

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе

Любановой Анны Шоломовны

«Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Актуальность темы диссертации. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию новых классов краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений и систем уравнений в частных производных, возникающих в диффузии, фильтрации и в других областях физики и механики. Появление новых математических моделей в диффузии и фильтрации, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов. Коэффициенты уравнений или систем диффузии и фильтрации характеризуют физические свойства среды, которые трудно определить экспериментально. Так свойства и структура трещиноватой среды могут меняться со временем, причем они зависят от естественных условий залегания пласта, которые практически невозможно воссоздать в лабораторных условиях с необходимой точностью. Поэтому все чаще у специалистов и исследователей возникает необходимость отыскивать неизвестные параметры среды, входящие в рассматриваемую задачу, с помощью методологии математического моделирования, а именно: путем решения коэффициентных обратных задач с использованием дополнительной информации о состоянии среды, полученной в естественных условиях, а не на основе лабораторных экспериментов.

При моделировании процессов массопереноса в сплошных средах со сложным химическим составом, например, электролитического рафинирования цветных металлов возникают нелокальные задачи для систем уравнений диффузии, в которых условия по времени задаются только для одной из неизвестных функций, как, например, в задачах о примесях. Представляют интерес подобные задачи и для уравнений соболевского типа, которые, сами по себе моделируют различные физические процессы и, кроме того, используются для регуляризации других уравнений и систем.

Таким образом, необходимость решения важных прикладных задач и трудности, связанные с определением физических параметров сложных сред, приводят к необходимости постановок и изучения обратных и нелокальных задач для уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов, возникающих в диффузии, фильтрации и ряде других областей физики.

Краевые задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации представляют большой прикладной интерес. Но нужно отметить, что обратные

задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, и в частности, для уравнений соболевского типа остаются слабо изученным направлением исследований в математической теории диффузии и фильтрации. На сегодняшний день большинство результатов в этом направлении связано с задачами восстановления правых частей рассматриваемых уравнений. В то же время, наиболее сложными для исследования и практически значимыми являются задачи идентификации коэффициентов уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Сложность этих задач объясняется их существенной (можно сказать, двойной) нелинейностью. Причем основные трудности для исследования создает нелинейность, связанная именно с природой самой обратной задачи, а не нелинейность, отвечающая структуре изучаемого уравнения. Многие практически значимые обратные коэффициентные задачи либо мало изучены, либо не изучались совсем. В частности, обратные задачи отыскания коэффициентов в старших членах (третьего порядка) уравнений соболевского типа ранее не изучались. То же самое можно сказать и о нелокальных краевых задачах для систем уравнений диффузии параболического и соболевского типов. С учетом вышесказанного, тема представленной диссертационной работы А.Ш. Любановой, направленной на развитие качественной теории обратных и нелокальных задач для рассматриваемых в диссертации уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов, безусловно, является актуальной.

Научная новизна, обоснованность и достоверность научных положений диссертации, практическая значимость исследований. Диссертационная работа А.Ш. Любановой носит теоретический характер, ее основные научные результаты заключаются в следующем:

- исследована корректность задач Коши для нелинейных операторных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной по времени с монотонными операторами в старшем члене, а также для нелинейных эволюционных систем в абстрактных банаховых пространствах;
- доказана однозначная разрешимость краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием;
- получены достаточные условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в старших членах линейных уравнений соболевского типа с интегральным условием переопределения, рассматриваемым на границе области;
- доказано существование и единственность решений нового класса обратных задач для нелинейных уравнений фильтрации соболевского типа с неизвестным коэффициентом в членах второго порядка при использовании интегрального условия переопределения на границе области;
- установлены достаточные условия существования и единственности обобщенных решений нелокальных задач для системы нагруженных уравнений параболического и соболевского типа с условиями в начальный и финаль-

ный моменты времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Все результаты диссертации являются новыми и оригинальными. При исследовании корректности коэффициентных обратных задач используется оригинальный подход, разработанный автором на основе метода сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента. В работе впервые поставлены и исследованы обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов линейных и нелинейных уравнений эллиптического и соболевского типа, возникающих, в частности, в фильтрации, а также линейных уравнений параболического типа с интегральными условиями переопределения относительно потока на границе области. Впервые доказано существование и единственность сильных обобщенных решений, получены оценки непрерывной зависимости решений от входных данных, найдены достаточные условия стабилизации решения обратной задачи для уравнения соболевского типа. Впервые исследована обратная задача восстановления неизвестного коэффициента в старшем члене уравнения фильтрации соболевского типа. Впервые доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальных задач для систем двух уравнений диффузии с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Результаты представляют интерес для специалистов в следующих областях: качественная теория уравнений в частных производных, теория обратных задач, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности для рассматриваемых обратных задач, возникающих, в частности, в фильтрации, могут быть использованы при разработке численных алгоритмов решения этих задач.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств всех утверждений.

Практическая значимость работы заключается в том, что математические модели, лежащие в основе изучаемых обратных и нелокальных задач, описывают физические процессы, имеющие важное значение для нефтедобычи, цветной металлургии и ряда других прикладных областей.

Краткая характеристика содержания диссертации. Диссертация А.Ш. Любановой объемом 314 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 324 наименования. Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и научные задачи диссертационной работы, определены методы исследований, обоснована научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации. Описаны методы исследования, сформулированы результаты, выносимые на защиту, охарактеризована степень достоверности и представлена информация о публикациях и апробации полученных результатов.

Первая глава посвящена вопросам корректности краевых задач для

уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени, и исследованию свойств их решений. В §1.1 доказываются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейной системы операторных дифференциальных уравнений в абстрактном банаховом пространстве. Идеи и метод доказательства этих теорем используются в §1.2 при исследовании корректности краевой задачи для уравнения соболевского типа с нелинейными граничными условиями. В §1.2 представлены основные результаты данной главы. §1.3 посвящен вопросам корректности краевых задач для нелинейных уравнений фильтрации соболевского типа, операторы которых немонотонны в банаховых пространствах. В §1.4 обсуждаются достаточные условия, при которых справедливы теоремы сравнения для уравнений третьего порядка соболевского типа.

Вторая глава диссертации посвящена новому классу обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных уравнениях по дополнительной интегральной информации о потоке решения на границе области. В §2.1 обсуждаются особенности постановки обратных задач для линейных уравнений соболевского типа, формулировка интегральных условий переопределения на границе рассматриваемой области. В §2.2 – 2.6 исследуется корректность сформулированных обратных задач идентификации неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, в линейном уравнении соболевского типа и свойства их сильных решений. Основная идея доказательства сильного решения, предложенная А.Ш.Любановой, состоит в сведении данной задачи к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением второго рода для неизвестного коэффициента, зависящего от времени. Для построения такого операторного уравнения она разработала метод, основанный на использовании специальных продолжений функций, заданных на границе, внутрь области в виде решений некоторых краевых задач. В §2.2 рассматривается обратная задача отыскания младшего коэффициента, тогда как §2.3 посвящен обратной задаче восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка в линейном уравнении соболевского типа. Асимптотическое поведение решения данной обратной задачи обсуждается в §2.4. Доказывается, что при некоторых условиях на исходные данные решение указанной обратной задачи стабилизируется к решению ассоциированной с ней стационарной обратной задачи. §2.5 главы 2 посвящен исследованию обратной задачи восстановления старшего коэффициента в параболическом уравнении по интегральной информации о потоке решения на границе. Здесь устанавливаются достаточные условия корректности параболической обратной задачи посредством ее регуляризации с помощью соответствующей обратной задачи для уравнения соболевского типа. В §2.6 главы 2 исследуется корректность обратной задачи восстановления неизвестного старшего коэффициента в члене третьего порядка линейного уравнения соболевского типа. Устанавливаются достаточные условия разрешимости и единственности ре-

шения «в малом» и «в целом» по времени.

В третьей главе обобщаются постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений и результаты, полученные в главе 2, на случай нелинейных уравнений фильтрации. Операторы таких уравнений немонотонны в банаховых пространствах. Однако эти операторы сохраняют монотонность в специальном смысле на некоторых подмножествах банаховых пространств. Это позволяет применять при исследовании обратных задач для таких уравнений методы доказательства, разработанные в главе 2. Условия корректности обратной задачи для нелинейного уравнения фильтрации, неразрешенного относительно производной по времени, в смысле сильного обобщенного решения устанавливаются в §3.1. Целью §3.2 является исследование корректности стационарной обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента, ассоциированной с нестационарной обратной задачей, рассмотренной в §3.1.

В четвертой главе методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений, возникающих, в частности, в диффузии, в которых начальные условия задаются только для одной из неизвестных функций. Объектом исследования в §4.1 являются нелокальные задачи для параболических систем. В §4.2 обсуждаются условия разрешимости и единственности решения аналогичной нелокальной задачи для системы уравнений соболевского типа, неразрешенных относительно производных по времени.

В заключении приводятся основные результаты работы и обсуждаются перспективы дальнейших исследований в этом направлении. Список литературы содержит наименования источников, цитируемых в диссертации.

Замечания по работе К работе имеются следующие замечания.

1. Стр. 1. Название диссертации слишком короткое, а поэтому не информативное. Оно не отражает того важного факта, что диссертация посвящена исследованию новых обратных и нелокальных задач для уравнений параболического, соболевского и эллиптического типов, которые возникают, в частности, в диффузии и фильтрации.

2. Цель диссертационной работы сформулирована не очень четко и как-то расплывчато. На мой взгляд, целью диссертационной работы А.Ш. Любановой является формулировка и теоретический анализ новых начально-краевых и краевых задач для уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов и разработка эффективного математического аппарата их исследования.

3. Стр. 7, 16. Не могу согласиться с мнением диссертантки о том, что “задачи управления по сути своей также являются обратными задачами” тем более, что в оправдание этого тезиса автор приводит некорректную фразу: “Причем управление или управляющие параметры в таких задачах, как правило, находятся в правой части или на границе области”. Мое видение в этом

вопросе таково, что в случае, когда исследование обратной задачи сводится к исследованию соответствующей задачи управления, то точное решение последней задачи, если оно существует, является, как правило приближенным решением исходной обратной задачи. Именно на этом основывается оптимизационный метод исследования обратных задач.

4. Стр. 16. Осталась непонятной фраза “о стремлении при $\nu_\varepsilon(t) \rightarrow \nu(t)$ решения $y(\varepsilon)$ неоднородного уравнения (3) с условием управления (10) при $\rho = \varepsilon$ к решению предельной задачи при $\varepsilon = 0$ ”. Непонятность вызвана тем, что уравнение (3) не содержит функции $\nu_\varepsilon(t)$. Кроме того, не ясно почему интегральное условие переопределения (10) автор называет условием управления.

5. Стр. 26. На два условия, следующие за первым уравнением без номера, диссертантка ссылается как на краевые условия, хотя они имеют смысл начального и граничного условий. Такая же ситуация наблюдается на стр. 27, 29, 52, 80 и ряде других. Думаю, что это не совсем корректно.

6. Стр. 29. Непонятно о какой теореме 2.4.4 идет речь. Я не смог ее найти, но нашел Следствие 2.4.4 на стр. 154.

7. Стр. 31. Последняя фраза на стр. 31, начатая многообещающим словом “Операторы”, почему-то так и не завершена.

8. Стр. 108. Непонятно, откуда следует, что интегральное условие переопределения (2.2.7) описывает поток жидкости через границу $\partial\Omega$. По идее здесь должна быть ссылка на источник, где доказан этот факт.

9. Стр. 110. Не понятна фраза “Следуя идее доказательства теоремы 2.1.2, сведем задачу 2.1 к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением для $g(t)$ ”. Непонятно о какой обратной задаче идет речь. Ведь задача нахождения решения g нелинейного операторного уравнения является прямой задачей. Кроме того, эта фраза несколько противоречит фразе на стр. 28 о том, что “основная идея доказательства существования решения задачи (14)–(16), а также обратных задач, рассматриваемых в §2.3, 2.4 и 2.6, близка к методам, предложенным в [282] и состоит в сведении обратной задачи к эквивалентной задаче с нелинейным операторным уравнением $g = Ag$ второго рода для коэффициента g ” без упоминания об обратной задаче. Причем указанная выше фраза повторяется много раз и, в частности, на стр. 126, 180 и других. В то же время в некоторых других местах эта фраза записывается без упоминания об обратной задаче. Хотелось бы чтобы автор прояснила эту ситуацию.

10. Стр. 126. Не понятно, что обозначает индекс R в выражении $(\mathbf{m}(x), \nabla)_R$ в (2.3.41).

11. Стр. 136. Почему-то часть фразы после (2.3.66), начатая на русском языке, закончена, по-видимому, для пущей убедительности, на английском языке.

12. Стр. 232. Уравнение (3.2.54) мне показалось странным. Оно содер-

жит множитель $k/t\mu$, который можно сократить, если $k \neq 0$. Но тогда пропадают три величины k , t и μ_1 . Аналогичный вопрос в отношении уравнения (3.2.55).

Общее заключение. Тема диссертации, рассматриваемые в ней вопросы, полученные результаты, а также методы исследования полностью соответствуют специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Сформулированные в диссертации положения и выводы обоснованы, снабжены строгими доказательствами, а также сопровождаются сравнительным анализом с известными на сегодня в данной области результатами.

Основные результаты диссертации опубликованы в 41 работе, 17 статей (4 в соавторстве) - в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. 10 статей опубликованы в журналах первого и второго квартиля Web of Science и Scopus, 16 статей – в научных изданиях «Белого списка». Положения и выводы диссертации прошли хорошую апробацию на международных и всероссийских конференциях. Автореферат ясно и полно отражает содержание диссертации, суть проведенных исследований и полученных результатов, а также их место в современной теории дифференциальных уравнений

Диссертация написана единолично, обладает внутренним единством и содержит новые научные результаты, свидетельствующие о личном вкладе автора в теорию обратных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений. Дополнительно хочу отметить следующее:

Полученные в диссертации результаты представляют интерес не только для специалистов в области дифференциальных уравнений, но и специалистов в области математического моделирования процессов диффузии и фильтрации. Последнее следует из того, что прежде чем развивать численный алгоритм решения новой краевой задачи, нужно установить условия, при которых ее решение существует, единственно и ведет себя устойчиво по отношению к возмущениям исходных данных, а также выяснить дополнительные свойства отыскиваемого решения, например, принцип максимума. Также важно знать: растет ли гладкость решения с ростом гладкости исходных данных? Все это можно найти в рецензируемой диссертации. Именно использование указанной информации поможет в итоге разработать эффективный численный алгоритм для рассматриваемой краевой задачи.

Хотя диссертация посвящена разработке математического аппарата и применению его для решения новых краевых задач для уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов, диссертантка большое внимание уделяет прикладным аспектам построенной ею теории разрешимости, тем более, что рассматриваемые ею обратные и нелокальные задачи происходят из прикладных задач, возникающих в диффузии, фильтрации и

других областях. Для этого она приводит больше десятка примеров уравнений из теории диффузии, фильтрации, теории полупроводников и других прикладных наук, для которых с помощью ее теории можно доказать теоремы существования и единственности новых краевых и начально-краевых задач. В частности, мне показался интересным пример 9 (по моему списку), в котором утверждается о справедливости теоремы существования решения краевой задачи, возникшей в теории полупроводников.

Изложение диссертации и особенно доказательства всех теорем (их порядка 20) отличаются определенным изяществом и технологичностью. По сути, в диссертации получила дальнейшее развитие технология исследования корректности рассматриваемых новых начально-краевых и краевых задач, рассматриваемых для уравнений соболевского, параболического и эллиптического типов. В случае обратных задач эта технология включает четкую постановку обратной задачи для рассматриваемого уравнения типа $Au = f$, сведение ее к эквивалентной задаче нахождения решения операторного уравнения 2-го рода $A_u(p) = p$ относительно искомого коэффициента p , где u – решение прямой задачи, (этот подход впервые был предложен в работах А.И. Прилепко, но диссертантка использует разработанный ею оригинальный подход для вывода операторного уравнения), установление условий на входные данные, обеспечивающих сжимаемость оператора A_u , доказательство существования и единственности решения операторного уравнения в малом, последующее доказательство в целом и исследование устойчивости решений обратных задач по отношению к малым возмущениям тех или иных входных данных. В некоторых случаях добавляются дополнительные этапы, например, итерационная схема (типа метода Галеркина) доказательства существования решения или исследование гладкости решения с повышением гладкости входных данных.

Диссертация очень хорошо оформлена несмотря на огромный объем (314 страниц текста и 324 источника литературы) и почти не содержит опечаток. Это свидетельствует об очень высоком уровне её математической и общей культуры. Приведенные выше замечания демонстрируют особый научный интерес оппонента к представленной диссертации и не влияют на высокую и положительную оценку научных результатов диссертационной работы.

Диссертация удовлетворяет пункту 9 Положения о присуждении ученых степеней от 24 сентября 2013 года № 842, а именно: она является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Результаты, полученные в работе, имеют существенное значение для развития теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Они могут составить содержание качественной монографии по тематике диссертации, полезной как для состоявшихся специалистов, так и молодых ученых. Автореферат правильно

отражает содержание диссертации.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа А.Ш. Любановой на тему «Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации» удовлетворяет требованиям пунктов 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент *Алексеев*

Алексеев Геннадий Валентинович
20.10.2025

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Федерального
государственного бюджетного учреждения науки
«Институт прикладной математики»
Дальневосточного отделения Российской академии наук
специальность 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения»
Тел.: +7 (914)-727-64-22
E-mail: alekseev@iam.dvo.ru
Почтовый адрес: 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7

Подпись Алексева Г. В.
завершено

на основании отчета курров
Н.Н. Курков

