заседание НИИ математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова под руководством д.ф.-м.н. Е.И. Егорова.
2. научный семинар “Краевые задачи в областях с негладкими границами” Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под рук. д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева.
3. научный семинар “Краевые задачи механики сплошных сред” Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под рук. чл.-корр. РАН проф. П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова.

Публикации. По материалам, полученным в ходе исследования по теме диссертации, было опубликовано 14 печатных работ. Из них 5 статей [36; 42; 43; 63; 77] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, а 9 публикаций представлены в виде

тезисов всероссийских и международных конференций.

Объем диссертации. Объем диссертационной работы составляет 119 страниц, что включает в себя основную часть, введение, заключение и список использованных источников, который содержит 88 наименований. Основная часть работы содержит две главы. Главы делятся на параграфы, а параграфы — на подпараграфы. Диссертация также включает 10 рисунков. Нумерация формул и рисунков в работе осуществляется по двойной системе: первое число обозначает номер главы, в которой находится формула или рисунок, а второе — порядковый номер формулы или рисунка в пределах этой главы.

Во **введении** представлено обоснование актуальности темы диссертационного исследования, а также проведен обзор литературы, который позволяет оценить степень разработанности вопроса. Сформулированы цель и задачи работы, что определяет направление исследования. Кроме того, указаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Обоснована достоверность результатов, а также представлена информация об апробации работы на научных мероприятиях.

В первой главе рассматриваются задачи сопряжения тонких включений в двумерных упругих телах при наличии трещины, которая проходит между этими включениями. В результате этого возникает сопряжение включений в некоторой точке, являющейся точкой взаимного контакта. При этом исследуются сопряжения различных типов включений: тонких упругих и жестких. На берегах трещины задаются условия непроникания, которые учитываются и в точке контакта, исходя из геометрии расположения включений и трещины. С физической точки зрения такое нелинейное условие более точно описывает взаимовлияние частей включения, исключая проникание тонких включений друг в друга. Задачи формулируются как задачи минимизации функционала энергии на выпуклом множестве допустимых функций, что соответствует вариационному неравенству. Представлены корректные дифференциальные постановки задач в виде уравнений равновесия с полной системой краевых условий, включая условия, описывающие сопряжение тонких

включений. Также исследуются предельные переходы по параметру жесткости включений, в частности, проводится анализ сходимости решений при стремлении параметра жесткости включения к бесконечности.

Во второй главе рассматривается полная модель пластины Кирхгофа-Лява, где неизвестными функциями являются вертикальные и горизонтальные перемещения точек срединной поверхности пластины. Исследуются задачи равновесия упругой пластины с плоским жестким включением. Следует подчеркнуть, что вдоль одной из частей жесткого включения проходит сквозная трещина. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, которые описывают взаимное непроникание берегов. В этой части диссертации исследуются задачи о равновесии пластины с различным расположением плоского жесткого включения, включая случай, когда плоское жесткое включение выходит на границу под нулевым углом. Приводятся доказательства существования и единственности решений рассматриваемых задач. Представлены соответствующие дифференциальные постановки задач в виде уравнений равновесия с полной системой краевых условий, которые выполняются на границе жесткого включения и трещины.

Глава 1. Задачи о сопряжении тонких упругих включений в упругих телах при наличии трещины

В этой главе рассмотрены задачи о сопряжении тонких включений в двумерных упругих телах при наличии трещины. Предполагается, что трещина проходит между включениями. В результате этого возникает сопряжение включений в некоторой точке, являющейся точкой взаимного контакта. Таким образом, в данной работе под сопряжением тонких включений в упругом теле понимается наличие общей точки контакта. При этом рассматриваются сопряжения различных типов включений: тонких упругих и жестких. На берегах трещины задаются условия непроникания. Также, исходя из геометрии расположения включения и трещины, условие непроникания учитывается не только на берегах трещины, но и в точке контакта. С физической точки зрения такое нелинейное условие будет более точно описывать взаимовлияние частей включения, поскольку проникание тонких включений друг в друга будет исключено. Задачи формулируются как задачи минимизации функционала энергии на выпуклом множестве допустимых функций, что соответствует вариационному неравенству. Представлены корректные дифференциальные постановки задач в виде уравнений равновесия вместе с полной системой краевых условий. При этом дифференциальные постановки содержат условия, описывающие сопряжение тонких включений. Важно отметить, что вид краевых условий в точках сопряжения зависит от моделей, используемых для описания включений. В данной работе предполагается, что тонкие упругие включения моделируются как балки Бернулли-Эйлера или балки Тимошенко, в то время как функции перемещений жесткого включения имеют определенную заданную структуру. Также исследованы предельные переходы по параметру жесткости включений. А именно, проведен анализ сходимости решений при стремлении параметра жесткости включения к бесконечности. В этом случае в пределе мы получаем задачу о жестком включении. Нелинейные краевые задачи о сопряжении различных типов тонких включений, контактирующих в одной точке в упругих телах,

исследованы в недавних работах [40; 41; 51; 61; 62]. В отличие от этих исследований, основным отличием представленной работы является учет условия непроникновения как на берегах трещины, так и в точке контакта.

Результаты, изложенные в данной главе диссертации, опубликованы в [42; 43; 63].

Приведем постановку задачи. Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ . Пусть $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\Gamma}_c \subset \Omega$ – гладкие кривые без самопересечений такие, что $\gamma \cap \Gamma_c = \{(0,0)\}$. Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ , которые пересекают границу Γ и разбивают область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i , причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Для упрощения

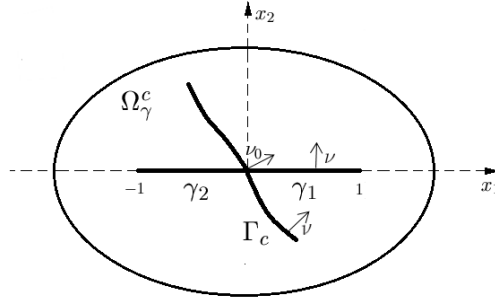


Рисунок 1.1 — Упругое тело с трещиной Γ_c и тонкими включениями γ_1, γ_2

записи нормали к Γ_c и к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$; ν_0 – нормаль в точке $\{(0,0)\}$, совпадающая с направлением нормали ν к Γ_c (см. рис. 1.1). Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данных кривых. Обозначим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{\Gamma}_c)$. В наших рассуждениях Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ – тонкому включению, Γ_c – трещине. Следовательно, трещина разбивает тонкое включение на две части, так что $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, где γ_1 и γ_2 – гладкие кривые. Для упрощения записи обозначим точку пересечения как $O = (0,0)$.

Вектор $u = (u_1, u_2)$ будет задавать перемещения точек тела. Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (1.1)$$

где $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, который обладает свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}; \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.3)$$

Здесь и далее будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам. Все величины с двумя нижними индексами будут предполагаться симметричными по этим индексам, например, $\varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_{ji}(u)$, $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ji}(u)$. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующим координатам: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

1.1 Задача о сопряжении тонких жестких включений

В этом разделе рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, которая пересекает тонкое жесткое включение в некоторой точке. Предполагается, что трещина в точке пересечения делит включение на две части, в результате чего возникает сопряжение этих частей. Прямым вариационным методом минимизации функционалов энергии доказаны существование и единственность решений рассматриваемых задач. Для вариационных формулировок задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки. При этом следует отметить, что тонкие жесткие включения могут быть как криволинейными (см. рис. 1.2), так и прямолинейными в частном случае (см. рис. 1.1).

Для описания перемещений точек тонких жестких включений γ_i мы будем рассматривать пространства инфинитезимальных жестких перемещений $R(\gamma_i)$. Эти пространства определяются следующим образом:

$$R(\gamma_i) = \{\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}) \mid \rho_i(x_1, x_2) = b_i(-x_2, x_1) + (c_{i1}, c_{i2});$$

$$b_i, c_{i1}, c_{i2} = \text{const}, (x_1, x_2) \in \gamma_i\}, \quad i = 1, 2.$$

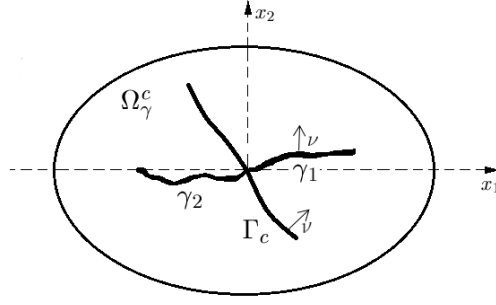


Рисунок 1.2 — Упругое тело с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2

В последующем, для упрощения записи, мы введем следующие обозначения для функций перемещения: $\rho|_{\gamma_1} = \rho_1$ и $\rho|_{\gamma_2} = \rho_2$, где $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$.

Далее будут исследованы два случая: случай, когда нет отслоения, и случай, когда на γ_1 и γ_2 имеются отслоения.

1.1.1 Случай без отслоения

Краевая задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2 формулируется следующим образом. Для заданных функций внешних сил $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, σ , $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, такие, что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.5)$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2} = \rho_2^0, \quad [\rho^0]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (1.6)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.7)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2 \leq 0 \quad \forall \quad \rho_i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad [\rho]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (1.8)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2^0 = 0, \quad (1.9)$$

где

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j), \quad \operatorname{div}\sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad i, j = 1, 2,$$

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad (\tau_1, \tau_2) = (\nu_2, -\nu_1), \quad \sigma_\tau = \sigma\nu \cdot \tau.$$

В данном контексте и далее обозначение $[v] = v^+ - v^-$ представляет собой скачок функции v на кривой Γ_c . Здесь значения $v^\pm = v|_{\Gamma_c^\pm}$ соответствуют следам функции v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c относительно нормали ν . Обозначение $[\rho]^0 = \rho^+(O) - \rho^-(O)$ указывает на скачок вектора ρ в точке O , где $\rho^\pm$ – это следы функций ρ на кривых γ_1 и γ_2 в точке O относительно нормали ν_0 . Следовательно, верно, что:

$$[\rho^0]^0\nu_0 = (\rho_1^0(O) - \rho_2^0(O))\nu_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad [\rho]^0\nu_0 = (\rho_1(O) - \rho_2(O))\nu_0 \geq 0.$$

Для удобства записи в тексте мы будем опускать дифференциал переменной интегрирования в интегралах.

Первое условие (1.4) представляет собой уравнение равновесия, в то время как второе условие (1.4) соответствует уравнению состояния, известному как закон Гука. Краевое условие (1.5) определяет закрепление тела на границе Γ . Первое и второе равенства из (1.6) описывают характер перемещений на границах γ_1 и γ_2 . Первое краевое условие из (1.7) гарантирует взаимное непроникание берегов трещины. Вместе с тем условие $[u_\nu] \geq 0$ выполняется почти всюду на Γ_c , что означает, что оно может не выполняться в точке сопряжения O . Третье условие из (1.6), в свою очередь, обеспечивает непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 друг в друга в точке O . Остальные краевые условия (1.7) дополняют условие взаимного непроникания и называются естественными краевыми условиями. При этом четвертое равенство в (1.7) указывает на нулевое трение между контактирующими поверхностями берегов трещины. Условия сопряжения (1.8) и (1.9) представляют реализацию принципа виртуальных перемещений.

Помимо краевой задачи (1.4)–(1.9) рассматриваемая задача равновесия допускает вариационную постановку. Для формулировки

задачи в вариационном виде введем функциональное пространство

$$H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}^c) = \{v \in H^1(\Omega_{\gamma}^c) \mid v = 0 \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

где $H^1(\Omega_{\gamma}^c)$ пространство Соболева. Определим функционал энергии

$$\Pi_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma}^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_{\gamma}^c} f u$$

и множество допустимых перемещений:

$$K_1 = \{v = (v_1, v_2) \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}^c)^2 \mid u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), i = 1, 2,$$

$$[u_{\nu}] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, [\rho]^0 \nu_0 \geq 0\}.$$

Здесь и далее по тексту, для простоты, мы используем обозначения $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $f u = f_i u_i$. Рассмотрим задачу минимизации потенциальной энергии

$$\Pi_1(u) = \inf_{\bar{u} \in K_1} \Pi_1. \quad (1.10)$$

Задача (1.10) имеет решение, поскольку функционал $\Pi_1(u)$ обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу, а множество K_1 является слабо замкнутым в силу выпуклости и замкнутости. Решение задачи (1.10) удовлетворяет вариационному неравенству:

$$u \in K_1, \int_{\Omega_{\gamma}^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_{\gamma}^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_1. \quad (1.11)$$

Теорема 1.1. *Краевая задача (1.4)-(1.9) эквивалентна вариационной задаче (1.11) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Докажем, что из вариационного неравенства (1.11), выбирая подходящие пробные функции, можно получить краевую задачу (1.4)–(1.9).

Выбирая функции $\bar{u} = u \pm \theta$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^{\infty}(\Omega_{\gamma}^c)^2$, из вариационного неравенства (1.11) получим уравнения равновесия (1.4),

выполненные в смысле обобщенных функций. Краевые условия (1.5) и (1.6) следуют из определения множества K_1 .

Рассмотрим получения краевых условий (1.7), (1.8) и (1.9). Для этого нам потребуется формула Грина, которая справедлива для гладких функций $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$, определенных в области Ω_γ^c :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(v) = & - \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot v - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot v] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot v] - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot v] = \\ & - \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot v - \int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot v_\nu] + [\sigma_\tau \cdot v_\tau]) - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot v] - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot v], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $v_\tau = v \cdot \tau$. С учетом формулы (1.12) и уравнения равновесия (1.4) мы можем переписать вариационное неравенство (1.11) в следующем виде:

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot (\bar{u}_\nu - u_\nu)] + [\sigma_\tau \cdot (\bar{u}_\tau - u_\tau)]) + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] \leq 0. \quad (1.13)$$

Теперь рассмотрим функцию $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, которая принадлежит пространству $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$ и удовлетворяет условиям: $[\tilde{u}] = 0$ на Γ_c , $\tilde{u} = 0$ на γ_1 и на γ_2 . Подставляя $\bar{u} = u \pm \tilde{u} \in K_1$ в (1.13) в качестве тестовых функций, мы получаем

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu] \cdot \tilde{u}_\nu + [\sigma_\tau] \cdot \tilde{u}_\tau) = 0.$$

Независимость между $\tilde{u}_\nu$ и $\tilde{u}_\tau$ влечет

$$[\sigma_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (1.14)$$

Таким образом, из неравенства (1.13) мы можем получить следующее неравенство:

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma_\nu \cdot [\bar{u}_\nu - u_\nu] + \sigma_\tau \cdot [\bar{u}_\tau - u_\tau]) + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] \leq 0.$$

Возьмем в последнем неравенстве пробную функцию вида $\bar{u} = u + \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2$ – это достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $[\tilde{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c , $\tilde{u} = 0$ на γ_1 и γ_2 . Если предположить, что $\tilde{u} = 0$ на Γ_c^+ , то мы получаем:

$$-\int_{\Gamma_c^-} (\sigma_\nu \tilde{u}_\nu + \sigma_\tau \tilde{u}_\tau) \leq 0.$$

Поскольку на u_τ нет ограничений, мы можем заключить, что $\sigma_\tau = 0$ на Γ_c^- . Учитывая, что $[\tilde{u}_\nu] \geq 0$, мы также имеем $\tilde{u}_\nu \leq 0$ на Γ_c^- , что приводит к выводу $\sigma_\nu \leq 0$ на Γ_c^- . Следовательно, в силу равенств (1.14) мы получаем

$$\sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Следующим шагом покажем выполнение условия $\sigma_\nu[u_\nu] = 0$ на Γ_c . Докажем справедливость этого равенства локально. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Gamma_c$ и предположим, что в некоторой окрестности этой точки B_{x_0} выполняется условие $[u_\nu] > 0$. Тогда в качестве пробных элементов можно взять функции $\bar{u} = u \pm \eta$, где $\eta \in K_1$ – произвольная функция, такая что $\text{supp} \eta \subseteq B_{x_0}$ и в B_{x_0} выполнено условие $[(u \pm \eta)_\nu] > 0$. Подставляя эти функции в (1.11), а также применяя формулу (1.12) и полученные краевые условия, приходим к соотношению

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\eta) - \int_{\Omega_\gamma^c} f \eta = - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\eta_\nu] = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности функции η , получим $\sigma_\nu = 0$ в окрестности B_{x_0} . В то же время, если в окрестности B_{x_0} выполняется неравенство $\sigma_\nu < 0$, то $[u_\nu] = 0$ в B_{x_0} , так как в противном случае, следуя предыдущим рассуждениям, мы придем к противоречию. Следовательно $\sigma_\nu[u_\nu] = 0$ на $\Gamma_c \cap B_{x_0}$. Итак, последнее условие (1.7) получено.

Остается проверить выполнение неравенства (1.8) и равенства (1.9). Подставляя в неравенство (1.13) тестовую функцию $\bar{u} = u + \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $\tilde{u}|_{\gamma_i} = \rho_i$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, $[\rho]^0 \nu_0 \geq 0$, и учитывая

условие (1.7), мы находим

$$\int_{\gamma_1} [\sigma\nu]\rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho_2 \leq 0,$$

что соответствует условию (1.8).

Теперь проверим справедливость равенства (1.9). Последовательно выбрав $\bar{u} = 0$ и $\bar{u} = 2u$ в (1.13) в качестве пробных элементов, мы получаем

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot u_\nu] + [\sigma_\tau \cdot u_\tau]) + \int_{\gamma_1} [\sigma\nu \cdot u] + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot u] = 0.$$

Из последнего равенства, используя ранее полученные краевые условия (1.7), мы можем вывести равенство (1.9). Таким образом, любое гладкое решение вариационного неравенства (1.11) удовлетворяет уравнениям равновесия и уравнениям состояния (1.4), а также краевым условиям (1.7), (1.8), (1.9).

Докажем обратное. Покажем, что любое решение краевой задачи (1.4)-(1.9) является решением вариационного неравенства (1.11). Пусть u – решение задачи (1.4)-(1.9), принадлежащее множеству K_1 . Умножим уравнения равновесия (1.4) на функцию $\bar{u} - u$, где $\bar{u} \in K_1$, $\bar{u}|_{\gamma_i} = \rho_i$, $i = 1, 2$, и проинтегрируем по области Ω_γ^c . Получим

$$- \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot (\bar{u} - u) = \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

Преобразуем последнее равенство, применив формулу Грина (1.12). В результате получим:

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) + \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] = \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

Теперь перепишем это равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) = & - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] + \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot u] - \\ & - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1 + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1^0 - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2^0. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Учитывая соотношение (1.9) и третье, четвертое, пятое условия из (1.7), мы получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) = - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu \cdot [\bar{u}_\nu] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1 - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2. \quad (1.15)$$

Поскольку функция $\bar{u}$ принадлежит множеству K_1 , для неё выполняется условие $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c . Учитывая также условие $\sigma_\nu \leq 0$ на Γ_c и принимая во внимание соотношение (1.8), мы можем заключить, что правая часть равенства (1.15) неотрицательна.

Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

□

Замечание. В дополнение к (1.4)-(1.9) можно выписать еще одну дифференциальную формулировку задачи (1.11). Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, σ , $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, такие, что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A \varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.16)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.17)$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2} = \rho_2^0, \quad [\rho^0]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (1.18)$$

$$[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.19)$$

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2 \leq 0 \quad \forall \bar{u} \in K_1, \quad \bar{u}|_{\gamma_i} = \rho_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.20)$$

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot u] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2^0 = 0. \quad (1.21)$$

Можно проверить, что краевая задача (1.16)-(1.21) эквивалентна (1.11). Следовательно, формулировки (1.11), (1.4)-(1.9) и (1.16)-(1.21) эквивалентны.

1.1.2 Случай с отслоением

В этом подразделе рассмотрим случай, когда имеется отслоение тонкого жесткого включения на положительном берегу γ^+ . Таким образом, между упругим телом и включением γ возникает трещина. При этом перемещения включения совпадают с перемещениями упругого тела на γ^- . Формулировка задачи в этом случае будет следующей: найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжения σ , и функции $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.22)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.23)$$

$$[\rho^0]^0 \nu_0 \geq 0, \quad u^- = \rho_i^0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.24)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.25)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.26)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2 \leq 0 \quad \forall \quad \rho_i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad [\rho]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (1.27)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2^0 = 0. \quad (1.28)$$

Здесь набор нелинейных условий (1.26) описывает отслоение тонких жестких включений γ_1 и γ_2 .

Приведем вариационную формулировку задачи (1.22)–(1.28). Введем

множество допустимых перемещений

$$K_2 = \{v = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \mid u|_{\gamma_i^-} \in R(\gamma_i); [\rho]^0 \nu_0 \geq 0;$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи минимизации

$$\Pi_1(u) = \inf_{\bar{u} \in K_2} \Pi_1$$

существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$u \in K_2, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_2. \quad (1.29)$$

Теорема 1.2. *Краевая задача (1.22)–(1.28) эквивалентна вариационной задаче (1.29) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Первоначально установим, что из вариационного неравенства (1.29) следует постановка (1.22)–(1.28). Рассмотрим вывод краевых условий (1.26), (1.27) и (1.28), поскольку (1.24) содержится во множестве K_2 . Остальные условия можно получить аналогично доказательству теоремы 1.1.

Итак, применяя формулу Грина (1.12) и учитывая уравнения равновесия (1.22), мы можем переписать вариационное неравенство (1.29) в следующем виде

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] \leq 0. \quad (1.30)$$

Выберем в (1.30) тестовые функции вида $\bar{u} = u + \tilde{u}$, при этом $\tilde{u} \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$ – достаточно гладкая функция, такая что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c и $[\tilde{u}_\nu] \geq 0$ на γ_i , $i = 1, 2$. Предположим, что $\tilde{u}|_{\gamma_1} = 0$, $\tilde{u}|_{\gamma_2^-} = 0$. В результате получим

$$\int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \tilde{u}^+ = \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^+ + \sigma_\tau^+ \tilde{u}_\tau^+) \leq 0.$$

Поскольку на функцию $\tilde{u}_\tau^+$ отсутствуют ограничения, мы имеем $\sigma_\tau^+ = 0$ на γ_2 . В этом случае последнее неравенство принимает вид: $\int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^+ \leq 0$. Отсюда учитывая, что $\tilde{u}_\nu^+ \geq 0$ на γ_2 , мы получаем соотношение $\sigma_\nu^+ \leq 0$ на γ_2 . Аналогично, из предположений $\tilde{u}|_{\gamma_1^-} = 0$ и $\tilde{u}|_{\gamma_2} = 0$ следует, что $\sigma_\tau^+ = 0$ и $\sigma_\nu^+ \leq 0$ на γ_1 . Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$\sigma_\tau^+ = 0 \text{ и } \sigma_\nu^+ \leq 0 \text{ на } \gamma_i, \ i = 1, 2.$$

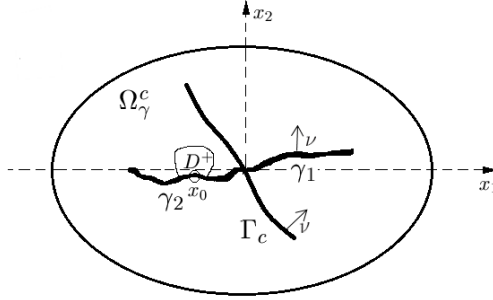


Рисунок 1.3 — Окрестность точки x_0

Докажем, что выполняется равенство $\sigma_\nu^+[u_\nu] = 0$ на γ . Рассмотрим в качестве пробных элементов функции $\bar{u} = u \pm \lambda \eta$, где $\text{supp} \eta \subseteq \bar{D}^+$. В качестве области D^+ выберем область, изображенную на рисунке 1.3. Предположим, что в $\bar{D}^+$ выполняется неравенство $[u_\nu] > 0$. Тогда при малых λ справедливо включение $\bar{u} \in K_2$. Подставляя функции $\bar{u} = u \pm \lambda \eta$ в (1.30) и применяя полученные краевые условия, будем иметь

$$\int_{\gamma \cap \bar{D}^+} \sigma_\nu^+[\eta_\nu] = 0.$$

Отсюда следует равенство $\sigma_\nu^+ = 0$ на $\gamma \cap \bar{D}^+$. Аналогично, предполагая $\sigma_\nu^+ < 0$, мы получим справедливость последнего равенства (1.26).

Теперь покажем выполнение неравенства (1.27). Подставляя в (1.30) тестовую функцию $\bar{u} = u + \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $[\tilde{u}] = 0$ на γ_i , $\tilde{u}|_{\gamma_i^-} = \rho_i$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, $[\rho]^0 \nu_0 \geq 0$, и учитывая (1.25), мы можем

записать следующее выражение:

$$\int_{\gamma_1} [\sigma\nu \cdot \tilde{u}] + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot \tilde{u}] = \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \cdot \tilde{u}^+ - \int_{\gamma_1} \sigma^- \nu \cdot \tilde{u}^- + \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot \tilde{u}^+ - \int_{\gamma_2} \sigma^- \nu \cdot \tilde{u}^- \leq 0$$

Поскольку $\tilde{u}|_{\gamma_i^-} = \rho_i$, $i = 1, 2$, можем записать цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \cdot (\tilde{u}^+ + \rho_1 - \rho_1) - \int_{\gamma_1} \sigma^- \nu \cdot \rho_1 + \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot (\tilde{u}^+ + \rho_2 - \rho_2) - \int_{\gamma_2} \sigma^- \nu \cdot \rho_2 = \\ = \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot \rho_1 + \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \cdot [\tilde{u}] + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho_2 + \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot [\tilde{u}] = \\ = \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \rho_2 \leq 0, \end{aligned}$$

которая приводит к условию (1.27).

Справедливость равенства (1.28) будет доказана, если последовательно выбрать функции $\bar{u} = 0$ и $\bar{u} = 2u$ в (1.30) в качестве пробных функций и применить краевые условия (1.25), (1.26). Таким образом, мы доказали, что из вариационного неравенства (1.29) следует (1.22)–(1.28).

Пусть теперь выполнены соотношения (1.22)–(1.28). Предположим, что $u \in K_2$ – решение задачи (1.22)–(1.28). Умножим (1.22) на $\bar{u} - u$, где $\bar{u} \in K_2$ и $\bar{u}|_{\gamma_i^-} = \rho_i$, $i = 1, 2$, проинтегрируем по области Ω_γ^c , получим равенство

$$- \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot (\bar{u} - u) = \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

Используя формулу Грина, перепишем это равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) = - \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot \bar{u}] + \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot u] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot \rho_1 + \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot \rho_1^0 - \\ - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho_2 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho_2^0 - \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \cdot [\bar{u}] + \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \cdot [u] - \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot [\bar{u}] + \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot [u]. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Учитывая соотношение (1.28) и краевые условия (1.25), (1.26), мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) &= - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu \cdot [\bar{u}_\nu] - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ \cdot [\bar{u}_\nu] - \\ &- \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ \cdot [\bar{u}_\nu] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1 - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Так как функция $\bar{u}$ из K_2 , то для нее справедливо соотношение $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c и на γ_i , $i = 1, 2$. Учитывая условия $\sigma_\nu \leq 0$ на Γ_c и $\sigma_\nu^+ \leq 0$ на γ_i , $i = 1, 2$, мы можем утверждать, что первые три слагаемые правой части (1.31) неотрицательны. Сумма двух последних слагаемых правой части (1.31) также неотрицательна в силу (1.27). Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Замечание. В дополнение к постановке (1.22)–(1.28) можно выписать еще одну формулировку задачи (1.29). Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$ и σ , а также постоянные c_{1i}^0, c_{2i}^0 функций $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.32)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.33)$$

$$((c_{11}^0, c_{12}^0) - (c_{21}^0, c_{22}^0))\nu_0 \geq 0, \quad u^- = \rho_i^0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.34)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma \nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\tau^- = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.35)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.36)$$

$$\int_{\gamma_i} [\sigma^2] x_1 - \int_{\gamma_i} [\sigma^1] x_2 = 0, \quad (1.37)$$

$$c_{11}^0 \int_{\gamma_1} [\sigma^1] + c_{12}^0 \int_{\gamma_1} [\sigma^2] + c_{21}^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_{22}^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^2] = 0, \quad (1.38)$$

$$c_{11} \int_{\gamma_1} [\sigma^1] + c_{12} \int_{\gamma_1} [\sigma^2] + c_{21} \int_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_{22} \int_{\gamma_2} [\sigma^2] \leq 0 \quad \forall \quad c_{i1}, c_{i2} = \text{const}, \quad (1.39)$$

$$((c_{11}, c_{12}) - (c_{21}, c_{22}))\nu_0 \geq 0,$$

$\rho_i = b_i(-x_2, x_1) + (c_{i1}, c_{i2})$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$. Здесь $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j) = (\sigma^1, \sigma^2)$, $j = 1, 2$,

Первое условие из (1.34) является идентичным первому условию из (1.24), следовательно, оно обеспечивает непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 друг в друга в точке O . Покажем это. В точке сопряжения справедливо, что $\rho_i^0(O) = (\rho_{i1}^0, \rho_{i2}^0) = (-b_i^0 x_2 + c_{i1}^0, b_i^0 x_1 + c_{i2}^0) = (c_{i1}^0, c_{i2}^0)$, $i = 1, 2$. Следовательно, в точке O из первого неравенства (1.24) вытекает первое неравенство (1.34):

$$[\rho^0]^0 \nu_0 = (\rho_1^0(O) - \rho_2^0(O))\nu_0 = ((c_{11}^0, c_{12}^0) - (c_{21}^0, c_{22}^0))\nu_0 \geq 0.$$

Равенство (1.37) указывает на то, что главные векторы моментов, действующие на γ_1 и γ_2 , равны нулю. Условия сопряжения (1.38) и (1.39) реализуют принцип виртуальных перемещений. Мы можем утверждать, что при истинных перемещениях точек тела сумма главных векторов сил, действующих на γ_1 и γ_2 , обращается в ноль. Для всех возможных перемещений выполняется соответствующее неравенство (1.39). Условия (1.37)–(1.39) следуют из (1.27)–(1.28). Покажем это. Пусть $[\sigma\nu] = ([\sigma^1], [\sigma^2])$. Из (1.27), принимая во внимание заданный вид функций ρ_1 и ρ_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \rho_2 &= \int_{\gamma_1} ([\sigma^1], [\sigma^2]) (-b_1 x_2 + c_{11}, b_1 x_1 + c_{12}) + \\ &+ \int_{\gamma_2} ([\sigma^1], [\sigma^2]) (-b_2 x_2 + c_{21}, b_2 x_1 + c_{22}) = \\ &= c_{11} \int_{\gamma_1} [\sigma^1] + c_{12} \int_{\gamma_1} [\sigma^2] + b_1 \int_{\gamma_1} ([\sigma^2] x_1 - [\sigma^1] x_2) + \\ &+ c_{21} \int_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_{22} \int_{\gamma_2} [\sigma^2] + b_2 \int_{\gamma_2} ([\sigma^2] x_1 - [\sigma^1] x_2) \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности b_1, b_2 следуют равенства (1.37) и неравенство (1.39).

Справедливость равенства (1.38) вытекает из (1.28). Учитывая вид функций ρ_1^0 и ρ_2^0 , получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2^0 = \int_{\gamma_1} ([\sigma^1], [\sigma^2]) (-b_1^0 x_2 + c_{11}^0, b_1^0 x_1 + c_{12}^0) + \\
& \quad + \int_{\gamma_2} ([\sigma^1], [\sigma^2]) (-b_2^0 x_2 + c_{21}^0, b_2^0 x_1 + c_{22}^0) = \\
& = c_{11}^0 \int_{\gamma_1} [\sigma^1] + c_{12}^0 \int_{\gamma_1} [\sigma^2] + b_1^0 \int_{\gamma_1} ([\sigma^2] x_1 - [\sigma^1] x_2) + \\
& \quad + c_{21}^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_{22}^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^2] + b_2^0 \int_{\gamma_2} ([\sigma^2] x_1 - [\sigma^1] x_2) = 0.
\end{aligned}$$

Из этого, согласно равенству (1.37), следует, что (1.38) верно. Таким образом, мы показали, что формулировки (1.32)–(1.39) и (1.22)–(1.28) идентичны.

Постановка задачи (1.32)–(1.39) представлена как дополнительная, так как включает условия, связанные с главным вектором сил и моментом сил, действующих на рассматриваемые включения. Эти условия обладают четкой физической интерпретацией, описанной выше.

1.2 Сопряжение тонких упругих включений Бернулли–Эйлера

В этом разделе включения $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ будут соответствовать тонким упругим балкам с заданными свойствами (см. рис. 1.1). В частности, считаем, что поведение балок γ_1, γ_2 описывается моделью Бернулли – Эйлера. При этом рассматриваются два случая: без отслоения и с отслоением тонких включений. Кроме того, проанализирован предельный переход при стремлении параметра жесткости включений к бесконечности.

1.2.1 Случай без отслоения

Формулировка задачи о равновесии упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими упругими включениями γ_1, γ_2 следующая: необходимо найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжения σ , определенные в Ω_γ^c , и перемещения тонких включений v^i, w^i , определенные на γ_i , $i = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.40)$$

$$v_{xxxx}^i = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.41)$$

$$-w_{xx}^i = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.42)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.43)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.44)$$

$$[(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.45)$$

$$v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.46)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xxx}^1 = w_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx}^2 = v_{xxx}^2 = w_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad (1.47)$$

$$(v_{xxx}^1 \psi^1)(0) - (v_{xx}^1 \psi_x^1)(0) - (w_x^1 \theta^1)(0) - (v_{xxx}^2 \psi^2)(0) + (v_{xx}^2 \psi_x^2)(0) + \\ + (w_x^2 \theta^2)(0) \geq 0 \quad \forall (\psi^i, \theta^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \quad [(\theta(0), \psi(0))]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (1.48)$$

$$(v_{xxx}^1 v^1)(0) - (v_{xx}^1 v_x^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) - \\ - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (v_{xx}^2 v_x^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0, \quad (1.49)$$

$i = 1, 2$. Здесь функции, определенные на γ , отождествляются с функциями переменной x_1 ; $v_x = \frac{dv}{dx}$, $x = x_1$. При этом функция v определяется так, что $v|_{\gamma_1} = v^1$ и $v|_{\gamma_2} = v^2$. Аналогичное утверждение верно и для функции w .

Уравнения (1.41), (1.42) соответствуют дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядка для смещений тонких упругих включений в рамках модели балок Бернулли–Эйлера. Правые части этих уравнений описывают влияние упругой среды на γ_i , $i = 1, 2$. Соотношения (1.46) обеспечивают совпадение вертикальных (по оси x_2) и

горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i , $i = 1, 2$. Краевые условия (1.47) обеспечивают нулевые моменты, нулевые поперечные силы и нулевые касательные силы для упругого включения при $x = -1$ и $x = 1$. Соотношения (1.45), (1.48) и (1.49) представляют собой условия сопряжения при $x = 0$. В данном случае условие непроникания в точке сопряжения имеет вид (1.45), при этом $[(w(0), v(0))]^0 \nu_0 = ((w^1(0), v^1(0)) - (w^2(0), v^2(0))) \nu_0 \geq 0$ и $[(\theta(0), \psi(0))]^0 \nu_0 = ((\theta^1(0), \psi^1(0)) - (\theta^2(0), \psi^2(0))) \nu_0 \geq 0$. Смысл условий (1.48) и (1.49) заключается в следующем: работа внутренних сил на допустимых перемещениях точек тела не меньше, чем работа внешних сил, а на истинных перемещениях работа обращается в нуль.

Задача (1.40)-(1.49) допускает вариационную формулировку. Введем для этого множество допустимых перемещений

$$K_3 = \{(u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i) \mid v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad [(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0\}$$

и определим функционал энергии

$$\begin{aligned} \Pi_2(u, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (v_{xx}^1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (w_x^1)^2 + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (v_{xx}^2)^2 + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (w_x^2)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$\Pi_2(u, v, w) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3} \Pi_2. \quad (1.50)$$

Поскольку функционал Π_2 является слабо полунепрерывным снизу и обладает свойством коэрцитивности (аналогичное доказательство этого свойства можно найти в [13]), задача (1.50) является разрешимой и может

быть записана в виде вариационного неравенства

$$\begin{aligned}
(u, v, w) \in K_3, \quad & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1 (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1 (\bar{w}_x^1 - w_x^1) + \\
& + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2 (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2 (\bar{w}_x^2 - w_x^2) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3. \quad (1.51)
\end{aligned}$$

Более того, решение задачи (1.51) является единственным.

Теорема 1.3. *Краевая задача (1.40)–(1.49) эквивалентна вариационной задаче (1.51) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Пусть выполнено вариационное неравенство (1.51). Подставляя в (1.51) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, 0, 0)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$, получим (1.40).

Доказательство справедливости краевых условий на кривой Γ_c аналогичны выводу краевых условий на Γ_c из раздела 1.1. В частности, выбирая в неравенстве (1.51) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, 0, 0) \in K_3$, где $[\varphi] = 0$ на Γ_c , $\varphi = 0$ на γ_1 и на γ_2 , мы получаем

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma\nu] \varphi = 0.$$

Отсюда, используя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в разделе 1.1, мы можем получить все условия (1.44).

Теперь установим справедливость краевых условий на части границы γ . Рассмотрим гладкие функции $(\varphi, \psi, \theta) \in K_3$, такие что $[\varphi_\nu] = 0$ на Γ_c , $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, $[(\theta(0), \psi(0))]^0 \nu_0 = 0$. Тогда функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, \psi, \theta)$ принадлежат множеству K_3 и могут быть использованы в (1.51) в качестве пробных. Интегрируя по частям и принимая во внимание полученные условия (1.40), (1.44), получим

$$\begin{aligned}
& - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \varphi - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \varphi + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 -
\end{aligned}$$

$$-v_{xxx}^1 \psi^1|_0^1 + v_{xx}^1 \psi_x^1|_0^1 + w_x^1 \theta^1|_0^1 - v_{xxx}^2 \psi^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \psi_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 \theta^2|_{-1}^0 = 0. \quad (1.52)$$

Предполагая, что $\psi^i = \psi_x^i = \theta^i = 0$ при $x = -1, 0, 1$ и применяя разложение $[\sigma\nu]\varphi = [\sigma_\nu]\varphi_\nu + [\sigma_\tau]\varphi_\tau$ на γ_i , $i = 1, 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu]\varphi_\nu - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau]\varphi_\tau - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu]\varphi_\nu - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau]\varphi_\tau + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенств $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, получим уравнения (1.41) и (1.42). Следовательно, из (1.51) вытекает (1.47).

Остается показать справедливость соотношений (1.48) и (1.49). Возьмем в (1.51) тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\varphi, \psi, \theta)$, причем $[\varphi_\nu] = 0$ на Γ_c , $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, $[(\theta(0), \psi(0))]^0 \nu_0 \geq 0$ и (φ, ψ, θ) – достаточно гладкие функции. Используя (1.40), мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot \varphi] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu]\varphi - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\varphi + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 - \\ & - v_{xxx}^1 \psi^1|_0^1 + v_{xx}^1 \psi_x^1|_0^1 + w_x^1 \theta^1|_0^1 - v_{xxx}^2 \psi^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \psi_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 \theta^2|_{-1}^0 \geq 0. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства, принимая во внимание (1.41), (1.42), (1.44) и (1.47), получим условие (1.48).

Далее подставим в (1.51) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u, v, w)$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$. Учитывая уравнения равновесия (1.40), найдем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot u] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu]u - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]u + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 v^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 w^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 v^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 w^2 - \\ & - v_{xxx}^1 v^1|_0^1 + v_{xx}^1 v_x^1|_0^1 + w_x^1 w^1|_0^1 - v_{xxx}^2 v^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 v_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 w^2|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (1.41), (1.42), (1.44) и (1.47), следует условие (1.49). Таким образом, в одну сторону утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть выполнены условия (1.40)-(1.49). Выберем элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3$ и умножим (1.40), (1.41) и (1.42) на $(\bar{u} - u)$, $(\bar{v} - v)$ и $(\bar{w} - w)$ соответственно, а затем проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i , $i = 1, 2$. После сложения интегралов мы получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} (v_{xxxx}^1 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^1 - v^1) + \int_{\gamma_1} (-w_{xx}^1 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^1 - w^1) + \\ & + \int_{\gamma_2} (v_{xxxx}^2 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^2 - v^2) + \int_{\gamma_2} (-w_{xx}^2 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^2 - w^2) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{u} - u) + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{u} - u) + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1(\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1(\bar{w}_x^1 - w_x^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau](\bar{w}^1 - w^1) + \\ & + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2(\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2(\bar{w}_x^2 - w_x^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{v}^2 - v^2) - \\ & - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau](\bar{w}^2 - w^2) + v_{xxx}^1(\bar{v}^1 - v^1) \big|_0^1 - v_{xx}^1(\bar{v}_x^1 - v_x^1) \big|_0^1 - \\ & - w_x^1(\bar{w}^1 - w^1) \big|_0^1 + v_{xxx}^2(\bar{v}^2 - v^2) \big|_{-1}^0 - v_{xx}^2(\bar{v}_x^2 - v_x^2) \big|_{-1}^0 - w_x^2(\bar{w}^2 - w^2) \big|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Для получения вариационного неравенства (1.51) из предыдущей строки нам достаточно доказать, что для всех $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3$ справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{u} - u) + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{u} - u) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau](\bar{w}^1 - w^1) - \\ & - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{v}^2 - v^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau](\bar{w}^2 - w^2) + v_{xxx}^1(\bar{v}^1 - v^1) \big|_0^1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v_{xx}^1(\bar{v}_x^1 - v_x^1) \big|_0^1 - w_x^1(\bar{w}^1 - w^1) \big|_0^1 + v_{xxx}^2(\bar{v}^2 - v^2) \big|_{-1}^0 - \\
& -v_{xx}^2(\bar{v}_x^2 - v_x^2) \big|_{-1}^0 - w_x^2(\bar{w}^2 - w^2) \big|_{-1}^0 \leq 0.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Действительно, с помощью третьего и четвертого равенства (1.44), условий (1.46), а также разложений $[\sigma\nu]u = [\sigma_\nu]u_\nu + [\sigma_\tau]u_\tau$, $[\sigma\nu]\bar{u} = [\sigma_\nu]\bar{u}_\nu + [\sigma_\tau]\bar{u}_\tau$, неравенство (1.53) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu[u_\nu] + v_{xxx}^1(\bar{v}^1 - v^1) \big|_0^1 - v_{xx}^1(\bar{v}_x^1 - v_x^1) \big|_0^1 - \\
& - w_x^1(\bar{w}^1 - w^1) \big|_0^1 + v_{xxx}^2(\bar{v}^2 - v^2) \big|_{-1}^0 - v_{xx}^2(\bar{v}_x^2 - v_x^2) \big|_{-1}^0 - w_x^2(\bar{w}^2 - w^2) \big|_{-1}^0 \leq 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, исходя из пятого условия (1.44) и соотношений (1.47), (1.49), следует

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - (v_{xxx}^1 \bar{v}^1)(0) + (v_{xx}^1 \bar{v}_x^1)(0) + (w_x^1 \bar{w}^1)(0) + \\
& + (v_{xxx}^2 \bar{v}^2)(0) - (v_{xx}^2 \bar{v}_x^2)(0) - (w_x^2 \bar{w}^2)(0) \leq 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим последнее неравенство и обоснуем его неположительность. Первое слагаемое является неположительным в силу неравенства $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ и второго условия (1.44); оставшиеся слагаемые неположительны в силу (1.48). Отсюда следует, что неравенство (1.53) верно. Следовательно, мы получили вариационное неравенство (1.51). Теорема доказана. $\square$

Замечание. В формулировке (1.40)-(1.49) условия сопряжения (1.48) и (1.49) могут быть переписаны в следующем виде:

$$v_{xx}^1 = 0, \quad v_{xx}^2 = 0, \quad (v_{xxx}^1 v^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0, \tag{1.54}$$

$$(v_{xxx}^1 \psi^1)(0) - (w_x^1 \theta^1)(0) - (v_{xxx}^2 \psi^2)(0) + (w_x^2 \theta^2)(0) \geq 0,$$

$$\forall (\psi^i, \theta^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad [(\theta(0), \psi(0))]^0 \nu_0 \geq 0. \tag{1.55}$$

Действительно, в силу отсутствия ограничений на функции ψ_x^1 и ψ_x^2 из (1.48) получаем первые два равенства из (1.54), которые означают нулевые моменты для упругих включений в точке сопряжения. На основании этих условий из (1.48) и (1.49) следуют второе равенство из (1.54) и неравенство

(1.55).

1.2.2 Пределный переход по параметру жесткости

На самом деле, решение задачи (1.40)–(1.49) должно зависеть от параметра жесткости тонкого включения. В модели (1.40)–(1.49) этот параметр принимался равным 1. В этом разделе мы введем параметр λ в модель и исследуем предельный переход при стремлении этого параметра к бесконечности. Для этого рассмотрим функционал энергии

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda(u, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_1} (v_{xx}^1)^2 + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_1} (w_x^1)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_2} (v_{xx}^2)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_2} (w_x^2)^2, \end{aligned}$$

где параметр $\lambda > 0$ характеризует жесткость упругого включения γ . Существует единственное решение задачи минимизации

$$\Pi_\lambda(u, v, w) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3} \Pi_\lambda.$$

Это решение удовлетворяет вариационному неравенству:

$$\begin{aligned} (u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in K_3, \quad & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) + \\ & + \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^{1\lambda} (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^{1\lambda}) + \lambda \int_{\gamma_1} w_x^{1\lambda} (\bar{w}_x^1 - w_x^{1\lambda}) + \lambda \int_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda} (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^{2\lambda}) + \\ & + \lambda \int_{\gamma_2} w_x^{2\lambda} (\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_3. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Далее, рассмотрим предельный переход в (1.56) при $\lambda \rightarrow \infty$. Подставим пробные функции вида $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$

в (1.56), при $\alpha \in \mathbb{R}$ и найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u^\lambda \pm \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{1\lambda})^2 + (w^{1\lambda})^2) \pm \alpha \int_{\gamma_2} ((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2) + \\ & + \lambda \int_{\gamma_1} ((v_{xx}^{1\lambda})^2 + (w_x^{1\lambda})^2) + \lambda \int_{\gamma_2} ((v_{xx}^{2\lambda})^2 + (w_x^{2\lambda})^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

В силу условий $u_\nu^\lambda = v^{i\lambda}$, $u_\tau^\lambda = w^{i\lambda}$ на γ_i , $i = 1, 2$, неравенства Корна и теоремы вложения, при малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{1\lambda})^2 + (w^{1\lambda})^2) - \alpha \int_{\gamma_2} ((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2) \geq 0.$$

Тогда из (1.57) выводим, что при $\lambda \geq \alpha$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} & c_0 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 + \alpha \|v^{1\lambda}\|_{H^2(\gamma_1)}^2 + \alpha \|w^{1\lambda}\|_{H^1(\gamma_1)}^2 + \\ & + \alpha \|v^{2\lambda}\|_{H^2(\gamma_2)}^2 + \alpha \|w^{2\lambda}\|_{H^1(\gamma_2)}^2 \leq c_1 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2, \end{aligned}$$

где $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ не зависят от λ . Следовательно, мы получаем равномерную по $\lambda \geq \lambda_0$ оценку

$$\|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 + \|v^{1\lambda}\|_{H^2(\gamma_1)}^2 + \|w^{1\lambda}\|_{H^1(\gamma_1)}^2 + \|v^{2\lambda}\|_{H^2(\gamma_2)}^2 + \|w^{2\lambda}\|_{H^1(\gamma_2)}^2 \leq c_2. \quad (1.58)$$

Из равенства (1.57) при $\lambda \geq \lambda_0$ также следует оценка

$$\lambda \int_{\gamma_1} (v_{xx}^{1\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_1} (w_x^{1\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_2} (v_{xx}^{2\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_2} (w_x^{2\lambda})^2 \leq c_3. \quad (1.59)$$

Выбирая для сходящейся подпоследовательности прежние обозначения $(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, из (1.58) при $\lambda \rightarrow \infty$ мы получаем следующие сходимости:

$$u^\lambda \rightarrow u \quad \text{слабо в } H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, \quad (1.60)$$

$$v^{i\lambda} \rightarrow v^i \quad \text{слабо в } H^2(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad (1.61)$$

$$w^{i\lambda} \rightarrow w^i \quad \text{слабо в} \quad H^1(\gamma_i), \quad i = 1, 2. \quad (1.62)$$

Также, в силу (1.59), мы имеем

$$v_{xx}^i = 0, \quad w_x^i = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.63)$$

Следовательно,

$$v^1(x) = c_{10} + c_{11}x, \quad w^1(x) = b_{10}, \quad x \in (0, 1); \quad c_{10}, c_{11}, b_{10} \in \mathbb{R},$$

$$v^2(x) = c_{20} + c_{21}x, \quad w^2(x) = b_{20}, \quad x \in (-1, 0); \quad c_{20}, c_{21}, b_{20} \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что $u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$:

$$u|_{\gamma_i} = (w^i, v^i) = \rho_i^0; \quad \rho_i^0(x_1, x_2) = c_{i1}(-x_2, x_1) + (b_{i0}, c_{i0}), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, предельная функция (u, v, w) будет принадлежать множеству допустимых перемещений K_1 , которое определено в разделе 1.1.

С помощью полученных сходимостей мы можем перейти к пределу в вариационном неравенстве (1.56). Возьмем произвольную функцию $\bar{u} \in K_1$. Тогда элемент $(\bar{u}, \bar{u}_2|_\gamma, \bar{u}_1|_\gamma)$ принадлежит множеству K_3 . Обозначим $(\bar{u}, \bar{u}_2|_\gamma, \bar{u}_1|_\gamma)$ через $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Подставив элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в (1.56), мы получаем следующее:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) &\geq \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^{1\lambda} (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^{1\lambda}) - \\ &- \lambda \int_{\gamma_1} w_x^{1\lambda} (\bar{w}_x^1 - w_x^{1\lambda}) - \lambda \int_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda} (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^{2\lambda}) - \lambda \int_{\gamma_2} w_x^{2\lambda} (\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}). \end{aligned}$$

Переходя к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства, в силу (1.60)-(1.63), при $\lambda \rightarrow \infty$ получим

$$u \in K_1, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_1. \quad (1.64)$$

Заметим, что выражение (1.64) с точностью до обозначений совпадает с вариационным неравенством (1.11). Таким образом, предельная задача для (1.56) при $\lambda \rightarrow \infty$ совпадает с задачей (1.4)–(1.9) о равновесии упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение. На основании проведенного анализа можно сформулировать следующий результат:

Теорема 1.4. *При $\lambda \rightarrow \infty$ решение вариационных задач (1.56) сходятся к решению задачи (1.11) в смысле (1.60)–(1.62).*

1.2.3 Случай с отслоением

В этом разделе рассмотрим случай, при котором $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$ соответствует тонкому упругому включению с отслоением на γ^+ ; $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ (см. рис. 1.2). Формулировка задачи равновесия в этом случае будет следующей: необходимо найти функции $u = (u_1, u_2)$, σ , v^i, w^i , $i = 1, 2$, такие что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.65)$$

$$v_{xxxx}^i = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.66)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.67)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.68)$$

$$[(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.69)$$

$$v^i = u_\nu^-, \quad w^i = u_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.70)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.71)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xxx}^1 = w_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx}^2 = v_{xxx}^2 = w_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad (1.72)$$

$$v_{xx}^1 = 0, \quad v_{xx}^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.73)$$

$$(v_{xxx}^1 \bar{v}^1)(0) - (w_x^1 \bar{w}^1)(0) - (v_{xxx}^2 \bar{v}^2)(0) + (w_x^2 \bar{w}^2)(0) \geq 0 \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \quad [\bar{w}(0), \bar{v}(0)]^0 \nu_0 \geq 0, \\ (v_{xxx}^1 v^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.75)$$

$i = 1, 2$.

Задача (1.65)-(1.75) допускает вариационную формулировку. Введем для этого множество допустимых перемещений

$$K_4 = \{(u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i) \mid v^i = u_\nu^-, \quad w^i = u_\tau^- \text{ на } \gamma_i,$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c; \quad [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma_i; \quad [(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0\}, \quad i = 1, 2$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$\Pi_2(u, v, w) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4} \Pi_2. \quad (1.76)$$

Задача (1.76) имеет единственное решение (u, v, w) , которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u, v, w) \in K_4, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1 (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1 (\bar{w}_x^1 - w_x^1) + \\ + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2 (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2 (\bar{w}_x^2 - w_x^2) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Теорема 1.5. *Краевая задача (1.65)–(1.75) эквивалентна вариационной задаче (1.77) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Покажем, что из вариационного неравенства (1.77) можно получить постановку (1.65)–(1.75). Обратим внимание, что соотношения (1.67), (1.69), (1.70) следуют из определения множества K_4 . Краевые условия (1.65), (1.68) и (1.71) выводятся аналогично моделям, рассмотренным в предыдущих разделах. Теперь нам остается рассмотреть схему получения краевых условий (1.66), (1.72), (1.73), (1.74) и (1.75).

Для установления справедливости соотношений (1.66), (1.72) и (1.73) подставим в неравенство (1.77) тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in K_4$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $[\tilde{u}_\nu] = 0$, $[(\tilde{w}(0), \tilde{v}(0))]^0 \nu_0 = 0$,

$\tilde{u}_\nu^- = \tilde{v}^i$, $\tilde{u}_\tau^- = \tilde{w}^i$ на γ_i , $i = 1, 2$. Применяя интегрирование по частям и учитывая уравнения равновесия (1.65), мы получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot \tilde{u}] + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \tilde{v}^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \tilde{w}^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \tilde{v}^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \tilde{w}^2 - \\ & - v_{xxx}^1 \tilde{v}^1 \big|_0^1 + v_{xx}^1 \tilde{v}_x^1 \big|_0^1 + w_x^1 \tilde{w}^1 \big|_0^1 - v_{xxx}^2 \tilde{v}^2 \big|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \tilde{v}_x^2 \big|_{-1}^0 + w_x^2 \tilde{w}^2 \big|_{-1}^0 = 0. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Далее в равенстве (1.78) предположим, что $\tilde{v}^i = \tilde{v}_x^i = \tilde{w}^i = 0$ при $x = -1, 0, 1$. После применения условия (1.68) и разложений $[\sigma_\nu \cdot \tilde{u}] = [\sigma_\nu \tilde{u}_\nu] + [\sigma_\tau \tilde{u}_\tau]$ на γ_i , $i = 1, 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^+ + \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^- \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^+ \tilde{u}_\tau^+ + \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^- \tilde{u}_\tau^- - \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^+ + \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^- \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_2} \sigma_\tau^+ \tilde{u}_\tau^+ + \\ & + \int_{\gamma_2} \sigma_\tau^- \tilde{u}_\tau^- + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \tilde{v}^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \tilde{w}^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \tilde{v}^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \tilde{w}^2 = 0 \end{aligned}$$

Последнее соотношение, в силу равенств $\sigma_\tau^+ = 0$, $\tilde{u}_\nu = \tilde{v}^i$, $\tilde{u}_\tau = \tilde{w}^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ (\tilde{u}_\nu^+ - \tilde{u}_\nu^-) - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^- + \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^- \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_1} (\sigma_\tau^+ - \sigma_\tau^-) \tilde{u}_\tau^- - \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ (\tilde{u}_\nu^+ - \tilde{u}_\nu^-) - \\ & - \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^- + \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^- \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_2} (\sigma_\tau^+ - \sigma_\tau^-) \tilde{u}_\tau^- + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \tilde{v}^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \tilde{w}^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \tilde{v}^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \tilde{w}^2 = \\ & = - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau] \tilde{u}_\tau^- - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau] \tilde{u}_\tau^- + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \tilde{v}^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \tilde{w}^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \tilde{v}^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \tilde{w}^2 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения (1.66). Следовательно, применяя (1.66),

(1.68) и (1.71) к (1.78), мы получим (1.72) и (1.73).

Для получения следующего условия рассмотрим гладкие функции $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in K_4$, такие что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $[\tilde{u}_\nu] = 0$, $\tilde{u}_\nu^- = \tilde{v}^i$, $\tilde{u}_\tau^- = \tilde{w}^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, $[(\tilde{w}(0), \tilde{v}(0))]^0 \nu_0 \geq 0$. Возьмем в (1.77) в качестве пробных элементы $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$; проинтегрируем по частям и, принимая во внимание уравнения (1.65), запишем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \tilde{v}^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \tilde{w}^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \tilde{v}^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \tilde{w}^2 - \\ & - v_{xxx}^1 \tilde{v}^1|_0^1 + v_{xx}^1 \tilde{v}_x^1|_0^1 + w_x^1 \tilde{w}^1|_0^1 - v_{xxx}^2 \tilde{v}^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \tilde{v}_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 \tilde{w}^2|_{-1}^0 \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая (1.66), (1.68), (1.70) и (1.71), перепишем последнее неравенство в виде:

$$\begin{aligned} & -v_{xxx}^1 \tilde{v}^1(1) + v_{xx}^1 \tilde{v}_x^1(1) + w_x^1 \tilde{w}^1(1) + v_{xxx}^1 \tilde{v}^1(0) - v_{xx}^1 \tilde{v}_x^1(0) - w_x^1 \tilde{w}^1(0) - \\ & - v_{xxx}^2 \tilde{v}^2(0) + v_{xx}^2 \tilde{v}_x^2(0) + w_x^2 \tilde{w}^2(0) + v_{xxx}^2 \tilde{v}^2(-1) - v_{xx}^2 \tilde{v}_x^2(-1) - w_x^2 \tilde{w}^2(-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, с учетом полученных условий (1.72) и (1.73), мы получим (1.74).

Осталось показать выполнение равенства (1.75). Выберем в (1.77) тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u, v, w)$ и $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$. Проинтегрировав по частям и используя (1.65), найдем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot u] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu \cdot u] - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot u] + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 v^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 w^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 v^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 w^2 - \\ & - v_{xxx}^1 v^1|_0^1 + v_{xx}^1 v_x^1|_0^1 + w_x^1 w^1|_0^1 - v_{xxx}^2 v^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 v_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 w^2|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (1.66), (1.68), (1.70) и (1.71), следует условие (1.75). Таким образом, доказано, что из (1.77) вытекают все соотношения (1.65)–(1.75).

Докажем теперь утверждение теоремы в обратную сторону. Пусть выполнены (1.65)–(1.75). Возьмем функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4$ и умножим (1.65) на $(\bar{u} - u)$, (1.66) на $(\bar{v}^1 - v^1)(\bar{v}^2 - v^2)$, $(\bar{w}^1 - w^1)$, $(\bar{w}^2 - w^2)$ соответственно. Проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i , $i = 1, 2$, где $(u, v, w) \in K_4$ – решение задачи

(1.65)–(1.75). После сложения мы получим равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} (v_{xxxx}^1 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^1 - v^1) + \int_{\gamma_1} (-w_{xx}^1 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^1 - w^1) + \\ & + \int_{\gamma_2} (v_{xxxx}^2 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^2 - v^2) + \int_{\gamma_2} (-w_{xx}^2 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^2 - w^2) = 0. \end{aligned}$$

Далее, проинтегрировав по частям, мы получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1(\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1(\bar{w}_x^1 - w_x^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau](\bar{w}^1 - w^1) + \\ & + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2(\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2(\bar{w}_x^2 - w_x^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{v}^2 - v^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau](\bar{w}^2 - w^2) + \\ & + v_{xxx}^1(\bar{v}^1 - v^1) \big|_0^1 - v_{xx}^1(\bar{v}_x^1 - v_x^1) \big|_0^1 - w_x^1(\bar{w}^1 - w^1) \big|_0^1 + v_{xxx}^2(\bar{v}^2 - v^2) \big|_{-1}^0 - \\ & - v_{xx}^2(\bar{v}_x^2 - v_x^2) \big|_{-1}^0 - w_x^2(\bar{w}^2 - w^2) \big|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Применив краевые условия (1.68), (1.72), (1.73) и (1.75), а также разложения $[\sigma_\nu]u = [\sigma_\nu]u_\nu + [\sigma_\tau]u_\tau$, $[\sigma_\nu]\bar{u} = [\sigma_\nu]\bar{u}_\nu + [\sigma_\tau]\bar{u}_\tau$, запишем последнее равенство в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1(\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1(\bar{w}_x^1 - w_x^1) + \\ & + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2(\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2(\bar{w}_x^2 - w_x^2) = - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - \\ & - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+(\bar{u}_\nu^+ - u_\nu^+) + \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^-(\bar{u}_\nu^- - u_\nu^-) - \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^+(\bar{u}_\tau^+ - u_\tau^+) + \\ & + \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^-(\bar{u}_\tau^- - u_\tau^-) - \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+(\bar{u}_\nu^+ - u_\nu^+) + \int_{\gamma_2} \sigma_\nu^-(\bar{u}_\nu^- - u_\nu^-) - \int_{\gamma_2} \sigma_\tau^+(\bar{u}_\tau^+ - u_\tau^+) + \\ & + \int_{\gamma_2} \sigma_\tau^-(\bar{u}_\tau^- - u_\tau^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\gamma_2} \sigma_{\tau}^{-}(\bar{u}_{\tau}^{-} - u_{\tau}^{-}) + \int_{\gamma_1} \sigma_{\nu}^{+}(\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} \sigma_{\nu}^{-}(\bar{v}^1 - v^1) + \int_{\gamma_1} \sigma_{\tau}^{+}(\bar{w}^1 - w^1) - \\
& - \int_{\gamma_1} \sigma_{\tau}^{-}(\bar{w}^1 - w^1) + \int_{\gamma_2} \sigma_{\nu}^{+}(\bar{v}^2 - v^2) - \int_{\gamma_2} \sigma_{\nu}^{-}(\bar{v}^2 - v^2) + \int_{\gamma_2} \sigma_{\tau}^{+}(\bar{w}^2 - w^2) - \\
& - \int_{\gamma_2} \sigma_{\tau}^{-}(\bar{w}^2 - w^2) + v_{xxx}^1 \bar{v}^1(0) - w_x^1 \bar{w}^1(0) - v_{xxx}^2 \bar{v}^2(0) + w_x^2 \bar{w}^2(0).
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (1.70) и (1.71), запишем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{\gamma}^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_{\gamma}^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1(\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1(\bar{w}_x^1 - w_x^1) + \\
& + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2(\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2(\bar{w}_x^2 - w_x^2) = - \int_{\Gamma_c} \sigma_{\nu}[\bar{u}_{\nu}] - \int_{\gamma_1} \sigma_{\nu}^{+}[\bar{u}_{\nu}] - \\
& - \int_{\gamma_2} \sigma_{\nu}^{+}[\bar{u}_{\nu}] + v_{xxx}^1 \bar{v}^1(0) - w_x^1 \bar{w}^1(0) - v_{xxx}^2 \bar{v}^2(0) + w_x^2 \bar{w}^2(0). \quad (1.79)
\end{aligned}$$

Заметим, что в правой части равенства (1.79) первые три слагаемые неотрицательны благодаря (1.68), (1.71) и неравенствам $[\bar{u}_{\nu}] \geq 0$ на $\Gamma_c, \gamma_1, \gamma_2$ соответственно. Неотрицательность суммы остальных слагаемых следует из условия (1.74). Таким образом, из (1.79) вытекает вариационное неравенство (1.77). Теорема полностью доказана. $\square$

Замечание. В частном случае задачи (1.65)–(1.75), когда кривая Γ_c , которая соответствует трещине, пересекает прямолинейно включение $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ (см. рис. 1.4), постановка задачи будет следующей. Найти $u = (u_1, u_2)$, σ , v^i, w^i , $i = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_{\gamma}^c, \quad (1.80)$$

$$v_{xxxx}^i = [\sigma_{\nu}], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_{\tau}] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.81)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.82)$$

$$[u_{\nu}] \geq 0, \quad \sigma_{\nu} \leq 0, \quad [\sigma_{\nu}] = 0, \quad \sigma_{\tau}^{+} = 0, \quad \sigma_{\tau}^{-} = 0, \quad \sigma_{\nu}[u_{\nu}] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.83)$$

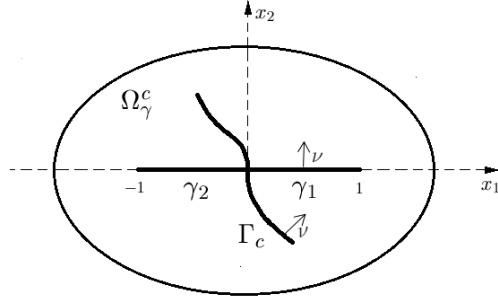


Рисунок 1.4 — Трещина Γ_c прямолинейно пересекает включение

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$$

$$w^1(0) - w^2(0) \geq 0, \quad (1.84)$$

$$v^1 = u_\nu, \quad w^1 = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.85)$$

$$v^2 = u_\nu^-, \quad w^2 = u_\tau^- \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.86)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xxx}^1 = w_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx}^2 = v_{xxx}^2 = w_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad (1.87)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xx}^2 = v_{xxx}^1 = v_{xxx}^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.88)$$

$$(w_x^1 w^1)(0) - (w_x^2 w^2)(0) = 0, \quad (1.89)$$

$$-(w_x^1 \bar{w}^1)(0) + (w_x^2 \bar{w}^2)(0) \geq 0 \quad \forall \bar{w}^i \in H^1(\gamma_i), \quad \bar{w}^1(0) - \bar{w}^2(0) \geq 0, \quad (1.90)$$

$i = 1, 2$.

Действительно, из соотношений (1.65)–(1.75) в случае прямолинейного пересечения включения следует (1.80)–(1.90). Действительно, поскольку в данном случае $\nu_0 = (1, 0)$, условие непроникания (1.69) примет вид (1.84), а именно

$$[(w(0), v(0))]^0 \nu_0 = ((w^1(0), v^1(0)) - (w^2(0), v^2(0))) \nu_0 = w^1(0) - w^2(0) \geq 0.$$

Таким образом, условия сопряжения (1.73)–(1.75) в точке контакта можно выразить в виде (1.88)–(1.90). В этом случае, помимо равенства моментов нулю, мы также получаем равенства поперечных сил, что соответствует уравнениям (1.88).

1.3 Сопряжение жесткого и упругого включений

В этом разделе мы рассмотрим случай, в котором $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ соответствует упругому включению, а γ_2 – жесткому включению (см. рис. 1.5). Упругое включение, как и ранее, моделируется с помощью балки Бернулли – Эйлера. Предполагается, что жесткое включение отслаивается на границе γ_2^+ . Целью данного исследования является получение условий в точке сопряжения и представление корректных вариационных и дифференциальных постановок. Также будет осуществлен анализ предельного перехода при стремлении параметра жесткости включений к бесконечности.

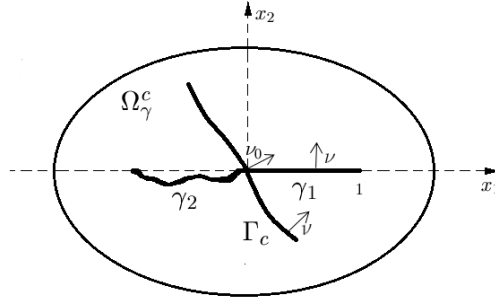


Рисунок 1.5 — Сопряжение тонкого упругого включения γ_1 с жестким включением γ_2

1.3.1 Постановка задачи

Задача равновесия в данном случае формулируется следующим образом: требуется найти $\rho^0 \in R(\gamma_2)$ и функции u, σ, v, w , определенные в $\Omega_\gamma^c, \Omega_\gamma^c, \gamma_1, \gamma_1$ соответственно, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.91)$$

$$v_{xxxx} = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.92)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.93)$$

$$u|_{\gamma_2^-} = \rho^0, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \quad (1.94)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.95)$$

$$v = u_\nu, \quad w = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.96)$$

$$((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.97)$$

$$v_{xx} = v_{xxx} = w_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.98)$$

$$(v_{xxx}\tilde{v})(0) - (w_x\tilde{w})(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho \geq 0 \quad \forall \rho \in R(\gamma_2), \quad (1.99)$$

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\tilde{w}(0), \tilde{v}(0)) - \rho(0))\nu_0 \geq 0,$$

$$(v_{xxx}v)(0) - (w_xw)(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho^0 = 0. \quad (1.100)$$

Неравенство (1.97) обеспечивает непроникание тонкого упругого включения γ_1 и тонкого жесткого включения γ_2 друг в друга в точке O . Соотношения (1.99) и (1.100) задают условия сопряжения при $x = 0$. Теперь мы перейдем к вариационной формулировке задачи (1.91)–(1.100). Для этого мы введем множество допустимых перемещений

$$K_5 = \{(u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu, \quad w = u_\tau \text{ на } \gamma_1;$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2); \quad ((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0\},$$

и определим функционал энергии:

$$\Pi_3(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (v_{xx})^2 + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (w_x)^2.$$

Множество K_5 является выпуклым и замкнутым, следовательно, оно также слабо замкнуто в пространстве $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1)$. Мы можем решить задачу минимизации функционала энергии

$$\Pi_3(u, v, w) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_5} \Pi_3. \quad (1.101)$$

Задача (1.101) имеет решение, так как функционал обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу, а также удовлетворяет вариационному неравенству:

$$(u, v, w) \in K_5, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ + \int_{\gamma_1} v_{xx}(\bar{v}_{xx} - v_{xx}) + \int_{\gamma_1} w_x(\bar{w}_x - w_x) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_5. \quad (1.102)$$

Более того, решение (1.102) является единственным.

Теорема 1.6. *Краевая задача (1.91)–(1.100) эквивалентна вариационной задаче (1.102) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Сначала покажем, что из вариационного неравенства (1.102) можно вывести все краевые условия (1.91)–(1.100). В частности, рассмотрим выполнение условий сопряжения (1.99) и (1.100) в точке $x = 0$. Поскольку условия (1.92), (1.96) и (1.97) входят во множество K_5 , остальные краевые условия можно получить аналогично приведенным ранее доказательствам.

Докажем, что из неравенства (1.102) следует (1.99). Пусть $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1)$ – произвольные гладкие функции, такие что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $\tilde{u}_\nu = \tilde{v}$, $\tilde{u}_\tau = \tilde{w}$ на γ_1 , $\tilde{u}|_{\gamma_2^-} = \rho$, $\rho \in R(\gamma_2)$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ_2 , $((\tilde{w}(0), \tilde{v}(0)) - \rho(0))\nu_0 \geq 0$. Подставим функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ как элементы множества K_5 в вариационное неравенство (1.102). После интегрирования по частям и применения уравнения (1.91), получим

$$- \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \tilde{u} + \int_{\gamma_1} v_{xxxx} \tilde{v} - \int_{\gamma_1} w_{xx} \tilde{w} - \\ - v_{xxx} \tilde{v}|_0^1 + v_{xx} \tilde{v}_x|_0^1 + w_x \tilde{w}|_0^1 \geq 0. \quad (1.103)$$

Далее рассмотрим слагаемые неравенства (1.103) по отдельности. Первое слагаемое $-\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] = 0$ благодаря условиям (1.95) и равенству $[\tilde{u}_\nu] = 0$.

Второе слагаемое, в силу условий $\tilde{u}|_{\gamma_2^-} = \rho$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ и (1.94), упрощается

следующим образом:

$$\begin{aligned}
-\int_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot \tilde{u}] &= -\int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot \tilde{u}^+ + \int_{\gamma_2} \sigma^- \nu \cdot \tilde{u}^- = -\int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot (\tilde{u}^+ + \rho - \rho) + \int_{\gamma_2} \sigma^- \nu \cdot \tilde{u}^- = \\
&= -\int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho - \int_{\gamma_2} \sigma^+ \nu \cdot [\tilde{u}] = -\int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho;
\end{aligned}$$

В результате разложения $[\sigma\nu] \cdot \tilde{u} = [\sigma_\nu] \cdot \tilde{u}_\nu - [\sigma_\tau] \cdot \tilde{u}_\tau$, условий $\tilde{u}_\nu = \tilde{v}$, $\tilde{u}_\tau = \tilde{w}$ и уравнений (1.92) мы получаем, что $-\int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot \tilde{u} + \int_{\gamma_1} v_{xxxx} \tilde{v} - \int_{\gamma_1} w_{xx} \tilde{w} = 0$. Благодаря краевым условиям (1.98) сумма оставшихся слагаемых примет следующий вид: $-v_{xxx} \tilde{v} \big|_0^1 + v_{xx} \tilde{v}_x \big|_0^1 + w_x \tilde{w} \big|_0^1 = (v_{xxx} \tilde{v})(0) - (w_x \tilde{w})(0)$. Следовательно, из (1.103) получим неравенство

$$-\int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho + (v_{xxx} \tilde{v})(0) - (w_x \tilde{w})(0) \geq 0,$$

что соответствует краевому условию (1.99).

Проверим справедливость равенства (1.100). Подставим $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u, v, w)$ и $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ в качестве пробных элементов в вариационное неравенство (1.102). В результате мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot u] - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot u] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot u + \int_{\gamma_1} v_{xxxx} v - \int_{\gamma_1} w_{xx} w \\
&- v_{xxx} v \big|_0^1 + v_{xx} v_x \big|_0^1 + w_x w \big|_0^1 = 0.
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Теперь разберем равенство (1.104) по частям.

1. Из краевых условий (1.95) следует, что $-\int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot u] = 0$.
2. Согласно (1.94) мы имеем $-\int_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot u] = -\int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \cdot \rho^0$.
3. Используя (1.92) и (1.96), можем записать: $-\int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \cdot u + \int_{\gamma_1} v_{xxxx} v - \int_{\gamma_1} w_{xx} w = 0$.
4. Применяя (1.98), мы получаем: $-v_{xxx} v \big|_0^1 + v_{xx} v_x \big|_0^1 + w_x w \big|_0^1 = (v_{xxx} v)(0) - (w_x w)(0)$. Таким образом, из равенства (1.104) мы можем

вывести краевое условие (1.100). В итоге, из вариационного неравенства (1.102) следует, что выполняются все условия (1.91)–(1.100).

Пусть теперь справедливы соотношения (1.91)–(1.100). Рассмотрим функцию $(u, v, w) \in K_5$, которая является решением задачи (1.91)–(1.100), и выберем произвольную функцию $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_5$, такую что $\bar{u}|_{\gamma_2^-} = \rho$, $\rho \in R(\gamma_2)$. Умножим (1.91) на $(\bar{u} - u)$, (1.92) на $(\bar{v} - v)$ и $(\bar{w} - w)$; проинтегрируем по области Ω_γ^c и кривой γ_1 соответственно. Затем сложим полученные интегралы:

$$\int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} (v_{xxxx} - [\sigma_\nu])(\bar{v} - v) + \int_{\gamma_1} (-w_{xx} - [\sigma_\tau])(\bar{w} - w) = 0.$$

После интегрирования по частям запишем последнее равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}(\bar{v}_{xx} - v_{xx}) + \int_{\gamma_1} w_x(\bar{w}_x - w_x) = \\ & = - \int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] + \\ & \quad + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{v} - v) + \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau](\bar{w} - w) - \\ & \quad - v_{xxx}(\bar{v} - v)|_0^1 + v_{xx}(\bar{v}_x - v_x)|_0^1 + w_x(\bar{w} - w)|_0^1. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Чтобы доказать, что вариационное неравенство (1.102) верно, нам нужно показать, что правая часть равенства (1.105) неотрицательна. Для этого будем рассматривать слагаемые правой части (1.105) по отдельности. При этом будем использовать разложения:

$$[\sigma_\nu] \cdot u = [\sigma_\nu] \cdot u_\nu - [\sigma_\tau] \cdot u_\tau, \quad [\sigma_\nu] \cdot \tilde{u} = [\sigma_\nu] \cdot \tilde{u}_\nu - [\sigma_\tau] \cdot \tilde{u}_\tau. \quad (1.106)$$

Для первого слагаемого правой части (1.105) применим условия (1.95) и разложения (1.106), получим: $-\int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] = -\int_{\Gamma_c} \sigma_\nu \cdot [\bar{u}_\nu]$, где $-\int_{\Gamma_c} \sigma_\nu \cdot$

$[\bar{u}_\nu] \geq 0$. Поскольку $\sigma_\nu \leq 0$ и $[\bar{u}_\nu] \geq 0$, то

$$-\int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] \geq 0.$$

Далее, используя разложения (1.106), (1.96) и равенства $\bar{u}_\nu = \bar{v}$, $\bar{u}_\tau = \bar{w}$, можно сделать вывод, что

$$-\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] (\bar{v} - v) + \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau] (\bar{w} - w) = 0.$$

Теперь рассмотрим сумму оставшихся слагаемых правой части равенства (1.105). С учетом разложений (1.106) и краевых условий (1.94), (1.98), (1.99) мы можем записать:

$$\begin{aligned} & -\int_{\gamma_2} [\sigma_\nu (\bar{u} - u)] - v_{xxx}(\bar{v} - v) \big|_0^1 + v_{xx}(\bar{v}_x - v_x) \big|_0^1 + w_x(\bar{w} - w) \big|_0^1 = \\ & = -\int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ [\bar{u}_\nu] - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho + (v_{xxx} \bar{v})(0) - (w_x \bar{w})(0). \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства выполняется $-\int_{\gamma_2} \sigma_\nu^+ [\bar{u}_\nu] \geq 0$, так как $\sigma_\nu^+ \leq 0$, $[\bar{u}_\nu] \geq 0$. Сумма остальных слагаемых неотрицательна благодаря краевому условию (1.99). Таким образом, мы доказали, что правая часть равенства (1.105) неотрицательна. Следовательно, из (1.105) вытекает вариационное неравенство (1.102). Теорема полностью доказана. $\square$

Замечание. В дополнение к (1.91)–(1.100) можно выписать еще одну дифференциальную формулировку задачи (1.102). Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$ и σ , определенные в Ω_γ^c , перемещения точек тонкого включения v, w , определенные на γ_1 , а также постоянные c_1^0, c_2^0 функции $\rho^0 \in R(\gamma_2)$ такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.107)$$

$$v_{xxxx} = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.108)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.109)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\tau^- = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.110)$$

$$u|_{\gamma_2^-} = \rho^0, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \quad (1.111)$$

$$v = u_\nu^-, \quad w = u_\tau^-, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.112)$$

$$((w(0), v(0)) - (c_1^0, c_2^0))\nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.113)$$

$$v_{xx} = v_{xxx} = w_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.114)$$

$$\int_{\gamma_2} [\sigma^2] x_1 - \int_{\gamma_2} [\sigma^1] x_2 = 0, \quad (1.115)$$

$$c_1^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_2^0 \int_{\gamma_2} [\sigma^2] - (v_{xxx}v)(0) + (w_x w)(0) = 0, \quad (1.116)$$

$$-c_1 \int_{\gamma_2} [\sigma^1] - c_2 \int_{\gamma_2} [\sigma^2] + (v_{xxx}\bar{v})(0) - (w_x \bar{w})(0) \geq 0 \quad \forall \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad (1.117)$$

$$(\bar{v}, \bar{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\bar{w}(0), \bar{v}(0)) - (c_1, c_2))\nu_0 \geq 0,$$

где $\rho = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2)$, $\rho \in R(\gamma_2)$.

Формулировка (1.107)–(1.117) следует из (1.91)–(1.100). Неравенство (1.113) представляет собой условие непроникания в точке сопряжения. Давайте это продемонстрируем. Поскольку $\rho^0(0,0) = (c_1^0, c_2^0)$ в точке сопряжения, условие непроникания из (1.97) примет следующий вид:

$$((w(0), v(0)) - \rho^0(0,0))\nu_0 = ((w(0), v(0)) - (c_1^0, c_2^0))\nu_0 \geq 0.$$

В результате этого условия сопряжения (1.99)–(1.100) будут выглядеть как (1.115)–(1.117). В этом случае равенство (1.115) обеспечивает, что главный момент силы, действующий на γ_2 , равен нулю.

1.3.2 Пределный переход

Для упрощения в моделях (1.91)–(1.100) физические параметры тонкого включения были установлены равными единице. В этом разделе мы введем параметр жесткости λ в модель и проанализируем предельный переход при стремлении этого параметра к бесконечности.

Дифференциальная формулировка семейства задач, зависящая от положительного параметра λ , будет следующей. Требуется найти $\rho^{\lambda_0} \in R(\gamma_2)$ и функции $u^\lambda, \sigma^\lambda, v^\lambda, w^\lambda$, которые определены в $\Omega_\gamma^c, \Omega_\gamma^c, \gamma_1, \gamma_1$ соответственно, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = f, \quad \sigma^\lambda = A\varepsilon(u^\lambda) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.118)$$

$$\lambda v_{xxxx}^\lambda = [\sigma_\nu^\lambda], \quad -\lambda w_{xx}^\lambda = [\sigma_\tau^\lambda] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.119)$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.120)$$

$$u^\lambda|_{\gamma_2^-} = \rho^{\lambda_0}, \quad [u_\nu^\lambda] \geq 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} \leq 0, \quad \sigma_\tau^{\lambda+} = 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} \cdot [u_\nu^\lambda] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \quad (1.121)$$

$$[u_\nu^\lambda] \geq 0, \quad \sigma_\nu^\lambda \leq 0, \quad [\sigma_\nu^\lambda] = 0, \quad \sigma_\tau^\lambda = 0, \quad \sigma_\nu^\lambda \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.122)$$

$$v^\lambda = u_\nu^\lambda, \quad w^\lambda = u_\tau^\lambda \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (1.123)$$

$$((w^\lambda(0), v^\lambda(0)) - \rho^{\lambda_0}(0))\nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.124)$$

$$v_{xx}^\lambda = v_{xxx}^\lambda = w_x^\lambda = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx}^\lambda = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.125)$$

$$\lambda(v_{xxx}^\lambda \tilde{v})(0) - \lambda(w_x^\lambda \tilde{w})(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma^\lambda \nu] \rho \geq 0 \quad \forall \rho \in R(\gamma_2), \quad (1.126)$$

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\tilde{w}(0), \tilde{v}(0)) - \rho(0))\nu_0 \geq 0,$$

$$\lambda(v_{xxx}^\lambda v^\lambda)(0) - \lambda(w_x^\lambda w^\lambda)(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma^\lambda \nu] \rho^{\lambda_0} = 0. \quad (1.127)$$

Параметр λ характеризует жесткость упругого включения γ_1 . Для каждого фиксированного значения параметра λ существует единственное решение $(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ краевой задачи (1.118)–(1.127). Эту задачу можно также представить в вариационном виде: необходимо найти функции $(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in$

K_5 , такие что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) + \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^\lambda (\bar{v}_{xx} - v_{xx}^\lambda) + \\ & + \lambda \int_{\gamma_1} w_x^\lambda (\bar{w}_x - w_x^\lambda) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_5. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Эквивалентность задач (1.118)–(1.127) и (1.128) на классе гладких решений при фиксированном $\lambda > 0$ может быть доказана аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе.

Подставляя в (1.128) тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$, мы можем записать равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u^\lambda + \\ & + (\alpha - \alpha) \int_{\gamma_1} ((v^\lambda)^2 + (w^\lambda)^2) + \lambda \int_{\gamma_1} ((v_{xx}^\lambda)^2 + (w_x^\lambda)^2) = 0, \end{aligned} \quad (1.129)$$

где $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. С учетом условий $u_\nu^\lambda = v^\lambda$, $u_\tau^\lambda = w^\lambda$ на γ_1 , неравенства Корна и теоремы вложения при малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \alpha \int_{\gamma_1} ((v^\lambda)^2 + (w^\lambda)^2) \geq 0.$$

Тогда из равенства (1.129), при $\lambda \geq \alpha$ применяя неравенство Корна, неравенства из теории Соболевских пространств и неравенство Коши, получим равномерную по $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$, $\lambda_0 = \text{const}$ оценку:

$$c_0 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 - c_1 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 + \alpha \|v^\lambda\|_{H^2(\gamma_1)}^2 + \alpha \|w^\lambda\|_{H^1(\gamma_1)}^2 \leq 0.$$

При этом $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ не зависят от λ . Следовательно, получим ограниченность решений:

$$\|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 \leq c_2, \quad \|v^\lambda\|_{H^2(\gamma_1)}^2 \leq c_3, \quad \|w^\lambda\|_{H^1(\gamma_1)}^2 \leq c_4, \quad c_2, c_3, c_4 > 0.$$

Полученные оценки влекут существование таких подпоследовательностей, для которых при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливы

$$u^\lambda \rightarrow u \quad \text{слабо в} \quad H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, \quad (1.130)$$

$$v^\lambda \rightarrow v \quad \text{слабо в} \quad H^2(\gamma_1), \quad (1.131)$$

$$w^\lambda \rightarrow w \quad \text{слабо в} \quad H^1(\gamma_1). \quad (1.132)$$

Далее заметим, что из равенства (1.129) при $\lambda \geq \lambda_0$ также можем получить неравенство

$$\lambda \int_{\gamma_1} (v_{xx}^\lambda) \leq c_5.$$

Переходя к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства и учитывая слабую полунепрерывность снизу, мы получаем $v_{xx} = 0$. Следовательно, можем записать

$$v_{xx} = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1. \quad (1.133)$$

Из этого следует

$$v(x) = a_1 + a_2 x, \quad w(x) = a_3, \quad x \in (0,1); \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

что означает $u|_{\gamma_1} \in R(\gamma_1)$. Также можем записать

$$\rho^\lambda \rightarrow \rho^0 \quad \text{почти всюду на} \quad \gamma_2.$$

Теперь определим множество допустимых перемещений для дальнейшего исследования:

$$K_6 = \{v = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \mid v|_{\gamma_i^-} \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2;$$

$$[v]\nu \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad [\rho]^0 \nu_0 \geq 0\}.$$

На основе полученных сходимостей (1.130)–(1.132) мы покажем, как перейти к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ в вариационном неравенстве (1.128).

Выберем произвольную функцию $\bar{u} \in K_6$. Очевидно, что выполняется $(\bar{u}, \bar{u}_2|_{\gamma_1}, \bar{u}_1|_{\gamma_1}) \in K_5$. Обозначим $(\bar{u}, \bar{u}_2|_{\gamma_1}, \bar{u}_1|_{\gamma_1})$ через $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Подставив элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в (1.128), мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) &\geq \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^\lambda (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^\lambda) - \\ &- \lambda \int_{\gamma_1} w_x^\lambda (\bar{w}_x^1 - w_x^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda} (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^{2\lambda}) - \lambda \int_{\gamma_2} w_x^{2\lambda} (\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}). \end{aligned}$$

Перейдем к нижнему пределу используя полученные сходимости в обеих частях последнего неравенства. Для левой части мы получаем

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) \right\} = \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

А для правой части, используя слабую полунепрерывность снизу и очевидные неравенства

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\gamma_1} (v_{xx}^\lambda)^2 \geq 0, \quad \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_{\gamma_1} (w_x^\lambda)^2 \geq 0,$$

мы также получаем

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^\lambda (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_1} w_x^\lambda (\bar{w}_x^1 - w_x^\lambda) \right\} \geq \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u).$$

Следовательно, для предельной функции u мы имеем вариационное неравенство

$$u \in K_6, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_6. \quad (1.134)$$

Таким образом, предельная задача (1.134) для семейства задач (1.128) при $\lambda \rightarrow \infty$ характеризует равновесие упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение с отслоением на γ_2^+ .

Наряду с вариационной постановкой задачи (1.134) существует эквивалентная дифференциальная формулировка, которая заключается в следующем: требуется найти функции $u = (u_1, u_2), \rho_i^0 \in R(\gamma_i), \sigma = \{\sigma_{ij}\}, i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c,$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2^-} = \rho_2^0, \quad [\rho^0]^0 \nu_0 \geq 0,$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2,$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u]\nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c,$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma\nu]\rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho_2 \leq 0 \quad \forall \quad \rho_i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad [\rho]^0 \nu_0 \geq 0,$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma\nu]\rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho_2^0 = 0.$$

Отметим без доказательства, что приведенная задача эквивалентна вариационному неравенству (1.134) при условии достаточной гладкости решений.

1.4 О сопряжении тонких упругих включений Тимошенко

В рамках данного раздела принимается модель балки Тимошенко для описания поведения тонких включений $\gamma_1 = (0, 1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1, 0) \times \{0\}$ (см. рис. 1.1). Основной задачей раздела является доказательство теоремы существования и единственности решения и отыскание краевых условий в точке сопряжения для дифференциальной постановки. При этом здесь исследованы два случая: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения, и 2) когда имеется отслоение одного из сопряженных включений. А также будет исследован предельный переход при стремлении параметра жесткости

включений к бесконечности.

Функции v^i, w^i будут описывать вертикальные и горизонтальные перемещения, а φ^i – углы поворота нормального сечения включений γ_i , $i = 1, 2$.

1.4.1 Случай без отслоения

В этом разделе мы рассматриваем задачу равновесия упругого тела с трещиной и тонкими упругими включениями без отслоения. Для данной задачи будет приведена вариационная постановка, доказаны существование и единственность решения, а также сформулирована дифференциальная постановка, которая эквивалентна вариационной.

Рассмотрим вариационную постановку задачи. С этой целью введем множество допустимых функций:

$$K_7 = \{(u, v^i, w^i, \varphi^i) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, (v^i, w^i, \varphi^i) \in H^1(\gamma_i)^3, v^i = u_\nu, w^i = u_\tau \text{ на } \gamma_i, i = 1, 2; [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c; ((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0\}.$$

Приведем значение условий, которые входят в определение множества K_7 . Равенства $v^i = u_\nu$, $w^i = u_\tau$ на γ_i означают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i , $i = 1, 2$. Неравенство $[u_\nu] \geq 0$ описывает контактное взаимодействие берегов трещины Γ_c , допуская два возможных состояния: контакт (при выполнении равенства) или расхождение (при строгом неравенстве). При этом оно гарантирует отсутствие взаимного проникновения берегов трещины. Условие непроникновения выполняется почти всюду на Γ_c , поэтому в точке $(0, 0)$ допускается взаимное проникание включений γ_1 и γ_2 друг в друга. Условие $((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0$ гарантирует непроникание включений γ_1 и γ_2 в точке контакта.

Введем функционал энергии

$$\Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i)^2 + (\varphi_x^i)^2 + (v_x^i + \varphi^i)^2 \right\}.$$

В этом разделе здесь и далее по тексту считаем, что $i = 1, 2$, а также $v_x = \frac{dv}{dx}$, $x = x_1, (x_1, x_2) \in \Omega$.

Теорема 1.7. *Задача минимизации:*

$$\text{найти } (u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_7, \text{ так что } \Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \inf_{K_7} \Pi_4$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_7, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \geq 0 \\ \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Доказательство. Множество K_1 в силу выпуклости и замкнутости будет слабо замкнутым. Функционал Π_4 является слабо полунепрерывным снизу. Доказательство этого свойства мы приводить не будем, поскольку с аналогичной схемой рассуждения можно ознакомиться в [27]. Таким образом, для доказательства существования решения нам достаточно показать коэрцитивность функционала Π_4 . Итак, при $(u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_7$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i)^2 + (\varphi_x^i)^2 + (v_x^i + \varphi^i)^2 \right\} \pm \\ \pm \alpha \int_{\gamma_1} ((v^1)^2 + (w^1)^2) \pm \beta \int_{\gamma_2} ((v^2)^2 + (w^2)^2). \end{aligned}$$

В силу неравенства Корна, непрерывности вложения пространства $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}^c)$ в $L^2(\gamma_i)$ и условий $u_{\nu} = v^i$, $u_{\tau} = w^i$ на γ_i при малых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ будут справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_{\Omega_{\gamma}^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \alpha \int_{\gamma_1} ((v^1)^2 + (w^1)^2) &\geq 0, \\ \frac{1}{8} \int_{\Omega_{\gamma}^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \beta \int_{\gamma_2} ((v^2)^2 + (w^2)^2) &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Используя результаты леммы, приведенной в [57], получаем существование констант $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, не зависящих от выбора функций, такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \left\{ (w_x^1)^2 + (\varphi_x^1)^2 + (v_x^1 + \varphi^1)^2 \right\} + \alpha \int_{\gamma_1} ((v^1)^2 + (w^1)^2) &\geq \\ &\geq c_2 \left\| (v^1, w^1, \varphi^1) \right\|_{H^1(\gamma_1)^3}^2, \\ \int_{\gamma_2} \left\{ (w_x^2)^2 + (\varphi_x^2)^2 + (v_x^2 + \varphi^2)^2 \right\} + \beta \int_{\gamma_2} ((v^2)^2 + (w^2)^2) &\geq \\ &\geq c_3 \left\| (v^2, w^2, \varphi^2) \right\|_{H^1(\gamma_2)^3}^2. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Учитывая (1.136), (1.137), неравенства Корна и Коши, для функционала энергии запишем

$$\begin{aligned} \Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) &\geq c_0 \|u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}^c)}^2 - c_1 \|u\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}^c)}^2 + c_2 \left\| (v^1, w^1, \varphi^1) \right\|_{H^1(\gamma_1)^3}^2 + \\ &+ c_3 \left\| (v^2, w^2, \varphi^2) \right\|_{H^1(\gamma_2)^3}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует коэрцитивность функционала Π_4 на множестве K_7 .

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что задача (1.135) имеет два решения: (u, v^i, w^i, φ^i) и $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$. Поскольку неравенство справедливо для всех $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7$, в неравенство для первого решения (u, v^i, w^i, φ^i) в качестве пробного элемента $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i)$ возьмем второе решение $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$. Также в неравенство для второго решения $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$ подставим $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i)$. После

этого сложим полученные неравенства. Тогда с одной стороны, верно соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i - \tilde{w}_x^i)^2 + (\varphi_x^i - \tilde{\varphi}_x^i)^2 \right\} + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i - \tilde{v}_x^i - \tilde{\varphi}^i)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, из рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства коэрцитивности функционала Π_4 , справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i - \tilde{w}_x^i)^2 + (\varphi_x^i - \tilde{\varphi}_x^i)^2 \right\} + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i - \tilde{v}_x^i - \tilde{\varphi}^i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u}) \varepsilon(u - \tilde{u}) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i - \tilde{w}_x^i)^2 + (\varphi_x^i - \tilde{\varphi}_x^i)^2 \right\} + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i - \tilde{v}_x^i - \tilde{\varphi}^i)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к необходимому противоречию: $(u, v^i, w^i, \varphi^i) = (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$. Таким образом, задача (1.135) имеет единственное решение.

Теорема полностью доказана. $\square$

Приведем дифференциальную формулировку задачи (1.135). Данная постановка состоит в следующем: для заданных внешних сил $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ требуется найти $u = (u_1, u_2)$, σ , определенные в Ω_γ^c , и функции v^i, w^i ,

φ^i , определенные на γ_i , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1.138)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.139)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (1.140)$$

$$-v_{xx}^i - \varphi_x^i = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_\tau], \quad -\varphi_{xx}^i + v_x^i + \varphi^i = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.141)$$

$$v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (1.142)$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 + v_x^1 &= w_x^1 = \varphi_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \\ \varphi^2 + v_x^2 &= w_x^2 = \varphi_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \end{aligned} \quad (1.143)$$

$$((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0, \quad (1.144)$$

$$\varphi_x^1(0) = \varphi_x^2(0) = 0, \quad (1.145)$$

$$(w_x^2 w^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2)v^2(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1)v^1(0) = 0, \quad (1.146)$$

$$(w_x^2 \bar{w}^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2)\bar{v}^2(0) - (w_x^1 \bar{w}^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1)\bar{v}^1(0) \geq 0 \quad (1.147)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar{w}^1, \bar{v}^1)(0) - (\bar{w}^2, \bar{v}^2)(0))\nu_0 \geq 0,$$

$i = 1, 2$. Здесь Уравнения (1.141) представляют собой условия равновесия тонких включений γ_1 и γ_2 , которые строго соответствуют модели балок Тимошенко. Правые части уравнений $[\sigma_\nu], [\sigma_\tau]$ описывают силовое воздействие упругого тела на эти включения. Первая группа краевых условий (1.143) соответствует нулевой перерезывающей силе, нулевой деформации растяжения (сжатия) и нулевому моменту тонкого включения γ_1 в точке $x = 1$; вторая группа краевых условий (1.143) определяет аналогичное для тонкого включения γ_2 в точке $x = -1$. Оставшиеся условия (1.144)–(1.147) описывают сопряжение тонких включений γ_1 и γ_2 в точке $(0, 0)$.

Теорема 1.8. *Дифференциальная постановка (1.138)–(1.147) эквивалентна вариационной задаче (1.135) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Необходимость. Проанализируем вывод полной

системы граничных условий (1.138)–(1.147), следующий из вариационного неравенства (1.135). Получение краевых условий (1.138)–(1.140) мы опустим, поскольку схема доказательства аналогична приведенным доказательствам выше. Обоснуем справедливость (1.141)–(1.147). Возьмем в (1.135) в качестве пробных функций элементы: $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i) \in K_7$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $((\tilde{w}^1, \tilde{v}^1)(0) - (\tilde{w}^2, \tilde{v}^2)(0))\nu_0 = 0$. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f \tilde{u} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i \tilde{w}_x^i + \varphi_x^i \tilde{\varphi}_x^i + (v_x^i + \varphi^i)(\tilde{v}_x^i + \tilde{\varphi}^i) \right\} = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая уравнения равновесия (1.138) и условия (1.140), находим:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\nu] \tilde{u} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^i \tilde{w}^i + (\varphi_{xx}^i - v_x^i - \varphi^i) \tilde{\varphi}^i + (v_{xx}^i + \varphi_x^i) \tilde{v}^i \right\} + \\ & + w_x^1 \tilde{w}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 \tilde{\varphi}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) \tilde{v}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + w_x^2 \tilde{w}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + \\ & + \varphi_x^2 \tilde{\varphi}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) \tilde{v}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Далее выберем в (1.148) тестовые функции, обладающие свойствами:

$$\tilde{v}^i = \tilde{w}^i = \tilde{\varphi}^i = 0 \quad \text{при } x = 0, 1, -1.$$

Получаем равенство:

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu + [\sigma_\tau] \tilde{u}_\tau) - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^i \tilde{w}^i + (\varphi_{xx}^i - v_x^i - \varphi^i) \tilde{\varphi}^i + (v_{xx}^i + \varphi_x^i) \tilde{v}^i \right\} = 0,$$

откуда, благодаря равенствам $\tilde{v}^i = \tilde{u}_\nu$, $\tilde{w}^i = \tilde{u}_\tau$ на γ_i , следуют уравнения (1.141).

Вернемся к равенству (1.148), справедливому для указанных выше

функций $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$. В силу (1.141), мы будем иметь

$$\begin{aligned} & w_x^1 \tilde{w}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 \tilde{\varphi}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) \tilde{v}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ & + w_x^2 \tilde{w}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + \varphi_x^2 \tilde{\varphi}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) \tilde{v}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку на функции $\tilde{v}^i, \tilde{w}^i$ при $x = 1, -1$, а на $\tilde{\varphi}^i$ при $x = 1, -1, 0$ отсутствуют ограничения, из последнего равенства получим краевые условия (1.143) и (1.145).

Подставим теперь в вариационное неравенство (1.135) пробные элементы $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i) + (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$, $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i) \in K_7$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c . Мы имеем:

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f \tilde{u} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i \tilde{w}_x^i + \varphi_x^i \tilde{\varphi}_x^i + (v_x^i + \varphi^i)(\tilde{v}_x^i + \tilde{\varphi}^i) \right\} \geq 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, а также применяя краевые условия (1.138), (1.140)–(1.145), получим неравенство:

$$-w_x^1 \tilde{w}^1(0) - (v_x^1 + \varphi^1) \tilde{v}^1(0) + w_x^2 \tilde{w}^2(0) + (v_x^2 + \varphi^2) \tilde{v}^2(0) \geq 0,$$

которое справедливо для всех функций $(\tilde{v}^i, \tilde{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2$ таких, что $((\tilde{w}^1, \tilde{v}^1)(0) - (\tilde{w}^2, \tilde{v}^2)(0))\nu_0 \geq 0$. Таким образом, мы обосновали, что из (1.135) следует условие (1.147).

И наконец, приступим к доказательству справедливости равенства (1.146). Для этого в вариационное неравенство (1.135) последовательно выберем в роли пробных элементов функции: $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (0, 0, 0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = 2(u, v^i, w^i, \varphi^i)$. В результате получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i w_x^i + \varphi_x^i \varphi_x^i + (v_x^i + \varphi^i)(v_x^i + \varphi^i) \right\} = 0.$$

Интегрирование по частям и применение условий (1.138), (1.140)–(1.142)

здесь дает равенство:

$$\begin{aligned} & w_x^1 w^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 \varphi^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) v^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ & + w_x^2 w^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + \varphi_x^2 \varphi^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) v^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0, \end{aligned}$$

из которого в силу условий (1.143) и (1.145) приходим к справедливости равенства (1.146). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Пусть теперь выполнены все соотношения (1.138)–(1.147). Возьмем $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7$. Умножим (1.138) на $(\bar{u} - u)$, первое равенство в (1.141) на $(\bar{v}^i - v^i)$, второе – на $(\bar{w}^i - w^i)$, третье – на $(\bar{\varphi}^i - \varphi^i)$. Проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i соответственно. Сложим интегралы. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-v_{xx}^i - \varphi_x^i - [\sigma_\nu])(\bar{v}^i - v^i) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-w_{xx}^i - [\sigma_\tau])(\bar{w}^i - w^i) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (-\varphi_{xx}^i + v_x^i + \varphi^i)(\bar{\varphi}^i - \varphi^i) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя это тождество по частям, мы получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}^i - \varphi_x^i) + (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \right\} = \\ & - \int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu (\bar{u} - u)] - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\nu (\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\nu] (\bar{v}^i - v^i) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\tau] (\bar{w}^i - w^i) + \\ & + w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 (\bar{\varphi}^1 - \varphi^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) (\bar{v}^1 - v^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ & + w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2) \Big|_{x=-1}^{x=0} + \varphi_x^2 (\bar{\varphi}^2 - \varphi^2) \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) (\bar{v}^2 - v^2) \Big|_{x=-1}^{x=0}. \end{aligned}$$

Для получения вариационного неравенства (1.135) нам достаточно

показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Покажем это. В силу (1.142), (1.143), (1.145), (1.146) и последних трех условий из (1.140), последнее равенство можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) + (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \right\} = \\ & - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - w_x^1 \bar{w}^1(0) - (v_x^1 + \varphi^1) \bar{v}^1(0) + w_x^2 \bar{w}^2(0) + (v_x^2 + \varphi^2) \bar{v}^2(0). \quad (1.149) \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (1.149) неотрицательно в силу второго неравенства из (1.140) и неравенства $[\bar{u}_\nu] \geq 0$, а сумма оставшихся слагаемых неотрицательна по условию (1.147). Следовательно, правая часть (1.149) неотрицательна. Таким образом, проведенный анализ демонстрирует, что система (1.138)–(1.147) влечет вариационное неравенство (1.135).

Итак, теорема полностью доказана. $\square$

1.4.2 Предельный переход по параметру жесткости

В рамках данного раздела проводится исследование поведения решения задачи (1.135) при предельном переходе по параметру жесткости. Введем в рассмотрение положительный параметр $\lambda > 0$, характеризующий жесткость тонких включений γ_1 и γ_2 . Для каждого фиксированного λ существует единственное решение задачи

$$(u, v^{i\lambda}, w^{i\lambda}, \varphi^{i\lambda}) \in K_7, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \{w_x^{i\lambda}(\bar{w}_x^i - w_x^{i\lambda}) + \varphi_x^{i\lambda}(\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^{i\lambda})\} + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{i\lambda} + \varphi^{i\lambda}) \\
& (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^{i\lambda} - \varphi^{i\lambda}) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7, \quad i = 1, 2. \quad (1.150)
\end{aligned}$$

Сначала получим априорные оценки в задаче (1.150). Подставим пробные функции вида $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = 2(u^\lambda, v^{i\lambda}, w^{i\lambda}, \varphi^{i\lambda})$, $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (0, 0, 0, 0)$ в (1.150), при $\alpha > 0$ найдем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u^\lambda + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \{(w_x^{i\lambda})^2 + (\varphi_x^{i\lambda})^2 + (v_x^{i\lambda} + \varphi^{i\lambda})^2\} \pm \\
& \pm \alpha \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ((v^{i\lambda})^2 + (w^{i\lambda})^2) = 0. \quad (1.151)
\end{aligned}$$

В силу неравенства Корна, непрерывности вложения пространства $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)$ в $L^2(\gamma_i)$ и условий $u_\nu = v^i$, $u_\tau = w^i$ на γ_i при малых α имеем неравенство:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \alpha \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ((v^{i\lambda})^2 + (w^{i\lambda})^2) \geq 0.$$

Учитывая последнее неравенство из (1.151) получаем равномерно по λ оценку:

$$\|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)}^2 \leq c_5. \quad (1.152)$$

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве коэрцитивности функционала из предыдущего раздела, при $\lambda \geq \lambda_0$ будем иметь оценки:

$$\left\| (v^{(1\lambda)}, w^{(1\lambda)}, \varphi^{(1\lambda)}) \right\|_{H^1(\gamma_1)^3} \leq c_6, \quad \left\| (v^{(2\lambda)}, w^{(2\lambda)}, \varphi^{(2\lambda)}) \right\|_{H^1(\gamma_2)^3} \leq c_7. \quad (1.153)$$

Из полученных оценок (1.152), (1.153) при $\lambda \rightarrow \infty$ следует, что

$$u^\lambda \rightarrow u \quad \text{слабо в } H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, \quad (1.154)$$

$$(v^{i\lambda}, w^{i\lambda}, \varphi^{i\lambda}) \rightarrow (v^i, w^i, \varphi^i) \quad \text{слабо в } H^1(\gamma_i)^3. \quad (1.155)$$

Также из (1.151) получим равномерные по λ оценки:

$$\lambda \int_{\gamma_i} \{ (w_x^{i\lambda})^2 + (\varphi_x^{i\lambda})^2 + (v_x^{i\lambda} + \varphi^{i\lambda})^2 \} \leq c_8.$$

Из последнего неравенства получим равенства:

$$w_x^i = 0, \quad \varphi_x^i = 0, \quad v_x^i + \varphi^i = 0. \quad (1.156)$$

Следовательно, существуют постоянные $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} \in \mathbb{R}$ такие, что

$$w^i(x_1) = b_{i1}, \quad \varphi^i(x_1) = b_{i2}, \quad v^i(x_1) = -b_{i2}x_1 + b_{i3} \quad \text{на } \gamma_i.$$

Это означает, что $u|_{\gamma_i} = \rho_i$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$.

На основе (1.154)–(1.156) можем перейти к пределу в (1.150). Для этого возьмем произвольную тестовую функцию $\bar{u} \in K_1$, где K_1 определено в разделе 1.1.1. Тогда $\bar{u}|_{\gamma_i} = \bar{\rho}_i = (\bar{c}_{i1}, \bar{b}_i x_1 + \bar{c}_{i2})$. Положим $\bar{v}^i = \bar{b}_i x_1 + \bar{c}_{i2}$, $\bar{w}^i = \bar{c}_{i1}$, $\bar{\varphi}^i = -\bar{b}_i$. В этом случае $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i)$ принадлежит множеству K_7 . Подставим элемент $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i)$ в неравенство (1.150). Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \\ & - \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \{ w_x^{i\lambda} (\bar{w}_x^i - w_x^{i\lambda}) + \varphi_x^{i\lambda} (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^{i\lambda}) \} - \\ & - \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^{i\lambda} + \varphi^{i\lambda}) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^{i\lambda} - \varphi^{i\lambda}). \end{aligned}$$

Далее, переходя к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства, в силу (1.154)–(1.156) при $\lambda \rightarrow \infty$ получим неравенство:

$$u \in K_1, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_1. \quad (1.157)$$

Предельная задача (1.157), полученная в результате анализа, полностью совпадает с задачей (1.10), исследованной в разделе 1.1.1. Данная математическая модель описывает равновесие упругого тела с трещиной Γ_c , пересекающей тонкое жесткое включение $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$. В разделе 1.1.1 были доказаны существование и единственность решения задачи (1.10). При этом проведенное обоснование предельного перехода к задаче (1.150) служит дополнительным подтверждением корректности постановки задачи (1.10) и обеспечивает альтернативное доказательство её разрешимости.

Проделанный анализ позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.9. *При $\lambda \rightarrow \infty$ решение вариационных задач (1.150) сходится к решению задачи (1.10) в смысле (1.154)–(1.155).*

1.4.3 Случай с отслоением

В данном разделе будет предполагаться наличие отслоения на положительном берегу γ_1 (см. рис. 1.1). В данном случае существование отслоения означает, что помимо трещины Γ_c существует еще и трещина между включением γ_1 и упругим телом. Оказывается, что для данного случая условия сопряжения в контактной точке для дифференциальной постановки будут идентичными с предыдущим случаем. Вместе с тем, формулировки задачи, а также доказательство эквивалентности будут значительно отличаться. Обозначения останутся прежними.

Приведем вариационную постановку задачи. Для этого введем множество допустимых функций

$$K_8 = \{(u, v^i, w^i, \varphi^i) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, (v^i, w^i, \varphi^i) \in H^1(\gamma_i)^3, v^2 = u_\nu,$$

$$w^2 = u_\tau \text{ на } \gamma_2; \quad v^1 = u_\nu^-, \quad w^1 = u_\tau^- \text{ на } \gamma_1; \quad [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1;$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c; \quad ((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0, \quad i = 1, 2\}.$$

Теорема 1.10. *Задача минимизации:*

найти $(u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_8$, так что $\Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \inf_{K_8} \Pi_4$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_8, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \geq 0 \\ \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_8, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Теорема 1.9 доказывается тем же путем, что и теорема 1.7 из предыдущего раздела, поэтому выкладки мы здесь опустим.

Приведем дифференциальную формулировку для данного случая. Найти u , σ , определенные в Ω_γ^c , и v^i , w^i , φ^i , определенные на γ_i , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma^c, \quad (1.159)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.160)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (1.161)$$

$$-v_{xx}^i - \varphi_x^i = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_\tau], \quad -\varphi_{xx}^i + v_x^i + \varphi^i = 0 \quad \text{на } \gamma_i, \quad (1.162)$$

$$v^1 = u_\nu^-, \quad w^1 = u_\tau^- \quad \text{на } \gamma_1, \quad v^2 = u_\nu, \quad w^2 = u_\tau \quad \text{на } \gamma_2, \quad (1.163)$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 + v_x^1 = w_x^1 = \varphi_x^1 = 0 \quad \text{при } x = 1, \\ \varphi^2 + v_x^2 = w_x^2 = \varphi_x^2 = 0 \quad \text{при } x = -1, \end{aligned} \quad (1.164)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma_1, \quad (1.165)$$

$$((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0, \quad (1.166)$$

$$\varphi_x^1(0) = \varphi_x^2(0) = 0, \quad (1.167)$$

$$(w_x^2 w^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2)v^2(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1)v^1(0) = 0, \quad (1.168)$$

$$(w_x^2 \bar{w}^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2) \bar{v}^2(0) - (w_x^1 \bar{w}^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1) \bar{v}^1(0) \geq 0 \quad (1.169)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar{w}^1, \bar{v}^1)(0) - (\bar{w}^2, \bar{v}^2)(0))\nu_0 \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь первые два равенства из (1.163) гарантируют совпадение вертикальных и горизонтальных перемещений упругого тела с перемещениями включения на γ_1^- . Группа нелинейных краевых условий (1.165) описывает отслоение тонкого включения на γ_1^+ .

Теорема 1.11. *Краевая задача (1.159)–(1.169) эквивалентна вариационной задаче (1.158) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Необходимость. Докажем, что из вариационного неравенства (1.158) следуют все условия (1.159)–(1.169). А именно, приведем доказательство справедливости краевых условий (1.162), (1.164)–(1.169). Остальные условия получаются аналогично предыдущей модели.

Итак, возьмем в (1.158) тестовые функции вида $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i) + (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i) \in K_8$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $\tilde{v}^i = \tilde{w}^i = \tilde{\varphi}^i = 0$ на γ_i . Интегрирование по частям и применение уравнений равновесия (1.159) и условий (1.161) приводит к неравенству

$$-\int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu \tilde{u}^+ = -\int_{\gamma_1} (\sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^+ + \sigma_\tau^+ \tilde{u}_\tau^+) \geq 0,$$

откуда получаем

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1.$$

Справедливость условия $\sigma_\nu^+[u_\nu] = 0$ из (1.165) доказывается локально. Схожие рассуждения можно найти в [42]. Таким образом, мы убедились в верности всех соотношений (1.165).

Рассмотрим теперь функции: $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i) \in K_8$, $((\tilde{w}^1, \tilde{v}^1)(0) - (\tilde{w}^2, \tilde{v}^2)(0))\nu_0 = 0$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ_1 . Производя подстановку функций $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i)$ в (1.158), мы будем иметь равенство

$$-\int_{\gamma_1} [(\sigma\nu)\tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu]\tilde{u} - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^i \tilde{w}^i + (\varphi_{xx}^i - v_x^i - \varphi^i) \tilde{\varphi}^i + (v_{xx}^i + \varphi_x^i) \tilde{v}^i \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& +w_x^1 \tilde{w}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 \tilde{\varphi}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) \tilde{v}^1 \Big|_{x=0}^{x=1} + w_x^2 \tilde{w}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + \\
& + \varphi_x^2 \tilde{\varphi}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) \tilde{v}^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0.
\end{aligned} \tag{1.170}$$

Здесь для первого слагаемого в силу (1.165) можем записать цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
- \int_{\gamma_1} [(\sigma\nu)\tilde{u}] &= - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \tilde{u}_\nu] - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau \tilde{u}_\tau] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^+ \tilde{u}_\tau^- = \\
&= - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu^- - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau] \tilde{u}_\tau^-.
\end{aligned}$$

Учитывая это и равенства: $\tilde{v}^1 = \tilde{u}_\nu^-$, $\tilde{w}^1 = \tilde{u}_\tau^-$ на γ_1 , $\tilde{v}^2 = \tilde{u}_\nu$, $\tilde{w}^2 = \tilde{u}_\tau$ на γ_2 , а также предполагая, что $\tilde{v}^i = \tilde{w}^i = \tilde{\varphi}^i = 0$ при $x = 0, 1, -1$, из (1.170) получим

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_\tau] + w_{xx}^i) \tilde{w}^i - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} ([\sigma_\nu] + v_{xx}^i + \varphi_x^i) \tilde{v}^i - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (\varphi_{xx}^i - v_x^i - \varphi^i) \tilde{\varphi}^i = 0.$$

Отсюда следуют все уравнения (1.162). Далее, возвращаясь к равенству (1.170), получим справедливость всех соотношений (1.164) и (1.167).

Чтобы получить следующее условие, сначала поочередно выберем в вариационном неравенстве (1.158) функции $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (0, 0, 0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = 2(u, v^i, w^i, \varphi^i)$. Затем проинтегрируем по частям и применим условия (1.159)–(1.164), (1.167). В результате получим равенство вида:

$$- \int_{\gamma_1} \sigma^+ \nu[u] - w_x^1 w^1(0) - (v_x^1 + \varphi^1) v^1(0) + w_x^2 w^2(0) + (v_x^2 + \varphi^2) v^2(0) = 0,$$

откуда находим (1.168), поскольку здесь первое слагаемое равно нулю в силу последних двух условий из (1.165).

И наконец, путем подстановки в вариационное неравенство (1.158) пробных функций $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) = (u, v^i, w^i, \varphi^i) + (\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i)$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\varphi}^i) \in K_8$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ_1 , и применения доказанных выше краевых условий, убедимся в справедливости условия (1.169). Таким

образом, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Докажем теперь, что из (1.159)–(1.169) следует (1.158). Из (1.159) и (1.162) для произвольной функции $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7$ после интегрирования получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) + (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \right\} = \\
& = - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ (\bar{u}_\nu^- - u^-) \pm \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^+ (\bar{u}_\tau^- - u_\tau^-) - \\
& - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\nu] (\bar{v}^i - v^i) + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} [\sigma_\tau] (\bar{w}^i - w^i) + \\
& + w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + \varphi_x^1 (\bar{\varphi}^1 - \varphi^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + (v_x^1 + \varphi^1) (\bar{v}^1 - v^1) \Big|_{x=0}^{x=1} + \\
& + w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2) \Big|_{x=-1}^{x=0} + \varphi_x^2 (\bar{\varphi}^2 - \varphi^2) \Big|_{x=-1}^{x=0} + (v_x^2 + \varphi^2) (\bar{v}^2 - v^2) \Big|_{x=-1}^{x=0}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для того чтобы получить вариационное неравенство (1.158), достаточно доказать неотрицательность правой части равенства выше. Действительно, применяя краевые условия (1.161), (1.163)–(1.165), (1.167) и (1.168), последнее равенство переписывается в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) + (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \right\} = \\
& = - \int_{\gamma_1} \sigma_\nu^+ [\bar{u}_\nu] - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - w_x^1 \bar{w}^1(0) - \\
& - (v_x^1 + \varphi^1) \bar{v}^1(0) + w_x^2 \bar{w}^2(0) + (v_x^2 + \varphi^2) \bar{v}^2(0). \tag{1.171}
\end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые правой части равенства (1.171) неотрицательны в силу (1.161), (1.165) и условий: $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ на γ_1 , $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c . Сумма оставшихся слагаемых правой части (1.171) будет неотрицательна по условию (1.169). Следовательно, из (1.171) получаем вариационное неравенство (1.158).

Теорема полностью доказана. □

Глава 2. Пластина Кирхгофа–Лява с плоским жестким включением

В этой главе рассматривается полная модель пластины Кирхгофа–Лява, в которой неизвестными функциями являются вертикальные и горизонтальные перемещения точек срединной поверхности пластины. Исследуются задачи равновесия упругой пластины с плоским жестким включением. Важно отметить, что вдоль части жесткого включения расположена сквозная трещина. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, которые описывают взаимное непроникание берегов. В отличие от тонких жестких включений [29; 30; 35; 74; 75], плоское жесткое включение моделируется таким образом, что накладывает специфические ограничения на деформацию материала. В представленной главе диссертации исследуются задачи о равновесии пластины с различным расположением плоского жесткого включения, включая случай, когда плоское жесткое включение выходит на границу под нулевым углом (см., например, работы [35; 83; 84]). В рассматриваемом случае негладкость границы области приводит к нарушению неравенства Корна. Данное обстоятельство существенно осложняет доказательство корректности задачи о равновесии пластины Кирхгофа–Лява. В настоящем исследовании для обоснования разрешимости задачи применяется метод фиктивных областей. Основная идея этого метода заключается в изучении в расширенной области семейства вспомогательных задач, зависящих от параметра, и установлении того, что исходная задача будет получена путем предельного перехода в этом семействе. При этом каждая вспомогательная задача будет описывать состояние упругой пластины с плоским жестким включением. Приводятся доказательства существования и единственности решения рассматриваемых задач. Представлены соответствующие дифференциальные постановки задач в виде уравнений равновесия вместе с полной системой краевых условий, выполняющихся на границе жесткого включения и трещины.

Результаты, изложенные в данной главе диссертации, опубликованы

в [36; 77].

2.1 Задача о равновесии упругой пластины с плоским жестким включением

В этом разделе исследуется задача равновесия упругой пластины под действием внешних сил. Предполагается, что пластина содержит плоское жесткое включение. Вдоль части жесткого включения расположена сквозная трещина. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, которые описывают взаимное непроникание берегов. Задача ставится в виде вариационного неравенства. Предложена соответствующая дифференциальная постановка задачи в виде уравнений равновесия вместе с полной системой краевых условий, выполняющихся на границе жесткого включения и трещины. Доказано, что полученная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

2.1.1 Постановка задачи. Дифференциальная формулировка

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ , единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $n = (n_1, n_2)$; γ – гладкая кривая такая, что $\bar{\gamma} \subset \Omega$. Будем считать, что существует продолжение кривой γ , пересекающее границу Γ и разбивающее область Ω на две подобласти D_1, D_2 , с липшицевыми границами ∂D_i , причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2$. Нормаль к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Направлением нормали ν определяются положительные и отрицательные берега данной кривой. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Для простоты, предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ выберем так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset R^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Плоскость

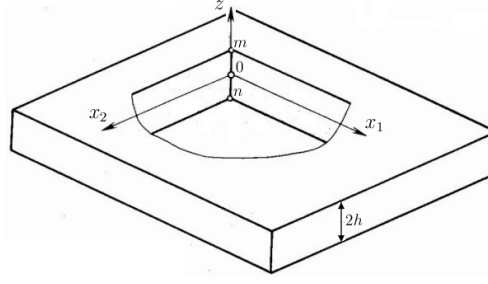


Рисунок 2.1 — Срединная плоскость

$z = 0$, делящая толщину пластины пополам, называется срединной плоскостью; отрезок нормали mn к срединной плоскости представляет собой нормальное волокно пластины (см. рис. 2.1). Предположим, что плоское жесткое включение описывается цилиндрической поверхностью $x = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leq z \leq 1$, $|z|$ – расстояние до срединной плоскости. Будем считать, что имеется отслоение на положительном берегу γ^+ . Это означает, что на поверхности плоского включения расположена трещина.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ и $D = \{d_{ijkl}\}$ – тензоры модулей упругости, обладающие свойствами симметрии и положительной определенности (1.2), (1.3).

Всюду в работе все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Введем пространство функций, заданных на γ :

$$R(\gamma) = \{\zeta(x) = (\rho, l) \mid \rho(x) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);$$

$$l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, x \in \gamma\},$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 = \text{const}; x = (x_1, x_2)$.

Дифференциальная постановка задачи о равновесии упругой пластины, содержащей плоское жесткое включение γ , состоит в следующем. Требуется найти функции $W = (w_1, w_2)$, $w, (\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (2.1)$$

$$-\nabla\nabla m = f, \quad m = -D\nabla\nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (2.2)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (2.3)$$

$$W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0 \quad \text{на} \quad \gamma, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} [W_\nu] &\geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad t_\nu^+ = 0, \\ -\sigma_\nu^+ &\geq |m_\nu^+|, \quad \sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\int_\gamma [\sigma \nu] \cdot \rho = 0, \quad \int_\gamma [t_\nu] l - \int_\gamma [m_\nu] (a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2) = 0, \quad \forall (\rho, l) \in R(\gamma), \quad (2.6)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$, $l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. Квадратные скобки $[v] = v^+ - v^-$ означают скачок функции v на γ , где $v^\pm$ соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном берегах кривой γ по отношению к нормали ν ; $F = (f_1, f_2)$; $f_1, f_2, f \in L^2(\Omega)$ - заданные внешние силы. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующим координатам: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. При этом используются следующие обозначения: $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$ - тензоры усилий и малых деформаций, которые определяются по формулам (1.1), $m = \{m_{ij}\}$ - тензор моментов, $i, j = 1, 2$; W, w - горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины соответственно; $m_\nu(w) = m_\nu$ - изгибающий момент, $t_\nu(m) = t_\nu$ - перерезывающая сила;

$$\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad \nabla\nabla m = m_{ij,ij}, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2),$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i, \quad \sigma \nu = (\sigma_{1j} \nu_j, \sigma_{2j} \nu_j), \quad \nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}_{i,j=1}^2, \quad m_\nu = -m_{ij} \nu_j \nu_i,$$

$$W_\nu = W \cdot \nu, \quad t_\nu = -m_{ij,k} \tau_k \tau_j \nu_i - m_{ij,j} \nu_j, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

В дифференциальной постановке первые соотношения в (2.1) и (2.2) представляют собой уравнения равновесия, а вторые соотношения в (2.1) и (2.2) - уравнения состояния. Краевое условие (2.3) описывает жесткое защемление пластины на внешней границе Γ . Первые два условия из (2.4) указывают на характер перемещений на γ . Третье и четвертое

равенства (2.4) моделируют плоское жесткое включение. Набор нелинейных условий (2.5) описывает отслоение жесткого включения. Отслоение означает наличие трещины между включением и упругой частью пластины. Первое неравенство из (2.5) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины, второе равенство из (2.5) соответствует нулевому трению, а третье – равенству нулю перерезывающей силы на γ^+ . Краевые условия (2.6) соответствуют принципу возможных перемещений. При этом первое равенство из (2.6) задает равенство нулю главного вектора сил и главного вектора моментов для жесткого включения. Покажем это. Пусть $[\sigma\nu] = ([\sigma_1], [\sigma_2])$. Тогда учитывая заданный вид функции $\rho(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [\sigma\nu]\rho &= \int_{\gamma} ([\sigma_1], [\sigma_2])(b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2)) = \\ &= c_1 \int_{\gamma} [\sigma_1] + c_2 \int_{\gamma} [\sigma_2] + b \int_{\gamma} ([\sigma_2]x_1 - [\sigma_1]x_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности b, c_1, c_2 получим следующие равенства:

$$\int_{\gamma} ([\sigma_2]x_1 - [\sigma_1]x_2) = 0, \quad \int_{\gamma} [\sigma_1] = 0, \quad \int_{\gamma} [\sigma_2] = 0. \quad (2.7)$$

Первое равенство (2.7) означает равенство нулю главного вектора моментов, второе и третье равенства (2.7) показывают равенство нулю компонентов главного вектора сил, действующих на жесткое включение γ . Аналогично, второе равенство (2.6) также может быть представлено в виде:

$$\int_{\gamma} [t_{\nu}] = 0, \quad \int_{\gamma} ([t_{\nu}]x_1 - [m_{\nu}]\nu_1) = 0, \quad \int_{\gamma} ([t_{\nu}]x_2 - [m_{\nu}]\nu_2) = 0. \quad (2.8)$$

Равенства (2.8) отражают физические свойства для перерезывающих сил и моментов, которые действуют на жесткое включение γ .

2.1.2 Вариационная формулировка

Разрешимость задачи (2.1)–(2.6) доказывается при помощи вариационного подхода. Приведем вариационную формулировку задачи (2.1)–(2.6). Для этого введем множество допустимых перемещений K_9 :

$$K_9 = \{(W, w) \in H_\Gamma(\Omega_\gamma) \mid [W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|, \quad W^- = \rho, \quad w^- = l,$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma; \quad (\rho, l) \in R(\gamma); \quad a_1, a_2 = \text{const}\},$$

где

$$H_\Gamma(\Omega_\gamma) = H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \times H_\Gamma^2(\Omega_\gamma),$$

$$H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) = \{W \in H^1(\Omega_\gamma) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$H_\Gamma^2(\Omega_\gamma) = \{w \in H^2(\Omega_\gamma) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Здесь и далее по тексту запись $W = 0$ используется для краткости. Мы подразумеваем, что оба компонента вектора $W = (w_1, w_2)$ равны нулю, то есть $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$.

Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\Pi_5(W, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} m(w) \nabla \nabla w - \int_{\Omega_\gamma} F W - \int_{\Omega_\gamma} f w.$$

Здесь и далее для краткости свертки тензоров $\sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W)$, $m_{ij}(w) w_{,ij}$ обозначаются через $\sigma(W) \varepsilon(W)$, $m(w) \nabla \nabla w$ соответственно. Тогда задачу о равновесии пластины сформулируем как задачу минимизации функционала энергии:

$$\Pi_5(W, w) = \inf_{(\bar{W}, \bar{w}) \in K_9} \Pi_5. \quad (2.9)$$

Задача (2.9) имеет решение, которое удовлетворяет следующему

вариационному неравенству:

$$\begin{aligned}
(W, w) \in K_9, \quad \int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) &\geq \\
&\geq \int_{\Omega_\gamma} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{w} - w) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_9. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Доказательство этого факта приведено в источнике [76]. Более того, решение задачи (2.10) является единственным.

2.1.3 Эквивалентность

В этом пункте мы покажем, что если решение вариационного неравенства (2.10) достаточно гладкое, то оно является решением задачи (2.1)–(2.6), а также классическое решение задачи (2.1)–(2.6) является решением вариационного неравенства (2.10). Данный факт представим в виде теоремы 2.1.

Теорема 2.1. *Краевая задача (2.1)–(2.6) эквивалентна вариационной задаче (2.10) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (2.10). Для начала, отметим, что соотношения (2.3), (2.4) и первое условие (2.5) вытекают из определения множества K_9 . Для дальнейшего полезными будут следующие формулы Грина [28]:

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(U) \varepsilon(V) = - \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \sigma \cdot V - \int_{\gamma} [\sigma \nu \cdot V], \quad (2.11)$$

$$- \int_{\Omega_\gamma} m \cdot \nabla \nabla v = - \int_{\Omega_\gamma} (\nabla \nabla m) v - \int_{\gamma} \left[m_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] + \int_{\gamma} [t_\nu v], \quad (2.12)$$

справедливые для достаточно гладких функций $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $V =$

(v_1, v_2) , v , таких что $v_1 = v_2 = 0$ на Γ в случае первой формулы и $v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ на Γ в случае второй формулы.

Покажем, что уравнения равновесия (2.1), (2.2) выполнены в обобщенном смысле. Возьмем произвольную бесконечно дифференцируемую и имеющую компактный носитель в Ω_γ функцию $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Подставим $(\bar{W}, \bar{w}) = (W + \theta, w)$ в (2.10) в качестве пробного элемента. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\theta) \geq \int_{\Omega_\gamma} F \theta.$$

Взяв тестовую функцию $(\bar{W}, \bar{w}) = (W - \theta, w)$, $\theta \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$ в (2.10), аналогично получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\theta) \leq \int_{\Omega_\gamma} F \theta.$$

Следовательно, мы приходим к следующему равенству:

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\theta) = \int_{\Omega_\gamma} F \theta.$$

Отсюда в силу произвольности θ получим уравнения равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma(W) = F \quad \text{в } \Omega_\gamma.$$

Далее, последовательно подставляя тестовые функции вида $(\bar{W}, \bar{w}) = (W, w + \varphi)$ и $(\bar{W}, \bar{w}) = (W, w - \varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ в вариационное неравенство (2.10), найдем

$$-\int_{\Omega_\gamma} m(w) \nabla \nabla \varphi = \int_{\Omega_\gamma} f \varphi.$$

Из последнего равенства следует справедливость $-\nabla \nabla m = f$ в Ω_γ в смысле обобщенных функций.

Далее, разбивая область Ω на подобласти Ω_1, Ω_2 с гладкими границами $\partial\Omega_i, i = 1, 2$, как указано на рис. 2.2, из (2.10) с помощью формул Грина (2.11) и (2.12), а также учитывая уравнения равновесия (2.1) и (2.2), будем иметь

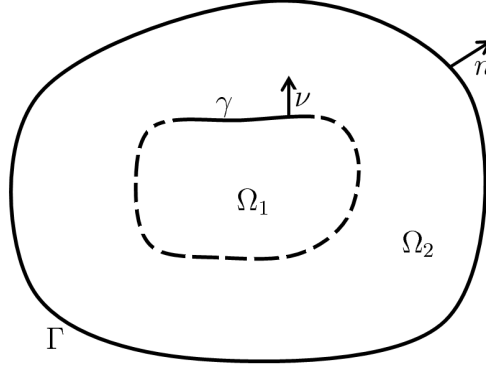


Рисунок 2.2 — Область Ω разбивается на подобласти Ω_1, Ω_2

$$\begin{aligned}
 (W, w) \in K_9, \quad & - \int_{\gamma} [\sigma \nu \cdot (\bar{W} - W)] - \int_{\gamma} \left[m_{\nu} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] + \\
 & + \int_{\gamma} [t_{\nu}(\bar{w} - w)] \geq 0 \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_9.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Выберем в (2.13) тестовые функции вида $(\bar{W}, \bar{w}) = (W + \widetilde{W}, w) \in K_9$, причем функция $(\widetilde{W}, 0) \in K_9$ такая что $\widetilde{W}^- = 0$ на γ . Получим

$$- \int_{\gamma} \sigma^+ \nu \cdot \widetilde{W}^+ = - \int_{\gamma} (\sigma_{\nu}^+ \widetilde{W}_{\nu}^+ + \sigma_{\tau}^+ \widetilde{W}_{\tau}^+) \geq 0.$$

Поскольку на функцию $\widetilde{W}_{\tau}^+$ отсутствуют ограничения, из последнего неравенства имеем второе условие (2.5).

Теперь докажем справедливость первого равенства (2.6). Подставляя в (2.13) тестовые функции $(\bar{W}, \bar{w}) = (W \pm \widetilde{W}, w) \in K_9$, где $(\widetilde{W}, 0) \in K_9$, $\widetilde{W}^- = \rho$, $[\widetilde{W}_{\nu}] = 0$ на γ , $(\rho, 0) \in R(\gamma)$, напишем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\gamma} [\sigma \nu \cdot \widetilde{W}] &= - \int_{\gamma} \sigma^+ \nu \cdot \widetilde{W}^+ + \int_{\gamma} \sigma^- \nu \cdot \widetilde{W}^- \pm \int_{\gamma} \sigma^+ \nu \cdot \widetilde{W}^- = \\
 &= - \int_{\gamma} [\sigma \nu] \cdot \widetilde{W}^- - \int_{\gamma} (\sigma_{\nu}^+ [\widetilde{W}_{\nu}] + \sigma_{\tau}^+ [\widetilde{W}_{\tau}^+]) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу второго условия (2.5) следует первое условие (2.6).

Докажем, что выполняется равенство $t_\nu^+ = 0$ на γ . Рассмотрим пробную функцию $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_9$, такую что $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, $\bar{w}_1 = 0$, $\bar{w}_2 = 0$, $\bar{w}^- = 0$, $\frac{\partial \bar{w}^\pm}{\partial \nu} = 0$ на γ . После подстановки в (2.13) пробных функций вида $(\bar{W}, \bar{w}) = (W, w + \tilde{w})$ получим

$$\int_{\gamma} t_\nu^+ \tilde{w}^+ \geq 0.$$

В силу произвольности $\tilde{w}^+$ из последнего неравенства будем иметь третье условие (2.5).

Возьмем теперь произвольную функцию $\tilde{w}$, которая удовлетворяет условиям

$$\tilde{w}^- = l, \quad \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial x_2} = a_2, \quad \left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} \right] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (0, l) \in R(\gamma), \quad a_1, a_2 = \text{const.}$$

Тогда $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_9$, где $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, $\bar{w}_1 = 0$, $\bar{w}_2 = 0$. Подставим $(\bar{W}, \bar{w}) = (W, w \pm \tilde{w})$ в (2.13):

$$-\int_{\gamma} \left[m_\nu \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} \right] + \int_{\gamma} [t_\nu \tilde{w}] = 0.$$

Отсюда в силу условий $\left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} \right] = 0$ и $t_\nu^+ = 0$ на γ следует

$$-\int_{\gamma} [m_\nu] \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial \nu} + \int_{\gamma} [t_\nu] \tilde{w}^- = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку

$$\tilde{w}^- = l, \quad \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial x_2} \right) \cdot (\nu_1, \nu_2) = a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2,$$

из равенства (2.14) получим второе условие (2.6).

Остается показать справедливость последних двух соотношений (2.5).

Подставим $(\bar{W}, \bar{w}) = (W + \widetilde{W}, w + \widetilde{w}) \in K_9$ в (2.13) в качестве тестовых функций, где $(\widetilde{W}, \widetilde{w}) \in K_9$ удовлетворяет условию

$$[\widetilde{W}_\nu] = \left| \left[\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на } \gamma.$$

Получим неравенство:

$$- \int_{\gamma} [\sigma_\nu \cdot \widetilde{W}] - \int_{\gamma} \left[m_\nu \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right] + \int_{\gamma} [t_\nu \widetilde{w}] \geq 0.$$

Применяя в последнем неравенстве полученные выше краевые условия (2.5) и (2.6), запишем

$$- \int_{\gamma} \left(\sigma_\nu^+ [\widetilde{W}_\nu] + m_\nu^+ \left[\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right] \right) \geq 0. \quad (2.15)$$

Если выполнено условие $\left[\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right] \geq 0$, из (2.15) следует, что $-\sigma_\nu^+ \geq m_\nu^+$ на γ .

А для случая $\left[\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right] \leq 0$ справедливо неравенство $\sigma_\nu^+ \leq m_\nu^+$ на γ . Таким образом, из (2.15) имеем неравенство

$$-\sigma_\nu^+ \geq |m_\nu^+| \quad \text{на } \gamma.$$

И наконец, осуществим вывод последнего равенства дифференциальной постановки. Подставляя функции $(\bar{W}, \bar{w}) = (0, 0)$, $(\bar{W}, \bar{w}) = 2(W, w)$ в неравенство (2.13), а также применяя краевые условия (2.5) и (2.6), получим

$$- \int_{\gamma} \sigma_\nu^+ [W_\nu] - \int_{\gamma} m_\nu^+ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0. \quad (2.16)$$

В силу первого и четвертого неравенств из (2.5), можно сделать вывод, что

$$\sigma_\nu^+ [W_\nu] + m_\nu^+ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \geq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Поскольку интеграл от этой функции в (2.16) по кривой ненулевой длины равен нулю, получаем справедливость последнего равенства (2.5). Таким образом, теорема 1 в одну сторону полностью доказана.

Достаточность. Покажем, что любое гладкое решение краевой задачи (2.1)–(2.6) является решением вариационного неравенства (2.10). Для этого нам необходимо из уравнений (2.1), (2.2) с учетом всех краевых условий получить (2.10). Пусть (W, w) – решение задачи (2.1)–(2.6), принадлежащее множеству K_9 . Умножим уравнения равновесия (2.1) и (2.2) на функцию $(\bar{W}, \bar{w}) - (W, w)$, где $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_9$, и проинтегрируем по области Ω_γ . Получим:

$$-\int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \sigma \cdot (\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} \nabla \nabla m(\bar{w} - w) = \int_{\Omega_\gamma} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{w} - w).$$

Преобразуем полученное равенство по формулам (2.11), (2.12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega_\gamma} F(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{w} - w) = \\ = - \int_{\gamma} [\sigma \nu \cdot (\bar{W} - W)] - \int_{\gamma} \left[m_\nu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] + \int_{\gamma} [t_\nu(\bar{w} - w)]. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Покажем это. Преобразуем правую часть последнего равенства следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega_\gamma} F(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{w} - w) = \\ = - \int_{\gamma} \sigma^+ \nu \cdot (\bar{W}^+ - W^+) + \int_{\gamma} \sigma^- \nu \cdot (\bar{W}^- - W^-) \pm \int_{\gamma} \sigma^+ \nu \cdot (\bar{W}^- - W^-) - \\ - \int_{\gamma} m_\nu^+ \left(\frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu} - \frac{\partial w^+}{\partial \nu} \right) + \int_{\gamma} m_\nu^- \left(\frac{\partial \bar{w}^-}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu} \right) \pm \int_{\gamma} m_\nu^+ \left(\frac{\partial \bar{w}^-}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\gamma} t_{\nu}^{+}(\bar{w}^{+} - w^{+}) - \int_{\gamma} t_{\nu}^{-}(\bar{w}^{-} - w^{-}) + \int_{\gamma} t_{\nu}^{+}(\bar{w}^{-} - w^{-}).$$

Отсюда в силу краевых условий (2.4), второго, третьего и пятого равенства (2.5), а также разложений $\sigma^{+}\nu \cdot [W] = \sigma_{\nu}^{+}[W_{\nu}] + \sigma_{\tau}^{+}[W_{\tau}]$, $\sigma^{+}\nu \cdot [\bar{W}] = \sigma_{\nu}^{+}[\bar{W}_{\nu}] + \sigma_{\tau}^{+}[\bar{W}_{\tau}]$, следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_{\gamma}} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega_{\gamma}} F(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_{\gamma}} f(\bar{w} - w) = \\ & = - \int_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}[\bar{W}_{\nu}] - \int_{\gamma} m_{\nu}^{+} \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \right] - \int_{\gamma} [\sigma \nu] \cdot \rho + \int_{\gamma} [\sigma \nu] \cdot \rho^0 - \int_{\gamma} [m_{\nu}] (a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2) + \\ & \quad + \int_{\gamma} [m_{\nu}] (a_1^0 \nu_1 + a_2^0 \nu_2) + \int_{\gamma} [t_{\nu}] l - \int_{\gamma} [t_{\nu}] l^0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Сумма первых двух слагаемых правой части (2.17) неотрицательна в силу четвертого неравенства (2.5) и условия

$$[\bar{W}_{\nu}] \geq \left| \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на } \gamma.$$

Сумма оставшихся слагаемых в правой части соотношения (2.17) равны нулю в силу (2.6). Таким образом, из (2.17) следует вариационное неравенство (2.10). Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Замечание. Существует еще одна дифференциальная формулировка задачи (2.10). Данная постановка состоит в следующем: в области Ω_{γ} требуется найти функции $W = (w_1, w_2)$, w , $(\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A \varepsilon(W) \quad \text{в } \Omega_{\gamma}, \quad (2.18)$$

$$-\nabla \nabla m = f, \quad m = -D \nabla \nabla w \quad \text{в } \Omega_{\gamma}, \quad (2.19)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.20)$$

$$[W]_\nu \geq \left\| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right\|, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0, \quad (2.21)$$

$$W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0 \quad \text{на } \gamma,$$

$$- \int_\gamma [\sigma \nu \cdot W] + \int_\gamma [t_\nu w] - \int_\gamma [m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}] = 0, \quad (2.22)$$

$$- \int_\gamma [\sigma \nu \cdot U] + \int_\gamma [t_\nu u] - \int_\gamma [m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}] \geq 0 \quad \forall (U, u) \in K_9, \quad (2.23)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$. Задача (2.18)–(2.23) эквивалентна (2.10). Следовательно, формулировки (2.10), (2.1)–(2.6) и (2.18)–(2.23) эквивалентны. Эквивалентность приведенной задачи (2.18)–(2.23) и вариационного неравенства (2.10) для достаточно гладких решений доказывается методом, аналогичным использованному в теореме 2.1. Ввиду схожести рассуждений, детали доказательства опускаются. Постановка (2.18)–(2.23) представлена как дополнительная возможная формулировка задачи (2.10).

2.2 Контактная задача для упругой пластины с плоским жестким включением

В этом разделе рассматривается задача о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Установлены существование и единственность решения задачи. Получена эквивалентная дифференциальная постановка.

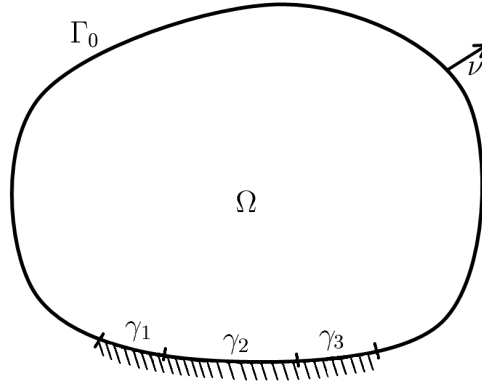


Рисунок 2.3 — Геометрия контактной задачи

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве R^2 с гладкой границей Γ , единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Будем считать, что Γ состоит из гладких кривых γ и Γ_0 , $\gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, $meas \Gamma_0 > 0$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Кривая γ_2 соответствует плоскому жесткому включению. Считаем, что часть внешней границы γ , которая содержит плоское жесткое включение γ_2 , контактирует с недеформируемым телом (см. рис. 2.3).

В рассматриваемом случае дифференциальная постановка задачи равновесия будет следующей. Найти функции $W = (w_1, w_2)$, w , $(\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в } \Omega, \quad (2.24)$$

$$-\nabla \nabla m = f, \quad m = -D \nabla \nabla w \quad \text{в } \Omega, \quad (2.25)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (2.26)$$

$$-W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \quad \text{на } \gamma, \quad \sigma_\tau = 0, \quad t_\nu = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \text{ и } \gamma_3, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W = \rho^0, \quad w = l^0 \quad \text{на } \gamma_2, \quad (2.28)$$

$$\int_{\gamma_1} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot W - t_\nu w + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) = 0, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} (\sigma_\nu U_\nu + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot U - t_\nu u + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) + \\ & + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu U_\nu + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) \geq 0 \quad \forall (U, u) \in K_0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$. Здесь применяются все формулы и обозначения, представленные в разделе 2.1. Множество допустимых перемещений K_0 , которое является выпуклым и замкнутым, определяется следующим образом:

$$K_0 = \{(W, w) \in H_{\Gamma_0}(\Omega) \mid -W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \text{ на } \gamma, \quad W = \rho,$$

$$w = l, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma_2; \quad (\rho, l) \in R(\gamma); \quad a_1, a_2 = \text{const}\},$$

где

$$H_{\Gamma_0}(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega),$$

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{W \in H^1(\Omega) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}.$$

Первое неравенство в (2.27) представляет собой условие непроникания для части внешней границы γ и недеформируемого препятствия. Краевые условия (2.29), (2.30) соответствуют принципу возможных перемещений. Описание остальных краевых условий дифференциальной формулировки (2.24)-(2.30) идентично описанию условий формулировки (2.1)-(2.6) из предыдущего раздела.

Приведем вариационную формулировку задачи (2.24)-(2.30). Введем в рассмотрение функционал энергии

$$\Pi_6(W, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w - \int_{\Omega} F W - \int_{\Omega} f w$$

и рассмотрим задачу минимизации: найти $(W, w) \in K_0$ такое, что

$$\Pi_6(W, w) = \inf_{(\bar{W}, \bar{w}) \in K_0} \Pi_6. \quad (2.31)$$

2.2.2 Существование и единственность решения

Теорема 2.2. *Задача (2.31) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству*

$$\begin{aligned} (W, w) \in K_0, \quad \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) \geq \\ \geq \int_{\Omega} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega} f(\bar{w} - w) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Доказательство. Проверим коэрцитивность функционала $\Pi_6(W, w)$. В области Ω будут справедливы неравенство Корна и неравенство Пуанкаре [27; 28]. Поэтому справедливы

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) &\geq c_1 \|W\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \quad \forall W \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2, \\ - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w &\geq c_2 \|w\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Здесь и далее используемые константы положительны и не зависят от W и w . Из последних двух неравенств, как следствие, будет выполнено неравенство $\forall (W, w) \in H_{\Gamma_0}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w \geq c_3 \|(W, w)\|_{H_{\Gamma_0}(\Omega)}^2. \quad (2.33)$$

Далее обращаясь к свойствам тензоров A и D , также, опираясь на

неравенство (2.33) и неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_6(W, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w - \int_{\Omega} FW - \int_{\Omega} fw \geqslant \\ &\geqslant c_3 \|(W, w)\|_{H_{\Gamma_0}(\Omega)}^2 - c_4 \|W\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2} - c_5 \|w\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Pi_6(W, w) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|(W, w)\|_{H_{\Gamma_0}(\Omega)} \rightarrow \infty, \quad (W, w) \in K_0,$$

что означает коэрцитивность функционала $\Pi_6(W, w)$. Функционал Π_6 является также слабо полунепрерывным снизу в силу выпуклости и непрерывности (см. например [28]). Множество K_0 слабо замкнуто (в силу выпуклости и замкнутости) в рефлексивном пространстве $H_{\Gamma_0}(\Omega)$. Отсюда следует существование решения задачи (2.31), которое эквивалентно вариационному неравенству (2.32). Доказательство эквивалентности задачи минимизации (2.31) и вариационного неравенства (2.32) мы здесь приводить не будем, поскольку аналогичные рассуждения доказательства можно найти в [28].

Докажем единственность решения методом от противного. Предположим, что задача (2.32) имеет два решения (W, w) и $(\widetilde{W}, \widetilde{w})$. В неравенство для (W, w) подставим $(\bar{W}, \bar{w}) = (\widetilde{W}, \widetilde{w})$ (так как оно выполнено для всех $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_0$), а в неравенство для $(\widetilde{W}, \widetilde{w})$ подставим $(\bar{W}, \bar{w}) = (W, w)$. После сложения полученных при этом неравенств будем иметь

$$\int_{\Omega} \sigma(W - \widetilde{W}) \varepsilon(W - \widetilde{W}) - \int_{\Omega} m(w - \widetilde{w}) (\nabla \nabla w - \nabla \nabla \widetilde{w}) \leqslant 0.$$

Но с другой стороны из рассуждений аналогичных рассуждениям доказательства коэрцитивности функционала $\Pi_6(W, w)$ имеем

$$\int_{\Omega} \sigma(W - \widetilde{W}) \varepsilon(W - \widetilde{W}) - \int_{\Omega} m(w - \widetilde{w}) (\nabla \nabla w - \nabla \nabla \widetilde{w}) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} \sigma(W - \widetilde{W}) \varepsilon(W - \widetilde{W}) - \int_{\Omega} m(w - \widetilde{w}) (\nabla \nabla w - \nabla \nabla \widetilde{w}) = 0,$$

а значит, $W = \widetilde{W}$ и $w = \widetilde{w}$. Таким образом, решение задачи (2.32) единственно.

Теорема полностью доказана. $\square$

2.2.3 Эквивалентность вариационной и дифференциальной формулировок

Теорема 2.3. *Краевая задача (2.24)–(2.30) эквивалентна вариационной задаче (2.32) при условии достаточной гладкости решений.*

Доказательство. Необходимость. Для начала из вариационной постановки (2.32) получим постановку (2.24)–(2.30). Рассмотрим схему получения краевых условий (2.29) и (2.30). Следует отметить, что справедливость второго и третьего равенства из (2.27) можно доказать аналогично теореме 2.1, а остальные условия содержатся во множестве K_0 . Итак, подставим в (2.32) пробную функцию $(\bar{W}, \bar{w}) = (0, 0)$, получим

$$\int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w \leq \int_{\Omega} FW + \int_{\Omega} fw.$$

Далее, возьмем в (2.32) функцию $(\bar{W}, \bar{w}) = 2(W, w)$, будем иметь

$$\int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w \geq \int_{\Omega} FW + \int_{\Omega} fw.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w = \int_{\Omega} FW + \int_{\Omega} fw. \quad (2.34)$$

Воспользовавшись формулами интегрирования по частям и уравнениями равновесия (2.24), (2.25), а также вторым и третьим равенствами из (2.27), из равенства (2.34) можно вывести следующее соотношение:

$$\int_{\gamma_1} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot W - t_\nu w + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) = 0,$$

что соответствует условию (2.29).

Далее, после подстановки в вариационное неравенство (2.32) полученное выше равенство (2.34), будем иметь

$$\int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon \bar{W} - \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla \bar{w} \geq \int_{\Omega} F \bar{W} + \int_{\Omega} f \bar{w} \quad \text{для всех } (\bar{W}, \bar{w}) \in K_0.$$

Отсюда, используя формулы интегрирования по частям, уравнения (2.24) и (2.25), а также равенства из (2.27), мы получаем неравенство (2.30). Таким образом, теорема 2.3 доказана в одну сторону.

Достаточность. Пусть теперь выполнены (2.24)–(2.30). Возьмем $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_0$. Рассмотрим уравнения равновесия (2.24) и (2.25). Умножим их на функции $(\bar{W} - W)$ и $(\bar{w} - w)$ соответственно и проинтегрируем по области Ω . Сложим полученные интегралы и применим формулы интегрирования по частям. Далее, учитывая второе и третье равенства из (2.27) и равенство (2.29), мы получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon (\bar{W} - W) - \int_{\Omega} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega} F (\bar{W} - W) - \int_{\Omega} f (\bar{w} - w) = \\ & = \int_{\gamma_1} \left(\sigma_\nu \bar{W}_\nu + m_\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) + \int_{\gamma_2} \left(\sigma_\nu \cdot \bar{W} - t_\nu \bar{u} + m_\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) + \int_{\gamma_3} \left(\sigma_\nu \bar{W}_\nu + m_\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства неотрицательна в силу (2.30). Следовательно, получаем справедливость вариационного неравенства (2.32). На этом доказательство эквивалентности постановок (2.32) и (2.24)–(2.30) завершается. Теорема 2.3 полностью доказана. $\square$

2.3 Плоское жесткое включение в упругой пластине, выходящее на границу под нулевым углом

В этом разделе исследуется задача о равновесии пластины, которая содержит плоское жесткое включение. Граница включения содержит трещину; при этом само включение выходит на границу под нулевым углом и частично находится в контакте с недеформируемым телом. Для доказательства разрешимости задач прямым вариационным методом минимизации функционалов энергии необходимо выполнение неравенства Корна в рассматриваемой области. Однако негладкость границы области, обусловленная примыканием включения к внешней границе под нулевым углом, может приводить к нарушению неравенства Корна. Это существенно осложняет доказательство корректности рассматриваемой задачи. В данном разделе для обоснования разрешимости данной задачи применяется метод фиктивных областей. Также представлены дифференциальная и вариационная формулировки.

2.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область Ω_1 в пространстве R^2 с гладкой границей Γ_1 . Обозначим единичный вектор внешней нормали к границе Γ_1 как $n = (n_1, n_2)$. Введем гладкую кривую γ , которая состоит из двух частей: $\gamma = \gamma_c \cup \gamma_0$, $\gamma_c \subset \Omega_1$, $\gamma_0 \subset \Gamma_1$. Единичный вектор нормали к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Кривая γ соответствует плоскому жесткому включению, имеющему следующие особенности: один конец примыкает к внешней границе Γ_1 под нулевым углом, тогда как противоположный конец допускает продолжение, пересекающее Γ_1 под ненулевым углом. Мы предполагаем, что на положительном берегу части кривой γ_c имеется отслоение, в то время как γ_0 контактирует с недеформируемым телом на границе. Обозначим также $\Gamma_0 = \Gamma_1 \setminus \gamma_0$, $\Omega_1^c = \Omega_1 \setminus \bar{\gamma}_c$ (рис. 2.4).

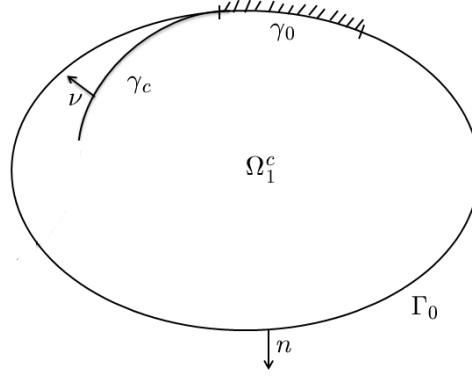


Рисунок 2.4 — Включение выходит на границу под нулевым углом

Дифференциальная постановка этой задачи заключается в следующем. Требуется найти функции $W = (w_1, w_2)$, w , $(\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в} \quad \Omega_1^c, \quad (2.35)$$

$$-\nabla \nabla m = f, \quad m = -D \nabla \nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_1^c, \quad (2.36)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \quad (2.37)$$

$$[W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на} \quad \gamma_c, \quad -W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \quad \text{на} \quad \gamma_0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0 \quad \text{на} \quad \gamma, \quad (2.39)$$

$$-\int_{\gamma_c} ([\sigma\nu \cdot W] - [t_\nu w] + \left[m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu} \right]) + \int_{\gamma_0} (\sigma\nu \cdot W - t_\nu w + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) = 0, \quad (2.40)$$

$$-\int_{\gamma_c} ([\sigma\nu \cdot U] - [t_\nu u] + \left[m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]) + \quad (2.41)$$

$$+ \int_{\gamma_0} (\sigma\nu \cdot U - t_\nu u + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) \geq 0 \quad \forall (U, u) \in K_c,$$

$$l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2; \quad l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

$$K_c = \{(W, w) \in H_{\Gamma_0}(\Omega_1^c) \mid [W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на} \quad \gamma_c, \quad -W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \quad \text{на} \quad \gamma_0,$$

$$W^- = \rho, \quad w^- = l, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma; \quad (\rho, l) \in R(\gamma);$$

$$a_1, a_2 = \text{const}\},$$

$$H_{\Gamma_0}(\Omega_1^c) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1^c) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1^c) \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega_1^c),$$

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega_1^c) = \{W \in H^1(\Omega_1^c) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega_1^c) = \{w \in H^2(\Omega_1^c) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}.$$

В этом разделе также справедливы все формулы и обозначения раздела 2.1. При этом для заданных внешних сил $F = (f_1, f_2)$, f справедливо, что $f_i, f \in L_{\text{loc}}^2(R^2)$, $i = 1, 2$.

Первые соотношения из (2.35) и (2.36), как и ранее, представляют собой уравнения равновесия, а также вторые равенства из (2.35) и (2.36) рассматриваются как уравнения состояния. Граничные условия (2.37) описывают жесткое защемление пластины на внешней границе Γ_0 . Отслоение на γ_c^+ указывает на наличие трещины между включением и упругой частью пластины. Первое нелинейное условие из (2.38) представляет собой условие непроникания и гарантирует отсутствие взаимного проникновения берегов трещин друг в друга. Второе неравенство из (2.38) интерпретируется как отсутствие взаимного проникания точек плоского жесткого включения и недеформируемого препятствия на γ_0 . Значение оставшихся условий соответствует описанию краевых условий, приведённому в предыдущих разделах.

Представим вариационную формулировку исследуемой задачи. С этой целью определим функционал энергии пластины.

$$\Pi_7(W, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1^c} \sigma(W) \varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_1^c} m(w) \nabla \nabla w - \int_{\Omega_1^c} F W - \int_{\Omega_1^c} f w \quad (2.42)$$

и рассмотрим задачу минимизации: найти $(W, w) \in K_c$ такое, что

$$\Pi_7(W, w) = \inf_{(\bar{W}, \bar{w}) \in K_c} \Pi_7. \quad (2.43)$$

Задача минимизации (2.43) соответствует вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (W, w) \in K_c, \int_{\Omega_1^c} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) &\geq \\ &\geq \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_c. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Далее мы приведем доказательство разрешимости задачи (2.35)–(2.41). Для этого сначала мы докажем, что формулировки (2.35)–(2.41) и (2.44) эквивалентны.

2.3.2 Эквивалентность двух формулировок

Мы покажем, что при наличии достаточной гладкости решение вариационного неравенства (2.44) также является решением задачи (2.35)–(2.41). Кроме того, любое классическое решение задачи (2.35)–(2.41) будет удовлетворять вариационному неравенству (2.44). Сформулируем это утверждение в виде теоремы 2.4.

Теорема 2.4. *Формулировки (2.35)–(2.41) и (2.44) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Необходимость. Начнем с того, что покажем, как из дифференциальной формулировки (2.35)–(2.41) вытекает (2.44). Пусть $(W, w) \in K_c$ – гладкое решение задачи (2.35)–(2.41). Умножим уравнения равновесия из (2.35) и из (2.36) на функции $(\bar{W} - W)$ и $(\bar{w} - w)$ соответственно, где $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_c$. Проинтегрируем по области Ω_1^c . После сложения интегралов получим:

$$-\int_{\Omega_1^c} \operatorname{div} \sigma \cdot (\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} \nabla \nabla m(\bar{w} - w) = \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w).$$

Интегрируя полученное равенство по частям, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^c} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w) = \\
& = - \int_{\gamma_c} [\sigma \nu \cdot (\bar{W} - W)] - \int_{\gamma_c} \left[m_\nu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] + \int_{\gamma_c} [t_\nu (\bar{w} - w)] + \\
& + \int_{\gamma_0} \sigma \nu \cdot (\bar{W} - W) + \int_{\gamma_0} m_\nu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) - \int_{\gamma_0} t_\nu (\bar{w} - w).
\end{aligned}$$

Чтобы получить вариационное неравенство (2.44), нам нужно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. В соответствии с условием (2.40), последнее равенство примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^c} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) - \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w) = \\
& = - \int_{\gamma_c} [\sigma \nu \cdot \bar{W}] - \int_{\gamma_c} \left[m_\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \right] + \int_{\gamma_c} [t_\nu \bar{w}] + \int_{\gamma_0} \sigma \nu \cdot \bar{W} + \int_{\gamma_0} m_\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \int_{\gamma_0} t_\nu \bar{w}.
\end{aligned}$$

Правая часть равенства выше неотрицательна согласно условию (2.41). Таким образом, мы получили вариационное неравенство (2.44).

Достаточность. Пусть теперь выполнено (2.44). Легко можно убедиться в справедливости уравнений равновесия из (2.35) и из (2.36), которые будут выполнены в смысле обобщенных функций (см. доказательство теоремы 2.1). Краевые условия (2.38) и (2.39) следуют из определения множества K_c . Рассмотрим получение условий (2.40) и (2.41). Итак, последовательно подставляя в вариационное неравенство (2.44) тестовые функции вида $(\bar{W}, \bar{w}) = (0, 0)$ и $(\bar{W}, \bar{w}) = 2(W, w)$, будем иметь

$$\int_{\Omega_1^c} \sigma(W) \varepsilon(W) - \int_{\Omega_1^c} m(w) \nabla \nabla w = \int_{\Omega_1^c} F W + \int_{\Omega_1^c} f w. \quad (2.45)$$

Интегрирование по частям в (2.45) дает тождество:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_1^c} \operatorname{div} \sigma \cdot W - \int_{\gamma_c} [\sigma \nu \cdot W] + \int_{\gamma_0} \sigma \nu \cdot W - \int_{\Omega_1^c} (\nabla \nabla m) w - \int_{\gamma_c} \left[m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] + \\
& + \int_{\gamma_c} [t_\nu w] + \int_{\gamma_0} m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu} - \int_{\gamma_0} t_\nu w = \int_{\Omega_1^c} FW + \int_{\Omega_1^c} fw.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу наличия уравнений равновесия из (2.35) и из (2.36) следует справедливость равенства (2.40). Затем, применяя тождество (2.45) в вариационном неравенстве (2.44) и используя уравнения равновесия из (2.35) и из (2.36), получаем условие (2.41), которое выполняется для всех $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_c$. Таким образом, мы убедились, что постановки (2.35)–(2.41) и (2.44) эквивалентны. Теорема 1 полностью доказана. $\square$

2.3.3 Разрешимость задачи

Для доказательства корректности задачи (2.35)–(2.41) возникает необходимость привлечения дополнительных аргументов. Ниже мы, используя метод фиктивных областей, обоснуем разрешимость задачи (2.35)–(2.41). Суть метода заключается в том, что в более широкой области находятся решения вспомогательных задач, слабо сходящихся к решению исходной задачи.

Вспомогательные задачи

Расширим область Ω_1 до области Ω_γ за счёт добавления фиктивной области Ω_2 , как показано на рисунке 2.5. Обозначим границу области Ω_2 как Γ_2 . Предположим, что Γ_2 не содержит нулевых углов и удовлетворяет условию Липшица. Далее обозначим $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Внешнюю границу

расширенной области $\Omega_\gamma = (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma) \setminus \bar{\gamma}$ обозначим как Γ и будем считать, что она также удовлетворяет условию Липшица; $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \Gamma$. Пусть n_c - внешняя нормаль к Γ .

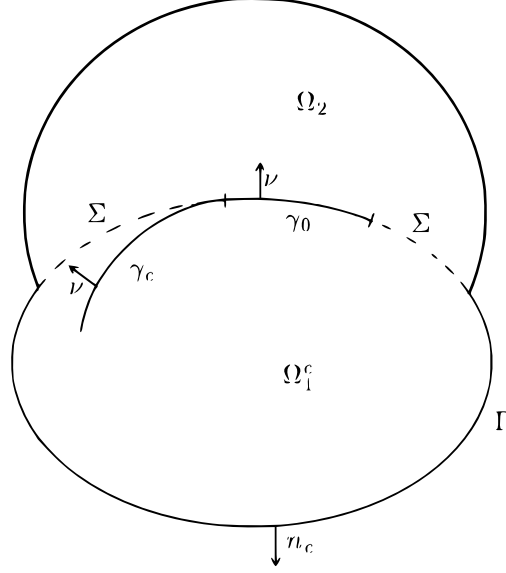


Рисунок 2.5 — Расширенная область Ω_γ и фиктивная область Ω_2

Введем в рассмотрение семейства тензоров упругости с положительным параметром λ такие, что

$$A^\lambda = a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega_1 \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в } \Omega_2 \end{cases}, \quad D^\lambda = d_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} d_{ijkl} & \text{в } \Omega_1 \\ \lambda^{-1} d_{ijkl} & \text{в } \Omega_2 \end{cases},$$

$i, j, k, l = 1, 2$. В области Ω_γ при каждом $\lambda > 0$ сформулируем следующую задачу: найти функции $W^\lambda = (w_1^\lambda, w_2^\lambda)$, w^λ , $(\rho^{0\lambda}, l^{0\lambda}) \in R(\gamma)$, $\sigma^\lambda, m^\lambda$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = F, \quad -\nabla \nabla m^\lambda = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (2.46)$$

$$\sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(W^\lambda), \quad m^\lambda = -D^\lambda \nabla \nabla w^\lambda \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (2.47)$$

$$w_1^\lambda = w_2^\lambda = w^\lambda = \frac{\partial w^\lambda}{\partial n_c} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (2.48)$$

$$[W^\lambda]_\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w^\lambda}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на } \gamma, \quad W^\lambda = \rho^{0\lambda}, \quad w^\lambda = l^{0\lambda}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial w^\lambda}{\partial x_1} = a_1^{0\lambda}, \quad \frac{\partial w^\lambda}{\partial x_2} = a_2^{0\lambda} \quad \text{на } \gamma^-,$$

$$\sigma_\tau^\lambda = 0, \quad t_\nu^\lambda = 0, \quad -\sigma_\nu^\lambda \geq |m_\nu^\lambda|, \quad \sigma_\nu^\lambda [W_\nu^\lambda] + m_\nu^\lambda \left[\frac{\partial w^\lambda}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{на } \gamma^+, \quad (2.50)$$

$$-\int_\gamma [\sigma^\lambda \nu] \cdot \rho = 0, \quad \int_\gamma [t_\nu^\lambda] l - \int_\gamma [m_\nu^\lambda] (a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2) = 0 \quad \forall (\rho, l) \in R(\gamma). \quad (2.51)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$, $l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. При каждом значении параметра $\lambda > 0$ задача (2.46)–(2.51) моделирует равновесие упругого тела, расположенного в области Ω_γ с плоским жёстким включением γ , которое имеет отслоение на положительном берегу. Задача (2.46)–(2.51) исследована в разделе 2.1. В этом пункте мы будем опираться на результаты, представленные в разделе 2.1. Итак, при каждом фиксированном $\lambda > 0$ существует решение задачи минимизации

$$\Pi_\lambda(W^\lambda, w^\lambda) = \inf_{(\bar{W}, \bar{w}) \in K_9} \Pi_\lambda. \quad (2.52)$$

Здесь K_9 определяется в разделе 2.1, а функционал энергии задается следующим образом:

$$\Pi_\lambda(W^\lambda, w^\lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma^\lambda(W^\lambda) \varepsilon(W^\lambda) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} m^\lambda(w^\lambda) \nabla \nabla w^\lambda - \int_{\Omega_\gamma} F W^\lambda - \int_{\Omega_\gamma} f w^\lambda.$$

Решение задачи (2.52) удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (W^\lambda, w^\lambda) \in K_9, \quad & \int_{\Omega_\gamma} \sigma^\lambda(W^\lambda) \varepsilon(\bar{W} - W^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma} m^\lambda(w^\lambda) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w^\lambda) \geq \\ & \geq \int_{\Omega_\gamma} F(\bar{W} - W^\lambda) + \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{w} - w^\lambda) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_9. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Кроме того, в предположении достаточной регулярности решения задачи (2.46)–(2.51) и (2.53) эквивалентны.

Предельный переход

Рассмотрим предельный переход в вариационном неравенстве (2.53) при стремлении λ к нулю. Используя пробные функции $(\bar{W}, \bar{w}) = 2(W^\lambda, w^\lambda)$, $(\bar{W}, \bar{w}) = (0, 0)$, преобразуем (2.53) к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^c} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_2} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \int_{\Omega_1^c} D(\nabla\nabla w^\lambda)(\nabla\nabla w^\lambda) + \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_2} D(\nabla\nabla w^\lambda)(\nabla\nabla w^\lambda) = \int_{\Omega_1^c} FW^\lambda + \int_{\Omega_2} FW^\lambda + \int_{\Omega_1^c} fw^\lambda + \int_{\Omega_2} fw^\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда получим равномерные по $\lambda \in (0, \lambda_0)$ оценки:

$$\|W^\lambda\|_{H_{\Gamma_c}^1(\Omega_\gamma)^2}^2 \leq c_1, \quad \|w^\lambda\|_{H_{\Gamma_c}^2(\Omega_\gamma)}^2 \leq c_2, \quad (2.54)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от λ . На основе (2.54) можно предположить, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$W^\lambda \rightarrow W \quad \text{слабо в } H_{\Gamma_c}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad w^\lambda \rightarrow w \quad \text{слабо в } H_{\Gamma_c}^2(\Omega_\gamma). \quad (2.55)$$

Здесь при необходимости выбраны подпоследовательности, для которых сохранены прежние обозначения.

Возьмем теперь произвольную функцию $(\bar{W}, \bar{w}) \in K_c$, продолжим ее нулем в Ω_2 и подставим в (2.53). Из этого следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^c} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(\bar{W}) + \int_{\Omega_1^c} D\nabla\nabla w^\lambda \nabla\nabla \bar{w} \geq \int_{\Omega_1^c} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_2} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \int_{\Omega_1^c} D\nabla\nabla w^\lambda \nabla\nabla w^\lambda + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_2} D\nabla\nabla w^\lambda \nabla\nabla w^\lambda + \\ & + \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W^\lambda) - \int_{\Omega_2} FW^\lambda + \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w^\lambda) - \int_{\Omega_2} fw^\lambda. \end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow 0$ перейдём к пределу в обеих частях последнего неравенства и воспользуемся (2.55), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^c} A\varepsilon(W)\varepsilon(\bar{W}) + \int_{\Omega_1^c} D\nabla\nabla w\nabla\nabla\bar{w} \geq \int_{\Omega_1^c} A\varepsilon(W)\varepsilon(W) + \\
& + \int_{\Omega_1^c} D\nabla\nabla w\nabla\nabla w + \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w) + \\
& + \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\Omega_2} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \int_{\Omega_2} D\nabla\nabla w^\lambda\nabla\nabla w^\lambda \right). \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Далее, в силу очевидного неравенства:

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\Omega_2} A\varepsilon(W^\lambda)\varepsilon(W^\lambda) + \int_{\Omega_2} D\nabla\nabla w^\lambda\nabla\nabla w^\lambda \right) \geq 0,$$

из (2.56) получим

$$\begin{aligned}
& (W, w) \in K_c, \int_{\Omega_1^c} \sigma(W)\varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega_1^c} m(w)(\nabla\nabla\bar{w} - \nabla\nabla w) \geq \\
& \geq \int_{\Omega_1^c} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega_1^c} f(\bar{w} - w) \quad \forall \quad (\bar{W}, \bar{w}) \in K_c. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что после выполнения предельного перехода в полученном вариационном неравенстве (2.57) мы рассматриваем сужение предельной функции (W, w) на исходную область Ω_1^c без введения специальных обозначений для этого сужения. Задача (2.57) в точности совпадает с задачей (2.44). Таким образом, существование решения задачи (2.44) доказано.

Из этого следует, что, несмотря на отсутствие коэрцитивности функционала энергии (2.42), задача (2.35)–(2.41) имеет решение. Более того это решение будет единственным. Единственность решения доказывается методом от противного и выкладки мы здесь приводить не будем,

аналогичную схему доказательства можно посмотреть в разделе 2.2. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Существует единственное решение задачи (2.35)–(2.41).*

Заключение

Основные выводы, полученные в ходе диссертационного исследования, заключаются в следующем.

1. В задаче о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и тонким жестким включением, где трещина делит включение на две части, доказано существование и единственность решения. Для вариационной формулировки задач получены эквивалентные дифференциальные постановки, включающие условия сопряжения частей жесткого включения. Также проанализирован случай задачи в контексте тонких жестких включений с отслоением.

2. Получены условия сопряжения тонких упругих включений Бернулли—Эйлера, возникающего в результате пересечения с трещиной в упругом теле. Представлены корректные вариационные и дифференциальные постановки, а также доказано существование единственного решения. Помимо этого исследована задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое упругое включение с отслоением. Рассмотрен также случай прямолинейного пересечения трещины с тонким включением. Кроме того, проанализирован предельный переход при стремлении параметра жесткости включений к бесконечности.

3. Установлены условия сопряжения жесткого и упругого включения в упругом теле. Сформулированы эквивалентные вариационные и дифференциальные постановки. Обоснован предельный переход при стремлении параметра жесткости к бесконечности. Также была проанализирована предельная задача, возникающая в этом случае.

4. Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения тонких упругих включений Тимошенко в двумерном упругом теле, где сопряжение возникло в результате пересечения с трещиной. Получены условия сопряжения для дифференциальной постановки. При этом дифференциальная постановка исследована в двух случаях: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения, и 2) когда имеется отслоение одного из

включений. Также был рассмотрен предельный переход, в зависимости от параметра жесткости включений.

5. Предложена дифференциальная постановка для задачи равновесия упругой пластины, содержащей плоское жесткое включение. Доказано, что полученная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

6. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Получена эквивалентная дифференциальная постановка.

7. Исследована задача о равновесии пластины, содержащей плоское жесткое включение с трещиной на его границе, которое выходит на границу под нулевым углом и частично контактирует с недеформируемым телом. С использованием метода фиктивных областей установлено существование решения поставленной задачи.

В заключение стоит отметить, что постановки задач о равновесии упругих тел с тонкими включениями и трещинами, рассмотренные в данной работе, являются новыми и ранее не рассматривались в научной практике. Полученные результаты расширяют класс краевых задач в областях с негладкими границами и могут быть полезны для дальнейших теоретических и численных исследований.

Список литературы

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — Москва: Наука, 1966. — 707 с.
2. *Черепанов Г. П., Ершов Л. В.* Механика разрушения. — Москва: Машиностроение, 1977. — 224 с.
3. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. — Москва: Наука, 1984. — 256 с.
4. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упруго-пластического разрушения. — Москва: Наука, 1985. — 505 с.
5. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамика хрупкого разрушения. — Москва: Машиностроение, 1988. — 240 с.
6. *Слепян Л. И.* Механика трещин. — Ленинград: Судостроение, 1990. — 296 с.
7. *Морозов Е.М.* Контактные задачи механики разрушения. — Москва: Машиностроение, 1999. — 544 с.
8. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — Москва: Мир, 1974. — 159 с.
9. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — Москва: МГАПИ, 1997. — 345 с.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 587 с.
11. *Киндерлердер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
12. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. — Москва: Наука, 1990. — 536 с.

13. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
14. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.
15. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно и нелинейно упругих тел конечных размеров // *Докл. АН СССР.* — 1976. — Т. 2, № 230. — С. 308–310.
16. *Ohtsuka K.* Mathematics of brittle fracture // *Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. Hiroshima.* — 1995. — P. 99–172.
17. *Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А.* О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // *Тр. семинаров им. И. Г. Петровского. М. Изд-во Моск. ун-та.* — 1982. — Т. 8, № 230. — С. 135–152.
18. *Мазья В. Г.* О поведении вблизи границы решений задачи Дирихле для бигармонического оператора // *Докл. АН СССР.* — 1977. — Т. 6, № 235. — С. 1263–12563.
19. *Lewy H., Stampacchia G.* On the regularity of the solution of a variational inequality // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1969. — Vol. 22, no. 2. — P. 153–188.
20. *Архипова А. А., Уральцева Н. Н.* Регулярность решений диагональных эллиптических систем при выпуклых ограничениях на границе области // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1986. — Т. 152. — С. 5–17.
21. *Уральцева Н. Н.* О регулярности решений вариационных неравенств // *УМН.* — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 151–174.
22. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. — Москва: Мир, 1979. — 576 с.

23. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. — Berlin-Heidelberg edition. — Springer, 1984. — 493 p.
24. *Ковтуненко В. А.* Решение задачи о балке с разрезом // *Прикл. механика и техн. физика.* — 1996. — Т. 4, № 37. — С. 160–166.
25. *Ковтуненко В. А.* Итерационный метод штрафа для задачи с ограничением на внутренней границе // *Сиб. мат. журн.* — 1996. — Т. 3, № 37. — С. 587–591.
26. *Назаров С. А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* — 1989. — Т. 2. — С. 152–160.
27. *Khludnev A.M., Kovtunencko V.A.* Analysis of cracks in solids. — Southampton-Boston edition. — WIT Press, 2000. — 408 p.
28. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. — Москва: Физматлит, 2010. — 252 с.
29. *Khludnev A. M., Leugering G. R.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2010. — Vol. 33, no. 16. — P. 1955–1967.
30. *Хлуднев А. М.* Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 114–126.
31. *Щербаков В. В.* Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 138–147.
32. *Щербаков В. В.* О выборе оптимальной формы тонких жестких включений в упругих телах // *Прикл. математика и техн. физика.* — 2015. — Т. 2. — С. 178–187.

33. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жёстким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2016. — Т. 19, № 2. — С. 74–87.
34. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жёсткого включения // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* — 2014. — Т. 1. — С. 32–45.
35. Фанкина И. В. Контактная задача для упругой пластины с тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 90–98.
36. Николаева Н. А. Пластина Кирхгофа – Лява с плоским жёстким включением // *Челяб. физ.-матем. журн.* — 2023. — Т. 8, № 1. — С. 29–46.
37. Namm R. V., Tsoy G. I. Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2019. — Vol. 59, no. 4. — P. 659–666.
38. Попова Т. С. О моделировании вязкоупругого тела с тонким жестким включением // *Math. Montisnigri.* — 2014. — Т. 30. — С. 25–36.
39. Попова Т. С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким // *Мат. заметки СВФУ.* — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 94–105.
40. Faella L., Khludnev A. M. Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // *Math. Methods Appl. Sci.Z.* — 2016. — Vol. 39, no. 12. — P. 3381–3390.
41. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах // *Мат. заметки СВФУ.* — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 87–107.
42. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 68–80.

43. Николаева Н. А. Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой // *Дальневосточный математический журнал*. — 2024. — Т. 24, № 1. — С. 73–95.
44. Khlodnev A. M., Leugering G. R. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // *Math. Mech. Complex Sys.* — 2018. — Vol. 21, no. 2. — P. 66–78.
45. Попова Т. С. Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2018. — Т. 21, № 2. — С. 66–78.
46. Khlodnev A. M. On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // *Math. Mech. Solids*. — 2018. — Vol. 24, no. 9. — P. 2742–2753.
47. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* — 2017. — Т. 17, № 4. — С. 94–111.
48. Рудой Е. М., Хлуднев А. М. Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2009. — Т. 12, № 2. — С. 120–130.
49. Khlodnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions // *Math. Mech. Solids*. — 2017. — Vol. 22, no. 11. — P. 2180–2195.
50. Фурцев А. И. Производная энергии для конструкции, состоящей из пластины и тонкой балки // *Математические заметки СВФУ*. — 2021. — Т. 28, № 2. — С. 68–87.
51. Khlodnev A. M., Popova T. S. Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Quart. Appl. Math.* — 2016. — Vol. 74. — P. 705–718.
52. Khlodnev A. M., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 92, no. 5. — P. 341–354.

53. *Khudnev A. M., Popova T. S.* Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control // *Comp. Math. Appl.* — 2019. — Vol. 77, no. 1. — P. 253–262.
54. *Shcherbakov V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* — 2017. — Vol. 68, no. 26.
55. *Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М.* Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением // *Докл. АН.* — 2014. — Т. 59, № 9. — С. 401–404.
56. *Khudnev A. M., Leugering G. R.* On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // *Math. Mech. Solids.* — 2015. — Vol. 20, no. 5. — P. 495–511.
57. *Itou H., Khudnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2016. — Vol. 39, no. 17. — P. 4980–4993.
58. *Shcherbakov V. V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *ZAMM-Z. Angew. Math. Mech.* — 2016. — Vol. 96, no. 11. — P. 1306–1317.
59. *Khudnev A. M., Popova T. S.* Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // *Acta Mech. Solida Sin.* — 2017. — Vol. 30, no. 3. — P. 327–333.
60. *Rudoy E. M., Lazarev N. P.* Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // *J. Comput. Appl. Math.* — 2018. — Vol. 334, no. 18–26. — P. 327–333.
61. *Khudnev A. M., Faella L., Popova T. S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Math. Mech. Solids.* — 2017. — Vol. 22, no. 4. — P. 1–14.

62. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужёсткого включения // *Мат. заметки СВФУ*. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 73–89.
63. Николаева Н. А. О сопряжении тонких включений Тимошенко в упругих телах при наличии трещины // *Сиб. журн. индустр. математики*. — 2024. — Т. 27, № 4. — С. 73–95.
64. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — Москва: Наука, 1976. — 354 с.
65. Boerquin F., Ciarlet P. G. Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures // *J. Funct. Anal.* — 1989. — Vol. 87, no. 2. — P. 392–427.
66. Le Dret H. Modeling of the junction between two rods // *J. Math. Pures Appl.* — 1989. — Vol. 68, no. 3. — P. 365–397.
67. Дуранте Т, Назаров С. А. Кардоне Дж. Моделирование сочленений пластин и стержней посредством самосопряжённых расширений // *Вестник СПбГУ*. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 3–14.
68. Junctions of elastic plates and beams / A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino et al. // *ESAIM Contr. Optim. CA*. — 2007. — Vol. 13, no. 3. — P. 419–457.
69. Боган Ю. А. Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок // *Матем. заметки*. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 662–669.
70. Боган Ю. А. Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок // *Матем. заметки*. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 662–669.
71. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом телеОсреднение неоднородной упругой балки при сопряжении

- элементов шарниром конечной жёсткости. — Киев: Наук. думка, 1983. — 288 с.
72. Мочалов Е. В., Сильвестров В. В. Задача взаимодействия тонких жёстких остроконечных включений, расположенных между разными упругими материалами // *Изв. РАН. МТТ.* — 2011. — № 5. — С. 99–117.
 73. Мхитарян С. М. О напряжённом состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жёстким тонким включением // *Доклады НАН РА.* — 2018. — Т. 118, № 1. — С. 39–48.
 74. Щербаков В. В. Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа–Лява // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2013. — Т. 16, № 4. — С. 142–151.
 75. Lazarev N. Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate // *Bound Value Probl.* — 2015. — no. 180. — P. 2–12.
 76. Лазарев Н. П., Семенова Г. М., Романова Н. А. О предельном переходе по толщине жесткого включения в задаче о равновесии пластины Кирхгофа-Лява с трещиной // *Журн. СФУ. Математика и физика.* — 2021. — Т. 14, № 1. — С. 28–41.
 77. Николаева Н. А. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа-Лява // *Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.* — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 78–90.
 78. Саульев В. К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных // *Сибирский математический журнал.* — 1963. — Т. 4, № 4. — С. 912–925.
 79. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. — Киев: Изд-во МГУ, 1991. — 160 с.

80. Степанов В. Д., Хлуднев А. М. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // *Сиб. матем. журн.* — 2003. — Т. 44, № 6. — С. 1350–1364.
81. Hoffmann K.-H., Khudnev A. M. Fictitious domain method for the Signorini problem in a linear elasticity // *Adv. Math. Sci. Appl.* — 2004. — Vol. 14. — P. 465–481.
82. Попова Т. С. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // *Мат. заметки ЯГУ.* — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 105–120.
83. Андерссон Л. Э., Хлуднев А. М. Трещина, выходящая на контактную границу. Метод фиктивных областей и инвариантные интегралы // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 15–29.
84. Алексеев Г. В., Хлуднев А. М. Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2009. — Т. 9, № 2. — С. 15–29.
85. Лазарев Н. П. Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 91–104.
86. Щербаков В. В., Криворотько О. И. Оптимальные формы трещин в вязкоупругом теле // *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 294–304.
87. Лазарев Н. П., Эверстов В. В., А. Романова Н. Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Кирхгофа – Лява с условиями непроникания для известной конфигурации изгиба // *Журн. СФУ. Математика и физика.* — 2019. — Т. 12, № 6. — С. 674–686.
88. Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // *Japan J. Indust. Appl. Math.* — 2016. — Vol. 33. — P. 63–80.