

На правах рукописи



Николаева Наталья Афанасьевна

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ
УПРУГИХ ТЕЛ И ПЛАСТИН С ТОНКИМИ
ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ**

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Якутск — 2025

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

Научный руководитель:

ХЛУДНЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории краевых задач механики сплошных сред ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Официальные оппоненты:

ЧЕБОТАРЁВ Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор департамента математического и компьютерного моделирования, Институт математики и компьютерных технологий ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»

РОМЕНСКИЙ Евгений Игоревич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Лаборатории численного моделирования природных и антропогенных процессов в многомасштабных средах ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Ведущая организация: ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр „Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук“»

Защита состоится 2 декабря 2025 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, д.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН <http://www.hydro.nsc.ru>.

Автореферат разослан ____ 30.09. ____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



Прокудин Д.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. С каждым годом наблюдается рост распространенности и востребованности композиционных материалов с тонкими включениями в инженерных приложениях. Это создает необходимость в обосновании теоретических методов анализа их свойств и требует разработки и уточнения математических моделей. Моделирование процессов в форме краевых задач представляет собой важный инструмент в современных инженерных и научных исследованиях. Эти задачи позволяют эффективно описывать и анализировать сложные системы, что делает их актуальными в контексте требований науки и техники, а также в решении практических проблем в различных областях.

Изучение задач о равновесии упругих тел с включениями, особенно в условиях наличия трещин, требует уточнения существующих моделей. Трещины, возникающие по различным причинам, значительно усложняют задачу, так как они влияют на распределение напряжений и деформаций. В представленной работе для описания трещин используются нелинейные краевые условия, которые не допускают взаимного проникания берегов трещин. На протяжении последних десятилетий в работах А.М. Хлуднева, В.А. Ковтуненко, Е.М. Рудого, Н.П. Лазарева, Т.С. Поповой, Е.В. Пяткиной, Н.В. Неустроевой, Т.А. Ротановой, В.В. Щербакова, А.И. Фурцева, И.В. Фанкиной, Н. Ito, A. Tani, G. Leugering, A. Gaudiello, K.-H. Hoffmann, M. Bach, J. Sokolowski, D. Knees, M. Negri, L. Faella, C. Perugia и др. были проведены обширные исследования с применением нелинейных краевых условий непроникания, которые позволили получить существенные результаты в решении широкого круга задач. Однако следует отметить, что при всём многообразии существующих исследований остаются недостаточно изученными задачи о сопряжении и контакте тонких включений с условиями непроникания, что делает их исследование значимым. Таким образом, актуальность изучения задач о равновесии упругих тел с тонкими включениями и трещинами заключается в необходимости уточнения математических моделей и обоснования теоретических методов анализа их свойств.

Цель и задачи исследования. Основная цель данного диссертационного исследования состоит в строгом математическом обосновании и анализе краевых задач о равновесии упругих тел, содержащих тонкие включения и

трещины. Для достижения цели необходимо было решить следующие задачи:

- 1) исследовать задачи о сопряжении различных типов тонких включений в двумерных упругих телах при наличии трещины и получить соответствующие дифференциальные постановки, содержащие условия сопряжения;
- 2) провести анализ предельных переходов по параметру жесткости тонких включений для рассматриваемых задач сопряжения;
- 3) исследовать задачи равновесия упругой пластины с плоским жестким включением и проанализировать взаимосвязь между краевыми задачами и соответствующими вариационными постановками;
- 4) доказать теоремы о существовании и единственности решений в задачах равновесия упругой пластины с плоским жестким включением.

Методология исследования. В работе используются методы и подходы, ориентированные на исследование, анализ и обоснование нелинейных математических моделей для упругих тел с неоднородной структурой, включая методы дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и функционального анализа, а также метод вариационных неравенств.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В задаче о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и тонким жестким включением, где трещина делит включение на две части, доказано существование и единственность решения. Для вариационной формулировки задач получены эквивалентные дифференциальные постановки, включающие условия сопряжения частей жесткого включения. Также проанализирован случай задачи в контексте тонких жестких включений с отслоением.
2. Получены условия сопряжения тонких упругих включений Бернулли-Эйлера, возникающего в результате пересечения с трещиной в упругом теле. Представлены корректные вариационные и дифференциальные постановки, а также доказано существование единственного решения. При этом исследована задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое упругое включение с отслоением. Рассмотрен также случай прямолинейного пересечения трещины с тонким включением. Кроме того, проанализирован предельный переход при стремлении параметра жесткости включений к бесконечности.
3. Установлены условия сопряжения жесткого и упругого включения в упругом теле. Сформулированы эквивалентные вариационные и дифференциаль-

ные постановки. Обоснован предельный переход при стремлении параметра жесткости к бесконечности. Также изучена получаемая при этом предельная задача.

4. Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения тонких упругих включений Тимошенко в двумерном упругом теле, где сопряжение возникло в результате пересечения с трещиной. Получены условия сопряжения для дифференциальной постановки. При этом дифференциальная постановка исследована в двух случаях: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения, и 2) когда имеется отслоение одного из включений. Также был рассмотрен предельный переход, в зависимости от параметра жесткости включений.

5. Предложена дифференциальная постановка для задачи равновесия упругой пластины, содержащей плоское жесткое включение. Доказано, что полученная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

6. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Получена эквивалентная дифференциальная постановка.

7. Исследована задача о равновесии пластины, содержащей плоское жесткое включение с трещиной на его границе, которое выходит на границу под нулевым углом и частично контактирует с недеформируемым телом. С использованием метода фиктивных областей установлено существование решения поставленной задачи.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность и достоверность результатов, представленных в данной диссертационной работе, обеспечиваются через корректную формулировку исследуемых задач, строгое применение математических методов, правильное использование математического инструментария и сопоставление с результатами других исследователей.

Научная новизна. Исследован ряд новых задач равновесия двумерных упругих тел и пластин с тонкими включениями и трещинами. Формулировки этих задач являются оригинальными и не были исследованы в научной практике ранее. Все результаты, представленные в данной диссертации, получены автором лично.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Диссертационное исследование является теоретическим и способствует расширению класса изучаемых задач в данной области. Полученные результаты могут стать основой для последующих теоретических и практических исследований, а также находить применение при численном анализе указанных задач.

Апробация результатов диссертации. Апробация результатов диссертационного исследования осуществлялась через участие в научных конференциях и семинарах, а также через публикацию статей в рецензируемых научных журналах. Основные выводы исследования были представлены на следующих конференциях:

1. IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, Новосибирск, 7-11 сентября 2020 г.
2. Международная конференция “Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные”, г. Якутск, 18-25 июля 2021 г.
3. XXI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова “Информационные технологии и математическое моделирование” (ИТММ – 2022), г. Карши Республика Узбекистан, 25–29 октября 2022 г.
4. Modern Achievements in Symmetries of Differential Equations (Symmetry 2022) School of Mathematics, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand, 13-16 December 2022.
5. XXV Лаврентьевские чтения РС(Я), посвященных 30-летию Академии наук РС(Я), г. Якутск, 10-13 апреля 2023 г.
6. X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), г. Якутск, 16-20 июля 2023 г.
7. Международная научная конференция “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”, г. Ташкент, 23-25 ноября 2023 г.
8. The 8th International school-seminar “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2024), Irkutsk, Russia, 24-28 June 2024.
9. XII Международная научная конференция “Математическое и компьютерное моделирование”, г. Омск, 14 марта 2025 г.
10. XXXVIII Международная Воронежская весенняя математическая шко-

ла “Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXVI”, г. Воронеж, 30 апреля-4 мая 2025 г.

11. XXX Байкальская Всероссийская конференция с международным участием “Информационные и математические технологии в науке и управлении”, Иркутск- Байкал 1-9 июля 2025 г.

Также результаты работы докладывались на научных семинарах:

1. НИИ математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова под рук. д.ф.-м.н. Е.И. Егорова.
2. “Краевые задачи в областях с негладкими границами” Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под рук. д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева.
3. “Краевые задачи механики сплошных сред” Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под рук. чл.- корр. РАН проф. П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова.
4. “Избранные вопросы математического анализа” Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под рук. д.ф.-м.н. Г. В. Демиденко.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект FSRG-2023-0025).

Публикации. По материалам, полученным в ходе исследования по теме диссертации, было опубликовано 14 печатных работ. Из них 5 статей [1–5] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, а [6–14] публикаций представлены в виде тезисов всероссийских и международных конференций.

Объем диссертации. Объем диссертационной работы составляет 119 страниц, что включает в себя основную часть, введение, заключение и список использованных источников, который содержит 88 наименований. Основная часть работы содержит две главы. Главы делятся на параграфы, а параграфы — на подпараграфы. Диссертация также включает 10 рисунков.

Содержание работы

Во введении представлено обоснование актуальности темы диссертационного исследования, а также проведен обзор литературы. Сформулированы цель и задачи работы. Кроме того, указаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Обоснована достоверность результатов, а также представлена информация об апробации

работы на научных мероприятиях.

В первой главе рассмотрены задачи о сопряжении тонких включений в двумерных упругих телах при наличии трещины. Предполагается, что трещина проходит между включениями. В результате этого возникает сопряжение включений в некоторой точке, являющейся точкой взаимного контакта. При этом рассматриваются сопряжения различных типов включений: тонких упругих и жестких. На берегах трещины задаются условия непроникания. Также, исходя из геометрии расположения включения и трещины, условие непроникания учитывается не только на берегах трещины, но и в точке контакта. С физической точки зрения такое нелинейное условие будет более точно описывать взаимовлияние частей включения, поскольку проникновение тонких включений друг в друга будет исключено.

Приведем постановку задачи. Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ . Пусть $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\Gamma}_c \subset \Omega$ – гладкие кривые без самопересечений такие, что $\gamma \cap \Gamma_c = \{(0,0)\}$. Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ , которые пересекают границу Γ и разбивают область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i , причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Для упрощения записи нормали к Γ_c и к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$; ν_0 – нормаль в точке $\{(0,0)\}$, совпадающая с направлением нормали ν к Γ_c (см. рис. 1). Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данных кривых. Обозначим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{\Gamma}_c)$. В наших рассуждениях Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ – тонкому включению, Γ_c – трещине. Следовательно, трещина разбивает тонкое включение на две части, так что $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, где γ_1 и γ_2 – гладкие кривые. Для упрощения записи обозначим точку пересечения как $O = (0,0)$.

Вектор $u = (u_1, u_2)$ будет задавать перемещения точек тела. Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ по формулам: $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$, $i, j, k, l = 1, 2$, где $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, который

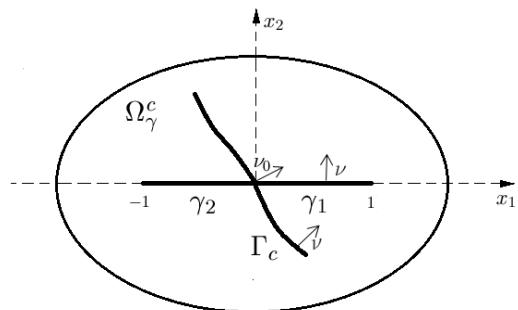


Рис. 1 — Упругое тело с трещиной Γ_c и тонкими включениями γ_1, γ_2 .

обладает свойствами симметрии и положительной определенности. Здесь и далее будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам. Все величины с двумя нижними индексами будут предполагаться симметричными по этим индексам. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующим координатам: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Первая глава состоит из четырех параграфов. В **параграфе 1.1** рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, которая пересекает тонкое жесткое включение в контактной точке. Прямым вариационным методом минимизации функционалов энергии доказаны существование и единственность решений рассматриваемых задач. Для вариационных формулировок задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки.

Для описания перемещений точек тонких жестких включений γ_i мы будем рассматривать пространства инфинитезимальных жестких перемещений $R(\gamma_i)$. Эти пространства определяются следующим образом:

$$R(\gamma_i) = \{\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}) \mid \rho_i(x_1, x_2) = b_i(-x_2, x_1) + (c_{i1}, c_{i2});$$

$$b_i, c_{i1}, c_{i2} = \text{const}, (x_1, x_2) \in \gamma_i\}, i = 1, 2.$$

В последующем, для упрощения записи, мы введем следующие обозначения для функций перемещения: $\rho|_{\gamma_1} = \rho_1$ и $\rho|_{\gamma_2} = \rho_2$, где $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$.

В п. 1.1.1 краевая задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2 формулируется следующим образом. Для заданных функций внешних сил $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, σ , $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, такие, что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (2)$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2} = \rho_2^0, \quad [\rho^0]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (3)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (4)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2 \leq 0 \quad \forall \quad \rho_i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad [\rho]^0 \nu_0 \geq 0, \quad (5)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2^0 = 0, \quad (6)$$

где $\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$, $\sigma_\nu = (\sigma_{1j} \nu_j, \sigma_{2j} \nu_j)$, $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j})$, $i, j = 1, 2$, $u_\nu = u \cdot \nu$, $(\tau_1, \tau_2) = (\nu_2, -\nu_1)$, $\sigma_\tau = \sigma_\nu \cdot \tau$. В данном контексте и далее обо-

значение $[v] = v^+ - v^-$ представляет собой скачок функции v на кривой Γ_c . Здесь значения $v^\pm = v|_{\Gamma_c^\pm}$ соответствуют следам функции v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c относительно нормали ν . Обозначение $[\rho]^0 = \rho^+(O) - \rho^-(O)$ указывает на скачок вектора ρ в точке O , где $\rho^\pm$ — это следы функций ρ на кривых γ_1 и γ_2 в точке O относительно нормали ν_0 .

Первое условие из (1) представляет собой уравнение равновесия, в то время как второе условие из (1) соответствует уравнению состояния, известному как закон Гука. Краевое условие (2) определяет закрепление тела на границе Γ . Первое и второе равенства из (3) описывают характер перемещений на границах γ_1 и γ_2 . Первое краевое условие из (4) гарантирует взаимное непроникание берегов трещины. Вместе с тем условие $[u_\nu] \geq 0$ выполняется почти всюду на Γ_c , что означает, что оно может не выполняться в точке сопряжения O . Третье условие из (3), в свою очередь, обеспечивает непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 друг в друга в точке O . Остальные краевые условия (4) дополняют условие взаимного непроникания и называются естественными краевыми условиями. При этом четвертое равенство в (4) указывает на нулевое трение между контактирующими поверхностями берегов трещины. Условия сопряжения (5) и (6) представляют реализацию принципа виртуальных перемещений.

Определим множество допустимых перемещений:

$$K_1 = \{v = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \mid u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), i = 1, 2, \\ [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, [\rho]^0 \nu_0 \geq 0\},$$

где $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma^c) \mid v = 0 \text{ п. в. на } \Gamma\}$. Задача равновесия допускает вариационную постановку:

$$u \in K_1, \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall \bar{u} \in K_1. \quad (7)$$

Теорема 1.1. *Краевая задача (1)-(6) эквивалентна вариационной задаче (7) при условии достаточной гладкости решений.*

В п. 1.1.2 рассмотрен случай, когда имеется отслоение тонкого жесткого включения на положительном берегу γ^+ . Такая ситуация приводит к усложнению задачи, поскольку между упругим телом и включением γ возникает трещина. При этом перемещения включения совпадают с перемещениями упругого тела на γ^- . Представлены вариационная и эквивалентные ей дифференциальные постановки задачи. Важно отметить, что вид крае-

вых условий в точке сопряжения получается идентичным случаю отсутствия отслоения.

В параграфе 1.2 включения $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ соответствуют тонким упругим балкам с заданными свойствами (см. рис. 1). В частности, считаем, что поведение балок γ_1, γ_2 описывается моделью Бернулли – Эйлера.

В п. 1.2.1 представлен анализ случая отсутствия отслоения. Рассматриваются дифференциальная и вариационная формулировки задачи равновесия упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими упругими включениями γ_1, γ_2 . Доказана теорема об эквивалентности двух формулировок.

В п. 1.2.2 в модель, представленную в п. 1.2.1, вводится параметр λ , характеризующий жесткость тонкого включения, и исследуется предельный переход при стремлении этого параметра к бесконечности. В результате предельного перехода при $\lambda \rightarrow \infty$ в вариационной постановке задачи получена предельная задача, которая совпадает с задачей (7) о равновесии упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение.

В п. 1.2.3 рассмотрен случай, при котором $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$ соответствует тонкому упругому включению с отслоением на γ^+ ; $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ (см. рис. 1). Формулировка задачи равновесия в этом случае будет следующей: необходимо найти функции $u = (u_1, u_2)$, σ , v^i, w^i , определенные в $\Omega_\gamma^c, \Omega_\gamma^c, \gamma_i, \gamma_i$, $i = 1, 2$, такие что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (8)$$

$$v_{xxxx}^i = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (9)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (10)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (11)$$

$$v^i = u_\nu^-, \quad w^i = u_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (12)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (13)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xxx}^1 = w_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad v_{xx}^2 = v_{xxx}^2 = w_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad (14)$$

$$v_{xx}^1 = 0, \quad v_{xx}^2 = 0, \quad [(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (15)$$

$$(v_{xxx}^1 \bar{v}^1)(0) - (w_x^1 \bar{w}^1)(0) - (v_{xxx}^2 \bar{v}^2)(0) + (w_x^2 \bar{w}^2)(0) \geq 0 \quad (16)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \quad [\bar{w}(0), \bar{v}(0)]^0 \nu_0 \geq 0,$$

$$(v_{xxx}^1 v^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Здесь функции, определенные на γ , отождествляются с функциями переменной x_1 ; $v_x = \frac{dv}{dx}$, $x = x_1$. При этом функция v определяется так, что $v|_{\gamma_1} = v^1$ и $v|_{\gamma_2} = v^2$. Аналогичное утверждение верно и для функции w .

Уравнения (9) соответствуют дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядка для смещений тонких упругих включений в рамках модели балок Бернулли–Эйлера. Правые части этих уравнений описывают влияние упругой среды на γ_i , $i = 1, 2$. Соотношения (12) обеспечивают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i , $i = 1, 2$. Набор нелинейных условий (13) описывает отслоение тонких жестких включений γ_1 и γ_2 . Краевые условия (14) обеспечивают нулевые моменты, нулевые поперечные силы и нулевые касательные силы для упругого включения при $x = -1$ и $x = 1$. Соотношения (15)–(17) представляют собой условия сопряжения при $x = 0$. В данном случае условие непроникания в точке сопряжения имеет вид третьего неравенства из (15).

Задача (8)–(17) допускает вариационную формулировку в виде

$$(u, v, w) \in K_4, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1 (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1 (\bar{w}_x^1 - w_x^1) + \\ + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2 (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2 (\bar{w}_x^2 - w_x^2) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4, \quad (18)$$

где $K_4 = \{(u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i) \mid v^i = u_\nu^-, \quad w^i = u_\tau^- \text{ на } \gamma_i,$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c; \quad [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma_i; \quad [(w(0), v(0))]^0 \nu_0 \geq 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 1.5. *Краевая задача (8)–(17) эквивалентна вариационной задаче (18) при условии достаточной гладкости решений.*

В параграфе 1.3 рассмотрен случай, в котором γ_1 соответствует упругому включению, а γ_2 – жесткому включению (см. рис. 1). Упругое включение, как и ранее, моделируется с помощью балки Бернулли – Эйлера. Предполагается, что жесткое включение отслаивается на границе γ_2^+ .

В п. 1.3.1 приводятся дифференциальная и вариационная постановки задачи. Задача равновесия в данном случае формулируется следующим образом: требуется найти $\rho^0 \in R(\gamma_2)$ и функции u , σ , v , w , определенные в

$\Omega_\gamma^c, \Omega_\gamma^c, \gamma_1, \gamma_1$ соответственно, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (19)$$

$$v_{xxxx} = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (20)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (21)$$

$$u|_{\gamma_2^-} = \rho^0, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \quad (22)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (23)$$

$$v = u_\nu, \quad w = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad (24)$$

$$v_{xx} = 0, \quad ((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (25)$$

$$v_{xx} = v_{xxx} = w_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad (26)$$

$$(v_{xxx}\tilde{v})(0) - (w_x\tilde{w})(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu]\rho \geq 0 \quad \forall \rho \in R(\gamma_2), \quad (27)$$

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\tilde{w}(0), \tilde{v}(0)) - \rho(0))\nu_0 \geq 0,$$

$$(v_{xxx}v)(0) - (w_xw)(0) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu]\rho^0 = 0. \quad (28)$$

Неравенство из (25) обеспечивает непроникание тонкого упругого включения γ_1 и тонкого жесткого включения γ_2 друг в друга в точке их контакта. Совместно с соотношениями (27) и (28) набор (25) формируют условия сопряжения в точке $x=0$.

Вариационная формулировка задачи равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} (u, v, w) \in K_5, \quad & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xx}(\bar{v}_{xx} - v_{xx}) + \int_{\gamma_1} w_x(\bar{w}_x - w_x) \geq 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_5, \end{aligned} \quad (29)$$

где множество допустимых перемещений следующее:

$$\begin{aligned} K_5 = \{ & (u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu, \quad w = u_\tau \text{ на } \gamma_1; \\ & [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2); ((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 1.6. Краевая задача (19)–(28) эквивалентна вариационной задаче (29) при условии достаточной гладкости решений.

В п. 1.3.2 исследуется семейство задач, зависящее от положительного параметра λ , характеризующего жёсткость упругого включения γ_1 . Проведён анализ предельного перехода при стремлении данного параметра к бесконечности. Установлено, что предельная задача для рассматриваемого семейства описывает равновесие упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение, которое имеет отслоение на γ_2^+ . Получена дифференциальная формулировка предельной задачи.

В параграфе 1.4 для описания поведения тонких включений $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ принимается модель балки Тимошенко (см. рис. 1).

В п. 1.4.1 исследуется случай, когда тонкие включения не имеют отслоения. Рассмотрим вариационную постановку задачи. С этой целью вводится функционал энергии

$$\Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ (w_x^i)^2 + (\varphi_x^i)^2 + (v_x^i + \varphi^i)^2 \right\}.$$

а также множество допустимых функций:

$$K_7 = \{(u, v^i, w^i, \varphi^i) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, (v^i, w^i, \varphi^i) \in H^1(\gamma_i)^3, v^i = u_\nu, w^i = u_\tau \text{ на } \gamma_i, i = 1, 2; [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c; ((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0\}.$$

Теорема 1.7. *Задача минимизации:*

$$\text{найти } (u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_7, \text{ так что } \Pi_4(u, v^i, w^i, \varphi^i) = \inf_{K_7} \Pi_4$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u, v^i, w^i, \varphi^i) \in K_7, \quad & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^i (\bar{w}_x^i - w_x^i) + \varphi_x^i (\bar{\varphi}_x^i - \varphi_x^i) \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} (v_x^i + \varphi^i) (\bar{v}_x^i + \bar{\varphi}^i - v_x^i - \varphi^i) \geq 0 \\ & \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{\varphi}^i) \in K_7, i = 1, 2. \quad (30) \end{aligned}$$

Дифференциальная формулировка задачи (30) состоит в следующем: для заданных внешних сил $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ требуется найти $u = (u_1, u_2)$, σ , определенные в Ω_γ^c , и функции v^i, w^i, φ^i , определенные на γ_i , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \quad (31)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (32)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^\pm = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \quad (33)$$

$$-v_{xx}^i - \varphi_x^i = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx}^i = [\sigma_\tau], \quad -\varphi_{xx}^i + v_x^i + \varphi^i = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (34)$$

$$v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 + v_x^1 &= w_x^1 = \varphi_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \\ \varphi^2 + v_x^2 &= w_x^2 = \varphi_x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \end{aligned} \quad (36)$$

$$((w^1, v^1)(0) - (w^2, v^2)(0))\nu_0 \geq 0, \quad \varphi_x^1(0) = \varphi_x^2(0) = 0, \quad (37)$$

$$(w_x^2 w^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2)v^2(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1)v^1(0) = 0, \quad (38)$$

$$(w_x^2 \bar{w}^2)(0) + (\varphi^2 + v_x^2)\bar{v}^2(0) - (w_x^1 \bar{w}^1)(0) - (\varphi^1 + v_x^1)\bar{v}^1(0) \geq 0 \quad (39)$$

$$\forall (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar{w}^1, \bar{v}^1)(0) - (\bar{w}^2, \bar{v}^2)(0))\nu_0 \geq 0,$$

$i = 1, 2$. Здесь Уравнения (34) представляют собой условия равновесия тонких включений γ_1 и γ_2 , которые соответствуют модели балок Тимошенко. Первая группа краевых условий (36) соответствует нулевой перерезывающей силе, нулевой деформации растяжения (сжатия) и нулевому моменту тонкого включения γ_1 в точке $x = 1$; вторая группа краевых условий (36) определяет аналогичное для тонкого включения γ_2 в точке $x = -1$. Оставшиеся условия (37)–(39) описывают сопряжение тонких включений γ_1 и γ_2 в точке $(0, 0)$.

Теорема 1.8. *Дифференциальная постановка (31)–(39) эквивалентна вариационной задаче (30) при условии достаточной гладкости решений.*

В п. 1.4.2 в модель (30) вводится в рассмотрение положительный параметр $\lambda > 0$, характеризующий жесткость тонких включений γ_1 и γ_2 , и проводится исследование поведения решения задачи (30) при предельном переходе по этому параметру. Установлено, что предельная задача, полученная в результате проведенного анализа, полностью совпадает с задачей (7), исследованной в разделе 1.1.1.

В п. 1.4.3 предполагается наличие отслоения на положительном берегу γ_1 (см. рис. 1). Установлено, что для рассматриваемого случая условия сопряжения в контактной точке для дифференциальной постановки сохраняют тот же вид, что и в случае п. 1.4.1. Вместе с тем, формулировки задачи, а также доказательство эквивалентности значительно отличаются.

Во второй главе рассматривается полная модель пластины Кирхгофа-Лява, в которой неизвестными функциями являются вертикальные и горизонтальные перемещения точек срединной поверхности пластины. Исследуются задачи равновесия упругой пластины с плоским жестким включением. Вдоль части жесткого включения расположена сквозная трещина. В этой главе исследуются задачи о равновесии пластины с различным расположением плоского жесткого включения, включая случай, когда плоское жесткое включение выходит на границу под нулевым углом.

Вторая глава состоит из трех параграфов. В параграфе 2.1 исследуется задача равновесия упругой пластины с плоским жестким включением. Вдоль части жесткого включения расположена сквозная трещина. В п. 2.1.1 приводится постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ , единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $n = (n_1, n_2)$; γ – гладкая кривая такая, что $\bar{\gamma} \subset \Omega$. Нормаль к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Для простоты, предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h = 2$. Декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ выберем так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset R^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Предположим, что плоское жесткое включение описывается цилиндрической поверхностью $x = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leq z \leq 1$, $|z|$ – расстояние до срединной плоскости. Будем считать, что имеется отслоение на положительном берегу γ^+ .

Введем пространство функций, заданных на γ :

$$R(\gamma) = \{\zeta(x) = (\rho, l) \mid \rho(x) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);$$

$$l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, x \in \gamma\}, \text{ где } b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 = \text{const}; x = (x_1, x_2).$$

Дифференциальная постановка задачи состоит в следующем. Требуется найти функции $W = (w_1, w_2)$, w , $(\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (40)$$

$$-\nabla \nabla m = f, \quad m = -D \nabla \nabla w \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (41)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (42)$$

$$W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0 \quad \text{на } \gamma, \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
[W_\nu] &\geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad t_\nu^+ = 0, \\
-\sigma_\nu^+ &\geq |m_\nu^+|, \quad \sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{на } \gamma,
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\int_\gamma [\sigma \nu] \cdot \rho = 0, \quad \int_\gamma [t_\nu] l - \int_\gamma [m_\nu] (a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2) = 0, \quad \forall (\rho, l) \in R(\gamma), \tag{45}$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$, $l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. При этом используются следующие обозначения: $F = (f_1, f_2)$; $f_1, f_2, f \in L^2(\Omega)$ – заданные внешние силы, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$ – тензоры усилий и малых деформаций, $m = \{m_{ij}\}$ – тензор моментов, $i, j = 1, 2$; W, w – горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины соответственно; $m_\nu(w) = m_\nu$ – изгибающий момент, $t_\nu(m) = t_\nu$ – перерезывающая сила, $A = \{a_{ijkl}\}$ и $D = \{d_{ijkl}\}$ – тензоры модулей упругости, обладающие свойствами симметрии и положительной определенности; $\nabla \nabla m = m_{ij,ij}$, $\sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu$, $\sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2)$, $\nabla \nabla w = \{w_{,ij}\}_{i,j=1}^2$, $m_\nu = -m_{ij} \nu_j \nu_i$, $W_\nu = W \cdot \nu$, $t_\nu = -m_{ij,k} \tau_k \tau_j \nu_i - m_{ij,j} \nu_j$, $i, j, k, l = 1, 2$.

В дифференциальной постановке первые соотношения из (40) и (41) представляют собой уравнения равновесия, а вторые соотношения из (40) и (41) – уравнения состояния. Краевое условие (42) описывает жесткое защемление пластины на внешней границе Γ . Первые два условия из (43) указывают на характер перемещений на γ . Третье и четвертое равенства (43) моделируют плоское жесткое включение. Набор нелинейных условий (44) описывает отслоение жесткого включения. Первое неравенство из (44) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины, второе равенство из (44) соответствует нулевому трению, а третье – равенству нулю перерезывающей силы на γ^+ . Краевые условия (45) соответствуют принципу возможных перемещений. При этом первое равенство из (45) задает равенство нулю главного вектора сил и главного вектора моментов для жесткого включения.

В п. 2.1.2 приводится вариационная формулировка задачи (40)–(45). В п. 2.1.3 доказано, что предложенная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

В **параграфе 2.2** рассматривается задача о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы.

В п. 2.2.1 представлена постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве R^2 с гладкой границей Γ , единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Будем считать, что Γ состоит из гладких кривых γ и Γ_0 , $\gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, $meas \Gamma_0 > 0$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Кривая γ_2 соответствует плоскому жесткому включению. Считаем, что часть внешней границы γ , которая содержит плоское жесткое включение γ_2 , контактирует с недеформируемым телом (см. рис. 2).

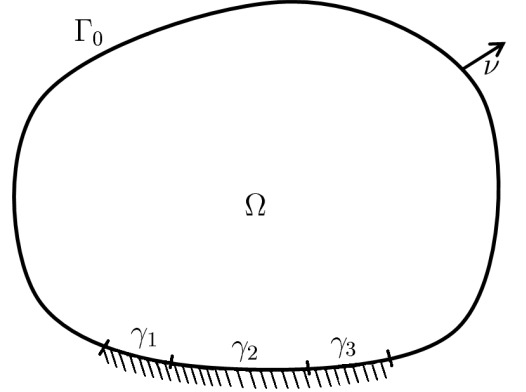


Рис. 2 — Геометрия контактной задачи.

Дифференциальная постановка задачи имеет вид: найти функции $W = (w_1, w_2)$, w , $(\rho^0, l^0) \in R(\gamma)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = F, \quad \sigma = A \varepsilon(W) \quad \text{в } \Omega, \quad (46)$$

$$-\nabla \nabla m = f, \quad m = -D \nabla \nabla w \quad \text{в } \Omega, \quad (47)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (48)$$

$$-W \nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \quad \text{на } \gamma, \quad \sigma_\tau = 0, \quad t_\nu = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \text{ и } \gamma_3, \quad (49)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W = \rho^0, \quad w = l^0 \quad \text{на } \gamma_2, \quad (50)$$

$$\int_{\gamma_1} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot W - t_\nu w + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) = 0, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} (\sigma_\nu U_\nu + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot U - t_\nu u + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) + \\ & + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu U_\nu + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) \geq 0 \quad \forall (U, u) \in K_0, \end{aligned} \quad (52)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2$. Множество допустимых перемещений K_0 определяется следующим образом:

$$K_0 = \{(W, w) \in H_{\Gamma_0}(\Omega) \mid -W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \text{ на } \gamma, W = \rho,$$

$$w = l, \frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1, \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma_2; (\rho, l) \in R(\gamma); a_1, a_2 = \text{const}\},$$

где $H_{\Gamma_0}(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$, $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{W \in H^1(\Omega) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$, $H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$.

Первое неравенство из (49) представляет собой условие непроникания для части внешней границы γ и недеформируемого препятствия. Краевые условия (51), (52) соответствуют принципу возможных перемещений.

Перейдем к вариационной постановке задачи (46)-(52). Введем функционал энергии

$$\Pi_6(W, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(w) \nabla \nabla w - \int_{\Omega} FW - \int_{\Omega} fw$$

и рассмотрим задачу минимизации: найти $(W, w) \in K_0$ такую, что

$$\Pi_6(W, w) = \inf_{(\bar{W}, \bar{w}) \in K_0} \Pi_6. \quad (53)$$

В п. 2.2.2 доказывается утверждение следующей теоремы:

Теорема 2.2. *Задача (53) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству*

$$\begin{aligned} (W, w) \in K_0, \quad \int_{\Omega} \sigma(W) \varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega} m(w) (\nabla \nabla \bar{w} - \nabla \nabla w) \geq \\ \geq \int_{\Omega} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega} f(\bar{w} - w) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_0. \end{aligned} \quad (54)$$

В п. 2.2.3 установлено, что краевая задача (46)-(52) эквивалентна вариационной задаче (54) при условии достаточной гладкости решений.

В **параграфе 2.3** исследуется задача о равновесии пластины, которая содержит плоское жесткое включение. Граница включения содержит трещину; при этом само включение выходит на границу под нулевым углом и частично находится в контакте с недеформируемым телом. С пороцью метода фиктивных областей обосновывается разрешимости данной задачи.

В п. 2.3.1 приводится формулировка задачи. Рассмотрим ограниченную область Ω_1 в пространстве R^2 с гладкой границей Γ_1 . Обозначим единичный вектор внешней нормали к границе Γ_1 как $n = (n_1, n_2)$. Введем гладкую кривую γ , которая состоит из двух частей: $\gamma = \gamma_c \cup \gamma_0$, $\gamma_c \subset \Omega_1$, $\gamma_0 \subset \Gamma_1$. Еди-

нический вектор нормали к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Кривая γ соответствует плоскому жесткому включению, имеющему следующие особенности: один конец примыкает к внешней границе Γ_1 под нулевым углом, тогда как противоположный конец допускает продолжение, пересекающее Γ_1 под ненулевым углом. Мы предполагаем, что на положительном берегу части кривой γ_c имеется отслоение, в то время как γ_0 контактирует с недеформируемым телом на границе. Обозначим также $\Gamma_0 = \Gamma_1 \setminus \gamma_0$, $\Omega_1^c = \Omega_1 \setminus \bar{\gamma}_c$ (рис. 3).

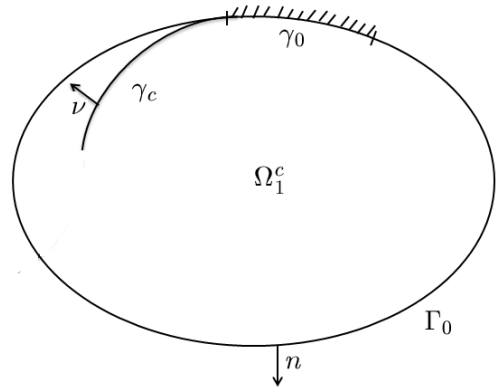


Рис. 3 — Включение выходит на границу под нулевым углом

Далее рассматриваются дифференциальная и вариационная постановки задачи.

В п. 2.3.2 приводится доказательство эквивалентности указанных формулировок.

В п. 2.3.3 методом фиктивных областей обоснована разрешимость поставленной задачи. Суть метода заключается в изучении в более широкой области семейства вспомогательных задач, зависящих от параметра, и далее в установлении того, что исходная задача будет получена путём предельного перехода в этом семействе.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, профессору Хлудневу Александру Михайловичу, за неослабное внимание к работе, ценные рекомендации и терпение. Особая благодарность также адресуется постоянным участникам научного семинара «Краевые задачи в областях с негладкими границами» за конструктивное обсуждение полученных результатов и оказанную поддержку на всех этапах проведения исследования.

Публикации автора по теме диссертации

1. Николаева Н. А. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа-Лява // *Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика*. — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 78–90.

2. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // *Сиб. журн. индустр. математики*. — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 68–80.
3. Николаева Н. А. Пластина Кирхгофа – Лява с плоским жёстким включением // *Челяб. физ.-матем. журн.* — 2023. — Т. 8, № 1. — С. 29–46.
4. Николаева Н. А. Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой // *Дальневосточный математический журнал*. — 2024. — Т. 24, № 1. — С. 73–95.
5. Николаева Н. А. О сопряжении тонких включений Тимошенко в упругих телах при наличии трещины // *Сиб. журн. индустр. математики*. — 2024. — Т. 27, № 4. — С. 73–95.
6. Николаева Н.А. О предельном переходе в задаче о равновесии упругого тела с тонкими включениями Тимошенко // Тезисы XXX Байкальской Всероссийской конференции с международным участием «Информационные и математические технологии в науке и управлении». — 2025. — С. 60.
7. Николаева Н.А. О сопряжении тонких включений Тимошенко при наличии отслоения в упругих телах // Материалы Международной Воронежской весенней математической школы, посвященной памяти С.М. Никольского «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXVI». — 2025. — С. 236.
8. Николаева Н.А. О сопряжении тонких включений Тимошенко в упругих телах // Тезисы докладов XII Международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование». — 2025. — С. 105.
9. Nikolaeva N.A. The Method of Fictitious Domains for an Equilibrium Problem of a Kirchhoff-Love Plate with a Flat Rigid Inclusion // *Proceedings of the 8th International school-seminar “Nonlinear Analysis and Extremal Problems”*. — 2024. — P. 192.
10. Николаева Н.А. О сопряжении тонких включений в упругих телах при наличии трещины // Тезисы докладов Международной научной конфе-

ренции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Часть II. — 2023. — С. 89.

11. *Николаева Н.А.* О сопряжении тонких включений Тимошенко в упругих телах при наличии трещины // Тезисы докладов X Международной научной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого президента академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН Филиппова Василия Васильевича. — 2023. — С. 61.
12. *Николаева Н.А.* О предельном переходе в задаче о сопряжении тонких включений в упругих телах // Сборник аннотаций докладов Международной конференции «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные». — 2021.
13. *Николаева Н.А.* Задача о сопряжении тонких включений в упругих телах при наличии трещины // Тезисы докладов IX Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». — 2020. — С. 246.
14. *Николаева Н.А.* О взаимодействии трещины с тонкими включениями в упругих телах // Тезисы докладов VIII Международной конференции по математическому моделированию. — 2017. — С. 145.

Подписано в печать 24.09.2025. Формат 60х84/16.
Печать цифровая. Печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 85 экз. Заказ № 178.
Издательский дом Северо-Восточного федерального университета
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано в типографии ИД СВФУ