



ПРЕДСТАВЛЯЮ

проректор по научной работе

ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

А.И. Бирюков

2025 г.

10

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу
Любановой Анны Шоломовны

«Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Появление новых математических моделей, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений диффузии и фильтрации.

Коэффициенты уравнений и систем уравнений диффузии и фильтрации характеризуют физические свойства среды, которые трудно определить экспериментально. Свойства и структура среды могут меняться со временем и зависеть от естественных условий, которые практически невозможно воссоздать в лабораторных условиях с необходимой точностью. Поэтому параметры среды следует определять с помощью математических моделей на основе дополнительной информации о поведении среды в естественных условиях, а не на основе лабораторных экспериментов. При моделировании процессов массопереноса в сплошных средах со сложным химическим составом, например, при электролитическом рафинировании цветных металлов, возникают нелокальные задачи для систем уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций (задача о примесях). Представляют интерес подобные задачи и для уравнений соболевского типа, которые, наряду с обширными физическими приложениями, используются для регуляризации различных уравнений и систем. Таким образом, широкие приложения и трудности определения физических параметров сложных сред приводят к необходимости постановки и изучения различных краевых задач для неклассических уравнений и систем уравнений диффузии и фильтрации.

Краевые задачи для уравнений и систем уравнений диффузии и фильтрации представляют большой прикладной интерес. Вместе с тем обратные задачи для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени, в частности, уравнений соболевского типа, остаются слабо изученным направлением исследований в теории диффузии и фильтрации. Наиболее сложными для исследования и практически значимыми являются задачи

А.И. Бирюков

идентификации коэффициентов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Сложность этих задач объясняется их существенной нелинейностью. Причем нелинейность, связанная именно с природой самой обратной задачи, а не со структурой уравнения, создает основные трудности для исследования. Многие практически значимые задачи либо мало изучены, либо не изучались совсем. В частности, обратные задачи отыскания коэффициентов в старших членах (третьего порядка) уравнений соболевского типа ранее не изучались. То же самое можно сказать и о нелокальных краевых задачах для систем уравнений диффузии параболического и псевдопараболического типов. Поэтому тема представленной диссертационной работы А.Ш. Любановой безусловно является актуальной.

Диссертационная работа А.Ш. Любановой посвящена исследованию новых классов краевых задач для уравнений и систем уравнений диффузии и фильтрации. Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- доказана однозначная разрешимость краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием;
- получены достаточные условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в старшем члене линейных уравнений соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе области;
- доказаны существование и единственность решения нового класса обратных задач для нелинейного уравнения фильтрации соболевского типа с неизвестным коэффициентом в члене второго порядка в случае интегрального условия переопределения на границе области;
- установлены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения нелокальной задачи для нагруженной системы уравнений диффузии с условиями в начальный и финальный моменты времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Результаты представляют интерес для специалистов в следующих областях: качественная теория уравнений в частных производных, теория обратных задач, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности решения для обратных задач фильтрации, могут быть использованы при разработке численных алгоритмов решения этих задач.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств всех утверждений.

Практическая значимость работы заключается в том, что математические модели, лежащие в основе изучаемых обратных и нелокальных задач, описывают физические процессы, имеющие важное значение для нефтедобычи и цветной металлургии.

Диссертация А.Ш. Любановой объемом 314 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 324 наименования. Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и научные задачи диссертационной работы, определены

методы исследований, обоснована научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации. Описаны методы исследования, сформулированы результаты, выносимые на защиту, охарактеризована степень достоверности, и представлена информация о публикациях и апробации полученных результатов.

Первая глава посвящена вопросам корректности краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной по времени, и исследованию свойств их решений. В §1.1 доказываются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейной системы операторных дифференциальных уравнений в абстрактном банаховом пространстве. Идеи и метод доказательства этих теорем используются в §1.2 при исследовании корректности краевой задачи для уравнения соболевского типа с нелинейными граничными условиями. В §1.2 представлены основные результаты данной главы. §1.3 посвящен вопросам корректности краевых задач для нелинейных уравнений фильтрации соболевского типа, операторы которых немонотонны в банаховых пространствах. В §1.4 обсуждаются достаточные условия, при которых справедливы теоремы сравнения для уравнений третьего порядка соболевского типа.

Вторая глава диссертации посвящена новому классу обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных уравнениях по дополнительной интегральной информации о потоке решения на границе области. В §2.1 обсуждаются особенности постановки обратных задач для линейных уравнений соболевского типа, формулировка интегральных условий переопределения на границе. В §2.2–2.6 исследуется корректность сформулированных обратных задач идентификации неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, в линейном уравнении соболевского типа и свойства их сильных решений. Основная идея доказательства существования сильного решения, предложенная А.Ш.Любановой, состоит в сведении данной задачи к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением второго рода для неизвестного коэффициента, зависящего от времени. Для построения такого операторного уравнения используется продолжение функций, заданных на границе, внутрь области в виде решений некоторых краевых задач. В §2.2 рассматривается обратная задача отыскания младшего коэффициента, а §2.3 посвящен обратной задаче восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка в линейном уравнении соболевского типа. Асимптотическое поведение решения данной обратной задачи обсуждается в §2.4. Доказывается, что при некоторых условиях на исходные данные решение этой обратной задачи стабилизируется к решению ассоциированной с ней стационарной обратной задачи. §2.5 посвящен обратной задаче восстановления старшего коэффициента в параболическом уравнении по интегральной информации о потоке решения на границе. Здесь устанавливаются достаточные условия корректности параболической обратной задачи путем регуляризации соответствующей обратной задачей для уравнения соболевского типа. В §2.6 главы 2 исследуется корректность обратной задачи восстановления неизвестного старшего коэффициента в члене третьего порядка линейного

уравнения соболевского типа. Устанавливаются достаточные условия разрешимости и единственности решения «в малом» и «в целом» по времени.

В третьей главе обобщаются постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений и результаты, полученные в главе 2, на случай нелинейных уравнений фильтрации. Операторы таких уравнений сохраняют монотонность в специальном смысле на некоторых подмножествах банаховых пространств. Это позволяет применять при исследовании обратных задач для таких уравнений методы доказательства, разработанные в главе 2. Условия корректности обратной задачи для нелинейного уравнения фильтрации, не разрешенного относительно производной по времени, в смысле сильного обобщенного решения устанавливаются в §3.1. В §3.2 доказывается корректность стационарной обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента, ассоциированной с нестационарной обратной задачей, рассмотренной в §3.1.

В четвертой главе методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Объектом исследования в §4.1 являются нелокальные задачи для параболических систем. В §4.2 обсуждаются условия разрешимости и единственности решения аналогичной нелокальной задачи для систем уравнений соболевского типа, не разрешенных относительно производной по времени.

В заключении приводятся основные результаты работы и обсуждаются перспективы дальнейших исследований в этом направлении.

К работе имеются следующие замечания.

1. Форма начальных и краевых условий в исследуемых задачах в значительной степени (вплоть до нескольких слагаемых) зависит от формы самих уравнений. С одной стороны, это, возможно, говорит о «физичности» таких задач, с другой стороны, классы возможных для рассмотрения задач сужаются.
2. Во введении или в §3.1 главы 3 стоило дать более подробный обзор результатов по обратным задачам для нелинейных уравнений и систем, не разрешенных относительно производной по времени. Это дополнительно подчеркнуло бы научную новизну результатов диссертации. Помимо упомянутых в диссертации статей, обратные задачи для уравнений и систем, не разрешенных относительно производной по времени, изучались, например, в работах С.Н. Антонцева и Х. Хомпыша (S.N. Antontsev, Kh. Khompysh. Inverse problems for a Boussinesq system for incompressible viscoelastic fluids // *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 2023, v.46, p.11130–11156) и С.Н. Антонцева, С.Е. Аижанова и Г.Р. Ашуровой (S.N. Antontsev, S.E. Aitzhanov, G.R. Ashurova. An inverse problem for the pseudo-parabolic equation with p-Laplacian // *Evolution Equations and Control Theory*, 2022, v. 11, no. 2, p. 399–414), И. Баглан, Ф. Канка (I. Baglan, F. Kanka, Two-

dimensional inverse quasilinear parabolic problem with periodic boundary condition // *Applicable Analysis*, 2019, v. 98, № 8, p. 1549–1565).

3. На странице 112 диссертации имеется опечатка: в предположении I' английский союз «and» следует заменить на русское «и».
4. В главе 4 рассмотрены краевые задачи с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций, в случае системы двух эволюционных уравнений или двух уравнений соболевского типа. Было бы полезно дать какие-нибудь комментарии в конце главы для таких задач в случае смешанной системы, состоящей из эволюционного уравнения и уравнения соболевского типа.

Заключение

Тема диссертации, рассматриваемые в ней вопросы, полученные результаты, а также методы исследования полностью соответствуют специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Сформулированные в диссертации положения и выводы обоснованы, снабжены строгими доказательствами, а также сопровождаются сравнительным анализом с известными на сегодня в данной области результатами.

Все результаты диссертации являются новыми и оригинальными. При исследовании корректности коэффициентных обратных задач используется оригинальный подход, разработанный автором на основе метода сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента. В работе впервые поставлены и исследованы обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов линейных и нелинейных уравнений фильтрации эллиптического и псевдопараболического типов, а также линейных уравнений параболического типа с интегральными условиями переопределения относительно потока на границе области. Впервые доказано существование и единственность сильных обобщенных решений, получены оценки непрерывной зависимости решений от входных данных, найдены достаточные условия стабилизации решения обратной задачи для уравнения соболевского типа. Впервые исследована обратная задача восстановления неизвестного коэффициента в старшем члене уравнения фильтрации соболевского типа. Впервые доказаны теоремы существования и единственности решения нелокальных задач для систем двух уравнений диффузии с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Основные результаты диссертации опубликованы в 41 работе: 17 статей (4 в соавторстве) – в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации; 10 статей опубликованы в журналах первого и второго квартилей Web of Science и Scopus; 16 статей – в научных изданиях «Белого списка». Положения и выводы диссертации прошли хорошую апробацию на международных и всероссийских конференциях. Автореферат ясно и полно отражает содержание диссертации, суть проведенных

исследований и полученных результатов, а также их место в современной теории дифференциальных уравнений.

Диссертация написана единолично, обладает внутренним единством и содержит новые научные результаты, свидетельствующие о личном вкладе автора в теорию обратных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений.

Диссертация удовлетворяет пункту 9 Положения о присуждении ученых степеней от 24 сентября 2013 года № 842, а именно, является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Результаты, полученные в работе, имеют существенное значение для развития теории дифференциальных уравнений.

Таким образом, диссертационная работа А.Ш. Любановой на тему «Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации» удовлетворяет требованиям пунктов 9–11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (01.01.02 – Дифференциальные уравнения), профессором, заведующим кафедрой математического анализа Федоровым В.Е., обсужден на заседании кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения «Челябинский государственный университет», протокол № 2 от 16.09.2025.

Заведующий кафедрой
математического анализа
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Е. Федоров

Рабочий почтовый адрес: 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
Рабочий телефон: +7 (351) 799-72-35
Адрес электронной почты: kar@csu.ru

Сведения о ведущей организации:

Полное наименование: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет»

Сокращённое наименование: ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Адрес: 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Телефон: +7 (351) 799-71-01

Адрес в сети Интернет: <https://www.csu.ru/>

Адрес электронной почты: odou@csu.ru



Подпись: *Редорова В.Е.*
Подтверждаю: *Андреева К.В.*
Вручаю: *Вручающий специалист*