Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Любанова Анна Шоломовна

ОБРАТНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФУЗИИ И ФИЛЬТРАЦИИ

1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д-р физ.-мат. наук, профессор
Андреев Виктор Константинович

Красноярск 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации. Появление новых математических моделей, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений диффузии и фильтрации. К таким уравнениям относятся параболические и связанные с ними стационарные уравнения и системы, а также уравнения, неразрешенные относительно старшей производной по времени, высшего порядка (третьего и выше) с производной по времени первого порядка, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}A(u) + B(u) = f \tag{1}$$

или

$$A\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) + B(u) = f, \tag{2}$$

где A и B – дифференциальные или интегро-дифференциальные, вообще говоря, нелинейные операторы по пространственным переменным четного порядка. Уравнения (1) и (2) с линейными операторами A и B одного и того же порядка относятся к классу так называемых простых уравнений соболевского типа.

Такие уравнения возникают при математическом описании многих физических процессов. Например, широкое приложение в моделировании имеет линейное уравнение [15]

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \eta\Delta u) - k\Delta u = f, \tag{3}$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации слабосжимаемой жидкости в трещиноватой среде, где Δ – оператор Лапласа. Более сложные модели фильтрации в трещиноватых средах вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - div(\bar{\psi}_1(t, x, u, \nabla u))) - div(\bar{\psi}_2(t, x, u, \nabla u)) = f, \tag{4}$$

учитывают нелинейную зависимость проницаемости и гидравлических свойств среды от давления (или концентрации) жидкости в трещинах и порах, в частности, эффект динамического капиллярного давления (см. [42, 101, 151, 158, 169, 170, 189, 190, 194, 203, 274, 290]). Здесь $\bar{\psi}_i(t, x, u, p)$ – заданные вектор-функции, $i = 1, 2$.

В работах [72,74,75,123] выведены новые нелинейные и нелокальные уравнения вида (1) и (2), моделирующие квазистационарные процессы в полупроводниках. Различные уравнения и системы такого типа моделируют также процессы теплопереноса в гетерогенных средах [183, 184, 312] и движение неньютоновских жидкостей [45, 103, 105, 106, 117, 153, 310, 313].

Актуальность темы исследования. Коэффициенты уравнений и систем диффузии и фильтрации характеризуют физические свойства среды, которые трудно определить экспериментально. Так свойства и структура трещиноватой среды (например, гидравлические свойства и проницаемость) могут меняться со временем и зависят от естественных условий залегания пласта, которые практически невозможно воссоздать в лабораторных условиях с необходимой точностью [15]. Поэтому параметры среды следует определять с помощью математических моделей на основе дополнительной информации о поведении среды в естественных условиях, а не на основе лабораторных экспериментов.

При моделировании процессов массопереноса в сплошных средах со сложным химическим составом, например, при электролитическом рафинировании цветных металлов возникают нелокальные задачи для систем уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Это связано с тем, что концентрация основного металла, как правило, известна и на начальной, и на конечной стадии процесса, тогда как концентрация примесей, в частности, состав шлама благородных металлов, не поддается определению с приемлемой точностью [35]. Такие задачи можно рассматривать как обратные задачи отыскания неизвестной концентрации примесей в начальный момент по дополнительной информации о содержании основного металла на конечной стадии процесса. Представляют интерес подобные задачи и для уравнений соболевского типа, которые наряду с обширными физическими приложениями используются для регуляризации различных уравнений и систем [21, 25, 104, 110, 157, 165, 278, 311].

Таким образом, широкие приложения и трудности определения физических параметров сложных сред приводят к необходимости постановки и изучения различных краевых задач для неклассических уравнений и систем диффузии и фильтрации.

Степень разработанности темы исследования. Наиболее интенсивные теоретические исследования задач диффузии и фильтрации связаны с прямыми и обратными задачами для уравнений и систем второго порядка. Большой вклад в развитие качественной теории краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации внесли труды П.Я. Полубариновой-Кочиной [111], П.Я. Полубариновой-Кочиной и С.В. Фалькович [112], А.Н. Коновалова [68], С.Н. Антонцева, А.В. Кажихова и В.Н. Монахова [10], Г.И. Баренблатта, В.М. Ентова и В.М. Рыжика [16]. Следует отметить работы С.Н. Антонцева и В.Н. Монахова [9], Г.В. Алексеева и Н.В. Хуснутдиновой [3, 4], А.А. Папина и М.А. Токаревой [108, 134], В.В. Шелухина [142, 143], В.В. Шелухина и Ю. Амира [144].

В последние десятилетия решение некоторых прикладных задач способствовало развитию новых направлений в теории диффузии и фильтрации. Так появление моделей фильтрации баротропного газа в неоднородных пористых средах вызвало интерес к изучению свойств решений параболических уравнений с нелинейностями переменного степенного роста [152, 319]. Задачи, связанные с прогрнозом и регулированием уровня грунтовых вод, привели к краевым задачам для нагруженных параболических уравнений и систем [60, 64, 102]. (В литературе принято использовать термин "нагруженное уравнение"для уравнений с частными производными, содержащих следы или значения некоторых функционалов от решения [101].) Корректность краевых задач для различных нагруженных параболических уравнений изучалась в работах [39, 123, 139, 307, 308, 317]. Краевые задачи для нагруженных уравнений возникают также при решении обратных задач отыскания неизвестных коэффициентов в уравнениях диффузии и фильтрации.

Теория обратных задач для уравнений математической физики развивается представителями ряда отечественных и зарубежных математических школ, главным образом, Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым). Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимаются задачи определения коэффициентов и правых частей дифференциальных уравнений по некоторым функционалам от их решений [82, 83]. К обратным можно отнести задачи управления, а также задачи определения неизвестных ядер в интегро-дифференциальных уравнениях, граничных данных или начальных условий. При этом искомые параметры могут быть функциями времени и пространственных переменных.

Характерной особенностью обратных задач является их некорректность по Адамару. При их исследовании используются общие понятия и подходы, развитые в работах А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, А.Н.Прилепко и их учеников [26, 51, 81–84, 113–116, 122, 132, 133, 167, 221, 227, 282]. Подход, предложенный А.Н.Тихоновым, основан на методе регуляризации [132], согласно которому для исходной некорректной задачи строится регуляризирующее семейство операторов и ее приближенное решение ищется как элемент, доставляющий минимум некоторому стабилизирующему функционалу (функционалу Тихонова). Из всех некорректных задач М.М.Лаврентьев предложил выделить класс условно-корректных, к которым относятся в том числе и обратные задачи для дифференциальных уравнений. Согласно определению М.М.Лаврентьева [84] задача $Aq = f$ называется условно-корректной на множестве M, если а) решение задачи существует и принадлежит множеству M; б) решение единственно на множестве M; в) оно непрерывно зависит от f на множестве M. Условия таких задач во многих случаях позволяют выразить неизвестные параметры через основную искомую функцию (например, с помощью преобразований Фурье и Лапласа) и исключить их из уравнений. Таким образом, обратную задачу можно свести к вспомогательной прямой задаче для нелинейных, как правило, нагруженных уравнений, либо к системе интегральных уравнений [82, 159].

В работах А.И.Прилепко и его учеников предложен иной подход, при котором обратная задача сводится к некоторому эквивалентному операторному уравнению для неизвестного параметра [113–116, 174, 282]. Эквивалентность понимается в том смысле, что обратная задача разрешима тогда и только тогда, когда имеет решение операторное уравнение для неизвестного параметра. Причем решение операторного уравнения является искомым параметром обратной задачи. Преимущество такого подхода для коэффициентных обратных задач состоит в следующем. При сведении обратной задачи к вспомогательной прямой задаче необходимо выразить неизвестный коэффициент p через решение уравнения u в виде $p = R(u)$, где R – некоторый, например, интегральный оператор, независящий явно от p, что не всегда возможно. Кроме того, ввиду громоздкости выражения $R(u)$ исследование вспомогательной прямой задачи может оказаться затруднительным. Подход, предложенный А.И.Прилепко, позволяет свести обратную задачу к эквивалентному операторному уравнению для искомого коэффициента p вида $p = A_u(p)$, правая часть которого может зависеть явно как от u, так и от p, что дает более широкие возможности при построении операторного уравнения.

Большинство работ по обратным задачам для эволюционных и стационарных уравнений диффузии и фильтрации посвящены вопросам корректности различных задач отыскания коэффициентов и правых частей, зависящих от времени и пространственных переменных, в уравнениях второго порядка [14, 51, 52, 54, 61, 65, 113–115, 119, 121, 130, 150, 168, 174, 180, 193, 196, 201, 204, 205, 208, 222, 228, 234, 280, 282, 315, 324]. Одной из наиболее сложных и практически важных среди них является задача восстановления коэффициента проницаемости (или диффузии) k в уравнении

$$u_t = div(k(t, x)\nabla u) \tag{5}$$

и в соответствующем стационарном уравнении. Исследование обратных задач идентификации старшего коэффициента k, зависящего от t, восходит к работам Д.Р.Кэннона [173] и Б.Ф.Джонса-мл. [214, 215], посвященным обоснованию корректности в смысле классического решения обратной задачи определения коэффициента $k(t)$ на множестве $0 < x < \infty$, $0 < t < T < \infty$ при начальных данных, граничном условии Дирихле и условии переопределения Неймана на конце $x = 0$. В [174] найдены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения постоянного коэффициента k с условием переопределения $ku_x(0, t_0) = \mu_1$. Многомерным обратным задачам для параболических уравнений типа (5) с неизвестным $k(t)$ посвящены работы [168, 177, 180].

Условия корректности и метод построения решения обратной задачи определения коэффциента k в (5), зависящего от одной пространственной переменной x или от обеих переменных t и x, по известному потоку на одном конце интервала по x обсуждались в работах [38, 51, 130, 178]. В случае многих пространственных переменных корректность обратных задач исследовалась как в случае неограниченной области по x, например, корректность «в малом» по t задачи Коши для (5) [17], так и в ограниченных областях с различными условиями переопределения [51, 52, 61, 121, 168, 196, 201, 204, 205, 208, 222, 228, 234].

В ряде работ теория обратных задач для классических уравнений диффузии обобщается на случай вырожденных параболических уравнений [55,207,212] и задач со свободной границей [206, 210]. Отдельное направление теории обратных задач связано с задачами восстановления коэффициентов нелинейного уравнения, зависящих от неизвестной функции или ее градиента [31,34,175,181, 182, 208, 220].

Модели процессов диффузии и фильтрации, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах, приводят к уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной по времени [15, 16, 43, 158, 169, 189, 190, 199, 203]. Теоретические исследования краевых задач для таких уравнений восходят к работе А. Пуанкаре [281]. Особенно большой интерес к таким уравнениям возник в связи с работой С. Л. Соболева [129] 1954 года, которая дала толчок развитию качественной теории данного класса уравнений высших порядков. Изучение этих уравнений продолжили В. П. Маслов [99], М. И. Вишик [29], Т. И. Зеленяк [47, 48], С. А. Гальперн [33] и другие.

В 1969 году Т. Тингом [311] для линейного уравнения (3) впервые был введен термин «псевдопараболическое уравнение» в связи с тем, что при $\eta \to 0$ решение этого уравнения стремится к решению соответствующего параболического уравнения в смысле нормы пространства L^2. Впоследствии этот термин распространился на все линейные и нелинейные уравнения вида (1) и (2) [32, 57, 58, 179, 187, 192, 268, 286, 287, 302, 305, 311]. В 1997 году в монографии [37] Г.В.Демиденко и С.В.Успенский предложили классификацию линейных уравнений с постоянными коэффициентами, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Согласно данной классификации линейные уравнения вида (1) и (2), не являются псевдопараболическими. Они относятся к классу простых уравнений соболевского типа. В настоящее время в литературе встречаются оба названия уравнений (1) и (2). В данной диссертационной работе для них используется термин «уравнение соболевского типа».

Исследования уравнений вида (1) и (2) ведутся в нескольких направлениях. В пятидесятые и шестидесятые годы прошлого века внимание исследователей было обращено главным образом к линейным уравнениям (1) с эллиптическими операторами A и B. Изучалась корректность различных задач, асимптотическое поведение и гладкость обобщенных решений [33,79,185,304]. В семидесятые и восьмидесятые годы работы по линейным уравнениям были посвящены обобщению и развитию полученных ранее результатов для уравнений типа (1) с коэрцитивными операторами A и B произвольного четного порядка [12,13,268]. Р. Е. Шоуолтером доказаны теоремы существования и единственности сильных и слабых решений смешанной задачи для (1) [293, 295, 298, 299], исследовано асимптотическое поведение при $f \equiv 0$ и гладкость обобщенных решений [294]. В работах Д. Колтона [186–188] построена аналитическая теория уравнений соболевского типа.

С семидесятых годов началось активное изучение нелинейных уравнений соболевского типа. Интерес к различным краевым задачам для нелинейных уравнений вызван появлением новых нелинейных модельных уравнений диффузии и фильтрации [169] и развитием аппарата нелинейного функционального анализа для решения таких задач, в частности, теории монотонных операторов [32, 88].

Широкий круг работ посвящен вопросам глобальной и локальной во времени разрешимости и разрушения решений краевых задач для нелинейных уравнений (1) с линейным оператором A, которые представляют собой различные обобщения уравнения Бенжамена-Бона-Махони [162] и моделей диффузии [53, 59, 69, 76, 78, 110, 146, 202, 226, 269, 278, 279, 301, 303, 314].

Одной из первых монографий по уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной по времени, с нелинейными операторами A и B является книга Х. Гаевского, К. Грёгера и К. Захариаса [32]. В этой работе изучены вопросы $C-$ и L^2-разрешимости задач Коши для нелинейных операторных дифференциальных уравнений (1) и (2) в предположении коэрцитивности и сильной монотонности нелинейного оператора A.

Как показывают приложения, большинство нелинейных операторов не обладает указанными свойствами (например, уравнение (4)). Корректность постановки задач для одного класса таких уравнений была установлена Ю.Я. Беловым и Н.Н.Яненко [18–22]. Вопросы глобальной и локальной разрешимости, единственности и разрушения решений начально-краевых задач для уравнений, неразрешенных относительно производной по времени, с различными монотонными нелинейными операторами в старшем члене рассматривались также в работах [73, 77, 123, 157].

В 1985 году М.Бохм и Р.Е.Шоуолтер [169] предложили новое модельное уравнение фильтрации в трещиноватой среде вида

$$(u + \eta A(\psi_1(u)))_t + B(\psi_2(u)) = f(t, x, u), \tag{6}$$

в котором учитываются нелинейные зависимости проницаемости и гидравлических свойств среды от давления жидкости в трещинах, где A и B – линейные эллиптические операторы. Это уравнение исследовалось в работах [56, 169, 170], где установлены достаточные условия разрешимости краевой задачи для него. При некоторых дополнительных условиях на $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ в [170] доказана единственность решения и теорема сравнения. В [164–166] найдены достаточные условия существования неотрицательных решений начально-краевой задачи для уравнения (6) с ограниченными [165], полиномиальными [166] и логарифмическими [164] нелинейностями.

Все приведенные выше результаты по разрешимости и единственности решения начально-краевых задач для уравнения (6) получены при условии положительности и отграниченности от нуля производной $\psi_1'(s)$. Что касается нелинейностей, не удовлетворяющих этому условию, существование решения уравнения (6) с некоторыми нелинейностями степенного порядка установлено в [195, 274]. Вопрос о единственности решения остается открытым.

Другое направление в качественной теории уравнений диффузии и фильтрации, неразрешенных относительно производной по времени, связано с исследованием вырожденных уравнений с необратимым оператором A. В работах [191,296,297,300], а также в монографии Р.В.Кэролла и Р.Е.Шоуолтера [179] найдены условия разрешимости задач Коши для слабо вырожденных уравнений (1) и (2) с оператором $A = A_1 + I$, где I – тождественный оператор, оператор A_1 допускает вырождение, хотя оператор A остается обратимым в некотором банаховом пространстве. Н.А.Сидоровым [127] изучен класс вырожденных операторных дифференциальных уравнений (1) в банаховых пространствах с неограниченными операторами, обладающих свойством конвергентности. Эти уравнения имеют устойчивые решения, стремящиеся в смысле нормы некоторого банахова пространства к предельным режимам при $t \to +\infty$.

В работах Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова [124–126,136,309] получил глубокое развитие полугрупповой подход к общей теории сингулярных уравнений

(1). Исследованию уравнений (1) с необратимым оператором при старшей производной по времени посвящена также монография И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова, С.В. Попова [46]. В данной монографии авторы предложили оригинальный метод доказательства существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) с абстрактными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве. Данный метод основан на изучении свойств спектральной задачи (пучка) $Bu = \lambda Au$, связанной с операторным дифференциальным уравнением (1).

Широкий спектр результатов для уравнений и систем соболевского типа представлен в работах Г.В.Демиденко и С.В.Успенского [36, 37]. В данных работах устанавливаются условия разрешимости в весовых пространствах задачи Коши и смешанных задач для дифференциальных уравнений и систем соболевского типа, доказываются теоремы единственности, изучаются асимптотические свойства решений.

Наименее изученным направлением исследований в теории диффузии и фильтрации являются обратные задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, в частности, уравнений соболевского типа. На сегодняшний день большинство результатов в этом направлении связаны с задачами восстановления правой части уравнений. Первый результат, полученный В. Ранделлом и Д. Л. Колтоном [289], относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника f в уравнении (1) с $A = I + L$, $B = L$, где L – линейный эллиптический оператор второго порядка по пространственным переменным, I – тождественный оператор. В данной работе доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестной правой части $f = f(x)$ по известному следу u при $t = T$, а также функции $f = \phi(x)g(t)$, содержащей неизвестный множитель $g(t)$ по информации о потоке u в некоторой точке границы области $\partial\Omega$.

Обратным задачам отыскания правой части уравнений соболевского типа посвящен также цикл работ Б.С.Аблабекова, М.Ш.Мамаюсупова и С.Н.Землянского [1, 8, 49, 97, 98]. В работах [1, 49, 97, 98] найдены условия существования и единственности классического решения задачи определения функции, зависящей от пространственных переменных, в правой части уравнения фильтрации (3) в дивергентной форме с переменными коэффициентами η, k. Кроме того, в [1] получены оценки непрерывной зависимости решения от данных переопределения в финальный момент времени. В [8] представлены формальные операторные формулы для конструктивного определения неизвестной правой части $\lambda(x)$ и решения обратной задачи для уравнения соболевского типа с финальным условием переопределения.

В работах [100, 145, 148, 283, 284] обсуждаются вопросы корректности задачи определения нескольких функций $c_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$ в правой части

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i(t) f_i(x,t) + f_0(x,t) \tag{7}$$

уравнения (1) при точечных условиях преопределения. В [145,284] доказано существование и единственность «в целом» по t сильного обобщенного решения обратных задач нахождения неизвестных функций $c_i(t)$ в правой части (7) уравнений соболевского типа третьего и четвертого порядка по известным следам решения u во внутренних точках области x_i, $i = 1, 2, \ldots, r_0$.

В [63, 135, 197] исследуется корректность обратных задач восстановления неизвестных функций в правой части $f = f_1(x,t) + q(x)h(x,t)$ вырождающихся уравнений и систем соболевского типа при различных условиях переопределения, где f, f_1 и q в общем случае являются вектор-функциями. В частности, в [197] однозначная разрешимость задачи восстановления вектор-функции q для системы уравнений соболевского типа в абстрактном банаховом пространстве доказана в случае существования аналитической полугруппы или группы оператора системы. С помощью данных результатов в [135] установлены необходимые и достаточные условия разрешимости и единственности сильного обобщенного решения задачи определения правых частей линеаризованной системы Осколкова.

Все приведенные выше результаты получены для линейных уравнений соболевского типа. В работах [50, 154, 198, 218, 320] изучались обратные задачи для нелинейных уравнений и систем с неизвестной правой частью. Получены теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи определения функции в правой части нелинейной системы, описывающей течение жидкости Кельвина-Фойгта, [50, 198, 218]

$$\bar{v}_t - \lambda\Delta\bar{v}_t - \nu\Delta\bar{v} + (\bar{v}\nabla\bar{v}) + \nabla p = \bar{g}(x,t), \qquad div\,\bar{v} = 0 \tag{8}$$

и ее обобщения с членом $\nu\mathrm{div}(|\nabla\bar{v}|^{q-2}\nabla\bar{v}) + \gamma|\bar{v}|^{m-2}\bar{v}$ вместо $\nu\Delta\bar{v}$, где λ и ν – положительные константы, $q > 1$ и $m > 1$ [154]. В [198] задача восстановления вектор-функции $\bar{g}(x,t)$ в системе (8) при условии переопределения

$$\int\limits_{\Omega} u(t,y)\Phi(x,y)dy = \varphi_1(t,x) \tag{9}$$

сводится к обратной задаче для операторного дифференциального уравнения (1) в банаховом пространстве, оператор которого допускает вырожденную сильно непрерывную полугруппу. Для задачи восстановления функции h в правой части слабо нелинейного уравнения

$$u_t - a\Delta u_t - \Delta u + (\bar{b}, \nabla u) - |u|^p u = h(t)g(x),$$

с интегральным условием переопределения в [320] установлены условия разрушения решения u за конечный промежуток времени, а также условия стабилизации u к 0 при $t \to +\infty$.

Другой тип обратных задач для (1) рассмотрен в [11, 233]. Эти работы посвящены задачам восстановления ядер в интегральном члене уравнения (1) с интегро-дифференциальным оператором B. В [11] получены достаточные условия разрешимости «в малом» по t, единственности и устойчивости решения обратной задачи восстановления ядер $K_i(t)$ в линейном операторном дифференциальном уравнении

$$u_t - A_1 u_t - A_2 u = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^t K_i(t-s)B_i u(s)ds + f$$

с обратимым оператором $I - A_1$, действующим в некотором банаховом пространстве, при условиях $u(0) = u_0$ и $\Phi_i(A_1 - I)u = g_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Здесь $A_1 = A_2 = A$, операторы $A, B_i : X \to X$, $\Phi_i : X \to \mathbf{R}$ замкнуты. Эти результаты были обобщены в [233] для одного неизвестного ядра ($m = 1$) и различных операторов A_1 и A_2. Причем в данном случае установлена разрешимость и единственность решения обратной задачи «в целом» по t.

С описанными выше обратными задачами для уравнений и систем соболевского типа тесно связаны задачи управления, которые по сути своей также являются обратными задачами. Причем управление или управляющие параметры в таких задачах, как правило, находятся в правой части или на границе области. Такие задачи с различными критериями управления изучались Л.В.Уайтом и Т.-Ц.Ли [231, 318], а также В.Е.Федоровым и М.В.Плехановой [109, 137]. Уайт [318] сформулировал задачу управления для уравнения (3) и исследовал поведение ее решения при $u = y^{(\varepsilon)}$, $\eta = \varepsilon$, $k = 1$ в цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ - ограниченная область с границей Γ. Он рассматривал задачу с нулевыми начальными и граничными данными и управлением $c_\varepsilon(t)$ на границе Γ_ρ шара B_ρ радиуса ρ, вложенного в область Ω, $y^{(\varepsilon)}|_{\Gamma_\rho} = c_\varepsilon(t)$ почти для всех $t \in [0, T]$. В качестве критерия управления Уайт впервые использовал интегральное условие

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Big(\varepsilon y_t^{(\varepsilon)} + y^{(\varepsilon)} \Big) ds = \nu_\varepsilon(t) \qquad \text{почти всюду на } [0, T] \tag{10}$$

и доказал, что если $\nu_\varepsilon(t) \to \nu(t)$ слабо в $L^2(0, T)$ при $\varepsilon \to 0$, то решение $y^{(\varepsilon)}$ сходится слабо в $L^2(Q)$ к решению y задачи управления для параболического уравнения при $\varepsilon = 0$. Это подтверждает возможность регуляризации задач управления, также как и прямых задач (см. [311]) для параболических уравнений соответствующими задачами для уравнений соболевского типа. Кроме того, в [231] показано, что если $\nu_\varepsilon(t) \to \nu$, то решение задачи для неоднородного уравнения (3) с условием управления (10) при $\rho = \varepsilon$ стремится к решению соответствующей задачи с точечным условием в центре шара B_ε вместо интегрального критерия (10) при $\varepsilon \to 0$. В [109, 137] получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления для систем линейных операторно-дифференциальных уравнений первого порядка с вырожденным оператором под производной по времени, в частности для линеаризованной системы (8).

Наиболее сложными для исследования и практически значимыми являются задачи идентификации коэффициентов уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Эти задачи сравнительно мало изучены. Здесь следует отметить цикл работ Я.Т.Мегралиева и Г.К.Шафиевой [270–272], в которых исследуются обратные задачи отыскания неизвестного младшего коэффициента $p(t)$ в уравнении

$$u_t - bu_{txx} - a(t)u_{xx} = p(t)u + f \tag{11}$$

с различными краевыми условиями и условиями переопределения в случае одной пространственной переменной $x \in (0,1)$. В частности, найдены достаточные условия корректности обратной задачи восстановления $p(t)$ по известной информации о сумме $u(0.5,t) + \int_0^t u(x,t)dx$ [270]. Доказано также существование и единственность решения задачи с граничным условием на одном конце интервала, известным интегралом $\int_0^t u(x,t)dx$ и точечным условием переопределения во внутренней точке интервала $(0,1)$ [271] или нелокальным условием на комбинацию следов $\alpha u(0,t) + \beta u(1,t)$ с постоянными α и β [272]. Результаты этих работ обобщены в [277] на случай уравнения типа (11) с дифференциальными операторами по пространственной переменной порядка $2m$, где m – натуральное число. Аналогичные результаты получены в [273] в случае обратной задачи с нелокальным условием по времени для уравнения (11), содержащего член $a(t)u_{xxxx}$ вместо $a(t)u_{xx}$.

Наименее изучены обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов при производных u по t и x в уравнениях соболевского типа. Сложность этих задач объясняется их существенной нелинейностью. Причем нелинейность, связанная именно с природой самой обратной задачи, а не со структурой уравнения, создает основные трудности для исследования [26]. Условия корректности таких задач обсуждались в работах [62, 96, 283, 284, 292]. В частности, в [96] доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи отыскания функций $u(t,x)$, $b(y)$, $c(y)$ и константы a в уравнении

$$(u - \Delta u)_t = a\Delta u + b(y)u_y + c(y) + \delta(t,x,y), \qquad (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0,$$

при заданных $u(t,x,0)$, $u_y(t,x,0)$ и $u(0,x,y)$. Здесь $\delta(t,x,y)$ - дельта-функция Дирака. Достаточные условия существования сильных обобщенных решений обратных задач нахождения неизвестного коэффициента, зависящего от t, при u и u_t с интегральным условием переопределения по области в случае многих пространственных переменных установлены А.С.Кожановым в [62]. В работах С.Г.Пяткова, С.Н.Шергина и Е.И.Сафонова [283, 284, 292] наряду с задачами восстановления неизвестной правой части в уравнениях соболевского типа рассматривались задачи идентификации r неизвестных коэффициентов $c_i(t)$, стоящих в правой части (7) и в слагаемых вида $c_k(t)M_k u$, где M_k – дифференциальные операторы второго порядка по пространственным переменным, $k = r_0 + 1, \ldots, r$. Причем изучались обратные задачи для уравнения соболевского типа третьего и четвертого порядка. Найдены достаточные условия разрешимости обратных задач «в малом» по t как с граничным условием Дирихле [283, 284], так и со смешанным граничным условием [292]. В качестве условия переопределения задаются следы решения u в r внутренних точках области.

Как отмечалось выше, краевые задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации представляют большой прикладной интерес. Вместе с тем, многие практически значимые задачи либо мало изучены, либо не изучались совсем. В частности, обратные задачи отыскания коэффициентов в старших членах (третьего порядка) уравнений соболевского типа ранее не изучались. То же самое можно сказать и о нелокальных краевых задачах для систем уравнений диффузии параболического и соболевского типа с условиями по времени, заданными в разные моменты времени только для одной из неизвестных функций (задача о примесях). Кроме того, условия переопределения, физически оправданные для одних процессов, не подходят для других. Например, интегральное условие типа (9) нефизично для процессов фильтрации жидкости в пористой среде. В связи с этим возникла необходимость постановки и изучения новых задач для уравнений фильтрации и диффузии.

Цель настоящей диссертационной работы состоит в определении новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации и условий, гарантирующих корректность этих задач. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

– установить условия существования и единственности решения краевой задачи для линейных уравнений соболевского типа с нелинейным граничным условием;

– определить условия корректности обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов линейного уравнения фильтрации соболевского типа с интегральными условиями переопределения на границе; исследовать свойства решений таких обратных задач, а именно устойчивость (непрерывную зависимость от входных данных задачи), гладкость, асимптотическое поведение;

– доказать однозначную разрешимость обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов нелинейного уравнения фильтрации соболевского типа и соответствующего стационарного уравнения с интегральными условиями переопределения на границе;

– установить достаточные условия существования и единственности обобщенного решения нелокальных краевых задач для нагруженных систем уравнений параболического и соболевского типа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и оригинальными. При исследовании корректности коэффициентных обратных задач используется оригинальный подход, разработанный автором на основе метода сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента. В работе впервые поставлены и исследованы обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов линейных и нелинейных уравнений фильтрации эллиптического и соболевского типа, а также линейных уравнений параболического типа с интегральными условиями переопределения относительно потока на границе области. Впервые доказано существование и единственность сильных обобщенных решений, получены оценки непрерывной зависимости решений от входных данных, найдены достаточные условия стабилизации решения обратной задачи для уравнения соболевского типа при $t \to +\infty$. Впервые исследована обратная задача восстановления неизвестного коэффициента в старшем члене уравнения фильтрации соболевского типа. Впервые доказаны теоремы существования и единственности решения нелокальных задач для систем двух уравнений диффузии с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в следующих областях: качественная теория уравнений в частных производных, теория обратных задач, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности для обратных задач фильтрации, могут быть использованы при разработке численных алгоритмов решения этих задач.

Практическая значимость работы заключается в том, что математические модели, лежащие в основе изучаемых обратных и нелокальных задач, описывают физические процессы, имеющие важное значение для нефтедобычи и цветной металлургии.

Методы исследования. Для исследования перечисленных задач используются методы функционального анализа и теории уравнений в частных производных, а именно, метод монотонности, теоремы вложения, теоремы о неподвижной точке, метод Галеркина, методы получения априорных оценок, метод регуляризации, итерационные методы. Для доказательства разрешимости обратных задач с интегральными условиями переопределения применяется метод, разработанный автором на основе продолжения граничных данных и сведения обратных задач к операторному уравнению для неизвестного коэффициента.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

– доказана однозначная разрешимость краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием;

– установлены условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в члене второго порядка линейного уравнения соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе области;

– получены достаточные условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в старшем члене линейных уравнений соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе области;

– доказано существование и единственность решения нового класса обратных задач для нелинейного уравнения фильтрации соболевского типа с неизвестным коэффициентом в члене второго порядка в случае интегрального условия переопределения на границе области;

– установлены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения нелокальной задачи для нагруженной системы уравнений диффузии с условиями в начальный и финальный моменты времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств всех утверждений.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), а также Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных конференциях:

– Японско-Новосибирский семинар по обратным задачам «Inverse and Ill-posed Problems» (Обратные и некорректные задачи) (Киото, Япония, 1994);

– международная конференция «The Meeting of Japanese Mathematical Society» (Собрание Японского математического общества) (Сендаи, Япония, 1995);

– международная конференция «Математические модели и методы их исследования» (Краноярск, Россия, 1997, 1999, 2001);

– «Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98)», посвященный памяти С.Л.Соболева (Новосибирск, Россия, 1998)

– международная конференция «Некорректные и обратные задачи», посвященная 70-летию М. М. Лаврентьева, (Новосибирск, Россия, 2002);

– международная конференция «Обратные и некорректные задачи», посвященная 75-летию М. М. Лаврентьева (Новосибирск, Россия 2007);

– международная конференция «Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий» (Красноярск, Россия, 2008);

– международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения (Москва, Россия, 2009);

– международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Яненко (Новосибирск, Россия, 2011);

– международная конференция «Математические и информационные технологии MIT 2011» (Сербия, Черногория, 2011);

– «6-я международная конференция «Inverse Problems: Modeling and Simulation» (Обратные задачи: моделирование и имитация) (Анталья, Турция, 2012);

– международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск, Россия, 2012);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева (Новосибирск, Россия, 2013);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященная 70-летию со дня рождения ректора НГУ В.Н.Врагова (Улан-Удэ, Россия, 2015)

– международная конференция «IX Сибирский конгресс женщин-математиков» (Красноярск, Россия, 2016);

– VIII международная конференция по математическому моделированию (Якутск, Россия, 2017);

– международная конференция «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, Россия, 2017);

– международная конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, Россия, 2018);

– международная конференция «Математика в приложениях. Международная научная конференция в честь 90-летия С.К. Годунова» (Новосибирск, Россия, 2019);

– одиннадцатая международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Россия, 2019);

– международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, Россия, 2020);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященная 90-летию БГПИ-БГУ (Улан-Удэ, Россия, 2022);

– международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия, 2022);

– международная конференция «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's», посвященная 100-летию О.А.Ладыженской (Санкт-Петербург, Россия, 2022).

– российско-китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» в 2023 году (Новосибирск, Россия);

– международная конференция «Современные проблемы обратных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова в 2023 году (Новосибирск, Россия).

Работа также обсуждалась на научных семинарах:

– на научном семинаре по уравнениям математической физики департамента математики университета Кейо (Япония) под руководством профессора А.Тани;

– на семинаре научно-исследовательского института математики Северо-восточного федерального университета «Неклассические уравнения математической физики» под руководством профессора И.Е.Егорова;

– на семинаре научной школы «Математическое моделирование в решении задач естествознания и социально-экономической сферы» Югорского государственного университета под руководством профессора С.Г.Пяткова;

– на семинаре кафедры математического анализа Челябинского государственного университета под руководством профессора В.Е.Федорова;

– на семинарах Института математики СО РАН имени С.Л.Соболева: семинар «Избранные вопросы математического анализа» под рукводством профессора Г.В.Демиденко, семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа под руководством профессора В.С.Белоносова, семинар лаборатории обратных задач математической физики под руководством профессора Ю.Е.Аниконова и доктора физико-математических наук М.В. Нещадима, семинар лаборатории дифференциальных и разностных уравнений под руководством профессора А.И.Кожанова, семинар лаборатории вычислительных проблем задач математической физики под руководством профессора А.М. Блохина, семинар «Теоретические и вычислительные проблемы математической физики» под руководством профессора Д.Л.Ткачева;

– на учебно-исследовательском семинаре механико-математического факультета Московского государственного университета «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» под руководством академика РАН В.А.Садовничего и профессора А.И.Прилепко;

– на научном семинаре кафедры математики физического факультета Московского государственного университета «Обратные задачи математической физики» под руководством профессора А. Б. Бакушинского, профессора А. В. Тихонравова и профессора А. Г. Яголы;

– на научном семинаре Института гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН «Математические модели механики сплошных сред» под руководством члена-корреспондента РАН П. И. Плотникова и доктора физико-математических наук В. Н. Старовойтова;

– на совместном научном семинаре отдела ИВМ СО РАН «Дифференциальные уравнения механики» и базовой кафедры математического моделирования и процессов управления Сибирского федерального университета «Математическое моделирование в механике» под руководством профессора В. К. Андреева;

– на межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» под руководством профессора А. И. Кожанова, профессора И. Е. Егорова, профессора С. В. Попова, профессора В. Е. Федорова, профессора А. П. Солдатова, профессора С. Г. Пяткова;

– на научном семинаре Института гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН «Прикладная гидродинамика» под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Пухначева и доктора физико-математических наук Е. В. Ерманюка;

– на научном семинаре Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН «Математические проблемы геофизики» под руководством члена-корреспондена РАН С. И. Кабанихина и профессора М. А. Шишленина;

– на научном семинаре кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ под руководством профессора А. Б. Костина, профессора О. В. Нагорнова и доктора физико-математических наук В. Б. Шерстюкова;

– на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Сибирского федерального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 41 работе [23, 89–94, 235–267, 316], 17 статей (4 в соавторстве) – в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. 10 статей [89, 91, 237, 246, 248, 253, 260–263] опубликованы в журналах первого и второго квартиля Web of Science и Scopus. В работах [260–262] вклад автора в основные результаты является решающим. В статье [263] автору диссертации принадлежат результаты раздела 4 (теоремы 4.1 и 4.2).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 324 наименования, из них 41 работа автора по теме диссертации. Главы состоят из параграфов, которые в свою очередь содержат пункты. Общий объем диссертации составляет 314 страниц. Нумерация формул, утверждений (теорем, лемм и т.п.) и замечаний является сквозной в пределах одного параграфа, номера состоят из трех цифр: номер главы, номер параграфа и порядковый номер формулы или утверждения. Во введении используются только порядковые номера формул. Для задач применяется сквозная нумерация в пределах главы, номер состоит из номера главы и порядкового номера задачи.

Первая глава включает в себя 4 параграфа и посвящена вопросам корректности краевых задач для уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени, и исследованию свойств их решений. В §1.1 при некоторых предположениях доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейной системы операторных дифференциальных уравнений в абстрактном банаховом пространстве, включающих уравнение соболевского типа с нелинейным монотонным оператором под производной по времени. При аналогичных предположениях относительно семейств операторов доказано существование и единственность решения Задачи Коши для нелинейного операторного дифференциального уравнения соболевского типа. Результаты §1.1 опубликованы в работе [23].

Данные результаты не являются основными и включены в диссертационную работу из методологических соображений, поскольку идеи и метод доказательства теорем существования используется в дальнейшем при исследовании корректности других задач. В частности, этот подход применяется в §1.2, где обсуждаются вопросы корректности краевой задачи для уравнения соболевского типа

$$u_t + \eta M u_t + kMu = f, \quad (t,x) \in Q_T,$$

с краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\Big(\eta \frac{\partial u_t}{\partial \bar{N}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \bar{N}} + \sigma(x)(\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u))\Big)|_{S_T} = \beta(t,x).$$

Здесь $Q_T = \Omega \times (0,T) \in \mathbf{R}^{n+1}$ – цилиндр с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^n$ – некоторая область с границей $\partial\Omega$, M - самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор вида

$$M = -div(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I, \tag{12}$$

где $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ – матрица функций $m_{ij}(x),\ i,j = 1,2,\ldots,n$; $m(x)$ – скалярная функция, I – тождественный оператор, $\frac{\partial}{\partial \bar{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, $\gamma(u)$ – нелинейная функция степенного роста с показателем $q > 0$.

Основными результатами данного параграфа являются три теоремы. В первой теореме (теорема 1.2.2) сформулированы достаточные условия существования и единственности обобщенного решения задачи 1.1. Результат получен при произвольной размерности n и $q \geq 2$. Вторая и третья теоремы (теоремы 1.2.3 и 1.2.4) объясняют, как влияет гладкость исходных данных задачи на дифференциальные свойства ее решения.

Результаты §1.2 опубликованы в работе [253]. Теоремы 1.2.2 – 1.2.4 относятся к основным результатам диссертационной работы.

§1.3 посвящен краевым задачам для нелинейных уравнений соболевского типа, операторы которых немонотонны в банаховых пространствах. Здесь рассматривается начально-краевая задача для нелинейного уравнения фильтрации

$$(u + \eta M\psi(u))_t + k(t)M\psi(u) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{13}$$

с начальным условием и граничными данными Дирихле. Функция $\psi(\rho)$ отображает интервал $(-\infty, +\infty)$ на себя, непрерывна и монотонна. Для рассматриваемой задачи найдены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения (теорема 1.3.2). Данный результат опубликован в работе [247]. Теорема 1.3.2 относится к основным результатам диссертационной работы.

В §1.4 обсуждаются достаточные условия, при которых справедливы теоремы сравнения для некоторых уравнений третьего порядка соболевского типа (теоремы 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.4). Результаты, сформулированные в теоремах 1.4.1, 1.4.2, опубликованы в [261] и [263, Лемма 2.2] соответственно. Результат, представленный в теореме 1.4.4 опубликован в [250]. Теорема 1.4.6 содержит результат, опубликованный в [255]. Теоремы сравнения играют существенную роль при доказательстве разрешимости обратных задач во второй и третьей главах диссертации.

Вторая глава диссертации состоит из 6 параграфов и посвящена новому классу обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных уравнениях соболевского, параболического и эллиптического типа по дополнительной информации о решении на границе области. В §2.1 обсуждаются особенности постановки обратных задач для уравнений соболевского типа, формулировка интегральных условий переопределения на границе. Мотивацией для поиска физически обоснованных условий переопределения послужила модель фильтрации в трещиноватой среде Баренблата, Желтова и Кочиной [15]. Основными результатами данного параграфа являются новые постановки коэффициентных обратных задач для линейного уравнения соболевского типа. Они опубликованы в [260].

В §2.2 – 2.6 рассматриваются обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов в уравнении соболевского типа

$$(\nu u + \eta M u)_t + kMu + gu = f, \tag{14}$$

в Q_T при краевых условиях

$$(\nu u + \eta M u)|_{t=0} = U_0(x), \qquad u|_{\partial\Omega} = \beta(t, x) \tag{15}$$

с линейным оператором M вида (12).

В §2.2 рассматривается обратная задача отыскания неизвестного коэффициента $g = g(t)$ в уравнении (14) с $\nu = k = 1$ и постоянной $\eta > 0$ при условии

переопределения
$$\int\limits_{\partial\Omega} \Big\{\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\Big\}\omega(t,x)ds = \varphi(t). \tag{16}$$
Основными результатами данного параграфа являются достаточные условия существования и единственности (теорема 2.2.2) и непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных (теорема 2.2.3).

Основная идея доказательства существования решения задачи (14)–(16), а также обратных задач, рассматриваемых в §2.3, 2.4 и 2.6, близка к методам, предложенным в [282], и состоит в сведении обратной задачи к эквивалентной задаче с нелинейным операторным уравнением $g = Ag$ второго рода для коэффициента $g(t)$. Однако здесь предлагается другой подход к построению операторного уравнения, при котором используется продолжение функций β и ω внутрь области в виде решений некоторых краевых задач, позволяющее получить искомое операторное уравнение.

Результаты §2.2 относятся к основным результатам диссертационной работы. Они опубликованы в [263, §4].

В §2.3 изучается обратная задача идентификации неизвестного коэффициента $k(t)$ в уравнении (14) с постоянной $\eta > 0$, $\nu = 1$ и известной функцией $g = g(t,x)$. Рассматривается обратная задача с граничными данными первого рода при условии переопределения
$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\right\} \omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T).$$
Получены достаточные условия однозначной разрешимости данной обратной задачи «в целом» по t в классе $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$ (теорема 2.3.1). Также исследуются некоторые свойства решения этой задачи, в частности, гладкость решения и непрерывная зависимость от исходных данных задачи. Кроме того, доказано существование и единственность решения обратной задачи идентификации коэффициента $k(t)$ в (14) с постоянной $\eta > 0$, $\nu = 1$ и $g \equiv 0$ в случае граничных данных третьего рода при условии переопределения
$$\int\limits_{\partial\Omega} (\eta u_t + k(t)u)\omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T).$$

Данные результаты опубликованы в [254,255,261] и относятся к основным результатам диссертации.

В §2.4 обсуждаются вопросы асимптотического поведения решения обратной задачи для уравнения (14) с неизвестным коэффициентом $k(t)$ при $t \to +\infty$. Основными результатами данного параграфа являются две теоремы. В теореме 2.4.2 приводятся условия на исходные данные, которые гарантируют стабилизацию решения нестационарной обратной задачи к решению соответствующей стационарной обратной задачи при $t \to +\infty$. Достаточные условия однозначной разрешимости стационарной задачи дает теорема 2.4.1. Результаты опубликованы в [237,262] и являются основными результатами диссертационной работы.

§2.5 главы 2 посвящен исследованию поведения решения обратной задачи с неизвестным коэффициентом $k(t)$ в уравнении (14) при $\eta \to 0$ и корректности соответствующей обратной задачи для параболического уравнения. Основными результатами данного параграфа являются достаточные условия сходимости $\{u^\eta, k^\eta\}$ к $\{u, k\}$ при $\eta \to 0$ (теорема 2.4.2), где $\{u^\eta, k^\eta\}$ – решение задачи (14)–(15), и теорема существования и единственности сильного решения параболической обратной задачи (теорема 2.4.4). Теорема 2.4.2 остается справедливой и при $n = 1$ (см. теорему 2.4.3). Теоремы 2.4.2 и 2.4.4 относятся к основным результатам диссертационной работы. Они опубликованы в [241].

В §2.6 устанавливаются условия разрешимости и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестного коэффициента $\eta = \eta(t)$ в старшем члене уравнения (14) с $k = 1$ и $g = g(t, x)$ при краевых условиях (15) и условиях переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \left(\eta(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t, s)\, ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T],$$

$$\eta(0) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(0, s)}{\partial \overline{N}}\, \omega(0, s)\, ds + r_1 \eta(0) = r_2.$$

Исследование проводится в три этапа. Первый этап включает в себя обсуждение постановки обратной задачи и предварительные результаты для соответствующих прямых краевых задач. На втором этапе исследуется корректность поставленной задачи при $\nu = 1$ «в малом» по t (теорема 2.6.3). На третьем этапе устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения задачи при $\nu = 0$ «в целом» по t (теорема 2.6.4).

Теоремы 2.6.3 и 2.6.4 относятся к основным результатам диссертационной работы. Они опубликованы в [89, 90].

В главе 3, состоящей из двух параграфов, постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений соболевского и эллиптического типа и результаты, полученные в предыдущей главе, обобщаются на случай нелинейных уравнений соболевского типа и стационарных уравнений фильтрации.

В §3.1 рассматривается обратная задача отыскания неизвестного коэффициента $k = k(t)$ в уравнении (13) с начальным условием $(u + \eta M\psi(u))|_{t=0} = U_0(x)$, граничным условием Дирихле и условием переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial(\psi(u))_t}{\partial \overline{N}} + k(t) \frac{\partial \psi(u)}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, ds + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t).$$

Основным результатом данного параграфа являются достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи (теорема 3.1.1). Он относится к основным результатам диссертации и опубликован в [250].

Целью §3.2 является исследование корректности стационарной обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента k, ассоциированной с нестационарной обратной задачей, рассмотренной в §3.1. Главный результат данного параграфа – это достаточные условия существования и единственности решения $\{u, k\}$ стационарной задачи (теорема 3.2.3). Результаты §3.2 опубликованы в [93] и относятся к основным результатам диссертационной работы.

В главе 4, включающей два параграфа, методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений диффузии. Здесь рассматриваются задачи, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций.

Первым объектом исследования являются нелокальные задачи для параболических систем вида

$$u_{1t} + Mu_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)AU_2 + f_1(t,x), \tag{17}$$

$$u_{2t} + Lu_2 = Bu_1 + \gamma(x, u_1) + f_2(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{18}$$

с краевыми условиями

$$u_1|_{t=0} = u_0(x), \quad u_1|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{19}$$

$$u_i|_{S_T} = \beta_i(t,x), \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

которым посвящен §4.1. Здесь $U_i(x) \equiv \int_0^T u_i dt$, $i = 1, 2$. M, L, B – линейные дифференциальные операторы второго порядка по пространственным переменным, A – либо тождественный оператор, либо линейный дифференциальный оператор второго порядка по пространственным переменным вида

$$A = -\operatorname{div}(\mathcal{A}(x)\nabla) + (\mathbf{a}, \nabla)_R + a(x)I, \tag{21}$$

где $\mathcal{A}(x) \equiv (a_{ij}(x))$ – матрица функций, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ – вектор-функция; a – скалярная функция. Основными результатами данного параграфа являются достаточные условия существования и единственности решения задачи (17)–(20) (теоремы 4.1.3 и 4.1.4). Теоремы 4.1.3 и 4.1.4 относятся к основным результатам диссертационной работы. Результаты этого параграфа опубликованы в [91].

В §4.2 обсуждаются условия разрешимости и единственности решения аналогичной нелокальной задачи для системы уравнений, неразрешенных относительно производных по времени. Здесь исследуются некоторые нелокальные краевые задачи для уравнения соболевского типа и корректность одной обратной задачи для полулинейного нагруженного уравнения (теорема 4.2.5). Затем с помощью этих результатов устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения основной нелокальной задачи для системы уравнений

$$\begin{gathered}
(M_1 u_1)_t + M_2 u_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1) A U_2 + f_1(t, x), \\
(L_1 u_2)_t + L_2 u_2 = B u_1 + \gamma(x, u_1) + f_2(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T,
\end{gathered}$$

с условиями

$$(M_1 u_1)|_{t=0} = u_0(x), \quad (M_1 u_1)|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \overline{\Omega},$$

$$u_k|_{S_T} = \beta_k(t, x).$$

(теоремы 4.2.6 и 4.2.7). Так же, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что линейный оператор A – это либо тождественный оператор, т. е. $A = I$, либо дифференциальный оператор вида (21), M_i, L_i, B – линейные дифференциальные операторы второго порядка по пространственным переменным, $i = 1, 2$. Операторы

Теоремы 4.2.6 и 4.2.7 относятся к основным результатам диссертационной работы. Результаты §4.2 опубликованы в [248].

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН профессору В. В. Пухначеву и профессору В. К. Андрееву за помощь, поддержку и внимание к диссертационной работе.

Глава 1. Уравнения и системы, неразрешенные относительно производной по времени

В данной главе исследуется корректность задач Коши для нелинейных операторных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной по времени с монотонными операторами в старшем члене, а также для нелинейных эволюционных систем в абстрактных банаховых пространствах. Доказываются теоремы существования, которые обобщают результаты, полученные Ю.Я. Беловым и Н.Н.Яненко [18–22] для операторных дифференциальных уравнений и эволюционных систем на случай операторов, зависящих от времени. Идеи и метод доказательства существования решения, разработанные для таких операторных дифференциальных уравнений, применяются при исследовании корректности краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа со смешанным нелинейным граничным условием. Кроме того, доказывается существование и единственность решения краевой задачи для одного класса нелинейных уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, с немонотонными операторами в банаховых пространствах. Приводятся достаточные условия на операторы уравнений соболевского типа, а также на начальные и граничные данные, при которых справедливы теоремы сравнения для решений соответствующих краевых задач.

1.1 Теоремы существования и единственности для уравнений и систем с монотонными операторами

В данном параграфе обсуждаются вопросы корректности в банаховых пространствах задач Коши для нелинейных уравнений соболевского типа и эволюционных систем, которые включают в себя уравнение, неразрешенное относительно производной по времени.

1.1.1 Задача Коши для эволюционной системы

Рассмотрим сепарабельное рефлексивное банахово пространство U, в котором существует счетный базис, и гильбертовы пространства V и H такие, что $U \subset V \subset H$, вложения плотны и непрерывны, вложение $V \subset H$ компактно. Данные пространства считаем действительными. Отождествляя пространство

H со своим сопряженным, получим вложения $U \subset V \subset H \subset V' \subset U'$, где V', U' – пространства, сопряженные к V и U, соответственно. Обозначим через $\langle \psi, \chi \rangle_X$ ($\psi \in X'$, $\chi \in X$) отношение двойственности пространств X и X'; $(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)_V$ ($\| \cdot \|, \| \cdot \|_V$) – скалярные произведения (нормы) в пространствах H, V. Считаем отношения двойственности введенных выше пространств согласованными, т. е. $(\psi, \chi) = \langle \psi, \chi \rangle_V = \langle \psi, \chi \rangle_U$ для любых $\psi \in H$, $\chi \in U$.

Зададим в пространстве U базис $\{w^k\}_{k=1}^{\infty}$, ортонормированный в H, и введем пространства

$$X_N = \Big\{ u \big| u = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) w^k, c_k \in W_2^1(0,T) \Big\}, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим систему дифференциальных операторных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} R(t)(u_1) + N_1(t)(u) + L_1(t)(u_1) = f_1, \\ &\varepsilon \frac{du_2}{dt} + N_2(t)(u) + L_2(t)(u_2) = f_2, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где $R(t) : U \to U'$, $N_i(t) : U \times V \to V'$, $i = 1, 2$, – семейства, вообще говоря, нелинейных операторов; $L_i(t) : V \to V'$ – семейства линейных операторов, $i = 1, 2$; $t \in [0, T]$, $u = \{u_1, u_2\}$ – вектор неизвестных функций, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – постоянная. Поставим начальные условия

$$u(0) = u^0. \tag{1.1.2}$$

Здесь $u^0 = \{u_1^0, u_2^0\}$ – заданный вектор.

Будем считать, что семейство операторов $R(t) : U \to U'$ индуцирует оператор $R(t) : L^p(0, T; U) \to L^{p'}(0, T; U')$, $p = const \geq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Введем следующие предположения.

I. Оператор $R(t) : L^p(0, T; U) \to L^{p'}(0, T; U')$ ограничен и удовлетворяет условиям:

1) существуют семейство операторов $A(t) : U \to L(U, U')$ ($L(U, U')$ – пространство линейных непрерывных операторов из U в U') и нелинейный оператор $Y(t) : L^p(0, T; U) \to L^{p'}(0, T; U')$ такие, что на элеметах $v(t) \in X_N$, $N \geq 1$,

выполняются соотношения

$$\Big\langle \frac{d}{dt}R(t)(v(t)), w^k \Big\rangle_U = \Big\langle A(t, v(t))\frac{dv(t)}{dt}, w^k \Big\rangle_U + \big\langle Y(t)(v(t)), w^k \big\rangle_U =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \beta_{kj}(t, c(t))\frac{dc_j(t)}{dt} + \big\langle Y(t)(v(t)), w^k \big\rangle_U, \quad (1.1.3)$$

где $\beta_{kj}(t, c(t))$ и $\big\langle Y(t)(v(t)), w^k \big\rangle_U$ – функции непрерывные вместе со своими производными по c_i, $i = 1, \ldots, N$, для любого $\psi \in U$

$$\big\langle A(t, v(t))\psi, \psi \big\rangle_U \geq \alpha_1 \|\psi\|_V^2, \quad t \in [0, T], \quad (1.1.4)$$

и для любого $v(t) \in X_N$, $N \geq 1$,

$$\int_0^T \Big\langle Y(t)(v(t)), \frac{dv}{dt} \Big\rangle_U dt \geq -\alpha_2 \Big(\|v(0)\|_U^p + \int_0^T \|v(t)\|_U^p dt + 1 \Big), \quad (1.1.5)$$

где $\alpha_j = const > 0$, $j = 1, 2$;

2) оператор $R(0) : U \to U'$ непрерывен;

3) оператор $R(t)$ монотонный и семинепрерывный: для любых $u, v, w \in L^p(0, T; U)$

$$\int_0^T \big\langle R(t)(u) - R(t)(v), u - v \big\rangle_U dt \geq 0,$$

$$\int_0^T \big\langle R(t)(u + \xi v), w \big\rangle_U dt \to \int_0^T \big\langle R(t)(u), w \big\rangle_U dt, \qquad \xi = const \to +0;$$

4) для любых $v \in \bigcap_{N=1}^{\infty} X_N$ и $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\int_0^t \Big\langle \frac{d}{dt}R(\theta)(v), v \Big\rangle_U d\theta \geq r_1 \|v\|_U^p - r_2 \int_0^t \|v\|_U^p d\theta - r_3 \|v(0)\|_U^p, \quad (1.1.6)$$

где r_1, r_2, r_3 – положительные константы.

II. Семейства линейных ограниченных самосопряженных операторов $L_i(t) : V \to V'$ отвечают следующим условиям:

1) существуют постоянные $k_i > 0$, $i = 1, 2$ такие, что для любого $\psi \in V$, $t \in [0, T]$

$$\big\langle L_i(t)\psi, \psi \big\rangle_V \geq k_i \|\psi\|_V^2, \qquad i = 1, 2; \quad (1.1.7)$$

2) для каждого $v \in L^2(0,T;V)$

$$\frac{d}{dt}\big(L_1(t)v\big) = L_1(t)\frac{dv}{dt} + L_1'(t)v,$$

и при любом $t \in [0,T]$ оператор $L_1'(t)$ удовлетворяет условию

$$\|L_1'(t)v\|_V \le L_0\|v\|_V \tag{1.1.8}$$

с некоторой постоянной L_0;

3) функции $\Phi^i(t) = \big\langle L_i(t)v, w\big\rangle_V$, $i = 1,2$, непрерывны по t при любых $v, w \in V$.

III. Семейства операторов $N_i(t) : U \times V \to V'$, $i = 1,2$, удовлетворяют ограничениям:

1) функции $\Psi^i_{N,k}(t,c) = \big\langle N_i(t)(v^N(t)), w^k\big\rangle_V$ непрерывны вместе с производными по $c^N_{ij}(t)$ и t при любом $v^N = \{v_1^N, v_2^N\}$, где $v_i^N = \sum_{j=1}^N c^N_{ij}(t)w^j$;

2) при любых $u \in U \times V$

$$\big\langle\big\langle N(t)(u), u\big\rangle\big\rangle \equiv \sum_{i=1}^{2}\big\langle N_i(t)(u), u_i\big\rangle_V \ge$$

$$\ge -N_0(\|u_1\|_U^p + 1 + \|u_2\|^2) - \sum_{i=1}^{2}\nu_i\|u_i\|_V^2, \tag{1.1.9}$$

где N_0 и ν_i – произвольные неотрицательные постоянные, причем $\nu_i < k_i$, $i = 1,2$.

IV. Семейства операторов $N_i(t)$ порождают ограниченные операторы $N_i(t) : G \to L^2(0,T;V')$, $i = 1,2$, где $G = L^\infty(0,T;U) \times L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

Рассмотрим пространства

$$\tilde Z = \Big\{u = \{u_1, u_2\}\Big| u_1 \in L^\infty(0,T;U), \frac{du_1}{dt} \in L^2(0,T;V);$$

$$u_2 \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \frac{du_2}{dt} \in L^2(0,T;V')\Big\},$$

$$Z = \Big\{u\Big| u \in \tilde Z, \frac{d}{dt}R(t)(u_1) \in L^2(0,T;V')\Big\}.$$

V. Из всякой ограниченной в $\tilde Z$ последовательности $\{u^n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^\nu\}$, слабо сходящуюся в $\tilde Z$ к элементу u, такую что для любого $\zeta(t) \in L^\infty(0,T)$

$$\int_0^T \Big\langle \int_0^t N_1(\theta)(u^\nu)d\theta, u_1^\nu\Big\rangle_V \zeta dt \to \int_0^T \Big\langle \int_0^t N_1(\theta)(u)d\theta, u_1\Big\rangle_V \zeta dt, \tag{1.1.10}$$

для любого $v = \{\varphi, 0\} \in \tilde{Z}$

$$\int_0^T \Big\langle \int_0^t N_1(\theta)(u^\nu) d\theta, \varphi \Big\rangle_V dt \to \int_0^T \Big\langle \int_0^t N_1(\theta)(u) d\theta, \varphi \Big\rangle_V dt \tag{1.1.11}$$

и для любого $\psi \in L^2(0, T; V)$

$$\int_0^T \Big\langle \int_0^t N_2(\theta)(u^\nu) d\theta, \psi \Big\rangle_V dt \to \int_0^T \Big\langle \int_0^t N_2(\theta)(u) d\theta, \psi \Big\rangle_V dt \tag{1.1.12}$$

при $\nu \to \infty$.

Будем называть решением задачи (1.1.1), (1.1.2) пару функций вида $u = \{u_1, u_2\}$ из класса Z, удовлетворяющую тождествам

$$\int_0^T \langle R(t)(u_1), \varphi_1 \rangle_U dt + \int_0^T \Big\langle \int_0^t N_1(\tau)(u) d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V dt +$$
$$+ \int_0^T \Big\langle \int_0^t L_1(\tau) u_1 d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V dt = \int_0^T \Big\{ \langle R(0)(u_1^0), \varphi_1 \rangle_U + \Big\langle \int_0^t f_1 d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V \Big\} dt,$$
$$\int_0^T \Big\langle \varepsilon \frac{du_2}{dt} + L_2(t) u_2 + N_2(t)(u), \varphi_2 \Big\rangle_V dt = \int_0^T \Big\langle f_2, \varphi_2 \Big\rangle_V dt$$

при любых $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L^p(0, T; U) \times L^2(0, T; V)$.

Теорема 1.1.1. *Пусть $u^0 \in U \times V$, $f \in L^2(0, T; (V')^2)$ и выполняются предположения I–V. Тогда существует по крайней мере одно решение u задачи (1.1.1), (1.1.2) из класса Z.*

Доказательство. Будем искать приближенное решение задачи (1.1.1), (1.1.2) в виде

$$u^n(t) = \{u_1^n, u_2^n\} = \Big\{ \sum_{j=1}^n c_{1j}^n(t) w^j, \sum_{j=1}^n c_{2j}^n(t) w^j \Big\},$$

где вектор $c_i^n = (c_{i1}^n, c_{i2}^n, \ldots, c_{in}^n)$ является решением задачи

$$\Big\langle \frac{d}{dt} R(t)(u_1^n), w^j \Big\rangle_U + \big\langle N_1(t)(u^n), w^j \big\rangle_V + \big\langle L_1(t)u_1^n, w^j \big\rangle_V = \\ = \big\langle f_1, w^j \big\rangle_V; \tag{1.1.13}$$

$$\varepsilon\Big(\frac{du_2^n}{dt}, w^j\Big) + \big\langle N_2(t)(u^n), w^j \big\rangle_V + \big\langle L_2(t)u_2^n, w^j \big\rangle_V = \\ = \big\langle f_2, w^j \big\rangle_V; \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1.14}$$

$$c^j(0) = u_j^0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1.15}$$

Здесь $c^j(0) = \big\{c_1^j(0), c_2^j(0)\big\}$, $u_j^0 = \big\{u_{1j}^0, u_{2j}^0\big\}$ и выполняются соотношения

$$u^n(0) = \Big\{ \sum_{j=1}^n u_{1j}^0 w^j, \sum_{j=1}^n u_{2j}^0 w^j \Big\} \to u^0 = \big\{u_1^0, u_2^0\big\} \quad \text{сильно в } U \times V,\ n \to \infty. \tag{1.1.16}$$

Аналогично [19] можно показать, что система обыковенных дифференциальных уравнений (1.1.13), (1.1.14) приводится к нормальной.

Умножим (1.1.13), (1.1.14) на c_{1j}^n и c_{2j}^n соответственно, просуммируем по j и проинтегрируем результат на отрезке $[0, t]$, $t \in [0, T]$. Учитывая соотношения (1.1.6), (1.1.7), согласно лемме Гроноулла получим оценку

$$\|u_1^n\|_U + \|u_2^n\| + \sum_{i=1}^2 \|u_i^n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \tag{1.1.17}$$

где $C = const > 0$ зависит от $\|u_1^0\|_U$, $\|u_2^0\|_V$, ε, T, $\|f_i\|_{L^2(0,T;(V')^2)}$, k_i, N_0, ν_i, r_1, r_2, r_3 и не зависит от n.

Вследствие (1.1.17) можно выбрать подпоследовательность $\nu \to \infty$ такую, что

$$u_1^\nu \to u_1 \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; U), \tag{1.1.18}$$

$$u_2^\nu \to u_2 \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H) \quad \text{и слабо в } L^2(0, T; V). \tag{1.1.19}$$

Умножим (1.1.13) на $\frac{dc_{1j}^n}{dt}$, просуммируем по j и проинтегрируем результат по отрезку $[0, T]$. Учитывая соотношения (1.1.3)–(1.1.5) и ограниченность операторов $N_1(t)$ и $L_1(t)$, получим оценку

$$\Big\|\frac{du_1^n}{dt}\Big\|_{L^2(0,T;V)} \leq K, \tag{1.1.20}$$

где $K = const > 0$ не зависит от n. Из (1.1.20) вытекает, что подпоследовательность $u^\nu = \left\{u_1^\nu, u_2^\nu\right\}$ можно выбрать такой, чтобы

$$\frac{du_1^\nu}{dt} \to \frac{du_1}{dt} \quad \text{слабо в } L^2(0,T;V). \tag{1.1.21}$$

В силу ограниченности операторов $N_2(t)$ и $L_2(t)$ производная $\frac{du_2^n}{dt}$ ограничена в $L^2(0,T;V')$. Следовательно, из последовательности u^ν можно выбрать подпоследовательность (обозначим ее снова через u^ν) такую, что

$$\frac{du_2^\nu}{dt} \to \frac{du_2}{dt} \quad \text{слабо в } L^2(0,T;V'). \tag{1.1.22}$$

Можно считать при этом, что для $\{u^\nu\}$ выполняются соотношения (1.1.10)–(1.1.12).

Проинтегрируем равенства (1.1.13) на отрезке $[0,t]$, $0 \le t \le T$. Это даст

$$\Big\langle R(t)(u_1^n(t)), w^j \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t N_1(u^n)d\tau, w^j \Big\rangle_V + \Big\langle \int\limits_0^t L_1 u_1^n d\tau, w^j \Big\rangle_V =$$

$$= \Big\langle R(0)(u_1^n(0)), w^j \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau, w^j \Big\rangle_V, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из последних соотношений и (1.1.14) получаем равенства

$$\Big\langle R(u_1^\nu), \varphi_1 \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t N_1(u^\nu)d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V + \Big\langle \int\limits_0^t L_1 u_1^\nu d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V =$$

$$= \Big\langle R(0)(u_1^\nu(0)), \varphi_1 \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t f_1 d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V, \tag{1.1.23}$$

$$\varepsilon\Big(\frac{du_2^\nu}{dt}, \varphi_2\Big) + \big\langle N_2(u^\nu), \varphi_2 \big\rangle_V + \big\langle L_2 u_2^\nu, \varphi_2 \big\rangle_V = \big\langle f_2, \varphi_2 \big\rangle_V, \tag{1.1.24}$$

верные для любых $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in X_N \times X_N$, $N \le n$.

Рассмотрим оператор $J(t)(v) = R(t)(v) + \int_0^t L_1 v d\tau$, отображающий пространство $L^p(0,T;U)$ в пространство $L^{p'}(0,T;U')$. Очевидно, $J(t)$ – ограниченный семинепрерывный оператор. Ввиду ограниченности множества $\left\{J(t)(u_1^\nu)\right\}$ в $L^{p'}(0,T;U')$ подпоследовательность $\{u^\nu\}$ можно выбрать такой, чтобы

$$J(t)(u_1^\nu) \to \chi \quad \text{слабо в } L^{p'}(0,T;U'). \tag{1.1.25}$$

Докажем, что $\chi = J(t)(u_1)$. Действительно, пусть $w = (w_1, 0) \in \tilde{Z}$. Из (1.1.7) и (1.1.8) следуют соотношения

$$\int_0^\tau \Big\langle \int_0^t L_1(\theta) w_1 d\theta, w_1 \Big\rangle_V dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \Big\langle \int_0^t L_1(\theta) w_1 d\theta, \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt -$$

$$\int_0^\tau \Big\langle L_1(t) w_1, \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt = \int_0^\tau \Big\langle L_1(t) w_1, \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt -$$

$$-\int_0^\tau \Big\langle L_1(t) w_1, \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \Big\langle \int_0^t w_1 d\theta, L_1(t) \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\rangle_V dt -$$

$$-\int_0^\tau \Big\langle \int_0^t w_1 d\theta, L_1'(t) \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\rangle_V dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \Big\langle \int_0^t w_1 d\theta, L_1 \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^\tau \Big\langle \int_0^t w_1 d\theta, L_1'(t) \int_0^t w_1 d\theta \Big\rangle_V dt \geq \frac{1}{2} \Big\langle \int_0^\tau w_1 d\theta, L_1(\tau) \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\rangle_V dt -$$

$$-\frac{1}{2} L_0 \int_0^\tau \Big\| \int_0^t w_1 d\theta \Big\|_V^2 dt - L_0 \int_0^\tau \Big\| \int_0^t w_1 d\theta \Big\|_V \Big\| \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\|_V dt \geq$$

$$\geq \frac{k_1 - \sigma L_0 \tau}{2} \Big\| \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\|_V^2 - \frac{L_0(1+\sigma)}{2\sigma} \int_0^\tau \Big\| \int_0^t w_1 d\theta \Big\|_V^2 dt,$$

откуда, выбирая σ из условия $k_1 - \sigma L_1' T > 0$, получим неравенство

$$\int_0^\tau \Big\langle \int_0^t L_1(\theta) w_1 d\theta, w_1 \Big\rangle_V dt \geq \frac{k_1 - \sigma L_0 \tau}{2} \Big\| \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\|_V^2 -$$

$$-\frac{L_0(1+\sigma)}{2\sigma} \int_0^\tau \Big\| \int_0^t w_1 d\theta \Big\|_V^2 dt \qquad (1.1.26)$$

справедливое при всех $0 \leq \tau \leq T$. Из (1.1.26) следует, что

$$\int_0^s e^{c_\sigma (s-\tau)} \int_0^\tau \Big\langle \int_0^t L_1(\theta) w_1 d\theta, w_1 \Big\rangle_V dt d\tau \geq \int_0^s \Big\| \int_0^\tau w_1 d\theta \Big\|_V^2 d\tau \geq 0 \qquad (1.1.27)$$

для всех $s \in [0,T]$, где $c_\sigma = L_0(1+\sigma)[\sigma(k_1 - \sigma L_0 T)]^{-1}$. Тогда, учитывая монотонность оператора $R(t)$ и (1.1.27), для любых $v', v'' \in \tilde{Z}$ будем иметь

$$\int\limits_0^s e^{c_\sigma(s-\tau)} \int\limits_0^\tau \left\langle J(t)(v_1') - J(t)(v_1''), v_1' - v_1'' \right\rangle_U dt d\tau \geq 0$$

на $[0,T]$. Пусть w_1 –произвольный элемент из $L^p(0,T;U)$. В силу последнего неравенства

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \left\langle J(u_1^\nu) - J(w_1), u_1^\nu - w_1 \right\rangle_U dt d\tau \geq 0. \tag{1.1.28}$$

Положим в уравнении (1.1.23) $\varphi_1 = u_1^\nu$, проинтегрируем по t от 0 до τ, где $0 \leq \tau \leq T$, умножим на $e^{c_\sigma(T-\tau)}$ и проинтегрируем результат по τ от 0 до T. Это даст

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \left\langle J(u_1^\nu), u_1^\nu \right\rangle_U dt\, d\tau + \int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \Big\langle \int\limits_0^\tau N_1(u^\nu) d\theta, u_1^\nu \Big\rangle_V d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \Big\{ \Big\langle R(0)(u_1^\nu(0)), u_1^\nu \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t f_1 d\tau, u_1^\nu \Big\rangle_V \Big\} dt\, d\tau.$$

Выразим значение $\int_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int_0^\tau \left\langle J(u_1^\nu), u_1^\nu \right\rangle_U dt d\tau$ из последнего равенства. Подставляя его в неравенство (1.1.28) и переходя к пределу при $\nu \to \infty$ (что возможно ввиду непрерывности $R(0)$ и условий (1.1.9), (1.1.10), (1.1.18), (1.1.19), (1.1.25)), приходим к соотношению

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \Big\{ \Big\langle R(0)(u_1(0)), u_1 \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t f_1 d\tau, u_1 \Big\rangle_V \Big\} dt\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \Big\langle \int\limits_0^\tau N_1(u) d\tau, u_1 \Big\rangle_V d\tau -$$

$$- \int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \Big\{ \langle \chi, w_1 \rangle_U + \Big\langle J(w_1), u_1 - w_1 \Big\rangle_U \Big\} dt\, d\tau \geq 0. \tag{1.1.29}$$

Проинтегрируем (1.1.23) по t от 0 до τ, $0 \le \tau \le T$, умножим на $e^{c_\sigma(T-\tau)}$ и проинтегрируем по τ от 0 до T. Переходя к пределу при $\nu \to \infty$, получим соотношение, справедливое при любом $\varphi_1 \in X_N$. Ввиду плотности X_N в пространстве $L^p(0,T;U)$ данное соотношение имеет место при любом $\varphi_1 \in L^p(0,T;U)$. Полагая в нем $\phi_1 = u_1$ и складывая результат с (1.1.29), будем иметь

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \big\langle \chi - J(t)(w_1), u_1 - w_1 \big\rangle_U dt d\tau \ge 0.$$

Пусть $w_1 = u_1 + \xi v$, где $v \in L^p(0,T;U)$. Тогда последнее соотношение имеет вид:

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \big\langle J(t)(u_1 + \xi v) - \chi, v \big\rangle_U dt d\tau \ge 0.$$

Так как оператор $J(t)$ семинепрерывен, при $\xi \to +0$ получаем неравенство

$$\int\limits_0^T e^{c_\sigma(T-\tau)} \int\limits_0^\tau \big\langle J(t)(u_1) - \chi, v \big\rangle_U dt d\tau \ge 0$$

для любого $v \in L^p(0,T;U)$, откуда вытекает, что

$$J(t)(u_1) = \chi. \qquad (1.1.30)$$

Вследствие (1.1.11), (1.1.12), (1.1.16), (1.1.18), (1.1.19), (1.1.21), (1.1.22), (1.1.25), (1.1.30) и непрерывности оператора $R(0)$, проинтегрировав в (1.1.23), (1.1.24) по t от 0 до T, можно перейти к пределу при $\nu \to \infty$. Получим тождества

$$\int\limits_0^T \Big\{ \Big\langle R(u_1), \varphi_1 \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t N_1(u) d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V + \Big\langle \int\limits_0^t L_1 u_1 d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V \Big\} dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \Big\langle R(0)(u_1(0)), \varphi_1 \Big\rangle_U + \Big\langle \int\limits_0^t f_1 d\tau, \varphi_1 \Big\rangle_V \Big\} dt, \qquad (1.1.31)$$

$$\varepsilon \int\limits_0^T \Big\{ \Big(\frac{du_2}{dt}, \varphi_2 \Big) + \big\langle N_2(u), \varphi_2 \big\rangle_V + \big\langle L_2 u_2, \varphi_2 \big\rangle_V \Big\} dt = \int\limits_0^T \big\langle f_2, \varphi_2 \big\rangle_V dt \qquad (1.1.32)$$

верные при любых $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \bigcap_{N=1}^\infty X_N \times \bigcap_{N=1}^\infty X_N$. В силу плотности вложения множества $\bigcap_{N=1}^\infty X_N \times \bigcap_{N=1}^\infty X_N$ в пространство $L^p(0,T;U) \times L^2(0,T;V)$

тождества (1.1.31), (1.1.32) справедливы для любых $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L^p(0,T;U) \times L^2(0,T;V)$. Из (1.1.31) следует, что

$$\frac{d}{dt} R(t)(u_1) \in L^2(0,T;V'),$$

и u удовлетворяет системе уравнений (1.1.1). Из (1.1.16), (1.1.19), (1.1.21) и (1.1.22) можно показать, что $u(0) = u^0$. Теорема доказана.

Для доказательства единственности решения задачи (1.1.1), (1.1.2) введем следующие предположения.

VI. Для всех $\varphi, \psi \in U$

$$\big\langle R(t)(\varphi) - R(t)(\psi), \varphi - \psi \big\rangle_U \geq b_1 \|\varphi - \psi\|_U^p + b_2 \|\varphi - \psi\|_V^2, \tag{1.1.33}$$

где b_1, b_2 – положительные постоянные.

VII. Для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ и для любых $u, v \in Z$, удовлетворяющих условию $u(t_1) = v(t_1)$, выполняется неравенство

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big\langle \int\limits_{t_1}^{t} (N_1(u) - N_1(v)) d\tau, u_1 - v_1 \Big\rangle_V + \big\langle N_2(u) - N_2(v)), u_2 - v_2 \big\rangle_V \Big\} dt \leq$$

$$\leq b_1 \|u_1 - v_1\|^p_{L^p(t_1,t_2;U)} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_2 - v_2\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \|u_i - v_i\|^2_{L^2(t_1,t_2;V)} +$$

$$+ (l + d_1(t_2 - t_1)) \Big\| \int\limits_{t_1}^{t_2} \{u_1 - v_1\} dt \Big\|_V^2 + d_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big\| \int\limits_{t_1}^{t} \{u_1 - v_1\} d\tau \Big\|_V^2 dt, \tag{1.1.34}$$

где неотрицательные постоянные d_i зависят лишь от ε, b_1, γ_i, l, T, $\|u\|_Z$, $\|v\|_Z$ и не зависят от выбора точек t_1 и t_2. Причем

$$0 < \gamma_1 < min\{k_2, b_2\}, \quad 0 < \gamma_2 < k_2, \quad 0 < l < \frac{k_1}{2}. \tag{1.1.35}$$

Теорема 1.1.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1.1 и предположения VI, VII. Тогда существует единственное решение $u = \{u_1, u_2\}$ задачи (1.1.1), (1.1.2) в классе Z.*

Доказательство. Существование решения следует из теоремы 1.1.1. Рассмотрим два решения задачи (1.1.1), (1.1.2): $u^1 = \{u_1^1, u_2^1\}$ и $u^2 = \{u_1^2, u_2^2\}$.

Нетрудно проверить, что для u^1 и u^2 выполняются равенства

$$\Big\langle R(u_1^i),\varphi_1\Big\rangle_U+\Big\langle\int\limits_0^t N_1(u^i)d\tau,\varphi_1\Big\rangle_V+\Big\langle\int\limits_0^t L_1u_1^i d\tau,\varphi_1\Big\rangle_V=$$

$$=\Big\langle R(0)(u_1(0)),\varphi_1\Big\rangle_U+\Big\langle\int\limits_0^t f_1 d\tau,\varphi_1\Big\rangle_V,\quad i=1,2, \tag{1.1.36}$$

$$\varepsilon\Big\langle\frac{du_2^i}{dt},\varphi_2\Big\rangle_V+\Big\langle N_2(u^i),\varphi_2\Big\rangle_V+\Big\langle L_2u_2^i,\varphi_2\Big\rangle_V=\Big\langle f_2,\varphi_2\Big\rangle_V,\quad i=1,2, \tag{1.1.37}$$

при всех $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in L^p(0,T;U)\times L^2(0,T;V)$. Вычтем из первого уравнения (1.1.36) ($i=1$) и первого уравнения (1.1.37) ($i=1$) второе уравнение (1.1.36) ($i=2$) и второе уравнение (1.1.37) ($i=2$) соответственно. Положим $\varphi=\{u_1^1-u_1^2,u_2^1-u_2^2\}$, проинтегрируем результат по отрезку $[0,\tau]$, $0<\tau\le\tau_0\le T$, где

$$\tau_0=\begin{cases}\min\Big\{T,\frac{k_1}{L_0}\Big\}, & d_1=0,\\ \min\Big\{\frac{k_1-2l}{2d_1},\frac{k_1}{L_0}\Big\}, & d_1\neq 0,\end{cases}$$

и сложим полученные соотношения. Вследствие условий (1.1.7), (1.1.33)–(1.1.35) и соотношения (1.1.26) при $\sigma=1$ с помощью леммы Гроноулла получим оценку

$$\big\|u_1^1-u_1^2\big\|^2_{L^2(0,\tau;V)}+\big\|u_2^1-u_2^2\big\|^2_{L^2(0,\tau;V)}\le 0,$$

откуда следует, что $u^1=u^2$ на отрезке $[0,\tau_0]$. Рассматривая разность $u=u^1-u^2$ на отрезке $[\tau_0,2\tau_0]$ мы аналогичными рассуждениями докажем равенства $u^1=u^2$ на этом отрезке. Через конечное число шагов получим, что $u^1=u^2$ на отрезке $[0,T]$. Теорема доказана.

1.1.2 Задача Коши для для уравнения, неразрешенного относительно производной по времени

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ задачу Коши

$$\frac{d}{dt}\big\{u+\varepsilon R(t)(u)\big\}+N(t)(u)+\mu L(t)u=f, \tag{1.1.38}$$

$$u(0)=u_0, \tag{1.1.39}$$

где ε,μ – постоянные, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\mu\in[0,\mu_0]$.

Введем следующие предположения относительно операторов уравнения (1.1.38).

VIII. Оператор $R(t) : L^p(0,T;U) \to L^{p'}(0,T;U')$, $p \geq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ограничен и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют семейство операторов $A(t) : U \to L(U,U')$ и нелинейный оператор $Y(t) : L^p(0,T;U) \to L^{p'}(0,T;U')$ такие, что на элеметах $v(t) \in X_N$, $N \geq 1$, выполняются соотношения (1.1.3), где $\beta_{kj}(t,c(t))$ и $\left\langle Y(t)(v(t)), w^k \right\rangle_U$ – функции непрерывные вместе со своими производными по c_i, $i = 1,\dots,N$, для любого $\psi \in U$

$$\left\langle A(t,v(t))\psi, \psi \right\rangle_U \geq 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.1.40}$$

и для любого $v(t) \in X_N$, $N > 1$, для $Y(t)$ имеет место неравенство (1.1.5);

2) оператор $R(t)$ удовлетворяет условиям 3) и 4) предположения I.

IX. Семейство линейных ограниченных операторов $L(t) : V \to V'$ таково, что

1) для любого $\psi \in V$, $t \in [0,T]$

$$\left\langle L(t)\psi, \psi \right\rangle_V \geq l_1 \|\psi\|_V^2,$$

где постоянная $l_1 > 0$;

2) для каждого $v \in L^2(0,T;V)$

$$\frac{d}{dt}\bigl(L(t)v\bigr) = L(t)\frac{dv}{dt} + L'(t)v,$$

и при любом $t \in [0,T]$ оператор $L'(t)$ удовлетворяет условию (1.1.8), то есть неравенству

$$\|L'(t)v\|_V \leq L_0\|v\|_V$$

с некоторой постоянной L_0 для всех $v \in V$;

3) функция $\Phi(t) = \left\langle L(t)v, w \right\rangle_V$ непрерывна по t при любых $v, w \in V$.

Введем пространства

$$\tilde{W} = \Bigl\{ v \big| v \in L^\infty(0,T;U), \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;H); \Bigr\},$$
$$W = \Bigl\{ v \big| v \in \tilde{W}, \frac{d}{dt}R(t)(v) \in L^2(0,T;H) + L^\infty(0,T;V') \Bigr\}.$$

X. Семейство операторов $N(t) : U \to H$ удовлетворяет следующим условиям:

1) при любом $v(t) \in X_N$ функции $\Psi_k(t,c) = (N(t)(v(t)), w^k)$ непрерывны вместе с частными производными по $t, c_j(t)$ $j = 1, 2, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$;

2) для ψ из шара $\|\psi\|_U \le \rho$, где $\rho = const \ge 0$, имеет место неравенство

$$\|N(t)(\psi)\| \le \gamma(\rho)$$

и для всех $\psi \in U$

$$(N(t)(\psi), \psi) \ge -q\|\psi\|_U^p - q_1,$$

где $\gamma(\rho)$, q и q_1 – неотрицательные постоянные, независящие от ψ;

3) из любой ограниченной в $\tilde{W}$ последовательности $\{u^m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^\nu\}$, слабо сходящуюся к элементу u в $\tilde{W}$, такую, что

$$\int_0^T \Big(\int_0^t N(\theta)(u^\nu)d\theta, u^\nu\Big)dt \to \int_0^T \Big(\int_0^t N(\theta)(u)d\theta, u\Big)dt, \tag{1.1.41}$$

и для любого $v =\in \tilde{W}$

$$\int_0^T \Big(\int_0^t N(\theta)(u^\nu)d\theta, v\Big)dt \to \int_0^T \Big(\int_0^t N(\theta)(u)d\theta, v\Big)dt$$

при $\nu \to \infty$.

Будем называть решением задачи (1.1.38), (1.1.39) функцию u из класса W, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \big\langle u + \varepsilon R(u), \varphi\big\rangle_U dt + \int_0^T \Big(\int_0^t N(\tau)(u)d\tau, \varphi\Big)dt + \mu\int_0^T \Big\langle \int_0^t Lud\tau, \varphi\Big\rangle_V dt =$$
$$= \int_0^T \Big\langle u_0 + \varepsilon R(0)(u_0) + \int_0^t f_1 d\tau, \varphi\Big\rangle_U dt \tag{1.1.42}$$

при любых $\varphi \in L^p(0,T;U)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть $\mu \ge 0$, $\varepsilon > 0$, $u_0 \in U$, $f \in L^2(0,T;H)$ и выполняются предположения VIII – X. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (1.1.38), (1.1.39) в классе W.*

Введем дополнительное предположение относительно семейства операторов $N(t)$.

XI. Для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ и для любых $u, v \in Z$ таких, что $u(t_1) = v(t_1)$, выполняется неравенство

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\int\limits_{t_1}^{t}\{N(u) - N(v)\}d\tau, u - v\Big)dt\Big| \leq \varepsilon b_1 \|u - v\|^p_{L^p(t_1,t_2;U)} +$$

$$+\|u - v\|^2_{L^2(t_1,t_2;H)} + d_1(t_2 - t_1)\Big\|\int\limits_{t_1}^{t_2}\{u - v\}dt\Big\|^2_V + d_2\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big\|\int\limits_{t_1}^{t}\{u - v\}d\tau\Big\|^2_V dt,$$

где неотрицательные постоянные d_1 и d_2 зависят лишь от T, $\|u\|_W$, $\|v\|_W$ и не зависят от t_1 и t_2.

Теорема 1.1.4. *Пусть выполняются предположения VIII – XI, $\mu > 0$ и для всех $\varphi, \psi \in U$ справедливо неравенство (1.1.33) с $b_2 = 0$, то есть*

$$\big\langle R(t)(\varphi) - R(t)(\psi), \varphi - \psi\big\rangle_U \geq b_1\|\varphi - \psi\|^p_U. \tag{1.1.43}$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1.38), (1.1.39) в классе W.

Доказательства теорем 1.1.3 и 1.1.4 в основных моментах повторяют доказательства теорем 1.1.1, 1.1.2 с той лишь разницей, что все рассуждения проводятся для одного уравнения, а не для системы.

1.1.3 Обобщения и примеры

Рассмотрим операторы $R(t)$ и $N(t)$, обладающие несколько иными свойствами.

XII. Оператор $R(t) : L^p(0, T; U) \to L^{p'}(0, T; U')$ удовлетворяет предположению VIII, в котором условие (1.1.3) заменено на следующее: для любого $\chi \in U$ и $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\big\langle A(t, v(t))\chi, \chi\big\rangle_U \geq \alpha_3\|\chi\|^p_U,$$

где положительная постоянная α_3 не зависит от χ и v.

XIII. Оператор $N(t) : U \to U'$ отвечает следующим условиям:

1) для оператора $N(t)$ выполняются условия 1) и 2) предположения X;

2) из всякой ограниченной в классе

$$\tilde{Y} = \Big\{v\big|v \in L^\infty(0, T; U), \frac{dv}{dt} \in L^p(0, T; U)\Big\}$$

последовательности $\{u^m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^\nu\}$, слабо сходящуюся к элементу u в $\tilde{Y}$, такую, что

$$\int\limits_0^T \Big\langle \int\limits_0^t N(\theta)(u^\nu)d\theta, u^\nu \Big\rangle_U dt \to \int\limits_0^T \Big\langle \int\limits_0^t N(\theta)(u)d\theta, u \Big\rangle_U dt,$$

и для любого $v \in \tilde{Y}$

$$\int\limits_0^T \Big\langle \int\limits_0^t N(\theta)(u^\nu)d\theta, v \Big\rangle_U dt \to \int\limits_0^T \Big\langle \int\limits_0^t N(\theta)(u)d\theta, v \Big\rangle_U dt$$

при $\nu \to \infty$.

Наряду с пространством $\tilde{Y}$ введем класс функций

$$Y = \Big\{ v \Big| v \in L^\infty(0,T;U), \frac{dv}{dt} \in L^p(0,T;U), \frac{d}{dt}R(v) \in L^p(0,T;U) + L^{p'}(0,T;U') \Big\}.$$

Теорема 1.1.5. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$, $u_0 \in U$, $f \in L^{p'}(0,T;U')$ и выполняются предположения IX, XII и XIII. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (1.1.38), (1.1.39) в классе Y. Если при этом $\mu > 0$, имеет место (1.1.43) и выполняется предположение XI, в котором постоянные d_j зависят лишь от $\|u\|_Y$ и $\|v\|_Y$, то решение задачи (1.1.38), (1.1.39) единственно в классе Y.*

Доказательство теоремы 1.1.5 аналогично доказательству теорем 1.1.3, 1.1.4 и в основных моментах повторяет доказательства теорем 1.1.1, 1.1.2 с той разницей, что все рассуждения проводятся для одного уравнения, а не для системы.

Рассмотрим более общий случай, когда пространства U не обязательно вложено в V, но вложено в H. При этом считаем, что вложения U и V в H плотны и компактны, и выполняется следующее предположение.

XIV. Существует банахово пространство B, непрерывно вложенное в пространства U и V. Отношения двойственности пространств B, U, V и скалярное произведение в H согласованы.

Теорема 1.1.6. *Пусть $f \in L^2(0,T;H)$, $u_0 \in B$, $\mu > 0$ и выполняются предположения VI, VIII – XI, XIV. Тогда существует единственное решение* *задачи (1.1.38), (1.1.39) в классе*

$$\Big\{u\Big|u \in L^\infty(0,T;U) \cap L^2(0,T;V), \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H),$$
$$\frac{d}{dt}R(u) \in L^2(0,T;H) + L^2(0,T;V')\Big\}.$$

Теорема 1.1.7. *Пусть $f = (f_1, f_2) \in L^2(0,T;(V')^2)$, $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in B \times V$ и выполняются предположения I – VII, XIV. Тогда существует единственное решение $u = \{u_1, u_2\}$ задачи (1.1.1), (1.1.2) в классе*

$$\Big\{u = (u_1,u_2)\Big|u_1 \in L^\infty(0,T;U) \cap L^2(0,T;V), \frac{du_1}{dt} \in L^2(0,T;V),$$
$$\frac{d}{dt}R(u_1) \in L^2(0,T;V'), u_2 \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \frac{du_2}{dt} \in L^2(0,T;V')\Big\}.$$

Теоремы 1.1.6, 1.1.7 доказываются аналогично теоремам 1.1.1, 1.1.2 настоящего параграфа. Заметим только, что базис $\{w^k\}$ здесь выбирается в пространстве B.

Рассмотрим примеры модельных уравнений и соответствующих краевых задач, для которых справедливы полученные результаты.

В работах [107, 162] было выведено нелинейное одномерное модельное уравнение, описывающее нелинейные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль некоторого направления (его можно считать координатным направлением Ox). При учете вязкости жидкости μ они описываются уравнением Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса

$$u_t - u_{xxt} + uu_x - \mu u_{xx} - u_x = 0,$$

где u – скорость движения жидкости. Аналогичное уравнение моделирует потенциал u электрического поля полупроводника. При наличии внешнего электрического поля и нелинейной зависимости электрической поляризуемости от ∇u уравнение для потенциала имеет вид [123]

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(au - \sigma\Delta u - \bar{a}\,\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\Big) - a_1\frac{\partial u}{\partial x} - a_2 u\frac{\partial u}{\partial x} - a_3\Delta u = 0, \qquad (1.1.44)$$

где коэффициенты a, a_1, a_2 и a_3 зависят от напряженности внешнего электрического поля и температуры связанных электронов, причем $p > 2$, $\bar{a} > 0$, $\sigma, a, a_1, a_2, a_3 \geq 0$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3}$. Если внешнее электрическое поле меняется со временем, то коэффициенты $\bar{a}$, a, a_1, a_2 и a_3 являются функциями времени, т. е. $\bar{a} = \bar{a}(t)$, $a = a(t)$, $a_i = a_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, причем $\bar{a}(t) \geq a_0 > 0$.

В случае краевой задачи в цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная область, с однородным граничным условием первого рода оператор $R(t)$ ставит в соответствие каждому элементу $v \in L^p(0, T; U)$ элемент $R(t)(v) = -\sigma\Delta v - \bar{a}\,\mathrm{div}(|\nabla v|^2\nabla v) \in L^q(0, T; U')$, где $U = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $U' = W_q^{-1}(\Omega)$ и $q = p/(p-1)$. При каждом $t \in [0, T]$ оператор $N(t)$ действует из U в $H = L^2(\Omega)$ по правилу $N(t)v = -a_1\frac{\partial v}{\partial x} - a_2 v\frac{\partial v}{\partial x}$ и, наконец, оператор $L(t) = -a_3\Delta$ отображает $V = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в $V' = W_2^{-1}(\Omega)$. Если коэффициенты уравнения (1.1.44) непрерывны на $[0, T]$, то операторы $R(t)$, $N(t)$ и $L(t)$ отвечают всем предположениям теорем 1.1.3 и 1.1.4. Более того, при каждом t оператор $R(t)$ удовлетворяет предположению XII и является равномерно монотонным, а именно, для любых $v, w \in U$ выполняется неравенство [44]

$$\big\langle R(t)(v) - R(t)(w), v - w\big\rangle_U \geq r_0\|v - w\|_U^p.$$

с некоторой положительной постоянной ν. Поэтому согласно теореме 1.1.5 первая краевая задача для уравнения (1.1.44) с однородными граничными данными и начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x)$, где $u_0 \in W_4^1(\Omega)$, имеет единственное решение $u \in Y$.

В качестве второго примера рассмотрим краевую задачу для нелинейного нелокального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(au - div((\sigma + \bar{b}\,\|\nabla u\|^{p-2})\nabla u)\Big) + (\mathbf{b}, \nabla u) - div(b\nabla u) = 0 \qquad (1.1.45)$$

с однородным граничным условием Дирихле и начальными данными (1.1.39). Здесь $\|\nabla u\| = \big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\big)^{1/2}$. Нелинейности типа $div(\bar{b}\,\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$ возникают при наличии нелокальной связи между проводимостью (или проницаемостью) среды и напряженностью поля [123] (или, например, градиентом давления при фильтрации жидкости в пористой среде). Коэффициенты уравнения a, $\bar{b}$, b и компоненты вектора $\mathbf{b}$ являются функциями, т. е. $a = a(t, x)$, $\bar{b} = \bar{b}(t, x)$, $b = b(t, x)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t, x)$, причем $\bar{b}(t, x) \geq b_0 > 0$; $p > 2$; $\sigma, b, b_2 \geq 0$.

В данном случае $U = V = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, оператор $R(t)$ действует из $L^p(0, T; U)$ в $L^{p'}(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ ($p' = p/(p-1)$) по правилу $R(t)(v) = -div((\sigma + \bar{b}\,\|\nabla v\|^{p-2})\nabla v)$.

При каждом $t \in [0,T]$ оператор $N(t) = (\mathbf{b}, \nabla)$ отображает U в $H = L^2(\Omega)$, оператор $L(t) = -div(b\nabla)$ переводит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$. Нетрудно убедиться в том, что операторы $R(t)$, $N(t)$ и $L(t)$ удовлетворяют предположениям VIII–XI. Тогда согласно теореме 1.1.4 краевая задача для уравнения (1.1.45) имеет единственное решение $u \in W$.

1.2 Краевая задача для уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием

Метод доказательства существования и единственности решения задачи Коши (1.1.1), (1.1.2) применим в исследовании корректности краевой задачи для линейного уравнения третьего порядка соболевского типа с нелинейным смешанным краевым условием.

Пусть задача рассматривается в некоторой области $\Omega \subset R^n$, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, T - действительное число и $Q_T = \Omega \times (0,T)$ - цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T и боковой поверхности S_T - через (t,x). Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

$\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ – норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, соответственно;

$\|\cdot\|_j$ и $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle_j$ – норма в $W_2^j(\Omega)$ и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^j(\Omega)$ и $W_2^{-j}(\Omega)$ соответственно ($j = 1,2$). Будем также обозначать через $\|\cdot\|_{p/2}$ норму в $W_2^{p/2}(\partial\Omega)$, $p = 1,3$.

Определим линейный оператор $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ такой, что для любых $v_1 \in W_2^1(\Omega)$ и $v_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_1 = -\int\limits_\Omega \big[(\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2)_R + m(x)v_1v_2\big]dx,$$

Формально говоря,

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I,$$

где I – тождественный оператор, $\mathcal{M}(x)$ – матрица функций $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,...,n$, $m(x)$ - скалярная функция. Введем обозначение

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_{1,M} = \int\limits_\Omega \big[(\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2)_R + m(x)v_1v_2\big]\,dx, \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega),$$

и будем предполагать выполненными следующие условия.

XV. $m_{ij}(x)$, $i,j,l = 1,2,\ldots,n$, и $m(x)$ ограничены в Ω. M – сильно эллиптический оператор, то есть для любых $v \in W_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$m_1\|v\|_1^2 \le \big\langle Mv, v\big\rangle_{1,M} \le m_2\|v\|_1^2 \tag{1.2.1}$$

с положительными постоянными m_1 и m_2.

XVI. Оператор M самосопряжен в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, то есть $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ для $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Рассмотрим следующую краевую задачу для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным смешанным граничным условием.

Задача 1.1. При заданных функциях $k(t)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\sigma(x)$, $\gamma(r)$, $\beta(t,x)$ и постоянной η требуется найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t + \eta M u_t + kMu = f, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.2.2}$$

и краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2.3}$$

$$\Big(\eta\frac{\partial u_t}{\partial \bar N} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \bar N} + \sigma(x)(\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u))\Big)|_{S_T} = \beta(t,x). \tag{1.2.4}$$

Нелинейные граничные условия типа (1.2.4) возникают при моделировании процессов теплопереноса [95,128,323], диффузии [219], ионно-звуковых волн в плазме [71] и других. Нелинейность $\gamma(r)$, как правило, допускает степенной рост, то есть $\gamma(r) = O(r^p)$ при $|r| \to +\infty$ $(p > 1)$. Типичным примером нелинейного смешанного условия является закон излучения Стефана–Больцмана для твердых тел. Этот закон гласит, что тепловой поток излучения с поверхности тела равен $\alpha(\Theta^4 - \Theta_s^4)$, где $\alpha > 0$ – физическая константа, Θ и Θ_s – температура поверхности и окружающей среды соответственно [171]. Законы теплового излучения для газов предполагают более медленный степенной рост. В частности, тепловой поток излучения пропорционален разности температур, возведенных в степень $p = 3.5$ для углекислового газа в металлургической печи и $p = 3$ для водяного пара [95].

В общем случае, если γ – неограниченная функция, то может произойти разрушение локального решения за конечное время [229, 321, 322]. В [229] условия разрушения решения установлены в случае $\gamma(r) = |r|^p h(r)$, где $p > 1$ и $h(r)$

– некоторая монотонно возрастающая функция и $h(r)/r \to 0$ при $r \to +\infty$. Оценки продолжительности жизни (максимального времени существования) сверху и снизу были получены в [321, 322]. Наличие верхней границы момента разрушения является обоснованием несуществования глобальных решений определенных на любом отрезке времени $[0, T]$. В [149,156,230,291] обсуждалось существование и несуществование решений аналогичных задач для нелинейных параболических уравнений и систем с различными нелинейностями γ.

В [71] установлены достаточные условия существования и разрушения за конечное время локального обобщенного решения краевой задачи для уравнения соболевского типа, описывающего распространение ионно-звуковых волн в «ненамагниченной» плазме. Достаточные условия включают в себя предположение о росте нелинейности аналогичное тому, которое вводилось для параболической задачи в [156]. Следует также отметить еще три результата для уравнений соболевского типа с нелинейными граничными условиями [123, 155, 163]. Если уравнение (1.2.2) с $M = -\Delta$, где Δ – оператор Лапласа, содержит младший член $|u|^{p_1}u$ и $\gamma(r) = |r|^p r$, то имеет место разрушение решения за конечное время. В [123] результат получен при некоторых условиях на $u_0(x)$ и предположении, что $0 < p < 2/(n-2)$ и $p < p_1 < 4/(n-2)$ для $n \geq 3$, $0 < p < p_1$ для $n = 1, 2$. В [163] изучалась краевая задача для такого же уравнения с граничным условием вида (1.2.4) без $(|u|^p u)_t$. Доказано существование и единственность обобщенного решения краевой задачи при $n \geq 3$, $2 < p_1 < 2n/(n-2)$ и $2 < p < 2(n-1)/(n-2)$. Установлены условия, при которых решение разрушается, и ограничения, при которых оно обращается в ноль за конечный промежуток времени. Аналогичные результаты получены в [155] для нелокального уравнения соболевского типа, содержащего наряду с младшим членом $|u|^p u$ нелинейный член второго порядка вида $a_1\|\nabla u\|^{2q-2}\Delta u$.

Заметим, что нелинейное граничное условие для уравнения (1.2.2) может быть поставлено как в форме (1.2.4), так и в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{S_T} + \sigma(x)\gamma(u)\Big|_{S_T} = b(t, x).$$

Однако (1.2.4) является более общей формой граничного условия для уравнений соболевского типа. В частности, если матрицы коэффициентов $\mathcal{M}(x) = ((m_{ij}(x)))$ различны в членах второго и третьего порядка, то смешанное граничное условие для (1.2.2) можно формулировать только в виде (1.2.4).

Определим банахово пространство B с нормой

$$\|v\|_B = \langle Mv, v\rangle_{1,M}^{1/2} + \Big(\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)|v|^q ds\Big)^{1/q}$$

и обозначим сопряженное к нему пространство через B^*. Здесь $\sigma(x) \geq 0$ – функция непрерывная на $\partial\Omega$. Пространство B является равномерно выпуклым и рефлексивным. Имеет место вложение $W_2^1(\Omega) \cap L^q(\partial\Omega) \subset B \subset W_2^1(\Omega)$. Причем, если $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, где σ_0 – постоянная, то в силу предположения XV норма $\|\cdot\|_B$ эквивалентна стандртной норме в $W_2^1(\Omega) \cap L^q(\partial\Omega)$. Если $\sigma(x) \equiv 0$, норма $\|\cdot\|_B$ эквивалентна стандартной норме в $W_2^1(\Omega)$.

Введем оператор $\tilde{M}$, действующий из B в B^* по следующему правилу: для каждого $u \in B$ элемент $\tilde{M}u$ задает функционал

$$J(v) = \langle \tilde{M}u, v\rangle_B \equiv \langle Mu, v\rangle_{1,M} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\gamma(u)v ds,$$

определенный на всех $v \in B$.

Лемма 1.2.1. *Пусть выполняются предположения XV и XVI, $\sigma \in C(\overline{\Omega})$, $\sigma \geq 0$, $\gamma(r) \in C^1(-\infty, +\infty)$ и $\gamma(0) = 0$. Если существуют положительные постоянные ν_i, $i = 1, 2, 3$, $q \geq 2$ такие, что*

$$\nu_1 |r|^{q-2} \leq \gamma'(r) \leq \nu_2 |r|^{q-2} + \nu_3 \tag{1.2.5}$$

для всех $r \in (-\infty, +\infty)$, то оператор $\tilde{M}$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен в B. Кроме того, существует обратный оператор $\tilde{M}^{-1} : B^* \to B$, и этот оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен.

Доказательство. В условиях леммы непрерывность и строгая монотонность оператора $\tilde{M}$ следует из неравенств

$$\|\tilde{M}u_1 - \tilde{M}u_2\|_{B^*} \leq K_1\|w\|_1 + \nu_2\Big[\int\limits_{\partial\Omega} \sigma\Big(\int\limits_0^1 |u_2 + zw|^{q-2} dz|w|\Big)^{q/(q-1)} ds\Big]^{(q-1)/q},$$

$$\langle \tilde{M}u_1 - \tilde{M}_2 u_2, u_1 - u_2\rangle_B \geq m_1\|u_1 - u_2\|_1^2$$

справедливых для любых u_1, $u_2 \in B$, где $w = u_1 - u_2$, константа K_1 зависит от m_2, ν_3 и $\mathrm{mes}\Omega$. В силу (1.2.5) и того факта, что $\gamma(0) = 0$,

$$\frac{\nu_1}{q-1}|r|^q \leq \gamma(r)r \leq \frac{\nu_2}{q-1}|r|^q + \nu_3|r|^2 \tag{1.2.6}$$

для любого $-\infty < r < +\infty$. Поэтому

$$\langle \tilde{M}v, v\rangle_B \geq \langle Mv, v\rangle_{1,M} + K_2\|\sigma^{1/q}v\|^q_{L^q(\partial\Omega)}$$

для любого $v \in B$. Здесь $K_2 = \nu_1/(q-1)$. Из данного соотношения и (1.2.1) вытекают неравенства

$$\frac{\tilde{K}_2}{2}\|v\|^2_B \leq \langle Mv, v\rangle_{1,M} + K_2^{2/q}\|\sigma^{1/q}v\|^2_{L^q(\partial\Omega)} \leq \Big(1 + \frac{2}{q\varepsilon^{q/2}}\Big)\langle \tilde{M}v, v\rangle_B +$$

$$+\frac{q-2}{q}\varepsilon^{q/(q-2)},$$

где $\tilde{K}_2 = \min\{1, K_2^{2/q}\}$. При $\|v\|_B \neq 0$, $\varepsilon^q = K_3^2\|v\|_B^{2(q-2)}$ и $K_3^2 = \Big[\frac{\tilde{K}_2 q}{4(q-2)}\Big]^{(q-2)}$ они принимают вид

$$\langle \tilde{M}v, v\rangle_B \geq \frac{\tilde{K}_2 q K_3\|v\|_B^{q-1}}{4(2 + qK_3\|v\|_B^{q-2})}\|v\|_B,$$

что доказывает коэрцитивность оператора $\tilde{M}$. Тогда согласно теореме 2.2 [32, Chapter 2] существует обратный оператор $\tilde{M}^{-1} : B^* \to B$, и этот оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен. Лемма доказана.

1.2.1 Существование и единственность обобщенного решения

Пусть граница $\partial\Omega$ – кусочно гладкая $n-1$-мерная поверхность. Под обобщенным решением задачи (1.2.2)–(1.2.4) будем понимать функцию u из пространства

$$W = \Big\{u \Big| u \in C([0,T]; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;B), u_t \in L^\infty(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$(\tilde{M}u)_t \in L^{q/(q-1)}(0,T;B^*)\Big\},$$

которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \Big\{(u_t, v) + \eta\langle Mu_t, v\rangle_{1,M} + k(t)\langle Mu, v\rangle_{1,M} + \int_{\partial\Omega} \sigma\Big[\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u)\Big]vds\Big\}dt =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ (f, v) + \int\limits_{\partial\Omega} \beta v ds \Big\} dt \tag{1.2.7}$$

для любого $v \in L^q(0, T; B)$ и начальным данным (1.2.3) для почти всех $x \in \overline{\Omega}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\eta > 0$, выполняются предположения XV, XVI и*

(i) $k(t) \in C([0, T])$, $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\sigma \in C(\overline{\Omega})$, $\gamma(r) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $u_0 \in B$, $\beta \in L^\infty(0, T; L^2(\partial\Omega))$;

(ii) $\sigma(x) \geq 0$, $\gamma(0) = 0$, *существуют положительные постоянные* k_0, ν_i, $i = 1, 2, 3$, *и* $q \geq 2$ *такие, что* $k(t) \geq k_0$ *для всех* $t \in [0, T]$ *и справедливо (1.2.5) для любого* $r \in (-\infty, +\infty)$.

Тогда задача 1.1 имеет обобщенное решение, и это решение единственно.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^\infty$ – базис в пространстве B, ортонормированный $L^2(\Omega)$. Обозначим множество всех функций вида

$$v^N(t, x) = \sum_{l=1}^N v_l^N(t) \varphi_l(x)$$

через B_N ($N \in \mathbf{N}$), где $v_l^N(t) \in L^q(0, T)$, $l = 1, 2, ..., N$. Построим решение задачи 1.1 как предел последовательности функций $u^N(t, x) \in B_N$, коэффициенты которых $v_l^N(t) = u_l^N(t)$ удовлетворяют равенствам

$$\frac{d}{dt}\Big\{ (u^N, \varphi_l) + \eta \langle \tilde{M} u^N, \varphi_l \rangle_B \Big\} + k(t) \langle \tilde{M} u^N, \varphi_l \rangle_B = (f, \varphi_l) + \int\limits_{\partial\Omega} \beta \varphi_l ds, \tag{1.2.8}$$

$$u_l^N(0) = u_0^l, \qquad l = 1, 2, ..., N. \tag{1.2.9}$$

Здесь u_0^l – коэффициенты разложения $u_0(x)$ по базису $\{\varphi_l\}$, $l = 1, 2, ...$. Согласно лемме 1.2.1 оператор $I + \eta \tilde{M}$ обратим. Поэтому систему уравнений (1.2.8) можно разрешить относительно $(u_l^N)'_t$ и записать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_l^N}{dt} = F_l(t, u_1^N, u_2^N, ..., u_N^N), \qquad l = 1, 2, ..., N. \tag{1.2.10}$$

Так как операторы $(I+\eta\tilde{M})^{-1}$ и $(I+\eta\tilde{M})^{-1}\tilde{M}$ деминепрерывны, функции $F_l(t,u_1^N,u_2^N,...,u_N^N)$ непрерывны по t и u_j^N, $l,j=1,2,...,N$. Следовательно, задача Коши (1.2.9), (1.2.10) имеет по крайней мере одно решение, что доказывает существование функций $u^N(t,x)$ при каждом $N=1,2,....$

Умножим равенство (1.2.8) на $u_l^N(t)$ и просуммируем по l от 1 до N. Это даст

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u^N\|^2+\eta\langle Mu^N,u^N\rangle_{1,M}\Big\}+k\langle Mu^N,u^N\rangle_{1,M}-\eta\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\gamma(u^N)u_t^N ds+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\Big[\eta\frac{\partial}{\partial t}\big(\gamma(u^N)u^N\big)+k\gamma(u^N)u^N\Big]ds=(f,u^N)+\int\limits_{\partial\Omega}\beta u^N ds. \tag{1.2.11}$$

С другой стороны, умножая (1.2.8) на $(u_l^N)_t$ и суммируя результирующие соотношения по l от 1 до N, получим, что

$$\|u_t^N\|^2+\eta\langle Mu_t^N,u_t^N\rangle_{1,M}+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\langle Mu^N,u^N\rangle_{1,M}+k\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\gamma(u^N)u_t^N ds+$$

$$+\eta\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\gamma'(u^N)(u_t^N)^2 ds=(f,u_t^N)+\int\limits_{\partial\Omega}\beta u_t^N ds. \tag{1.2.12}$$

Умножим это уравнение на $\frac{\eta}{k(t)}$, суммируем с (1.2.11) и проинтегрируем результат по t от 0 до τ, $0<\tau\le T$. Это даст

$$\frac{1}{2}\|u^N\|^2+\eta\langle Mu^N,u^N\rangle_{1,M}+\int\limits_0^\tau\Big\{k\langle Mu^N,u^N\rangle_{1,M}+\frac{\eta}{k}\|u_t^N\|^2+\frac{\eta^2}{k}\langle Mu_t^N,u_t^N\rangle_{1,M}+$$

$$+k\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\Big[\gamma(u^N)u^N+\frac{\eta^2}{k}\gamma'(u^N)(u_t^N)^2\Big]ds\Big\}dt+\eta\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\gamma(u^N)u^N ds=$$

$$=\int\limits_0^\tau\Big\{(f,u^N)+\frac{\eta}{k}(f,u_t^N)+\int\limits_{\partial\Omega}\beta u^N ds+\frac{\eta}{k}\int\limits_{\partial\Omega}\beta u_t^N ds\Big\}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\|u_0^N\|^2+\eta\langle Mu_0^N,u_0^N\rangle_{1,M}+\eta\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)\gamma(u_0^N)u_0^N ds. \tag{1.2.13}$$

Здесь u_0^N – частичная сумма N первых членов разложения $u_0(x)$ по базису $\{\varphi_l\}$. Левая часть (1.2.13) оценивается снизу с помощью (1.2.1) и предположения (ii).

Для оценки правой части (1.2.13) используем (1.2.1), (1.2.6), неравенство Коши-Буняковского и теорему вложения. Будем иметь

$$\|u^N\|^2 + 2\eta m_1\|u^N\|_1^2 + \int_0^\tau \Big\{k_0 m_1\|u^N\|_1^2 + \frac{\eta}{K}\|u_t^N\|^2 + \frac{\eta^2 m_1}{K}\|u_t^N\|_1^2\Big\}dt +$$

$$+\frac{\eta\nu_1}{q-1}\int_{\partial\Omega}\sigma|u^N|^q ds \le (1+2\eta m_2)\|u_0\|_1^2 + 2\eta\bar{\sigma}\int_{\partial\Omega}\gamma(u_0)u_0 ds +$$

$$+\int_0^\tau \frac{2}{m_1 k_0}\Big(\|f\| + c\|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big)^2 dt \equiv C, \qquad (1.2.14)$$

где $K = \max_{t\in[0,T]} k(t)$, $\bar{\sigma} = \max_{x\in\Omega}\sigma(x)$, c – постоянная неравенства вложения $W_2^1(\Omega)$ to $L^2(\partial\Omega)$. Возвращаясь к (1.2.12), перенесем третье слагаемое из левой в правую часть. Оценивая правую часть с учетом последнего неравенства, приходим к соотношению

$$\|u_t^N\|^2 + \eta m_1\|u_t^N\|_1^2 + \eta\nu_1\int_{\partial\Omega}\sigma|u^N|^{q-2}(u_t^N)^2 ds \le \frac{1}{2}\|f\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2m_1\eta}\Big(Km_2\|u^N\|_1 + c\|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big)^2 + \frac{1}{2}\|u_t^N\|^2 + \frac{\eta m_1}{2}\|u_t^N\|_1^2 +$$

$$+K\int_{\partial\Omega}\sigma\Big(\frac{\nu_2}{q-1}|u^N|^{q-1} + \nu_3|u^N|\Big)|u_t^N|ds \le \tilde{C} + \frac{1}{2}\|u_t^N\|^2 +$$

$$+\frac{3\eta m_1}{4}\|u_t^N\|_1^2 + \frac{\eta\nu_1}{2}\int_{\partial\Omega}\sigma(x)|u^N|^{q-2}(u_t^N)^2 ds$$

или

$$2\|u_t^N\|^2 + \eta m_1\|u_t^N\|_1^2 + 2\eta\nu_1\int_{\partial\Omega}\sigma(x)|u^N|^{q-2}(u_t^N)^2 ds \le 4\tilde{C}. \qquad (1.2.15)$$

Здесь положительная постоянная $\tilde{C}$ зависит от C, K, $\bar{\sigma}$, q, η, m_1, m_2, ν_i, $i = 1,2,3$, c, $\|\beta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}$, $\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$.

Оценки (1.2.14), (1.2.15) позволяют выбрать такую подпоследовательность $\{u^{N_\alpha}\}_{\alpha=1}^\infty$ последовательности $\{u^N\}$ что

$$u^{N_\alpha} \to u \quad * \text{- слабо в} L^\infty(0,T;B), \qquad (1.2.16)$$

$$u_t^{N_\alpha} \to u_t \quad * \text{- слабо в} L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \qquad (1.2.17)$$

при $\alpha \to \infty$. Причем, $u^{N_\alpha}(0) \to u_0$ при $\alpha \to \infty$ в B в силу (1.2.9).

Докажем, что u является решением задачи 1.1. Интегрируя каждое из равенств (1.2.8) при $N = N_\alpha$ по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, с учетом (1.2.9), умножая на $v_l^N(t)$, суммируя по l и интегрируя результирующее соотношение по τ от 0 до T, можно получить равенство

$$\int\limits_0^T \Big\{(u^N, v) + \eta\big\langle \tilde{M}u^N, v\big\rangle_B + \Big\langle \int\limits_0^\tau k(t)\tilde{M}u^N dt, v\Big\rangle_B\Big\}d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{(u_0^N, v) + \eta\langle \tilde{M}u_0^N, v\rangle_B + \Big(\int\limits_0^\tau f dt, v\Big) + \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau \beta dt v ds\Big\}d\tau \tag{1.2.18}$$

для $v \in B_N$. Из (1.2.16), (1.2.17) следует, что

$$u^{N_\alpha} \to u \quad \text{слабо в } L^q(0,T;B), \tag{1.2.19}$$

$$u_t^{N_\alpha} \to u_t \quad \text{слабо в } L^q(0,T;W_2^1(\Omega)) \tag{1.2.20}$$

при $\alpha \to \infty$. В силу (1.2.14) множество $\{\tilde{M}u^N\}$ ограничено в $L^{q/(q-1)}(0,T;B^*)$. Поэтому подпоследовательность $\{u^{N_\alpha}\}$ можно выбрать так, чтобы

$$\tilde{M}u^{N_\alpha} \to \chi \quad \text{слабо в } L^{q/(q-1)}(0,T;B^*) \tag{1.2.21}$$

при $\alpha \to \infty$.

Докажем, что $\chi = \tilde{M}u$. Для этого используем подход аналогичный тому, который уже применялся при доказательстве теоремы 1.1.1 в §1.1. Зададим $w_1 \in L^q(0,T;B)$. Ввиду строгой монотонности оператора $\tilde{M}$

$$\langle \tilde{M}u^{N_\alpha} - \tilde{M}w_1, u^{N_\alpha} - w_1\rangle_B \ge 0. \tag{1.2.22}$$

Умножая (1.2.8) на $\exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big)$ и интегрируя по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, получим, что

$$\Big(\int\limits_0^\tau u_t^N \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, \varphi_l\Big) + \eta\Big\langle \tilde{M}u^N - \tilde{M}u_0^N \exp\Big(-\int\limits_0^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big), \varphi_l\Big\rangle_B =$$

$$= \Big(\int\limits_0^\tau f \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, \varphi_l\Big) + \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau \beta \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt\, \varphi_l\, ds, \tag{1.2.23}$$

$l=1,2,...,N$. Умножим каждое из этих равенств на $u_l^N(t)$ и просуммируем по l от 1 до N.

$$\Big(\int_0^\tau u_t^N \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, u^N\Big) + \eta\Big\langle \tilde{M}u^N - \tilde{M}u_0^N \exp\Big(-\int_0^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big), u^N\Big\rangle_B =$$

$$= \Big(\int_0^\tau f \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, u^N\Big) + \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau \beta \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt\, u^N\, ds.$$

Далее, выразим из последнего уравнения слагаемое с $\langle \tilde{M}u^N, u^N\rangle_B$, подставим полученное выражение в (1.2.22) и проинтегрируем результат по τ от 0 до T. Это даст

$$\int_0^T \Big\{\Big(\int_0^\tau u_t^N \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, u^N\Big) + \eta\big\langle \tilde{M}u_0^N, u^N\big\rangle_B \exp\Big(-\int_0^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big) +$$

$$+\Big(\int_0^\tau f \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, u^N\Big) + \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau \beta \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt\, u^N\, ds -$$

$$-\eta\langle \tilde{M}u^N, w_1\rangle_B - \eta\langle \tilde{M}w_1, u^N - w_1\rangle_B\Big\}d\tau \geq 0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве по подпоследовательности N_α при $\alpha \to \infty$, что возможно ввиду (1.2.19)–(1.2.21) и определения u_0^N, получаем соотношение

$$\int_0^T \Big\{\Big(\int_0^\tau u_t \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big)dt, u\Big) + \eta\big\langle \tilde{M}u_0, u\big\rangle_B \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big) +$$

$$+\Big(\int_0^\tau f \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big)dt, u\Big) + \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau \beta \exp\Big(-\int_t^\tau \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big)dt\, u\, ds -$$

$$-\eta\langle \chi, w_1\rangle_B - \eta\langle \tilde{M}w_1, u - w_1\rangle_B\Big\}d\tau \geq 0. \qquad (1.2.24)$$

Теперь умножим (1.2.23) на $v^l(t) \in L^q(0,T)$, проинтегрируем по τ от 0 до T и просуммируем по l от 1 до N. Предельный переход в результирующем соотношении по подпоследовательности N_α при $\alpha \to \infty$ с учетом (1.2.19)–(1.2.21), приводит к равенству

$$\int\limits_0^T \Big\{ \Big(\int\limits_0^\tau u_t \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta} d\theta \Big) dt, v \Big) + \eta \Big\langle \chi - \tilde{M} u_0, v \Big\rangle_B \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta} d\theta \Big) \Big\} d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ \Big(\int\limits_0^\tau f \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta} d\theta \Big) dt, v \Big) + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_0^\tau \beta \exp\Big(-\int\limits_t^\tau \frac{k}{\eta} d\theta \Big) dt\, v\, ds \Big\} d\tau \quad (1.2.25)$$

для всех $v \in B_p$ при фиксированном $p \in \mathbf{N}$; $p \leq N$. Множество $\bigcup_{p=1}^\infty B_p$ является всюду плотным в $L^q(0,T;B)$. Следовательно, (1.2.25) остается справедливым для всех $v \in L^\infty(0,T;B)$. Полагая $v = u$ в (1.2.25) и суммируя это соотношение с (1.2.24), будем иметь

$$\int\limits_0^T \langle \chi - \tilde{M} w_1, u - w_1 \rangle_B d\tau \geq 0.$$

Оператор $\tilde{M}$ является максимальным монотонным в $L^q(0,T;B)$ благодаря его монотонности и непрерывности [32], поэтому из последнего неравенства вытекает, что $\chi = \tilde{M}(u)$. Таким образом, переходя к пределу в (1.2.18) по подпоследовательности N_α при $\alpha \to \infty$, получаем тождество

$$\int\limits_0^T \Big\{ (u,v) + \eta \big\langle \tilde{M} u, v \big\rangle_B + \Big\langle \int\limits_0^\tau k(t) \tilde{M} u dt, v \Big\rangle_B \Big\} d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{ (u_0, v) + \eta \langle \tilde{M} u_0, v \rangle_B + \Big(\int\limits_0^\tau f dt, v \Big) + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_0^\tau \beta dt v ds \Big\} d\tau \qquad (1.2.26)$$

справедливое для любого $v \in B_p$ при фиксированном $p \in \mathbf{N}$. Так как множество $\bigcup_{p=1}^\infty B_p$ плотно почти всюду в $L^q(0,T;B)$, тождество (1.2.26) выполняется для всех $v \in L^q(0,T;B)$. Кроме того, для u имеют место оценки (1.2.15) и

$$2\|u_t\|^2 + \eta m_1 \|u_t\|_1^2 \leq 4\tilde{C}. \qquad (1.2.27)$$

Из (1.2.16)–(1.2.18), (1.2.22) и (1.2.27) следует, что

$$u \in C(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;B) \quad u_t \in L^\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), \qquad (1.2.28)$$

$$\gamma(u) \in L^\infty(0,T; L^{q/(q-1)}(\partial\Omega)), \quad \tilde{M} u \in C([0,T]; B^*)$$

и

$$(u,v)+\eta\big\langle\tilde{M}u,v\big\rangle_B+\Big\langle\int\limits_0^\tau k(t)\tilde{M}udt,v\Big\rangle_B=(u_0,v)+\eta\langle\tilde{M}u_0,v\rangle_B+$$

$$+\Big(\int\limits_0^\tau fdt,v\Big)+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau \beta dtvds \qquad (1.2.29)$$

для любого $v\in L^q(0,T;B)$ и почти всех $\tau\in[0,T]$. Соотношение (1.2.29) при $\tau=0$ дает $(I+\eta\tilde{M})u|_{\tau=0}=(I+\eta\tilde{M})u_0$, откуда $u(0,x)=u_0(x)$ почти всюду в Ω в силу леммы 1.2.1.

Пусть $v=\varphi_l$ в (1.2.29). Ввиду (1.2.28), это равенство можно продифференцировать по τ.

$$\frac{d}{d\tau}\Big\{(u,\varphi_l)+\eta\langle\tilde{M}u,\varphi_l\rangle_B\Big\}+k(\tau)\langle\tilde{M}u,\varphi_l\rangle_B=(f,\varphi_l)+\int\limits_{\partial\Omega}\beta\varphi_l ds, \qquad (1.2.30)$$

$l=1,2,...,p$. Умножая (1.2.30) на $v_l(t)\in L^q(0,T)$, суммируя по l от 1 до p и интегрируя полученное соотношение по τ от 0 до T, мы приходим к тождеству (1.2.7) справедливому для любого $v\in\bigcup_{p=1}^\infty B_p$, и следовательно для любого $v\in L^q(0,T;B)$. Причем из (1.2.7) следует, что $(\tilde{M}u)_t\in L^{q/(q-1)}(0,T;B^*)$. Таким образом, u является обобщенным решением задачи 1.1.

Докажем, что решение u единственно. Для этого умножим (1.2.30) на $\exp\Big(\int_0^t\frac{k}{\eta}d\theta\Big)$ и проинтегрируем результат по t от 0 до τ, $0<\tau<T$. Далее, умножим каждое из результирующих равенств на $v_l(\tau)\in L^q(0,T)$, просуммируем их по l от 1 до p и проинтегрируем по τ от 0 до T. Будем иметь

$$\int\limits_0^T\exp\Big(\int\limits_0^\tau\frac{k}{\eta}d\theta\Big)\Big[(u,v)+\eta\langle\tilde{M}u,v\rangle_B\Big]d\tau=\int\limits_0^T\Big\{(u_0,v)+\eta\langle\tilde{M}u_0,v\rangle_B+$$

$$+\Big(\int\limits_0^\tau\Big(f+\frac{ku}{\eta}\Big)\exp\Big(\int\limits_0^t\frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt,v\Big)+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau\beta\exp\Big(\int\limits_0^t\frac{k}{\eta}d\theta\Big)dtvds\Big\}d\tau.$$

для любого $v\in B_p$ при фиксированном $p\in\mathbf{N}$. Так как множество $\bigcup_{p=1}^\infty B_p$ плотно почти всюду в $L^q(0,T;B)$, последнее тождество выполняется для всех $v\in L^q(0,T;B)$. Причем из этого тождества следует, что

$$\exp\Big(\int\limits_0^\tau\frac{k}{\eta}d\theta\Big)\Big[(u,v)+\eta\langle\tilde{M}u,v\rangle_B\Big]=(u_0,v)+\eta\langle\tilde{M}u_0,v\rangle_B$$

$$+\Big(\int_0^\tau \Big(f+\frac{ku}{\eta}\Big)\exp\Big(\int_0^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, v\Big)+\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau \beta\exp\Big(\int_0^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dtvds \qquad (1.2.31)$$

почти всюду на $(0,T)$.

Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи 1.1 и $w\equiv u_1-u_2$. Составим разность уравнений (1.2.31) для u_1 и u_2 с $v=w$. Это даст

$$\exp\Big(\int_0^\tau \frac{k}{\eta}d\theta\Big)\Big[\|w\|^2+\eta\langle Mw,w\rangle_1+\eta\int_{\partial\Omega}(\gamma(u_1)-\gamma(u_2))wds\Big] =$$

$$=\Big(\int_0^\tau \frac{kw}{\eta}\exp\Big(\int_0^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)dt, w\Big).$$

Ввиду (1.2.5), оценивая правую часть последнего равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского можно получить соотношение

$$\|w\|^2\exp\Big(\int_0^\tau k(\theta)d\theta\Big)\le\frac{K^2T}{\eta^2}\int_0^\tau \|w\|^2\exp\Big(\int_0^t \frac{k(\theta)}{\eta}d\theta\Big)dt,$$

из которого согласно лемме Гронуолла вытекает, что $w=0$ почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

1.2.2 Гладкость решения

Мы доказали существование и единственность обобщенного решения задачи 1.1. Выясним, как влияет гладкость исходных данных задачи 1.1 на дифференциальные свойства ее решения. Прежде всего следует отметить, что во внутренних подобластях области Ω дифференциальные свойства решения зависят только от гладкости коэффициентов оператора M и функций f и u_0.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполняются предположения теоремы 1.2.2, производные $\partial m_{ij}/\partial x_l$ ограничены в Ω, $i,j,l=1,2,\dots,n$, $u_0\in W_2^2(\Omega)$. Тогда существуют производные $u_{x_ix_j}$ и $u_{tx_ix_j}$ в любой внутренней подобласти Ω', $\overline{\Omega'}\subset\Omega$, и $u_{x_ix_j}, u_{tx_ix_j}\in L^\infty(0,T;L^2_{\text{loc}}(\Omega))$, $i,j,l=1,2,\dots,n$.*

Доказательство. Покажем, что обобщенное решение задачи 1.1 имеет вторые производные по пространственным переменным. Рассмотрим произвольный шар K_ρ (ρ – радиус шара), который принадлежит Ω вместе с замыканием концентрического шара $K_{2\rho}$, и функцию $v(x) = [u_{(l)}\xi^2]_{(\bar{l})}$. Здесь $\xi(x)$ – гладкая функция, равная нулю на множестве $\Omega \setminus K_{2\rho}$; $u_{(l)}, [\quad]_{(\bar{l})}$ – правая и левая разностные производные по x_l. Функцию v можно взять в качестве пробной функции для (1.2.7), когда $|\Delta x_l| \leq \rho$ (Δx_l – приращение x_l). Подставляя v в (1.2.7), преобразуя это тождество в соответствии с формулой

$$\int\limits_{\Omega} v_1 v_{2(\bar{l})} dx = -\int\limits_{\Omega} v_{1(l)} v_2 dx, \tag{1.2.32}$$

справедливой для любых функций $v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$ с v_2 финитной в Ω и интегрируя результат по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq T$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \Big\{(u_{(l)})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\Big[\eta(u_{(l)})_{x_j}(u_{(l)})_{x_i} + \int\limits_0^{\tau} k(u_{(l)})_{x_j}(u_{(l)})_{x_i} dt\Big]\Big\}\xi^2 dx =$$

$$= -\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i,j=1}^{n} (m_{ij})_{(l)}(\eta u_{tx_j} + k(t)u_{x_j})((u_{(l)})_{x_i}\xi^2 + 2u_{(l)}\xi\xi_{x_i})\Big\} dxdt -$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} m(x)(\eta u_t + k(t)u)[u_{(l)}\xi^2]_{(\bar{l})} dxdt - \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} f[u_{(l)}\xi^2]_{(\bar{l})} dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [(u_{0(l)})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(u_{0(l)})_{x_j}(u_{0(l)})_{x_j}]\xi^2 dx. \tag{1.2.33}$$

В силу предположений XV, XVI и (1.2.14)

$$\Big| -\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (m_{ij})_{(l)}(\eta u_{tx_j} + k(t)u_{x_j})((u_{(l)})_{x_j}\xi^2 + 2u_{(l)}\xi\xi_{x_i}) dxdt\Big| \leq$$

$$\leq C_2 + \frac{k_0 m_1}{4}\int\limits_0^{t}\int\limits_{K_{2\rho}} \sum_{i=1}^{n} ((u_{(l)})_{x_i})^2 \xi^2 dx d\tau, \tag{1.2.34}$$

где постоянные C_1, C_2 зависят от η, m_1, k_0, K, C, $\max_{x\in\Omega}\left|(m_{ij})_{x_r}\right|$, $i, j, r = 1, 2, ..., n$, и не зависят от Δx_l. Четвертое слагаемое правой части (1.2.34) ограничено по модулю константой $C_3 > 0$ благодаря гладкости коэффициентов оператора и функции u_0, а также тому факту, что для $v \in W_2^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} v_{(l)}^2 \xi^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_l}\Big)^2 \xi^2 dx. \tag{1.2.35}$$

Постоянная C_3 зависит от η, m_1, m_2, k_0, K, ρ, c, C, $\max_{x\in\bar\Omega}|(m_{ij})_{x_r}|$, $i,j,r = 1,2,...,n$, $\|u_0\|_2$ и не зависит Δx_l. Ввиду (1.2.14) и (1.2.35), второе и третье слагаемые правой части (1.2.33) можно оценить следующим образом.

$$\Big|\int_0^\tau\int_\Omega \big\{m(x)(\eta u_t + k(t)u) + f\big\}[u_{(l)}\xi^2]_{(\bar l)}dxdt\Big| \le$$

$$\le C_4 + \frac{k_0 m_1}{4}\int_0^\tau\int_{K_{2\rho}}\Big(\frac{\partial u_{(l)}}{\partial x_l}\Big)^2\xi^2 dxdt. \qquad (1.2.36)$$

Здесь постоянная $C_4 > 0$ зависит от η, m_1, m_2, k_0, K, $\|f\|_{L^2(Q_T)}$, ρ, c, C и не зависит от Δx_l. Применяя (1.2.34) и (1.2.36) к (1.2.33) и оценивая левую часть (1.2.33) снизу с помощью (1.2.1), приходим к неравенству

$$\eta\int_{K_{2\rho}}\Big[(u_{(l)})^2 + m_1\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial u_{(l)}}{\partial x_i}\Big)^2\Big]\xi^2dx + k_0m_1\int_0^\tau\int_{K_{2\rho}}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial u_{(l)}}{\partial x_i}\Big)^2\xi^2dxdt \le$$

$$\le 2(C_2 + C_3 + C_4) \equiv C_5, \qquad (1.2.37)$$

из которого согласно [85, Лемма 4.6, Глава 2] следует, что

$$\eta m_1\int_{K_\rho}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_i}\Big)^2dx + k_0m_1\int_0^\tau\int_{K_\rho}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_i}\Big)^2dxdt \le C_5$$

(без ограничения общности можно считать ξ равным 1 в K_ρ). Таким образом, доказано существование вторых производных u по пространственным переменным в Ω для всех $t\in[0,T]$ ввиду произвольности выбора l и K_ρ в Ω.

Аналогичным образом, полагая $v = [u_{t(l)}\xi^2]_{(\bar l)}$ в тождестве (1.2.7) и преобразуя его с помощью формулы (1.2.32) получим, что

$$\int_\Omega (u_{t(l)})^2\xi^2dx + \eta\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n m_{ij}(u_{tx_j})_{(l)}(u_{tx_i})_{(l)}\xi^2dx =$$

$$= -\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\Big\{\eta m_{ij(l)}u_{tx_j}(u_{tx_i})_{(l)}\xi^2 + k[m_{ij}(u_{x_j})_{(l)} + m_{ij(l)}u_{x_j}]\Big\}(u_{tx_i})_{(l)}\xi^2dx +$$

$$+\int_\Omega\{m(\eta u_t + ku) - f\}[(u_t)_{(l)}]_{(\bar l)}\xi^2dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}\Big\{\eta m_{ij}(u_{tx_i})_{(l)}+k[m_{ij}(u_{x_j})_{(l)}+m_{ij(l)}u_{x_j}]\Big\}(u_t)_{(l)}2\xi\xi_{x_i}-$$

$$-\big[m(\eta u_t+ku)-f\big](u_t)_{(l)}2\xi\xi_{(\bar{l})}+\eta\sum_{i,j=1}^{n}m_{ij(l)}u_{tx_j}(u_t)_{(l)}2\xi\xi_{x_i}\Big\}dx. \qquad (1.2.38)$$

В силу (1.2.14), (1.2.35), (1.2.37) и предположений XV, XVI, модуль правой части этого уравнения можно оценить выражением

$$C_6+\frac{\eta m_1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}((u_{tx_i})_{(l)})^2\xi^2dx.$$

аналогично правому члену (1.2.33). Постоянная C_6 зависит от η, m_1, m_2, k_0, K, $\|f\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}$, ρ, C, $\tilde{C}$, C_5, c, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|(m_{ij})_{x_r}\right|$, $i,j,r=1,2,...,n$, и не зависит от Δx_l. Оценивая левую часть (1.2.38) снизу с помощью (1.2.1) и применяя лемму 4.6 [85, Глава 2], приходим к неравенству

$$\eta m_1\int\limits_{K_\rho}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2u_t}{\partial x_l\partial x_i}\Big)^2dx\le 2C_6.$$

Таким образом, $u_{x_ix_j}$, $u_{tx_ix_j}\in L^\infty(0,T;L^2_{\rm loc}(\Omega))$, $i,j=1,2,...,n$. Теорема доказана.

Теорема 1.2.4. 1) *Пусть выполняются предположения теоремы 1.2.3, условие (1.2.5) с $2\le q\le 2(n-1)/(n-2)$ при $n>2$ и $2\le q<+\infty$ при $n\le 2$. Пусть также $\partial\Omega\in C^2$, $\beta\in L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $\sigma(x)\in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда $u\in C([0,T];W_2^2(\Omega))$ и $(Mu)_t\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.*

2) *Пусть $n\le 4$, выполняются предположения утверждения 1), $\gamma(r)\in C^2(-\infty;+\infty)$, при $n=4$ имеет место неравенство $|\gamma''(r)|\le\nu_4$ на $(-\infty;+\infty)$ с константой $\nu_4>0$. Тогда $u_t\in L^\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$.*

Доказательство. 1) Как было доказано выше, в условиях теоремы существуют вторые производные u и u_t по пространственным переменным. Причем, $u_{x_ix_j}$, $u_{tx_ix_j}\in L^\infty(0,T;L^2_{\rm loc}(\Omega))$, $i,j=1,2,...,n$. Интегрируя по частям в (1.2.7), получаем тождество

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\{u_t+\eta Mu_t+k(t)Mu-f\}vdxdt=0$$

справедливое для всех $v \in L^q(0,T;W_2^1(\Omega))$ финитных в Ω почти для всех $t \in (0,T)$. Следовательно, u удовлетворяет уравнению (1.2.2) почти всюду в Q_T и $\eta M u_t + k(t)Mu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Поэтому интеграл

$$\int\limits_{S_T} \frac{\partial}{\partial \bar{N}}(\eta u_t + k(t)u)vds$$

конечен для любого $v \in L^q(0,T;B)$. Умножим (1.2.2) на $v \in L^q(0,T;B)$ в смысле скалярного произведения $L^2(Q_T)$, проинтегрируем по частям в Ω и вычтем (1.2.7) из результирующего равенства. Будем иметь:

$$\int\limits_{S_T} \Big\{\frac{\partial}{\partial \bar{N}}(\eta u_t + k(t)u) + \sigma(x)(\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u)) - \beta\Big\}vds = 0.$$

Это означает, что u отвечает граничному условию (1.2.4) почти всюду на S_T.

Теперь мы можем получить оценку u в $W_2^2(\Omega)$. Умножим (1.2.2) на Mu в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по t от 0 до τ, $0 < \tau < T$. Это даст

$$\frac{\eta}{2}\|Mu\|^2 + \int\limits_0^\tau k\|Mu\|^2 dt = \frac{\eta}{2}\|Mu_0\|^2 + \int\limits_0^\tau \big[(f - u_t, Mu)\big]dt. \tag{1.2.39}$$

Оценивая правую часть (1.2.39) по модулю с учетом (1.2.14) и гладкости f, приходим к неравенству

$$\eta\|Mu\|^2 \le \|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \eta\|Mu_0\|^2 + KC\eta^{-1} + \eta\int\limits_0^\tau \|Mu\|^2 dt,$$

которое согласно лемме Гронуолла влечет за собой оценку

$$\eta\|Mu\|^2 \le \Big(\|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \eta\|Mu_0\|^2 + KC\eta^{-1}\Big)e^T, \qquad t \in [0,T]. \tag{1.2.40}$$

Из (1.2.2), (1.2.27) и (1.2.40) заключаем, что $Mu \in C([0,T];L^2(\Omega))$ и $(Mu)_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Перепишем граничное условие (1.2.4) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{N}} = -\sigma(x)\gamma(u)\Big|_{S_T} + \tilde{\beta}$$

где

$$\tilde{\beta} = \Big(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{N}} + \sigma\gamma(u_0)\Big)\Big|_{\partial\Omega} \exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t kd\theta\Big) + \int\limits_0^t \beta \exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\tau^t kd\theta\Big)d\tau.$$

Определим функцию a как решение задачи

$$Ma = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial \bar{N}}\Big|_{\partial\Omega} = -\sigma(x)\gamma(u)\Big|_{\partial\Omega} + \tilde{\beta}. \tag{1.2.41}$$

По лемме 8.1 [85, Глава III],

$$\|u-a\|_2 \le C_7(\|Mu\| + \|u-a\|),$$

откуда получаем, что

$$\|u\|_2 \le C_7(\|Mu\| + \|a\| + \|u\|) + \|a\|_2. \tag{1.2.42}$$

Здесь постоянная C_7 зависит от n, m_1, m_2, $\max_{x\in\bar{\Omega}}|(m_{ij})_{x_r}|$, $i,j,r = 1,2,...,n$, mesΩ. Согласно теореме 5.1 [87, Глава 2] для a справедливо неравенство

$$\|a\|_2 \le c_0\Big\{\|\sigma\gamma(u)\|_{1/2} + \|\tilde{\beta}\|_{1/2} + \|a\|_1\Big\}. \tag{1.2.43}$$

с константой $c_0 > 0$, зависящей от n, m_1, m_2, $\max_{x\in\bar{\Omega}}\Big|(m_{ij})_{x_r}\Big|$, $i,j,r = 1,2,...,n$, mesΩ. По теореме вложения, а также в силу предположения (ii) теоремы 1.2.2 и (1.2.14)

$$\|\sigma\gamma(u)\|^2_{1/2} \le C_8\|\sigma\gamma(u)\|^2_1 \le 4C_8\sigma_1^2\int\limits_\Omega \big(\nu_2^2|u|^{2q-4} + \nu_3^2\big)\big(|u|^2 + |\nabla u|^2\big)dx \le$$

$$\le 4C_8\sigma_1^2\Big\{c_q^{2q-2}\nu_2^2\|u\|_1^{2q-2} + \nu_2^2\|\nabla u\|^2_{L^{2q-2}(\Omega)}\|u\|^{2q-4}_{L^{2q-2}(\Omega)} + \nu_3^2 C(\eta m_1)^{-1}\Big\} \le$$

$$\le 4C_8\sigma_1^2\left[\nu_2^2\Big(\max\Big\{c_q^2, C(\eta m_1)^{-1}\Big\}\Big)^{q-1} + \nu_3^2 C(\eta m_1)^{-1}\right]\big(1 + \|\nabla u\|^2_{L^{2q-2}(\Omega)}\big) \equiv$$

$$\equiv C_8 C_9^2(1 + \|\nabla u\|^2_{L^{2q-2}(\Omega)}).$$

Здесь $\sigma_1 = \|\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, c_q – константа вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L^{2q-2}(\partial\Omega)$, C_8 – постоянная вложения $W_2^1(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Для оценки $\|\nabla u\|_{L^{2q-2}(\Omega)}$ воспользуемся неравенством [85, Глава 2]

$$\|\nabla v\|^2_{L^{2q-2}(\Omega)} \le \varepsilon \sum_{i,j=1} \|v_{x_i x_j}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \tag{1.2.44}$$

справедливым для любого $v \in W_2^2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Это даст

$$\|\sigma\gamma(u)\|_1 \leq C_8^{1/2} C_9 \Big(1 + \varepsilon^{1/2}\|u\|_2 + c_\varepsilon^{1/2}\|u\|_1\Big). \tag{1.2.45}$$

Далее, для того, чтобы оценить $\|a\|_1$, умножим уравнение (1.2.41) на a в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям с учетом граничного условия. Получим соотношение

$$(Ma, a) = \langle Ma, a\rangle_{1,M} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\gamma(u) a ds - \int\limits_{\partial\Omega} \tilde{\beta} a ds = 0,$$

из которого в силу (1.2.1), (1.2.14) и теоремы вложения следует, что

$$\|a\|_1 \leq C_{10} m_1^{-1}, \tag{1.2.46}$$

где положительная постоянная C_{10} зависит от c, q, c_q, $\bar{\sigma}$, η, C, ν_i, $i = 1, 2, 3$, $\|\tilde{\beta}\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Ввиду (1.2.43), (1.2.45) и (1.2.46)

$$\|a\|_2 \leq c_0 C_8^{1/2} C_9 (1 + \varepsilon^{1/2}\|u\|_2 + c_\varepsilon^{1/2}\|u\|_1) + c_0\|\tilde{\beta}\|_{1/2} + c_0 C_{10} m_1^{-1}.$$

Таким образом, применяя это неравенство к (1.2.42) приходим к соотношению

$$\|u\|_2 \leq C_7(\|Mu\| + \|u\| + \|a\|) + c_0 C_8^{1/2} C_9 (1 + \varepsilon^{1/2}\|u\|_2 + + c_\varepsilon^{1/2}\|u\|_1)$$

$$+ c_0(C_{10} m_1^{-1} + \|\tilde{\beta}\|_{1/2}).$$

В силу определения $\tilde{\beta}$, (1.2.14), (1.2.33) и (1.2.46), из последнего неравенства при $\varepsilon = (2c_0 C_8^{1/2} C_9)^{-1}$ вытекает, что

$$\|u\|_2 \leq 2C_7 \big(e^T \eta^{-1}\big)^{1/2} \big[\|f\|_{L^2(Q_T)} + \eta^{1/2}\|Mu_0\|\big] + 2c_0\|\tilde{\beta}\|_{1/2} + C_{11}, \tag{1.2.47}$$

где положительная постоянная C_{11} зависит от η, T, m_1, c_0, C, C_i, $i = 7, 8, 9, 10$.

2) Перейдем к оценке u_t в $W_2^2(\Omega)$. Из (1.2.2), (1.2.27) и (1.2.40) следует, что

$$\eta\|Mu_t\| \leq \|f\| + \|u_t\| + K\|Mu\| \leq \|f\| + (2\tilde{C})^{1/2} +$$

$$+ K\eta^{-1/2} \left(\|f\|_{L^2(Q_T)} + \eta^{1/2}\|Mu_0\| + \big(KC\eta^{-1}\big)^{1/2}\right) e^{T/2} \tag{1.2.48}$$

почти всюду на $[0, T]$. Производная u_t удовлетворяет неравенству аналогичному (1.2.42). А именно,

$$\|u_t\|_2 \leq C_7(\|Mu_t\| + \|a_t\| + \|u_t\|) + \|a_t\|_2 \tag{1.2.49}$$

почти для всех $t \in [0,T]$, где a_t – решение задачи

$$Ma_t = 0, \quad \frac{\partial a_t}{\partial \bar{N}}\Big|_{\partial\Omega} = \sigma(x)(\gamma(u))_t|_{\partial\Omega} + \tilde{\beta}_t, \quad \tilde{\beta}_t = -\frac{k(t)}{\eta}\tilde{\beta} + \beta. \tag{1.2.50}$$

Докажем, что $\sigma(x)(\gamma(u))_t \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Действительно, как показано выше, $u \in C([0,T]; W_2^2(\Omega))$. По теореме вложения это влечет непрерывность u в $\overline{Q}_T$ при $n < 4$. Следовательно, существует константа $\gamma_0 > 0$ такая, что $|\gamma''(u)| \le \gamma_0$. Если $n = 4$, то в соответствии с условиями теоремы $\gamma_0 = \nu_4$. Поэтому согласно теореме вложения и в силу (1.2.14), (1.2.44) и (1.2.47)

$$\|\sigma(\gamma(u))_t\|_{1/2}^2 \le C_8\sigma_1\|(\gamma(u))_t\|_1^2 = C_8\sigma_1\|\gamma_u'(u)u_t\|_1^2 \le$$

$$\le 4C_8\sigma_1 \int\limits_\Omega \Big\{(\nu_2|u|^{q-2} + \nu_3)^2(u_t^2 + |\nabla u_t|^2) + \gamma_0 u_t^2|\nabla u|^2\Big\}dx \le$$

$$\le 4C_8\sigma_1\Big\{\gamma_0 c_1^4\|u_t\|_1^2\|u\|_2^2 + (\nu_2 c_q^{q-1}\|u\|_1^{q-2}\|u_t\|_1 + \nu_3\|u_t\|)^2 +$$

$$+2\nu_2 c_q^{2q-4}\|u\|_1^{2q-4}(\varepsilon\|u_t\|_2^2 + c_\varepsilon\|u_t\|_1^2) + 2\nu_3\|u_t\|_1^2\Big\} \le$$

$$\le C_{12} + C_{13}(\varepsilon\|u_t\|_2^2 + c_\varepsilon\|u_t\|_1^2). \tag{1.2.51}$$

Здесь положительные постоянные C_{12} и C_{13} зависят от η, m_1, q, ν_2, ν_3, γ_0, σ_1, c_1, C, $\tilde{C}$, C_8, C_{11}, $\|f\|_{L^2(Q_T)}$, $\|Mu_0\|$, $\|\tilde{\beta}\|_{L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))}$. Ввиду (1.2.51) согласно теореме 5.1 [87, Глава 2] a_t удовлетворяет неравенству

$$\|a_t\|_2 \le c_0\Big\{\|\sigma(\gamma(u))_t\|_{1/2} + \frac{K}{\eta}\|\tilde{\beta}_t\|_{1/2} + \|a_t\|_1\Big\} \le$$

$$\le c_0\Big\{C_{12}^{1/2} + C_{13}^{1/2}(\varepsilon^{1/2}\|u_t\|_2 + c_\varepsilon^{1/2}\|u_t\|_1) + \frac{K}{\eta}\|\tilde{\beta}_t\|_{1/2} + \|a_t\|_1\Big\}. \tag{1.2.52}$$

Применяя к задаче (1.2.50) рассуждения, приведшие к (1.2.46), можно получить аналогичное соотношение для a_t. А именно, умножим (1.2.50) на a_t в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям в левом члене и оценим интегралы по границе $\partial\Omega$ с помощью теоремы вложения и неравенства Гёльдера. Это даст

$$m_1\|a_t\|_1^2 \le \bar{\sigma}\int\limits_{\partial\Omega}(\nu_2|u|^{q-2} + \nu_3)|u_t||a_t|ds + c\|\tilde{\beta}_t\|_{L^2(\partial\Omega)}\|a_t\|_1 \le$$

$$\le \frac{1}{2m_1}\Big[\bar{\sigma}\nu_2 c_q^q\|u\|_1^{q-2}\|u_t\|_1 + c\big(K\eta^{-1}\|\tilde{\beta}_t\|_{L^2(\partial\Omega)} + c\bar{\sigma}\nu_3\|u_t\|_1\big)\Big]^2 +$$

$$+\frac{m_1}{2}\|a_t\|_1^2 \le \frac{C_{14}^2}{2m_1} + \frac{m_1}{2}\|a_t\|_1^2$$

ввиду (1.2.1), (1.2.14) и (1.2.15). Поэтому

$$\|a_t\|_1 \le \frac{C_{14}}{m_1} \tag{1.2.53}$$

для любого $t \in [0,T]$. Таким образом, из (1.2.48), (1.2.49), (1.2.52), (1.2.53) и определения $\tilde{\beta}$ следует, что

$$\|u_t\|_2 \le C_{15} + c_0(C_{13}\varepsilon)^{1/2}\|u_t\|_2 + 2(c_\varepsilon\tilde{C})^{1/2}(\eta m_1)^{-1/2}.$$

Здесь положительные постоянные C_{14} и C_{15} зависят от η, c, c_0, T, K, m_1, $\bar{\sigma}$, C, $\tilde{C}$, C_8, C_{12}, $\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$, $\|\tilde{\beta}_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}$. Полагая $\varepsilon = 1/(4c_0^2C_{13})$ в последнем неравенстве, приходим к оценке

$$\|u_t\|_2 \le 2C_{15} + 4(c_\varepsilon\tilde{C})^{1/2}(\eta m_1)^{-1/2},$$

которая гарантирует, что $u_t \in L^\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$. Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. Теоремы 1.2.2, 1.2.3 и 1.2.4 остаются верными при $n = 1$. В этом случае норма $\|\cdot\|_B$ эквивалентна норме $W_2^1(\Omega)$. Кроме того, при выводе оценок для решения задачи 1.1 следует использовать вложение $W_2^1(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

Замечание 1.2.2. При $\gamma(u) = u$ или $\sigma(x) \equiv 0$ утверждения теоремы 1.2.4 остаются справедливыми для любого $n \ge 1$. В первом случае $\gamma'_u = 1$ $\gamma''_{uu} = 0$. Второй случай соответствует линейному граничному условию типа Неймана.

1.3 Теоремы существования и единственности для уравнений с немонотонными операторами

Исследования уравнений и систем с немонотонными нелинейностями ведутся с 80-х годов прошлого века. В работе [56] А.И.Кожанов доказал существование обобщенного решения первой и второй краевых задач для уравнения вида

$$(u + \eta A(\psi_1(u)))_t + B(u) = f(t,x,u),$$

с $B(u) = A(\psi_2(u))$, где A – линейный эллиптический оператор, при условии, что функции $\psi_i(\xi)$, $i = 1,2$, трижды непрерывно дифференцируемы, $\psi_1'(\xi) \ge \psi_0 > 0$ и $|\psi_2'(\xi)| \le K\psi_1'(\xi)$ (ψ_0 и K – постоянные). М.Бохм и Р.Е.Шоуолтер в [169, 170] исследовали корректность краевой задачи для аналогичного уравнения, моделирующего нелинейную фильтрацию в трещиноватой среде, где $A = -\Delta$, $B(u) = -div\{k(u)\nabla\alpha(u)\}$. В [170] доказано существование обобщенного решения краевой задачи в предположении, что $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1$ и $\alpha(s)$ липшиц-непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. При некоторых дополнительных условиях установлена единственность данного решения и доказана теорема сравнения. В [164]–[166] найдены достаточные условия существования неотрицательных решений начально-краевой задачи для такого уравнения в случае одной пространственной переменной, где $B(u) = -(\varphi(u))_{xx}$, $x \in (\xi_1, \xi_2)$, с ограниченными [165] и полиномиальными нелинейностями [166], а также при логарифмическом росте функций ψ_1 и φ [164].

В данном параграфе речь пойдет о краевых задачах для нелинейного уравнения фильтрации, неразрешенного относительно производной по времени, операторы которого немонотонны в банаховых пространствах. Однако эти операторы сохраняют монотонность в специальном смысле на некоторых подмножествах банаховых пространств, что позволяет доказать существование и единственность решения задач на таких подмножествах при более общих предположениях относительно нелинейностей уравнения.

Пусть задача рассматривается снова в некоторой области $\Omega \subset R^n$, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$. Так же, как и выше, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω и $Q_T = \Omega\times(0,T)$ - цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Определим снова оператор $M : \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega)$ вида

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I, \tag{1.3.1}$$

где $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ - матрица функций $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $m(x)$ - скалярная функция, а I - тождественный оператор, и рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.2. При заданных функциях $\psi(\rho)$, $k(t)$, $f(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$ и постоянной η требуется найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$(u + \eta M\psi(u))_t + k(t)M\psi(u) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.3.2}$$

и краевым условиям

$$(u + \eta M\psi(u))\Big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.3.3}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in S_T, \tag{1.3.4}$$

В случае одной пространственной переменной разрешимость задачи 1.2 исследована в [56].

В дальнейшем мы будем использовать обозначение, введенное в §1.2:

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_{1,M} = (\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2) + (m(x)v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega).$$

Введем ограничения на оператор M и функцию ρ.

XVII. M - сильно эллиптический оператор, т. е. существуют положительные константы m_1 и m_2 такие, что для любого $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ выполняются неравенства (1.2.1), то есть

$$m_1\|v\|_1^2 \leq \langle Mv, v\rangle_1 \leq m_2\|v\|_1^2 \tag{1.3.5}$$

и $m(x) \geq 0$ в Ω.

XVIII. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i,j,l = 1,2,\ldots,n$, и $m(x)$ ограничены в Ω и оператор M самосопряжен в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, т. е. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ for $i,j = 1,2,\ldots,n$.

XIX. Функция $\psi(\rho)$ отображает интервал $(-\infty,+\infty)$ на себя, непрерывна и строго монотонна, т. е.

$$(\psi(\rho_1) - \psi(\rho_2))(\rho_1 - \rho_2) > 0 \tag{1.3.6}$$

для любых $\rho_1, \rho_2 \in (-\infty,+\infty)$, $\rho_1 \neq \rho_2$. Отображение $\psi^{-1}(v)$ из $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ $(q \geq 2)$ деминепрерывно ($\psi^{-1}(\rho)$ – функция обратная к $\psi(\rho)$). Последнее означает, что из $v_n \to v$ слабо в $L^2(\Omega)$ следует, что $\psi^{-1}(v_n) \to \psi^{-1}(v)$ слабо в $L^q(\Omega)$ при $n \to \infty$.

Согласно предположению XIX обратная функция $\psi^{-1}(\rho)$ также непрерывна и строго монотонна, т. е.

$$(\psi^{-1}(\rho_1) - \psi^{-1}(\rho_2))(\rho_1 - \rho_2) > 0$$

для любых $\rho_1, \rho_2 \in (-\infty,+\infty)$, $\rho_1 \neq \rho_2$.

Определим функцию $a(t,x)$ как решение задачи Дирихле

$$M\psi(a) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad a\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x) \tag{1.3.7}$$

и введем дополнительное обозначение:

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_{1,M} = (\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2) + (m(x)v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega).$$

Однозначная разрешимость задачи (1.3.7), а также задачи

$$(u(0,x)+\eta M\psi(u(0,x)))\big|_{t=0}=U_0(x), \quad x\in\Omega, \qquad u(0,x)\big|_{\partial\Omega}=\beta(0,x), \quad (1.3.8)$$

гарантируется следующей леммой [247].

Лемма 1.3.1. *Пусть выполняются предположения XVII–XIX, $\eta>0$ – заданная постоянная. $f_1\in L^2(\Omega)$, $\psi(\beta_1)\in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, $g\in C(\overline{\Omega})$ и $g\geq 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Существует и притом единственное решение h задачи*

$$\eta M\psi(h)+g(x)h=f_1 \quad x\in\Omega, \qquad h\big|_{\partial\Omega}=\beta_1(x), \quad (1.3.9)$$

такое, что $\psi(h)\in W_2^1(\Omega)$.

2) *Если $\psi(\beta_1)\in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$ и*

$$|\psi(\rho)|\geq d|\rho|^p \quad (1.3.10)$$

для любого $\rho\in(-\infty,+\infty)$, где $p\geq 1$, $d>0$ – константы, то $h\in L^{2p}(\Omega)$ и $\psi(h)\in W_2^2(\Omega)$.

3) *Если $g\equiv 0$ и $\psi(\beta)\in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, то $\psi(h)\in W_2^2(\Omega)$. Кроме того, если $\beta_1\in L^\infty(\partial\Omega)$, то $h\in L^\infty(\Omega)$.*

Из леммы 1.3.1 следует обратимость оператора $I+\eta M\psi(\cdot)$ на множестве функций v, для которых $\psi(v)-\psi(a(0,x))\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким образом, краевые условия (1.3.3) и (1.3.4) однозначно определяют след функции u при $t=0$:

$$u|_{t=0}=u_0(x)$$

и $\psi(u_0)\in W_2^1(\Omega)$. В условиях утверждения 2 леммы 1.3.1 при $\beta_1=\beta(0,x)$ след u_0 принадлежит $L^p(\Omega)$ и $\psi(u_0)\in W_2^2(\Omega)$.

Класс решений задачи 1.2 определим по аналогии с [3, 4]. Под решением прямой задачи 1.2 будем понимать функцию u из класса $V=\{u|\psi(u)\in C([0,T];W_2^1(\Omega)),\ u+\eta M\psi(u)\in C^1([0,T];W_2^{-1}(\Omega))\}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\big\langle (u+\eta M\psi(u))_t, v\big\rangle_1+k(t)\big\langle M\psi(u),v\big\rangle_1=\big\langle f,v\big\rangle_{1,M}$$

для любого $v\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, тождеству $\big\langle u+\eta M\psi(u),v\big\rangle_{1,M}\big|_{t=0}=\big\langle U_0,v\big\rangle_1$ и граничному условию (1.3.4).

Теорема 1.3.2. *Пусть выполняются предположения XVII–XIX, η – положительная постоянная, $\partial\Omega \subset C^2$, $k \in L^\infty(0,T)$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\psi(\beta) \in C^1([0,T]; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Задача 1.2 имеет единственное решение $u \in V$.*

2) *Если дополнительно $\psi(\beta) \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ и для любого $\rho \in (-\infty, +\infty)$ выполняется неравенство (1.3.10) с некоторыми постоянными $c > 0$ и $p \geq 1$, то $u \in W = \{v \,|\, \psi(v) \in L^\infty(0,T; W_2^2(\Omega)),\ v \in L^\infty(0,T; L^{2p}(\Omega)), (v + \eta M\psi(v))_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\}$.*

Доказательство. 1) Введем функцию $\tilde{\psi} = \psi(u) - \psi(a)$ и перепишем задачу (1.3.2)–(1.3.4) в терминах функции $\tilde{\psi}$.

$$\left[\psi^{-1}(\tilde{\psi} + \psi(a)) - a + \eta M\tilde{\psi}\right]_t + k(t)M\tilde{\psi} = f - a_t, \tag{1.3.11}$$
$$\left[\psi^{-1}(\tilde{\psi} + \psi(a)) - a + \eta M\tilde{\psi}\right]\Big|_{t=0} = U_0 - a(0,x), \quad \tilde{\psi}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3.12}$$

В условиях теоремы нелинейный оператор $\tilde{M}$, отображающий пространство $L^\infty([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ в $L^\infty([0,T]; W_2^{-1}(\Omega))$ по правилу $\tilde{M}v = \psi^{-1}(v + \psi(a)) - a + \eta M v$, радиально непрерывен и сильно монотонен. Действительно, ввиду (1.3.5) и (1.3.6) для любых $v_1, v_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left\langle \tilde{M}(v_1) - \tilde{M}(v_2), v_1 - v_2 \right\rangle_1 = \eta\left\langle M v_1 - M v_2, v_1 - v_2\right\rangle_1 +$$
$$+\left(\psi^{-1}(v_1 + \psi(a)) - \psi^{-1}(v_2 + \psi(a)), v_1 - v_2\right) \geq \eta m_1 \|v_1 - v_2\|_1^2.$$

Тогда по теореме 2.2 [32, Глава 3] задача (1.3.11)–(1.3.12) имеет единственное решение $\tilde{\psi} \in C([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и $\tilde{M}\tilde{\psi} \in C^1([0,T]; W_2^{-1}(\Omega))$. Следовательно, $\psi(u) \in C([0,T]; W_2^1(\Omega))$ и $u + \eta M\psi(u) \in C^1([0,T]; W_2^{-1}(\Omega))$. В силу предположения XIX задача 1.2 также имеет единственное решение $u \in V$.

Получим оценку нормы $\psi(u)$ в $C([0,T]; W_2^1(\Omega))$. Для этого проинтегрируем (1.3.2) по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq T$, и умножим результат на $\psi(u) - \psi(a)$ в смысле отношения двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$. В силу (1.3.11) и

(1.3.12) это даст:

$$(u-a,\psi(u)-\psi(a))+\eta\Big\langle M(\psi(u)-\psi(a)),\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1=$$

$$=-\Big\langle M\int\limits_0^\tau k(t)(\psi(u)-\psi(a))dt,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1+$$

$$+\Big\langle U_0-a_0,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1+\Big\langle\int\limits_0^\tau(f-a_t)dt,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1, \qquad (1.3.13)$$

где $a_0(x)=a(0,x)$. Оценим правую часть последнего соотношения с помощью неравенства Коши.

$$\Big|-\Big\langle M\int\limits_0^\tau k(t)(\psi(u)-\psi(a)dt,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1+$$

$$+\Big\langle\int\limits_0^\tau(f-a_t)dt,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1+\Big\langle U_0-a_0,\psi(u)-\psi(a)\Big\rangle_1\Big|\le$$

$$\le\frac{m_2^2\bar{k}^2T}{\eta m_1}\int\limits_0^\tau\Big\|\psi(u)-\psi(a)\Big\|_1^2dt+\frac{\eta m_1}{2}\|\psi(u)-\psi(a)\|_1^2+$$

$$+\frac{1}{\eta m_1}\Big[\|U_0-a_0\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}+T\int\limits_0^\tau\Big\|f-a_t\Big\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}dt\Big] \qquad (1.3.14)$$

где $\bar{k}=\max_{t\in[0,T]}|k(t)|$.

В силу (1.3.5), (1.3.6), (1.3.14) и леммы Гронуолла из (1.3.13) следует неравенство

$$\|\psi(u)-\psi(a)\|_1^2\le\frac{1}{\eta^2m_1^2}\Big[\|U_0-a_0\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}+$$

$$+T\int\limits_0^T\Big\|f-a_t\Big\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}dt\Big]\exp\left(\frac{m_2^2\bar{k}^2T^2}{\eta^2m_1^2}\right)\equiv C_1 \qquad (1.3.15)$$

или

$$\|\psi(u)\|_1\le C_1^{1/2}+\|\psi(a)\|_1. \qquad (1.3.16)$$

2) Если имеет место (1.3.10), то в силу (1.3.16) получаем, что

$$\|u\|_{L^{2p}(\Omega)}\le\frac{1}{d}\Big(C_1^{1/2}+\|\psi(a)\|\Big)^{1/p}, \qquad (1.3.17)$$

т. е. $u \in L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))$. Далее, интегрируя (1.3.2) по t от 0 до τ, $0<\tau\le T$, и умножая на $M\psi(u)$ скалярно в $L^2(\Omega)$, приходим к соотношению

$$\eta\|M\psi(u)\|^2 = -(u, M\psi(u)) + (U_0, M\psi(u)) + \Big(\int\limits_0^\tau f dt, M\psi(u)\Big)$$
$$-\Big(\int\limits_0^\tau k(t)M\psi(u)dt, M\psi(u)\Big). \quad (1.3.18)$$

Оценим правую часть этого соотношения с помощью неравенства Коши. Ввиду (1.3.17) это даст:

$$-(u,\psi(u)) + (U_0, M\psi(u)) + \Big(\int\limits_0^\tau f dt, M\psi(u)\Big) - \Big(\int\limits_0^\tau M\psi(u)dt, M\psi(u)\Big) \le$$
$$\le \frac{1}{\eta}\Big((\mathrm{mes}\Omega)^{(p-1)/(2p)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|U_0\| + T\|f\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\Big)^2 +$$
$$+\frac{\bar{k}^2T}{\eta}\int\limits_0^\tau \|M\psi(u)\|^2dt + \frac{\eta}{2}\|M\psi(u)\|^2. \quad (1.3.19)$$

Соотношения (1.3.18) и (1.3.19) приводят к неравенству

$$\|M\psi(u)\| \le \frac{\sqrt{2}}{\eta}\big((\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{p-1}{2p}}\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|U_0\| + T\max_{t\in[0,T]}\|f\|\big)e^{\frac{\bar{k}^2T}{2\eta^2}} \equiv C_2. \quad (1.3.20)$$

В силу (1.3.15), (1.3.20) и неравенства [87, Глава 2]

$$\|v\|_2 \le \chi(\|Mv\| + \|v\|_1) \quad (1.3.21)$$

для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$, где константа χ зависит от n, m_1, $\mathrm{mes}\Omega$, получаем оценку

$$\|\psi(u)\|_2 \le \chi(C_2 + C_1^{1/2}) + \|\psi(a)\|_2 \equiv C_2'.$$

Таким образом, $M\psi(u) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ и $\psi(u)\in L^\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$. Из (1.3.2) следует,что $(u+\eta M\psi(u))_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Теорема доказана.

Замечание 1.3.1. Условия теоремы 1.3.2, при которых доказано утверждение 1), избыточны. Оно остается справедливым, если $f\in L^\infty([0,T];W_2^{-1}(\Omega))$, $U_0\in W_2^{-1}(\Omega)$, а граница $\partial\Omega$ является кусочно гладкой.

В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение фильтрации в трещиноватой среде [169]

$$(u_t + \varepsilon\mu B_u(u))_t + B_u(\zeta(u)) = 0. \qquad (1.3.22)$$

Здесь u – концентрация жидкости в порах, $B_u = -(1/\mu)\mathrm{div}(l(u)\nabla)$ и μ – коэффициент вязкости жидкости. Зависимость проницаемости среды $l(u)$ от концентрации жидкости в порах типична для некоторых видов горных пород. Для слабо сжимаемых жидкостей можно полагать $\zeta(u) = k(t)u$, где коэффициент $k(t)$ характеризует гидравлические свойства трещиноватой среды. В этом случае мы приходим к уравнению (1.3.2), в котором $M = -\Delta$, $\eta = \varepsilon\mu$, $\psi(u) = \int_0^u l(z)dz$, $f \equiv 0$. Проницаемость $l(u)$ является непрерывной невозрастающей положительной функцией давления. Кроме того, $l(u)$ по существу постоянна в зоне насыщения, т. е. когда давление в порах и трещинах достигает максимума [169]. Это означает, что в зоне насыщения функция $\psi(u)$ становится линейной. При таких предположениях оператор M и функция $\psi(\rho)$ удовлетворяют ограничениям I–III и для задачи (1.3.3), (1.3.4), (1.3.22) справедлива теорема 1.3.2.

В [169], [170] доказана глобальная разрешимость первой краевой задачи для (1.3.22) при условии, что $\zeta(\rho)$ монотонна, дифференцируема и липшиц-непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, а значит, имеет ограниченную производную. Кроме того, оператор B_u предполагается невырожденным в том смысле, что $0 < l_0 \leq l(\rho) \leq l_1$ на $(-\infty, +\infty)$, где l_0 и l_1 - константы. В [274], найдены достаточные условия существования неотрицательного решения u краевой задачи для (1.3.22) с комбинированными граничными условиями (разного рода на разных частях границы) в случае, когда $l(\rho) = O(\rho^{\beta})$ и $\zeta(\rho) = O(\rho^{-\lambda})$ при $\rho \to 0$, причем $l(\rho)$ и $\zeta(\rho) \cdot l(\rho)$ могут обращаться в нуль при $\rho = 0$.

Теорема 1.3.2 является продолжением результатов [169], [170] и [274] для (1.3.22). С одной стороны, она справедлива для (1.3.22) при более жестком ограничении на $\zeta(\rho)$. С другой стороны, это ограничение позволило найти достаточные условия не только глобальной разрешимости, но и единственности решения, причем в более широком классе и при более общих предположениях относительно $\psi(\rho)$.

1.4 Теоремы сравнения для уравнений соболевского типа

Специфической особенностью уравнений соболевского типа является тот факт, что в общем случае решения таких уравнений не удовлетворяют принципу максимума. Ранделл и Стэчер [288] показали, что при некоторых начальных и граничных данных решение первой краевой задачи для линейного уравнения

$$(I + L)u_t + Lu = f, \tag{1.4.1}$$

оставаясь неотрицательным на боковой поверхности цилиндра Q_T, и при $t = 0$, может принимать отрицательные значения во внутренних точках Q_T при условии что дифференциальный оператор L второго порядка удовлетворяет условию сильной эллиптичности и его коэффициенты не зависят от t. Однако в некоторых частных случаях при дополнительных ограничениях на исходные данные для уравнения (1.4.1) справедлива теорема сравнения и, как следствие, принцип максимума. Первые результаты такого рода были получены Тингом [310, 312]. В [312] доказан сильный принцип максимума для уравнения (1.4.1) при $L = -\Delta$ и $f \equiv 0$ с однородным граничным условием Дирихле. В [287, 288] были найдены достаточные условия на исходные данные первой краевой задачи для уравнения (1.4.1) с сильно эллиптическим оператором L второго порядка общего вида, при которых имеет место теорема сравнения. В частности, решение сохраняет знак в Q_T, если $u(0, x) + Lu(0, x) \geq 0$. Необходимым для неотрицательности решения является условие $u(0, x) \geq 0$ [302]. При соответствующих предположениях относительно исходных данных теорема сравнения верна для решения уравнения (1.4.1) с граничными условиями второго и третьего рода [192].

Теоремы сравнения остаются справедливыми и для некоторых типов нелинейных уравнений соболевского типа в случае первой краевой задачи [57, 59, 192], а также для линейного неоднородного уравнения при нелинейных граничных данных третьего рода. Как показано в [192], для решения задачи (1.3.2)–(1.3.4) с $M = -\Delta$ (Δ – лапласиан) справедлива теорема сравнения при условии, что $\gamma(r)/r$ не убывает при $r \geq 0$.

Результаты [192, 287, 288] могут быть обобщены на случай задачи (1.3.2)–(1.3.4) и уравнения

$$(\nu u + \eta(t)Mu)_t + k(t)Mu + g(t, x)u = f, \tag{1.4.2}$$

где M – оператор вида (1.3.1), а $\eta(t)$, $k(t)$ и $g(t,x)$ – заданные функции, а $\nu \geq 0$ – постоянная.

Рассмотрим сначала задачу для уравнения (1.4.2) в цилиндре Q_T с краевыми условиями

$$(\nu u + \eta(t) M u)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.4.3}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T. \tag{1.4.4}$$

Будем придерживаться обозначений, введенных в предыдущем параграфе.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполняются предположения XVII, XVIII, функция $u(t,x)$ – решение задачи (1.4.2)–(1.4.4) из $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Пусть также $f(t,x) \geq 0$ почти всюду в $\overline{Q}_T$, $U_0(x) \geq 0$ почти всюду в $\overline{\Omega}$, $\beta(t,x) \geq 0$ почти всюду на $\overline{S}_T$, $\eta(t) \geq \eta_0 > 0$, $k(t) \geq k_0 > 0$, $g(t,x) \leq \nu k(t)/\eta(t)$ при всех $(t,x) \in Q_T$ и $\nu \geq 0$. Тогда*

$$u(t,x) \geq 0 \tag{1.4.5}$$

почти для всех $(t,x) \in \overline{Q}_T$.

Доказательство. Множество $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ плотно в $W_2^2(\Omega)$, поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для гладкого решения задачи (1.4.2)–(1.4.4). Для решения из $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ неравенство (1.4.5) получается при замыкании пространства $C^1([0,T]; C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))$ в норме $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. При этом надо лишь учитывать, что оператор M, как отображение из $W_2^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$, ограничен.

Рассмотрим следующую итерационную схему:

$$\begin{cases} v^0 \equiv 0; \\ \left(\nu v^i + \eta M v^i\right)_t + \frac{k}{\eta}\left(\nu v^i + \eta M v^i\right) \; = f + \left(\frac{\nu k}{\eta} - g\right) v^{i-1}, \quad (t,x) \in Q_T, \\ (\nu v^i + \eta M v^i)\big|_{t=0} = U_0(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \\ v^i(t,x)|_{S_T} = \beta(t,x), \end{cases} \tag{1.4.6}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $b^\eta = b^\eta(t,x)$ – решение задачи $b^\eta + \eta M b^\eta = 0$, $b^\eta\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x)$. Для каждого i функция

$$\tilde{v}^i \equiv \left(v^i - b^\eta\right) \exp\left(\int_0^t \frac{k(\theta)}{\eta(\theta)}\, d\theta\right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\big(\nu\tilde{v}^i + \eta(t)M\tilde{v}^i\big)_t = \left[f + \left(\frac{\nu k(t)}{\eta(t)} - g\right)v^{i-1}\right]\exp\left(\int\limits_0^t \frac{k(\theta)}{\eta(\theta)}\,d\theta\right), \tag{1.4.7}$$

начальным данным (1.4.6$_3$) и граничному условию $\tilde{v}^i\big|_{\partial\Omega} = 0$. Интегрируя (1.4.7) по t на $(0,\tau)$, $0 < \tau \le T$ и действуя на результат оператором $(\nu I + \eta M)^{-1}$, получим

$$\tilde{v}^i(\tau,x) = (\nu I + \eta(\tau)M)^{-1}U_0(x) +$$

$$+\int\limits_0^\tau (\nu I + \eta(t)M)^{-1}\left[f + \left(\frac{\nu k(t)}{\eta(t)} - g\right)v^{i-1}\right]\exp\left(\int\limits_0^t \frac{k(\theta)}{\eta(\theta)}\,d\theta\right)dt. \tag{1.4.8}$$

В силу предположений теоремы, мы можем заключить из (1.4.8), что

$$v^i(t,x) \ge b^\eta(t,x) \ge 0 \tag{1.4.9}$$

для каждого $i = 1,2,3,\ldots$.

Так как $(\nu I + \eta M)^{-1}$ ограничен [85], интегральный оператор в правой части (1.4.8) является сжимающим отображением в норме $\max_{[0,T]}\{e^{-\sigma t}\|\cdot\|_2\}$ с некоторой положительной постоянной σ. Это гарантирует, что

$$v^i(t,x) \to v(t,x) \quad \text{in} \quad C([0,T];W_2^2(\Omega)) \qquad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Следовательно, $v(t,x)$ также удовлетворяет (1.4.9). Кроме того, для $v(t,x)$ справедливы условия (1.4.2)–(1.4.4). Поэтому $v = u$ почти всюду в Q_T и для u имеет место неравенство (1.4.9). Теорема доказана.

Для задачи (1.4.2)–(1.4.4) справедлива еще одна теорема, также относящаяся к теоремам сравнения.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполняются предположения XVII, XVIII для оператора M и функции $v_j \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega)$ являются решениями задач*

$$\begin{cases} v_{jt} + \eta M v_{jt} + M v_j + g_j(t)v_j = f_j, \\ (v_j + \eta M v_j)|_{t=0} = U_j(x), \quad v_j|_{\partial\Omega} = \beta_j(t,x), \quad j = 1,2. \end{cases} \tag{1.4.10}$$

Тогда если $g_2(t) \le g_1(t) \le \frac{1}{\eta}$ на $[0,T]$, $0 \le f_1 \le f_2$ почти всюду в $\overline{Q}_T$, $0 \le U_1(x) \le U_2(x)$ почти для всех $x \in \Omega$ и $0 \le \beta_1(t,x) \le \beta_2(t,x)$ почти для всех $(t,x) \in S_T$, то $0 \le v_1 \le v_2$ почти для всех $(t,x) \in \overline{Q}_T$.

Доказательство. В силу (1.4.10), функция $\bar v = v_2 - v_1$ является решением задачи

$$\begin{cases} \bar v_t + \eta M \bar v_t + M\bar v + g_2(t)\bar v = (g_1 - g_2)v_1 + f_2 - f_1, \\ (\bar v_i + \eta M \bar v)|_{t=0} = U_2 - U_1, \quad \bar v|_{\partial\Omega} = \beta_2 - \beta_1. \end{cases} \tag{1.4.11}$$

По теореме 1.4.1, $v_j \geq 0, j = 1, 2$, почти всюду в $\overline{Q}_T$. Следовательно, правая часть (1.4.11) неотрицательна. Поэтому согласно теореме 1.4.1, $\bar v \geq 0$ почти всюду в $\overline{Q}_T$. Теорема доказана.

Теперь обратимся к задаче (1.3.2)–(1.3.4). Будем считать выполненными все предположения предыдущего параграфа. Прежде всего следует отметить, что если $U_0 \geq 0$ в (1.3.3) почти всюду в Ω и $\beta(0, x) \geq 0$ в (1.3.4) почти всюду на $\partial\Omega$, то $u(0, x) \geq 0$. Строго говоря, справедлива следующая лемма.

Теорема 1.4.3. *Пусть выполняются условия леммы 1.3.1, $\eta > 0$ – заданная постоянная. Пусть также $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\psi(\beta) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Тогда для решения $u(0, x)$ задачи* (1.3.8) *справедливы следующие утверждения:*

1) *если $a(0, x) - U_0 \geq 0$ почти всюду в Ω, где a – решение задачи (1.3.7), то имеет место неравенство $u(0, x) \leq a(0, x)$ почти всюду в Ω;*

2) *если $U_0 \geq 0$ почти всюду в Ω и $\beta(0, x) \geq 0$ почти всюду в $\partial\Omega$, то $u(0, x) \geq 0$ почти всюду в Ω.*

Доказательство. 1) Пусть $w_0(x) = a_0(x) - u_0(x)$, где $a_0(x) = a(0, x)$, $u_0(x) = u(0, x)$. Ввиду (1.3.3) и (1.3.7),

$$-\eta \mathrm{div}(\mathcal{M}(x)(\nabla\psi(a_0) - \nabla\psi(u_0))) + \eta m(x)(\psi(a_0) - \psi(u_0)) + +w_0 = a_0 - U_0.$$

Умножим это уравнение на $\psi(\bar a) - \psi(u_0)$, где

$$\bar a = \begin{cases} u_0 & \text{если } u_0 \leq a_0, \\ a_0 & \text{если } u_0 > a_0, \end{cases}$$

в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене левой части. Это даст

$$\eta \int\limits_\Omega \Big[\Big(\mathcal{M}\nabla\big(\psi(\bar a) - \psi(u_0)\big), \nabla\big(\psi(\bar a) - \psi(u_0)\big) \Big)_R + m(\psi(\bar a) - \psi(u_0))^2 \Big] dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega (w_0 - a_0 + U_0)\big(\psi(\bar a) - \psi(u_0)\big) dx = 0.$$

В силу (1.3.5), (1.3.6) и неотрицательности $a_0 - U_0$ из последнего тождества следует неравенство

$$\eta m_1 \int\limits_{\Omega} \big(\nabla\psi(\bar{a}) - \nabla\psi(u_0)\big)^2 dx \leq 0,$$

из которого вытекает, что $\nabla\big(\psi(\bar{a}) - \psi(u_0)\big) = 0$. Согласно (1.3.4) и (1.3.7) $(\bar{a} - u_0)|_{\partial\Omega} = 0$. Поэтому $\bar{a} - u_0 = 0$, т. е. $u_0 \leq a_0$ почти всюду в Ω.

2) Введем функцию

$$\bar{u}_0 = \begin{cases} 0 & \text{если } u_0 < 0, \\ u_0 & \text{if } u_0 \geq 0, \end{cases}$$

Из (1.3.3) и определения $\bar{u}_0$ следует, что

$$-\eta \mathrm{div}(\mathcal{M}(x)(\nabla\psi(u_0) - \nabla\psi(\bar{u}_0)))\eta m\big(\psi(u_0) - \psi(\bar{u}_0)\big) + u_0 - \bar{u}_0 = \tilde{U}_0.$$

Здесь $\tilde{U}_0 = 0$ там, где $u_0 \geq 0$, и $\tilde{U}_0 = U_0$ в тех точках Ω, где $u_0 < 0$. Умножим это уравнение на $\psi(u_0) - \psi(\bar{u}_0)$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене левой части. В силу (1.3.5), (1.3.6) и неотрицательности U_0 из результирующего тождества получаем, что

$$\eta m_1 \int\limits_{\Omega} \big(\nabla\psi(u_0) - \nabla\psi(\bar{u}_0)\big)^2 dx \leq 0,$$

т. е. $\nabla\big(\psi(u_0) - \psi(\bar{u}_0)\big) = 0$. Согласно (1.3.4) $(u_0 - \bar{u}_0)|_{\partial\Omega} = 0$. Поэтому $u_0 - \bar{u}_0 = 0$, т. е. $u_0 \geq 0$ почти всюду в Ω. Теорема доказана.

Утверждение 2) теоремы 1.4.3 остается справедливым и для задачи (1.3.7).

Теорема 1.4.4. *Пусть выполняются предположения XVII–XIX и условия теоремы 1.3.2, гарантирующие существование решения $u \in W$ задачи (1.3.2)–(1.3.4). Предположим, что $k(t) \geq 0$ on $[0, T]$. Тогда следующие утверждения верны.*

1) *Если $f \geq 0$ почти всюду в Q_T, $U_0 \geq 0$ почти всюду в Ω и $\beta \geq 0$ почти всюду на S_T, то $u \geq 0$ почти для всех $(t, x) \in Q_T$.*

2) *Если $a_t - f \geq 0$ почти всюду в Q_T и $a(0, x) - U_0 \geq 0$ почти всюду в Ω, то $u \leq a$ почти для всех $(t, x) \in Q_T$.*

Доказательство. 1) В случае, когда $k(t) = const > 0$ и $\psi(\beta) \equiv 0$ утверждение доказано в [192]. Пусть теперь $k(t) \neq const$ и $\psi(\beta) \neq 0$. Умножим (1.3.2) на функцию $\exp\left(\frac{1}{\eta}\int_0^t k(\tau)d\tau\right)$ и перенесем первое слагаемое в правую часть полученного равенства. Это даст

$$\eta\frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\Big(\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\Big)M\psi(u)\Big) = \exp\Big(\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\Big)(f-u_t).$$

Переобозначив t через θ, проинтегрируем это соотношение по θ от 0 до t, $0 < t \leq T$. Интегрируя по частям по θ в члене, содержащем u_t, приходим к равенству

$$u+\eta M\psi(u) = U_0\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t kd\tau\Big)+\int\limits_0^t\Big(\frac{k}{\eta}u+f\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\theta^t kd\tau\Big)d\theta. \quad (1.4.12)$$

Рассмотрим итерационную схему:

$$u^i+\eta M\psi(u^i) = U_0\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\Big)$$

$$+\int\limits_0^t\Big(\frac{k(\theta)}{\eta}u^{i-1}+f\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\theta^t k(\tau)d\tau\Big)d\theta, \qquad (1.4.13)$$

$$u^i\big|_{S_T} = \beta(t,x), \quad i=1,2,...; \quad u^0=0. \qquad (1.4.14)$$

Пусть v^i и v – решения уравнений $Mv^i = u^i$ и $Mv = u$, соответственно, $v^i|_{S_T} = v|_{S_T} = 0$. Вычтем (1.4.12) из (1.4.13) на i-й итерации и умножим разность на $v^i - v$ в смысле скалярного поизведения $L^2(\Omega)$. После интегрирования по частям по пространственным переменным получим равенство

$$\big\langle M(v^i-v), v^i-v\big\rangle_1+\eta\big(\psi(u^i)-\psi(u), u^i-u\big)$$

$$=\Big\langle M\int\limits_0^t\frac{k(\theta)}{\eta}(v^{i-1}-v)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\theta^t k(\tau)d\tau\Big)d\theta, v^i-v\Big\rangle_1,$$

из которого в силу (1.3.6) следует, что

$$\|v^i-v\|_1 \leq \Big(\frac{K\sqrt{m_2}}{\eta m_1}\Big)^{i-1}\int\limits_0^t\int\limits_0^\theta ...\int\limits_0^{\xi_{i-2}}\|v^0-v\|_1 d\xi_{i-1}...d\xi_2 d\xi_1 d\theta$$

$$\leq \Big(\frac{\bar{k}T\sqrt{m_2}}{\eta m_1}\Big)^{i-1}\frac{T}{i!}\ vrai\max_{t\in[0,T]}\|v^0-v\|_1$$

или

$$vrai \max_{t\in[0,T]} \|v^i - v\|_1 \le \Big(\frac{\bar{k}T\sqrt{m_2}}{\eta m_1}\Big)^{i-1}\frac{T}{i!}\ vrai \max_{t\in[0,T]} \|v^0 - v\|_1. \qquad (1.4.15)$$

Последнее соотношение доказывает, что $v^i \to v$ в $L^\infty(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))$ и $u^i \to u$ в $L^\infty(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ при $i \to \infty$. Более того, $u \in L^{2p}(Q_T)$ согласно теореме 1.3.2. Поэтому для каждого $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ имеем неравенство

$$|(u^i - u, w)| = |\big\langle M(v^i - v), w\big\rangle_1| \le m_2\|v^i - v\|_1\|w\|_1,$$

которое ввиду (1.4.15) влечет за собой тот факт, что $u^i \to u$ слабо в $L^2(Q_T)$ при $i \to \infty$. В соответствии с утверждением 1) леммы 1.4.3 $u^i \ge 0$, $i = 1, 2, ...$. Следовательно, это неравенство остается верным и для u, т. е. $u \ge 0$ почти для всех $(t,x) \in Q_T$.

2) Пусть теперь выполняются гипотезы второго утверждения. Перепишем итерационную схему (1.4.13), (1.4.14) в виде

$$a - u^i + \eta M(\psi(a) - \psi(u^i)) = (a_0 - U_0)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k(\tau)d\tau\Big)$$

$$+\int\limits_0^t \Big(\frac{k(\theta)}{\eta}(a - u^{i-1}) + a_t - f\Big)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\theta^t k(\tau)d\tau\Big)d\theta,$$

$$(a - u^i)\Big|_{S_T} = 0, \quad i = 1, 2, ...; \quad u^0 = a.$$

Согласно утверждению 2) леммы 1.4.3 $u^i \le a$ почти для всех $(t,x) \in Q_T$, $i = 1, 2, ...$. Так как $u^i \to u$ слабо в $L^2(Q_T)$ при $i \to \infty$ и $a \in L^{2p}(Q_T)$, это неравенство остается справедливым для u почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

Перейдем к теореме сравнения в случае краевой задачи для уравнения (1.4.2) при $\eta(t) = \eta = constant$ и $g(t,x) \equiv 0$ с начальными данными (1.4.3) и граничным условием

$$\Big\{\eta\frac{\partial u_t}{\partial \overline{\overline{N}}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{N}}} + \sigma(x)(\eta u_t + k(t)u)\Big\}\Big|_{S_T} + k(t)\mu_1(t,x) = \mu_2(t,x), \qquad (1.4.16)$$

где $\sigma(x) \ge 0$ и $\mu_i(t,x)$ – заданные функции.

Будем предполагать, что оператор M удовлетворяет условию XVIII и следующему ограничению.

XVII$'$. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$, и $m(x)$ ограничена в Ω. M – сильно эллиптический оператор, то есть существуют положительные постоянные m_1 и m_2 такие, что для любого $v \in W_2^1(\Omega)$ и почти всех $x \in \Omega$

$$m_0\|v\|_1^2 \le \langle Mv, v\rangle_{1,M} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)uvdx \le m_1\|v\|_1^2. \qquad (1.4.17)$$

Существование и единственность решения задачи (1.4.2), (1.4.3), (1.4.16) с постоянным коэффициентом $k(t) \equiv k$ следует из результатов [304]. Следующая лемма обобщает этот результат на случай функции $k(t)$.

Лемма 1.4.5. 1) *Пусть выполняются предположения XVII$'$, XVIII, $\eta > 0$, $k \in C([0,T])$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ и $\mu_1, \mu_2 \in C^1([0,T]; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ задачи (1.4.2), (1.4.3), (1.4.16).*

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} v_t + G(v) = f, & (t,x) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = (I+\eta M)u_0, & x \in \Omega, \end{cases} \qquad (1.4.18)$$

где $v = (I + \eta M)u$, и оператор G отображает пространство $C([0,T]; L^2(\Omega))$ в себя,

$$G = k(t)M(I+\eta M)^{-1} \equiv \frac{k(t)}{\eta}\left(I - (I+\eta M)^{-1}\right).$$

Задача (1.4.18) разрешима тогда и только тогда, когда функция $u = (I + \eta M)^{-1}v$ является решением задачи (1.4.2),(1.4.3),(1.4.16). Поэтому утверждение леммы 1.4.5 будет доказано, как только мы установим существование и единственность решения задачи (1.4.18). Из условий леммы следует, что оператор G липшиц-непрерывен. Тогда согласно теореме 1.2 [32, Глава V], задача (1.4.18) имеет единственное решение $v \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$. Лемма доказана.

Теорема 1.4.6. *Пусть выполняются условия леммы* 1.4.5. *Пусть также $u(t,x) \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ – решение задачи (1.4.2),(1.4.3),(1.4.16), $f(t,x) \ge 0$ для почти всех $(t,x) \in \overline{Q}_T$, $u_0(x) \ge 0$ почти всюду в $\overline{\Omega}$, $k(t) \ge 0$ при $t \in [0,T]$, $\mu_1 \le 0$ и $\mu_2 \ge 0$ для почти всех $(t,x) \in S_T$. Тогда*

$$u(t,x) \ge u_0(x)\,\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k(\theta)d\theta\Big)$$

почти всюду в Q_T.

Доказательство. Введем функцию $v = u - u_0 \exp\big(-\frac{1}{\eta}\int_0^t k(\theta)d\theta\big)$. Она удовлетворяет уравнению

$$v + \eta M v = \int\limits_0^t \Big[f + \frac{k}{\eta}v\Big] \exp\Big(-\int\limits_\tau^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)d\tau + u_0 \exp\Big(-\int\limits_0^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big), \qquad (1.4.19)$$

почти всюду в Q_T и граничному условию

$$\Big[\frac{\partial v}{\partial \overline{N}} + \sigma(x)v\Big]\Big|_{S_T} = \frac{1}{\eta}\int\limits_0^t (\mu_2 - k(\tau)\mu_1) \exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\tau^t k\, d\theta\Big)d\tau. \qquad (1.4.20)$$

Определим также функции $v_1 = \min\{v, 0\}$ и $v_2 = \max\{v, 0\}$. В условиях теоремы $v_i \in C([0,T]; W_2^1(\Omega))$, $i = 1, 2$, и $v = v_1 + v_2$ почти всюду в Q_T. Умножим (1.4.19) на v_1 в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором члене левой части полученного уравнения. Ввиду (1.4.20) это дает

$$\|v_1\|^2 + \eta\langle M v_1, v_1\rangle_{1,M} + \eta\int\limits_{\partial\Omega} \sigma v_1^2 ds - \int\limits_\Omega \int\limits_0^t (f + \frac{k}{\eta}v_2) \exp\Big(-\int\limits_\tau^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)d\tau v_1 dx -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t (\mu_2 - k\mu_1) \exp\Big(-\int\limits_\tau^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)d\tau\, v_1 ds - \exp\Big(-\int\limits_0^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)\int\limits_\Omega u_0 v_1 dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \frac{k}{\eta}v_1 \exp\Big(-\int\limits_\tau^t \frac{k}{\eta}d\theta\Big)d\tau v_1\, dx.$$

В условиях теоремы из этого соотношения следует неравенство

$$\|v_1\|^2 \le C\int\limits_0^t \|v_1\|^2 d\tau$$

с константой $C > 0$, зависящей от T, η, $\max_{t\in[0,T]} k(t)$, откуда согласно лемме Гроноулла вытекает, что $v_1 = 0$, то есть, $v \ge 0$ почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

Глава 2. Обратные задачи для линейных уравнений фильтрации

Данная глава посвящена коэффициентным обратным задачам для линейных уравнений фильтрации. Рассматриваются возможные постановки краевых условий и условий переопределения, исследуется корректность некоторых новых коэффициентных обратных задач для уравнений соболевского типа, а также связанных с ними обратных задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Исследуются свойства решений некоторых из обратных задач для уравнений соболевского типа, а именно, зависимость от исходных данных задачи (устойчивость), гладкость, асимптотическое поведение. Обсуждаются вопросы регуляризации параболических обратных задач с помощью соответствующих задач для уравнений соболевского типа.

2.1 Особенности постановки обратных задач для уравнений соболевского типа

В предыдущей главе были рассмотрены некоторые уравнения третьего порядка и краевые задачи для них. Поскольку физические процессы, моделируемые уравнениями такого типа, протекают, как правило, в ограниченных областях, постановки краевых задач для них должны включать в себя начальные и граничные условия, а обратные задачи – еще и условия переопределения. В общем случае постановки краевых задач для уравнений такого типа отличаются от соответствующих задач для классических уравнений второго порядка. Для того, чтобы сформулировать эти условия математически в наиболее общем виде, обратимся к модели фильтрации слабо сжимаемых жидкостей в трещиноватых средах [15]:

$$\begin{cases} \nu\Delta u_1 + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \\ \mu(m_0 d_1 + d_2)u_{2t} + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где $u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$ – давление жидкости в трещинах и порах соответственно; d_1 и d_2 – коэффициенты сжимаемости жидкости и блоков; m_0 – пористость блоков при стандартном давлении; μ – вязкость жидкости; ν – коэффициент проницаемости трещин. Безразмерный коэффициент α характеризует интенсивность обмена жидкостью между блоками и трещинами и зависит от проницаемости блоков. В общем случае все коэффициенты системы (2.1.1) являются функциями переменных t и x. В данном параграфе для простоты будем предполагать, что коэффициенты могут зависеть только от времени t.

Исключая u_2 из (1.1), мы приходим к уравнению соболевского типа для u_1.

$$u_{1t} - \nu\Delta((\eta u_1)_t + ku_1) = 0 \qquad \left(k = \frac{1}{\mu(m_0 d_1 + d_2)}, \quad \eta = \frac{1}{\alpha}\right). \tag{2.1.2}$$

Аналогично, исключив u_1 из (1.1), получим уравнение для давления в порах u_2:

$$u_{2t} - \nu\Delta(\eta u_{2t} + ku_2) = 0. \tag{2.1.3}$$

Ясно, что если коэффициент η не зависит от t, то уравнения (2.1.2) и (2.1.3) для u_1 и u_2 совпадают. Кроме того, если η является дифференцируемой функцией переменной t, уравнение (2.1.3) можно переписать в форме

$$u_{2t} - \nu\Delta((\eta u_2)_t + \tilde{k}u_2) = 0$$

аналогичной (2.1.2), где $\tilde{k} = k - \eta'$.

Уравнение фильтрации в трещиноватой среде, например, влагопереноса в почве может включать в себя также младшие члены. [30, 158]. В частности, при наличии абсорбции (поглощения) жидкости уравнение имеет вид:

$$u_t - \nu\Delta((\eta u)_t + ku) + gu = 0,$$

где g – коэффициент абсорбции.

2.1.1 Краевые условия

Математическая формулировка краевых условий для уравнений (2.1.2) и (2.1.3) вытекает из следующих соображений.

Пусть задача рассматривается в некотором объеме трещиноватой среды, т. е. области $\Omega \subset R^3$, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, T - действительное число и $Q_T = \Omega \times (0, T)$ – цилиндр в $\mathbf{R}^4$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0, T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T - через (t, x).

Система (2.1.1) не содержит производной u_1 по времени, поэтому начальное условие можно поставить только для u_2:

$$u_2(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.1.4}$$

где $u_0(x)$ – заданная функция. Если коэффициенты (2.1.1) и функции u_1 и u_2 достаточно гладкие, то первое уравнение системы (2.1.1) выполняется при $t = 0$. Тогда в силу (2.1.4) имеет место равенство

$$(-\eta\nu\Delta u_1(0,x) + u_1(0,x))|_{t=0} = u_0(x),$$

которое можно рассматривать как начальное условие для u_1 [15].

С другой стороны, первое уравнение системы (2.1.1) является эллиптическим относительно u_1, что позволяет задать граничное условие на u_1. Это может быть условие Дирихле

$$u_1|_{S_T} = \beta_1(t,x),$$

Неймана

$$\nu\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_T} = \beta_2(t,x),$$

или смешанное условие

$$\Big[Au_1 + B\nu\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\Big]\Big|_{S_T} = \beta_3(t,x),$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а β_i, $i = 1,2,3$, A и B – заданные функции переменных t и x.

При соответствующей гладкости коэффициентов (2.1.1) и функций u_1 и u_2 из второго уравнения (2.1.1) и граничных условий для u_1 получаем соответствующие граничные условия для u_2:

$$\nu\big(\eta u_{2t} + ku_2\big)\big|_{S_T} = k\beta_1(t,x),$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\eta u_{2t} + ku_2)\Big|_{S_T} = k\beta_2(t,x),$$

или

$$\Big[A(\eta u_{2t} + ku_2) + B\nu\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}((\eta u_{2t} + ku_2)\Big]\Big|_{S_T} = k\beta_3(t,x).$$

Итак, представленные выше соображения приводят к следующему выводу. Если все коэффициенты уравнения трещиноватой среды

$$u_t - \nu\Delta((\eta u)_t + ku) = 0 \tag{2.1.5}$$

известны, то для этого уравнения можно поставить четыре основные краевые задачи.

Первая задача: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (2.1.5) в Q_T, начальным данным

$$(u - \eta\nu\Delta u)|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.1.6}$$

и граничному условию

$$u|_{S_T} = g_1(t,x). \tag{2.1.7}$$

Вторая задача: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (2.1.5) в Q_T, начальным данным (2.1.6) и граничному условию

$$\left[Au + B\nu\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]\Big|_{S_T} = g_2(t,x). \tag{2.1.8}$$

Третья задача: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (2.1.5) в Q_T, начальным данным

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.1.9}$$

и граничному условию

$$\big((\eta u)_t + ku\big)\big|_{S_T} = g_3(t,x). \tag{2.1.10}$$

Четвертая задача: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (2.1.5) в Q_T, начальным данным (2.1.9) и граничному условию

$$\left[((\eta u)_t + ku) + B\nu\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}((\eta u)_t + ku)\right]\Big|_{S_T} = g_4(t,x). \tag{2.1.11}$$

Здесь g_i, $i = 1,2,3,4$, – заданные функции на $(0,T) \times \partial\Omega$.

Вторая и четвертая задачи включают в себя, как частный случай, задачи с граничными условиями типа Неймана при $A = 0$. Условие аналогичное (2.1.10) использовалось в [158] для моделирования неравновесной фильтрации воды и нефти в пористой среде. Физическое обоснование граничного условия (2.1.11) при $A = 0$ дано в [15]. В этой же работе предложена другая постановка граничного условия смешанного типа. А именно,

$$\left[u + B\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left((\eta u)_t + ku\right)\right]\Big|_{S_T} = g_4(t, x).$$

2.1.2 Обратные задачи. Условия переопределения

Обратная задача отыскания неизвестных коэффициентов в (2.1.5) при любых из перечисленных выше краевых условиях является недоопределенной и требует дополнительной информации об искомой функции u в виде соответствующего условия переопределения.

Наибольший интерес с точки зрения приложений представляют задачи идентификации коэффициентов уравнения, потому что эти параметры определяют физические свойства среды. Исследование гидравлических свойств среды приводит к обратной задаче отыскания неизвестного коэффициента k в уравнении (2.1.5). При определении интенсивности обмена жидкостью между порами и трещинами возникает обратная задача идентификации неизвестного коэффициента η.

Для восстановления неизвестных коэффициентов, зависящих от t, можно использовать интегральное условие переопределения

$$\int\limits_{\Omega} u\rho(t, x)dx = H(t),$$

где $\rho(t, x)$ и $H(t)$ – заданные функции. Это условие характерно для процессов диффузии и описывает общую концентрацию вещества в смеси. Однако в случае фильтрации дополнительную информацию удается получить, как правило, только за счет данных точечного или интегрального типа на границе области. В частности, такой информацией может служить общий расход жидкости $\varphi(t)$ в каждый момент времени, например, нефти или грунтовых вод через некоторую поверхность $\Gamma \subset \partial\Omega$ [318]. Для трещиноватых сред характерно то, что течение жидкости осуществляется в основном по трещинам, так что скорость фильтрации жидкости по блокам пренебрежимо мала в сравнении со скоростью фильтрации жидкости по трещинам [15]. Если трещины достаточно узки, а скорости движения жидкости достаточно малы, то движение жидкости по трещинам подчиняется закону Дарси [68,112], согласно которому общий расход жидкости через поверхность Г равен интегралу

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

Поэтому дополнительную информацию о расходе жидкости можно представить в виде интегрального условия переопределения

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} ds = \varphi(t).$$

С другой стороны, используя данное соотношение, из второго уравнения (2.1.1) получаем, что расход жидкости в порах выражается как

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Big(\mu(m_0 d_1 + d_2) u_{2t} + \alpha u_2 \Big) \, ds = \alpha \varphi(t)$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \big(\eta (u_2)_t + k u_2 \big) \, ds = k \varphi(t). \tag{2.1.12}$$

Условие переопределения для u_1 можно переписать в аналогичном виде. А именно,

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \big((\eta u_1)_t + k u_1 \big) \, ds = (\eta \varphi(t))_t + k \varphi(t). \tag{2.1.13}$$

Следует заметить, что условие переопределения, заданное на границе области или ее части, должно быть независимо от граничных данных прямой задачи, то есть не должно следовать из них. Поэтому соотношения (2.1.12) и (2.1.13) подходят для задач с граничными условиями (2.1.7) или (2.1.10). Что касается задач с граничными условиями (2.1.8) и (2.1.11), здесь интегральное условие переопределения на границе должно быть связано со следом самой неизвестной функции, а не ее производной по нормали:

$$\int\limits_{\Gamma} u \, \omega \, ds = \psi(t)$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \big((\eta u)_t + k u \big) \omega \, ds = (\eta \psi(t))_t + k \psi(t),$$

где $\omega = \omega(t, x)$ и $\psi(t)$ - заданные функции.

Таким образом, интегральное условие переопределения на границе для восстановления коэффициентов уравнения (2.1.5) можно записать в общей форме, объединяющей условия для всех типов краевых задач:

$$\int\limits_{\Gamma} \Big[\big((\eta u)_t + ku\big)\omega_1 + \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big((\eta u)_t + ku\big)\omega_2\Big]\, ds = (\eta\psi_1(t))_t + k\psi_2(t). \qquad (2.1.14)$$

Здесь $\omega_i = \omega_i(t, x)$ и $\psi_i = \psi_i(t)$ - заданные функции, $i = 1, 2$, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ – участок границы ненулевой $n-1$-мерной меры. Конкретный вид этого условия зависит от типа граничных данных соответствующей прямой задачи и того, какой коэффициент в уравнении неизвестен.

Рассмотрим обратную задачу отыскания коэффициента $k = k(t)$ при известных коэффициентах η и ν. Как показано выше на примере модели фильтрации (2.1.1), правые части граничных условий (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11), вообще говоря, линейно зависят от η и k. Поэтому при неизвестном k данные граничные условия следует записывать в форме

$$u|_{S_T} = g_{10} \quad \text{или} \quad \big((\eta u)_t + ku\big)|_{S_T} = kg_{11} + g_{12}, \qquad (2.1.15)$$

и

$$\nu \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S_T} = g_{20} \quad \text{или} \quad \Big[A\left((\eta u)_t + ku\right) + B\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left((\eta u)_t + ku\right)\Big]\Big|_{S_T} = kg_{21} + g_{22}. \qquad (2.1.16)$$

Здесь $g_{i0} = g_{i0}(t, x)$, $g_{i1} = g_{i1}(t, x)$ и $g_{i2} = g_{i2}(t, x)$, $i = 1, 2$, – заданные функции на $(0, T) \times \partial\Omega$.

Задачам с граничными данными (2.1.15) соответствует условие переопределения (2.1.14) при $\omega_1 = 0$. Оно имеет следующий вид:

$$\int\limits_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big((\eta u)_t + k(t)u\big)\, \omega_2\, ds - k(t)\psi_2(t) = \psi_3(t), \qquad (2.1.17)$$

где $\psi_3(t) = (\eta\psi_1(t))_t$. Для задач с граничными данными (2.1.16) подходит условие переопределения (2.1.14) с $\omega_2 = 0$:

$$\int\limits_{\Gamma} \big[(\eta u)_t + k(t)u\big]\omega_1\, ds - k(t)\psi_2(t) = \psi_3(t).$$

Перейдем к условиям переопределения в задачах идентификации коэффициента $\eta(t)$ в уравнении (2.1.5) при известных k и ν. Как отмечалось выше, правые части граничных условий (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10) и (2.1.11), вообще говоря, линейно зависят от η и η'. Поэтому при неизвестном η данные граничные условия следует записывать в виде

$$\big((\eta u)_t + ku\big)|_{S_T} = (\eta\tilde{g}_{11})_t + \tilde{g}_{12}, \tag{2.1.18}$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left((\eta u)_t + ku\right)\Big|_{S_T} = (\eta\tilde{g}_{21})_t + \tilde{g}_{22}, \tag{2.1.19}$$

и

$$\Big[A\left((\eta u)_t + ku\right) + B\nu\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left((\eta u)_t + ku\right)\Big]\Big|_{S_T} = (\eta\tilde{g}_{31})_t + \tilde{g}_{32}, \tag{2.1.20}$$

где $\tilde{g}_{i1}$ и $\tilde{g}_{i2}$, $i = 1, 2, 3$, – заданные функции на $(0, T) \times \partial\Omega$. В случае задач с граничными данными (2.1.7) или (2.1.18) из (2.1.14) при $\omega_1 = 0$ получаем следующее условие переопределения

$$\int\limits_{\Gamma} \nu\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\big((\eta(t)u_1)_t + ku_1\big)\,\omega_2(t, s)\,ds - (\eta(t)\psi_1(t))' = \psi_4(t), \tag{2.1.21}$$

где $\psi_4(t) = k\psi_2(t)$.

Нетрудно заметить, что начальное условие

$$u(0, x) - \eta(0)\nu\Delta u(0, x) = U_0(x),$$

является дифференциальным уравнением относительно функции $u(0, x)$ и содержит неизвестный постоянный коэффициент $\eta(0)$. Для отыскания $\eta(0)$ необходимо дополнительное условие переопределения при $t = 0$:

$$\eta(0)\int\limits_{\Gamma} \nu\frac{\partial u_1(0, x)}{\partial\mathbf{n}}\,\omega_2(0, x)\,ds + r_1\eta(0) = r_2,$$

где r_1, r_2 - действительные постоянные.

В случае граничных условий (2.1.19) или (2.1.20) следует использовать условие переопределения (2.1.14) при $\omega_2 = 0$. А именно,

$$\int\limits_{\Gamma} \big[(\eta u)_t + ku\big]\omega_1\,ds - (\eta(t)\psi_1(t))' = \psi_4(t).$$

Условие переопределения при $t = 0$ имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma} u_1(0,x)\,\omega_2(0,x)\,ds + r_1\eta(0) = r_2.$$

Теперь обратимся к условиям переопределения для задач отыскания неизвестного младшего коэффициента $g(t)$ в уравнении влагопереноса

$$u_t - \nu\Delta((\eta u)_t + ku) + gu = 0,$$

при заданных η, ν и k. Для задачи с граничными данными (2.1.7) и (2.1.9) условие переопределения (2.1.14) можно записать в следующей форме:

$$\int\limits_{\Gamma} \nu\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\big((\eta u)_t + k(t)u\big)\,\omega_2\,ds = \psi_5(t),$$

где $\psi_5(t) = (\eta\psi_1(t))_t + k\psi_2(t)$. Алогичные нелокальные условия использовались в задачах управления для уравнений соболевского типа в [231,318]. В случае задач с граничными данными типа (2.1.15) или (2.1.16) условия переопределения имеют вид

$$\int\limits_{\Gamma} \big[(\eta u)_t + k(t)u\big]\omega_1\,ds = \psi_5(t) \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Gamma} u\,\omega_1 ds = \psi_6(t),$$

где $\psi_6(t)$ – заданная функция.

2.1.3 Задача с одной пространственной переменной

Рассмотрим обратную задачу идентификации неизвестного коэффициента $k(t)$ в уравнении (2.1.5) с краевыми условиями (2.1.6), (2.1.7) и условием переопределения (2.1.17) в случае одной пространственной переменной. Это позволит разобраться в некоторых особенностях описанных выше обратных задач и их решений.

Пусть $\Omega = (0,l)$ и коэффициент η в (2.1.5) – постоянная величина. Всюду ниже будем обозначать символами $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(\Omega)$ и символом $\|\cdot\|_i$ норму в $W_2^i(\Omega)$, $i = 1,2$ (в данном параграфе – $L^2(0,l)$ и $W_2^i(0,l)$, соответственно). Будем также использовать обозначения

$$\overline{p} = \max_{t\in[0,T]} p(t), \quad \underline{p} = \min_{t\in[0,T]} p(t)$$

для функций $p(t) \in C([0,T])$.

В одномерном случае интегральное условие (2.1.17) вырождается в нелокальное условие на следы производных u на концах интервала. Обратную задачу (2.1.5)–(2.1.7), (2.1.17) можно сформулировать следующим образом.

При заданных η, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ найти пару функций $\{u(t,x), k(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t - \eta u_{xxt} - k(t)u_{xx} = f(t,x) \quad \text{в} \quad Q_T \equiv (0,T) \times (0,l), \tag{2.1.22}$$

начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x) \quad x \in [0,l], \tag{2.1.23}$$

граничным данным

$$u(t,0) = \beta_1(t), \quad u(t,l) = \beta_2(t) \quad t \in [0,T] \tag{2.1.24}$$

и условию переопределения

$$-\left(\eta u_{xt} + k(t)u_x\right)\Big|_{x=0} + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t) \quad t \in [0,T]. \tag{2.1.25}$$

Результаты [32] позволяют утверждать, что если $f \in C([0,T]; L^2(Q_T))$, $u_0 \in W_2^2(0,l)$, $\beta_1, \beta_2 \in C^1([0,T])$ и $k(t) \in C([0,T])$, то прямая задача (2.1.22)–(2.1.24) имеет решение $u \in C^1([0,T]; W_1^2(0,l))$, и это решение единственно. Из уравнения (2.1.22) следует, что $\eta u_{xxt} + k(t)u_{xx} \in C([0,T]; L^2(0,l))$, а значит, $u_{xx} \in C^1([0,T]; L^2(0,l))$, то есть $u \in C^1([0,T]; W_2^2(0,l))$.

Под решением задачи (2.1.22)–(2.1.25) будем понимать пару $\{u(t,x), k(t)\}$ из класса $C^1([0,T]; W_2^2(0,l)) \times C([0,T])$, удовлетворяющую уравнению (2.1.22) и условиям (2.1.23)–(2.1.25).

Существование и единственность решения задачи (2.1.22)–(2.1.25) зависит от свойств решения прямой задачи (2.1.22)–(2.1.24), которые гарантируются следующей леммой, относящейся к теоремам сравнения для уравнений соболевского типа.

Лемма 2.1.1. *Пусть $v(t,x)$ – это решение задачи*

$$\begin{cases} v_t - \eta v_{xxt} - q(t)v_{xx} = f(t,x) & \text{в} \quad Q_T, \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in [0,l], \\ v(t,0) = \beta_1(t), \quad v(t,l) = \beta_2(t) & t \in [0,T], \end{cases}$$

из класса $C^1([0,T];W_2^2(0,l))$, *где* η *– положительная постоянная,* $q(t)$, $f(t,x)$, $v_0(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ *– заданные функции,* $q \in C([0,T])$, β_1, $\beta_2 \in C^1([0,T])$, $v_0 \in W_2^2(0,l)$, $f \in C([0,T];L^2(0,l))$, $v_0(0) = \beta_1(0)$, $v_0(l) = \beta_2(0)$. *Предположим, что* $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $v_0(x)$ *неотрицательны,* $f(t,x)$ *также неотрицательна почти всюду в* $\overline{Q}_T$, $q(t) \geq q_0 > 0$ *при всех* $t \in [0,T]$, *и для решения* $G(t,x)$ *задачи*

$$G - \eta\, G_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \qquad G(t,0) = \beta_1(t), \qquad G(t,l) = \beta_2(t),$$

выполняется неравенство $v_0(x) - G(0,x) \geq 0$. *Тогда* $v(t,x) \geq 0$ *в* $[0,T]\times[0,l]$.

Лемма 2.1.1 является частным случаем теоремы сравнения 1.4.1 главы 1.

Теорема 2.1.2. *Пусть* η *– положительная постоянная и выполняются следующие условия:*

(i) $f(t,x) \in C([0,T];L^2(0,l))$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\varphi_1(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi_2(t) \in C([0,T])$, $u_0 \in W_2^2(0,l)$;

(ii) $f(t,x) \geq 0$ *почти всюду в* $\overline{Q}_T$, $u_0(x) \geq 0$ *при всех* $x \in (0,l)$, $\varphi_1(t) \geq 0$ *и* $\varphi_2(t) \geq 0$ *на* $[0,T]$, $u_0(0) = \beta_1(0)$, $u_0(l) = \beta_2(0)$,

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1,2; \tag{2.1.26}$$

(iii) *существуют положительные константы* φ_0, γ *и постоянные* α_0, α_1 *такие, что* $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $(i = 0,1)$, $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 2$,

$$\Phi(t) \equiv (f - a_t, b) + \frac{\eta}{l}\big(\beta_2' - \beta_1'\big) + \varphi_2 \geq \Phi_0 > 0 \quad ({}' = d/dt)\,, \tag{2.1.27}$$

$$u_0(x) - \beta_1(0)b(x) - \beta_2(0)b(l-x) \geq 0, \tag{2.1.28}$$

где

$$b(x) = \Big(\operatorname{sh}\frac{l}{\eta^{1/2}}\Big)^{-1}\operatorname{sh}\frac{l-x}{\eta^{1/2}}, \qquad a(t,x) = \beta_1(t)\,\frac{l-x}{l} + \beta_2(t)\,\frac{x}{l}; \tag{2.1.29}$$

$$\eta^{1/2}\Big(\alpha_0\,\varphi_1(0) + \frac{\alpha_1}{l}\big(\beta_1(0) - \beta_2(0)\big)\Big)\,(1 - b(x) - b(l-x))\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} +$$

$$+\ a(0,x) - u_0 \geq 0 \quad x \in [0,l], \tag{2.1.30}$$

$$\eta^{1/2}\Big(\alpha_0\,\varphi_1+\frac{\alpha_1}{l}\big(\beta_1-\beta_2\big)\Big)'\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}}+a_t-f\geq 0\quad (t,x)\in\overline{Q}_T,\qquad (2.1.31)$$

$$(1-\alpha_0)\varphi_1+(1-\alpha_1)\,\frac{\beta_1-\beta_2}{l}\geq\gamma\quad t\in[0,T].\qquad (2.1.32)$$

Тогда задача (2.1.22)–(2.1.25) имеет единственное решение $\{u,k\}$. *Причем для коэффициента* $k(t)$ *справедливо неравенство*

$$k_0\leq k(t)\leq k_1\qquad (2.1.33)$$

с некоторыми положительными постоянными k_0, k_1.

Доказательство. Основная идея доказательства близка к методам, предложенным в [282], и состоит в сведении (2.1.22)–(2.1.25) к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением для коэффициента $k(t)$.

Умножим (2.1.22) на $b(x)$ скалярно в $L^2(0,l)$ и дважды проинтегрируем по частям по x. Ввиду (2.1.25), (2.1.29) и того, что

$$-\left(\eta u_{xxt}+k(t)u_{xx},b\right)=\varphi_1 k(t)-\varphi_2+\left(\eta\beta_2'+k(t)\beta_2\right)b_x(l)-$$

$$-\left(\eta\beta_1'+k(t)\beta_1\right)b_x(0)-\left(\eta u_t+k(t)u,b_{xx}\right),$$

получим соотношение

$$-\varphi_2+\eta\left(\beta_2'b_x(l)-\beta_1'b_x(0)\right)+k(t)\Big(\varphi_1+\beta_2b_x(l)-\beta_1b_x(0)-(u,b_{xx})\Big)=(f,b).\qquad (2.1.34)$$

Так как функция b удовлетворяет уравнению $b-\eta b_{xx}=0$ и граничным условиям $b(0)=1$, $b(l)=0$, используя соотношения $(1,b)=\eta^{1/2}\operatorname{th}(l\eta^{-1/2}/2)$ и

$$0\equiv(a_{xx},b)=-a_x(t,0)-(a_x,b_x)=\frac{\beta_1-\beta_2}{l}-\left(\beta_2b_x(l)-\beta_1b_x(0)\right)+\frac{1}{\eta}(a,b),$$

уравнение (2.1.34) можно переписать в виде

$$\frac{k(t)}{\eta}\Big(\eta^{1/2}\Big(\varphi_1+\frac{\beta_1-\beta_2}{l}\Big)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}}+a-u,b\Big)=\Phi(t).\qquad (2.1.35)$$

Задача (2.1.22)–(2.1.24), (2.1.35) эквивалентна задаче (2.1.22)–(2.1.25). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить справедливость того же самого утверждения для задачи (2.1.22)–(2.1.24), (2.1.35).

Решение задачи (2.1.22)–(2.1.24), (2.1.35) будем искать как предел последовательности приближений $\{u^i(t,x), k^i(t)\}$, которые строятся с помощью следующей итерационной схемы:

$$u_t^i - \eta u_{xxt}^i - k^{i-1}(t) u_{xx}^i = f \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{2.1.36}$$

$$u^i(0,x) = u_0(x), \quad u^i(t,0) = \beta_1(t), \quad u^i(t,l) = \beta_2(t), \tag{2.1.37}$$

$$k^i(t)\Big(\eta^{1/2}\Big(\varphi_1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{l}\Big)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} + a - u^i, b\Big) = \eta\Phi, \tag{2.1.38}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots; \qquad (u^0(t,x), k^0(t)) \equiv (0,1).$$

Прежде всего, докажем по индукции, что при каждом $i = 1, 2, 3, \ldots$ задача (2.1.36)–(2.1.38) имеет единственное решение $\{u^i, k^i\} \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$ и для него справедливы оценки

$$0 \le u^i \le \eta^{1/2}\left(\alpha_0\varphi_1 + \alpha_1\frac{\beta_1 - \beta_2}{l}\right)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} + a \equiv C_0 \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T, \tag{2.1.39}$$

$$k_0 \le k^i(t) \le k_1 \quad \text{для} \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.1.40}$$

где

$$k_0 = \Phi_0\eta^{1/2}\Big[\eta^{1/2}\overline{\varphi}_1 + (\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2)\operatorname{cth}\frac{l}{\eta^{1/2}}\Big]^{-1},$$

$$k_1 = \gamma^{-1}\Big[\overline{\varphi}_2 + \Big(\frac{\eta}{4}\Big)^{1/4}\max_{t\in[0,T]}\left(\|f\| + |\beta_1'| + |\beta_2'|\right)\operatorname{cth}\frac{l}{\eta^{1/2}}\Big].$$

Действительно, при каждом $i \ge 1$ задача (2.1.36), (2.1.37) имеет единственное решение $u^i \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$, которое в свою очередь однозначно определяет k^i из (2.1.38), причем $k^i \in C([0,T])$. В силу предположений (ii), (2.1.27)–(2.1.28), (2.1.32) и леммы 2.1.1 для u^1 выполняется оценка

$$0 \le u^1 \le C_0 \quad \text{для} \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T.$$

Из нее и неравенства

$$\|b\|^2 \le (\eta^{1/2}/2)\operatorname{cth}(l/\eta^{1/2})$$

вытекает, что

$$\gamma \le \frac{1}{\eta}\Big(\eta^{1/2}\Big(\varphi_1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{l}\Big)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} + a - u^1, b\Big) \le \varphi_1 + \frac{\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2}{\eta^{1/2}}\operatorname{cth}\frac{l}{\eta^{1/2}}. \tag{2.1.41}$$

Используя гладкость входных данных, (2.1.27), (2.1.41) и уравнение (2.1.38) получаем оценку

$$k_0 \le k^1(t) \le k_1 \quad \text{для} \quad \forall t \in [0,T]$$

с указанными выше $k_0,\ k_1$. Кроме того, в условиях теоремы $k^1 \in C([0,T])$.

Далее, предположим, что при $i = i_0$ решение $\left\{u^{i_0}, k^{i_0}\right\}$ удовлетворяет (2.1.39) и (2.1.40). Тогда повторяя вывод неравенств (2.1.39), (2.1.40) при $i = 1$, можно доказать справедливость (2.1.39)–(2.1.41) для u^{i_0+1} и k^{i_0+1}. Таким образом, оценки (2.1.39), (2.1.40) имеют место при любом $i \ge 1$.

Для доказательства сходимости последовательности $\left\{u^i, k^i\right\}$ необходимо получить равномерные по i оценки производных u_i.

Вычтем a_t из обеих частей уравнения (2.1.36), умножим на u^i_{xx} в смысле скалярного произведения $L^2(0,l)$, проинтегрируем по частям в первом члене и оценим правую часть результирующего соотношения. Это даст:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^i_x - a_x\|^2 + \eta\|u^i_{xx}\|^2\Big) + k^{i-1}\|u^i_{xx}\|^2 \le \frac{1}{2l}\big(|\beta_1'| + |\beta_2'|\big)^2 + \frac{1}{2\eta}\|f\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\|u^i_x - a_x\|^2 + \eta\left\|u^i_{xx}\right\|^2).$$

Применяя лемму Гронуолла к этому неравенству получим оценку

$$\|u^i_x - a_x\|^2 + \eta\|u^i_{xx}\|^2 \le \int\limits_0^t \Big[\frac{1}{l}\big(|\beta_1'| + |\beta_2'|\big)^2 + \frac{1}{\eta}\|f\|^2\Big]e^{(t-\tau)/\eta}d\tau +$$

$$+(\|u_{0x} - a_{0x}\|^2 + \eta\|u_{0xx}\|^2)e^{t/\eta} \equiv C_1, \tag{2.1.42}$$

откуда

$$\|u^i_x\|^2 + \eta\|u^i_{xx}\|^2 \le 2\|u^i_x - a_x\|^2 + \eta\|u^i_{xx}\|^2 + 2\|a_x\|^2 \le 2C_1 + \frac{2}{l}(\beta_2 - \beta_1)^2. \tag{2.1.43}$$

Далее, умножим уравнение (2.1.36) на $u^i_t - a_t$ в смысле скалярного произведения $L^2(0,l)$ и проинтегрируем по частям. Будем иметь:

$$\|u^i_t\|^2 + \eta\|u^i_{xt} - a_{xt}\|^2 = k(t)(u^i_x - a_x, u^i_{xt} - a_{xt}) + (f, u^i_t - a_t) + (u^i_t, a_t).$$

Оценивая правую часть полученного сотношения с помощью (2.1.40) и (2.1.42) приходим к неравенству

$$\|u^i_t\|^2 + \eta\|u^i_{xt} - a_{xt}\|^2 \le \frac{1}{2}\left\|u^i_t\right\|^2 + \frac{\eta}{2}\left\|u^i_{xt} - a_{xt}\right\|^2 + \frac{k_1^2}{\eta}C_1 + \frac{3}{2}(\|f\|^2 + \|a_t\|^2)$$

которое дает оценку

$$\left\|u_t^i\right\|^2 + \eta \left\|u_{xt}^i\right\|^2 \le C_2. \tag{2.1.44}$$

Из (2.1.36) в силу (2.1.40) и (2.1.44) заключаем, что

$$\eta \left\|u_{xxt}^i\right\| \le \left\|u_t^i\right\| + k_1 \left\|u_{xx}^i\right\| + \|f\|. \le C_3 \tag{2.1.45}$$

Константы C_2, C_3 зависят от η, l, k_1, C_1 и $\max_{t\in[0,T]}\left\{\|f\|, |\beta_1'|, |\beta_2'|\right\}$.

Рассмотрим разность приближений на $i+1$-й и i-й итерациях. Пусть

$$\tilde{k}^i(t) = k^{i+1}(t) - k^i(t), \quad \tilde{u}^i(t,x) = u^{i+1}(t,x) - u^i(t,x) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

С одной стороны, вычитая (2.1.38) для k^i из этого же соотношения для k^{i+1}, получим, что

$$\tilde{k}^i(t)\Big(\eta^{1/2}\Big(\varphi_1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{l}\Big)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} + a - u^i, b\Big) = k^i(\tilde{u}^i, b),$$

откуда в силу (2.1.39), (2.1.40) и неравенства

$$\frac{1}{\eta}\Big(\eta^{1/2}\Big(\varphi_1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{l}\Big)\operatorname{cth}\frac{l}{2\eta^{1/2}} + a - u^i, b\Big) \ge \gamma$$

имеем:

$$\left|\tilde{k}^i(t)\right| \le \frac{k_1\|b\|}{\eta\gamma}\left[\int\limits_0^l |\tilde{u}^i|^2\,dx\right]^{1/2}. \tag{2.1.46}$$

С другой стороны, разность $\tilde{u}^i$ является решением задачи

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^i - \eta\tilde{u}_{xxt}^i - k^i(t)\tilde{u}_{xx}^i = \tilde{k}^{i-1}(t)u_{xx}^i, \\ \tilde{u}^i\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}^i\big|_{x=0} = \tilde{u}^i\big|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.1.47}$$

Умножая первое равенство (2.1.47) на $\tilde{u}_{xx}^i$ в смысле скалярного произведения в $L^2(0,l)$, интегрируя в первом слагаемом по частям по x и оценивая правую часть результирующего соотношения, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\tilde{u}_x^i\right\|^2 + \eta\left\|\tilde{u}_{xx}^i\right\|^2\right) + 2k^i\left\|\tilde{u}_{xx}^i\right\|^2 \le \frac{1}{\eta}\left|\tilde{k}^{i-1}\right|^2\left\|u_{xx}^i\right\|^2 + \left\|\tilde{u}_x^i\right\|^2 + \eta\left\|\tilde{u}_{xx}^i\right\|^2,$$

из которого по лемме Гронуолла вытекает, что

$$\left\|\tilde{u}_x^i\right\|^2 + \eta\left\|\tilde{u}_{xx}^i\right\|^2 \le \frac{1}{\eta}\int\limits_0^t |\tilde{k}^{i-1}(\tau)|^2\left\|u_{xx}^i\right\|^2 e^{t-\tau}\,d\tau$$

или с учетом (2.1.43)

$$\Big(\big\|\tilde{u}^i_x\big\|^2 + \eta\,\big\|\tilde{u}^i_{xx}\big\|^2\Big)^{1/2} \le C_4\Big(\int\limits_0^t |\tilde{k}^{i-1}(\tau)|^2\,d\tau\Big)^{1/2}, \qquad (2.1.48)$$

где C_4 – положительная константа, зависящая от T, η, C_1, $\max_{t\in[0,T]}\{|\beta_1|,|\beta_2|\}$. Аналогичным путем, умножая первое равенство (2.1.47) на $\tilde{u}^i_{xxt}$ в смысле скалярного произведения в $L^2(0,l)$ и интегрируя в первом слагаемом по частям по x, будем иметь:

$$\big\|\tilde{u}^i_{xt}\big\|^2 + \eta\,\big\|\tilde{u}^i_{xxt}\big\|^2 = -k^i(t)\left(\tilde{u}^i_{xx}, \tilde{u}^i_{xxt}\right) - \tilde{k}^i(t)\left(u^i_{xx}, \tilde{u}^i_{xxt}\right).$$

Оценивая правую часть этого соотношения с помощью неравенства Шварца, (2.1.40) и (2.1.48), получим, что

$$\big\|\tilde{u}^i_{xt}\big\|^2 + \eta\,\big\|\tilde{u}^i_{xxt}\big\|^2 \le C_5\Big[\big\|\tilde{k}^{i-1}\big\|^2_m + \int\limits_0^t |\tilde{k}^{i-1}(\tau)|^2\,d\tau\Big]. \qquad (2.1.49)$$

Здесь постоянная C_5 зависит от C_4, k_1, η, T.

Введем эквивалентную норму в $C[0,T]$:

$$\left|\, \cdot \,\right|_p = \max_{t\in[0,T]}\left\{\exp(-pt)\,|\cdot|\right\}$$

с положительным параметром p. В силу (2.1.46) и (2.1.48)

$$\left|\,\tilde{k}^i\,\right|_p \le \frac{C_6}{p^{1/2}}\left|\,\tilde{k}^{i-1}\,\right|_p, \qquad (2.1.50)$$

где постоянная C_6 зависит от l, η, γ, k_1, C_4 and T. Неравенство (2.1.50) гарантирует существование предела $k(t)$ последовательности $\{k^i\}$ в $C[0,T]$ при $p > C_6^2$. Это в свою очередь обеспечивает сходимость последовательности $\{u^i\}$ к функции $u(t,x)$ в $C^1([0,T];W_2^2(0,l))$ ввиду (2.1.48)–(2.1.50). Переходя к пределу в (2.1.36)-(2.1.38) при $i\to\infty$, заключаем, что пара $(u(t,x),k(t))$ является решением задачи (2.1.22)–(2.1.24), (2.1.35). Причем для $u(t,x)$ и $k(t)$ справедливы оценки (2.1.33), (2.1.39), (2.1.43)–(2.1.45).

Докажем, что построенное решение $\{u,k\}$ единственно. Пусть (u_j,k_j), $j=1,2$ – два решения задачи (2.1.22)–(2.1.24), (2.1.35). Повторяя вывод соотношений (2.1.48), (2.1.50), можно получить аналогичные неравенства для разностей $u_1 - u_2$ и $k_1 - k_2$. А именно,

$$\Big(\|u_{1x} - u_{2x}\|^2 + \eta\,\|u_{1xx} - u_{2xx}\|^2\Big)^{1/2} \le C_4\Big(\int\limits_0^t |k_1(\tau) - k_2(\tau)|^2\,d\tau\Big)^{1/2},$$

$$\Big|\,k_1 - k_2\,\Big|_p \le \frac{C_6}{p^{1/2}}\Big|\,k_1 - k_2\,\Big|_p.$$

Так как $p > C_6^2$ и $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$, из этих неравенств следует, что $k_1(t) - k_2(t) \equiv 0$ и $u_1 - u_2 \equiv 0$. Теорема доказана.

Гипотезам (2.1.27)–(2.1.28) и (2.1.30)–(2.1.32) отвечает широкий класс исходных данных задачи (2.1.22)–(2.1.25). Например, если $u_0 \ge 0$ на $[0, l]$ и $u_{0xx} \le 0$ почти всюду в $(0, l)$, то (2.1.28) выполняется в силу принципа максимума для эллиптических уравнений. Если дополнительно функция f неотрицательна и выпукла (в частности, $f \equiv 0$), $\varphi_1 \ge 0$, $\beta_1 > \beta_2 \ge 0$, $\beta_1' \ge \beta_2'$, $f(t, 0) \le \beta_1'$ и $f(t, l) \le \beta_2'$ при $t \in [0, T]$, то исходные данные удовлетворяют гипотезам (2.1.30)–(2.1.32), например, при $\alpha_0, \alpha_1 \ge 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 \le 1$. Вследствие (2.1.29),

$$\Phi(t) = (f, b) - \frac{\eta^{1/2}}{l}\Big(\beta_1'\mathrm{ch}\frac{l}{\eta^{1/2}} - \beta_2'\Big)\mathrm{sh}^{-1}\frac{l}{\eta^{1/2}} + \varphi_2,$$

так что (2.1.27) справедливо, когда $\underline{\varphi}_2 > 0$ и η достаточно мало.

Условие (2.1.30) является наиболее принципиальным. Как показывает следующий пример, в общем случае при нарушении этого условия задача (2.1.22)–(2.1.25) может быть неразрешима, даже если выполняются все остальные гипотезы теоремы 2.1.2.

Пример 2.1.1 Рассмотрим обратную задачу нахождения неизвестных функций $u(t, x)$ и $k(t)$:

$$\begin{cases} u_t - \eta u_{xxt} - k(t)u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(0, x) = \beta\,\frac{\pi - x}{\pi} + \sin x + \delta \sin 2x \equiv u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(t, 0) = \beta, \quad u(t, \pi) = 0, \quad t \ge 0, \\ -\big(\eta u_{xt} + k(t)u_x\big)\Big|_{x=0} = \varphi_2, \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{2.1.51}$$

где β и φ_2 – положительные постоянные. Входные данные задачи (2.1.51) отвечают всем предположениям теоремы 2.1.2, за исключением (2.1.30), если

$$\varphi_2 > 0, \quad 0 < \eta \le \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{\beta(1+4\eta)}{2\pi} - \frac{1+4\eta}{2(1+\eta)} \tag{2.1.52}$$

и

$$\frac{3\pi\eta}{2(1+\eta)(1+2\eta)} \le \beta \le \frac{3\pi}{4(1+\eta)}. \tag{2.1.53}$$

Действительно, если β отвечает (2.1.53), то существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\alpha_1 \beta \frac{\eta}{\pi} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2\eta^{1/2}} - \sin x - \delta \sin 2x < 0, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} - \sigma, \frac{\pi}{2} + \sigma\right)$$

для любого α_1, $0 \le \alpha_1 \le 1$.

Пусть

$$w = \beta \frac{\pi - x}{\pi} - u.$$

Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} w_t - \eta w_{xxt} - k(t) w_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ w(0,x) = -\sin x - \delta \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{2.1.54}$$

и условию

$$\eta w_{xt} + k(t) w_x \Big|_{x=0} = \varphi_2 - \frac{\beta}{\pi} k(t), \quad t \ge 0. \tag{2.1.55}$$

Из (2.1.54) следует, что решение w имеет вид

$$w = w_1(t) \sin x + w_2(t) \sin 2x, \tag{2.1.56}$$

где

$$\begin{cases} w_1(t) = -\exp\left(-\frac{1}{1+\eta}\int_0^t k(\tau)\,d\tau\right), \\ w_2(t) = -\delta \exp\left(-\frac{4}{1+4\eta}\int_0^t k(\tau)\,d\tau\right) \end{cases}$$

для любой интегрируемой функции $k(t)$. Подставляя (2.1.56) в (2.1.55) и полагая

$$y(t) = \exp\left(-\frac{1}{1+4\eta}\int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\right),$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1+4\eta}{1+\eta}\,y^{3\eta/(1+\eta)} + 2\delta y^3 - \frac{\beta(1+4\eta)}{\pi}y^{-1}\right)y' = \varphi_2. \tag{2.1.57}$$

Интегрируя (2.1.57) с учетом того, что $y(0) = 1$, приходим к нелинейному уравнению

$$h(y) \equiv y^{(1+4\eta)/(1+\eta)} + \frac{\delta}{2}\,y^4 - \frac{\beta(1+4\eta)}{\pi}\ln y = \varphi_2 t + \frac{\delta}{2} + 1. \tag{2.1.58}$$

Заметим, что $h'_y(1) = 0$ ввиду (2.1.52). Причем если

$$\beta < \frac{3\pi}{4(1+\eta)^2}, \tag{2.1.59}$$

то $h''(1) < 0$. Следовательно, функция $h(y)$ достигает максимума в этой точке. Поэтому если для β выполняются условия (2.1.53), (2.1.59), то при некотором $\kappa > 0$

$$h(y) < h(1) = \frac{\delta}{2} + 1 \quad \text{для} \quad \forall y \in (1-\kappa, 1+\kappa), \;\; y \neq 1.$$

С другой стороны, $\varphi_2 t + \frac{\delta}{2} + 1 > \frac{\delta}{2} + 1$ при всех $t > 0$, поскольку $\varphi_2 > 0$. Это означает, что уравнение (2.1.58) и соответственно задача Коши для уравнения (2.1.57) не имеет решения среди интегрируемых функций $y(t)$. Таким образом, в предположениях (2.1.52), (2.1.53) и (2.1.59) задача (2.1.51) не разрешима.

2.2 Идентификация неизвестного младшего коэффициента

В этом параграфе рассматривается обратная задача идентификации неизвестного младшего коэффициента в уравнении соболевского типа с самосопряженным линейным оператором второго порядка.

2.2.1 Постановка задачи. Предварительные результаты

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, $T > 0$ – произвольное действительное число и $Q_T = \Omega \times (0,T)$ – цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Точки области Ω снова будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T - через (t,x). Всюду ниже будем использовать обозначения, введенные в предыдущем параграфе: $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ – норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ соответственно; $\|\cdot\|_j$ и $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle_1$ – норма в $W_2^j(\Omega)$, $j \geq 1$, и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$ соответственно. Будем также обозначать через $\|\cdot\|_{p/2}$ норму в $W_2^{p/2}(\partial\Omega)$, $p = 1, 3$.

Пусть $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$Mv = -\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla v) + m(x)v, \tag{2.2.1}$$

где $\mathcal{M}(x)$ – матрица функций $m_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Будем предполагать выполненными следующие условия.

I. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$, и $m(x)$ ограничены в Ω. Оператор M сильно эллиптический, т. е. существуют положительные постоянные m_1 и m_2 такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$m_1\|v\|_1^2 \leq \left\langle Mv, v\right\rangle_{1,M} \leq m_2\|v\|_1^2. \tag{2.2.2}$$

где

$$\left\langle Mv_1, v_2\right\rangle_{1,M} = (\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2) + (m(x)v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega).$$

II. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ for $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $m(x) \geq 0$ при $x \in \Omega$.

Из предположений I и II вытекает, что существует константа $m_3 > 0$ такая, что для каждого $v \in W_2^2(\Omega)$

$$\|Mv\| \leq m_3\|v\|_2. \tag{2.2.3}$$

Постановка обратной задачи состоит в следующем.

Задача 2.1. При заданных функциях $f(t,x)$, $U_0(x)$, $\beta(t,x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi(t)$ и постоянной η требуется найти пару функций $\{u(t,x), g(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$(u + \eta Mu)_t + Mu + g(t)u = f, \tag{2.2.4}$$

начальному условию

$$(u + \eta Mu)|_{t=0} = U_0(x), \tag{2.2.5}$$

граничным данным

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t,x) \tag{2.2.6}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Big\{\eta\frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\Big\}\omega(t,x)ds = \varphi(t). \tag{2.2.7}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Если $\omega \equiv 1$, то условие (2.2.7) означает заданный поток жидкости через границу $\partial\Omega$, например, общий расход жидкости через поверхность грунта или скважины. Аналогичные нелокальные условия использовались в задачах управления [231].

Исследование корректности задачи 2.1 опирается на два утверждения для прямой задачи (2.2.4)-(2.2.6) с известной функцией $k(t)$, а именно на теорему сравнения, доказанную в первой главе (см. теорему 1.4.2), и следующую лемму.

Лемма 2.2.1. 1) *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, выполняются предположения I-IV, $\eta > 0$, $k \in C([0,T])$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ и $U_0 \in L^2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение $u(t,x)$ прямой задачи для уравнения*

$$(u + \eta M u)_t + kMu + gu = f, \tag{2.2.8}$$

с краевыми условиями (2.2.5)–(2.2.6) в пространстве $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$.

2) *Пусть $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Пусть также $g, f \in C(0,T; C^\alpha(\overline{\Omega}))$, $U_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\beta \in C^1([0,T]; C^{2+\alpha}(\partial\Omega))$, $m_{ij} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ и $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Тогда решение $u(t,x)$ задачи (2.2.5), (2.2.6), (2.2.8) принадлежит классу $C^1([0,T]; C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))$.*

Доказательство. В случае, когда функции k и g не зависят от t, однозначная разрешимость задачи (2.2.5), (2.2.6), (2.2.8) следует из результатов [304]. Докажем утверждения теоремы для $k = k(t)$ и $g = g(t,x)$.

1) Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} v_t + G(v) = f - a_t - La, & (t,x) \in Q_T, \\ v(0,x) = U_0(x) - a(0,x), & x \in \Omega, \\ v\big|_{S_T} = 0, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

где $v = (I+\eta M)(u-a)$ и оператор $G : C([0,T];L^2(\Omega)) \to C([0,T];L^2(\Omega))$ определяется выражением

$$G = \big(k(t)M + gI\big)(I+\eta M)^{-1} \equiv \frac{k(t)}{\eta}\left(I - (I+\eta M)^{-1}\right) + g(I+\eta M)^{-1}. \quad (2.2.10)$$

Функция v удовлетворяет соотношениям (2.2.9) тогда и только тогда, когда функция $u = a + (I+\eta M)^{-1}v$ является решением задачи (2.2.5), (2.2.6), (2.2.8). Поэтому утверждение 1) данной теоремы будет доказано, как только мы покажем существование и единственность решения задачи (2.2.9). В условиях теоремы линейный по определению (2.2.10) оператор G липшиц-непрерывен и $f - a_t - La \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Тогда согласно теореме 1.2 [32, Глава 5] задача (2.2.9) имеет единственное решение $v \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$ и, соответственно, $u \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega))$.

2) В условиях теоремы оператор G отображает $C([0,T];C^\alpha(\overline{\Omega}))$ в себя. Тогда согласно теореме 1.2 [32, Глава 5] функция $v \in C^1([0,T];C^\alpha(\overline{\Omega}))$. Следовательно, решение u придадлежит классу $C^1([0,T];C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))$. Теорема доказана.

2.2.2 Корректность обратной задачи

Исследование обратной задачи начнем с достаточных условий существования и единственности ее решения. Под решением задачи 2.1 будем понимать пару функций $\{u(t,x), g(t)\}$ таких, что $u(t,x) \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega))$, $g(t) \in C([0,T])$; пара $\{u(t,x), g(t)\}$ удовлетворяет уравнению (2.2.4) почти всюду в Q_T, начальным и граничным данным (2.2.5), (2.2.6) почти для всех $(t,x) \in S_T \bigcup \overline{\Omega}_0$ ($\Omega_0 = \{(0,x),\, x \in \Omega\}$) и условию переопределения (2.2.7) на (0,T).

Определим функции $a^\gamma(t,x)$, $a^\eta(t,x)$ и $b^\eta(t,x)$ как решения следующих краевых задач.

$$a_t^\gamma + \eta M a_t^\gamma + M a^\gamma - \gamma a^\gamma = f, \quad (a^\gamma + \eta M a^\gamma)|_{t=0} = U_0, \quad a^\gamma|_{\partial\Omega} = \beta; \quad (2.2.11)$$

$$a_t^\eta + \eta M a_t^\eta + M a^\eta + \eta^{-1} a^\eta = f, \quad (a^\eta + \eta M a^\eta)|_{t=0} = U_0, \quad a^\eta|_{\partial\Omega} = \beta; \quad (2.2.12)$$

$$b^\eta + \eta M b^\eta = 0, \qquad b^\eta|_{\partial\Omega} = \omega, \quad (2.2.13)$$

где $\gamma > 0$ – действительное число. Введем также обозначение

$$\Psi_{a,b}(t) = (a_t^\eta, b^\eta) + \eta\langle M a_t^\eta, b^\eta\rangle_{1,M} + \langle M a^\eta, b^\eta\rangle_{1,M} - (f, b^\eta), \quad (2.2.14)$$

Достаточные условия существования и единственности решения задачи 2.1 устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполняются предположения I-II, $\eta > 0$, $\partial\Omega \in C^2$ и*

(i) $f \in C([0,T]); L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\omega \in C([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi(t) \in C([0,T])$;

(ii) $f \geq 0$ *почти всюду в* Q_T, $U_0 \geq 0$ *почти для всех* $x \in \Omega$, $\beta \geq 0$, $\omega \geq 0$ *почти для всех* $(t,x) \in S_T$; *существуют* α_0, $\Phi_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha_0 > 0$ *такие, что для любого* $t \in [0,T]$ *выполняются неравенства*

$$(a^\eta, b^\eta) \geq \alpha_0, \tag{2.2.15}$$

$$\Phi_0 \leq \Phi(t) \equiv \varphi(t) - \Psi_{a,b}(t) \leq \eta^{-1}(a^\eta, b^\eta). \tag{2.2.16}$$

Тогда существует решение $\{u, k\}$ *задачи 2.1, и это решение единственно. Причем, справедливы оценки*

$$0 \leq a^\eta \leq u \leq a^\gamma, \qquad -\gamma \leq k(t) \leq \eta^{-1}, \qquad \|u\|_2 + \|u_t\|_2 \leq C_1 \tag{2.2.17}$$

с некоторой константой $C_1 > 0$ *почти всюду в* Q_T.

Доказательство. Следуя идее доказательства теоремы 2.1.2, сведем задачу 2.1 к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением для $g(t)$. Для этого умножим (2.2.4) на b^η в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых полученного равенства. С учетом условий (2.2.5)–(2.2.7) это даст

$$(u_t, b^\eta) - \varphi(t) + \int\limits_{\partial\Omega} \big(\eta\beta_t + \beta\big)\frac{\partial b^\eta}{\partial \overline{N}} ds + (g(t)u, b^\eta) + (\eta u_t + u, M b^\eta) = (f, b^\eta),$$

откуда ввиду (2.2.13), (2.2.14), (2.2.16) и того факта, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \big(\eta\beta_t + \beta\big)\frac{\partial b^\eta}{\partial \overline{N}} ds = \Psi_{a,b}(t) + \eta^{-1}(a^\eta, b^\eta) + (f, b),$$

следует соотношение

$$g(t)(u, b^\eta) = \varphi(t) - \Psi_{a,b}(t) - \eta^{-1}(a^\eta, b^\eta) + \eta^{-1}(u, b^\eta), \tag{2.2.18}$$

при всех $t \in [0,T]$. Пусть оператор B каждому элементу $z(t) \in C_\gamma([0,T]) = \{z \in C([0,T]),\ -\gamma \le z \le \eta^{-1}\}$ ставит в соответствие функцию $Bz \in C([0,T])$ по закону

$$Bz = \frac{\varphi(t) - \Psi_{a,b}(t) - \eta^{-1}(a^\eta, b^\eta) + \eta^{-1}(u_z, b^\eta)}{(u_z, b^\eta)}, \tag{2.2.19}$$

где u_z – решение прямой задачи (2.2.4)–(2.2.6) с $g(t) = z(t)$. Значение Bz оператора B определено при каждом $z \in C_\gamma([0,T])$. В самом деле, по теореме 2.2.1 прямая задача (2.2.4)–(2.2.6) с $g = z$ имеет единственное решение $u_z \in C^1([0,T]); W_2^2(\Omega))$ для каждого $z \in C_\gamma([0,T])$. Кроме того, из теоремы 1.4.2 следует, что при $z(t) \in C_\gamma([0,T])$

$$0 \le a^\eta \le u_z \le a^\gamma \tag{2.2.20}$$

почти всюду в Q_T. В силу принципа максимума для эллиптических уравнений $b \ge 0$ почти всюду в $\overline{Q}_T$, поэтому в условиях теоремы $(u_z, b) > 0$ на $[0,T]$.

Задача 2.1 разрешима тогда и только тогда, когда операторное уравнение

$$z = Bz \tag{2.2.21}$$

имеет решение в $C([0,T])$. Действительно, вывод уравнения (2.2.19) показывает, что если $\{u_z, z\}$ – это решение задачи 2.1, то z является неподвижной точкой оператора B согласно (2.2.19). С другой стороны, пусть z^* – это решение уравнения (2.2.21) и u^* – решение задачи (2.2.4)–(2.2.6) с $g(t) = z^*(t)$. Умножим (2.2.4) на b^η в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых левой части с учетом (2.2.14), (2.2.19), (2.2.21). Это даст

$$(u_t - a_t^\eta, b) - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{N}}\big(\eta u_t + u\big)\omega\ ds + \eta\langle M(u-a^\eta)_t, b\rangle_{1,M} + \langle M(u-a^\eta), b\rangle_{1,M} +$$

$$+\varphi(t) + \eta^{-1}(u - a^\eta, b) = 0.$$

Повторно интегрируя по частям в третьем и четвертом слагаемых левой части данного соотношения, получаем условие переопределения (2.2.7). Это означает, что пара $\{u^*, z^*\}$ является решением задачи 2.1.

Докажем, что существует такое $\gamma > 0$, при котором оператор B отображает $C_\gamma([0,T])$ в себя. Ввиду (2.2.16) $Bz \le \eta^{-1}$ для каждого $z(t) \in C([0,T])$ и

$z(t) \leq \eta^{-1}$. В силу (2.2.16), (2.2.19) и (2.2.20) справедливы соотношения

$$Bz \geq \frac{\min\{0, \Phi_0\} - \eta^{-1}(a^\eta, b^\eta)}{(a^\eta, b^\eta)} = -\Big(\frac{1}{\eta} - \frac{\min\{0, \Phi_0\}}{(a^\eta, b^\eta)}\Big).$$

Следовательно, оператор B отображает $C_\gamma([0, T])$ в себя при

$$\gamma = \frac{1}{\eta} - \frac{\min\{0, \Phi_0\}}{(a^\eta, b^\eta)}, \tag{2.2.22}$$

и имеет место неравенство

$$-\gamma \leq Bz \leq \eta^{-1}. \tag{2.2.23}$$

Кроме того, оператор B является сжимающим на $C_\gamma([0, T])$. Действительно, пусть $z_1, z_2 \in C_\gamma([0, T])$ и u_1, u_2 – решения задачи (2.2.4)–(2.2.6) при $g(t) = z_1(t)$ and $g(t) = z_2(t)$ соответственно. Умножая разность уравнений (2.2.4) с $g = z_1$ и $g = z_2$ на $\bar{u} = u_1 - u_2$ в смысде скалярного произведения $L^2(\Omega)$, интегрируя по частям во втором и третьем слагаемых и оценивая правую часть результирующего уравнения, можно показать, что ввиду (2.2.20)

$$\frac{d}{dt}\Big[\|\bar{u}\|^2 + \eta\langle M\bar{u}, \bar{u}\rangle_1\Big] \leq \Big(2\gamma + 1\Big)\Big(\|\bar{u}\|^2 + \eta\langle M\bar{u}, \bar{u}\rangle_1\Big) + |\bar{z}|^2 \max_{t\in[0,T]} \|a^\eta\|^2,$$

где $\bar{z} = z_1 - z_2$. Согласно лемме Гронуолла из этого неравенства следует оценка

$$\|\bar{u}\|^2 + \eta\langle M\bar{u}, \bar{u}\rangle_1 \leq e^{2\gamma+1} \max_{t\in[0,T]} \|a^\eta\| \int_0^t |\bar{z}|^2 d\tau \equiv C_4 \int_0^t |\bar{z}|^2 d\tau. \tag{2.2.24}$$

С другой стороны, оценивая разность $Bz_1 - Bz_2$ с учетом (2.2.19), (2.2.20), (2.2.22) и (2.2.23), получаем, что

$$|Bz_1 - Bz_2| \leq \frac{\gamma\|b^\eta\|}{(a^\eta, b^\eta)}\|u_1 - u_2\|.$$

Объединяя (2.2.24) и последнее соотношение, приходим к неравенству

$$|Bz_1 - Bz_2| \leq C_5\Big(\int_0^t |\bar{z}|^2 d\tau\Big)^{1/2}, \tag{2.2.25}$$

где постоянная $C_5 > 0$ зависит от C_4, γ, $\max_{t\in[0,T]} \|b^\eta\|$ и $\min_{t\in[0,T]}(a^\eta, b^\eta)$. Введем в пространстве $C([0, T])$ эквивалентную норму

$$\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}_\nu = \max_{t\in[0,T]}\{e^{-\nu t}|\cdot|\} \tag{2.2.26}$$

с константой $\nu > 0$. Тогда в силу (2.2.25), получаем, что

$$\left| Bz_1 - Bz_2 \right|_{\nu} \leq C_5 \max_{t\in[0,T]} \Big\{ e^{-\nu t}\Big(\int\limits_0^t e^{2\nu\tau}\, e^{-2\nu\tau}|\bar{z}|^2 d\tau\Big)^{1/2}\Big\} \leq \frac{C_5}{(2\nu)^{1/2}} \left| \bar{z} \right|_{\nu}.$$

Последнее неравенство доказывает сжимаемость оператора B на множестве $C_\gamma([0,T])$ в норме $\left| \cdot \right|_{\nu}$ при $\nu > C_5^2/2$. Тогда согласно принципу сжимающих отображений оператор B имеет единственную неподвижную точку $g^*(t) \in C_\gamma([0,T])$, и пара функций $\{g^*(t), u^*\}$, где u^* удовлетворяет уравнению (2.2.4) с $g = g^*(t)$ и краевым условиям (2.2.5)–(2.2.6), является решением задачи 2.1. Единственность этого решения следует из сжимаемости оператора B и оценки (2.2.24).

Для завершения доказательства теоремы осталось получить оценки u и u_t в $W_2^2(\Omega)$. Умножим разность уравнений (2.2.4) и (2.2.12)

$$w_t + \eta M w_t + M w = -g(t)u + \frac{1}{\eta}a^\eta \tag{2.2.27}$$

на Mw^η, где $w^\eta \equiv u - a^\eta$, в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Будем иметь:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle w^\eta, Mw^\eta\rangle_{1,M} + \frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\|Mw^\eta\|^2 + \|Mw^\eta\|^2 = \big(\eta^{-1}a^\eta - g(t)u, Mw^\eta\big). \tag{2.2.28}$$

Далее, интегрируя (2.2.28) по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq T$ и оценивая правую часть результирующего равенства с учетом того, что в силу (2.2.17)

$$|(\eta^{-1}a^\eta - g(t)u, Mw^\eta)| \leq \frac{1}{2}\big(\gamma\|a^\gamma\| + \eta^{-1}\|a^\eta\|\big)^2 + \frac{1}{2}\|Mw^\eta\|^2.$$

получаем соотношение

$$\langle w^\eta, Mw^\eta\rangle_{1,M} + \eta\|Mw^\eta\|^2 \leq \int\limits_0^\tau \big(\gamma\|a^\gamma\| + \eta^{-1}\|a^\eta\|\big)^2 dt, \tag{2.2.29}$$

которое в силу неравенства [85, Глава 2]

$$\|v\|_2 \leq c\|Mv\| \tag{2.2.30}$$

для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ с константой $c > 0$, зависящей от M и mesΩ, приводит к оценке

$$\|u\|_2 \leq \frac{c}{\eta^{1/2}}\Big[\Big(\int\limits_0^t \big(\gamma\|a^\gamma\| + \eta^{-1}\|a^\eta\|\big)^2 d\tau\Big)^{1/2} + \|a^\gamma\|\Big] + \|a^\gamma\|_2. \tag{2.2.31}$$

Вернемся к уравнению (2.2.27). Выразим из него слагаемые, содержащие w_t и оценим по модулю. Ввиду (2.2.17), (2.2.29) имеем:

$$\|(I+\eta M)w_t^\eta\| = \| - Mw - g(t)u + \eta^{-1}a^\eta\| \leq$$

$$\leq (\eta^{-1}T^{1/2}+1)(\eta^{-1}\|a^\eta\| + \gamma\|a^\gamma\|) \equiv C_6. \tag{2.2.32}$$

Далее, умножая (2.2.27) на w_t^η в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям во втором слагаемом левой части результирующего равенства, получим, что

$$\|w_t^\eta\|^2 + \eta\langle Mw_t^\eta, w_t^\eta\rangle_1 = \big(- Mw^\eta - g(t)u + \eta^{-1}a^\eta, w_t^\eta\big),$$

откуда и из (2.2.2), (2.2.17) и (2.2.32) следует оценка

$$\|w_t^\eta\|^2 + 2\eta m_0\|w_t^\eta\|_1^2 \leq C_6^2. \tag{2.2.33}$$

В условиях теоремы оператор $I+\eta M$ является сильно эллиптическим, поэтому для каждого $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\bigcap W_2^2(\Omega)$ справедливо неравенство аналогичное (2.2.30)

$$\|v\|_2 \leq \tilde{c}(\|(I+\eta M)v\| + \|v\|) \tag{2.2.34}$$

с постоянной $\tilde{c} > 0$, зависящей от m_1, m_2 η и $\partial\Omega$. Это неравенство в силу (2.2.32) и (2.2.33) дает оценку u_t в норме $W_2^2(\Omega)$.

$$\|u_t\|_2 \leq 2\tilde{c}C_6 + \|a_t^\eta\|_2. \tag{2.2.35}$$

Объединяя (2.2.31) и (2.2.35) приходим к последней оценке (2.2.17). Теорема доказана.

В условиях теоремы 2.2.2 построенное решение $\{u(t,x), g(t)\}$ непрерывно зависит от исходных данных задачи 2.1.

Теорема 2.2.3. *Пусть выполняются предположения теоремы 2.2.2 и $\{u_j(t,x), g_j(t)\}$ – единственное решение задачи 2.1, где $f = f_j(t,x)$, $U_0 = U_0^j(x)$, $\beta = \beta_j(t,x)$, $\omega = \omega_j(t,x)$ и $\varphi = \varphi_j(t)$, $j = 1,2$. Тогда справедливы оценки*

$$\|g_1 - g_2\|_{C([0,T])} \leq K_3\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \big[|\varphi_1-\varphi_2| + \|f_1-f_2\| + \|\beta_1-\beta_2\|_{1/2}$$

$$+\|\omega_1-\omega_2\|_{1/2}\big] + \|U_0^1 - U_0^2\|\Big\}, \tag{2.2.36}$$

$$\|u_1-u_2\|_{C^1([0,T];W_2^2(\Omega))} \leq K_4\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \big[|\varphi_1-\varphi_2| + \|f_1-f_2\| + \|\omega_1-\omega_2\|_{1/2}\big] +$$

$$+\|\beta_1-\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|U_0^1-U_0^2\|\Big\} \tag{2.2.37}$$

с положительными постоянными K_3 *и* K_4*, зависящими от* η*,* T*,* m_1*,* m_2 γ*,* α_0, $\max_{t\in[0,T]}\{\|f_j\|, \|\omega_j\|_{1/2}, |\varphi_j|\}$, $\|\beta_j\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))}$, $j=1,2$.

Доказательство. Пусть a_j^η, a_j^γ и b_j^η – решения задач (2.2.11)–(2.2.13), где $\gamma=\gamma_j$, $f=f_j$, $U_0=U_0^j$ $\beta=\beta_j$, $\omega=\omega_j$, $j=1,2$. Повторяя рассуждения, приведшие к (2.2.21), можно показать, что $g_j(t)$ является решением операторного уравнения $z=B_jz$, где B_jz определяется законом соответствия (2.2.19) для каждого $z\in C_{\gamma_j}([0,T])$, и γ_j задается соотношением (2.2.22) с $a^\eta=a_j^\eta$, $b^\eta=b_j^\eta$, $j=1,2$. В силу (2.2.15), (2.2.17) и (2.2.18) разность $\tilde g=g_1-g_2$ удовлетворяет равенству

$$\tilde g(u_1,b_1^\eta)=-g_2((\tilde u,b_1^\eta)+(u_2,\tilde b^\eta))+\tilde\varphi+\tilde\Psi_{a,b}+\eta^{-1}[(\tilde u-\tilde a^\eta,b_1^\eta)+(u_2-a_2^\eta,\tilde b^\eta)],$$

где $\Psi_{a,b}^j(t)$ задается формулой (2.2.14) с $a^\eta=a_j^\eta$, $b^\eta=b_j^\eta$ и $f=f_j$, $j=1,2$, $\tilde\Psi_{a,b}=\Psi_{a,b}^1-\Psi_{a,b}^2$, $\tilde\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, $\tilde u=u_1-u_2$, $\tilde a^\eta=a_1^\eta-a_2^\eta$, $\tilde b^\eta=b_1^\eta-b_2^\eta$. Из последнего равенства, (2.2.15) и (2.2.17) следует, что

$$|\tilde g|\le C_7\big[|\tilde\varphi|+|\tilde\Psi_{a,b}|+\|\tilde a\|+\|\tilde b\|\big]+\alpha_0^{-1}(\gamma_2+\eta^{-1})\|\tilde u\|\|b_1^\eta\|. \qquad (2.2.38)$$

Здесь положительная постоянная C_7 зависит от $\max_{t\in[0,T]}\{\|a_j^\eta\|, \|a_j^\gamma\|, \|b_j^\eta\|\}$, η, α_0, γ_j, $j=1,2$.

С другой стороны, функции $\tilde w=\tilde u-\tilde a$ и $\tilde k$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde w_t+\eta M\tilde w_t+M\tilde w+g_1(t)\tilde w=-(g_1(t)-\eta^{-1})\tilde a-\tilde g u_2, \qquad (2.2.39)$$
$$(\tilde w+\eta M\tilde w)|_{t=0}=0, \qquad \tilde w|_{\partial\Omega}=0.$$

Умножим (2.2.39) на $\tilde w$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых и оценим правую часть результирующего равенства с помощью (2.2.17) и неравенства Коши. Применяя лемму Гронуолла к полученному неравенству, приходим к оценке

$$\|\tilde u\|\le\left[\int\limits_0^t\big((\eta^{-1}+\gamma_1)^2\|\tilde a\|^2+|\tilde g|^2\|a_2^\gamma\|^2\big)e^{2(1+\gamma_1)(t-\tau)}d\tau\right]^{1/2}+\|\tilde a\|. \qquad (2.2.40)$$

Из этого неравенства и (2.2.38) следует, что

$$|\tilde g|_\nu\le C_8\big\{|\tilde\varphi|_\nu+|\tilde\Psi_{a,b}|_\nu+\max_{t\in[0,T]}[(\|\tilde a\|+\|\tilde b\|)e^{-\nu t}]+(2\nu)^{-1/2}|\tilde g|_\nu\big\}$$

где $|\cdot|_\nu$ – норма (2.2.26), и положительная константа C_8 зависит от C_7, η, α_0, T, γ_j, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a_j^\eta\|, \|a_j^\gamma\|, \|b_j^\eta\|\}$, $j = 1, 2$. Выбирая $\nu = \nu_1 \equiv 2C_8^2$, получаем оценку

$$\|\tilde{g}\|_{C([0,T])} \leq 2C_8 e^{\nu_1 T} \max_{t\in[0,T]} \big\{|\tilde{\varphi}| + |\tilde{\Psi}_{a,b}| + \|\tilde{a}\| + \|\tilde{b}\|\big\}, \qquad (2.2.41)$$

которая ввиду (2.2.40) влечет за собой оценку для $\tilde{u}$:

$$\max_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}\| \leq C_9 \max_{t\in[0,T]} \big\{|\tilde{\varphi}| + |\tilde{\Psi}_{a,b}| + \|\tilde{a}\| + \|\tilde{b}^\eta\|\big\}, \qquad (2.2.42)$$

где C_9 зависит от C_8, η, α_0, T, ν_1, γ_j, $\max_{t\in[0,T]}\|a_j^\gamma\|$, $j = 1, 2$.

Неравенства (2.2.41) и (2.2.42) позволяют вывести соответствующие оценки для $\tilde{u}$ in $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Повторяя рассуждения, приведшие к (2.2.31) и (2.2.33), применительно к (2.2.39) и используя (2.2.17), (2.2.30), (2.2.31) for u_j and g_j with $a = a_j$ and $\gamma = \gamma_j$, $j = 1, 2$, можно показать, что

$$\|\tilde{u}\|_2 \leq c\big[\gamma_1\big(\|\tilde{a}\|_{L^2(Q_T)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(Q_T)}\big) + \|\tilde{g}\|\,\|a_2^\gamma\|_{L^2(Q_T)}\big] + \|\tilde{a}\|_2, \qquad (2.2.43)$$

$$\|\tilde{u}_t\| \leq (\eta^{-1}(T+\eta))^{1/2}\big[\gamma_1\|\tilde{u}\| + \|\tilde{g}\|\,\|a_2^\gamma\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\big] + \|\tilde{a}_t\|, \qquad (2.2.44)$$

Далее, в силу (2.2.3) и (2.2.43) из (2.2.39) следует неравенство

$$\|(I+\eta M)\tilde{w}_t\| \leq \gamma_1\|\tilde{u}\| + |\tilde{g}|\|a_2^\gamma\| + m_3(\|\tilde{a}\|_2 + \|\tilde{u}\|_2), \qquad (2.2.45)$$

которое вместе с (2.2.34) и (2.2.45) дает оценку

$$\|\tilde{u}_t\|_2 \leq \tilde{c}\big[\gamma_1\|\tilde{u}\| + |\tilde{g}|\|a_2^\gamma\| + m_2(\|\tilde{a}\|_2 + \|\tilde{u}\|_2) + \|\tilde{a}_t\| + \|\tilde{u}_t\|\big] + \|\tilde{a}_t\|_2.$$

Объединим последнее неравенство и (2.2.41)–(2.2.44) с учетом того, что по определению $\Psi_{a,b}^j$, $j = 1, 2$,

$$|\tilde{\Psi}_{a,b}(t)| \leq \big[(1+m_2\eta)\|\tilde{a}_t\|_1 + m_2\|\tilde{a}\|_1 + \|\tilde{f}\|\big]\|b_1^\eta\| + C_{10}\|\tilde{b}^\eta\|_1,$$

где константа C_{10} зависит от m_2, $\mathrm{mes}\Omega$, η, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a_2^\eta\|, \|b_1^\eta\|, \|f_2\|\}$. Применяя к полученному соотношению неравенства

$$\|\tilde{a}\|_q \leq C_{12}(\|f_1 - f_2\| + \|\tilde{\beta}\|_{q-1/2} + \|U_0^1 - U_0^2\|),$$
$$\|\tilde{a}_t\|_q \leq C_{13}(\|f_1 - f_2\| + \|\tilde{\beta}\|_{q-1/2} + \|\tilde{\beta}_t\|_{q-1/2} + \|U_0^1 - U_0^2\|),$$
$$\|\tilde{b}^\eta\|_1 \leq C_{11}\|\omega_1 - \omega_2\|_{1/2}$$

для всех $t \in [0, T]$, где постоянные C_{11}, C_{12} и C_{13} зависят от η, m_1, m_2, mesΩ и константы из неравенства вложения $W_2^{q-1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow W_2^q(\Omega)$, $q = 1, 2$, приходим к оценкам (2.2.36), (2.2.37). Теорема доказана.

Замечание 2.2.1. Класс исходных данных, отвечающих условиям теоремы 2.2.2, не пуст. Действительно, пусть $\Omega = (0, \pi)$, $\eta > 0$, $M = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\beta(t, x) \equiv const \geq 0$, $\omega(t, x) \equiv const > 0$, $f \equiv 0$ и $U_0 = \beta + (1 + \eta)\sin x \geq 0$. В этом случае, $a^\eta = e^{-t/\eta}(\beta + \sin x)$, $b^\eta = \omega(\mathrm{sh}\frac{\pi - x}{\sqrt{\eta}} + \mathrm{sh}\frac{x}{\sqrt{\eta}})/\mathrm{sh}\frac{\pi}{\sqrt{\eta}}$. Тогда $(a^\eta, b^\eta) \geq 2\eta\omega e^{-t/\eta}(1 + \eta)^{-1} > 0$, то есть выполняется (2.2.15). Так как $\Psi_{a,b}(t) = -\eta^{-1}(a^\eta, b^\eta)$, условию (2.2.16) удовлетворяет любая неотрицательная функция $\varphi(t) \in C([0, T])$.

2.3 Идентификация неизвестного коэффициента при операторе второго порядка

В этом параграфе рассматривается обратная задача идентификации неизвестного коэффициента $k(t)$ в члене второго порядка уравнения аналогичного (2.2.4) при краевых условиях (2.2.5), (2.2.6) и условии переопределения типа (2.1.17). Устанавливаются достаточные условия ее однозначной разрешимости, а также исследуется гладкость и непрерывная зависимость решения от исходных данных задачи.

2.3.1 Задача с граничным условием первого рода. Предварительные замечания

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, $T > 0$ – произвольное действительное число и $Q_T = \Omega \times (0, T)$ – цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Точки области Ω снова будем обозначать через x, точки отрезка $[0, T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T - через (t, x).

Пусть $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$Mv = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla v) + m(x)v, \tag{2.3.1}$$

где $\mathcal{M}(x)$ – матрица функций $m_{ij}(x)$, а $m(x)$, $g(t, x)$ – скалярные функции. Будем снова предполагать выполненными условия I и II из предыдущего параграфа.

I. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$, и $m(x)$ ограничены в Ω. Оператор M сильно эллиптический, т. е. существуют положительные постоянные m_1 и m_2 такие, что для любого $v \in W_2^1(\Omega)$

$$m_1 \|v\|_1^2 \le \big\langle Mv, v \big\rangle_{1,M} \le m_2 \|v\|_1^2. \tag{2.3.2}$$

II. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ for $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и $m(x) \ge 0$ при $x \in \Omega$.

Из предположения I следует, что существует константа $m_3 > 0$ такая, что для каждого $v \in W_2^2(\Omega)$

$$\|Mv\| \le m_3 \|v\|_2. \tag{2.3.3}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 2.2. При заданной постояной η и функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ найти пару функций $\{u(t,x), k(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t + \eta M u_t + k(t)\, Mu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.3.4}$$

начальному условию

$$(u + \eta Mu)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3.5}$$

граничным данным

$$u\big|_{S_T} = \beta(t,x), \tag{2.3.6}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t) k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.3.7}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathbf{n}, \mathcal{M}(x)\nabla)$ и $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем функции $a(t,x)$, $b(t,x)$ и $h^\eta(t,x)$, как решения задач Дирихле

$$Ma = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad a\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x); \tag{2.3.8}$$

$$Mb = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad b\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x); \tag{2.3.9}$$

и

$$h^\eta + \eta M h^\eta = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h^\eta\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x) \tag{2.3.10}$$

соответственно, и следующие обозначения:

$$\|v\|_{1,M} = \big\langle Mv, v \big\rangle_{1,M}^{1/2}, \quad v \in W_2^1(\Omega);$$

$$\Psi(t) = \big\langle Ma, b \big\rangle_{1,M}, \qquad F(t,x) = a_t - f(t,x) + g(t,x)a, \tag{2.3.11}$$

$$\Phi^\eta(t) = \varphi_2(t) - \frac{\eta}{2}\left\langle Ma_t, b\right\rangle_{1,M} + (f(t,x) - a_t, h^\eta), \tag{2.3.12}$$

$$\overline{\Psi} = \max_{t\in[0,T]} \Psi(t), \quad \overline{\Phi}^\eta = \max_{t\in[0,T]} \Phi^\eta(t), \quad \overline{\varphi}_i = \max_{t\in[0,T]} \varphi_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{2.3.13}$$

2.3.2 Существование и единственность

Перейдем к исследованию задачи 2.2. Оно опирается на два утверждения для прямой задачи (2.3.4)–(2.3.6) с известной функцией $k(t)$, а именно на теорему сравнения, доказанную в первой главе (см. теорему 1.4.1) и лемму 2.2.1, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности решения прямой задачи (2.3.4)–(2.3.6).

Под решением задачи 2.2 будем понимать пару функций $\{u, k\}$ со следующими свойствами:

1) $k(t)$ непрерывна при $0 \le t \le T$;

2) $u \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$;

3) выполняется уравнение (2.3.4) и условия (2.3.5)–(2.3.7).

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются предположения I–II и η – положительная постоянная. Предположим, что*
(i) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;
(ii) f, U_0, β, ω, φ_1 *неотрицательны и*

$$\int_\Omega h^\eta \, dx \ge h_0 = \mathrm{const} > 0, \quad t \in [0,T]; \tag{2.3.14}$$

(iii) *существуют константы* α_i, $i = 0, 1, 2$, *такие, что* $0 \le \alpha_i \le 1$ *при* $i = 0, 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 < 2$, $\alpha_2 > 0$ *и*

$$(1 - \alpha_0)\, \varphi_1(t) + (1 - \alpha_1)\, \Psi(t) \ge \alpha_2, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.15}$$

$$\chi(0) + a(0,x) - U_0(x) \geq 0 \tag{2.3.16}$$

почти для всех $x \in \Omega$,

$$g(t,x)\chi(t) + \chi'(t) + F(t,x) \geq 0 \tag{2.3.17}$$

почти для всех $(t,x) \in Q_T$, *где*

$$\chi(t) = \eta\left(\alpha_0\varphi_1(t) + \alpha_1\Psi(t)\right)\left[\int\limits_\Omega h^\eta\, dx\right]^{-1};$$

(iv) *для любого* $t \in [0,T]$ *выполняется неравенство*

$$\Phi^\eta(t) \geq \Phi_0^\eta = \mathrm{const} > 0 \tag{2.3.18}$$

и $g(t,x)$ *удовлетворяет условию*

$$\max_{\overline{\Omega}} g(t,x) \leq \frac{\Phi^\eta(t)}{\eta}\left[\varphi_1 + \Psi + 2\eta^{-1}(a,h^\eta)\right]^{-1}. \tag{2.3.19}$$

Тогда задача 2.2 имеет единственное решение $\{u,k\} \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$. *Причем, для* u *справедливы оценки*

$$0 \leq u(t,x) \leq \chi(t) + a(t,x) \tag{2.3.20}$$

почти для всех $(t,x) \in Q_T$ *и*

$$\|u(t)\|_1^2 + \|u_t(t)\|^2 + \eta\left(\|u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right) \leq C, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.21}$$

и коэффициент $k(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$k_0 \leq k(t) \leq k_1 \tag{2.3.22}$$

с некоторыми положительными константами k_0 *и* k_1.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 2.2.2, сведем задачу 2.2 к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением для $k(t)$. Положим $w(t,x) = a(t,x) - u(t,x)$. Пара $\{w(t,x), k(t))\}$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_t + \eta M w_t + k(t) M w + g w = F(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\ (w + \eta M w)\big|_{t=0} = a(0,x) - U_0(x), \quad x \in \Omega, \\ w\big|_{S_T} = 0, \end{cases} \tag{2.3.23}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_t}{\partial\overline{N}}+k\frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right\}\omega\,ds=(\varphi_1+\Psi)k-\varphi_2+\eta\big\langle Ma_t,b\big\rangle_{1,M},\quad t\in(0,T).\quad(2.3.24)$$

Умножим $(2.3.23_1)$ на $h^\eta(t,x)$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых левой части. Учитывая (2.3.10), (2.3.24) и тот факт, что

$$(w_t+\eta Mw_t,h^\eta)_0+k(t)(Mw,h^\eta)$$
$$=-\Big\{(\varphi_1+\Psi)k(t)-\varphi_2+\eta\big\langle Ma_t,b\big\rangle_{1,M}\Big\}-\frac{k(t)}{\eta}(w,h^\eta),$$

получим уравнение

$$k(t)\Big(\varphi_1(t)+\Psi(t)+\frac{1}{\eta}(w,h^\eta)\Big)=\Phi^\eta(t)-\left(g(t,x)(a-w),h^\eta\right).\qquad(2.3.25)$$

Это уравнение можно рассматривать как операторное уравнение второго рода $y=Ay$ с оператором A, который каждому элементу $y\in C([0,T])$ ставит в соответствие элемент

$$Ay=\Big[\Phi^\eta(t)-(g(t,x)(a-w_y),h^\eta)\Big]\Big(\varphi_1(t)+\Psi(t)+\frac{1}{\eta}(w_y,h^\eta)\Big)^{-1},$$

где w_y – решение прямой задачи (2.3.23) при $k=y$. В силу теоремы 1.4.1 значение оператора A определено на любом элементе $k(t)\geq 0$ при $t\in[0,T]$. Можно показать аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, что задача 2.2 имеет решение тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение для k, то есть задача 2.2 эквивалентна задаче (2.3.23), (2.3.25) . Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для (2.3.23), (2.3.25).

Будем искать решение $\{w(t,x),k(t)\}$ как предел последовательности приближений $\{w^i(t,x),k^i(t)\}$, построенных с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} w^i_t+\eta Mw^i_t+k^{i-1}(t)Mw^i+g(t,x)w^i=F(t,x),\\ (w^i+\eta Mw^i)\big|_{t=0}=a(0,x)-U_0(x),\\ w^i\big|_{S_T}=0,\end{cases}\qquad(2.3.26)$$

$$k^i(t)\Big(\varphi_1(t)+\Psi(t)+\frac{1}{\eta}(w^i,h^\eta)\Big)=\Phi^\eta(t)-\big(g(t,x)(a-w^i),h^\eta\big)\qquad(2.3.27)$$

при $i=1,2,3,\ldots;\quad w^0(t,x)\equiv 0,\quad k^0(t)\equiv k_0/\eta$. Здесь $k_0\geq 0$ – постоянная, значение которой будет уточнено позже.

Прежде всего, докажем по индукции, что для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$ задача (2.3.26), (2.3.27) имеет единственное решение $\{w^i, k^i\} \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$, удовлетворяющее неравенствам

$$-\chi(t) \le w^i(t,x) \le a(t,x) \quad \text{для почти всех } (t,x) \in \overline{Q}_T, \tag{2.3.28}$$

$$k_0 \le k^i(t) \le k_1 \quad \text{для любого } t \in [0,T], \tag{2.3.29}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\alpha_2} \max_{t \in [0,T]} \left\{ \Phi^\eta(t) + (|g|(a + \chi(t)), h^\eta) \right\}.$$

В самом деле, при $i = 1$ теорема 2.2.1 гарантирует, что задача (2.3.26) имеет единственное решение $w^1 \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ и согласно теореме 1.4.1 из главы 1 выполняется неравенство

$$-\chi(t) \le w^1(t,x) \le a(t,x) \quad \text{для почти всех } (t,x) \in \overline{Q}_T.$$

В силу (2.3.19)

$$\Phi^\eta(t) - (g(a - w_i), h^\eta) \ge \Phi_0^\eta. \tag{2.3.30}$$

Из (2.3.12), (2.3.13), (2.3.15), (2.3.18), (2.3.27), (2.3.28) и (2.3.30) следует, что

$$0 < k_0 = \Phi_0^\eta \Big[\overline{\varphi}_1 + \overline{\Psi} + \frac{1}{\eta} \max_{[0,T]} (a, h^\eta) \Big]^{-1} \le k^1(t) \le k_1, \quad t \in [0,T].$$

Далее, предположим, что при $i \ge 1$ функции $w^i \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ и $k^i \in C([0,T])$ являются решением задачи (2.3.26), (2.3.27) и удовлетворяют соотношениям (2.3.28) и (2.3.29) соответственно. Тогда, повторяя рассуждения аналогичные тем, которые доказывают (2.3.28) и (2.3.29) при $i = 1$, можно показать, что задача (2.3.26), (2.3.27) при i, замененном на $i+1$, также имеет единственное решение $w^{i+1} \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $k^{i+1} \in C([0,T])$, и функции w^{i+1} и k^{i+1} удовлетворяют неравенствам (2.3.28) и (2.3.29) соответственно. Таким образом, по индукции существует единственное решение $w^i \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $k^i \in C([0,T])$ задачи (2.3.26), (2.3.27), и для функций w^i и k^i выполняются неравенства (2.3.28) и (2.3.29) при каждом $i = 1, 2, 3, \dots$.

Для доказательства сходимости последовательности $\{w^i, k^i\}$ необходимо получить оценки производных w^i. Умножим (2.3.26$_1$) на Mw^i в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом.

Оценивая правую часть полученного уравнения с помощью неравенства Коши, в силу (2.3.29) будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left(\left\langle Mw^i, w^i\right\rangle_{1,M} + \eta\|Mw^i\|^2\right) + k_0\|Mw^i\|^2 \le \frac{4}{k_0}\left(\|F\|^2 + 2\|gw^i\|^2\right),$$

откуда и из неравенств (2.3.28) согласно лемме Гронуолла, следует, что

$$\left\|w^i(t)\right\|_1^2 + \eta\left\|Mw^i(t)\right\|^2 \le C_1, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2,3,\ldots.$$

В силу неравенства (2.2.30), а также (2.3.2) и (2.3.28) полученное соотношение приводит к оценке

$$\left\|w^i(t)\right\|_1^2 + \frac{\eta}{c}\left\|w^i(t)\right\|_2^2 \le C_1, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2,3,\ldots. \tag{2.3.31}$$

Здесь C_1 – положительная константа, которая зависит от η, T, $\|U_0\|$, k_0, m_1, m_2, m_3, $\max_{t\in[0,T]}\{\|F\|,\|a\|\}$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$ и не зависит от i.

Далее, умножим ($2.3.26_1$) на w_t^i в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых левой части. Это даст

$$\|w_t^i(t)\|^2 + \eta\left\langle Mw_t^i, w_t^i\right\rangle_{1,M} = -\left(k^{i-1}(t)Mw^i + gw^i, w_t^i\right) + \left(F, w_t^i\right),$$

откуда ввиду (2.3.28)–(2.3.31) вытекает, что

$$\left\|w_t^i(t)\right\|^2 + \eta\left\|w_t^i(t)\right\|_1^2 \le C_2, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2,3,\ldots. \tag{2.3.32}$$

В силу (2.3.28)–(2.3.32) из уравнения (2.3.26) следует оценка

$$\eta\left\|w_t^i(t)\right\|_2^2 \le C_3. \tag{2.3.33}$$

Положительные постоянные C_2, C_3 зависят от η, T, k_0, k_1, $\|U_0\|$, C_1, m_1, m_2, m_3, $\max_{t\in[0,T]}\{\|F(t)\|,\|a(t)\|\}$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$ и независят от i.

Положим

$$\tilde{k}^i(t) = k^{i+1}(t) - k^i(t), \quad \tilde{w}^i(t,x) = w^{i+1}(t,x) - w^i(t,x).$$

Из (2.3.27)–(2.3.29) следует, что

$$|\tilde{k}^i(t)| \le C_4\|\tilde{w}^i(t)\|, \tag{2.3.34}$$

где положительная константа C_4 зависит от η, α_2, k_1, $\max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$ и не зависит от i. Функция $\tilde{w}^i$ является решением задачи

$$\begin{cases} \tilde{w}^i_t + \eta M\tilde{w}^i_t + k^i(t)M\tilde{w}^i + g(t,x)\tilde{w}^i = -\tilde{k}^{i-1}(t)Mw^i, \\ \left(\tilde{w}^i + \eta M\tilde{w}^i\right)\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{w}^i\big|_{S_T} = 0. \end{cases} \tag{2.3.35}$$

Умножим $(2.3.35_1)$ на $M\tilde{w}^i$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых левой части и оценим правую часть полученного уравнения с помощью (2.3.29) и (2.3.31). С учетом предположений I, II это даст

$$\frac{d}{dt}\left(\left\langle\tilde{w}^i, M\tilde{w}^i\right\rangle_{1,M} + \eta\left\|M\tilde{w}^i\right\|^2\right) + k_0\left\|M\tilde{w}^i\right\|^2 \le$$

$$\le \frac{2m_3^2C_1c}{\eta k_0}\left|\tilde{k}^{i-1}(t)\right|^2 + C_5\left(\left\langle\tilde{w}^i, M\tilde{w}^i\right\rangle_{1,M} + \eta\left\|M\tilde{w}^i\right\|^2\right), \tag{2.3.36}$$

где $C_5 = 2(k_0m_1)^{-1}\|g\|^2_{C(\overline{Q}_T)}$. Применяя лемму Гронуолла к (2.3.36), приходим к неравенству

$$\left\langle\tilde{w}^i, M\tilde{w}^i\right\rangle_{1,M} + \eta\left\|M\tilde{w}^i\right\|^2 \le \frac{2m_3^2C_1}{\eta k_0}\int\limits_0^t\left|\tilde{k}^{i-1}(\tau)\right|^2\exp(C_5(t-\tau))\,d\tau,$$

откуда в силу неравенств (2.3.3) и (2.2.30)

$$\|\tilde{w}^i(t)\|_2 \le C_6\left(\int\limits_0^t\left|\tilde{k}^{i-1}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{2.3.37}$$

Положительная постоянная C_6 зависит от η, C_1, C_5, c, m_3, k_0, T и не зависит от i.

Аналогично из (2.3.29)–(2.3.31), $(2.3.35_1)$ и (2.3.37) выводится неравенство

$$\|\tilde{w}^i_t(t)\|_2 \le C_7\left[\left(\int\limits_0^t\left|\tilde{k}^{i-1}(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} + |\tilde{k}^{i-1}|\right], \tag{2.3.38}$$

где положительная постоянная C_7 зависит от η, C_1, C_6, c, T, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$, m_j ($j = \overline{1,3}$) и не зависит от i.

Используем снова эквивалентную норму в $C([0,T])$, введенную в §2.1,

$$\big|\!\!\big|\cdot\big|\!\!\big|_p = \max_{t\in[0,T]} e^{-pt}|\cdot|\}$$

с положительной константой p. Объединяя (2.3.34) и (2.3.37), получаем, что

$$\left| \tilde{k}^i(t) \right|_p \le \frac{C_4C_6}{\sqrt{2p}} \left| \tilde{k}^{i-1}(t) \right|_p \le \left(\frac{C_4C_6}{\sqrt{2p}}\right)^i \left| \tilde{k}^0(t) \right|_p. \tag{2.3.39}$$

Последнее неравенство показывает, что существует предел $k(t)$ последовательности $\{k^i(t)\}$ в $C([0,T])$, если p удовлетворяет условию

$$p > \frac{(C_4C_6)^2}{2}. \tag{2.3.40}$$

Это в свою очередь гарантирует сходимость последовательности $\{w^i\}$ к функции $w(t,x)$ в норме $C^1([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \bigcap W_2^2(\Omega))$ ввиду (2.3.37) и (2.3.38). Переходя к пределу в (2.3.26), (2.3.27) при $i \to \infty$, заключаем, что пара $\{w(t,x), k(t)\}$ является решением задачи (2.3.23), (2.3.25). Кроме того, для $w(t,x)$ и $k(t)$ справедливы оценки (2.3.20), (2.3.22), (2.3.28), (2.3.31)–(2.3.33).

Докажем, что полученное решение единственно. Пусть $\{w', k'\}$ и $\{w'', k''\}$ – два решения задачи (2.3.23), (2.3.25). Тогда их разность $\{\bar{w}, \bar{k}\}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \bar{w}_t + \eta M\bar{w}_t + k'(t)M\bar{w} + g(t,x)\bar{w} = -\bar{k}(t)Mw'' \quad \text{in } Q_T, \\ (\bar{w} + \eta M\bar{w})\big|_{t=0} = 0, \qquad \bar{w}\big|_{S_T} = 0, \\ \bar{k}\left(\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w', h^\eta),\right) = (g\bar{w}, h^\eta) - \frac{k''}{\eta}(\bar{w}, h^\eta) \quad \text{in } [0,T]. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения, приведшие к (2.3.37), (2.3.39) можно показать, что

$$\|\bar{w}(t)\|_2 \le C_6 \left(\int_0^t \left|\bar{k}(\tau)\right|^2 d\tau \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \left| \bar{k}(t) \right|_p \le \frac{C_4C_6}{\sqrt{2p}} \left| \bar{k}(t) \right|_p.$$

В силу (2.3.40), из этих неравенств вытекает, что $\bar{k} \equiv 0$ и, следовательно, $\bar{w} \equiv 0$. Это означает единственность решения задачи (2.3.23), (2.3.25). Теорема доказана.

Замечание 2.3.1. Доказательство теоремы 2.3.1 опирается на предположения (2.3.14)–(2.3.15). Условие (2.3.14) выполняется, когда ω непрерывна $[0,T] \times \partial\Omega$ и строго положительна на некоторой гиперповерхности $[0,T] \times \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Неравенство (2.3.15) обеспечивает согласованность β и ω. Например, если β не является постоянной на $[0,T] \times \partial\Omega$, $\omega \equiv \beta \ge 0$ и $\beta > 0$ на некоторой части границы $\partial\Omega$ при всех $t \in [0, T]$, то справедливость (2.3.15) вытекает из определения $\Psi(t)$.

Утверждение теоремы 2.3.1 остается справедливым для оператора M более общей формы

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + (\vec{m}(x), \nabla)_R, +m(x)v, \tag{2.3.41}$$

удовлетворяющего предположениям I и II, где $\vec{m}$ – вектор функций $m_i(x)$, ограниченных в Ω. Поскольку такой оператор M, вообще говоря, не является самосопряженным, функцию a следует переопределить как решение a^* задачи (2.3.8) с оператором M общего вида, а функции b и h^η заменить на решения задач для уравнений $M^*b^* = 0$ и $h^\eta_* + \eta M^* h^\eta_* = 0$ с граничными условиями из задач (2.3.9), (2.3.10). Здесь M^* – оператор, сопряженный к M,

$$M^*v = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla v) - div(\vec{m}(x)v) + m(x)v \quad \text{для } v \in W_2^2(\Omega).$$

Формулировка и доказательство теоремы существования и единственности решения задачи 2.2 с оператором M вида (2.3.41) практически полностью повторяет формулировку и доказательства теоремы 2.3.1 с той лишь разницей, что в условиях теоремы 2.3.1 функции $\Psi(t)$, $\chi(t)$, $F(t,x)$ и $\Phi^\eta(t)$ заменяются на $\Psi^*(t)$, $\chi^*(t)$, $F^*(t,x)$ и $\Phi^\eta_*(t)$, где

$$\Psi^*(t) = \big\langle Ma^*, b^*\big\rangle_{1,M} + \big((\vec{m}, \nabla a^*)_R, b^*\big),$$

$$\chi^* = \eta\big(\alpha_0\varphi_1(t) + \alpha_1\Psi^*(t)\big)\Big[\int\limits_\Omega h^\eta_* dx\Big]^{-1},$$

$$F^*(t,x) = a^*_t - f(t,x) + g(t,x)a^*,$$

$$\Phi^\eta_*(t) = \varphi_2(t) + (f - a^*_t, h^\eta_*) - \big\langle Ma^*_t, b^*\big\rangle_{1,M} - \big((\vec{m}, \nabla a^*_t)_R, b^*\big).$$

В этом случае задача 2.2 эквивалентна обратной задаче с операторным уравнением для коэффициента $k(t)$ вида

$$k(t)\Big(\varphi_1(t) + \Psi^*(t) + \frac{1}{\eta}(w, h^\eta_*)\Big) = \Phi^\eta_*(t) - (g(t,x)(a^* - w), h^\eta_*)\,.$$

К задаче 2.2 сводятся некоторые обратные задачи для уравнения (2.3.4) с краевыми условиями (2.3.5), (2.3.6) и условиями переопределения, заданными только на части Γ границы $\partial\Omega$. А именно,

$$\int\limits_{\Gamma} \left\{ \eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t) k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T). \qquad (2.3.42)$$

Если функция $\omega(t,x) \in C^1([0,T]; C^2(\Gamma))$ финитна на Γ при каждом $t \in [0,T]$ и $\operatorname{supp} \omega \subset \Gamma$, то ее можно продолжить на всю границу $\partial\Omega$ с сохранением гладкости, полагая $\omega(t,x) = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$, и считать, что интегралы в условиях переопределения берутся по всей границе $\partial\Omega$.

Следствие 2.3.2. *Пусть выполняются предположения I–II и $\partial\Omega \in C^2$, $\Gamma \subset \partial\Omega$. Пусть также выполняются условия теоремы 2.3.1, где функции b и h^η – решения задач (2.3.9) и (2.3.10) с краевыми условиями $b|_\Gamma = h^\eta|_\Gamma = \omega$ и $b|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = h^\eta|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$. Если функция $\omega(t,x) \in C^1([0,T]; C^2(\Gamma))$ финитна на Γ при каждом $t \in [0,T]$, то задача (2.3.4)–(2.3.6), (2.3.42) с $Lu = g(t,x)u$ имеет единственное решение $\{u, \eta\}$ в классе $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$. Причем существуют положительные константы k_0 и k_1 такие, что для любого $t \in [0,T]$*

$$k_0 \le k(t) \le k_1.$$

2.3.3 Гладкость и непрерывная зависимость решения от исходных данных

Операторнное уравнение для неизвестного коэффициента $k(t)$, построенное при доказательстве теоремы 2.3.1, позволяет исследовать устойчивость решения обратной задачи 2.2 при $Lu = g(t,x)u$ в смысле непрерывной зависимости от исходных данных задачи 2.2 и его гладкость.

Непрерывная зависимость решения от исходных данных задачи 2.2 обеспечивается сжимаемостью оператора в правой части уравнения (2.3.25) и понимается в смысле следующей теоремы.

Теорема 2.3.3. *Пусть пара $\{u^i, k^i\}$ является решением задачи 2.2 с исходными данными $\{f_i, g_i, \beta_i, U_0^i, \omega_i, \varphi_1^i, \varphi_2^i\}$, удовлетворяющими условиям теоремы 2.3.1, $i = 1,2$. Тогда для разности $\{\tilde{u}, \tilde{k}\} = \{u^1 - u^2, k^1 - k^2\}$ справедливы* *оценки*

$$\|\tilde{k}\|_{C([0,T])} \leq C_{15}\Big\{\frac{1}{\alpha_2}\|\tilde{\varphi}_2\|_{C([0,T])} + k_1\|\tilde{\varphi}_1\|_{C([0,T])} + \|\tilde{U}_0\| + \\ + \max_{t\in[0,T]}\Big[\|\tilde{\beta}\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} + \|\tilde{\beta}_t\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} + \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\tilde{\omega}\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\Big]\Big\}, \quad (2.3.43)$$

$$\max_{t\in([0,T])}\big\{\|\tilde{u}\|_2 + \|\tilde{u}_t\|_2\big\} \leq C_{16}\Big\{\frac{1}{\alpha_2}\|\tilde{\varphi}_2\|_{C([0,T])} + k_1\|\tilde{\varphi}_1\|_{C([0,T])} + \|\tilde{U}_0\| + \\ + \max_{t\in[0,T]}\Big[\|\tilde{\beta}\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\tilde{\beta}_t\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\tilde{\omega}\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\Big]\Big\}, \quad (2.3.44)$$

где $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j^1 - \varphi_j^2$, $j = 1, 2$, $\tilde{U}_0 = U_0^1 - U_0^2$, $\tilde{\beta} = \beta_1 - \beta_2$, $\tilde{f} = f_1 - f_2$, $\tilde{g} = g_1 - g_2$, $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$.

Доказательство. Разность $\{\tilde{u}, \tilde{k}\}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + \eta M\tilde{u}_t + k^1(t)M\tilde{u} + g_1\tilde{u} = \tilde{f} - \tilde{g}u^2 - kMu^2, \\ (\tilde{u} + \eta M\tilde{u})\big|_{t=0} = \tilde{U}_0, \quad \tilde{u}\big|_{S_T} = \tilde{\beta}, \end{cases} \quad (2.3.45)$$

и условию

$$\int\limits_{\partial\Omega}\Big\{\frac{\partial}{\partial\overline{N}}\big[\eta\tilde{u}_t + k^1\tilde{u} + \tilde{k}u^2\big]\omega_1 + \frac{\partial}{\partial\overline{N}}\big[\eta\tilde{u}_t^2 + \tilde{k}u^2\big]\tilde{\omega}\Big\}dS + \\ + \tilde{\varphi}_1k^1 + \varphi_1^2\tilde{k} = \tilde{\varphi}_2. \quad (2.3.46)$$

Умножим первое равенство (2.3.45) на $\tilde{u} - \tilde{a}$, где $\tilde{a} = a_1 - a_2$, в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в результирующем соотношении. Это даст

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\|\tilde{u}-\tilde{a}\|^2 + \eta\langle M(\tilde{u}-\tilde{a}), \tilde{u}-\tilde{a}\rangle_1\Big) + k^1(t)\langle M(\tilde{u}-\tilde{a}, \tilde{u}-\tilde{a}\rangle + (g_1(\tilde{u}-\tilde{a}), \tilde{u}-\tilde{a}) = \\ = (\tilde{f}, \tilde{u}-\tilde{a}) - (\tilde{g}u^2, \tilde{u}-\tilde{a}) - \tilde{k}\langle Mu^2, \tilde{u}-\tilde{a}\rangle_1.$$

Интегрируя это уравнение по t на $(0, \tau)$, $0 < \tau \leq T$, и оценивая его правую часть с помощью (2.3.2), (2.3.20)–(2.3.22), получим неравенство

$$\|\tilde{u}-\tilde{a}\|^2 + \eta\langle M(\tilde{u}-\tilde{a}), \tilde{u}-\tilde{a}\rangle_1 \leq (\|\tilde{U}_0\| + \|\tilde{a}_0\|)^2 + Cm_2\int\limits_0^\tau|\tilde{k}|^2dt +$$

$$\int_0^\tau \Big[\frac{2}{K_0 m_1}\Big(\|\tilde f\|^2+\|\tilde a_t\|^2+C\|\tilde g\|^2_{C(\overline\Omega)}\Big)+\frac{\bar g_1}{2}\|\tilde a\|^2\Big]dt,$$

откуда

$$\|\tilde u\|\le\Big\{\int_0^\tau \Big[\frac{2}{K_0 m_1}\Big(\|\tilde f\|^2+\|\tilde a_t\|^2+C\|\tilde g\|^2_{C(\overline\Omega)}\Big)+\frac{\bar g_1}{2}\|\tilde a\|^2\Big]dt\Big\}^{1/2}+$$

$$+\|\tilde U_0\|+\|\tilde a_0\|+\|\tilde a\|+C^{1/2}m_2^{1/2}\Big(\int_0^\tau |\tilde k|^2dt\Big)^{1/2}, \qquad (2.3.47)$$

где $\bar g_1=\|g_1\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\tilde a_0=\tilde a(0,x)$.

Затем, умножая первое равенство (2.3.45) на $M\tilde u$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, интегрируя по частям в первом слагаемом, интегрируя результат по t на $(0,\tau)$, $0<\tau\le T$, и оценивая его правую часть с помощью (2.2.30), (2.3.2), (2.3.20)–(2.3.22), (2.3.47) приходим к соотношению

$$\|\tilde u\|_2\le C_{17}\Big\{\int_0^t \Big[\|\tilde a\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\tilde a_t\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\tilde f\|^2+\|\tilde g\|^2_{C(\overline\Omega)}+|\tilde k|^2\Big]d\tau\Big\}^{1/2}+$$

$$+\|\tilde U_0\|+\|\tilde a\|_2, \qquad (2.3.48)$$

где постоянная $C_{17}>0$ зависит от η, m_1, m_2, k_0, k_1, T, c, C, $\|g_i\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $i=1,2$, $\max_{t\in[0,T]}\|f_1\|$.

Аналогичным образом, умножая первое равенство (2.3.45) на $M\tilde u_t$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, интегрируя по частям и оценивая правую часть с помощью (2.2.30), (2.3.2), (2.3.20)–(2.3.22), (2.3.47) и (2.3.48), можно получить оценку

$$\|\tilde u_t\|_2\le C_{18}\Big\{\max_{t\in[0,T]}\Big[\|\tilde a\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\tilde a_t\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\tilde f\|+\|\tilde g\|_{C(\overline\Omega)}\Big]+\|\tilde U_0\|$$

$$+|\tilde k|+\Big[\int_0^t |\tilde k|^2d\tau\Big]^{1/2}\Big\}. \qquad (2.3.49)$$

Положительная постоянная C_{18} зависит от η, m_1, m_2, k_0, k_1, T, c, C, C_{17}, $\|g_i\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $i=1,2$.

Как было показано выше, задача 2.2 для каждой пары $\{u^i, k^i\}$ $(i = 1, 2)$ эквивалентна обратной задаче с операторным уравнением

$$k^i(t)\Big(\varphi_1^i(t) + \Psi^i(t) + \frac{1}{\eta}(a_i - u^i, h_i^\eta)\Big) = \Phi_i^\eta(t) - \big(g_i u^i, h_i^\eta\big)\,,$$

где $\Psi^i(t) = \big\langle M a_i, b_i\big\rangle_{1,M}$, $\Phi_i^\eta(t) = \varphi_2^i(t) - \frac{\eta}{2}\left\langle M a_{it}, b_i\right\rangle_{1,M} + (f_i - a_{it}, h_i^\eta)$, функции a_i, b_i и h_i^η являются решениями задач (2.3.8)–(2.3.10) с граничными данными β_i и ω_i вместо β и ω соответственно. Составляя разность операторных уравнений при $i = 1$ и $i = 2$, приходим к операторному уравнению для $\tilde{k}$

$$\tilde{k}(t)\Big(\varphi_1^1 + \Psi_1 + \frac{1}{\eta}(a_1 - u^1, h_1^\eta)\Big) = \tilde{\Phi}^\eta - \big(g_1\tilde{u}, h_1^\eta\big) - \big(\tilde{g}u^2, h_1^\eta\big) -$$
$$-\big(g_2 u^2, \tilde{h}^\eta\big) - k^2\Big(\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\Psi} + \frac{1}{\eta}\big(\tilde{a} - \tilde{u}, h_1^\eta\big) + \frac{1}{\eta}\big(a_2 - u^2, \tilde{h}_1^\eta\big)\Big),$$

где $\tilde{\Phi}^\eta = \Phi_1^\eta - \Phi_2^\eta$. Повторяя для этого уравнения и соотношений (2.3.45), (2.3.46) рассуждения, приведшие к (2.3.34), (2.3.37)–(2.3.39), получаем оценку

$$|\tilde{k}| \le C_{19}\Big[\|\tilde{a}_t\| + \|\tilde{a}\| + \|\tilde{h}^\eta\| + \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\|_{C(\overline{\Omega})}\Big] +$$
$$+\frac{1}{\alpha_2}|\tilde{\varphi}_2| + k_1|\tilde{\varphi}_1| + C_{20}\|\tilde{u}\|, \tag{2.3.50}$$

где положительная постоянная C_{19}, зависит от констант k_0, k_1 из (2.3.21) и (2.3.22), $\max_{t\in[0,T]}\big\{\|\beta_i\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}, \|\beta_{it}\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}, \|\omega_i\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}, \|f_i\|,\ \|g_i\|_{C(\overline{\Omega})}\big\}$, $i = 1, 2$, а также от η, T, m_1, m_2, m_3, $\bar{\varphi}_1$.

Подставим (2.3.47) в (2.3.50). Согласно лемме Гронуолла из результирующего соотношения и неравенства [86, Глава 2]

$$\|v\|_j \le c_j\|v\|_{W_2^{j-1/2}(\partial\Omega)}$$

справедливого для любого $v \in W_2^j(\Omega)$ и целого $j \ge 1$ вытекает оценка (2.3.43). Объединяя (2.3.43), (2.3.48), (2.3.49) и применяя последнее неравенство, приходим к оценке (2.3.44). Теорема доказана.

Исследование зависимости гладкости решения задачи 2.2 от дифференциальных свойств исходных данных опирается на следующую лемму [304].

Лемма 2.3.4. *Пусть X_1 и X_2 – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_{X_1}$ и $\|\cdot\|_{X_2}$ соответственно, и $Y_i \subset X_i$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{Y_i}$ и $\|y\|_{X_i} \le \|y\|_{Y_i}$ для всех $y \in Y_i$. Если L – линейное ограниченное отображение*

X_1 в X_2 такое, что L переводит Y_1 в Y_2, то L ограничено как отображение из Y_1 в Y_2.

В [304] Шоуолтер и Тинг исследовали гладкость решения краевой задачи для уравнения соболевского типа, частным случаем которой является прямая задача (2.3.4)-(2.3.6) с известным постоянным коэффициентом $k(t) = const > 0$. Гладкость решения этой задачи повышается с ростом гладкости входных данных. С другой стороны, решение, вообще говоря, не может иметь большую гладкость по пространственным переменным, чем, например, начальные данные $(I + \eta M)^{-1}U_0$. Поэтому теорема о гладкости решения, доказанная Шоуолтером и Тингом, является самым сильным из возможных результатов для таких задач.

Решение задачи 2.2 обладает аналогичными свойствами. Гладкость решения $\{u, k\}$ также повышается с ростом гладкости исходных данных.

Теорема 2.3.5. *Пусть выполняются все предположения теоремы* 2.3.1 *и пара (u, k) является решением задачи 2.2. Пусть $l, p = 0, 1, 2, \ldots, \partial\Omega \in C^{p+2}$, $m_{ij} \in C^{p+1}(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $m \in C^p(\overline{\Omega})$, $g \in C^l([0, T]; C^p(\overline{\Omega}))$, $\beta \in C^{l+1}([0, T]; W_2^{3/2+p}(\partial\Omega))$, $U_0 \in W_2^{p+2}(\Omega)$, $f \in C^l([0, T]; W_2^p(\Omega))$, $\varphi_1 \in C^{l+1}([0, T])$, $\varphi_2 \in C^l([0, T])$ и $\omega \in C^{l+1}([0, T]; W_2^{3/2+p}(\partial\Omega))$. Тогда $u \in C^{l+1}([0, T]; W_2^{p+2}(\Omega))$, $k \in C^l[0, T]$.*

Доказательство. Сначала докажем, что в условиях теоремы решение задачи (2.3.23), (2.3.25)

$$\{w(t, x), k(t)\} \in C^1([0, T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^{p+2}(\Omega)) \times C([0, T]).$$

Предположения I и II позволяют утверждать, что оператор $I + \eta M$ является биекцией из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ и обратный оператор $(I+\eta M)^{-1}$ ограничен. Следовательно, оператор $B = -(I+\eta M)^{-1}M : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ также ограничен.

Согласно общей теории эллиптических уравнений [85] существует единственное решение $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^{p+2}(\Omega)$ уравнения $z + \eta M z = v$ при любом $v \in W_2^p(\Omega)$. Это влечет за собой тот факт, что оператор $(I+\eta M)^{-1}$ отображает $W_2^p(\Omega)$ в $W_2^{p+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и B переводит $W_2^{p+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в себя. Подпространство $W_2^{p+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{p+2}$. По лемме 2.3.4 оператор $(I+\eta M)^{-1}$ является ограниченным отображением из $W_2^p(\Omega)$ в $W_2^{p+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а B – ограниченным оператором из $W_2^{p+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в себя. При этом справедливо неравенство

$$\|(I+\eta M)^{-1}v\|_{p+2} \leq \tilde{C}_p \left\{\|v\|_p + \|(I+\eta M)^{-1}v\|\right\} \tag{2.3.51}$$

для любого $v \in W_2^p(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Подействуем оператором $(I+\eta M)^{-1}$ на $(2.3.23_1)$. Это даст

$$w_t = k(t)Bw - (I+\eta M)^{-1}(gw) + (I+\eta M)^{-1}F. \tag{2.3.52}$$

В силу (2.3.51), (2.3.22) и ограниченности B, интегрируя (2.3.52) по t на $[0,\tau]$ $(0 < \tau \leq T)$, получим неравенство

$$\|w\|_{p+2} \leq C_{22} + C_{23} \int_0^\tau \|w(t)\|_{p+2}\, dt,$$

из которого согласно лемме Грунуолла следует, что

$$\|w(t)\|_{p+2} \leq C_{22} \exp(C_{23}\tau), \quad \tau \in [0,T]. \tag{2.3.53}$$

Здесь положительные постоянные C_{22} и C_{23} зависят от $\tilde{C}_p$, T, η, k_1, $\|U_0\|_p$, $\|g\|_{C([0,T];C^p(\overline{\Omega}))}$ и $\|F\|_{C([0,T];W_2^p(\Omega))}$. Аналогично из (2.3.52) с помощью (2.3.53) можно вывести оценку

$$\|w_t(t)\|_{p+2} \leq C_{24}, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.54}$$

где положительная константа C_{24} зависит от $\tilde{C}_p$, C_{22}, C_{23}, T, η, k_1, $\|U_0\|_p$, $\|F\|_{C([0,T];W_2^p(\Omega))}$ и $\|g\|_{C([0,T];C^p(\overline{\Omega}))}$. Из (2.3.25), (2.3.53), (2.3.54) заключаем, что

$$w \in C([0,T]; W_2^{p+2}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad w_t \in L^\infty([0,T]; W_2^{p+2}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))$$

и $k(t) \in C([0,T])$. Тогда в силу (2.3.52) $w_t \in C([0,T]; W_2^{p+2}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))$.

Оценки (2.3.53) и (2.3.54) позволяют утверждать, что $k(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$. Действительно, обозначая конечные разности по t для $w(x,t)$ и $k(t)$ через

$$\Delta w(t,x) = w(t+\Delta t, x) - w(t,x),$$
$$\Delta k(t) = k(t+\Delta t) - k(t),$$

$t + \Delta t$, $t \in (0, T)$, и $\Phi^\eta(t) - (ga, h^\eta)$ через $H(t)$, из (2.3.25) получаем

$$\Delta k\Big[\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w, h^\eta)\Big] = \Delta H - k\Big[\Delta(\varphi_1 + \Psi) + \frac{1}{\eta}\left((\Delta w, h^\eta) + (w, \Delta h^\eta)\right)\Big].$$

В условиях теоремы $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta H(t)/\Delta t = H'(t)$ и $H'(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Так как функция $\varphi_1 + \Psi + \eta^{-1}(w, h^\eta)$ непрерывна и положительна на $[0, T]$, существует производная $k'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta k(t)/\Delta t$. Поделим последнее равенство на Δt и перейдем в нем к пределу при $\Delta t \to 0$. Будем иметь

$$k'\left[\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w, h^\eta)\right] = H' - k\Big[\varphi_1' + \Psi' + \frac{1}{\eta}\left((w_t, h^\eta) + (w, h^\eta_t)\right)\Big]. \qquad (2.3.55)$$

В предположениях теоремы $k'(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Теперь мы можем доказать непрерывность w_{tt} и k_{tt}. Составим конечную разность для левой и правой частей (2.3.52).

$$\Delta w_t = k(t + \Delta t)B\Delta w - (I + \eta M)^{-1}(g(t + \Delta t, x)\Delta w) + \Delta\tilde{F},$$

где

$$\Delta\tilde{F} \equiv \Delta k\, Bw(t, x) - (I + \eta M)^{-1}(\Delta g\, w(t, x)) + (I + \eta M)^{-1}\Delta F.$$

Из полученных выше результатов следует, что $\lim_{\Delta t\to 0} \|\Delta\tilde{F}/\Delta t\|_{p+2} = \|\tilde{F}_t\|_{p+2}$ и $F_t \in C([0, T]; W_2^{p+2}(\Omega))$. Это влечет за собой существование второй производной w_{tt}, причем $\|w_{tt}\|_{p+2} = \lim_{\Delta t\to 0} \|\Delta w_t/\Delta t\|_{p+2}$, и w_{tt} удовлетворяет уравнению

$$w_{tt} = k(t)Bw_t - (I + \eta M)^{-1}(gw_t) + \tilde{F}_t$$

для почти всех $(t, x) \in Q_T$. Применяя к этому уравнению рассуждения, которые привели к неравенствам (2.3.53) и (2.3.54), можно доказать, что $w_{tt} \in C([0, T]; W_2^{p+2}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))$. Для того чтобы доказать, что $k'' \in C([0, T])$ составим конечную разность для левой и правой частей (2.3.55) и перейдем к пределу в полученном уравнении, что возможно в силу предположений теоремы и существования w_{tt}.

Повторяя описанную выше процедуру еще $l - 2$ раза, завершаем доказательство теоремы.

2.3.4 Обратные задачи с граничным условием третьего рода

Предложенный выше метод доказательства корректности обратных задач 2.1 и 2.2 с граничным условием первого рода и интегральным условием относительно потока на границе применим и к обратным задачам с другими краевыми условиями. Однако в этом случае условие переопределения на границе должно содержать дополнительную информацию об интеграле от самой функции u, а не от потока.

Задача 2.2$'$. При заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $u_0(x)$, $\mu_1(t,x)$, $\mu_2(t,x)$, $\sigma(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и постоянной η найти пару функций $(u(t,x), k(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t + \eta M u_t + k(t)\, Mu = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.3.56}$$

с оператором M вида (2.3.1) и условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3.57}$$

$$\Big\{\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}} + \sigma(x)(\eta u_t + k(t)u)\Big\}\Big|_{S_T} + k(t)\mu_1(t,x) = \mu_2(t,x), \tag{2.3.58}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\eta u_t + k(t)u)\omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.3.59}$$

Будем предполагать, что оператор M удовлетворяет следующему условию.

I$'$. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i,j,l = 1,2,\ldots,n$, and $m(x)$ ограничены в Ω. Существуют положительные константы m_1 and m_2 такие, что для любого $v \in W_2^1(\Omega)$ и почти всех $x \in \Omega$

$$m_1\|v\|_1^2 \le \langle Mv, v\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)uvdx \le m_2\|v\|_1^2. \tag{2.3.60}$$

Обратные задачи с интегральными условиями переопределения подобного типа исследовались в работах [66, 120, 225, 285, 306]. М. Слодичка и Д. Лесник [306] установили условия существования обобщенного решения обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента теплообмена λ для стационарного уравнения теплопроводности в прямоугольнике со смешанным граничным условием нелинейного теплообмена и интегральным условием переопределения на границе Γ этого прямоугольника. А.И.Кожанов и Т.Н.Шипина [225] рассматривали многомерные обратные задачи для эллиптических уравнений в цилиндрической области. А.И.Кожанов [66] изучал разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением $u(x,t)$ постоянного положительного старшего коэффициента в линейных эллиптических уравнениях. В работах С.Г.Пяткова и А.О.Солдатова [120], а также С.Г.Пяткова, А.О.Солдатова и

К.Фаязова [285] обсуждаются вопросы корректности в пространствах Соболева обратных задач для параболического уравнения второго порядка. Рассматриваются задачи определения коэффициента теплообмена в граничном условии третьего рода краевой по набору интегралов по части границы этой области. При определенных условиях на данные доказано существование локально по времени, единственность и непрерывная зависимость решения от данных задачи.

Введем функцию $h_1^\eta(t,x)$ как решение краевой задачи

$$h_1^\eta + \eta M h_1^\eta = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \left\{\frac{\partial h_1^\eta}{\partial \overline{N}} + \sigma(x) h_1^\eta\right\}\Big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x). \tag{2.3.61}$$

Под решением задачи $2.2'$ будем понимать пару функций $\{u,k\}$ такую, что

1) $u \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $k(t) \in C([0,T])$;

2) пара $\{u,k\}$ удовлетворяет уравнению (2.3.56) почти всюду в Q_T и условиям (2.3.57) для почти всех $x \in \overline{\Omega}$, (2.3.58) почти всюду на S_T и (2.3.59) при всех $t \in [0,T]$.

Доказательство существования и единственности решения задачи $2.2'$ опирается на лемму 1.4.5 и теорему сравнения 1.4.6 из §1.4 главы 1 для прямой задачи (2.3.56)–(2.3.58) с известной функцией $k(t)$.

Теорема 2.3.6. *Пусть выполняются условия* I$'$, II, $\partial\Omega \in C^2$ *и* $\eta > 0$. *Предположим, что*
(i) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\mu_1, \mu_2 \in C([0,T]; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\omega \in C([0,T]; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,T])$;

(ii) *выполняются условия теоремы 1.4.6 и существуют постоянные* $\alpha_0 > 0$ *и* $\Phi_0 > 0$ *такие, что*

$$\varphi_1 - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_1 \omega ds \geq \alpha_0, \tag{2.3.62}$$

$$\Phi(t) \equiv \varphi_2(t) - (f, h_1^\eta) - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_2 h_1^\eta ds \geq \Phi_0. \tag{2.3.63}$$

Тогда задача 2.2′ имеет решение $\{u, k\}$, и это решение единственно. Причем $u \geq 0$ почти всюду в Q_T и справедливы оценки

$$k_0 \leq k(t) \leq \overline{\Phi}\alpha^{-1}, \tag{2.3.64}$$

$$\|u\|_2 + \|u_t\|_2 \leq C_{25} \tag{2.3.65}$$

с некоторыми константами $k_0 > 0$ и $C_{25} > 0$. Здесь $\overline{\Phi} = \max_{t\in[0,T]} \Phi$.

Proof. Следуя схеме доказательства теоремы 2.3.1, сведем задачу 2.2′ к эквивалентной задаче с нелинейным операторным уравнением для $k(t)$. Для этого умножим (2.3.56) на h_1^η в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям во втором и третьем членах левой части результирующего уравнения. С учетом (2.3.58) – (2.3.61) получим, что

$$(u_t, h_1^\eta) + (\eta M u_t + kMu, h_1^\eta) =$$
$$= k\Big[-\varphi_1 + \int\limits_{\partial\Omega} \mu_1 h_1^\eta ds - \frac{1}{\eta}(u, h_1^\eta)\Big] - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_2 h_1^\eta ds + \varphi_2 = (f, h_1^\eta)$$

или

$$k\Big[\varphi_1 - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_1 h_1^\eta ds + \frac{1}{\eta}(u, h_1^\eta)\Big] = \Phi(t).$$

Определим оператор A_1, который каждой функции $y \in C_+([0, T]) = \{y \,|\, y \in C([0, T]), y > 0\}$ ставит в соответствие элемент $Ay \in C([0, T])$ по закону

$$A_1 y = \Phi(t)\Big[\varphi_1 - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_1 h_1^\eta ds + \frac{1}{\eta}(u_y, h_1^\eta)\Big]^{-1} \tag{2.3.66}$$

где u_y – решение задачи is the solution of the problem (2.3.56)–(2.3.58) с $k(t) = y$. Значение $A_1 y$ определено для каждого $y \in C_+([0, T])$. Действительно, согласно лемме 1.4.5 прямая задача (2.3.56)–(2.3.58) с $k = y$ имеет единственное решение $u_y \in C^1([0, T]); W_2^2(\Omega))$ для каждого $y \in C_+([0, T])$. Причем, в силу теоремы 1.4.6 и принципа максимума для эллиптических уравнений справедливо неравенство $(u_y, h_1^\eta) \geq 0$, из которого ввиду (2.3.62) следует, что

$$\varphi_1 - \int\limits_{\partial\Omega} \mu_1 h_1^\eta ds + \frac{1}{\eta}(u_y, h_1^\eta) \geq \alpha_0. \tag{2.3.67}$$

и значение $A_1 y$ на каждом элементе $y \in C_+([0, T])$ имеет смысл.

Можно показать аналогично тому, как это было сделано в §2.2, что задача 2.2′ имеет решение тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение

$$y = A_1 y, \tag{2.3.68}$$

то есть задача 2.2′ эквивалентна задаче (2.3.56) – (2.3.58), (2.3.68). Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для (2.3.56) – (2.3.58), (2.3.68).

Ввиду определения оператора A_1 и неравенств (2.3.63), (2.3.67) справедлива оценка

$$0 \le A_1 y \le \overline{\Phi}\alpha_0^{-1}.$$

Докажем, что существует такая константа $y_0 > 0$, что оператор A_1 отображает множество

$$Y = \{\, y \,|\, y \in C([0,T]), y_0 \le y \le \overline{\Phi}\alpha_0^{-1}\}$$

в себя. Умножим (2.3.56) с $k = y \in Y$ на u_y в смысле скалярного произведения $L_2(\Omega)$, проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых. Затем проинтегрируем полученное уравнение по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, и перепишем результат в следующем виде:

$$\|u_y\|^2 + \eta\Big[\langle Mu_y, u_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u_y^2 ds\Big] + 2\int\limits_0^\tau y\Big[\langle Mu_y, u_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u_y^2 ds\Big]dt =$$

$$= \|u_0\|^2 + \eta\Big[\langle Mu_0, u_0\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u_0^2 ds\Big] + 2\int\limits_0^\tau \Big\{(f, u_y) - \int\limits_{\partial\Omega} (y\mu_1 - \mu_2)u_y ds\Big\}dt. \tag{2.3.69}$$

В силу (2.3.60) левая часть этого равенства оценивается снизу выражением

$$\|u_y\|^2 + \eta m_1 \|u_y\|_1^2 + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u_y^2 ds.$$

Правую часть (2.3.69) оценим с помощью теоремы вложения и неравенства Коши.

$$\|u_0\|^2 + \eta\Big[\langle Mu_0, u_0\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u_0^2 ds\Big] + 2\int\limits_0^\tau \Big\{(f, u_y) - \int\limits_{\partial\Omega} (y\mu_1 - \mu_2)u_y ds\Big\}dt \le$$

$$\le \Phi_1 + \|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|^2 + \int\limits_0^\tau \big(\|u_y\|^2 + \eta m_1 \|u_y\|_1^2\big)dt$$

где

$$\Phi_1 \equiv \frac{c^2}{\eta m_1}\Big(\overline{\Phi}\alpha_0^{-1}\|\mu_1\|_{L^2(S_T)} + \|\mu_2\|_{L^2(S_T)}\Big)^2 + \eta\Big[\langle Mu_0, u_0\rangle_M + \bar{\sigma}\|u_0\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big]$$

$\bar{\sigma} = \|\sigma\|_{C(\overline{\Omega})}$, $c > 0$ – константа вложения $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$. В результате получаем неравенство

$$\|u_y\|^2 + \eta m_1\|u_y\|_1^2 \le \Phi_1 + \|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|^2 + \int\limits_0^\tau \big(\|u_y\|^2 + \eta m_1\|u_y\|_1^2\big)dt,$$

из которого согласно лемме Гронуолла следует оценка

$$\|u_y\|^2 + \eta m_1\|u_y\|_1^2 \le \Big[\Phi_1 + \|f\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|^2\Big]e^T \equiv C_{26}^2. \tag{2.3.70}$$

Теперь, возвращаясь к (2.3.66) можно определить y_0. В силу (2.3.63), (2.3.70),

$$A_1 y \ge \Phi_0\Big[\bar{\varphi_1} + \max_{t\in[0,T]}\big\{\|\mu_1\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\omega\|_{L^2(\partial\Omega)} + \eta^{-1}C_{26}\|h_1^\eta\|\big\}\Big]^{-1} \equiv y_0. \tag{2.3.71}$$

где $\bar{\varphi_1} = \|\varphi_1\|_{C([0,T])}$. Таким образом, оператор A_1 отображает множество Y с y_0, определенным в (2.3.71), в себя.

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и u_{y_1}, u_{y_2} –это решения прямой задачи (2.3.56)–(2.3.58) с $k = y_1$ и $k = y_2$ соответственно. В виду (2.3.66)

$$|A_1y_1 - A_1y_2| \le \frac{\overline{\Phi}\max_{t\in[0,T]}\|h_1^\eta\|}{\eta\alpha_0^2}\|u_{y_1} - u_{y_2}\|. \tag{2.3.72}$$

С другой стороны, разность $w_y = u_{y_1} - u_{y_2}$ удовлетворяет уравнению

$$w_{yt} + \eta M w_{yt} + y_1 M w_y = \tilde{y} M u_{y2}, \tag{2.3.73}$$

где $\tilde{y} = y_2 - y_1$, и краевым условиям

$$w_y(0,x) = 0,$$

$$\Big[\eta\frac{\partial w_{yt}}{\partial \overline{N}} + y_1\frac{\partial w_y}{\partial \overline{N}} + \sigma(x)(\eta w_{yt} + y_1 w_y)\Big]\Big|_{S_T} = \tilde{y}\Big[\Big(\frac{\partial u_{y2}}{\partial \overline{N}} + \sigma u_{y2}\Big)\Big|_{S_T} + \mu_1\Big]. \tag{2.3.74}$$

Умножим (2.3.73) на w_y в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых, а также в правой части результирующего уравнения с учетом (2.3.74). Это даст

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|w_y\|^2 + \eta\Big[\langle Mw_y, w_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega}\sigma w_y^2 ds\Big]\Big\} + y_1\Big\{\langle Mw_y, w_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega}\sigma w_y^2 ds\Big\} =$$

$$= \tilde{y}\Big\{\langle Mu_{2y}, w_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega}(\sigma u_{2y} + \mu_1)w_y ds\Big\}. \qquad (2.3.75)$$

В силу (2.3.60), (2.3.70) и теоремы вложения

$$\Big|\tilde{y}\Big\{\langle Mu_{2y}, w_y\rangle_M + \int\limits_{\partial\Omega}(\sigma u_{2y} + \mu_1)w_y ds\Big\}\Big| \le \frac{G^2(t)}{2\eta m_1}|\tilde{y}|^2 + \frac{\eta m_1}{2}\|w_y\|_1^2, \qquad (2.3.76)$$

где

$$G(t) = \frac{(m_2 + c^2\bar{\sigma})C_{26}}{(\eta m_1)^{1/2}} + c\|\mu_1\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Проинтегрируем (2.3.75) по t от 0 до τ, $0 < \tau < T$, и оценим левую часть полученного неравенства с помощью (2.3.60). Ввиду (2.3.76) это даст

$$\|w_y\|^2 + \eta m_1\|w_y\|_1^2 \le \frac{1}{\eta m_1}\int\limits_0^\tau G^2(t)|\tilde{y}|^2 dt + \int\limits_0^\tau \left(\|w_y\|^2 + \eta m_1\|w_y\|_1^2\right) dt.$$

Согласно лемме Гроноулла из последнего соотношения следует оценка

$$\|w_y\|^2 \le \frac{1}{\eta m_1}\|G\|^2_{C([0,T])}\int\limits_0^\tau |\tilde{y}|^2 dt. \qquad (2.3.77)$$

Объединяя (2.3.72) и (2.3.77) приходим к неравенству

$$|A_1 y_1 - A_1 y_2| \le K\Big(\int\limits_0^\tau |y_1 - y_2|^2 dt\Big)^{1/2}, \qquad (2.3.78)$$

где $K = \overline{\Phi}\max_{t\in[0,T]}\|h_1^\eta\|(\eta^2\alpha_0^2 m_1)^{-1}\|G\|_{C([0,T])}$.

Введем эквивалентную норму в $C([0,T])$

$$|\!|\!| \cdot |\!|\!|_\nu = \max_{t\in[0,T]}\{e^{-\nu t}|\cdot|\}$$

с положительной постоянной ν. Ввиду (2.3.78)

$$|\!|\!| A_1 y_1 - A_1 y_2 |\!|\!|_\nu \le \frac{K}{(2\nu)^{1/2}} |\!|\!| y_1 - y_2 |\!|\!|_\nu .$$

Выбирая $\nu = 2K^{-2}$, получаем, что

$$|\!|\!| A_1 y_1 - A_1 y_2 |\!|\!|_\nu \le \frac{1}{2} |\!|\!| y_1 - y_2 |\!|\!|_\nu .$$

Это означает, что $A_1 : Y \to Y$ является сжимающим оператором и отображает ограниченное замкнутое множество Y в себя. Поэтому, согласно принципу сжимающих отображений оператор A_1 имеет единственную неподвижную точку $k^* \in Y$. Пара $\{u^*, k^*\}$, где u^* удовлетворяет условиям прямой задачи (2.3.56)–(2.3.58) с $k = k^*$, является решением обратной задачи (2.3.56)–(2.3.59) и $u^* \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Причем, для k^* и u^* справедливы оценки (2.3.64), (2.3.70).

Перейдем к оценкам u и u_t в $W_2^2(\Omega)$. Для этого прежде всего нужно оценить u_t в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Умножим (2.3.56) на u_t в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых левой части полученного равенства. Это даст

$$\|u_t\|^2 + \eta\langle Mu_t, u_t\rangle_M + \eta\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)u_t^2 ds = -k\langle Mu, u_t\rangle_M - k\int\limits_{\partial\Omega}\sigma(x)uu_t ds$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}(\mu_2 - k\mu_1)u_t ds + (f, u_t).$$

В силу (2.3.60), (2.3.64), (2.3.70) и теоремы вложения из последнего равенства вытекает оценка

$$\|u_t\|^2 + \eta m_1\|u_t\|_1^2 \le \frac{1}{\eta m_1}\Big\{\frac{\overline{\Phi}}{\alpha_0}G(t) + c\|\mu_2\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big\}^2 + \|f\|^2 \equiv G_1^2(t). \qquad (2.3.79)$$

Для того, чтобы получить оценку для u и u_t в $W_2^2(\Omega)$, перепишем условие (2.3.58) в форме

$$\Big[\frac{\partial u}{\partial\overline{\overline{N}}} + \sigma u\Big]\Big|_{S_T} = \beta,$$

где

$$\beta = \Big[\frac{\partial u_0}{\partial\overline{\overline{N}}} + \sigma u_0\Big]\Big|_{S_T}\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_0^t k\,d\theta\Big) + \frac{1}{\eta}\int\limits_0^t(\mu_2 - k\mu_1)\exp\Big(-\frac{1}{\eta}\int\limits_\tau^t k\,d\theta\Big)d\tau.$$

Умножим (2.3.56) на Mu в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и оценим правую часть результирующего уравнения с учетом (2.3.64) и (2.3.79). Получим соотношение

$$\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\|Mu\|^2 + y_0\|Mu\|^2 \le \frac{1}{2y_0}(\|f\| + G_1(t))^2 + \frac{y_0}{2}\|Mu\|^2,$$

из которого следует, что

$$\|Mu\|^2 \le \|Mu_0\|^2 e^{-\frac{y_0}{\eta}t} + \frac{1}{y_0}\int\limits_0^t (\|f\| + G_1(t))^2 e^{-\frac{y_0}{\eta}(t-\tau)} d\tau. \qquad (2.3.80)$$

Это соотношение в силу (2.3.70), (2.3.79)–(2.3.80) и неравенства [87, Глава 2]

$$\|v\|_2 \le K_1(\|Mv\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \overline{N}} + \sigma v\right\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} + \|v\|_1), \qquad (2.3.81)$$

справедливого для всех $v \in W_2^2(\Omega)$ приводит к оценке

$$\|u\|_2 \le K_1\Big[\|Mu_0\| + \Big(\frac{1}{y_0}\int\limits_0^T (\|f\| + G_1(t))^2 d\tau\Big)^{1/2} + \|\beta\|_{C([0,T];W_2^{1/2}(\partial\Omega))} +$$

$$+ C_{26}(\eta m_1)^{-1/2}\Big] \equiv C_{27}. \qquad (2.3.82)$$

Здесь константа $K_1 > 0$ зависит от m_1, m_2 и mesΩ. Далее, выражая $\eta M u_t$ из уравнения (2.3.56), можно показать с помощью (2.3.79), (2.3.80), что

$$\eta\|Mu_t\| \le \|f\| + G_1(t) + \frac{\overline{\Phi}}{\alpha_0}C_{28}.$$

Положительная постоянная C_{28} зависит от C_{26}, $\|G_1(t)\|_{C([0,T])}$, y_0, T, η, $\|f\|_{L^2(Q_T)}$, $\|Mu_0\|$. В силу (2.3.57), (2.3.58), (2.3.79), (2.3.81) и (2.3.64) справедливо неравенство

$$\|\eta u_t + k(t)u\|_2 \le K_1\Big[\|f - u_t\| + \|\mu_2 - k\mu_1\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} + \|\eta u_t + ku\|_1\Big] \le C_{29},$$

где положительная постоянная C_{29} зависит от $\|f\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}$, $\|G_1(t)\|_{C([0,T])}$, $\|\mu_i\|_{C([0,T];W_2^{1/2}(\partial\Omega))}$, $i = 1, 2$, $\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}$, η, $\bar{\sigma}$, m_1, $\overline{\Phi}$, α_0, K_1, C_{26}. Оно вместе с (2.3.64) и (2.3.82) позволяет получить оценку (2.3.65). А именно,

$$\|u\|_2 + \|u_t\|_2 \le C_{27} + \frac{1}{\eta}\Big(C_{29} + k(t)\|u\|_2\Big) \le \Big(1 + \frac{\overline{\Phi}}{\eta\alpha_0}\Big)C_{27} + \frac{1}{\eta}C_{29}.$$

Единственность решения $\{u, k\}$ гарантируется тем фактом, что оператор A_1 является сжимающим отображением. Действительно, пусть $\{u_1, k_1\}$ и $\{u_2, k_2\}$ – два решения задачи $2.2'$. Как показано выше, k_1 и k_2 удовлетворяют операторному уравнению (2.3.68), и справедливы неравенства (2.3.77), (2.3.78) с $u_{y_i} = u_i$ и $y_i = k_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\| k_1 - k_2 \|_{\nu} = \| A_1 k_1 - A_1 k_2 \|_{\nu} \leq \frac{1}{2} \| k_1 - k_2 \|_{\nu}.$$

Из этого соотношения и (2.3.77) следует, что $k_1 = k_2$ и $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

2.4 Асимптотическое поведение решения обратной задачи для уравнения соболевского типа

Асимптотическое поведение решений прямых краевых задач для уравнений соболевского типа впервые было изучено в [304, 305]. В частности, в [305] установлено, что решение краевой задачи для уравнения

$$(u + L_1 u)_t + L_2 u = f$$

с произвольными линейными сильно эллиптическими операторами L_1 и L_2 при однородном граничном условии первого рода стабилизируется к решению задачи Дирихле для уравнения $L_2 v = f_\infty$ в смысле нормы $W_2^1 \Omega$, т. е. $\|u - v\|_1 \to 0$ при $t \to +\infty$, если $\|f - f_\infty\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Что касается обратных задач, здесь следует отметить результаты для параболических уравнений и систем составного типа в случае одной прстранственной переменной (см. [14, 24, 27, 160, 161]). В [24, 160] исследовалось асимптотическое поведение решения обратной задачи Коши для системы параболического и гиперболического уравнений, в которой одно из уравнений содержит неизвестную правую часть, зависящую только от t. В предположении абсолютной интегрируемости входных данных по t на интервале $(0, +\infty)$ установлено, что решение обратной задачи ограничено на этом интервале и при некоторых дополнительных условиях стремится к 0 при $t \to +\infty$. В [14, 27, 161] аналогичные результаты были получены для обратных задач идентификации неизвестной правой части и коэффициента в младшем члене линейного параболического уравнения с условиями Коши. В [14] также рассматривались краевые обратные задачи для параболических уравнений с граничными условиями Дирихле и Неймана.

В данном параграфе обсуждаются вопросы асимптотического поведения решения задачи 2.2 при $t \to +\infty$. Доказывается, что при некоторых условиях на исходные данные решение задачи 2.2 стабилизируется к решению соответствующей стационарной обратной задачи, корректность которой предварительно устанавливается.

2.4.1 Существование и единственность решения стационарной обратной задачи

Как будет показано ниже, решение $\{u, k\}$ задачи 2.2 стабилизируется к решению следующей обратной задачи при $t \to +\infty$.

Задача 2.3. При заданных функциях $f_\infty(x)$, $g_\infty(x)$, $\beta_\infty(x)$, $\omega_\infty(x)$ и числах φ_1^∞, φ_2^∞ требуется найти функцию $u_\infty(x)$ и постоянную k_∞ такие, что

$$k_\infty M u_\infty + g_\infty(x) u_\infty = f_\infty(x) \qquad x \in \Omega,$$

$$u_\infty\big|_{\partial\Omega} = \beta_\infty(x),$$

$$k_\infty \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\infty}{\partial \overline{N}} \omega_\infty \, ds + \varphi_1^\infty k_\infty = \varphi_2^\infty.$$

Прежде чем перейти к доказательству стабилизации решения задачи 2.2, исследуем корректность стационарной задачи 2.3. Под решением задачи 2.3 будем понимать пару $\{u_\infty(x), k_\infty\}$, состоящую из функции $u_\infty(x)$ и константы k_∞, которые отвечают следующим требованиям:

1) k_∞ – положительное действительное число;

2) $u_\infty \in W_2^2(\Omega)$;

3) $u_\infty(x)$ и k_∞ удовлетворяют условиям задачи 2.3.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи 2.3 дает следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполняются предположения I-II и*

(i) $f_\infty \in L^2(\Omega)$, $\beta_\infty(x), \omega_\infty(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $g_\infty(x) \in C(\overline{\Omega})$;

(ii) $\beta_\infty(x) \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, $\varphi_1^\infty \geq 0$; $0 \leq g_\infty(x) \leq g_1 = \mathrm{const} < +\infty$ *в* $\overline{\Omega}$;

$$\varphi_1^\infty + \Psi_\infty \equiv \varphi_1^\infty + \int\limits_\Omega (\mathbf{M}(x)\nabla a_\infty, \nabla b_\infty)_R \, dx + (m(x) a_\infty, b_\infty) > 0; \qquad (2.4.1)$$

где a_∞ – это решение задачи (2.3.8) с граничным условием $a_\infty|_{\partial\Omega} = \beta_\infty(x)$, а b_∞ – решение задачи (2.3.9) с граничным условием $b_\infty|_{\partial\Omega} = \omega_\infty(x)$;

$$F_\infty(x) \equiv g_\infty(x)a_\infty - f_\infty \geq 0 \qquad \textit{почти для всех } \ x \in \Omega;$$
$$\Phi_\infty \equiv \varphi_2^\infty - (F_\infty, b_\infty) > 0. \tag{2.4.2}$$

Тогда задача 2.3 имеет решение $\{u_\infty(x), k_\infty)\}$. Причем,

$$u_\infty(x) \leq a_\infty(x)$$

почти для всех $x \in \Omega$. Если дополнительно

$$\Phi_\infty \geq q\left(\frac{m_2}{m_1^2} g_1(\Psi_\infty + \varphi_1^\infty)\|b_\infty\|\|F_\infty\|\right)^{1/2} \tag{2.4.3}$$

где q – действительное число, $q > 1$, то решение задачи 2.3 единственно.

Доказательство. Сведем задачу 2.3 к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением второго рода для k_∞. Для этого положим $w_\infty(x) = a_\infty(x) - u_\infty(x)$. Пара $\{w_\infty(x), k_\infty\}$ является решением задачи

$$k_\infty M w_\infty + g_\infty w_\infty = F_\infty(x), \quad x \in \Omega, \qquad w_\infty\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.4.4}$$
$$k_\infty \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w_\infty}{\partial \overline{N}} \omega_\infty \, ds = (\varphi_1^\infty + \Psi_\infty)k_\infty - \varphi_2^\infty. \tag{2.4.5}$$

Умножим уравнение (2.4.4) на b_∞ в терминах скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям в первом члене полученного равенства. Будем иметь:

$$k_\infty\{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty\} = \varphi_2^\infty - (F_\infty, b_\infty) + (g_\infty w_\infty, b_\infty) \tag{2.4.6}$$

ввиду (2.3.9) для b_∞ и (2.4.5). Задача (2.4.4),(2.4.6) эквивалентна задаче (2.4.4), (2.4.5) и, следовательно, задаче 2.3 согласно определению w_∞. Поэтому достаточно доказать справедливость утверждения теоремы для задачи (2.4.4), (2.4.6).

Пусть оператор A_∞ отображает $\mathbb{R}^+ = \{y | y \in \mathbb{R}, y > 0\ \}$ в $\mathbb{R}$ и для каждого $y \in \mathbb{R}^+$

$$A_\infty(y) = \frac{\varphi_2^\infty - (F_\infty, b_\infty) + (g_\infty w_\infty, b_\infty)}{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty},$$

где w_∞ – решение задачи (2.4.4) с коэффициентом y вместо k_∞. В условиях теоремы значение $A_\infty(y)$ определено на каждом $y \in \mathbb{R}^+$. Тогда (2.4.6) можно переписать в виде операторного уравнения

$$k_\infty = A_\infty(k_\infty). \tag{2.4.7}$$

Задача (2.4.4), (2.4.6) имеет решение тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение (2.4.7).

Согласно принципу максимума для эллиптических уравнений

$$w_\infty \geq 0 \tag{2.4.8}$$

для всех $k^\infty = y \in \mathbb{R}^+$ и почти всех $x \in \Omega$. Из определения A_∞, (2.4.1), (2.4.2) и (2.4.8) следует, что

$$0 < k_\infty^0 \equiv \frac{\Phi_\infty}{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty} \leq A_\infty(y) \leq \frac{\varphi_2^\infty + \|F_\infty\|\|b_\infty\| + g_1\|w_\infty\|\|b_\infty\|}{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty} \tag{2.4.9}$$

для всех $y \in \mathbb{R}^+$. Умножив уравнение (2.4.4) на w_∞ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрировав в результирующем равенстве по частям, получим, что

$$\|w_\infty\|_1 \leq \frac{\|F_\infty\|}{k_\infty^0 m_1} \tag{2.4.10}$$

в силу (2.4.9). Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}^+$

$$k_\infty^0 \leq A_\infty(y) \leq \frac{(\varphi_2^\infty + \|F_\infty\|\|b_\infty\|)k_\infty^0 m_1 + g_1\|F_\infty\|\|b_\infty\|}{k_\infty^0 m_1(\varphi_1^\infty + \Psi_\infty)} \equiv k_\infty^1. \tag{2.4.11}$$

Из этого неравенства вытекает, что оператор A отображает $[k_\infty^0, k_\infty^1]$ в себя. Более того, A_∞ непрерывен на $[k_\infty^0, k_\infty^1]$. Действительно, возьмем $y_1, y_2 \in [k_\infty^0, k_\infty^1]$ и обозначим через w_∞^1, w_∞^2 решения задачи (2.4.4) с y_1 и y_2 вместо k_∞ соответственно. Согласно определению оператора A

$$A_\infty(y_1) - A_\infty(y_2) = \frac{(g_\infty(w_\infty^1 - w_\infty^2), b_\infty)}{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty}.$$

Оценивая правую часть этого соотношения, можно получить неравенство

$$|A_\infty(y_1) - A_\infty(y_2)| \leq \frac{g_1\|b_\infty\|}{\varphi_1^\infty + \Psi_\infty}\big\|(w_\infty^1 - w_\infty^2)\big\|. \tag{2.4.12}$$

С другой стороны, разность $\tilde{w}_\infty = w^1_\infty - w^2_\infty$ удовлетворяет уравнению

$$y_1 M\tilde{w}_\infty + g\tilde{w}_\infty = (y_2 - y_1)Mw^2_\infty \tag{2.4.13}$$

и граничным условиям (2.4.4). Так как M – сильно эллиптический оператор и для w^2_∞ выполняется (2.4.10), из (2.4.13) можно получить неравенство

$$\|\tilde{w}_\infty\|_1 \le \frac{m_2}{(k^0_\infty)^2 m_1^2}\|F_\infty\||y_2 - y_1| \tag{2.4.14}$$

аналогично тому, как было доказано (2.4.10). Объединяя (2.4.12) и (2.4.14), с учетом (2.4.11) приходим к соотношению

$$|A_\infty(y_1) - A_\infty(y_2)| \le \frac{m_2 g_1\|b_\infty\|(\varphi_1^\infty + \Psi_\infty)}{(\Phi_\infty)^2 m_1^2}\|F_\infty\||y_2 - y_1|,$$

которое доказывает непрерывность оператора A_∞ на $[k^0_\infty, k^1_\infty]$. Согласно теореме Брауэра о неподвижной точке операторное уравнение (2.4.7) имеет решение на $[k^0_\infty, k^1_\infty]$. Это влечет за собой разрешимость задачи (2.4.4), (2.4.6), и для решения $\{w_\infty, k_\infty\}$ справедливы оценки (2.4.8)–(2.4.10). Кроме того, в силу (2.3.2), (2.4.10), (2.4.11),

$$\|Mw_\infty\| \le (k^0_\infty)^{-2}\|F_\infty\|\left[g_1 m_1^{-1} + k^0_\infty\right]. \tag{2.4.15}$$

Докажем, что при выполнении условия (2.4.3) решение задачи (2.4.4), (2.4.6) единственно. Пусть $\{w'_\infty, k'_\infty\}$ and $\{w''_\infty, k''_\infty\}$ – два решения задачи (2.4.4), (2.4.6). Их разность

$$\{\bar{w}, \bar{k}\} = \{w'_\infty - w''_\infty, k'_\infty - k''_\infty\}$$

удовлетворяет уравнению

$$k'_\infty M\bar{w} + g\bar{w} = -\bar{k}Mw''_\infty, \qquad x \in \Omega, \tag{2.4.16}$$

и условиям

$$\bar{w}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$\bar{k} = \frac{(g\bar{w}, b_\infty)_0}{\Psi_\infty + \varphi_1^\infty}. \tag{2.4.17}$$

Умножим (2.4.16) на $\bar{w}$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям и оценим правую часть полученного уравнения аналогично тому, как было доказано (2.4.14). Будем иметь:

$$\|\bar{w}\|_0 \le \frac{(\Psi_\infty + \varphi_1^\infty)^2\, m_2\|F\|_0}{m_1(\Phi_\infty)^2}\,|\bar{k}|. \tag{2.4.18}$$

С другой стороны, оценивая правую часть (2.4.17) с учетом (2.4.1), приходим к неравенству

$$|\bar{k}| \leq \frac{g_1\|b_\infty\|_0}{\Psi_\infty + \varphi_1^\infty}\,\|\bar{w}\|_0\,,$$

откуда и из (2.4.18) следует, что

$$|\bar{k}| \leq \frac{g_1\|b_\infty\|_0(\Psi_\infty + \varphi_1^\infty)\, m_2\|F\|_0}{m_1(\Phi_\infty)^2}|\bar{k}|.$$

В силу предположения (2.4.3) это означает, что $\bar{k} \equiv 0$, и, следовательно, $\bar{w} \equiv 0$ by (2.4.17). Теорема доказана.

2.4.2 Стабилизация решения задачи 2.2

Будем предполагать, что $t \in [0, +\infty)$, и использовать обозначения $Q_\infty = (0, +\infty) \times \Omega$ и $S_\infty = (0, +\infty) \times \partial\Omega$. Достаточные условия на исходные данные, при которых решение задачи 2.2 стабилизируется к решению стационарной задачи 2.3, определяются следующей теоремой.

Теорема 2.4.2. *Пусть выполняются предположения I-II и условия (i), (ii) теоремы 2.4.1 Предположим, что* $g(t,x)$ *неотрицательна в* $\overline{Q}_\infty$*, выполняется условия (i), теоремы 2.3.1 при любом* $0 < T < +\infty$*,*

$$\lim_{t\to+\infty}\|f - f_\infty\| = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty}\|g - g_\infty\|_{C(\overline{\Omega})} = 0, \tag{2.4.19}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\|\omega - \omega_\infty\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} = 0, \tag{2.4.20}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\|\beta - \beta_\infty\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty}\|\beta_t\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} = 0, \tag{2.4.21}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_1(t) = \varphi_1^\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi_2(t) = \varphi_2^\infty. \tag{2.4.22}$$

Пусть также

(iii) *существует положительная постоянная* α *такая, что*

$$\varphi_1(t) + \Psi(t) \geq \alpha > 0, \tag{2.4.23}$$

$$a(0,x) - U_0(x) \geq 0, \tag{2.4.24}$$

$$F(t,x) \geq 0, \tag{2.4.25}$$

для почти всех $(t,x) \in Q_\infty$*;*

(iv) *для любого* $t \in [0, +\infty)$

$$\Phi^\eta(t) \geq \Phi_0^\eta > 0, \tag{2.4.26}$$

где Φ_0^η *- положительная константа,*

$$0 \,\leq\, g(t,x) \,\leq\, \frac{\Phi^\eta(t)}{\eta}\left[\varphi_1 + \Psi + 2\eta^{-1}(a,b)\right]^{-1}, \qquad (t,x) \in Q_\infty, \tag{2.4.27}$$

$$\eta > \Phi_\infty^{-1} m_1^{-3/2} m_2^{1/2} \|b_\infty\| \|F_\infty\|, \tag{2.4.28}$$

где Φ_∞ *и* b^∞ *определены в теореме 2.4.1. Тогда решение задачи 2.2 стабилизируется при* $t \to +\infty$, *т. е.*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot) \,-\, u_\infty\|_2 \,=\, 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} k(t) \,=\, k_\infty,$$

где $\{u_\infty,\, k_\infty\}$ *– решение задачи 2.3.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в условиях теоремы задача 2.2 имеет единственное решение $(u(t,x), k(t)) \,\in\, C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \,\times\, C([0,T])$ при любом $T > 0$ согласно теореме 2.3.1. Из (2.3.7)–(2.3.10),(2.4.20) и (2.4.21) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \|a(t,\cdot) - a_\infty\|_2 = \lim_{t\to+\infty} \|b(t,\cdot) - b_\infty\|_2 = 0, \tag{2.4.29}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \|h^\eta(t,\cdot) - h_\infty^\eta\|_2 = 0, \tag{2.4.30}$$

где функция a_∞ определена в формулировке теоремы 2.4.1 и h_∞^η является решением задачи

$$h_\infty^\eta + \eta M h_\infty^\eta = 0, \quad x \in \Omega; \qquad h_\infty^\eta|_{\partial\Omega} = \omega_\infty(x).$$

Тогда для $u(t,x)$ имеет место неравенство

$$0 \leq u \leq a(t,x),$$

которое в силу (2.4.29) гарантирует ограниченность $\|u\|$, что в свою очередь вместе с (2.3.22) и (2.4.29) влечет ограниченность $k(t)$ на $(0, +\infty)$.

Далее, согласно теореме 2.4.1 существует решение $\{u_\infty, k_\infty\} \in W_2^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+$ задачи 2.3. Действительно, ввиду (2.4.19)–(2.4.22), (2.4.29), (2.4.30) функция

$\Phi^\eta(t) - (ga, h^\eta)$ имеет предел при $t \to +\infty$. Причем, в силу (2.3.9)–(2.3.11), (2.3.18), (2.3.19), (2.4.2), (2.4.26), (2.4.27), определения функции Φ^η и теоремы сравнения для эллиптических уравнений, $(ga, h^\eta) \le (ga, b)$ и

$$\Phi^\eta(t) - (ga, h^\eta) \ge \Phi^\eta(t) - (ga, b) \ge$$
$$\Phi_0^\eta - (a,b)\Phi_0^\eta\Big[\eta(\overline{\varphi_1} + \overline{\Psi}) + 2\max_{t\in[0,+\infty)}(a,b)\Big]^{-1} \ge \Phi_0^\eta/2 > 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}[\Phi^\eta(t) - (ga, h^\eta)] \ge \lim_{t\to+\infty}[\Phi^\eta(t) - (ga, b)] \equiv \Phi_\infty \ge \Phi_0^\eta/2 > 0,$$

т. е. выполняется (2.4.2). Остальные условия теоремы 2.4.1 следуют из (2.4.19)–(2.4.25).

Положим

$$w(t,x) = a(t,x) - u(t,x), \qquad w_\infty(x) = a_\infty(x) - u_\infty(x). \tag{2.4.31}$$

Функция $w(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t + \eta M w_t + k(t)\, Mw + g(t,x)w = F(t,x), \quad (t,x) \in Q_\infty, \tag{2.4.32}$$

и условиям

$$(w + \eta Mw)\big|_{t=0} = a(0,x) - U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.4.33}$$

$$w\big|_{S_\infty} = 0, \tag{2.4.34}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_t}{\partial\overline{N}} + k\frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right\}\omega dS = (\varphi_1 + \Psi)k + \eta\big\langle Ma_t, b\big\rangle_{1,M} - \varphi_2,\ t \in [0,+\infty]. \tag{2.4.35}$$

Как было показано в предыдущем параграфе (см. доказательство теоремы 2.3.1), умножая (2.4.32) на $h^\eta(t,x)$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, дважды интегрируя по частям в левой части и подставляя (2.4.35) в полученное равенство, можно прийти к уравнению (2.3.25), т. е.

$$k(t)\Big(\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta}(w, h^\eta)\Big) = \Phi^\eta(t) - (g(t,x)(a-w), h^\eta)\,, \tag{2.4.36}$$

вследствие (2.3.7),(2.3.10)–(2.3.11) и определения функции $\Phi^\eta(t)$. Согласно теореме 2.3.1 при каждом $0 < T < +\infty$ пара $(w,k) \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$.

Так как задача (2.4.32)–(2.4.35) и задача (2.4.32)–(2.4.34), (2.4.36) эквивалентны, пара $\{w,k\}$ также является решением задачи (2.4.32)–(2.4.34),(2.4.36).

Аналогичным образом можно показать, что пара $\{w_\infty,k_\infty\}$ удовлетворяет уравнению

$$k_\infty M w_\infty + g_\infty w_\infty = F_\infty(x), \quad x\in\Omega,$$

и условиям

$$w_\infty\big|_{\partial\Omega}=0,$$
$$k_\infty\Big\{\varphi_1^\infty+\Psi_\infty+\frac{1}{\eta}(w_\infty,h_\infty^\eta)\Big\}=\varphi_2^\infty-(F_\infty,h_\infty^\eta)+(g_\infty w_\infty,h_\infty^\eta). \quad (2.4.37)$$

Тогда разность $W(t,x)=w(t,x)-w_\infty(x)$ отвечает уравнению

$$W_t+\eta MW_t+k(t)\,MW+g(t,x)W=$$
$$=(k_\infty-k(t))Mw_\infty+F(t,x)-F_\infty(x)+(g_\infty-g(t,x))w_\infty \quad (2.4.38)$$

и краевым условиям

$$W(0,x)+\eta MW(0,x)=a(0,x)-U_0(x)-w_\infty-\eta Mw_\infty,$$
$$W|_{S_\infty}=0.$$

В силу (2.4.36) и (2.4.37),

$$k(t)-k_\infty=\tilde F(t)+\Big(\Big(g-\frac{k(t)}{\eta}\Big)W,h^\eta\Big)\Big[\varphi_1^\infty+\Psi_\infty+\frac{1}{\eta}(w_\infty,h_\infty^\eta)\Big]^{-1}. \quad (2.4.39)$$

Здесь

$$\tilde F(t)\equiv\Big[\varphi_2(t)-\varphi_2^\infty+\Big(f-f_\infty-a_t-(g-g_\infty)a+g_\infty(a-a_\infty),h^\eta\Big)-$$
$$-\frac{\eta}{2}\big\langle Ma_t,b\big\rangle_{1,M}-\Big(\Big(\frac{k}{\eta}-g\Big)w_\infty+g_\infty a_\infty,h^\eta-h_\infty^\eta\Big)-k(\varphi_1(t)-\varphi_1^\infty+$$
$$+\Psi(t)-\Psi_\infty)\Big]\Big(\varphi_1^\infty+\Psi^\infty+\frac{1}{\eta}(w_\infty,h_\infty^\eta)\Big)^{-1}.$$

Из предположений теоремы, а также (2.3.21), (2.3.22) при $T=+\infty$ и (2.4.29), (2.4.30) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde F(t)=0. \quad (2.4.40)$$

Подставим (2.4.39) в (2.4.38). Получим:

$$W_t - \eta M W_t + k(t) M W + \frac{((\eta g - k(t))W, h_\infty^\eta)}{\eta(\varphi_1^\infty + \Psi_\infty) + (w_\infty, h_\infty^\eta)} M w_\infty + g(t,x) W =$$
$$= -\tilde{F}(t) M w_\infty + F(t,x) - F_\infty(x) + (g_\infty(x) - g(t,x)) w_\infty \equiv G(t,x).$$

Умножим это равенство на W в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям. Это даст:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|W\|^2 + \frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} + k(t)\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} +$$
$$+ \frac{((\eta g - k(t))W, h_\infty^\eta)}{\eta(\varphi_1^\infty + \Psi_\infty) + (w_\infty, h_\infty^\eta)} \big\langle M w_\infty, W\big\rangle_{1,M} + (gW, W) = (G, W). \qquad (2.4.41)$$

Вследствие (2.3.22), (2.4.27) и (2.4.36), справедливы неравенства

$$0 \le \frac{k(t)}{\eta} - \max_{x\in\overline{\Omega}} g(t,x) \le \frac{k(t)}{\eta} \qquad (2.4.42)$$

для всех $t \in [0, +\infty)$. Оценим теперь третий и четвертый члены (2.4.41). Ввиду (2.3.2), (2.4.8)–(2.4.11) и (2.4.42) будем иметь:

$$k(t)\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} + \frac{((\eta g - k(t))W, h_\infty^\eta)}{\eta(\varphi_1^\infty + \Psi_\infty) + (w_\infty, h_\infty^\eta)} \big\langle M w_\infty, W\big\rangle_{1,M} \ge$$
$$\ge k(t)\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} \left[1 - \frac{m_2^{1/2}\|b_\infty\|\|F_\infty\|}{\eta m_1^{3/2}\Phi_\infty}\right]. \qquad (2.4.43)$$

В силу (2.4.28) имеем:

$$\gamma \equiv 1 - \frac{m_2^{1/2}\|b_\infty\|\|F_\infty\|}{\eta m_1^{3/2}\Phi_\infty} > 0. \qquad (2.4.44)$$

Применяя (2.4.43) к (2.4.41) и оценивая правую часть (2.4.41), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|W\|^2 + \eta\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M}\Big) + \gamma k(t)\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} + (gW, W) \le$$
$$\le H(t)\Big(\|W\|^2 + \eta\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M}\Big)^{1/2}, \qquad (2.4.45)$$

где

$$H(t) = |\tilde{F}(t)| + \|F - F_\infty\| + \|g - g_\infty\|_{C(\overline{\Omega})}\|w_\infty\|. \qquad (2.4.46)$$

Учитывая тот факт, что в силу (2.3.2) и теоремы вложения

$$\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} \geq \frac{m_1}{1+\eta m_1}\Big(\|W\|^2 + \eta\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M}\Big) \tag{2.4.47}$$

и вводя обозначение $y(t) = \|W\|^2 + \eta\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M}$, можно переписать (2.4.45) в терминах функции $y(t)$ и оценить правую часть с помощью (2.3.22), (2.4.10), (2.4.47) и неравенства Коши. Будем иметь:

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + \gamma k_0 \frac{m_1}{1+\eta m_1} y \leq \frac{1+\eta m_1}{2\gamma m_1 k_0} H^2(t) + \frac{\gamma m_1 k_0}{2(1+\eta m_1)} y. \tag{2.4.48}$$

Согласно лемме Гронуолла из (2.4.48) следует оценка

$$\begin{aligned} y(t) \leq y(0) \exp\Big(-\frac{\gamma m_1 k_0}{1+\eta m_1} t\Big) + \\ + \frac{1+\eta m_1}{\gamma m_1 k_0} \int\limits_0^t H^2(\tau) \exp\Big(-\frac{\gamma m_1 k_0}{1+\eta m_1}(t-\tau)\Big) d\tau, \end{aligned} \tag{2.4.49}$$

откуда ввиду (2.3.2), (2.4.19)–(2.4.22), (2.4.40), (2.4.44), (2.4.46) получаем:

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\|w(t,\cdot) - w_\infty\|^2 + \|w(t,\cdot) - w_\infty\|_1^2\Big) \leq \frac{1+m_1}{m_1} \lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{2.4.50}$$

Возвращаясь к (2.4.39), заключаем из (2.3.21), (2.4.19), (2.4.40) и (2.4.50), что

$$\lim_{t\to\infty} |k(t) - k_\infty| = 0. \tag{2.4.51}$$

Далее, умножим (2.4.38) на MW в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене результирующего соотношения. Это даст:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} + \eta\|MW\|^2\Big) + k\|MW\|_2^2 = -(gW, MW) + \\ + \Big((k_\infty - k)Mw_\infty + F - F_\infty(x) + (g_\infty - g)w_\infty, MW\Big). \end{aligned}$$

Оценивая правую часть этого уравнения с помощью неравенства Коши, получаем:

$$\begin{aligned} \eta\,\frac{d}{dt}\|MW\|_2^2 + k_0\|MW\|_2^2 \leq -\frac{d}{dt}\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} + 2\|g\|^2_{C(\overline{Q}_T)}\|W\|^2 + \\ + 2k_0^{-1}\Big[|k_\infty - k(t)|^2\|Mw_\infty\|^2 + \|F - F_\infty\|^2 + \|g - g_\infty\|^2_{C(\overline{\Omega})}\|w_\infty\|^2\Big] \end{aligned} \tag{2.4.52}$$

с учетом (2.3.22). Вводя обозначение $z = e^{k_0 t/\eta}\|MW\|_2^2$, можно переписать (2.4.52) в виде

$$\eta\frac{dz}{dt} \le -\frac{d}{dt}\big\langle MW, W\big\rangle_{1,M} e^{k_0 t/\eta} + 2\|g\|^2_{C(\overline{Q}_T)}\|W\|^2 e^{k_0 t/\eta} +$$
$$+\ 2k_0^{-1}e^{k_0 t/\eta}\Big[|k_\infty - k(t)|^2\|Mw_\infty\|^2 + \|F - F_\infty\|^2 + \|g - g_\infty\|^2_{C(\overline{\Omega})}\|w_\infty\|^2\Big],$$

откуда следует, что

$$\eta\|MW\|_2^2 \le \Big(\eta\|MW(0,\cdot)\|^2 + \big\langle W(0,\cdot), MW(0,\cdot)\big\rangle_{1,M}\Big)e^{-k_0 t/\eta} +$$
$$+\int\limits_0^t \Big\{2k_0^{-1}\Big[|k_\infty - k|^2\|Mw_\infty\|^2 + \|F - F_\infty\|^2 + \|g - g_\infty\|^2_{C(\overline{\Omega})}\|w_\infty\|^2\Big] +$$
$$+2\|g\|^2_{C(\overline{\Omega})}\|W\|^2 + k_0\big\langle W, MW\big\rangle_{1,M}\Big\}e^{-k_0(t-\tau)/\eta}d\tau - \big\langle W, MW\big\rangle_{1,M}. \tag{2.4.53}$$

В силу (2.3.1), (2.3.2), (2.3.30), (2.4.15), (2.4.19), (2.4.50) и (2.4.51),

$$\lim_{t\to+\infty}\|w(t,\cdot) - w_\infty\|_2 = 0.$$

Ввиду (2.4.29) последнее равенство означает, что

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(t,\cdot) - u_\infty\|_2 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4.2 поволяет исследовать харатер сходимости решения $\{u, k\}$ задачи 2.2 к решению $\{u_\infty, k_\infty\}$ задачи 2.3 при $t \to +\infty$. В частности, оценки (2.4.49) и (2.4.53) объясняют асимптотическое поведение пары $\{u - u_\infty, k - k_\infty\}$.

Следствие 2.4.3. *Пусть выполняются предположения теоремы 2.4.2, и функция $H(t)e^{\lambda t}$ с некоторой постоянной $\lambda > 0$ ограничена при всех $t \ge 0$. Тогда справедливы оценки*

$$\|u(t,\cdot) - u_\infty\|_2 \le K\exp\Big(-t\min\Big\{\lambda, \frac{\gamma m_1 k_0}{2(1+\eta m_1)}, \frac{k_0}{2\eta}\Big\}\Big),$$
$$|k(t) - k_\infty| \le K\exp\Big(-t\min\Big\{\lambda, \frac{\gamma m_1 k_0}{2(1+\eta m_1)}\Big\}\Big).$$

с некоторой константой $K > 0$, не зависящей от t. Если $H(t) = O(t^{-\lambda})$ при $t \to +\infty$, то $\|u(t,\cdot) - u_\infty\|_2 = O(t^{-\lambda})$ и $|k(t) - k_\infty| = O(t^{-\lambda})$ при $t \to +\infty$.

Следствие 2.4.4. *Пусть в условиях теоремы 2.4.2* $f_\infty = g_\infty \equiv 0$. *Тогда* $k(t) \to k_\infty$ *при* $t \to +\infty$ *и* $\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot) - a_\infty\|_2 = 0$.

Замечание 2.4.1. Согласно теореме 2.4.2, стабилизация решения задачи 2.2 к решению задачи 2.3 имеет место, когда выполняется условие (2.4.28). В предположениях следствия 2.4.4 утверждение теоремы 2.4.2 справедливо для любого $\eta > 0$.

Существование, единственность, а также все свойства решения задачи 2.2 установлены в предположениях на исходные данные, при которых $u(t,x) \le a(t,x)$ почти всюду в $\overline{Q}_T$. Полученные результаты позволяют дать физическое объяснение этому факту. Как отмечалось выше (см. §2.1 данной главы), так называемое уравнение трещиноватой среды

$$u_t - \eta\Delta u_t - k\Delta u = 0$$

получается путем исключения из системы уравнений фильтрации [15]

$$\begin{cases} \overline{N}\Delta u_1 + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \\ \mu(m_0 d_1 + d_2)u_{2t} + \alpha(u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \tag{2.4.54}$$

одной из неизвестных функций u_1 или u_2. При насыщении трещиноватой среды жидкостью давление в трещинах и порах выравнивается. В соответствии с (2.4.54) это значит, что $u_1(t,x) = u_2(t,x) \equiv a(t,x)$, т. е. $a(t,x)$ описывает предельное (критическое) давление в трещинах и порах в режиме насыщения. С физической точки зрения $a(t,x)$ – это максимальное возможное давление и в трещинах, и в порах. Таким образом, неравенство $u(t,x) \le a(t,x)$ для решения задачи 2.2 означает, что в любой момент времени $t \ge 0$ давление u не превышает критического давления $a(t,x)$.

2.5 Уравнения параболического и соболевского типа

Данный параграф посвящен исследованию поведения решения задачи 2.2 при $\eta \to 0$, а также исследованию корректности соответствующей обратной задачи для параболического уравнения.

Как было показано в [15], уравнение трещиноватой среды

$$u_t + \eta L_1 u_t + kL_2 u = f \tag{2.5.1}$$

переходит в стандартное линейное уравнение фильтрации в пористой среде

$$u_t + kL_2 u = f \tag{2.5.2}$$

при $L_1 = L_2 = -\Delta$, когда $\eta \to 0$. В общем случае прямая краевая задача для уравнения (2.5.1) с линейными сильно эллиптическими операторами L_1 и L_2 в ограниченной области $\Omega \times [0, T]$ при любом $T > 0$ аппроксимирует соответствующую задачу для параболического уравнения [311]. В частности, при некоторых предположениях относительно операторов L_1 и L_2 решение u^η уравнения (2.5.1) с начальными данными $u^\eta(0, x) = u_0(x)$ и граничным условием Дирихле стремится к решению u уравнения (2.5.2) с теми же начальными и граничными данными при $\eta \to 0$ в норме пространства $L^2(Q_T)$. Как показывает следующий пример, в отличии от прямых задач обратная задача для уравнения соболевского типа может быть неразрешима при некоторых значениях η, тогда как соответствующая ей параболическая задача имеет единственное локальное решение.

Пример 2.5.1. Обратная задача

$$u_t - \eta u_{xxt} - u_{xx} = k(t)u, \qquad (t, x) \in (0, T) \times (0, \pi)$$

$$u(0, x) = \sin 2x + 3\sin 3x, \qquad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,$$

$$\int_0^\pi u\, x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

с неизвестными u и $k(t)$ не имеет решений, определенных на $(0, T) \times (0, \pi)$ при $\eta = 1$, тогда как обратная задача для параболического уравнения при $\eta = 0$ с этими же условиями имеет единственное решение [114]. Действительно, при известном $k(t)$ и $\eta = 1$ функция

$$u(t, x) = \exp\Big(-\frac{4}{5}t + \int_0^t \frac{k(\theta)}{5} d\theta \Big) \sin 2x + 3\exp\Big(-\frac{9}{10}t + \int_0^t \frac{k(\theta)}{10} d\theta \Big) \sin 3x$$

является единственным решением прямой задачи с указанными краевыми условиями. Подставляя $u(t, x)$ в интегральное условие переопределения, получаем квадратное уравнение $-y^2 + 2e^{-t/2}y = 1$ относительно функции

$$y = \exp\Big(-\frac{2}{5}t + \int_0^t \frac{k(\theta)}{10} d\theta \Big).$$

При каждом $t \geq 0$ функция $p(y) = -y^2 + 2e^{-t/2}y$ достигает своего максимума в точке $y^* = e^{-t/2}$, то есть $p(y) \leq p(e^{-t/2}) = e^{-t} < 1$ при любом $y \in \mathbf{R}^n$ и $t > 0$. Это означает, что не существует функции $k(t)$, для которой выполнялось бы условие переопределения при $t \in (0, T]$.

2.5.1 Аппроксимация обратной задачи для параболического уравнения

Как было упомянуто выше, при $\eta \to 0$ уравнение (2.5.1) формально переходит в (2.5.2) и задача 2.2 трансформируется в следующую обратную задачу.

Задача 2.4. При заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $u_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ найти пару функций $\{u(t,x), k(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t \,+\, k(t)\, Mu \,+\, g(t,x)u \,=\, f(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.3}$$

и условиям

$$u\big|_{t=0} \,=\, u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.5.4}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} \,=\, \beta(t,x), \qquad t \in [0,T], \tag{2.5.5}$$

$$k(t) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{N}}}\, \omega \, ds \,+\, \varphi_1(t)\, k(t) \,=\, \varphi_2(t), \qquad t \in (0,T). \tag{2.5.6}$$

Под решением задачи 2.4 будем понимать пару $(u(t,x), k(t))$ такую, что

а) $u \in V = \big\{ v |\, v \in L^\infty(0,T; W_2^2(\Omega)),\ v_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \big\}$, $k(t) \in L^\infty(0,T)$;

б) выполняется уравнение (2.5.3) и условия (2.5.4)–(2.5.6).

Рассмотрим наряду с задачей 2.4 следующую обратную задачу для уравнения соболевского типа.

Задача 2.2*. При заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $u_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega(t,x)$ найти пару функций $\{u^\eta, k^\eta\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t^\eta + \eta M u_t^\eta + k^\eta(t)\, M u^\eta + g(t,x) u^\eta = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.7}$$

начальному условию

$$\big(u^\eta \,+\, \eta M u^\eta\big)\Big|_{t=0} \,=\, u_0 \,+\, \eta M u_0 \equiv U_0^* \tag{2.5.8}$$

граничным данным

$$u^\eta\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x), \quad t \in [0,T], \tag{2.5.9}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial u_t^\eta}{\partial \overline{N}} + k^\eta(t) \frac{\partial u^\eta}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.5.10}$$

Важную роль в исследовании сходимости $\{u^\eta, k^\eta\}$ к $\{u, k\}$ при $\eta \to 0$ играет свойство функции h^η, т. е. решения задачи

$$h^\eta + \eta M h^\eta = 0, \qquad h^\eta\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x), \tag{2.5.11}$$

которое устанавливается леммой, приводимой ниже. Доказательство этой леммы опирается на неравенство

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \overline{N}} \right\|_{L^q(\partial\Omega)} \le C_1 \Big(\|v\|_2^\alpha \, \|v\|_1^{1-\alpha} + \|v\|_1 \Big) \tag{2.5.12}$$

справедливое для любого $v \in W_2^2(\Omega)$. Здесь $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n-1}{q}$, $q \in \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2(n-1)}{n-2}\right]$ при $n \ge 3$ и $q \in [1, \infty)$ при $n = 2$, константа C_1 зависит от n, q, $\mathrm{mes}\Omega$, m_2 и m_3. Соотношение (2.5.12) является следствием мультипликативного неравенства [86, стр. 85]

$$\|v\|_{L^q(\partial\Omega)} \le \tilde{c} \|\nabla v\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha}$$

справедливого для любой $v \in W_2^1(\Omega)$ с $\int_\Omega v dx = 0$ при тех же условиях на α и q.

Лемма 2.5.1. *Пусть выполняются предположения I–II для оператора M, $\omega \in C([0,T]; W_2^{3/2}(\Omega))$, $n \ge 2$ и $\partial\Omega \subset C^2$. Тогда для решения задачи (2.5.11) справедлива оценка*

$$\|h^\eta\|^2 + \eta \|h^\eta\|_1^2 \le \eta C_2, \tag{2.5.13}$$

где положительная константа C_2 зависит от m_1, m_2, $mes\Omega$, $\|b\|$ и не зависит от η.

Доказательство. Умножим уравнение (2.5.11) на h^η скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором члене левой части полученного равенства. Будем иметь:

$$\|h^\eta\|^2 + \eta \big\langle M h^\eta, h^\eta \big\rangle_{1,M} = \eta \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial h^\eta}{\partial \overline{N}} \, \omega \, \mathrm{d}s. \tag{2.5.14}$$

В силу неравенства Гельдера для $n \geq 2$

$$\Big| \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial h^\eta}{\partial \overline{N}} \, \omega \, \mathrm{d}s \Big| \leq \Big\| \frac{\partial h^\eta}{\partial \overline{N}} \Big\|_{L^p(\partial\Omega)} \|\omega\|_{L^{p/(p-1)}(\partial\Omega)}, \tag{2.5.15}$$

где $p = 2(n-1)/n$. Из (2.5.12) и теоремы вложения [86] следует, что для любого $v \in W_2^2(\Omega)$

$$\Big\| \frac{\partial v}{\partial \overline{N}} \Big\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_3 \|v\|_1, \qquad \|v\|_{L^{p/(p-1)}(\partial\Omega)} \leq C_4 \|v\|_2. \tag{2.5.16}$$

Здесь постоянные C_3 и C_4 зависят от m_2, m_3, n и $\mathrm{mes}\Omega$. Применяя (2.5.16) к (2.5.15) получим, что

$$\Big| \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial h^\eta}{\partial \overline{N}} \, \omega \, \mathrm{d}s \Big| \leq C_3 C_4 \|h^\eta\|_1 \|b\|_2 \equiv C_5 \|h^\eta\|_1.$$

Оценивая правую часть (2.5.14) с помощью этого неравенства, можно получить оценку (2.5.13). Лемма доказана.

Достаточные условия сходимости $\{u^\eta, k^\eta\}$ к $\{u, k\}$ при $\eta \to 0$ дает следующая теорема.

Теорема 2.5.2. *Пусть $\eta \in (0, \eta_0]$, $n \geq 2$, функции $f(t,x)$, $U_0^*(x)$, $\beta(t,x)$, $\varphi_1(t)$ неотрицательны и выполняются предположения I–II. Пусть также*

(i) $f \in L^2(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap C(\overline{Q}_T)$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $g \in C([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$, $\omega \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;

(ii) u_0 *и* β *отвечают условию согласования* $u_0(x)\big|_{\partial\Omega} = \beta(0,x)$, *для любого* $\eta \in [0, \eta_0]$, $t \in [0,T]$ *и почти всех* $x \in \Omega$ *справедливы неравенства*

$$a(0,x) - u_0(x) - \eta M u_0 \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.5.17}$$

$$F(t,x) \geq 0, \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.18}$$

$$\varphi_1(t) \; + \; \Psi(t) \geq \alpha_2 = const > 0, \qquad t \in [0,T]; \tag{2.5.19}$$

(iii) *существуют положительные константы* $\overline{\varphi}_2$, $\underline{\varphi}_2$ *такие, что*

$$\underline{\varphi}_2 \; \leq \; \varphi_2(t) \; \leq \; \overline{\varphi}_2, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.5.20}$$

Тогда

$$
\begin{array}{llll}
u^\eta & \to & u & *-\text{ слабо } \ \text{в } L^\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),\\
u_t^\eta & \to & u_t & *-\text{ слабо } \ \text{в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \text{ и } \ \text{слабо } \ \text{в } L^2(0,T;W_2^1(\Omega)),\\
k^\eta & \to & k & *-\text{ слабо } \ \text{в } L^\infty(0,T)
\end{array}
$$

при $\eta \to 0$. *Причем*

$$0 \ < \ r(\eta) \ \le \ k^\eta(t) \ \le \ \alpha_2^{-1}\big(\overline{\varphi}_2 + \max_{t\in[0,T]}(ga, h^\eta)\big) \equiv k_2 \tag{2.5.21}$$

где $r(\eta)$ *– неотрицательная функция непрерывная на* $[0,\eta_0]$ *и* $r(0) > 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду (2.5.13) без ограничения общности можно считать η_0 настолько малым, что выполняются условия

$$0 < \Phi_0^{\eta_0} \equiv \underline{\varphi}_2 - \max_{t\in[0,T]}\left\{\frac{\eta_0}{2}m_2\|a_t\|_1\|b\|_1 + \|a_t - f\|(\eta_0 C_3)^{1/2}\right\} \le \Phi^\eta \le \overline{\varphi}_2 \tag{2.5.22}$$

$$\max_{\overline{Q_T}} g(t,x) \le \Phi_0^{\eta_0}\Big[\eta_0\big(\varphi_1 + \Psi\big) + 2(C_3\eta_0)^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\|a\|\Big]^{-1}.$$

и $\eta_0 \le 1$. Поэтому в силу теоремы 2.3.1 задача 2.2* имеет единственное решение $(u^\eta(t,x),\, k^\eta(t)) \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$, и оценки

$$0 \le u^\eta(t,x) \le a(t,x),$$

$$\|u^\eta\|^2 + \eta\,\|u^\eta\|_1^2 + 2k_0\int_0^t \|u^\eta\|_1^2\,d\tau \le (\|a(0,\cdot) - U_0\|^2 + \|f\|^2_{L^2(Q_T)})e^{(2\bar g+1)t} \equiv \tilde C,$$

$$\tilde k_0 \equiv \Phi_0^{\eta_0}\Big[\overline{\varphi}_1 + \overline{\Psi} + \frac{1}{\eta}\max_{[0,T]}(a,b)\Big]^{-1} \le k^\eta(t) \le \frac{1}{\alpha_2}\left\{\overline{\varphi}_2 + \bar g\max_{t\in[0,T]}(a,b)\right\} \equiv \tilde k_1 \tag{2.5.23}$$

справедливы для почти всех $(t,x) \in Q_T$ и любого η, $0 < \eta \le \eta_0$, где b – решение задачи (2.3.9).

Следующим шагом доказательства является получение оценки (2.5.21) для k^η равномерной по η и затем равномерных оценок производных u^η. Положим

$$w^\eta(t,x) = a(t,x) - u^\eta(t,x). \tag{2.5.24}$$

Функция $w^\eta(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t^\eta + \eta M w_t^\eta + k^\eta(t)\,M w^\eta + g(t,x)w^\eta = F(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.25}$$

и условиям

$$(w^\eta + \eta M w^\eta)\big|_{t=0} = a(0,x) - U_0^*(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.5.26}$$

$$w^\eta\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.5.27}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_t^\eta}{\partial \overline{N}} + k^\eta \frac{\partial w^\eta}{\partial \overline{N}}\right\} \omega \mathrm{d}S = (\varphi_1 + \Psi) k^\eta + \eta \big\langle M a_t, h^\eta \big\rangle_{1,M} - \varphi_2. \tag{2.5.28}$$

Как показано в §2.2, умножая (2.5.25) на $h^\eta(t,x)$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям в левой части результирующего соотношения, можно получить уравнение

$$k^\eta(t)\Big(\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta}(w^\eta, h^\eta)\Big) = \Phi^\eta(t) - (g(t,x)(a - w^\eta), h^\eta) \tag{2.5.29}$$

ввиду (2.3.8), (2.3.9), (2.3.11), (2.5.28).

Согласно теореме 2.3.1 решение $(w^\eta, k^\eta) \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$ при любом $0 < T < +\infty$. Задачи (2.5.25)–(2.5.28) и (2.5.25)–(2.5.27),(2.5.29) эквивалентны, поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для задачи (2.5.25)–(2.5.27),(2.5.29).

Положим

$$k_0^\eta = \min_{t \in [0,T]} k^\eta(t). \tag{2.5.30}$$

Умножим (2.5.25) на Mw^η скалярно в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям и перепишем результат в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|Mw^\eta\|^2\big) + k_0^\eta\|Mw^\eta\|^2 = -(gw^\eta, Mw^\eta) + (F, Mw^\eta). \tag{2.5.31}$$

Проинтегрируем (2.5.31) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$ и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. В силу (2.3.2) получим, что

$$\|w^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|Mw^\eta\|^2 + k_0^\eta \int\limits_0^t \|Mw^\eta\|^2 d\tau \le \frac{C_6}{k_0^\eta}. \tag{2.5.32}$$

Положительная константа C_6 зависит от $\|F\|$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\|a\|_{L^2(Q_T)}$, и не зависит от η и k_0^η.

Оценку на w_t^η можно получить с помощью соотношений (2.5.25)–(2.5.27), (2.5.29), (2.5.32). Умножим (2.5.25) на Mw_t^η скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в результирующем уравнении. Это даст:

$$\frac{1}{k^\eta(t)}\,\|w_t^\eta\|_{1,M}^2 + \frac{\eta}{k^\eta(t)}\,\|Mw_t^\eta\|^2 + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|Mw^\eta\|^2$$
$$= -\frac{1}{k^\eta(t)}\int\limits_{\partial\Omega} F\,\frac{\partial w_t^\eta}{\partial\overline{N}}\,ds + \frac{1}{k^\eta(t)}\big\langle F - gw^\eta,\, Mw_t^\eta\big\rangle_{1,M}. \qquad (2.5.33)$$

Оценим первый член правой части (2.5.33) с учетом (2.5.16) и гладкости f. В силу теоремы вложения имеем:

$$\Big|\int\limits_{\partial\Omega} F\,\frac{\partial w_t^\eta}{\partial\overline{N}}\,ds\Big| \le C_7\big(\|f\|_{C(\overline{\Omega})} + \|a_t\|_{w_2^2(\Omega)}\big)\,\|w_t^\eta\|_1. \qquad (2.5.34)$$

Постоянная $C_7 > 0$ зависит от C_4, n и mesΩ. Неравенства (2.5.32), (2.5.34) позволяют вывести из (2.5.33) оценку

$$\int\limits_0^t \|w_\tau^\eta\|_{1,M}^2\,d\tau \;+\; \eta\int\limits_0^t \|Mw_\tau^\eta\|^2\,d\tau \;+\; k_0^\eta\|Mw^\eta\|^2 \;\le\; \frac{C_8}{k_0^\eta}. \qquad (2.5.35)$$

Здесь константа $C_8 > 0$ зависит от C_6, C_7, k_1, c, $\|Mu_0\|$, $\|F\|_{C(\overline{Q}_T)}$ и не зависит от η и k_0^η.

Вернемся к уравнению (2.5.29). Заметим, что правая часть (2.5.29) ограничена снизу положительной константой, независящей от k_0^η, если η_0 достаточно мало. Действительно, в силу (2.5.13) и (2.5.32), имеем

$$\big|\big(gw^\eta, h^\eta\big)\big| \;\le\; C_9\eta^{1/2}, \qquad (2.5.36)$$

где постоянная $C_9 > 0$ зависит от C_2, C_6 и не зависит от η и k_0^η. Соотношения (2.5.13), (2.5.20), (2.5.22) и (2.5.36) приводят к неравенству

$$\varphi_2 - \eta\big\langle Ma_t, h^\eta\big\rangle_{1,M} - \big(F, h^\eta\big) + \big(gw^\eta, h^\eta\big) \;\ge\; \underline{\varphi}_2 - C_{10}\eta^{1/2}. \qquad (2.5.37)$$

Здесь постоянная $C_{10} > 0$ зависит от $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\max_{t\in[0,T]}\|a_t\|_1$, $\max_{t\in[0,T]}\|F\|$, C_9 и не зависит от η и k_0^η. Правая часть (2.5.37) положительна при $\eta_0 < (\underline{\varphi}_2 C_{10}^{-1})^2$.

Далее, ввиду (2.5.16),(2.5.35)

$$\frac{1}{\eta}\big(w^\eta, h^\eta\big) \;\le\; \Big|\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial w^\eta}{\partial\overline{N}}\,\omega\,ds\Big| + \big|\big(Mw^\eta, h^\eta\big)\big| \;\le\; \frac{C_{11}}{(k_0^\eta)^{1/2}}, \qquad (2.5.38)$$

где $C_{11} =$ const > 0 зависит от C_4, C_5, C_6, C_8, η_0, m_i, $i = 1, 2, 3$, и не зависит от η и k_0^η.

Таким образом, из (2.5.19), (2.5.29), (2.5.30), (2.5.37) и (2.5.38) вытекает неравенство

$$k_0^\eta \ \geq \ (\underline{\varphi}_2 \ - \ C_{10}\eta^{1/2})(k_0^\eta)^{1/2}\big[\alpha_2(k_0^\eta)^{1/2} \ + \ C_{11}\big]^{-1},$$

или

$$\alpha_2 k_0^\eta \ + \ C_{11}(k_0^\eta)^{1/2} - \underline{\varphi}_2 \ + \ C_{10}\eta^{1/2} \ \geq \ 0,$$

из которого следует, что

$$k_0^\eta \ \geq \ \frac{-C_{11} + \big(C_{11}^2 + 4\alpha_2(\underline{\varphi}_2 \ - \ C_{10}\eta^{1/2})\big)^{1/2}}{2\alpha_2} \equiv r(\eta). \tag{2.5.39}$$

Причем, $r(\eta)$ – неотрицательная функция непрерывная на $[0, \eta_0]$ и $r(0) > 0$.

Теперь равномерные оценки w^η, Mw^η и w_t становятся очевидными. В силу (2.5.32) и (2.5.39)

$$\|w^\eta\|_1^2 + \eta\|Mw^\eta\|^2 + r(\eta)\int\limits_0^\tau \|Mw^\eta\|^2 \mathrm{d}\tau \leq \frac{C_6}{r(\eta)}. \tag{2.5.40}$$

$$\int\limits_0^t \|w_\tau^\eta\|_{1,M}^2 \, d\tau \ + \ \eta\int\limits_0^t \|Mw_\tau^\eta\|^2 \, d\tau \ + \ \|Mw^\eta\|^2 \ \leq \ \frac{C_8}{r(\eta)}. \tag{2.5.41}$$

В свою очередь, умножая уравнение (2.5.25) на w_t^η скалярно в $L^2(\Omega)$, интегрируя по частям во втором и третьем слагаемых левой части с учетом (2.5.27) и оценивая правую часть результирующего равенства, в силу (2.5.33) можно получить неравенство

$$\|w_t^\eta\|^2 \ + \ \eta\|w_t^\eta\|_{1,M}^2 \ \leq \ \frac{C_{12}}{r(\eta)} \ + \ C_{13}, \tag{2.5.42}$$

где постоянные C_{12} и C_{13} зависят от C_9, k_2, $\|F\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$ и не зависят от η и k_0^η. Таким образом, из (2.5.21), (2.5.39)–(2.5.42) следует, что из последовательности $\{u^\eta, k^\eta\}$можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\eta_l}, k^{\eta_l}\}$, сходящуюся к паре функций $\{u, k\}$, причем

$$u^{\eta_l} \to u \ \ * - \text{ слабо в } L^\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \tag{2.5.43}$$

$$u_t^{\eta_l} \to u_t \ \ * - \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ и слабо в } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)), \tag{2.5.44}$$

$$k^{\eta_l} \to k \ \ * - \text{ слабо в } L^\infty(0, T) \tag{2.5.45}$$

при $\eta_l \to 0$. По теореме компактности [131]

$$u^{\eta_l} \;\to\; u \quad \text{в} \;\; L^4(0,T;W_2^1(\Omega)), \tag{2.5.46}$$

$$k^{\eta_l} \;\to\; k \quad \text{слабо в} \;\; L^4(0,T)\,\text{при} \;\; \eta_l \to 0. \tag{2.5.47}$$

Покажем, что пара $\{u,k\}$ является решением задачи 2.4. Действительно, пара $\{u^{\eta_l},k^{\eta_l}\}$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^T \big\{\big(u_t^{\eta_l},v\big)+\eta_l\big\langle Mu_t^{\eta_l},v\big\rangle_1+k^{\eta_l}\big\langle Mu^{\eta_l},v\big\rangle_1+\big(g(t,x)u^{\eta},v\big)\big\}dt=$$

$$=\int\limits_0^T \big(F(t,x),v\big)dt \tag{2.5.48}$$

для любого $v\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Виду (2.5.43)–(2.5.47) можно перейти в (2.5.48) к пределу при $\eta_l \to 0$. Так как

$$\eta_l\int\limits_0^T \big\langle Mu_t^{\eta_l},v\big\rangle_1\,dt \;\to\; 0$$

при $\eta_l \to 0$ (в силу (2.5.42)), получим, что

$$\int\limits_0^T \Big\{\big(u_t,v\big)\;+\;k(t)\,\big\langle Mu,v\big\rangle_1\;+\;\big(gu,v\big)\Big\}\,dt\;=\int\limits_0^T (f,v)\,dt \tag{2.5.49}$$

для каждого $v\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1\;(\Omega))$. Причем, в силу (2.3.20), (2.5.21), (2.5.24), (2.5.39)–(2.5.42) для функций u и k справедливы оценки

$$r(0)\;\le\;k(t)\le\overline{\varphi}_2\alpha_2^{-1}, \tag{2.5.50}$$

$$0\;\le\;u(t,x)\le a(t,x), \tag{2.5.51}$$

$$\int\limits_0^T \|u_t\|_1^2\,d\tau+\|Mu\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\le\frac{C_9}{m_1(r(0))^{3/2}}\;+2\int\limits_0^T \|a_t\|_1^2\,d\tau, \tag{2.5.52}$$

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\le\left(\frac{C_{12}}{r(0)}+C_{13}\right)^{1/2}+\|a_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.5.53}$$

Из (2.5.49)–(2.5.53) следует, что уравнение (2.5.3) выполняется почти для всех $(t,x) \in Q_T$. Кроме того, ввиду (2.5.8), (2.5.9), (2.5.43) и (2.5.44) функция $u(t,x)$ отвечает краевым условиям (2.5.4),(2.5.5).

Остается доказать, что пара (u,k) удовлетворяет условию переопределения (2.5.6). Пусть $v(t,x)$ и $\xi(t)$ – функции из пространств $L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$ и $L^2(0,T)$, соответственно, и $v\big|_{\partial\Omega} = \omega$. Умножим уравнение (2.5.7) на $v\xi(t)$ скалярно в $L^2(Q_T)$ и проинтегрируем в полученном тождестве по частям по x с учетом (2.5.10). Это даст:

$$\int_0^T \Big\{ \big(u_t^{\eta_l} + g u^{\eta_l}, v\big) + \eta_l \big\langle M u_t^{\eta_l}, v\big\rangle_{1,M} + k^{\eta_l}(t)\big(\big\langle M u^{\eta_l}, v\big\rangle_{1,M} + \varphi_1(t)\big)\Big\}\xi\,dt$$
$$= \int_0^T ((f,v) + \varphi_2)\xi\,dt. \tag{2.5.54}$$

Переходя к пределу в (2.5.54) при $\eta \to 0$, аналогично тому, как это сделано выше, получим тождество

$$\int_0^T \Big\{ \big(u_t + gu, v\big) + k(t)\big(\big\langle Mu, v\big\rangle_{1,M} + \varphi_1\big)\Big\}\xi\,dt = \int_0^T ((f,v) + \varphi_2)\xi\,dt. \tag{2.5.55}$$

Интегрируя по частям во втором члене левой части (2.5.55) с учетом уравнения (2.5.3), приходим к равенству

$$\int_0^T \Big\{ k(t) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \omega\,ds + \varphi_1(t)k(t) - \varphi_2(t)\Big\}\xi(t)\,dt \;=\; 0,$$

справедливому для всех $\xi(t) \in L^2(0,T)$, которое означает, что пара $\{u,k\}$ удовлетворяет условию (2.5.6) почти всюду на $(0,T)$. Теорема доказана.

Теорема 2.5.2 остается справедливой и при $n = 1$. В случае одной пространственной переменной $\Omega = (0,l)$,

$$M = -\frac{\partial}{\partial x}\big(m_{11}(x)\frac{\partial}{\partial x}\big) + m(x)I \tag{2.5.56}$$

и условия (2.5.9), (2.5.10) имеют вид:

$$u^\eta(t,0) = \beta_1(t), \qquad u^\eta(t,l) = \beta_2(t),$$
$$m_{11}(l)\,u_x(t,l)\,\omega_2(t) - m_{11}(0)\,u_x(t,0)\,\omega_1(t) + k(t)\,\varphi_1(t) = \varphi_2(t),$$

где $l > 0$ – действительное число, $\beta_i(t)$ и $\omega_i(t)$, $i = 1, 2$ – заданные функции.

Теорема 2.5.3. *Пусть $\eta \in (0, \eta_0]$, $n = 1$, функции $f(t,x)$, $U_0(x)$, $\beta(t,x)$, $\phi_1(t)$ неотрицательны и выполняются предположения I–II и условие (iii) теоремы* 2.5.2. *Пусть также*

(iv) $f \in L^\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $f_t \in L^2(0,T; C(\overline{\Omega}))$, $\beta_i, \omega_i \in C^1([0,T])$, $U_0 \in W_2^2(\Omega)$, *i=1,2,* $g \in C(0,T; C^1(\overline{\Omega}))$, $\varphi_1 \in C([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$*;*

(v) u_0 *и* β *отвечают условиям согласования* $u_0(0) = \beta_1(0)$, $u_0(l) = \beta_2(l)$ *и имеют место неравенства (2.5.17)–(2.5.19).*

Тогда

$$\begin{array}{lll} u^\eta & \to & u \qquad * - \textit{слабо} \quad \textit{в } L^\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), \\ u_t^\eta & \to & u_t \qquad * - \textit{слабо} \quad \textit{в } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \quad \textit{и} \quad \textit{слабо} \quad \textit{в } L^2(0,T; W_2^1(\Omega)), \\ k^\eta & \to & k \qquad * - \textit{слабо} \quad \textit{в } L^\infty(0,T) \end{array}$$

при $\eta \to 0$ *справедлива оценка (2.5.21) где* $r(\eta)$ *– неотрицательная функция непрерывная на* $[0, \eta_0]$ *и* $r(0) > 0$.

Доказательство. Для задачи 2.4 с оператором M вида (2.5.56), где $m_{11} = 1$ и $m = 0$, данная теорема доказана в [260]. Доказательство теоремы в случае оператора M с переменными коэффициентами отличается от доказательства теоремы 2.5.2 только выводом равномерных оценок для k^η, которыми мы и ограничимся.

Обратимся к задаче (2.5.25)–(2.5.27), (2.5.29). В случае одной пространственной переменной условие (2.5.27) принимает вид: $w(t,0) = w(t,l) = 0$. Для w^η справедливо неравенство (2.5.32).

Представим пару $\{w^\eta(t,x), k(t)\}$ в виде суммы

$$\{w^\eta(t,x),\, k^\eta(t)\} \;=\; \{w_1^\eta(t,x),\, 0\} \;+\; \{w_2^\eta(t,x),\, k^\eta(t)\},$$

где w_1^η удовлетворяет уравнению

$$w_{1t}^\eta \,+\, \eta M w_{1t}^\eta \,+\, k_0^\eta M w_1^\eta \,+\, g w_1^\eta \;=\; F(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.57}$$

и краевым условиям

$$(w_1^\eta + \eta M w_1^\eta)\big|_{t=0} \;=\; a(0,x) \,-\, U_0(x) \,\equiv\, w_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.5.58}$$

$$w_1^\eta(t,l) = w_1^\eta(t,0) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{2.5.59}$$

а пара $\{w_2^\eta(t,x),\, k^\eta(t)\}$ является решением обратной задачи

$$w_{2t}^\eta + \eta M w_{2t}^\eta + k^\eta(t) M w_2^\eta + g w_2^\eta = (k_0^\eta - k^\eta(t)) M w_1^\eta, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.5.60}$$

$$w_2^\eta\big|_{t=0} = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.5.61}$$

$$w_2^\eta(t,l) = w_2^\eta(t,0) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{2.5.62}$$

$$k^\eta = \frac{\varphi_2 - \eta\Psi' - (F, h^\eta) + (g w_1^\eta, h^\eta)_0 + (g w_2^\eta, h^\eta)}{\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w_1^\eta, h^\eta) + \frac{1}{\eta}(w_2^\eta, h^\eta)}, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.5.63}$$

Применяя к задаче (2.5.57)–(2.5.59) рассуждения, приведшие к неравенству (2.5.32), получаем аналогичную оценку для w_1^η:

$$\|w_1^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|M w_1^\eta\|^2 + k_0^\eta \int_0^\tau \|M w_1^\eta\|^2 dt \le \frac{C_6}{k_0^\eta}, \tag{2.5.64}$$

Оценку на w_{1t}^η можно получить с помощью (2.5.29),(2.5.39) и (2.5.64). Умножим (2.5.57) на $M w_{1t}^\eta$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Затем результат проинтегрируем по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$. После интегрирования по частям по t во втором члене правой части полученного уравнения приходим к равенству:

$$\int_0^\tau \Big\{\|w_{1t}^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|M w_{1t}^\eta\|^2\Big\} dt + \frac{k_0^\eta}{2}\|M w_1^\eta\|^2 = -F(\tau,l)m_{11}(l)w_{1x}^\eta(\tau,l) +$$
$$+F(\tau,0)m_{11}(0)w_{1x}^\eta(\tau,0) + F(0,l)m_{11}(l)w_{0x}(l) - F(0,0)m_{11}(0)w_{0x}(0) +$$
$$+\int_0^\tau \Big(F_t(t,l)m_{11}(l)m_{11}(l)w_{1x}^\eta(t,l) - F_t(t,0)m_{11}(0)w_{1x}^\eta(t,0)\Big) dt +$$
$$+\int_0^\tau \big\langle F - g w_1^\eta,\, M w_{t1}^\eta\big\rangle_{1,M} dt + \frac{k_0^\eta}{2}\|M u_0\|^2. \tag{2.5.65}$$

Оценим второй и третий члены правой части (2.5.65) с учетом гладкости исходных данных. В силу мультипликативного неравенства [86, стр. 79] и (2.5.64) имеем:

$$|F(t,l)m_{11}(l)w_{1x}^\eta(t,l) - F(t,0)m_{11}(0)w_{1x}^\eta(t,0)| \le 2m_2\|F\|_{C(\overline{Q}_T)}\|w_{1x}^\eta\|_{C(\overline{\Omega})} \le$$
$$\le C_{14}\|M w_1^\eta\|^{1/2}\|w_1^\eta\|_{1,M}^{1/2} \le \frac{C_{14^2}}{2(k_0^\eta)^{1/2}} + \frac{k_0^\eta}{4}\|M w_1^\eta\|^2 + \frac{1}{4}\|w_1^\eta\|_{1,M}^2. \tag{2.5.66}$$

Постоянная $C_{14} > 0$ зависит от $\|F\|_{C(\overline{Q}_T)}$, m_i, $i = 1, 2, 3$ и mesΩ. Аналогичным образом оценивается пятый член (2.5.65).

$$\Big|\int\limits_0^\tau \big(F_t(\tau,l)m_{11}(l)w_{1x}^\eta(\tau,l) - F_t(\tau,0)m_{11}(0)w_{1x}^\eta(\tau,0)\big)dt\Big| \le$$

$$\le C_{15}\Big(\int\limits_0^\tau \|Mw_1^\eta\|^2 dt\Big)^{1/4}\Big(\int\limits_0^\tau \|w_1^\eta\|_{1,M}^2 dt\Big)^{1/4} \le$$

$$\le \frac{C_{15}^2}{2(k_0^\eta)^{1/2}} + \frac{k_0^\eta}{4}\int\limits_0^\tau \|Mw_1^\eta\|^2 dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^\tau \|w_1^\eta\|_{1,M}^2 dt. \qquad (2.5.67)$$

Постоянная $C_{15} > 0$ зависит от $\|F_t\|_{L^2(Q_T)}$, T, m_i, $i = 1, 2, 3$ и mesΩ. Оценивая остальные члены правой части (2.5.65) и учитывая (2.5.64), (2.5.66) и (2.5.67), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^\tau \Big\{\|w_{1t}^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|Mw_{1t}^\eta\|^2\Big\}dt + \frac{k_0^\eta}{4}\|Mw_1^\eta\|^2 \le \frac{C_{16}}{(k_0^\eta)^{1/2}} + \frac{k_0^\eta}{4}\int\limits_0^\tau \|Mw_1^\eta\|^2 dt,$$

из которого согласно лемме Гронуолла следует, что

$$\int\limits_0^t \|w_{1\tau}^\eta\|_{1,M}^2\, d\tau \;+\; \eta\int\limits_0^t \|Mw_{1\tau}^\eta\|^2\, d\tau \;+\; \frac{k_0^\eta}{4}\|Mw_1^\eta\|^2 \;\le\; \frac{C_{16}e^T}{(k_0^\eta)^{1/2}}. \qquad (2.5.68)$$

Постоянная C_{16} зависит от T, C_6, C_{14}, C_{15}, $\|F\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\|w_0\|$.

Неравенство (2.5.64) и гладкость исходных данных позволяют получить оценку для решения задачи (2.5.60)–(2.5.63) аналогичную неравенству (2.5.32).

$$\|w_2^\eta\|_{1,M}^2 \;+\; \eta\,\|Mw_2^\eta\|^2 \;+\; k_0^\eta\int\limits_0^t \|Mw_2^\eta\|_0^2\, d\tau \;\le\; \frac{C_{17}}{(k_0^\eta)^{3/2}}, \qquad (2.5.69)$$

где C_{19} =const> 0 зависит от T, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$, C_{16}, k_1, m_i, $i = 1, 2, 3$, и не зависит от k_0^η и η. Действительно, умножая (2.5.60) на Mw_2^η в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям в первом и последнем слагаемых левой части равенства, получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w_2^\eta\|_{1,M}^2 + \eta\|Mw_2^\eta\|^2\Big) + k^\eta\|Mw_2^\eta\|^2 + \langle gw_2^\eta, Mw_2^\eta\rangle_{1,M} = (k_0^\eta - k^\eta)(Mw_1^\eta, Mw_2^\eta).$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, с учетом (2.5.61), перенесем последнее слагаемое из левой части в правую и оценим правую часть с помощью (2.5.64). Это даст

$$\frac{1}{2}\Big(\|w_2^\eta\|_{1,M}^2+\eta\|Mw_2^\eta\|^2\Big)+\int\limits_0^\tau k^\eta\|Mw_2^\eta\|^2dt \le \frac{k_1C_6}{2k_0^\eta}+\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}\int\limits_0^\tau \|w_2^\eta\|_{1,M}^2dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau (k_0^\eta-k^\eta)\|Mw_2^\eta\|^2dt.$$

Перенесем последнее слагаемое в левую часть неравенства. Из результирующего соотношения согласно лемме Гронуолла следует (2.5.69).

Далее, в силу (2.5.68) и того факта, что $\|h^\eta\|\le\|b\|$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\eta}\big(w_1^\eta,h^\eta\big)\le |m_{11}(l)w_{1x}^\eta(t,l)\omega_2-m_{11}(0)w_{1x}^\eta(t,0)\omega_1|+$$

$$+\Big|\big(Mw_1^\eta,h^\eta\big)\Big|\le\frac{C_{18}}{(k_0^\eta)^{3/4}}, \tag{2.5.70}$$

где $C_{18}=\mathrm{const}>0$ зависит от k_1, C_{16}, T, $\|b\|$, m_i, $i=1,2,3$, и не зависит от η и k_0^η.

Для оценки выражения $\frac{1}{\eta}\big(w_2^\eta,h^\eta\big)$ используем разложение функции w^η в ряд Фурье по собственным функциям оператора M. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ – множество всех собственных значений оператора M (ввиду самосопряженности оператора все λ_j являются действительными числами) и $\{y_j(x)\}_{j=1}^\infty$ – базис в $W_2^2(\Omega)$, состоящий из собственных функций оператора M, соответствующих собственным значениям λ_j, $j=1,2,\dots$. Базис предполагается ортонормированным в $L^2(\Omega)$. Функции w_2^η и h^η, как элементы $W_2^2(\Omega)$, можно представить в виде разложения по базису y_j следующим образом:

$$w_2^\eta\;=\;\sum_{j=1}^\infty w_{2j}^\eta(t)y_j(x),\qquad h^\eta\;=\;\sum_{j=1}^\infty h_j^\eta(t)y_j(x),$$

где

$$w_{2j}^\eta(t)\;=\;\frac{1}{1+\eta\lambda_j}\int\limits_0^t\Big\{\big(k_0^\eta-k^\eta(\theta)\big)\lambda_jw_{1j}^\eta\;-\;\big(gw_2^\eta,y_j\big)\Big\}$$

$$\times\ \exp\left(-\frac{\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}\int\limits_\theta^t k^\eta(\tau)d\tau\right)d\theta,$$

$$h_j^\eta(t)\ =\ (h^\eta, y_j),\qquad w_{1j}^\eta(t)\ =\ (w_1^\eta, y_j).$$

Из определения функций h^η и b ($Mb=0$, $b(t,0)=\omega_1$ и $b(t,l)=\omega_2$) вытекает, что

$$h_j^\eta\ =\ \frac{\eta\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}\big(b(t,x),y_j\big)\ \equiv\ \frac{\eta\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}b_j(t).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\eta}\left(w_2^\eta, h^\eta\right)\ =\ \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^\infty w_{2j}^\eta(t)\,h_j^\eta(t)$$

$$=\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda_j\,b_j}{(1+\eta\lambda_j)^2}\int\limits_0^t\Big(k_0^\eta-k^\eta(\theta)\Big)\lambda_j w_{1j}^\eta\ \exp\bigg(-\frac{\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}\int\limits_\theta^t k^\eta d\tau\bigg)d\theta$$

$$-\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda_j b_j}{(1+\eta\lambda_j)^2}\int\limits_0^t\Big(gw_2^\eta, y_j\Big)\ \exp\bigg(-\ \frac{\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}\int\limits_\theta^t k^\eta d\tau\bigg)d\theta\equiv I_1-I_2.\quad(2.5.71)$$

Оценим I_1 и I_2. Ввиду гладкости w_1^η, имеем:

$$|I_1|\ \le\sum_{j=1}^\infty\frac{(\lambda_j)^2 b_j\max\limits_{\theta\in[0,t]}|w_{1j}^\eta|}{(1+\eta\lambda_j)^2}\int\limits_0^t\big(k^\eta-k_0^\eta\big)\exp\bigg(-\frac{\lambda_j}{1+\eta\lambda_j}\int\limits_\theta^t(k^\eta-k_0^\eta)d\tau\bigg)d\theta$$

$$\le\bigg(\sum_{j=1}^\infty b_j^2\bigg)^{1/2}\bigg(t\int\limits_0^t\sum_{j=1}^\infty(\lambda_j)^2\Big(w_{1jt}^\eta(\theta)\Big)^2d\theta\bigg)^{1/2},$$

откуда в силу (2.5.59) и (2.5.68) получаем, что

$$|I_1|\ \le\ \frac{C_{16}T^{1/2}\,\|b\|e^T}{(k_0^\eta)^{3/4}}\ \equiv\ \frac{C_{19}}{(k_0^\eta)^{3/4}}.\qquad(2.5.72)$$

Далее, используя (2.5.69) и гладкость $g(t,x)$, оценим I_2 следующим образом:

$$|I_2|\ \le\ \bigg(\sum_{j=1}^\infty(\lambda_j)^2 b_j^2\bigg)^{1/2}\bigg(t\int\limits_0^t\sum_{j=1}^\infty\ \left(gw_2^\eta, y_j\right)^2\ d\theta\bigg)^{1/2}\le\ \frac{C_{20}}{(k_0^\eta)^{3/4}},\qquad(2.5.73)$$

где $C_{20} = \mathrm{const} > 0$ зависит от k_1, C_{17}, $\|b\|_{C([0,T];W_2^2(\Omega))}$, $\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$, T, m_i, $i = 1, 2, 3$, и не зависит от η и k_0^η. В силу (2.5.72)–(2.5.73) из (2.5.71) получаем, что

$$\frac{1}{\eta}\big|\big(w_2^\eta, h^\eta\big)\big| \le |I_1| + |I_2| \le \frac{C_{19} + C_{20}}{(k_0^\eta)^{3/4}} \equiv \frac{C_{21}}{(k_0^\eta)^{3/4}}. \qquad (2.5.74)$$

Числитель правой части (2.5.63) оценим, используя свойство функции h^η аналогичное лемме 2.5.1. Умножим уравнение (2.5.11) на Mh^η скалярно в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям в первом слагаемом и перепишем результирующее равенство в виде

$$\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} + \eta\|Mh^\eta\|^2 = m_{11}(l)h_x^\eta(t,l)\omega_2 - m_{11}(0)h_x^\eta(t,0)\omega_1.$$

Оценим правую часть этого соотношения с помощью мультипликативного неравенства [85], неравенств (2.2.3), (2.2.31) и того факта, что $0 \le h^\eta \le b$. Будем иметь:

$$\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} + \eta\|Mh^\eta\|^2 = |m_{11}(l)h_x^\eta(t,l)\omega_2 - m_{11}(0)h_x^\eta(t,0)\omega_1| \le$$
$$\le \frac{C_{22}^2}{2m_1\eta^{1/2}} + \frac{3}{4}\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} + \frac{\eta}{4}\|Mh^\eta\|^2 + C_{23}, \qquad (2.5.75)$$

откуда получаем, что

$$\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} \le \frac{2C_{22}^2}{m_1}\eta^{-1/2} + 4C_{23}, \qquad \|Mh^\eta\|^2 \le \frac{2C_{22}^2}{3m_1}\eta^{-3/2} + \frac{4}{3}C_{23}. \quad (2.5.76)$$

Положительные константы C_{22} и C_{23} зависят от $\|b\|_{C(\overline{Q}_T}$, l, m_i, $i = 1, 2$. Далее, умножим уравнение (2.5.11) на h^η скалярно в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям во втором слагаемом и перепишем результирующее равенство в виде

$$\|h^\eta\|^2 + \eta\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} = \eta\big(m_{11}(l)h_x^\eta(t,l)\omega_2 - m_{11}(0)h_x^\eta(t,0)\omega_1\big).$$

Применяя неравенства (2.5.75) и (2.5.76) к правой части этого соотношения, приходим к оценке

$$\|h^\eta\|^2 + \eta\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} \le \eta\Big[\frac{C_{22}^2}{2m_1\eta^{1/2}} + \frac{3}{4}\big\langle h^\eta, Mh^\eta\big\rangle_{1,M} + \frac{\eta}{4}\|Mh^\eta\|^2 + C_{23}\Big] \le$$
$$\le C_{24}\,\eta^{1/2}.$$

Здесь константа $C_{24} > 0$ зависит от C_{22}, C_{23}, η_0, l, m_i, $i = 1, 2$. Из (2.5.23) и последней оценки следует, что

$$\varphi_2 - \eta\big\langle Ma_t, b'\big\rangle_{1,M} - (F, h^\eta) + (g(w_1^\eta + w_2^\eta), h^\eta) \ge \underline{\varphi}_2 - C_{25}\,(\eta^{1/4} + \eta). \quad (2.5.77)$$

Здесь положительная постоянная C_{25} зависит от C_{24}, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a\| + \|a_t\|\}$, $\max\{\|F\|, \|b\|\}$ и не зависит от η и k_0^η. Если $\eta_0 < \min\{1, \big(\underline{\varphi}_2(2C_{25})^{-1}\big)^4\}$, то $\underline{\varphi}_2 - C_{25}(\eta^{1/4} + \eta) > 0$.

Таким образом, соотношения (2.5.19), (2.5.30), (2.5.63), (2.5.70), (2.5.74), (2.5.77) приводят к неравенству

$$k_0^\eta \geq \frac{C_{26}(k_0^\eta)^{3/4}}{\alpha_2(k_0^\eta)^{3/4} + C_{27}},$$

откуда следует, что

$$\alpha_2 k_0^\eta + C_{27}(k_0^\eta)^{1/4} - C_{26}\,\eta_0^{1/4} \geq 0. \tag{2.5.78}$$

Здесь

$$C_{26} = \underline{\varphi}_2 - C_{25}\,(\eta^{1/4} + \eta), \qquad C_{27} = C_{18} + C_{21}.$$

Так как уравнение

$$G(y) \equiv \alpha_2 y^4 + C_{27} y - C_{26}\eta_0^{1/4} = 0,$$

имеет единственный положительный действительный корень y_0, соотношение (2.5.78) влечет за собой неравенство

$$(k_0^\eta)^{1/4} \geq y_0 > 0.$$

Действительно, из очевидного неравенства

$$G(y) \leq \begin{cases} \alpha_2 y^2 + C_{27} y - C_{26}, & 0 \leq y < 1, \\ \alpha_2 y^4 + C_{27} y^2 - C_{26}, & 1 \leq y < +\infty, \end{cases}$$

вытекает, что $y_0 \geq y^*$, если

$$y^* = \frac{-C_{27} + \sqrt{C_{27}^2 + 4\alpha_3 C_{26}}}{2\alpha_2} < 1;$$

в противном случае $y_0 \geq (y^*)^{1/2}$. Таким образом, получаем неравенство

$$k_0^\eta \geq \min\Big\{(y^*)^2, (y^*)^4\Big\} \equiv r(\eta) > 0.$$

Причем функция $r(\eta)$ непрерывна по η на $[0, \eta_0]$ и $r(0) > 0$.

Остальная часть доказательства теоремы 2.5.3 полностью совпадает с доказательством теоремы 2.5.2. Теорема доказана.

2.5.2 Корректность обратной задачи для параболического уравнения

Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют исследовать корректность обратных задач для параболических уравнений, старшие члены которых содержат неизвестные коэффициенты. Обратные задачи для параболических уравнений с неизвестными старшими коэффициентами рассматривались ранее с другими условиями переопределения. Значительные результаты в этой области получены в работах [168,173,174,176,177,180], [204]– [217], [228,232] (см. также ссылки в данных работах).

Как отмечалось во введении, исследование обратных задач идентификации коэффициентов при вторых производных в параболическом уравнении восходит к работам [173, 214, 215], посвященным обоснованию корректности одномерной (по пространственной переменной) обратной задачи определения коэффициента температуропроводности $k(t)$ в уравнении $u_t = k(t)u_{xx}$ на множестве $0 < x < \infty$, $0 < t < T < \infty$ при начальных данных, граничном условии Дирихле на конце $x = 0$ и условии переопределения $k(t)u_x(0, t) = \mu(t)$. В них доказано существование, единственность и непрерывная зависимость классического решения данной задачи от исходных данных. В [174] найдены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения постоянного коэффициента k с условием переопределения Неймана $ku_x(0, t_0) = \mu_1$. В [204]– [211], [217, 228, 232] изучались аналогичные одномерные обратные задачи с различными граничными данными (в том числе нелокальными) и условиями переопределения. В частности, в [212] доказано существование, единственность классического решения одномерной обратной задачи восстановления неизвестного коэффициента $k(t)$ в уравнении $c(x)u_t = k(t)u_{xx}+f(x, t)$ по известному потоку $u_x(0, t)$ в случае граничного условия Дирихле или по заданному следу $u(0, t)$. В [204] установлена непрерывная зависимость решения этих задач от исходных данных и предложен метод численного решения задач на основе конечно-разностной схемы Кранка-Николсона. В [210,211] рассмотрены одномерные обратные задачи отыскания $k(t)$ в уравнении $u_t = k(t)u_{xx} + f(x, t)$ по известному моменту $\int_0^h x^q u dx$ первого или второго порядка, либо при нелокальном условии переопределения $\beta_1 u(0, t) + \beta_2 u(h, t) + \beta_3 u_x(0, t) + \beta_4 u_x(h, t) = \mu(t)$. Доказано существование в малом по t и единственность классического решения данных задач.

Многомерным обратным задачам для параболических уравнений типа (2.5.3) с неизвестным $k(t)$ посвящены работы [168,177,180]. В частности, в [177] найдены достаточные условия существования и единственности классического решения обратной задачи нахождения неизвестного коэффициента $k(t)$ в уравнении (2.5.3) при краевых условиях (2.5.4), (2.5.5) и точечном условии переопределения

$$k(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\,\omega\Big|_{x=x_0} = \varphi_3(t), \qquad t \in (0, T),$$

где x_0 – точка максимума функции u на границе основания цилиндра Q_T при $t = 0$. В [168] доказано существование слабого обобщенного решения обратной задачи идентификации коэффициента диффузии, зависящего от времени, в нелинейном уравнении конвекции – диффузии с комбинированными граничными условиями Дирихле и Неймана на различных частях границы и аналогичном (2.5.10) интегральном условии переопределения, заданном на третьей части границы.

Разрешимость задачи 2.4, т. е. задачи (2.5.3)–(2.5.5) с интегральным условием переопредления (2.5.6) фактически следует из теорем 2.5.2 и 2.5.3 при соответствующей размерности пространства переменных x. Более того, в условиях данных теорем решение задачи 2.4 единственно в классе $V \times L^\infty(0, T)$.

Теорема 2.5.4. *Пусть $\varphi_1(t) \equiv 0$, выполняются предположения теоремы 2.5.2 при $n \geq 2$ или теоремы 2.5.3 при $n = 1$. Тогда задача 2.4 имеет единственное решение $\{u, k\} \in V \times L^\infty(0, T)$. Причем $u_t \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и пара $\{u, k\}$ удовлетворяет оценкам (2.5.50)–(2.5.53).*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.5.2 построено решение задачи 2.4 как предел последовательности решений $\{u^\eta, k^\eta\}$ задачи 2.2* при $\eta \to 0$ и получены оценки (2.5.50)–(2.5.53). Остается установить единственность построенного решения.

Пусть $\{u_1(t, x),\, k_1(t)\}$ и $\{u_2(t, x),\, k_2(t)\}$ – два решения задачи 2.4. Тогда пара $\{w(t, x),\, p(t)\} = \{u_1 - u_2,\; k_1(t) - k_2(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$w_t - k_1(t) M w = -p(t)\, M u_2, \qquad (t, x) \in Q_T, \tag{2.5.79}$$

и условиям

$$w\big|_{t=0} = w\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$k_1(t)\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \overline{N}}\,\omega\,ds = -\frac{\varphi_2(t)}{k_2(t)}\,p(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{2.5.80}$$

В случае одной пространственной переменной (2.5.80) имеет вид

$$m_{11}(l)w_x(t,l)\omega_2(t) - m_{11}(0)w_x(t,0)\omega_1(t) = -\frac{\varphi_2(t)}{k_2(t)}\,p(t).$$

Умножая (2.5.79) на Mw скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w\|^2_{1,M} \,+\, k_1(t)\|Mw\|^2 \,\le\, |p(t)|\,\|Mu_2\|\,\|Mw\|. \tag{2.5.81}$$

Оценим правую часть (2.5.81) с помощью (2.5.12) при $q = 2$, (2.5.21), (2.5.52), (2.5.79) и неравенства Юнга. Будем иметь:

$$\begin{aligned} |p(t)|\,\|Mu_2\|\,\|Mw\| &\le C_{28}\,\|Mu_2\|\,\|w\|^{1/2}_{1,M}\,\|Mw\|^{3/2} \\ &\le \frac{r(0)}{2}\,\|Mw\|^2 \,+\, C_{29}\,\|w\|^2_{1,M}, \end{aligned} \tag{2.5.82}$$

где $C_{28}, C_{29} = \mathrm{const} > 0$ зависят от C_2, C_9, $\|a_t\|_{L^2(0,T;W^1_2(\Omega))}$, $\underline{\varphi_2}$, $r(0)$, α_2, m_i, $i = 1,2,3$. В силу (2.5.50) и (2.5.82), из (2.5.81) получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w\|^2_{1,M} \,\le C_{29}\|w\|^2_{1,M},$$

откуда согласно лемме Гронуолла следует, что

$$\|w\|^2_{1,M} \le 0.$$

Последнее означает, что $w = 0$ почти для всех $(t,x) \in Q_T$ и в силу (2.5.80) $p = 0$ для почти всех $t \in (0,T)$. Теорема доказана.

2.6 Обратная задача с неизвестным коэффициентом в старшем члене третьего порядка

В данном параграфе продолжается исследование корректности обратных задач нахождения неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, в уравнении

$$\nu u_t + (\eta M u)_t + kMu + gu = f. \tag{2.6.1}$$

Здесь устанавливаются условия разрешимости и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестного коэффициента $\eta = \eta(t)$ в (2.6.1) по дополнительной информации на границе при заданной функции f и $k = 1$, $\nu = 0$ или $\nu = 1$. Исследование проводится в три этапа. Первый этап включает в себя обсуждение постановки обратной задачи и предварительные результаты для соответствующих прямых краевых задач. На втором этапе будет доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи „в малом“ по t при $\nu = 1$. На третьем этапе будут получены достаточные условия существования и единственности решения «в целом» по t при $\nu = 0$.

2.6.1 Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть задача рассматривается снова в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, T - действительное число и $Q_T = \Omega \times (0, T)$ - цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Также, как и раньше, точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0, T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T - через (t, x).

Соображения, приведенные в §2.1, позволяют дать формулировку обратной задачи, исследование корректности которой является основной целью данного параграфа.

Задача 2.5. При заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, постоянных r_1, r_2 и ν найти пару функций $\{u(t,x), \eta(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$(\nu u + \eta(t)\, Mu)_t + Mu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.6.2}$$

краевым условиям

$$(\nu u + \eta(t) Mu)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6.3}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T \tag{2.6.4}$$

и условиям переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \left(\eta(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T], \tag{2.6.5}$$

$$\eta(0)\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u(0,x)}{\partial\overline{N}}\,\omega(0,x)\,ds+r_1\eta(0)=r_2. \qquad (2.6.6)$$

Мы исследуем обратную задачу 2.5 при $\nu=1$ и $\nu=0$. Для задачи 2.5 при $\nu=1$ будет установлена разрешимость и единственность решения „в малом“ по t, а при $\nu=0$ – „в целом“ по t.

Будем предполагать, что для оператора M выполняются условия I–II из §2.2 настоящей главы.

В дальнейшем наряду с обозначениями, введенными в §2.3, в частности, $\Psi(t)=\left\langle Ma,b\right\rangle_{1,M}$ и $F(t,x)=a_t-f(t,x)+g(t,x)a$, мы будем использовать обозначения $\Phi_1(t)=\varphi_2(t)-\Psi(t)$ и $\overline{\Phi}_1=\max_{t\in[0,T]}|\Phi(t)|$. В данном параграфе будем обозначать через $h^\eta(t,x)$ решение задачи Дирихле

$$h^\eta+\eta(0)Mh^\eta=0\quad \text{в } \Omega,\quad h^\eta\big|_{\partial\Omega}=\omega(t,x). \qquad (2.6.7)$$

Как известно из теории краевых задач для уравнений соболевского типа, необходимым условием существования решения краевой задачи является обратимость оператора под производной по t в начальный момент $t=0$. В данном случае обратимость оператора $I+\eta(0)M$ эквивалентна однозначной разрешимости обратной задачи отыскания неизвестной постоянной $\eta(0)$ в уравнении (2.6.3) с условиями (2.6.4) при $t=0$ и (2.6.6).

Лемма 2.6.1. *Пусть выполняются предположения I–II и* $U_0\in L^2(\Omega)$, $\beta(0,x)\in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(0,x)\in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$; *$\beta(0,x)$ неотрицательна на $\partial\Omega$, $r_1\geq 0$;*

$$r_1+\Psi(0)\,>0; \qquad (2.6.8)$$

$$F_0(x)\equiv a_0(x)-U_0(x)\geq 0;\qquad \Phi_0\equiv r_2-\big(F_0,b_0)\big)>0. \qquad (2.6.9)$$

где $a_0(x)=a(0,x)$, $b_0(x)=b(0,x)$ *и* $F_0=F(0,x)$. *Тогда задача* (2.6.3), (2.6.4) *при* $t=0$, (2.6.6) *имеет решение в классе* $W_2^2(\Omega)\times\mathbf{R}^+$, *где* $\mathbf{R}^+=\{s|s\in\mathbf{R},s>0\}$. *Причем*

$$u(0,x)\leq a_0(x)\qquad \text{почти для всех } x\in\Omega, \qquad (2.6.10)$$

$$0<k_0\equiv\frac{\Phi_0}{r_1+\Psi(0)}\leq\eta(0)\leq\frac{r_2k_0m_1+(1+k_0m_1)\|F_0\|\|b_0\|}{k_0m_1(r_1+\Psi(0))}\equiv k_1, \qquad (2.6.11)$$

Если

$$\Phi_0\geq\gamma\left(m_2m_1^{-2}(r_1+\Psi(0))\|b_0\|\|F_0\|\right)^{1/2}, \qquad (2.6.12)$$

где γ - действительное число, $\gamma > 1$, то решение задачи (2.6.3), (2.6.4) *при* $t = 0$, (2.6.6) *единственно.*

Лемма 2.6.1 является следствием теоремы 2.4.1 (см. §2.4 данной главы).

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (2.6.2)–(2.6.6) опирается на два утверждения для прямой задачи (2.6.2)–(2.6.4) с известной функцией $\eta(t)$, а именно, на теорему сравнения (см. теорему 1.4.1, доказанную в главе 1) и лемму об однозначной разрешимости прямой задачи (2.6.2)–(2.6.4).

Лемма 2.6.2. *Пусть выполняются предположения I–II из §2.2,* $\eta \in C^1([0,T])$ *и* $\eta(t) > 0$ *на* $[0,T]$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$. *Тогда существует единственное решение и задачи* (2.6.2)-(2.6.4), $u \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$.

Доказательство. В случае $\eta(t) \equiv const$ существование и единственность решения гарантируется результатами [304].

Пусть $\eta(t) \neq const$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &v_t + G(v) = f - a_t - ga, \qquad &(t,x) \in Q_T, \\ &v(0,x) = U_0(x) - \nu a(0,x), \qquad &x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

где $v = (\nu I + \eta(t)M)(u - a)$ и оператор $G : C([0,T]; L^2(\Omega)) \to C([0,T]; L^2(\Omega))$ определяется как $G = M(\nu I + \eta(t)M)^{-1} + g(I + \eta(t)M)^{-1}$. Функция v является решением задачи (2.6.13) тогда и только тогда, когда функция $u = a + (\nu I + \eta M)^{-1} v$ является решением задачи (2.6.2)-(2.6.4). Поэтому утверждение леммы будет доказано, как только мы докажем существование и единственность решения задачи (2.6.13). Из предположений теоремы следует, что оператор G липшиц-непрерывен и $f - a_t - ga \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Поэтому согласно [32, гл.5, теорема 1.2] задача (2.6.13) имеет единственное решение $v \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, а следовательно, и задача (2.6.2)-(2.6.4) разрешима единственным образом. Причем $u \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Лемма доказана.

2.6.2 Существование и единственность решения обратной задачи «в малом» по t

Под локальным решением задачи 2.5 будем понимать пару функций $\{u, k\}$ со следующими свойствами:

1) $\eta(t) \in C^1([0,t_0])$ при некотором $0 < t_0 \le T$;

2) $u \in C^1([0,t_0]; W_2^2(\Omega))$;

3) выполняется уравнение (2.6.2) в $Q_{t_0} = (0,t_0) \times \Omega$ и условия (2.6.3)–(2.6.6) при $t \in [0,t_0]$.

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2.6.2)–(2.6.6) «в малом» по t при $\nu = 1$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.6.3. *Пусть выполняются предположения I–II и условия (2.6.8), (2.6.9) и (2.6.12) леммы 2.6.1. Предположим, что*

(i) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;

(ii) U_0, β, ω, φ_1 *неотрицательны и существует положительная постоянная* Ψ_0 *такая, что*
$$\varphi_1(t) + \Psi(t) \ge \Psi_0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.6.14}$$

Тогда при некотором t_0, $0 < t_0 \le T$, *задача (2.6.2)–(2.6.6) имеет единственное решение* $\{u,\eta\}$ *в классе* $V_{t_0} = \big\{ \{u,\eta\} \,\big|\, u \in C^1([0,t_0]; W_2^2(\Omega)),\ \eta \in C^1([0,t_0]) \big\}$. *Причем существуют положительные константы* η_0 *и* η_1 *такие, что* $\eta_0 \le \eta(t) \le \eta_1$ *для любого* $t \in [0,t_0]$.

Доказательство. Будем искать решение задачи (2.6.2)–(2.6.6) в виде
$$u(t,x) = a(t,x) - w(t,x), \quad \eta(t) = \eta(0) + q(t), \tag{2.6.15}$$

где пара $\{w,q\}$ является решением обратной задачи
$$(w + (\eta(0) + q(t))Mw)_t + Mw + gw = F(t,x), \tag{2.6.16}$$
$$w(0,x) + \eta(0)Mw(0,x) = a(0,x) - U_0(x), \tag{2.6.17}$$
$$w|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.6.18}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial (qw)_t}{\partial \overline{N}} + \eta(0)\frac{\partial w_t}{\partial \overline{N}} + \frac{\partial w}{\partial \overline{N}} \right] \omega\, ds = -(\eta(0) + q(t)) \big\langle Ma, b_t \big\rangle_{1,M} -$$

$$-\varphi_2(t) + \big[(\eta(0) + q(t))(\varphi_1 + \Psi)\big]' + \Psi, \tag{2.6.19}$$

$$\eta(0) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w(0,s)}{\partial \overline{N}} \omega(0,s)\, ds = -r_2 + \eta(0)(r_1 + \Psi(0)). \tag{2.6.20}$$

Сведем задачу (2.6.16)–(2.6.20) к эквивалентной обратной задаче с операторными уравнениями для $\eta(0)$ и $q(t)$. Для этого умножим (2.6.16) на $h^\eta(t,x)$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям. С учетом (2.6.7), (2.6.15) и (2.6.18) это даст

$$\frac{d}{dt}\left\{(\eta(0) + q)(\Psi + \varphi_1) + \frac{q}{\eta(0)}(w, h^\eta)\right\} = \frac{1}{\eta(0)}\big[q(w, h_t^\eta) - (w, h^\eta)\big] +$$
$$+(\eta(0) + q)\big\langle Ma, b_t\big\rangle_{1,M} + (gw, h^\eta) + \Phi - (F, h^\eta). \tag{2.6.21}$$

Из (2.6.15) следует, что $q(0) = 0$. Интегрируя последнее равенство по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, в силу (2.6.19) получим

$$q\left(\Psi + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(w, h^\eta)\right) = \eta(0)\big(\Psi(0) - \Psi(\tau) + \varphi_1(0) - \varphi_1(\tau)\big) +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \Big\{\Phi - \big(F - gw, h^\eta\big) + (\eta(0) + q)\big\langle Ma, b_t\big\rangle_{1,M} +$$
$$+\frac{1}{\eta(0)}\big[q(w, h_t^\eta) - (w, h^\eta)\big]\Big\}\, dt. \tag{2.6.22}$$

Далее умножим (2.6.17) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$. Дважды интегрируя по частям в результирующем уравнении и беря во внимание (2.6.20), будем иметь

$$\eta(0)\big(r_1 + \Psi(0)\big) = r_2 - (F_0, b_0) + (w_0, b_0), \tag{2.6.23}$$

где $w_0(x) = w(0,x)$.

Таким образом, мы получили обратную задачу (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22), (2.6.23) эквивалентную задаче (2.6.16)–(2.6.20). Действительно, как следует из построения уравнений (2.6.22) и (2.6.23), каждое решение $\{w, q\}$ задачи (2.6.16)–(2.6.20) является решением задачи (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22), (2.6.23). Пусть теперь $\{w, q\}$ – решение задачи (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22), (2.6.23) из класса V_{t_0}. Тогда $q(t)$ удовлетворяет уравнению (2.6.21). Умножим (2.6.16) на h^η скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем результат по частям по x. Это даст

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial (qw)_t}{\partial \overline{N}} + \eta(0)\frac{\partial w_t}{\partial \overline{N}} + \frac{\partial w}{\partial \overline{N}}\right\}\omega\, ds - \frac{1}{\eta(0)}\big[\big((qw)_t, h^\eta\big) + \big(w, h^\eta\big)\big] +$$
$$+(gw, h^\eta) = \big(F, h^\eta\big).$$

Подставляя (2.6.21) в полученное соотношение, приходим к (2.6.19). Аналогично, умножив (2.6.17) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$ и подставив в полученное соотношение (2.6.23), нетрудно убедиться в справедливости (2.6.20). Ввиду эквивалентности обратных задач достаточно установить справедливость теоремы для задачи (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22), (2.6.23).

Согласно лемме 2.6.1 в начальный момент $t = 0$ задача (2.6.17), (2.6.18), (2.6.20), а следовательно и (2.6.17), (2.6.18), (2.6.23) имеет единственное решение $\{w_0, \eta(0)\} \in W_2^2(\Omega) \times \mathbf{R}$. Причем $\eta(0)$ удовлетворяет неравенству (2.6.11), в силу (2.6.10) $w_0 \geq 0$ почти всюду в Ω и имеют место оценки аналогичные (2.3.9), (2.3.14) с k_0 и F_∞ соответственно и $g_1 = 1$. А именно,

$$\|w_0\|_1 \leq \frac{\|F_0\|}{k_0 m_1}, \qquad \|Mw_0\| \leq k_0^{-2} \|F_0\| \big(m_1^{-1} + k_0\big). \tag{2.6.24}$$

Поэтому в дальнейшем мы можем считать следы $w(0, x) = w_0(x)$ и $\eta(0)$ известными и рассматривать обратную задачу (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22) отыскания пары функций $\{w, q\}$.

Для каждого $t_0 \in [0, T)$ и констант $0 < \alpha \leq k_0$ и $l > 0$ определим множество функций $Y_{\alpha,l}(t_0) = \big\{y(t) \bigm| y \in C^1([0, t_0]),\, |y(t)| \leq \alpha,\, |y'(t)| \leq l,\, y(0) = 0\big\}$. Введем оператор A_2, который каждому $y \in Y_\alpha(t_0)$ ставит в соответствие элемент

$$A_2 y = \Bigg\{\eta(0)\big(\Psi(0) - \Psi(t) + \varphi_1(0) - \varphi_1(t)\big) + \\ + \int\limits_0^t \Bigg[\Phi_1 - \big(F - g w_y, h^\eta\big) + (\eta(0) + y)\big\langle Ma, b_\tau\big\rangle_{1,M} + \\ + \frac{1}{\eta(0)}\big(y(w_y, h_\tau^\eta) - (w, h^\eta)\big)\Bigg] d\tau\Bigg\} \Bigg[\Psi + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(w_y, h^\eta)\Bigg]^{-1}, \tag{2.6.25}$$

где $w_y = w_y(t, x)$ – решение прямой задачи (2.6.16)–(2.6.18) при $\eta(t) = \eta(0) + y(t)$, и рассмотрим операторное уравнение

$$y = A_2 y. \tag{2.6.26}$$

Можно показать аналогично тому, как это сделано в [282], что задача (2.6.16)–(2.6.18), (2.6.22) имеет решение в классе V_{t_0} тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение (2.6.26).

Докажем, что при некоторых $0 < \alpha < k_0$, l и $0 < t_0 \le T$ оператор A_2 отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя и является сжимающим на данном множестве. Для этого выберем произвольный элемент $y(t)$ из множества $Y_{\alpha,l}(t_0)$ и получим оценки на решение w_y задачи (2.6.16)–(2.6.18) при $\eta(t) = \eta(0) + y(t)$ и $t \in [0, t_0]$. Согласно лемме 2.6.2 это решение существует и единственно для каждого $y \in Y_{\alpha,l}(t_0)$, причем $w_y \in C^1([0,t_0]; W_2^2(\Omega))$. Поэтому интеграл в правой части (2.6.25) существует при каждом $t \in [0, t_0]$ и $(A_2 y)' \in C^1([0, t_0])$.

Проинтегрируем (2.6.16) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le t_0$, умножим результирующее уравнение на w_y скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Будем иметь

$$\|w_y\|^2 + (\eta(0)+y)\big\langle Mw_y, w_y\big\rangle_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\langle M\int\limits_0^\tau w_y\,dt, \int\limits_0^\tau w_y\,dt\Big\rangle_1 =$$

$$= -\Big(\int\limits_0^\tau g w_y\,dt, w_y\Big) + \big(a_0 - U_0, w_y\big) + \Big(\int\limits_0^\tau F\,dt, w_y\Big). \quad (2.6.27)$$

Интегрируя (2.6.27) по τ от 0 до θ, $0 < \theta \le t_0$ и оценивая правую часть с помощью неравенств Фридрихса и Коши, получим

$$4\int\limits_0^\theta \Big\{\|w_y\|^2 + (\eta(0)-\alpha)\big\langle Mw_y, w_y\big\rangle_1\Big\}\,d\tau + 2\Big\langle M\int\limits_0^\theta w_y\,dt, \int\limits_0^\theta w_y\,dt\Big\rangle_1 \le$$

$$\le C_1\theta + 4\bar g\int\limits_0^\theta\int\limits_0^\tau \|w_y\|^2\,dt\,d\tau$$

для любого $\theta \in [0, t_0]$, где положительная постоянная C_1 зависит от $\|a_0\|$, $\|U_0\|$, T и $\|F\|_{L^2(Q_T)}$. Отсюда в силу (2.6.11) по лемме Гронуолла вытекает неравенство

$$\int\limits_0^\theta \Big\{\|w_y\|^2 + (k_0-\alpha)\big\langle Mw_y, w_y\big\rangle_1\Big\}\,d\tau \le C_1 \mathrm{e}^{\bar g T}\frac{\theta^2}{8} \equiv C_2\theta^2, \quad (2.6.28)$$

где $\bar g \equiv \|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$.

Перейдем к оценке на производную w_{yt}. Умножим (2.6.16) на w_{yt} скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Это даст

$$\|w_{yt}\|^2 + (\eta(0)+y(t))\big\langle Mw_{yt}, w_{yt}\big\rangle_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\langle Mw_y, w_y\big\rangle_1 =$$

$$= -y'(t)\big\langle Mw_y, w_{yt}\big\rangle_1 + \big(F - gw_y, w_{yt}\big). \quad (2.6.29)$$

Затем проинтегрируем (2.6.29) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$ и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. В силу (2.3.2), (2.6.24) и (2.6.28) получим, что

$$\int_0^\tau \left[\|w_{yt}\|^2 + (k_0-\alpha)\bigl\langle Mw_{yt}, w_{yt}\bigr\rangle_1\right] dt + \frac{1}{2}\bigl\langle Mw_y, w_y\bigr\rangle_1 \le C_3 + C_4\tau^2 + \frac{C_2 l^2\tau^2}{2(k_0-\alpha)^2}, \tag{2.6.30}$$

где положительные константы C_3 и C_4 зависят от T, k_0, m_1, m_2, C_2, $\bar g$, $\|F_0\|_1$, $\|w_0\|_1$, $\|F\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}$. Перенесем последнее слагаемое из левой части (2.6.29) в правую. Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Коши и используя (2.3.2) и (2.6.30), приходим к оценке

$$\|w_{yt}\|^2 + (k_0-\alpha)\bigl\langle Mw_{yt}, w_{yt}\bigr\rangle_1^2 \le \left(\frac{(1+l^2)}{2(k_0-\alpha)} + 2\bar g^2\right)\left(\frac{C_2 l^2\tau^2}{2(k_0-\alpha)^2} + \right.$$

$$\left. + C_3 + C_4\tau^2\right) + 2\|F\|^2 \equiv C_5 + \frac{C_3 + C_6 l^2}{2(k_0-\alpha)^2} + \frac{C_7(l^2+l^4)}{4(k_0-\alpha)^4}. \tag{2.6.31}$$

Покажем, что при соответствующем выборе α и t_0 выражение $\Psi + \varphi_1 + \eta^{-1}(0)(w, h^\eta) \ne 0$ на $[0, t_0]$. Подействуем на (2.6.16) оператором $(I + \eta(0)M)^{-1}$, отображающим $W_2^{-1}(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и проинтегрируем результат по t от 0 до τ, $0 < \tau \le t_0$. Учитывая, что

$$(I+\eta(0)M)^{-1}\bigl(w_y + (\eta(0)+y)Mw_y\bigr) = w_y + y(I+\eta(0)M)^{-1}Mw_y,$$

получим

$$w_y - w_0 = -y(I+\eta(0)M)^{-1}Mw_y + \int_0^t (I+\eta(0)M)^{-1}\bigl\{F - Mw_y - gw_y\bigr\}\, d\tau.$$

В силу (2.13), (2.6.11) и (2.6.28) имеем $\|(I+\eta(0)M)^{-1}\| \le (k_0 m_1 + 1)^{-1}$ и

$$\begin{aligned}\|w_y - w_0\|_1 \;&\le\; \frac{\alpha m_2}{k_0 m_1 + 1}\bigl(\|w_y - w_0\|_1 + \|w_0\|_1\bigr) + \\ &+\; \frac{t}{k_0 m_1 + 1}\left\{\max_{\tau\in[0,T]}\|F\| + (C_2 T)^{1/2}\Bigl(m_1 + \bar g + \frac{2}{k_0}\Bigr)\right\},\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{k_0(k_0 m_1 + 1) - \alpha(k_0 m_1 + 2)}{k_0(k_0 m_1 + 1)}\|w_y - w_0\|_1 \le \frac{\alpha(k_0 m_1 + 2)}{k_0(k_0 m_1 + 1)}\|w_0\|_1 +$$

$$+\frac{t}{k_0 m_1 + 1}\left\{\max_{\tau\in[0,T]}\|F\| + (C_2 T)^{1/2}\Bigl(m_1 + \bar g + \frac{2}{k_0}\Bigr)\right\}.$$

При
$$\alpha \leq \frac{k_0}{2} \tag{2.6.32}$$
из последенего неравенства вытекает, что
$$\|w_y - w_0\|_1 \leq \frac{2t}{k_0 m_1}\left\{\max_{\tau\in[0,T]}\|F\| + (C_2 T)^{1/2}\Big(m_1 + \bar{g} + \frac{2}{k_0}\Big)\right\} +$$
$$\frac{2\alpha(k_0 m_1 + 2)}{k_0^2 m_1}\|w_0\|_1 \equiv C_8\alpha + C_9 t. \tag{2.6.33}$$
Если α и t_0 выбраны так, чтобы выполнялось неравенство (2.6.32) и
$$C_8\alpha + C_9 t_0 \leq \Psi_0 k_0\Big(2\max_{t\in[0,t_0]}\|h^\eta\|\Big)^{-1}, \tag{2.6.34}$$
то с учетом (2.6.14)
$$\phi_1 + \Psi\frac{1}{\eta}(w_0, h^\eta) + \frac{1}{\eta(0)}(w_y - w_0, h^\eta) \geq \frac{\Psi_0}{2}. \tag{2.6.35}$$
Итак, в условиях теоремы правая часть (2.6.25) имеет смысл при любом $y \in Y_{\alpha,l}(t_0)$, если t_0 и α удовлетворяют условиям (2.6.32) и (2.6.34). Причем $A_2 y \in C^1([0,t_0])$ и $A_2 y(0) = 0$. Из (2.3.2), (2.6.11), (2.6.25), (2.6.28), (2.6.30), (2.6.31), (2.6.33) и (2.6.35) следует, что
$$\big|A_2 y\big| = \Big|\int_0^t \Big[\Phi_1 + \big(g w_y, h^\eta\big) + (\eta(0) + y)\big\langle Ma, b_\tau\big\rangle_{1,M}$$
$$+ \frac{1}{\eta(0)}\big(y(w_y, h^\eta_\tau) - (w_y, h^\eta)\big)\Big]d\tau - \eta(0)\int_0^t \big(\varphi_1(\tau) + \Psi(\tau)\big)' d\tau\Big| \times$$
$$\times\Big[\Psi + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(w_y, h^\eta)\Big]^{-1} \leq C_{10} t, \tag{2.6.36}$$
где
$$C_{10} = \bigg\{C_2^{1/2}\Big[\overline{\Phi} + \bar{g}\int_0^T \|h^\eta\|^2 d\tau\Big]^{1/2} + k_1 m_2 \max_{t\in[0,T]}\big\{\|a\|_1\|b_\tau\|_1\big\} +$$
$$+\frac{C_2^{1/2}}{k_0}\Big[\alpha\Big(\int_0^T \|h^\eta_\tau\|^2\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^T \|h^\eta\|^2\Big)^{1/2}\Big] + k_0\big(\|\varphi_1'\|_{C([0,T])} + \|\Psi'\|_{C([0,T)}\big),$$

а также

$$\big|(A_2y)'\big| = \bigg| -\eta(0)\big(\varphi_1+\Psi\big)' + \Phi + \big(gw_y, h^\eta\big) + (\eta(0)+y)\big\langle Ma, b_t\big\rangle_{1,M} +$$

$$+\frac{1}{\eta(0)}\big(y(w_y, h_t^\eta) - (w_y, h^\eta)\big) - A_2y\left(\Psi' + \varphi_1' + \frac{1}{\eta(0)}\big((w_{yt}, h^\eta) + (w_y, h_t^\eta)\big)\right)\bigg| \times$$

$$\times\left[\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta(0)}(w_y, h^\eta)\right]^{-1} \le C_{11} + C_{12}\alpha + \big(C_{13} + C_{14}l + C_{15}l^2\big)t. \qquad (2.6.37)$$

Здесь положительные постоянные C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} и C_{15} зависят от T, k_0, m_1, m_2, $\bar{g}$, C_2, C_3, C_4, C_{10}, $\overline{\Phi}_1$, $\|a\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega)}$, $\|b\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega)}$, $\|\varphi_1'\|_{C([0,T])}$, $\|\Psi'\|_{C([0,T])}$. Положим $l = 2C_{11}$, $\alpha = C_{10}t_0$ и выберем t_0 так, чтобы выполнялись условия (2.6.32), (2.6.34) и

$$\big(C_{12}C_{10} + C_{13} + C_{14}l + C_{15}l^2\big)t_0 \le C_{11}. \qquad (2.6.38)$$

В этом случае $|A_2y| \le \alpha$ и $|(A_2y)'| \le l$, то есть оператор A отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя при

$$t_0 \le \min\Big\{\frac{k_0}{2C_{10}}, \frac{\Psi_0k_0}{C_8C_{10}+C_9}\big(2\max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|\big)^{-1}\Big\}.$$

Перейдем к доказательству сжимаемости оператора A на $Y_{\alpha,l}(t_0)$. Пусть $y_1, y_2 \in Y_{\alpha,l}(t_0)$ и w_1, w_2 - решения задачи (2.6.16)–(2.6.18) при $q = y_1$ и $q = y_2$, соответственно. Тогда разность $\{\hat{w}, \hat{y}\} = \{w_1 - w_2, y_1 - y_2\}$ удовлетворяет уравнению

$$\big(\hat{w} + (\eta(0)+y_1)M\hat{w}\big)_t + M\hat{w} + g\hat{w} = -\big(\hat{y}Mw_2\big)_t, \quad (t,x)\in Q_{t_0}, \qquad (2.6.39)$$

и краевым условиям $\hat{w}(0,x) + \eta(0)M\hat{w}(0,x) = 0$, при $x \in \overline{\Omega}$ и $\hat{w}\big|_{\partial\Omega} = 0$ при $t \in [0,t_0]$. Проинтегрируем (2.6.39) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le t_0$, умножим на $\hat{w}$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем в результирующем уравнении по частям по x. Это даст

$$\|\hat{w}\|^2 + (\eta(0)+y_1)\big\langle M\hat{w}, \hat{w}\big\rangle_1 = -\Big\langle \int_0^\tau (M+gI)\hat{w}\,dt + \hat{y}Mw_2, \hat{w}\Big\rangle_1. \qquad (2.6.40)$$

Оценивая правую часть (2.6.40) с помощью (2.6.11), (2.6.31) и неравенства Коши, получим соотношение

$$\|\hat{w}\|^2 + m_1(k_0-\alpha)\|\hat{w}\|_1^2 \le C_{16}|\hat{y}|^2 + C_{17}\int_0^\tau \big(\big\|\hat{w}\big\|^2 + m_1(k_0-\alpha)\big\|\hat{w}\big\|_1^2\big)\,dt,$$

из которого согласно лемме Гронуолла вытекает неравенство

$$\|\hat{w}\|^2 + m_1(k_0 - \alpha)\|\hat{w}\|_1^2 \leq C_{16} e^{C_{17}T} \int\limits_0^\tau |\hat{y}|^2\, dt. \qquad (2.6.41)$$

Здесь положительные постоянные C_{16}, C_{17} зависят от T, k_0, m_1, m_2, $\bar{g}$, α, C_3, C_4.

Теперь перенесем второе и третье слагаемые из левой части (2.6.39) в правую, умножим (2.6.39) на $\hat{w}_t$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Коши и используя (2.6.28), (2.6.30) и (2.6.41), придем к оценке

$$2\|\hat{w}_t\|^2 + (k_0 - \alpha)\big\langle M\hat{w}_t, \hat{w}_t\big\rangle_1 \leq C_{18}\bigg(\int\limits_0^\tau \big(|\hat{y}|^2 + |\hat{y}'|^2\big)dt + (C_8\alpha C_9 t)|\hat{y}'|^2\bigg), \quad (2.6.42)$$

где положительная постоянная C_{18} зависит от T, k_0, α, m_1, m_2, $\bar{g}$, C_2, C_3, C_4, C_{11}.

С другой стороны, в соответствии с определением оператора A разность A_2y_1 и A_2y_2 имеет вид:

$$A_2y_1 - A_2y_2 = \bigg\{\int\limits_0^t \Big[\frac{1}{\eta(0)}\Big(\hat{y}(w_1, h^\eta_\tau) + y_2(\hat{w}, h^\eta_\tau) - (\hat{w}, h^\eta)\Big) +$$
$$+ \big(g\hat{w}, h^\eta\big) + \hat{y}\big\langle Ma, b_\tau\big\rangle_{1,M}\Big]d\tau - \frac{1}{\eta(0)}A_2y_2(\hat{w}, h^\eta)\bigg\} \times$$
$$\times \bigg[\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta(0)}(w_1, h^\eta)\bigg]^{-1}. \qquad (2.6.43)$$

Оценим правую часть (2.6.43) по модулю с помощью (2.6.33)–(2.6.36), (2.6.41). Это даст

$$|A_2y_1 - A_2y_2| \leq C_{19}\bigg(\int\limits_0^t |\hat{y}|^2\, d\theta\bigg)^{1/2} \qquad (2.6.44)$$

Здесь положительная постоянная C_{19} зависит от T, k_0, Ψ_0, α, m_1, m_2, $\bar{g}$, C_8, C_9, C_{13}, C_{15}, $\|F_0\|$, $\|h^\eta\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))}$.

Теперь получим аналогичное неравенство для разности $(A_2y_1)' - (A_2y_2)'$. Для этого продифференцируем (2.6.43) и оценим по модулю правую часть с учетом (2.6.30), (2.6.32), (2.6.36), (2.6.37), (2.6.42), (2.6.44). Получим, что

$$|(A_2y_1)' - (A_2y_2)'| = \Big| \Big(\big(g - \frac{1}{\eta(0)}(A_2y_2)'\big)\hat{w}, h^\eta \Big) + \hat{y}\big\langle Ma, b_t \big\rangle_{1,M} + \\ + \frac{1}{\eta(0)}\Big[\hat{y}\big(w_1, h^\eta_t\big) + y_2\big(\hat{w}, h^\eta_t\big) - \big(\hat{w}, h^\eta\big)\Big] -$$

$$-(A_2y_1 - A_2y_2)\Big[\Psi' + \varphi' + \frac{1}{\eta(0)}\Big(\big(w_{1t}, h^\eta\big) + \big(w_1, h^\eta_t\big)\Big)\Big] - \\ - \frac{A_2y_2}{\eta(0)}\Big[\big(\hat{w}_t, h^\eta\big) + \big(\hat{w}, h^\eta_t\big)\Big]\Big| \Big[\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w_1, h^\eta)\Big]^{-1} \leq \\ \leq C_{20}\Big(\int\limits_0^t (|\hat{y}|^2 + |\hat{y}'|^2\, d\tau\Big)^{1/2} + (C_8C_{10} + C_9)t\|h^\eta\|, \qquad (2.6.45)$$

где положительная постоянная C_{20} зависит от T, k_0, Ψ_0, α, l, m_1, m_2, $\bar{g}$, C_2, C_5, c_6, C_7, C_{10}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a\|_1, \|b_t\|_1\}$, $\|h^\eta\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))}$.

Введем в пространстве $C^1([0,T])$ эквивалентную норму

$$\| y \| = \max_{t\in[0,t_0]}\{\mathrm{e}^{-\lambda t}(|y| + |y'|)\}.$$

Покажем, что при некотором $\lambda > 1$ и достаточно малом t_0 оператор A является сжатием в смысле этой новой нормы. Действительно, из (2.6.44) и (2.6.45) следует, что

$$\| A_2y_1 - A_2y_2 \| \leq \Big[t_0\big(C_8C_{10} + C_9\big)\|h^\eta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + (2\lambda)^{-1/2}\big(C_{19} + C_{20}\big)\Big] \| \hat{y} \| . \qquad (2.6.46)$$

При t_0 и λ таких, что

$$\begin{cases} t_0(C_8C_{10} + C_9)\|h^\eta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} < 1, \\ \lambda > (C_{19} + C_{20})^2\big[2(1 - t_0(C_8C_{10} + C_9)\|h^\eta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))})^2\big]^{-1}, \end{cases} \qquad (2.6.47)$$

оператор A является сжатием в $Y_{\alpha,l}(t_0)$.

Итак, мы доказали, что если $l = 2C_{11}$, $\alpha = C_{10}t_0$ и t_0 удовлетворяет условиям (2.6.32), (2.6.34), (2.6.38) и (2.6.47), то оператор A отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений уравнение (2.6.26) имеет единственное решение $q(t) \in Y_{\alpha,l}(t_0)$. Как отмечалось выше, из разрешимости уравнения (2.6.26) следует разрешимость задачи (2.6.16)–(2.6.18),(2.6.22). Причем

$w \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $q \in C^1([0,t_0])$, для функций w и η справедливы оценки (2.6.28), (2.6.30), (2.6.31) и

$$0 < k_0 - \alpha \le \eta(t) \le k_0 + \alpha, \qquad t \in [0,t_0]. \tag{2.6.48}$$

Для оценки вторых производных w умножим (2.6.16) на Mw в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем в первом слагаемом по частям. Это даст

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\big\langle w, Mw\big\rangle_1 + (\eta(0)+q(t))\|Mw\|^2\Big] + \|Mw\|^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}q'(t)\|Mw\|^2 - \big(gw, Mw\big) + \big(F, Mw\big). \tag{2.6.49}$$

Оценим правую часть (2.6.49) по модулю с помощью неравенства Коши и проинтегрируем результат по t от 0 до τ. В силу (2.3.2), (2.6.28) и (2.6.48) получим

$$\big\langle w, Mw\big\rangle_1 + (k_0-\alpha)\|Mw\|^2 + \int\limits_0^\tau \|Mw\|^2\,dt \le$$
$$\le l\int\limits_0^\tau \|Mw\|^2\,dt + 2C_2\bar{g}^2t_0^2 + 2\|F\|^2 + m_2\|w_0\|_1^2 + \eta(0)\|Mw_0\|^2,$$

откуда согласно лемме Гронуолла следует, что

$$\|Mw\|^2 \le \frac{e^{lt_0}}{k_0-\alpha}\Big(2(C_2\bar{g}^2t_0^2 + \max_{t\in[0,t_0]}\|F\|^2) + m_2\|w_0\|_1^2 +$$
$$+\eta(0)\|Mw_0\|^2\Big) \equiv C_{21}. \tag{2.6.50}$$

Теперь из (2.6.16), (2.6.31), (2.6.33), (2.6.48) и (2.6.50) вытекает оценка $\|Mw_t\|$:

$$(k_0-\alpha)\|Mw_t\| \le \big(C_5 + C_6l^2 + C_7l^4\big)^{1/2} + \bar{g}\big(C_3 + C_4t_0 + \frac{C_2l^2t_0^2}{2k_0^2}\big)^{1/2} +$$
$$+(l+1)C_{21}^{1/2} + \|F\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}.$$

Итак, мы доказали существование решения $\{w, q\}$ задачи (2.6.16)–(2.6.19). Покажем, что это решение единственно в классе V_{t_0} на $[0,t_0]$, если t_0 отвечает условиям (2.6.32), (2.6.34), (2.6.38) и (2.6.47). Предположим, что задача (2.6.16)–(2.6.19) имеет два решения $\{w_1, q_1\}$ и $\{w_2, q_2\}$. Тогда пара функций $\bar{w} = w_1 - w_2$ и $\bar{q} = q_1 - q_2$ удовлетворяет уравнению

$$\big(\bar{w} + (\eta(0)+y_1)M\bar{w}\big)_t + M\bar{w} + g\bar{w} = -\big(\bar{q}Mw_2\big)_t, \qquad (t,x) \in Q_{t_0},$$

и условиям

$$\bar{w}(0,x)+\eta(0)M\bar{w}(0,x)=0,\quad x\in\overline{\Omega};\qquad \bar{w}\big|_{\partial|\Omega}=0,\quad t\in[0,t_0],$$

$$\bar{q}=\Big\{\int\limits_0^t\Big[\bar{q}\big\langle Ma,b_\tau\big\rangle_{1,M}+\frac{1}{\eta(0)}\Big(\bar{q}(w_1,h_\tau^\eta)+q_2(\bar{w},h_\tau^\eta)-(\bar{w},h^\eta)\Big)+$$
$$+\big(g\bar{w},h^\eta\big)\Big]d\tau-\frac{1}{\eta(0)}q_2(\bar{w},h^\eta)\Big\}\Big[\varphi_1(t)+\Psi(t)+\frac{1}{\eta}(w_1,h^\eta)\Big]^{-1}.$$

Как показано выше, если $l=2C_{11}$, $\alpha=C_{10}t_0$ и t_0 удовлетворяет условиям (2.6.32), (2.6.34), (2.6.38) и (2.6.47), то для каждых $y_1,y_2\in Y_{\alpha,l}(t_0)$ справедливо (2.6.46), а для w_{y1} и w_{y2} выполняется (2.6.41). Так как $q_1,q_2\in Y_{\alpha,l}(t_0)$ и являются решениями операторного уравнения (2.6.26), для $\bar{q}$ и $\bar{w}$ имеют место неравенства

$$\boldsymbol{|}\,\bar{q}\,\boldsymbol{|}\ \le\Big[t_0\big(C_8C_{10}+C_9\big)\|h^\eta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}+(2\lambda)^{-1/2}\big(C_{19}+C_{20}\big)\Big]\ \boldsymbol{|}\,\bar{q}\,\boldsymbol{|}\,,$$

$$\|\bar{w}\|^2+m_1(k_0-\alpha)\|\bar{w}\|_1^2\le C_{15}\int\limits_0^\tau|\bar{q}|^2\,dt+C_{13}|\bar{q}|^2,$$

из которых следует в силу (2.6.47), что $\bar{q}\equiv0$ и $\bar{w}\equiv0$. Теорема доказана.

Замечание 2.6.1. Теорема 2.6.3 остается справедливой для обратной задачи (2.6.2)–(2.6.6) с условием переопределения более общего вида вместо (2.6.5)

$$\int\limits_{\partial\Omega}\Big\{\Big(\eta(t)\frac{\partial u}{\partial\overline{N}}\Big)_t+\frac{\partial u}{\partial\overline{N}}\Big\}\omega(t,s)\,ds+(\eta(t)\varphi_1(t))_t+\eta(t)\varphi_3(t)=\varphi_2(t).$$

В частности, если $\varphi_1(t)\neq0$ при $t\in[0,T]$, то это условие можно свести к условию типа (2.6.5), умножив его на $\exp\Big(\int_0^t\varphi_3(t)(\varphi_1(t))^{-1}\,dt\Big)$.

Замечание 2.6.2. Утверждение теоремы 2.6.3 верно и для оператора M общего вида (2.3.41) удовлетворяющего предположениям I-II. Поскольку такой оператор M, вообще говоря, не является самосопряженным, функцию a в теореме 2.6.3 необходимо заменить на решение a^* задачи (2.3.8) с оператором M общего вида, так же как и в случае задачи 2.2, а функции b и h^η – на решения b^* и h_*^η краевых задач для уравнений $M^*b^*=0$ и $h_*^\eta+\eta(0)M^*h_*^\eta=0$ с граничными условиями из задач (2.3.9), (2.6.7). Здесь M^* – оператор, сопряженный к M. Формулировка и доказательство теоремы существования и единственности решения задачи 2.5 с оператором M общего вида практически полностью повторяют формулировку и доказательство теоремы 2.6.3 с той лишь разницей, что в условиях теоремы 2.6.3 функции $\Psi(t)$ и $F(t,x)$ следует заменить на $\Psi^*(t)$ и $F^*(t,x)$ (см. определение в §2), F_0 на $F_0^* = a_0^* - U_0$, Φ_0 на $\Phi_0^* = r_2 - (F_0^*, b_0^*)$ и $\Phi(t)$ на $\Phi^*(t) = \varphi(t) - \Psi^*(t)$. В этом случае задача 2.5 сводится к эквивалентной обратной задаче с операторными уравнениями для $\eta(0)$ и $q(t)$ вида

$$\eta(0)\big(r_1 + \Psi^*(0)\big) = r_2 - (F_0^*, b_0^*) + (w_0, b_0^*)$$

и

$$q\left(\Psi^* + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(w, h_*^\eta)\right) = \eta(0)\big(\Psi^*(0) - \Psi^*(\tau) + \varphi_1(0) - \varphi_1(\tau)\big) +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \Big\{\Phi^* - \big(F^* - gw, h_*^\eta\big) + (\eta(0) + q)\big[\big\langle Ma, b_t\big\rangle_{1,M} + \big((\vec{m}, \nabla a^*)_R, b_t^*\big)\big] +$$
$$+ \frac{1}{\eta(0)}\big[q(w, (h_*^\eta)_t) - (w, h_*^\eta)\big]\Big\}\, dt.$$

Леммы 2.6.1 и 2.6.2 также справедливы в случае оператора M общего вида с учетом описанных выше замен функций $\Psi^*(t)$, $F_0^*(x)$ и постоянной Φ_0^*.

2.6.3 Существование и единственность решения обратной задачи «в целом» по t

Рассмотрим теперь задачу 2.5 для уравнения (2.6.2) при $\nu = 0$. Достаточные условия однозначной разрешимости этой задачи «в целом» по t устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.6.4. *Пусть выполняются предположения I–II и* $\partial\Omega \in C^2$. *Пусть также*

(iii) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;

(iv) f, U_0, β, ω *и* φ_1 *неотрицательны,* $g \le 0$, $r_2 > 0$ *и* $\varphi_1(0) = r_1$;

(v) $\Psi(t) \ge 0$ *и существует положительная постоянная* α *такая, что*

$$\varphi_1(t) + \Psi(t) \ge \alpha, \quad t \in [0,T], \tag{2.6.51}$$

$$\Phi_1(t) \equiv \varphi_2(t) - \Psi(t) + (f, b) \ge 0. \tag{2.6.52}$$

Тогда задача 2.5 имеет единственное решение $\{u,\eta\}$ *в классе*

$$V = \big\{\{u,\eta\}\big|\ u\in C^1([0,T];W_2^2(\Omega)),\ \eta\in C^1([0,T])\big\}.$$

Причем существуют положительные константы η_0 *и* η_1 *такие, что для любого* $t\in[0,T]$

$$\eta_0\le\eta(t)\le\eta_1.$$

Доказательство. Введем функцию

$$w(t,x)=a(t,x)-u(t,x), \tag{2.6.53}$$

В силу (2.6.2)–(2.6.6) и (2.3.8) пара $\{w,\eta\}$ является решением обратной задачи

$$(\eta(t)Mw)_t+Mw+gw=ga-f(t,x), \tag{2.6.54}$$

$$\eta(0)Mw(0,x)=a(0,x)-U_0(x), \tag{2.6.55}$$

$$w|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.6.56}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial(\eta w)_t}{\partial\overline{N}}+\frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right]\omega ds=-\varphi_2-\eta\big\langle Ma,b_t\big\rangle_{1,M}+\big[\eta(\varphi_1+\Psi)\big]'+\Psi, \tag{2.6.57}$$

$$\eta(0)\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial w(0,x)}{\partial\overline{N}}\omega(0,x)\,ds=-r_2+\eta(0)(r_1+\Psi(0)). \tag{2.6.58}$$

Сведем задачу (2.6.54)–(2.6.58) к эквивалентной обратной задаче с операторным уравнением для $\eta(t)$. Для этого умножим (2.6.54) на b скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям. В силу (2.3.8), (2.6.53), (2.6.57) и введенных выше обозначений будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\eta(t)(\varphi_1+\Psi)\right)-\eta(t)\big\langle Ma,b_t\big\rangle_1=\Phi_1(t)+(gw,b)-(ga,b). \tag{2.6.59}$$

Умножим полученное уравнение на $\zeta(t)\equiv\exp\Big(-\int_0^t\big\langle Ma,b_\tau\big\rangle_1(\varphi_1+\Psi)^{-1}d\tau\Big)$ и проинтегрируем по t от 0 до θ, $0<\theta\le T$. С учетом (2.6.58) это даст

$$\eta(\theta)\big(\varphi_1+\Psi\big)\zeta(\theta)=\eta(0)\big(\varphi_1(0)+\Psi(0)\big)+\int\limits_0^\theta\left[\Phi_1+(gw-ga,b)\right]\zeta(t)\,dt,$$

откуда

$$\eta(\theta) = \frac{1}{(\varphi_1 + \Psi)\zeta}\Big(\eta(0)\big(\varphi_1(0) + \Psi(0)\big) + \int\limits_0^\theta \big[\Phi_1 + (g(w-a), b)\big]\zeta dt\Big). \quad (2.6.60)$$

Далее умножим (2.6.55) на $b(0,x) = b_0(x)$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям в результирующем уравнении. Принимая во внимание (2.6.56) при $t = 0$ и (2.6.4), получим

$$-r_2 + \eta(0)\big(r_1 + \Psi(0)\big) = (U_0, b_0),$$

или

$$\eta(0) = \frac{r_2 + (U_0, b_0)}{r_1 + \Psi(0)}. \quad (2.6.61)$$

Таким образом, мы получили обратную задачу (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61) эквивалентную задаче (2.6.54)–(2.6.58). Действительно, как следует из построения уравнений (2.6.60) и (2.6.61), каждое решение $\{w, \eta\}$ задачи (2.6.54)–(2.6.58) является решением задачи (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61). Пусть теперь пара $\{w, \eta\}$ – решение задачи (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61) из класса V. Тогда $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (2.6.59). Умножим (2.6.54) на b скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем результат по частям по x. Это даст

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\frac{\partial(\eta w)_t}{\partial\overline{N}} + \frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right\}\omega\, ds = (ga - f, b) - (gw, b).$$

Выражая $(ga - f, b) - (gw, b)$ из (2.6.59) и подставляя в последнее соотношение, приходим к (2.6.57). Аналогично, умножив (2.6.55) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$, дважды проинтегрировав по частям в первом члене и подставив (2.6.61) в полученное равенство, нетрудно убедиться в справедливости (2.6.58). Ввиду эквивалентности обратных задач достаточно установить справедливость теоремы для задачи (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61).

В условиях теоремы $u \geq 0$ (см. теорему 1.4.1 главы 1), т. е. $a - w \geq 0$, и

$$0 < \frac{r_2}{\varphi_1(0) + \Psi(0)} \leq \eta(0) \leq \frac{r_2 + \|U_0\|\,\|b_0\|}{\alpha}. \quad (2.6.62)$$

Следовательно, второе слагаемое (2.6.60) неотрицательно при $0 \leq \theta \leq T$. Тогда

$$\eta(\theta) \geq \frac{r_2}{\overline{\varphi}_1 + \overline{\Psi}} \equiv \eta_0 > 0. \quad (2.6.63)$$

В силу (2.6.54), (2.6.55) и (2.6.63) для w справедливо равенство

$$Mw = \frac{1}{\eta}\Big\{ \int\limits_0^\theta \exp\Big(-\int\limits_t^\theta \frac{d\tau}{\eta}\Big)(f - g(a-w))dt + U_0(x)\exp\Big(-\int\limits_0^\theta \frac{d\tau}{\eta}\Big)\Big\}. \quad (2.6.64)$$

Учитывая (2.2.30) и (2.6.63), из (2.6.64) можно получить неравенство

$$\|Mw\| \leq \frac{1}{\eta_0}\Big[\|U_0\| + \int\limits_0^\theta \big(\|f\| + \bar{g}(\|a\| + \|w\|)\big)dt\Big]$$

$$\leq \frac{1}{\eta_0}\Big[\|U_0\| + \int\limits_0^\theta \big(\|f\| + \bar{g}\|a\| + \frac{\bar{g}}{c}\|Mw\|\big)dt\Big],$$

откуда согласно лемме Гронуолла следует оценка

$$\|Mw\| \leq \frac{1}{\eta_0}\Big[\|U_0\|\exp\Big(\frac{\bar{g}}{c\eta_0}T\Big) + \\ + \int\limits_0^T \big(\|f\| + \bar{g}\|a\|\big)\exp\Big(\frac{\bar{g}}{c\eta_0}(T-t)\Big)dt\Big] \equiv C_{22}. \quad (2.6.65)$$

Из (2.2.30) и (2.6.65) получаем оценку w в норме $W_2^2(\Omega)$.

$$\|w\|_2 \leq \frac{1}{c\eta_0}\Big[\|U_0\|\exp\Big(\frac{\bar{g}}{c\eta_0}T\Big) + \\ + \int\limits_0^T \big(\|f\| + \bar{g}\|a\|\big)\exp\Big(\frac{\bar{g}}{c\eta_0}(T-t)\Big)dt\Big] \equiv C_{23}. \quad (2.6.66)$$

Здесь, как и ранее, $\bar{g} = \|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$. Теперь, возвращаясь к уравнению (2.6.60), можно оценить $\eta(t)$ сверху. В силу (2.3.8), (2.6.60), (2.6.62), (2.6.63), (2.6.65) и определения $\zeta(t)$

$$\eta_0 \leq \eta(\theta) \leq \frac{1}{\alpha}\exp\Big(\frac{m_2}{\alpha}\int\limits_0^T \|a\|_1\|b_\tau\|_1 d\tau\Big)\Big[(r_2 + \|U_0\|\,\|b\|)(\overline{\varphi}_1 + \overline{\Psi}) +$$

$$+T(\overline{\varphi}_2 + \overline{\Psi}) + \int\limits_0^T \big(\bar{g}(\|a\| + C_{23}) + \|f\|\big)\|b\|dt\Big] \equiv \eta_1. \quad (2.6.67)$$

Введем оператор A_3, который каждому элементу множества

$$Y = \Big\{ y(t) | y \in C^1([0,T]), \eta_0 \le y \le \eta_1, y(0) = \eta(0) \Big\}$$

ставит в соответствие элемент

$$A_3 y = \frac{1}{(\varphi_1 + \Psi)\,\zeta} \Big\{ \eta(0)\big(\varphi_1(0) + \Psi(0)\big) + \int\limits_0^\theta [\Phi_1 + (g w_y - g a, b)]\,\zeta\,dt \Big\},$$

где w_y – решение прямой задачи (2.6.54)–(2.6.56) при $\eta(t) = y(t)$. Так как при каждом $y(t) \in Y$ задача (2.6.54)–(2.6.56) имеет единственное решение w_y из класса $C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ согласно лемме 2.6.2, значение $A_3 y$ определено на каждом $y \in Y$. Предположение (iii) и оценка (2.6.67) позволяют заключить, что A_3 отображает Y в себя. Тогда (2.6.60) можно рассматривать как операторное уравнение

$$y = A_3 y. \tag{2.6.68}$$

Следуя идее [282] можно показать, что задача (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.57), (2.6.58) разрешима тогда и только тогда, когда имеет решение операторное уравнение (2.6.68).

Докажем, что оператор A_3 является сжимающим на Y. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, а w_{y_1} и w_{y_2} – решения задачи (2.6.54)–(2.6.56) при $\eta = y_1$ и $\eta = y_2$, соответственно. Согласно определению оператора A_3

$$A_3 y_1 - A_3 y_2 = \frac{1}{\zeta(t)\big(\varphi_1 + \Psi\big)} \int\limits_0^t \big(g(w_{y_2} - w_{y_1}), b\big) d\theta, \tag{2.6.69}$$

откуда в силу (2.6.51) и определения $\zeta(t)$

$$|A_3 y_1 - A_3 y_2| \le \frac{1}{\alpha} \exp\Big(\frac{m_2}{\alpha} \int\limits_0^T \|a\|_1 \|b_\tau\|_1 d\tau\Big) \bar{g} \|b\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \int\limits_0^t \|\tilde{w}_y\| d\theta, \tag{2.6.70}$$

где $\tilde{w}_y = w_{y_1} - w_{y_2}$. Продифференцируем (2.6.69) и оценим по модулю правую часть полученного равенства с учетом (2.6.51). Это даст

$$|(A_3 y_1 - A_3 y_2)'| = \Bigg| \frac{\zeta'\big(\varphi_1 + \Psi\big) + \zeta\big(\varphi_1' + \Psi'\big)}{\zeta^2 \big(\varphi_1 + \Psi\big)^2} \int\limits_0^t \big(g\tilde{w}_y, b\big) d\theta +$$

$$+\frac{(g\tilde{w}_y, b)}{\zeta(t)\big(\varphi_1+\Psi\big)}\Bigg| \le \bar{g}\|b\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\Big(C_{24}\int\limits_0^t \|\tilde{w}_y\|d\theta + C_{25}\|\tilde{w}_y\|\Big), \qquad (2.6.71)$$

где положительные постоянные C_{24} и C_{25} зависят от α, m_1, m_2, T, $\|\varphi_1\|_{C^1([0,T])}$, $\|\Psi\|_{C^1([0,T])}$, $\max_{t\in[0,T]}\big\{\|a\|_1, \|b_\tau\|_1\big\}$. С другой стороны, вычитая (2.6.54) для w_2 из (2.6.54) для w_1 и интегрируя разность по t от 0 до θ, $0\le\theta\le T$, будем иметь

$$y_1(\theta)M(\tilde{w}_y) = (y_2(\theta)-y_1(\theta))Mw_2 - \int\limits_0^\theta M(\tilde{w}_y)dt - \int\limits_0^\theta g(\tilde{w}_y)dt.$$

В силу (2.2.30), (2.6.65)–(2.6.66) и того, что $y_1\in Y$, из этого соотношения получаем неравенство

$$\|M\tilde{w}_y\| \le \frac{1}{\eta_0}\Bigg[C_{22}|y_1-y_2| + C_{26}\int\limits_0^\theta \|M\tilde{w}_y\|\,dt\Bigg],$$

где $C_{26} = 1+\bar{g}/m_3$. Отсюда согласно лемме Гронуолла имеем

$$\|M\tilde{w}\| \le \frac{C_{22}}{\eta_0}\int\limits_0^\theta |y_1-y_2|\,e^{C_{26}(\theta-t)}\,dt$$

и с учетом (2.2.30)

$$\|\tilde{w}_y\| \le \|\tilde{w}_y\|_2 \le \frac{c\;C_{22}}{\eta_0}e^{C_{26}T}\int\limits_0^\theta |y_1-y_2|dt. \qquad (2.6.72)$$

Введем эквивалентную норму $|v|_p = \max_{t\in[0,T]}\big\{e^{-pt}(|v|+|v'|)\big\}$ в $C^1([0,T])$. Используя (2.6.70)–(2.6.73), можно показать, что

$$|A_3y_1 - A_3y_2|_p \le \max_{t\in[0,T]}\Big\{e^{-pt}\Big[C_{27}\int\limits_0^t \|\tilde{w}_y\|\,d\tau + C_{28}\,\|\tilde{w}_y\|\Big]\Big\} \le$$

$$\le \frac{c\;C_{22}e^{C_{26}T}}{p\eta_0}\big(C_{27}(1+T)+C_{29}\big)|y_1-y_2|_p \equiv \frac{C_{28}}{p}|y_1-y_2|_p. \qquad (2.6.73)$$

Здесь положительные константы C_{27} и C_{28} зависят от η_0, $\bar{g}$, α, m_1, m_2, m_3, C_{23}, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a\|_1, \|b\|_1\}$. При $p > C_{29}$ оператор A является сжимающим на Y в смысле нормы $|\cdot|_p$ и отображает Y в себя. Поэтому согласно принципу сжимающих отображений уравнение (2.6.68) имеет единственное решение $\eta(t)\in Y$

и при данном $\eta(t)$ существует решение $w(t,x)$ прямой задачи (2.6.54)–(2.6.56). Тогда пара $\{w,\eta\}$ является решением обратной задачи (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61) и соответственно задачи (2.6.54)–(2.6.58). Причем для $\eta(t)$ и $w(t,x)$ имеют место оценки (2.6.66), (2.6.67). Кроме того, в силу (2.6.60), (2.6.61), (2.6.66) и гладкости входных данных

$$|\eta'| = \Bigg| -\frac{\zeta'(\varphi_1+\Psi)+\zeta(\varphi_1'+\Psi')}{\zeta^2(\varphi_1+\Psi)^2}\Bigg[\int\limits_0^t \big(\Phi_1(\theta)-(g(a-w),b)\big)\zeta d\theta +$$

$$+\eta(0)\big(\varphi_1(0)+\Psi(0)\big)\Bigg] + \frac{\Phi_1-(g(a-w),b)}{\varphi_1+\Psi}\Bigg| \le C_{30},$$

где постоянная $C_{30}>0$ зависит от α, T, m_2, C_{23}, r_2, $\overline{\varphi_2}$, $\overline{\Psi}$, $\|\varphi_1\|_{C^1([0,T])}$, $\|U_0\|$, $\|a\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega))}$, $\|b\|_{C([0,T];W_2^1(\Omega))}$. Наконец, из уравнения (2.6.54), оценок (2.2.30), (2.6.66), (2.6.67) и последнего неравенства следует, что

$$\|w_t\|_2 \le c\|Mw_t\| \le \frac{c}{\eta_0}\Big[\big(C_{30}+1\big)C_{22}+\bar g\big(C_{23}+\|a\|\big)+\|f\|\Big]. \tag{2.6.74}$$

Докажем, что решение $\{w,\eta\}$ единственно. Пусть задача (2.6.54)–(2.6.56), (2.6.60), (2.6.61) имеет два решения $\{w_1,\eta_1\}$ и $\{w_2,\eta_2\}$. Тогда пара $\{\tilde w,\tilde\eta\} = \{w_1-w_2,\eta_1-\eta_2\}$ удовлетворяет соотношениям

$$((\eta_1(t))M\tilde w)_t + M\tilde w + g\tilde w = -(\tilde\eta M w_2)_t, \tag{2.6.75}$$

$$\eta_1(0)M\tilde w(0,x)=0, \qquad \tilde w|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.6.76}$$

$$\tilde\eta(t) = \frac{1}{\zeta(t)(\phi_1+\Psi)}\int\limits_0^t \big(g\tilde w,b\big)d\tau. \tag{2.6.77}$$

Применяя к (2.6.75)–(2.6.77) рассуждения, приведшие к (2.6.73), можно получить неравенство

$$|\tilde\eta|_p \le \frac{C_{29}}{p}|\tilde\eta|_p,$$

из которого при $p=2C_{29}$ следует, что $|\tilde\eta|_p\le 0$, т. е. $\eta_1=\eta_2$. Тогда согласно теореме 2.6.2 решение задачи (2.6.75)–(2.6.76) $\tilde w\equiv 0$, т. е. $w_1\equiv w_2$. Теорема доказана.

Сжимаемость оператора уравнения (2.6.60) гарантирует непрерывную зависимость решения задачи 2.5 при $\nu=0$ по φ_2. Действительно, для разности

$\{\tilde{u}, \tilde{\eta}\} = \{u_1 - u_2, \eta_1 - \eta_2\}$ решений $\{u_j, \eta_j\}$ задачи 2.5 при $\nu = 0$ и $\varphi_2 = \varphi_2^j$, $j = 1, 2$, можно получить неравенства

$$|\tilde{\eta}|_p \le \frac{C_{29}}{p} |\tilde{\eta}|_p + C_{31} \|\varphi_2^1 - \varphi_2^2\|_{C([0,T])}, \tag{2.6.78}$$

$$\|\tilde{u}\|_2 \le \frac{1}{\eta_0} C_{22} e^{C_{26}T} \int\limits_0^\theta |\tilde{\eta}| dt \tag{2.6.79}$$

аналогично соотношениям (2.6.72), (2.6.73). Здесь постоянная C_{31} зависит от α, m_2, T, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a\|_1, \|b\|, \|b_t\|_1\}$. Выразим из разности уравнений (2.6.2) для $\{u^j, \eta^j\}$, $j = 1, 2$, при $\nu = 0$ член $\eta_1 M \tilde{u}_t$.

$$\eta_1 M \tilde{u}_t = -\eta_1' M \tilde{u} - M \tilde{u} - g(t, x) \tilde{u} - \tilde{\eta} M u_{2t} - \tilde{\eta}' M u_2.$$

Оценивая правую часть этого равенства с помощью (2.6.51), (2.6.65)–(2.6.67) и (2.6.74), приходим к неравенству

$$\|u_t^1 - u_t^2\|_2 \le C_{31} \Big\{ |\eta^1 - \eta^2| + |(\eta^1 - \eta^2)'| \Big\}.$$

При $p = 2C_{29}$ из (2.6.78), (2.6.79) и последнего соотношения следуют оценки

$$\|\eta^1 - \eta^2\|_{C^1([0,T])} \le 2C_{32} \|\varphi_2^1 - \varphi_2^2\|_{C([0,T])},$$

$$\max_{t\in[0,T]} \left\{ \|u^1 - u^2\|_2 + \|u_t^1 - u_t^2\|_2 \right\} \le C_{33} \|\varphi_2^1 - \varphi_2^2\|_{C([0,T])}.$$

Положительные постоянные C_{31}, C_{32}, C_{33} зависят от α, c, η_0, η_1, $\bar{g}$, T, C_{22}, C_{23}, C_{30}, $\max_{t\in[0,T]}\{\|a\|, \|f\|\}$.

Утверждение теоремы 2.6.4 остается справедливым для задачи 2.5 при $\nu = 0$ с оператором M общего вида

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + (\mathbf{m}(x), \nabla)_R + m(x) I. \tag{2.6.80}$$

В этом случае, так же как и в §2.3, функция a является решением задачи (2.3.8) с оператором M вида (2.6.80), а вместо функций b, h^η, $\Psi(t)$, $F(t, x)$, F_0 и постоянной Φ_0 следует рассматривать функции b^*, h_*^η, $\Psi^*(t)$, $F^*(t, x)$, F_0^* и постоянную Φ_0^*.

Следствие 2.6.5. *Пусть выполняются предположения I–III для оператора M вида (2.6.80), $\mathbf{m} \in \big(W_\infty^1(\Omega)\big)^n$ и $\partial\Omega \in C^2$. Пусть также выполняются условия (iii), (iv) теоремы 2.6.4 и*

(vi) $\Psi^*(t) \geq 0$, *существует положительная постоянная* α^* *такая, что*

$$\varphi_1(t) + \Psi^*(t) \geq \alpha^*, \quad \Phi_1^*(t) \equiv \varphi_2(t) - \Psi^*(t) + (f, b^*) \geq 0 \qquad t \in [0, T].$$

Тогда задача 2.5 имеет единственное решение $\{u, \eta\}$ *в классе* V. *Причем существуют положительные константы* η_0^* *и* η_1^* *такие, что для любого* $t \in [0, T]$

$$\eta_0^* \leq \eta(t) \leq \eta_1^*.$$

Основные моменты доказательства данного утверждения повторяют рассуждения, доказывающие теорему 2.6.4.

К задаче 2.5 сводятся некоторые обратные задачи для уравнения (2.6.2) при $\nu = 0$ с краевыми условиями (2.6.3), (2.6.4) и условиями переопределения, заданными только на части Γ границы $\partial\Omega$. А именно,

$$\int\limits_{\Gamma} \Big\{ \Big(\eta(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \Big)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \Big\} \omega(t, x)\, \mathrm{d}s + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T], \qquad (2.6.81)$$

$$\eta(0) \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u(0, x)}{\partial \overline{N}} \, \omega(0, x)\, ds + \mu_1 \eta(0) = \mu_2. \qquad (2.6.82)$$

Если функция $\omega(t, x) \in C^1([0, T]; C^2(\Gamma))$ финитна на Γ при каждом $t \in [0, T]$ и $\operatorname{supp} \omega \subset \Gamma$, то ее можно продолжить на всю границу $\partial\Omega$ с сохранением гладкости, полагая $\omega(t, x) = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$, и считать, что интегралы в условиях переопределения берутся по всей границе $\partial\Omega$. В этом случае справедливо утвержение, аналогичное следствию 2.3.2.

Следствие 2.6.6. *Пусть выполняются предположения I–III из §2 и* $\partial\Omega \in C^2$, $\Gamma \subset \partial\Omega$. *Пусть также выполняются условия (iii), (iv) теоремы 2.6.4, функция* $\omega(t, x) \in C^1([0, T]; C^2(\Gamma))$ *финитна на* Γ *при каждом* $t \in [0, T]$, *справедливы неравенства (2.6.51), (2.6.52), где функция* a *является решением задачи (2.3.8) с краевым условием* $a|_\Gamma = \beta$ *и* $a|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$, *функции* b *и* h^η *– решения задач (2.3.9) и (2.3.10) с краевыми условиями* $b|_\Gamma = h^\eta|_\Gamma = \omega$ *и* $b|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = h^\eta|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$. *Тогда задача (2.6.2)–(2.6.4), (2.6.81), (2.6.82) имеет единственное решение* $\{u, \eta\}$ *в классе* V. *Причем существуют положительные константы* η_0 *и* η_1 *такие, что для любого* $t \in [0, T]$

$$\eta_0 \leq \eta(t) \leq \eta_1.$$

В заключении рассмотрим пример математической модели, который может служить обоснованием постановки обратной задачи 2.5 при $\nu = 0$.

Пример 6.1. Как было показано в [183], при определенных физических предположениях процесс теплопереноса в неподвижных изотропных материалах описывается уравнением

$$e_t = \operatorname{div}(k(u)\nabla u) + r,$$

где $e = e(u - \operatorname{div}(a(u)\nabla u))$ – внутренняя энергия, u – кондуктивная температура, $k(u)$ – теплопроводность среды, $a(u)$ – температурная невязка, $r = r(t, x)$ – внешний тепловой источник. Если в каждый момент времени распределение температуры $u(t, x)$ близко к некоторой известной температуре $u^*(t)$, то можно приближенно считать $a(u)$ и $k(u)$ постоянными, и $e \approx c(t)(u - a\Delta u)$. Здесь $c(t)$ – специфическая тепловая характеристика, зависящая от $u^*(t)$, Δ – оператор Лапласа. В этом случае уравнение теплопереноса принимает вид

$$(c(t)(u - a\Delta u))_t - k\Delta u = r. \tag{2.6.83}$$

Умножив это уравнение на a/k, мы получаем уравнение (2.6.2) при $\nu = 0$, где $M = I - a\Delta$, $\eta(t) = ac(t)/k$, $g = -1$ и $f = ar/k$. Начальные данные формулируются как

$$\big[\eta(t)(u - a\Delta u)\big]\big|_{t=0} = U_0(x). \tag{2.6.84}$$

Граничное условие задается в форме условия Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t, x) \tag{2.6.85}$$

или в общей форме

$$\left\{A\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Big[\big(\eta(t)au\big)_t + au\Big] + B\Big[\big(\eta(t)au\big)_t + au\Big]\right\}\Big|_{\partial\Omega} = \beta_1(t, x), \tag{2.6.86}$$

где A и B – известные функции. При $B = 0$ последнее условие означает, что известен тепловой поток на границе, а при $A \equiv 1$ и $B \neq 0$ данное условие описывает теплообмен с окружающей средой. Обратная задача идентификации неизвестного коэффициента $\eta(t)$ в уравнении (3.31) с краевыми условиями (2.6.84), (2.6.85) (или (2.6.84), (2.6.86)) недоопределена. Для отыскания $\eta(t)$ необходимо дополнительное условие, которое может быть сформулировано на основе граничных данных интегрального типа. В соответствии с (2.6.86) это приводит к интегральному условию переопределения

$$\int\limits_{\Gamma} \left[\big((\eta(t)au)_t + au\big)\omega_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big((\eta(t)au)_t + au\big)\omega_2 \right] ds = \psi_1(t), \qquad (2.6.87)$$

Здесь $\omega_i = \omega_i(t,x)$, $i = 1,2$ и $\psi_1 = \psi_1(t)$ - заданные функции, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. В случае задачи Дирихле (3.31)–(3.33) после подстановки (2.6.85)) в (2.6.87) условие переопределения примет вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\big((\eta(t)au)_t + au\big)\omega_2\, ds + (\eta(t)\mu_1(t))' = \psi_2(t),$$

где

$$\mu_1(t) = a\int\limits_{\Gamma} \beta\omega_1 ds \text{ и } \psi_2(t) = \psi_1(t) - k\int\limits_{\Gamma} \beta\omega_1 ds.$$

Аналогично формулируется условие переопределения при $t = 0$ для идентификации $\eta(0)$ в уравнении (2.6.83):

$$\int\limits_{\Gamma} \eta(0)a\frac{\partial u(0,x)}{\partial \mathbf{n}}\omega_2(0,x)\, ds + \eta(0)\mu_1(0) = r_2.$$

Глава 3 Обратные задачи для нелинейных уравнений фильтрации

В настоящей главе обобщаются постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений и результаты, полученные в предыдущей главе, на случай нелинейных уравнений фильтрации. Исследуется корректность обратных задач для таких уравнений и свойства решений стационарных обратных задач с помощью методов доказательства, использованных в предыдущей главе.

3.1 Обратные задачи для нелинейного уравнения фильтрации, неразрешенного относительно производной по времени

Обратные задачи для нелинейных уравнений (1.3.2) возникают в моделях фильтрации в трещиноватых средах (см. §1.3 главы 1). Как отмечалось в главе 1, операторы таких уравнений немонотонны в банаховых пространствах. Однако эти операторы сохраняют монотонность в специальном смысле на некоторых подмножествах банаховых пространств.

3.1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать задачу в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ и использовать те же обозначения, что и в предыдущей главе: $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$ – цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Точки Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ через t, а точки цилиндра Q_T через (t,x). Кроме того, будем использовать обозначения скалярных произведений, отношений двойственности и норм в пространстве $\mathbf{R}^n$ и функциональных пространствах, введенные в §1.2 главы 1. А именно, $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ – норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, соответственно; $\|\cdot\|_j$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_j$ – норма в $W_2^j(\Omega)$ и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^j(\Omega)$ и $W_2^{-j}(\Omega)$, соответственно $(j=1,2)$; $\|\cdot\|_{p/2}$ – норма в $W_2^{p/2}(\partial\Omega)$, $p=1,3$.

Рассмотрим обратную задачу отыскания неизвестного коэффициента k в уравнении (1.3.2) (см. §1.3 главы 1).

Задача 3.1. При заданных функциях $\psi(\rho)$, $f(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega(t,x)$ и постоянной η найти пару функций $\{u(t,x),k(t)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$(u + \eta M\psi(u))_t + k(t)M\psi(u) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{3.1.1}$$

краевым условиям

$$(u + \eta M\psi(u))\Big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.1.2}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in S_T \tag{3.1.3}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial(\psi(u))_t}{\partial \overline{N}} + k(t)\frac{\partial \psi(u)}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, ds + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t) \tag{3.1.4}$$

при $t \in (0,T)$. Здесь также как и ранее $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ – оператор вида

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I, \tag{3.1.5}$$

где $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ - матрица функций $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $m(x)$ - скалярная функция, а I - тождественный оператор; $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathbf{n}, \mathcal{M}(x)\nabla)$ и $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем следующие предположения относительно оператора M и функции $\psi(\rho)$.

I. M – сильно эллиптический оператор, т. е. существуют положительные константы m_1 и m_2 такие, что для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$m_1\|v\|_1^2 \le \big\langle Mv, v\big\rangle_1 \le m_2\|v\|_1^2 \tag{3.1.6}$$

и $m(x) \ge 0$ в Ω.

II. $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i,j,l = 1,2,\ldots,n$, и $m(x)$ ограничены в Ω и оператор M самосопряжен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ при $i,j = 1,2,\ldots,n$.

III. Функция $\psi(\rho)$ является взаимнооднозначным отображением интервала $(-\infty,+\infty)$ на себя и удовлетворяет условиям:

1) отображение $\psi^{-1}(v)$ из $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ $(q \ge 2)$ деминепрерывно ($\psi^{-1}(\rho)$ – функция обратная к $\psi(\rho)$);

2) функция $\psi(\rho)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$ и $\psi(0) = 0$. Кроме того, $\psi'(\rho) \ge \psi_0 > 0$, где ψ_0 – константа и для каждого $\sigma > 0$ существует

постоянная $L(\sigma) > 0$ такая, что для всех $\rho_1, \rho_2 \in E(\sigma) = \{\rho|\ |\rho| \le \sigma\}$

$$|\psi'(\rho_1) - \psi'(\rho_2)| \le L(\sigma)|\rho_1 - \rho_2|. \tag{3.1.7}$$

Обозначим через $a(t,x)$ и $b(t,x)$ решения задач

$$M\psi(a) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad a\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x); \tag{3.1.8}$$

$$Mb = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad b\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x). \tag{3.1.9}$$

Так же как и впредыдущих главах для удобства будем использовать обозначение

$$\big\langle Mv_1, v_2\big\rangle_{1,M} = (\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2) + (m(x)v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega).$$

Кроме этого, введем дополнительные обозначения:

$$\Psi(t) = \big\langle M\psi(a), b\big\rangle_{1,M}, \qquad F(t,x) = a_t - f(t,x),$$

$$\Phi(t) \equiv \varphi_2 + (f,b) - \eta\big\langle M(\psi(a))_t, b\big\rangle_{1,M},$$

$$\overline{\Psi} = \max_{t\in[0,T]} \Psi(t), \quad \overline{\varphi}_1 = \max_{t\in[0,T]} \varphi_1(t), \quad \overline{\Phi} = \max_{t\in[0,T]} |\Phi(t)|.$$

Однозначная разрешимость задачи (3.1.8), а также задачи

$$(u(0,x) + \eta M\psi(u(0,x)))\big|_{t=0} = U_0(x), \quad u(0,x)\big|_{\partial\Omega} = \beta(0,x) \tag{3.1.10}$$

гарантируется леммой 1.3.1 главы 1. Из этой леммы следует обратимость оператора $I + \eta M\psi(\cdot)$ на множестве функций v, для которых $\psi(v) - \psi(a(0,x)) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким образом, в предположениях I–III краевые условия (3.1.2), (3.1.3) однозначно определяют след функции u при $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

и $\psi(u_0) \in W_2^1(\Omega)$. В условиях утверждения 2 леммы 1.3.1 при $\beta_1 = \beta(0,x)$ след u_0 принадлежит $L^2(\Omega)$ и $\psi(u_0) \in W_2^2(\Omega)$. Более того для задач (3.1.8) и (3.1.10) справедлива теорема сравнения (см. лемму 1.4.3 из главы 1).

При введенных предположениях относительно оператора M и функции $\psi(\rho)$ однозначная разрешимость прямой задачи (3.1.1)–(3.1.3) с известным коэффициентом $k(t)$ в классе

$$V = \{v|\psi(v) \in L^\infty(0,T; W_2^2(\Omega)),\ v \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),$$
$$(v + \eta M\psi(v))_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\}$$

гарантируется теоремой 1.3.2 (см. §3 главы 1). Причем для функции $u(t,x)$ имеют место оценки

$$\|\psi(u)-\psi(a)\|_1^2 \le \frac{1}{\eta^2 m_1^2}\Big[\|U_0-a_0\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}+$$
$$+T\int\limits_0^T \|f-a_t\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}dt\Big]\exp\Big(\frac{m_2^2\bar{k}^2T^2}{\eta^2 m_1^2}\Big)\equiv C_1, \qquad (3.1.11)$$

$$\|u\| \le \frac{1}{c}\Big(C_1^{1/2}+\|\psi(a)\|\Big), \qquad (3.1.12)$$

$$\|M\psi(u)\| \le \frac{\sqrt{2}}{\eta}\Big((\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{p-1}{2p}}\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|U_0\|+T\max_{t\in[0,T]}\|f\|\Big)e^{\frac{\bar{k}^2T}{2\eta^2}}\equiv C_2, \qquad (3.1.13)$$

$$\|\psi(u)\|_2 \le \chi(C_2+C_1^{1/2})+\|\psi(a)\|_2\equiv C_2'. \qquad (3.1.14)$$

Здесь $\bar{k}=\max_{t\in[0,T]}|k(t)|$, константа χ из неравенства [87, Chapter 2]

$$\|v\|_2 \le \chi(\|Mv\|+\|v\|_1), \quad v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega), \qquad (3.1.15)$$

зависит от n, m_1, mesΩ. Кроме того, как показано в главе 1, для задачи (3.1.1)–(3.1.3) справедлива теорема сравнения (см. теорему 1.4.4 главы 1).

3.1.2 Существование и единственность решения обратной задачи

Под решением обратной задачи 3.1 будем понимать пару функций $\{u,k\}$, определенных в $Q_{t^*}=(0,t^*)\times\Omega$, где $0<t^*\le T$, со следующими свойствами:

1) $k(t)\in C([0,t^*])$;

2) $u(t,x)\in W(t^*)=\{v\,|\,\psi(v)\in C([0,t^*];W_2^2(\Omega)),\ v\in C([0,t^*];L^4(\Omega)),\ v_t\in L^\infty(0,t^*;L^2(\Omega)),\ (\psi(v))_t\in L^\infty(0,t^*;W_2^2(\Omega))\}$;

3) пара $\{u,k\}$ удовлетворяет уравнению (3.1.1) почти всюду в Q_t^*, начальным данным (3.1.2) почти всюду в Ω и условиям (3.1.3)–(3.1.4) почти при всех $t\in(0,t^*)$.

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи 3.1 в таком смысле дает следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $n \leq 4$, $\eta > 0$ *и выполняются предположения I–III. Пусть также*

(i) $\partial\Omega \subset C^2$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\psi(\beta) \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,T])$, $\omega \in C([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$;

(ii) $f \geq 0$ *почти всюду в* Q_T *и* $U_0 \geq 0$ *почти для всех* $x \in \Omega$; β *и* ω *неотрицательны почти всюду на* S_T. *Кроме того,* $\omega > 0$ *почти всюду на поверхности* $[0,T] \times \Gamma$, *где* $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ *– множество ненулевой* $n-1$*-мерной меры;*

(iii) *существует постоянная* $\alpha > 0$ *такая, что*

$$\varphi_1 + \Psi \geq \alpha, \tag{3.1.16}$$

$$a_0(x) - U_0(x) \geq 0, \tag{3.1.17}$$

$$F(t,x) \equiv a_t - f \geq 0, \tag{3.1.18}$$

$$\Phi(t) \geq \Phi_0 + \frac{\alpha}{\alpha_1} \max_{t\in[0,T]} \left(\|a_t\| + \frac{1}{(\psi_0 \eta m_1)^{1/2}} \|f\| \right) \max_{t\in[0,T]} \|b\|, \tag{3.1.19}$$

где постоянная $\Phi_0 > 0$,

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2}{(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}} \|a_0 - U_0\| \max_{t\in[0,T]} \|b\| > 0. \tag{3.1.20}$$

Тогда существует $0 < t^* \leq T$, *такое, что задача 3.1 имеет единственное решение* $\{u,k\} \in W(t^*) \times C([0,t^*])$ *и справедливы оценки*

$$0 \leq u \leq a, \tag{3.1.21}$$

$$0 \leq k(t) \leq \delta^*(t)$$

почти всюду в Q_{t^*}, *где* $\delta^*(t) > 0$ *– функция непрерывная на* $[0,t^*]$.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 2.2.2, сведем задачу 3.1 к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением для $k(t)$. Для этого умножим (3.1.1) на решение b задачи (3.1.9) в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям по x во втором и третьем слагаемых. Учитывая (3.1.4), получим соотношение

$$(u_t, b) - \varphi_2 + \varphi_1 k(t) + \eta \int\limits_{\Omega} \big\{(\mathcal{M}(x)\nabla(\psi(u))_t, \nabla b)_R + m(x)(\psi(u))_t b\big\} dx +$$

$$+k(t) \int\limits_{\Omega} \big\{(\mathcal{M}(x)\nabla\psi(u), \nabla b)_R + m(x)\psi(u) b\big\} dx = (u_t, b) - \varphi_2 + \varphi_1 k(t) +$$

$$+\eta \int\limits_{\partial\Omega} (\psi(\beta))_t \frac{\partial b}{\partial \overline{N}} ds + k(t) \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\beta) \frac{\partial b}{\partial \overline{N}} ds = (f, b),$$

которое ввиду того, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\psi(\beta))_t \frac{\partial b}{\partial \overline{N}} ds = \big\langle M(\psi(a))_t, b\big\rangle_{1,M},$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi(\beta) \frac{\partial b}{\partial \overline{N}} ds = \big\langle M\psi(a), b\big\rangle_{1,M} = \Psi(t),$$

можно переписать как уравнение

$$k(t) = \big[\varphi_2 - (a_t - f, b) - \eta\big\langle M(\psi(a))_t, b\big\rangle_{1,M} + ((a-u)_t, b)\big](\varphi_1 + \Psi)^{-1}. \quad (3.1.22)$$

Пусть $\delta(t)$ – положительная функция непрерывная на $[0, T]$. Определим срезающую функцию $z_\delta(t) \in L^\infty(\Omega)$ вида

$$z_\delta(t) = \begin{cases} 0, & z(t) < 0, \\ z(t), & 0 \le z(t) \le \delta(t), \\ \delta(t), & z(t) > \delta(t), \end{cases} \quad (3.1.23)$$

и рассмотрим следующую итерационную схему:

$$(u^i + \eta M\psi(u^i))_t + k_\delta^{i-1}(t) M\psi(u^i) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (3.1.24)$$

$$(u^i + \eta M\psi(u^i))\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1.25)$$

$$u^i = \beta(t, x), \quad (t, x) \in \overline{S}_T, \quad (3.1.26)$$

$$k^i(t) = \big[\varphi_2 - (a_t - f, b) - \eta\big\langle M(\psi(a))_t, b\big\rangle_{1,M} + ((a-u^i)_t, b)\big](\varphi_1 + \Psi)^{-1}, \quad (3.1.27)$$

$$i = 1, 2, ...; \quad k^0(t) = \delta(t).$$

Согласно теореме 1.4.2 главы 1 в предположении III, решение u^i удовлетворяет (3.1.21) и

$$\psi(0) \le \psi(u^i) \le \psi(a) \quad (3.1.28)$$

для каждого $i = 1, 2, ...$ Кроме того, для u^i и $\psi(u^i)$ справедливы оценки (3.1.11)–(3.1.14), где $\bar{k} = \max_{t\in[0,T]} \delta(t)$.

Докажем, что $k^i(t)$ совпадает с $k^i_\delta(t)$ при соответствующем $\delta(t)$ почти всюду на некотором промежутке $[0, t^*]$, $0 < t^* \leq T$. Для этого также как и при доказательстве теоремы 1.3.2 главы 1 проинтегрируем (3.1.24) по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq T$, и умножим результирующее соотношение на $\psi(u^i) - \psi(a)$ в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$. После интегрирования по частям во втором и третьем слагаемых, получим равенство

$$(u^i - a, \psi(u^i) - \psi(a)) + \eta\big\langle M(\psi(u^i) - \psi(a)), \psi(u^i) - \psi(a)\big\rangle_{1,M} +$$
$$+\Big\langle \int\limits_0^\tau k^{i-1}_\delta(t) M(\psi(u^i) - \psi(a))dt, \psi(u^i) - \psi(a)\Big\rangle_{1,M} =$$
$$= \Big(U_0 - a_0 - \int\limits_0^\tau F dt, \psi(u^i) - \psi(a)\Big). \tag{3.1.29}$$

Далее, умножим (3.1.29) на $k^i_\delta(\tau)$ и проинтегрируем по τ от 0 до θ, $0 < \theta < T$. Затем проинтегрируем по частям по τ в члене, содержащем $\int_0^\tau F dt$. Будем иметь

$$\int\limits_0^\theta k^{i-1}_\delta \big[(u^i - a, \psi(u^i) - \psi(a)) + \eta\big\langle M(\psi(u^i) - \psi(a)), \psi(u^i) - \psi(a)\big\rangle_{1,M}\big] d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}\Big\langle M \int\limits_0^\theta k^{i-1}_\delta(t)(\psi(u^i) - \psi(a))dt, \int\limits_0^\theta k^{i-1}_\delta(t)(\psi(u^i) - \psi(a))dt\Big\rangle_{1,M} =$$
$$= \Big(- a_0 + U_0 - \int\limits_0^\theta F dt, \int\limits_0^\theta k^{i-1}_\delta(t)(\psi(u^i) - \psi(a))dt\Big) +$$
$$+ \int\limits_0^\theta \Big(F, \int\limits_0^\tau k^{i-1}_\delta(t)(\psi(u^i) - \psi(a))dt\Big) d\tau. \tag{3.1.30}$$

Оценивая правую часть (3.1.30) с помощью (3.1.6), неравенства Стеклова

$$\|w\| \leq \|w\|_1 \tag{3.1.31}$$

для $w \in \mathring{W}^1_2(\Omega)$ и применяя лемму Гроноулла к результирующему соотношению, можно показать, что

$$4\eta\int\limits_0^\theta k_\delta^{i-1}(\tau)\big\langle M(\psi(u^i)-\psi(a)),\psi(u^i)-\psi(a)\big\rangle_{1,M}d\tau+$$
$$+\Big\langle M\int\limits_0^\theta k_\delta^{i-1}(t)(\psi(u^i)-\psi(a))dt,\int\limits_0^\theta k_\delta^{i-1}(t)(\psi(u^i)-\psi(a))dt\Big\rangle_{1,M}\le$$
$$\le\frac{4\big(e^\theta-1\big)}{m_1}\Big[\|a_0-U_0\|+2\theta\max_{t\in[0,T]}\|F\|\Big]^2\equiv\frac{4\big(e^\theta-1\big)}{m_1}C_3^2(\theta).\quad(3.1.32)$$

Возвращаясь к (3.1.29), в силу (3.1.6), (3.1.31), (3.1.32) и монотонности $\psi(\rho)$ получаем оценку

$$\big\langle M(\psi(u^i)-\psi(a)),\psi(u^i)-\psi(a)\big\rangle_{1,M}\le\frac{1}{\eta^2 m_1}C_3^2(\tau)\big[2(e^\tau-1)^{1/2}+1\big]^2.\quad(3.1.33)$$

Перейдем к доказательству оценок для $(\psi(u^i))_t$. Умножим (3.1.24) на $(\psi(u^i)-\psi(a))_t$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям во втором и третьем слагаемых. Это даст

$$(u_t^i,(\psi(u^i))_t)+\eta\big\langle M(\psi(u^i)-\psi(a))_t,(\psi(u^i)-\psi(a))_t\big\rangle_{1,M}=$$
$$=-k_\delta^{i-1}(t)\Big\langle M(\psi(u^i)-\psi(a)),(\psi(u^i)-\psi(a))_t\Big\rangle_{1,M}+$$
$$+(u_t^i,(\psi(a))_t)+\big(f,(\psi(u^i)-\psi(a))_t)\big).$$

Оценивая правую часть этого равенства с учетом (3.1.6), (3.1.31), (3.1.33), а первое слагаемое левой части с помощью условия 3) предположения III, приходим к оценке

$$\psi_0\|u_t^i\|^2+\eta\big\langle M(\psi(u^i)-\psi(a))_t,(\psi(u^i)-\psi(a))_t\big\rangle_{1,M}\le\psi_0\bigg\{\|a_t\|+$$
$$+\frac{1}{(\eta m_1\psi_0)^{1/2}}\left[\|f\|+\frac{k_\delta^{i-1}(t)}{\eta}C_3(t)\big(2(e^t-1)^{1/2}+1\big)\right]\bigg\}^2.\quad(3.1.34)$$

Теперь можно перейти к оценке $k^i(t)$. В силу (3.1.23), (3.1.27) и (3.1.34),

$$\Big[\Phi(t)-(u_t^i,b)\Big](\varphi_1+\Psi)^{-1}\ge\bigg\{\Phi(t)-\bigg(\|a_t\|+\frac{\|f\|}{(\eta m_1\psi_0)^{1/2}}\bigg)\|b\|-$$
$$-\delta(t)\frac{C_3(t)\|b\|}{(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}}\Big(2(e^t-1)^{1/2}+1\Big)\bigg\}(\varphi_1+\Psi)^{-1}.$$

Ввиду (3.1.19) последнее выражение неотрицательно при

$$\delta(t) \leq \frac{(\Phi(t) - \gamma(t))(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}{\tilde{C}_3(t)\|b\|} \equiv \delta'(t),$$

где $\gamma(t) = \big(\|a_t\| + (\eta m_1 \psi_0)^{-1/2}\|f\|\big)\|b\|$, $\tilde{C}_3(t) = C_3(t)(2(e^t-1)^{1/2}+1)$.

С другой стороны, при условии (3.1.20) существует t^*, $0 < t^* \leq T$ такое, что для любого $0 \leq t \leq t^*$ справедливо соотношение

$$\Big[\Phi(t) - (u_t^i, b)\Big](\varphi_1 + \Psi)^{-1} \leq$$
$$\leq \Big\{\Phi(t) + \gamma(t) + \delta(t)\frac{\tilde{C}_3(t)\|b\|}{(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}\Big\}\alpha^{-1} \leq \delta(t),$$

т. е.

$$\delta(t) \geq \frac{(\Phi(t) + \gamma(t))(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}{\alpha(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2} - \tilde{C}_3(t)\|b\|}$$

и $\alpha(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2} - \tilde{C}_3(t)\|b\| > 0$. Вследствие (3.1.19), (3.1.20)

$$\alpha(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2} - \tilde{C}_3(t)\|b\| = (\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}\Big(\alpha - \frac{2\|b\|}{(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}\|a_0 - U_0\|\Big) +$$
$$+\|a_0 - U_0\|\,\|b\| - 2\|b\|(C_3(t)(e^t-1)^{1/2} + t\max_{t\in[0,T]}\|F\|) \geq$$
$$\geq (\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}(\alpha_1 - \varepsilon(t)) + \|a_0 - U_0\|\,\|b\|,$$

где

$$\varepsilon(t) \equiv \frac{2(e^t-1)^{1/2}}{(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}(C_3(T) + T\max_{t\in[0,T]}\|F\|)\max_{t\in[0,T]}\|b\|.$$

Если

$$\varepsilon(t^*) = \frac{\Phi_0}{2\overline{\overline{\Phi}}}\alpha_1, \tag{3.1.35}$$

то выражение $\alpha_1 - \varepsilon(t)$ положительно и отграничено от 0 на $[0, t^*]$. Таким образом,

$$\Big[\Phi(t) - (u_t^i, b)\Big](\varphi_1 + \Psi)^{-1} \leq \delta(t) \tag{3.1.36}$$

при

$$\delta(t) \geq \frac{(\Phi(t) + \gamma(t))(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}}{\alpha(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2} - \tilde{C}_3(t)\|b\|} \equiv \delta''(t)$$

на $[0, t^*]$. Причем, $\delta' \geq \delta''$ на промежутке $[0, t^*]$. Действительно, ввиду (3.1.19) и (3.1.35) на $[0, t^*]$ справедливо неравенство $\alpha_1\Phi(t) - \alpha\gamma(t) \geq \alpha_1\Phi_0$. Поэтому

$$\delta' - \delta'' = (\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}\Big\{\alpha(\Phi(t) - \gamma(t))(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2} - 2\Phi(t)\|b\|\,\|a_0 - U_0\| -$$

$$-4\Phi(t)\|b\|C_3(t)(e^t-1)^{1/2}-2\Phi(t)\|b\|\|F\|t\Big\}\Big\{\tilde{C}_3(t)\|b\|\big(\alpha(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}-$$

$$-\tilde{C}_3(t)\|b\|\big)\Big\}^{-1}\geq\Big\{(\alpha_1\Phi_0(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}-4\overline{\Phi}(e^t-1)^{1/2}(C_3(T)+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\|F\|)\max_{t\in[0,T]}\|b\|\Big\}\Big\{\tilde{C}_3(t)\|b\|\big(\alpha(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}-\tilde{C}_3(t)\|b\|\big)\Big\}^{-1}=$$

$$=(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}\Big\{\alpha_1\Phi_0-2\varepsilon(t)\overline{\Phi}\Big\}\Big\{\tilde{C}_3(t)\|b\|\big(\alpha(\eta^3 m_1\psi_0)^{1/2}-\tilde{C}_3(t)\|b\|\big)\Big\}^{-1}\geq 0$$

при $t\in[0,t^*]$, где

$$t^*=\ln\left\{1+\frac{\Phi_0^2}{4\overline{\Phi}^2}\alpha_1^2\eta^3 m_1\psi_0\Big[\Big(C_3(T)+T^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\|F\|\Big)\max_{t\in[0,T]}\|b\|\Big]^{-2}\right\}. \qquad (3.1.37)$$

Таким образом, в силу (3.1.36), имеют место оценки

$$0\leq k^i(t)\leq\delta''(t),\quad i=1,2,\ldots, \qquad (3.1.38)$$

на $[0,t^*]$. Полагая $\delta(t)=\delta''(t)$ в (3.1.23), на основании последней оценки можно утверждать, что $k^i_\delta(t)$ совпадает с $k^i(t)$ на $[0,t^*]$ при каждом $i=1,2,\ldots$.

Теперь перейдем к оценке $M\psi(u)$. Интегрируя (3.1.24) по t от 0 до τ, $0<\tau\leq t^*$, и умножая на $M\psi(u^i)$ в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$, приходим к уравнению

$$\eta\|M\psi(u^i)\|^2+\Big(\int\limits_0^\tau k^{i-1}(t)M\psi(u^i)dt, M\psi(u^i)\Big)=-(u^i,M\psi(u^i))+$$

$$+(U_0,M\psi(u^i))+\Big(\int\limits_0^\tau f dt, M\psi(u^i)\Big). \qquad (3.1.39)$$

Умножим это равенство на k^{i-1}, проинтегрируем по τ от 0 до θ и оценим правую часть результирующего соотношения с помощью (3.1.12). Получим неравенство

$$\eta\int\limits_0^\theta k^{i-1}(\tau)\|M\psi(u^i)\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\Big\|\int\limits_0^\theta k^{i-1}(t)M\psi(u^i)dt\Big\|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\theta\left\{(mes\Omega)^{\frac{p}{2(p-1)}}\left[\frac{C_1+\|\psi(a)\|}{c}\right]^{1/p}+\|U_0\|+\|f\|\right\}^2 k^{i-1}(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{\eta}{2}\int\limits_0^\theta k^{i-1}(\tau)\|M\psi(u^i)\|^2 d\tau,$$

из которого следует, что

$$\eta\int\limits_0^\theta k^{i-1}(\tau)\|M\psi(u^i)\|^2 d\tau+\Big\|\int\limits_0^\theta k^{i-1}(t)M\psi(u^i)dt\Big\|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{\eta}\max_{\theta\in[0,T]}\left\{(mes\Omega)^{\frac{p}{2(p-1)}}\left[\frac{C_1+\|\psi(a)\|}{c}\right]^{\frac{1}{p}}+\|U_0\|+\|f\|\right\}^2\times$$

$$\times\int\limits_0^\theta k^{i-1}d\tau\equiv\frac{C_4^2}{\eta}\int\limits_0^\theta k^{i-1}d\tau. \qquad (3.1.40)$$

Перенесем второй член из левой части (3.1.39) в правую и оценим с учетом (3.1.40). Это даст

$$\eta\|M\psi(u^i)\|^2\leq\frac{C_4^2}{\eta^2}\Big[\Big(\int\limits_0^\theta k^{i-1}(\tau)d\tau\Big)^{1/2}+1\Big]^2+\frac{\eta}{2}\big\|M\psi(u^i)\big\|^2,$$

откуда в силу (3.1.38) вытекает оценка

$$\|M\psi(u^i)\|\leq\frac{C_4}{\eta^{3/2}}\Big[\Big(\int\limits_0^\theta\delta''(\tau)d\tau\Big)^{1/2}+1\Big],\qquad t\in[0,t^*]. \qquad (3.1.41)$$

Определим оператор $A: L^\infty(0,t^*)\to L^\infty(0,t^*)$, который каждому элементу $y(t)\in L^\infty(0,t^*)$ ставит в соответствие элемент

$$Ay(t)=\big[\varphi_2-(a_t-f,b)-\eta\big\langle M(\psi(a))_t,b\big\rangle_{1,M},+((a-u_y)_t,b)\big](\varphi_1+\Psi)^{-1},$$

где u_y – решение задачи (3.1.1)–(3.1.3) с $k(t)=y(t)$. Согласно теореме 1.3.2 (глава 1) задача (3.1.1)–(3.1.3) имеет единственное решение $u_y\in L^\infty(0,t^*;L^{2p}(\Omega))$ при каждом $y(t)\in L^\infty(0,t^*)$. Поэтому значение оператора A определено для каждого $y\in L^\infty(0,t^*)$. Тогда уравнение (3.1.22) можно рассматривать как операторное уравнение

$$k=Ak. \qquad (3.1.42)$$

Оценки (3.1.38) и (3.1.38) показывают, что оператор A переводит множество $Y(t^*)=\{y(t)|y(t)\in L^\infty(0,t^*),0\leq y(t)\leq\delta''\}$ в себя. Покажем, что в условиях теоремы A является сжимающим оператором на $Y(t^*)$. Пусть $y_1(t),y_2(t)\in$

$Y(t^*)$, и u_{y1}, u_{y2} – решения задачи (3.1.1)–(3.1.3) с $k = y_1$ и $k = y_2$ соответственно. Для решений u_{yj}, $j = 1, 2$, справедливы оценки (3.1.32)–(3.1.34) с $y_j(t)$ вместо k^i_δ. Из (3.1.33) и предположения III следует, что

$$\psi_0\|u_{yj}\|_1 \le \|\psi(u_{yj})\|_1 \le \frac{C_3(t^*)}{\eta m_1}\big[2(e^t-1)^{1/2}+1\big] + \max_{t\in[0,t^*]}\|\psi(a)\|_1 \equiv C_5. \quad (3.1.43)$$

Рассмотрим разность уравнений (3.1.1) для $\{u_{y1}, y_1\}$ и $\{u_{y2}, y_2\}$.

$$\big[u_{y1} - u_{y2} + \eta M w_y\big]_t + y_1 M w_y = (y_2 - y_1) M\psi(u_{y2}), \quad (3.1.44)$$

где $w_y \equiv \psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})$. Проинтегрируем это равенство по t от 0 до τ, $0 < \tau \le t^*$, умножим на w_y в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем в результирующем соотношении по частям по x. Будем иметь:

$$\big(u_{y1} - u_{y2}, w_y\big) + \eta\big\langle M w_y, w_y\big\rangle_{1,M} + \Big\langle M\int\limits_0^\tau y_1 w_y d\tau, w_y\Big\rangle_{1,M} =$$

$$= \Big\langle \int\limits_0^\tau (y_2 - y_1) M\psi(u_{y2}) dt, w_y\Big\rangle_{1,M}. \quad (3.1.45)$$

Умножим последнее равенство на $y_1(\tau)$ и проинтегрируем по τ от 0 до θ, $0 < \theta \le t^*$. Оценивая правую часть с учетом (3.1.28) и (3.1.43), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^\theta y_1\Big[\big(u_{y1} - u_{y2}, w_y\big) + \eta\big\langle M w_y w_y\big\rangle_{1,M}\Big] d\tau + \frac{1}{2}\Big\langle M\int\limits_0^\theta y_1 w_y d\tau, \int\limits_0^\theta y_1 w_y d\tau\Big\rangle_{1,M} \le$$

$$\le \int\limits_0^\theta \frac{m_2 y_1 t^*}{2\eta}\Big\|\int\limits_0^\tau (y_2 - y_1)\psi(u_{y2}) dt\Big\|_1^2 d\tau + \frac{\eta}{2}\int\limits_0^\theta y_1\Big\langle M w_y, w_y\Big\rangle_{1,M} d\tau \le$$

$$\le \frac{m_2 t^* C_5^2}{2\eta}\max_{0\le\tau\le t^*}\delta''(\tau)\Big(\int\limits_0^\theta |y_2 - y_1| dt\Big)^2 + \frac{\eta}{2}\int\limits_0^\theta y_1\Big\langle M w_y, w_y\Big\rangle_{1,M} d\tau,$$

из которого вытекает, что

$$\eta\int\limits_0^\theta y_1\big\langle M w_y w_y\big\rangle_{1,M} d\tau + \Big\langle M\int\limits_0^\theta y_1 w_y d\tau, \int\limits_0^\theta y_1 w_y d\tau\Big\rangle_{1,M} \le$$

$$\le \frac{m_2 t^* C_5^2}{2\eta}\max_{0\le\tau\le t^*}\delta''(\tau)\Big(\int\limits_0^\theta |y_2 - y_1| dt\Big)^2 \equiv C_6\Big(\int\limits_0^\theta |y_2 - y_1| dt\Big)^2. \quad (3.1.46)$$

Перенесем теперь последнее слагаемое из левой части (3.1.45) в правую и оценим правую часть полученного равенства с помощью (3.1.43) и (3.1.46). В силу условия 2) предположения III будем иметь:

$$2\psi_0\big\|u_{y1}-u_{y2}\big\|^2+\eta\big\langle Mw_y,w_y\big\rangle_{1,M}\le\frac{1}{\eta}(C_6+m_2C_5)^2\Big(\int\limits_0^\theta|y_2-y_1|dt\Big)^2. \quad (3.1.47)$$

Перейдем к оценке производной $(w_y)_t$. Умножим (3.1.44) на $(w_y)_t$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям по x и перепишем результат в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\big((u_{y1}-u_{y2})_t,\psi'(u_{y1})(u_{y1}-u_{y2})_t\big)+\eta\big\langle M(w_y)_t,(w_y)_t\big\rangle_{1,M}=\\&=-\big((u_{y1}-u_{y2})_t,(\psi'(u_{y1})-\psi'(u_{y2}))(u_{y2})_t\big)-\\&-y_1\big\langle M(w_y),(w_y)_t\big\rangle_{1,M}+(y_2-y_1)\big\langle Mw_y,(w_y)_t\big\rangle_{1,M}.\end{aligned} \quad (3.1.48)$$

Оценим правую часть (3.1.48) с учетом (3.1.7), (3.1.28), (3.1.34) и (3.1.47). Это дает

$$\begin{aligned}&\Big|-\big((u_{y1}-u_{y2})_t,(\psi'(u_{y1})-\psi'(u_{y2}))(u_{y2})_t\big)-y_1\big\langle Mw_y,(w_y)_t\big\rangle_{1,M}+\\&+(y_2-y_1)\big\langle M(\psi(u_{y2})-\psi(a)),(w_y)_t\big\rangle_{1,M}\Big|\le\\&\le L(\|a\|_{L^\infty(Q_T)})\,\|u_{y1}-u_{y2}\|_{L^4(\Omega)}\,\|(u_{y2})_t\|_{L^4(\Omega)}\|(u_{y1}-u_{y2})_t\|+\\&+\Big[|y_2-y_1|\big\langle M(\psi(u_{y2})-\psi(a)),\psi(u_{y2})-\psi(a)\big\rangle_{1,M}^{1/2}+\\&+y_1\big\langle Mw_y,w_y\big\rangle_{1,M}^{1/2}\Big]\big\langle M(w_y)_t,(w_y)_t\big\rangle_{1,M}^{1/2}.\end{aligned} \quad (3.1.49)$$

В условиях теоремы из (3.1.47) следует, что

$$\begin{aligned}\|u_{y1}-u_{y2}\|_{L^4(\Omega)}&\le\frac{\kappa}{m_1^{1/2}\psi_0}\big\langle Mw_y,w_y\big\rangle_{1,M}^{1/2}\le\\&\le\frac{\kappa}{\eta m_1^{1/2}\psi_0}(C_6+m_2C_5)\int\limits_0^\theta|y_2-y_1|dt.\end{aligned} \quad (3.1.50)$$

Здесь κ – константа из неравенства вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L^4(\Omega)$. В силу (3.1.34) и условия 2) предположения III,

$$\begin{aligned}\psi_0^{1/2}\|(u_{y2})_t\|_{L^4(\Omega)}&\le\|(\psi(u_{y2}))_t\|_{L^4(\Omega)}\le\max_{t\in[0,t^*]}\Big\{\|(\psi(a))_t\|_{L^4(\Omega)}+\psi_0^{1/2}\|a_t\|\Big\}+\\&+\frac{1}{(\eta m_1)^{1/2}}\max_{t\in[0,t^*]}\Big[\|f\|+\frac{\delta''}{\eta}C_3(t^*)\big(2(e^{t^*}-1)^{1/2}+1\big)\Big]\equiv C_7.\end{aligned} \quad (3.1.51)$$

Используя (3.1.33), (3.1.49)–(3.1.51) и условие 2) предположения III, из (3.1.47) получаем неравенство

$$\psi_0\big\|(u_{y1}-u_{y2})_t\big\|^2+\eta\big\langle M(w_y)_t,(w_y)_t\big\rangle_{1,M}\le\Bigg[C_8\int\limits_0^t|y_2-y_1|d\tau+$$

$$+\frac{1}{(\eta^3m_1)^{1/2}}C_3(t^*)(2(e^{t^*}-1)^{1/2}+1)|y_2-y_1|\Bigg]^2, \qquad (3.1.52)$$

где

$$C_8=\frac{1}{\eta^{3/2}}\left[\frac{\eta\kappa C_7}{m_1\psi_0^2}+\max_{t\in[0,t^*]}\delta''\right](C_6+C_5m_2).$$

С другой стороны, согласно определению оператора A

$$Ay_1-Ay_2=((u_{y1})_t-(u_{y1})_t,b)(\varphi_1+\Psi)^{-1}.$$

Ввиду (3.1.16), (3.1.21), (3.1.37) и (3.1.52), можно показать, что

$$|Ay_1-Ay_2|\le\frac{\|b\|}{\alpha}\|(u_{y1})_t-(u_{y1})_t\|\le\frac{\|b\|}{\alpha\psi_0^{1/2}}C_8\int\limits_0^t|y_2-y_1|d\tau+$$

$$+\left\{\frac{1}{2}+(e^{t^*}-1)^{1/2}\frac{2\|b\|}{\alpha(\eta^3m_1\psi_0)^{1/2}}\left[C_3(T)+T^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\|F\|\right]\right\}|y_2-y_1|\equiv$$

$$\equiv\frac{\|b\|}{\alpha\psi_0^{1/2}}C_8\int\limits_0^t|y_2-y_1|d\tau+q_1|y_2-y_1| \qquad (3.1.53)$$

на $[0,t^*]$, где $q_1\equiv\left\{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon(t^*)}{\alpha}\right\}$.

Введем в $L^\infty(0,t^*)$ эквивалентную норму $\left|\!\left|\!\left|\cdot\right|\!\right|\!\right|_\mu=vrai\max_{t\in(0,t^*)}\left(|\cdot|e^{-\mu t}\right)$. Из (3.1.53) следует, что

$$\left|\!\left|\!\left|Ay_1-Ay_2\right|\!\right|\!\right|_\mu\le\left(\frac{C_8\max_{t\in[0,T]}\|b\|}{\alpha\psi_0^{1/2}\mu}+q_1\right)\left|\!\left|\!\left|y_2-y_1\right|\!\right|\!\right|_\mu. \qquad (3.1.54)$$

В силу (3.1.37) постоянная q_1 меньше 1. Если μ удовлетворяет условию

$$\frac{C_8\max_{t\in[0,T]}\|b\|}{\alpha\psi_0^{1/2}\mu}+q_1<1, \qquad (3.1.55)$$

то оператор A является сжимающим на $Y(t^*)$ в смысле нормы $\left|\!\left|\!\left|\cdot\right|\!\right|\!\right|_\mu$. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений оператор A имеет единственную неподвижную точку в $Y(t^*)$.

Вернемся к итерационной схеме (3.1.24)–(3.1.27). Как показано выше, для $k^i(t)$ справедлива оценка (3.1.38), т. е. $k^i(t) \in Y(t^*)$, и $k^i_\delta(t) = k^i(t)$ на $[0,t^*]$ для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому для $k^i(t)$ и $k^{i-1}(t)$ имеет место неравенство (3.1.54), из которого вытекает, что последовательность k^i сходится по норме $L^\infty(0,t^*)$ при $i \to \infty$ к решению $k^*(t)$ уравнения (3.1.42), и $k^*(t)$ удовлетворяет оценке (3.1.38).

Пусть u^* – решение задачи (3.1.1)–(3.1.3) с $k = k^*$. Повторяя доказательство оценок (3.1.47), (3.1.50) и (3.1.52) применительно к разности уравнений (3.1.24) и (3.1.1) с $k = k^*$

$$\Big[u^i - u^* + \eta M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\Big]_t + k^* M(\psi(u^i) - \psi(u^*)) = (k^* - k^i) M\psi(u^i), \quad (3.1.56)$$

можно получить неравенства

$$2\psi_0 \big\|u^i - u^*\big\|^2 + \eta\|\psi(u^i) - \psi(u^*))\|_1^2 \le$$
$$\le \frac{1}{\eta}\Big((C_6 + m_2 C_5)\int\limits_0^\theta |k^* - k^i| dt\Big)^2, \quad (3.1.57)$$

$$\psi_0\big\|(u^i - u^*)_t\big\|^2 + \eta m_1 \|(\psi(u^i) - \psi(u^*))_t\|_1^2 \le 2\Big[C_8 \int\limits_0^t |k^* - k^i| d\tau +$$
$$+ \frac{1}{(\eta^3 m_1)^{1/2}} C_3(t^*)(2(e^{t^*} - 1)^{1/2} + 1)|k^* - k^i|\Big]^2,$$

$$\|u_i - u^*\|_{L^4(\Omega)} \le \frac{\kappa}{\eta m_1^{1/2}\psi_0}(C_6 + m_2 C_5)\int\limits_0^\theta |k^* - k^i| dt.$$

Из этих соотношений следует, что $u^i \to u^*$ в $C([0,t^*]; L^4(\Omega))$; $\psi(u^i) \to \psi(u^*)$ в $C([0,t^*]; W_2^1(\Omega))$ и $u^i_t \to u^*_t$ в $L^\infty(0,t^*; L^2(\Omega))$ при $i \to \infty$. Кроме того, для u^* и u^*_t справедливы оценки (3.1.21), (3.1.33) и (3.1.34).

Проинтегрируем (3.1.56) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le t^*$, умножим результирующее равенство на $M(\psi(u^i) - \psi(u^*))$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и перепишем в виде

$$\eta\|M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\|^2 = -(u^i - u^*, M(\psi(u^i) - \psi(u^*))) -$$
$$-\Big(\int\limits_0^\tau k^* M(\psi(u^i) - \psi(u^*)) dt, M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\Big) +$$

$$+\Big(\int\limits_0^\tau (k^* - k^i) M\psi(u^i) dt, M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\Big).$$

Рассуждения аналогичные доказательству (3.1.41) применительно к последнему соотношению с учетом (3.1.38), (3.1.41) и (3.1.57) позволяют вывести неравенство

$$\eta\|M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\|^2 \le C_9^2\Big(\int\limits_0^{t^*} |k^* - k^i| dt\Big)^2 + \frac{\eta}{2}\|M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\|^2 +$$

$$+\frac{\max_{t\in[0,t^*]}\delta''}{\eta}\int\limits_0^\tau \|M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\|^2 dt,$$

где положительная постоянная C_9 зависит от m_2, c, C_1, C_5, C_6, η, ψ_0, T, $\|U_0\|$, $\|f\|$, $\|\psi(a)\|$ и $\mathrm{mes}\Omega$. Согласно лемме Гроноулла из него в свою очередь следует неравенство

$$\|M(\psi(u^i) - \psi(u^*))\|^2 \le \frac{2C_9^2}{\eta}\Big(\int\limits_0^{t^*} |k^* - k^i| dt\Big)^2 \exp\Big\{\frac{2t}{\eta^2}\max_{t\in[0,t^*]}\delta''\Big\},$$

которое доказывает, что $M\psi(u^i) \to M\psi(u^*)$ в $C([0,t^*]; L^2(\Omega))$ при $i \to \infty$. Причем для $M\psi(u^*)$ справедлива оценка (3.1.41). Кроме того, из уравнеия (3.1.56) вытекает, что $M(\psi(u^i))_t \to M(\psi(u^*))_t$ в $L^\infty([0,t^*]; L^2(\Omega))$ при $i \to \infty$. В силу (3.1.15), это означает, что $\psi(u^i) \to \psi(u^*)$ in $C([0,t^*]; W_2^2(\Omega))$ и $(\psi(u^i))_t \to (\psi(u^*))_t$ in $L^\infty([0,t^*]; W_2^2(\Omega))$ при $i \to \infty$.

Таким образом, существование решения задачи (3.1.1)–(3.1.3), (3.1.22) и соответственно обратной задачи (3.1.1)–(3.1.4) доказано. Единственность решения следует из сжимаемости оператора A. Действительно, пусть $\{u_1, k_1\}$ и $\{u_2, k_2\}$ – два решения задачи (3.1.1)–(3.1.3), (3.1.22). Тогда в силу (3.1.54) справедливо неравенство

$$\big| k_2 - k_1 \big|_\mu = \big| Ak_2 - Ak_1 \big|_\mu \le \left(\frac{\sqrt{2}\max_{t\in[0,T]}\|b\|}{\alpha\psi_0^{1/2}}\frac{C_8}{\mu} + q_1\right)\big| k_2, -k_1 \big|_\mu,$$

которое означает ввиду (3.1.55), что $\big| k_2 - k_1 \big|_\mu \le 0$, т. е. $k_1 = k_2$ на $[0,t^*]$. Это в свою очередь наряду с (3.1.47) для $\{u_1 - u_2, k_1 - k_2\}$ позволяет утверждать, что $u_1 - u_2 = 0$ на $[0,t^*]$. Теорема доказана.

Предположения теоремы 3.1.1 выглядят достаточно громоздкими и трудно проверяемыми. Однако следующий пример подтверждает, что существуют физически обусловленные исходные данные для задачи 3.1, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3.1.1.

Обратимся к нелинейному уравнению фильтрации в трещиноватой среде [169], которое уже обсуждалось в главе 1,

$$(u_t + \varepsilon\mu B_u(u))_t + B_u(\zeta(u)) = 0, \tag{3.1.58}$$

где u – концентрация жидкости, $B_u = -(1/\mu)\mathrm{div}(l(u)\nabla)$, $l(u)$ - проницаемость трещиноватой среды и μ – коэффициент вязкости жидкости. Как отмечалось в главе 1, для слабо сжимаемых жидкостей можно полагать $\zeta(u) = k(t)u$, где коэффициент $k(t)$ характеризует гидравлические свойства трещиноватой среды. В этом случае мы приходим к уравнению (3.1.1), в котором $M = -\Delta$, $\eta = \varepsilon\mu$, $\psi(u) = \int_0^u l(z)dz$, $f \equiv 0$. Проницаемость $l(u)$ является непрерывной невозрастающей положительной функцией давления. Причем $l(\rho) \geq l_0 > 0$ на $(-\infty, +\infty)$. Поэтому оператор M и функция $\psi(\rho)$ удовлетворяют предположениям I–III.

Поставим начальные и граничные условия для (3.1.58). Будем считать, что $\Omega \subset R^3_+ = \{x | x \in \mathbf{R}^3, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ и $t \in [0, T]$. Как известно из теории фильтрации в трещиноватых средах, начальное условие $M\psi(u) = 0$ полного насыщения пористой среды жидкостью (установившийся режим) представляет большой интерес [15], что соответствует условию (3.1.1) с $U_0 = a(0, x)$. Далее, в условиях (3.1.3) и (3.1.4) положим $\beta(t, x) = \psi^{-1}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + g_a(t))$, $\omega(t, x) = b_1(t)x_1 + b_2(t)x_2 + b_3(t)x_3 + g_b(t)$. В этом случае $a(t, x) = \psi^{-1}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + g_a(t))$, $b(t, x) = b_1(t)x_1 + b_2(t)x_2 + b_3(t)x_3 + g_b(t)$ в Ω. Предположим, что $g_a(t) > 0$, $g_b(t) > 0$, $g'_a(t) \geq 0$, $b_i(t) \geq 0$ на $[0, T]$ и постоянные $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Пусть также $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq \alpha > 0$ и $\varphi_1 \equiv 0$. Тогда выполняются предположения (3.1.16)–(3.1.18), (3.1.20). Если $\varphi_2(t) \geq \varphi_0 > 0$ и область Ω достаточно мала, то верно неравенство (3.1.19) с некоторой постоянной $0 < \Phi_0 < \varphi_0$.

3.2 Обратные задачи для стационарного уравнения фильтрации

Установившееся течение жидкости в трещиноватой среде описывается стационарным уравнением (3.1.1), в котором давление u, коэффициенты и правая часть не зависят от t. В общем случае стационарное уравнение фильтрации сжимаемой жидкости имеет вид

$$-\mathrm{d}iv(\mathbf{k}(x,u)\nabla\psi(u)) + \gamma(x,u) = f, \qquad x \in \Omega, \tag{3.2.1}$$

где $\mathbf{k}(x,u)$ – матрица функций, $\psi(u)$ и $\gamma(x,u)$ – скалярные функции, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Практический интерес к обратным задачам для таких уравнений обусловлен многочисленными приложениями и исследованиями в области теории фильтрации [10, 68, 112], а также тем фактом, что процессы фильтрации имеют тенденцию стабилизироваться со временем [203]. В частности, в предыдущей главе доказана стабилизация решения задачи 2.2 к решению обратной задачи отыскания неизвестной постоянной k в линейном эллиптическом уравнении.

Исследования по обратным задачам для эллиптических уравнений восходят к работам М.М. Лаврентьева [80–82]. Различные вопросы, связанные с коэффициентными обратными задачами для линейных и нелинейных уравнений (3.2.1), обсуждались в работах [2, 5–7, 118, 147, 172, 216, 222, 224, 275, 276, 280] (см. также ссылки в них). Особый интерес представляют задачи нахождения старших коэффициентов (3.2.1) по дополнительным граничным данным на $\partial\Omega$ или на некоторой части $\partial\Omega$. В [147, 172, 275, 276, 280] эта задача рассматривается в случае, когда $\psi(u) = u$, $\gamma(x,u) \equiv 0$, $\mathbf{k}(x,u) = k\mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, а функция k неизвестна. Предполагается, что $k = k(x)$ [147, 172, 275, 276], либо $k = k(u)$ [280]. В качестве условия переопределения используется граничное условие $k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \nu(x)$ в случае задачи Дирихле и условие $u|_{\partial\Omega} = \nu(x)$ для задачи Неймана. Пионерской в этом направлении является работа Кальдерона [172], в которой впервые обсуждалась обратная задача проводимости (отыскания неизвестного $k(x)$) с таким условием переопределения и предложено приближенное представление неизвестного коэффициента близкого к константе. В [147, 275, 276, 280] установлены достаточные условия единственности решения обратной задачи.

3.2.1 Постановка задачи и предварительные результаты

Рассмотрим в области Ω обратную задачу отыскания неизвестного постоянного коэффициента k в стационарном уравнении типа фильтрации.

Задача 3.2. При заданных функциях $\psi_j(\rho)$, $j = 1, 2$, $f(x)$, $g(x)$, $\beta(x)$, $\omega(x)$ и постоянной φ найти пару $\{u(x), k\}$, включающую функцию $u(x)$ и постоянный коэффициент k, которая удовлетворяет уравнению

$$-kM\psi_1(u) + g(x)\psi_2(u) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.2.2}$$

граничному условию Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \beta(x) \tag{3.2.3}$$

и интегральному условию переопределения

$$k\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi_1(u)}{\partial\overline{N}}\,\omega\,ds = \varphi, \tag{3.2.4}$$

где, так же как и ранее, $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ - оператор вида (3.1.5), $\partial\psi_1(u)/\partial\overline{N} \equiv (\mathcal{M}(x)\nabla\psi_1(u), \mathbf{n})_R$ – производная по конормали, $\mathbf{n}$ – вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$,

Если функция $\psi_1(\rho)$ обратима в своей области определения, то с помощью соответствующей замены неизвестной функции задачу (3.2.3)–(3.2.4) можно свести к обратной задаче для уравнения

$$-kMu + g(x)\psi(u) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.2.5}$$

с условиями

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \beta_1(x), \tag{3.2.6}$$

$$k\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\overline{N}}\,\omega\,ds = \varphi. \tag{3.2.7}$$

Для новой неизвестной функции сохранено то же обозначение u, что и в (3.2.2).

Всюду ниже будем обозначать через $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $b(x)$ решения задач

$$Ma_1 = 0, \quad x \in \Omega, \quad a_1\big|_{\partial\Omega} = \beta_1(x); \tag{3.2.8}$$

$$M\psi_1(a_2) = 0, \quad x \in \Omega, \quad a_2\big|_{\partial\Omega} = \beta(x), \tag{3.2.9}$$

и

$$Mb = 0, \quad x \in \Omega, \quad b\big|_{\partial\Omega} = \omega(x). \tag{3.2.10}$$

Нетрудно заметить, что если $\beta_1(x) = \psi_1(\beta(x))$, то $a_1 = \psi_1(a_2)$.

Будем предполагать, что для оператора M выполняются условия I и II предыдущего параграфа и функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет следующему предположению.

IV. Функция $\psi(\rho)$ – непрерывное взаимно однозначное отображение интервала $(-\infty,+\infty)$ на себя, для любых $\rho_1,\rho_2 \in (-\infty,+\infty)$,

$$(\psi(\rho_1)-\psi(\rho_2))(\rho_1-\rho_2)>0,$$

т. е. $\psi(\rho)$ – строго монотонно возрастающая функция. Отображение $\psi(v)$ из $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ $(q>0)$ деминепрерывно.

Из предположения IV следует, что существует функция $\psi^{-1}(\rho)$ обратная к $\psi(\rho)$. Причем обратная функция $\psi^{-1}(\rho)$ также непрерывна и строго монотонно возрастает на $(-\infty,+\infty)$.

В предположениях I–II задачи (3.2.8) и (3.2.10) однозначно разрешимы в $W_2^2(\Omega)$, когда $\beta,\omega \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$ и $\partial\Omega \subset C^2$.

Существование и единственность решения прямой задачи (3.2.5), (3.2.6) гарантируется следующей леммой.

Лемма 3.2.1. *Пусть выполняются предположения I–II, IV и $\partial\Omega \in C^2$. Пусть также k – заданное положительное число, $f\in L^2(\Omega)$, $\beta \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $g\in C(\overline{\Omega})$, $g\geq 0$ в $\overline{\Omega}$ и*

$$|\psi(\rho)|\leq c|\rho|^p \tag{3.2.11}$$

для любого $\rho\in(-\infty,+\infty)$, где p, $c>0$ константы, $p>0$ при $n\leq 2$ и $0<p\leq n/(n-2)$ при $n>2$. Тогда существует единственное решение u задачи (3.2.5), (3.2.6) в $W_2^2(\Omega)$.

Доказательство. Если функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (3.2.11) при $0<p\leq 1$, то задача (3.2.3),(3.2.6) сводится к случаю, рассмотренному в главе 1, и утверждение леммы немедленно следует из леммы 1.3.1.

Пусть теперь $p>1$. Умножим (3.2.5) на $\tilde u = u-a_1$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене. Получим

$$k\big\langle M\nabla\tilde u,\nabla\tilde u\big\rangle_1+\big(g(\psi(u)-\psi(a_1)),\tilde u\big)=\big(-g\psi(a_1)+f,\tilde u\big). \tag{3.2.12}$$

Оценивая правую часть (3.2.12) с помощью неравенства Фридрихса [85, Глава 2]

$$\|v\| \le c_0 \text{mes}^{1/n}\Omega\Big(\int\limits_{\Omega} \|\nabla v\|_R^2 dx\Big)^{1/2} \tag{3.2.13}$$

для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, приходим к соотношению

$$k\big\langle M\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u}\big\rangle_1 + \big(g(\psi(u) - \psi(a_1)), \tilde{u}\big) \le$$
$$\le \frac{km_1}{2}\int\limits_{\Omega} \|\nabla\tilde{u}\|_R^2 dx + \frac{c_0^2 \text{mes}^{2/n}\Omega}{2km_1}\|g\psi(a_1) - f\|^2,$$

откуда в силу предположений I, IV

$$\int\limits_{\Omega} \|\nabla\tilde{u}\|_R^2 dx \le \frac{1}{m_1}\int\limits_{\Omega} \Big\{\big(\mathcal{M}\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u}\big)_R + m\tilde{u}^2\Big\}dx \le$$
$$\le \frac{c_0^2 \text{mes}^{2/n}\Omega}{k^2 m_1^2}\|g\psi(a_1) - f\|^2 \equiv C. \tag{3.2.14}$$

Здесь положительная константа c_0 зависит только от n. Из (3.2.13) и (3.2.14) вытекает, что

$$\|\tilde{u}\| \le C^{1/2} c_0 \text{mes}^{1/n}\Omega, \tag{3.2.15}$$

$$\|u\|_1 \le \|a_1\|_1 + C^{1/2}\max\{1, c_0\text{mes}^{1/n}\Omega\} \equiv C_1. \tag{3.2.16}$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи (3.2.5), (3.2.6) перепишем уравнение (3.2.5) в следующем виде:

$$\tilde{M}\tilde{u} \equiv M\tilde{u} + g(\psi(\tilde{u} + a_1) - \psi(a_1)) = f - g\psi(a_1), \tag{3.2.17}$$

где $\tilde{u} = u - a_1$. В условиях леммы оператор $\tilde{M} : \mathring{W}{}_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega)$ деминепрерывен, коэрцитивен и монотонен. Поэтому согласно теореме 2.1 [32, Глава III] операторное уравнение (3.2.17) имеет решение $\tilde{u} \in \mathring{W}{}_2^1(\Omega)$. Следовательно, функция $u = \tilde{u} + a_1 \in W_2^1(\Omega)$ является решением задачи (3.2.5), (3.2.6). Причем это решение единственно. Действительно, пусть u_1, u_2 – два решения задачи (3.2.5), (3.2.6) из $W_2^1(\Omega)$. Тогда функции $\tilde{u}_i = u_i - a_1$, $i = 1, 2$, являются решениями операторного уравнения (3.2.17). В силу (3.1.6) и строгой монотонности опреатора $\tilde{M}$ справедливо неравенство

$$0 = \big\langle \tilde{M}\tilde{u}_1 - \tilde{M}\tilde{u}_2, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\big\rangle_1 \ge m_1\|\nabla(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)\|^2,$$

из которого вытекает, что $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ и соответственно $u_1 = u_2$.

Докажем, что $u \in W_2^2(\Omega)$. Умножим (3.2.5) на Mu скалярно в $L^2(\Omega)$. Это даст

$$k\|Mu\|^2 = -\big(g\psi(u), Mu\big) + \big(f, Mu\big).$$

Оценим правую часть этого равенства с помощью (3.2.11), (3.2.16) и неравенства Коши, учитывая тот факт, что в условиях леммы согласно теореме вложения $L^{2p}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$. В результате получим, что

$$\begin{aligned} k\|Mu\|^2 \ &\leq \ \frac{1}{2k}\Big[c\|g\|_{C(\overline{\Omega})}\|u\|^p_{L^{2p}(\Omega)} + \|f\|\Big]^2 + \frac{k}{2}\|M\psi(u)\|^2 \leq \\ &\leq \ \frac{1}{2k}\Big[c(c')^p C_1^p\|g\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|\Big]^2 + \frac{k}{2}\|Mu\|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\|Mu\| \leq \frac{1}{k}\Big[c(c')^p C_1^p\|g\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|\Big] \equiv C_2, \tag{3.2.18}$$

где c' – константа из неравенства вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L^{2p}(\Omega)$. Ввиду (3.2.14), (3.2.16) и теоремы 5.1 из [87, Глава 2] последнее неравенство влечет за собой оценку

$$\|u\|_2 \leq \kappa\big(\|Mu\| + \|u - a_1\|_1\big) + \|a_1\|_2 \leq \kappa(C_2 + C_1) + \|a_1\|_2(\kappa + 1), \tag{3.2.19}$$

где константа κ зависит от n, m_1, m_2, $\operatorname{vrai\,max}_\Omega \big|\partial m_{ij}/\partial x_l\big|$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$ и $\mathrm{mes}\Omega$. Таким образом, решение $u \in W_2^2(\Omega)$. Лемма доказана.

Для задачи (3.2.5), (3.2.6) справедлива теорема сравнения, обобщающая лемму 1.4.2 главы 1.

Лемма 3.2.2. *Пусть выполняются предположения леммы 3.2.1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $g\psi(a_1) - f \geq 0$, *то решение u задачи* (3.2.5), (3.2.6) *удовлетворяет неравенству* $u \leq a_1$ *почти всюду в* Ω.

2) *Если* $\psi(0) = 0$, $f \geq 0$ *почти всюду в* Ω *и* $\beta \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, *то* $u \geq 0$ *почти всюду в* Ω.

Доказательство. 1) В случае, когда условие (3.2.11) выполняется при $0 < p \leq 1$, утверждение леммы следует из леммы 1.4.2 главы 1.

Пусть $p > 1$. Рассмотрим функцию $w = -\tilde{u} = a_1 - u$ и перепишим уравнение (3.2.17) в виде

$$kMw + g(x)(\psi(a_1) - \psi(u)) = g\psi(a_1) - f.$$

Умножим его на $\bar{a}_1 - u$, где

$$\bar{a}_1 = \begin{cases} u & \text{если } u \le a_1, \\ a_1 & \text{если } u > a_1, \end{cases}$$

скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом левой части результирующего соотношения. Это даст

$$k\int\limits_{\Omega} \Big[\Big(\mathcal{M}\nabla\big(\bar{a}_1 - u\big), \nabla\big(\bar{a}_1 - u\big)\Big)_R + m(\bar{a}_1 - u)^2\Big]dx +$$
$$+\int\limits_{\Omega} \big(g(\psi(\bar{a}_1) - \psi(u)) - g\psi(a_1) + f\big)(\bar{a}_1 - u)dx = 0. \qquad (3.2.20)$$

В силу (3.1.6), предположения IV и неотрицательности $g\psi(a) - f$ из (3.2.20) следует, что

$$km_1\int\limits_{\Omega} \big(\nabla\bar{a}_1 - \nabla u\big)^2 dx \le 0,$$

т. е. $\nabla\big(\psi(\bar{a}_1) - \psi(u)\big) = 0$. Ввиду (3.2.5) и (3.2.8) $\bar{a}_1|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$. Поэтому $\bar{a}_1 - u = 0$ и $u \le a_1$ почти всюду в Ω.

2) Определим функцию u^- равную u при $u < 0$ и 0 при $u \ge 0$. Умножим (3.2.17) на u^- в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Получим тождество

$$k\big\langle Mu^-, u^-\big\rangle_1 + (g\psi(u^-), u^-) - (f, u^-) = 0,$$

из которого вытекает, что $u^- \equiv 0$, т. е. $u \ge 0$ почти всюду в Ω. Лемма доказана.

3.2.2 Существование и единственность решения обратной задачи

Перейдем к доказательству теорем существования и единственности решения обратной задачи (3.2.5) – (3.2.7). Для этого введем дополнительное предположение относительно функции ψ.

V. Функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (3.2.11), где p, $c > 0$ константы, $p > 0$ при $n \le 2$ и $0 < p \le n/(n-2)$ при $n > 2$. Кроме того, для любого числа $r > 0$ и функций $v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$ таких, что $\|v_i\|_{L^p(\Omega)} \le r$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\|\psi(v_1) - \psi(v_2)\| \le \alpha(r)\big\langle M(v_1 - v_2), v_1 - v_2\big\rangle_{1,M}^{1/2},$$

где постоянная $\alpha(r) > 0$ зависит от r.

Под решением обратной задачи будем понимать пару $\{u, k\}$, включающую функцию u и положительное действительное число k, которые отвечают следующим требованиям:

1) k – положительное действительное число;

2) $u \in W_2^2(\Omega)$, $\psi(u) \in L^2(\Omega)$;

3) $u(x)$ и k удовлетворяют условиям задачи (3.2.5) – (3.2.7).

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (3.2.5) – (3.2.7) в смысле такого определения формулируются в следующей теореме.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполняются предположения I, II, IV, V. Пусть также*

(i) $f \in L^2(\Omega)$, $\quad \beta_1 \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\quad \omega \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\quad g \in C(\overline{\Omega})$;

(ii) $\omega(x) \ge 0$ *и* $\beta_1(x) \ge 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$; $f(x) \ge 0$ *почти всюду в* Ω; $\psi(0) = 0$;

$$0 \le g(x) \le g_1 = \text{const} < +\infty, \qquad x \in \Omega; \tag{3.2.21}$$

$$\Psi_1 \equiv \big\langle Ma_1, b\big\rangle_{1,M} > 0; \tag{3.2.22}$$

$$F_1(x) \equiv g\psi(a_1) - f \ge 0; \tag{3.2.23}$$

$$\Phi_1 \equiv \varphi - (g\psi(a_1) - f, b) > 0. \tag{3.2.24}$$

Тогда задача (3.2.5) – (3.2.7) *имеет решение* $\{u(x), k\}$. *Причем, для* u *справедлива оценка*

$$0 \le u(x) \le a_1(x) \tag{3.2.25}$$

почти для всех $x \in \Omega$. Кроме того, если $g \equiv 0$ или выполняется неравенство

$$\Phi_1 > \bigl(g_1\alpha(r)\|b\|\Psi_1 c_0 m_1^{-1/2} mes^{1/n}\Omega\|F_1\|\bigr)^{1/2}, \tag{3.2.26}$$

где $r = \|a_1\|_{L^p(\Omega)}$, то решение задачи (3.2.5) – (3.2.7) *единственно.*

Доказательство. Если функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (3.2.11) при $0 < p \leq 1$, то задача (3.2.5) – (3.2.7) сводится к случаю, рассмотренному в [247], с помощью замены $v = \psi(u)$, при этом $v|_{\partial\Omega} = \psi(\beta_1)$.

Докажем существование решения при произвольном $p > 0$. Следуя схеме доказательства теоремы 3.1.1, сведем обратную задачу к операторному уравнению для неизвестного коэффициента k. Для этого умножим (3.2.5) на b в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям в первом члене результирующего равенства. Ввиду (3.2.5) мы получим

$$-\varphi + k\Psi_1 + \int\limits_\Omega g(x)\psi(u)b\,dx = \int\limits_\Omega fb\,dx. \tag{3.2.27}$$

В силу (3.2.22) и определения Φ (см. (3.2.24)) тождество (3.2.27) можно переписать в виде

$$k = \bigl(\Phi_1 + (g(\psi(a_1) - \psi(u)), b)\bigr)\Psi_1^{-1}. \tag{3.2.28}$$

Если $g \equiv 0$, то $k = \Phi_1/\Psi_1 > 0$ – известная постоянная. По лемме 3.2.1 задача (3.2.5),(3.2.6) с таким k имеет единственное решение $u \in W_2^2(\Omega)$ и, соответственно, утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $g \neq 0$ и выполняются условия (3.2.21)–(3.2.24). Введем оператор A, отображающий множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел в $\mathbf{R}$ по следующему правилу: для каждого $y \in \mathbf{R}^+$

$$A(y) = \bigl(\Phi_1 + (g(\psi(a_1) - \psi(u_y)), b)\bigr)\Psi_1^{-1},$$

где u_y – решение прямой задачи (3.2.5),(3.2.6) с $k = y$. Согласно лемме 3.2.1 задача (3.2.5),(3.2.6) при любом $y > 0$ имеет единственное решение $u_y \in W$ и следовательно значение $A(y)$ определено для каждого $y \in \mathbf{R}^+$. Поэтому (3.2.28) может быть записано как операторное уравнение

$$k = A(k). \tag{3.2.29}$$

Можно показать, что задача (3.2.5)–(3.2.7) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение (3.2.29). Действительно,если $\{u, k\}$ – решение задачи (3.2.5)–(3.2.7), то из построения уравнения (3.2.28) следует, что k является решением операторного уравнения (3.2.30). Пусть теперь k – это неподвижная точка оператора A, и u – решение задачи (3.2.5), (3.2.6) с этим k. Умножим (3.2.5) на b в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Подставим в первое слагаемое результирующего равенства правую часть (3.2.29). Сучетом определений Ψ_1 и Φ_1 получим, что

$$k\langle M(u-a_1), b\rangle_{1,M} + \varphi - k\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{N}}}\omega ds = 0$$

Первое слагаемое этого соотношения равно 0, в чем нетрудно убедиться, проинтегрировав в нем по частям еще раз. Таким образом, пара $\{u, k\}$ удовлетворяет условию переопределения (3.2.7).

Далее, в силу (3.2.22) и (3.2.25),

$$0 < k_0 \equiv \frac{\Phi_1}{\Psi_1} \le A(y) \le \frac{|\varphi| + |(f, b)| + g_1\|\psi(u_y)\|\|b\|}{\Psi_1} \tag{3.2.30}$$

для любого $y \in \mathbf{R}^+$. Левое неравенство в (3.2.30) позволяет получить оценку на $\|\psi(u_y)\|$. Как показано в лемме 3.2.1, для u_y справедлива оценка (3.2.16). Поэтому для каждого $y \ge k_0$

$$\|\psi(u_y)\| \le c\|u_y\|^p_{L^{2p}(\Omega)} \le c(c')^p\|u\|_1^p \le c(c')^p\tilde{C}_1^p \equiv C_3, \tag{3.2.31}$$

где

$$\tilde{C}_1 = \|a_1\| + \frac{c_0 \mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{k_0 m_1}\|F_1\| \max\{1, c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega\}.$$

Из (3.2.30) и (3.2.31) получаем, что для $y \ge k_0$ имеет место неравенство

$$k_0 \le A(y) \le \frac{|\varphi| + |(f, b)| + g_1 C_3\|b\|}{\Psi_1} \equiv K_0, \tag{3.2.32}$$

которое доказывает, что оператор A отображает отрезок $[k_0, K_0]$ в себя.

Покажем, что оператор A непрерывен на $[k_0, K_0]$. Пусть $y_1, y_2 \in [k_0, K_0]$ и u_{y1}, u_{y2} – решения задачи (3.2.5),(3.2.6) с $k = y_1$ и $k = y_2$, соответственно. Разность $\bar{w} = u_{y1} - u_{y2}$ удовлетворяет уравнению

$$y_1 M\bar{w} + g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})) = -(y_1 - y_2)Mu_{y2} \tag{3.2.33}$$

и краевому условию $\bar{w}|_{\partial\Omega} = 0$. Умножим (3.2.33) на $\bar{w}$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене результирующего уравнения. Это даст:

$$y_1\left\langle M\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_1 + (g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2}), \bar{w}) = -(y_1 - y_2)\left\langle Mu_{y2}, \bar{w}\right\rangle_1. \tag{3.2.34}$$

В силу предположения IV второе слагаемое левой части этого равенства неотрицательно. Для оценки правой части (3.2.34) умножим (3.2.5) для u_{y2} на $\bar{u} = u_{y2} - a_1$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом.

$$y_2\left\langle Mu_{y2}, \bar{u}\right\rangle_{1,M} + (g(\psi(u_{y2}) - \psi(a_1)), \bar{u}) = -y_2\left\langle Mu_{y2}, a_1\right\rangle_{1,M} - (F_1, \bar{u}).$$

Ввиду монотонности функции $\psi(\rho)$ из последнего соотношения и (3.2.25) для u_{y2} следует, что

$$\left\langle Mu_{y2}, u_{y2}\right\rangle_{1,M} \leq \left\langle Ma_1, a_1\right\rangle_{1,M} + \|F_1\|\,\|a_1\|. \tag{3.2.35}$$

Оценивая правую часть (3.2.34) с помощью (3.2.35), получаем неравенство

$$\begin{gathered}
y_1\left\langle M\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_1 \leq \frac{y_1}{2}\left\langle M(\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_1 + \frac{1}{2y_1}|y_1 - y_2|^2\left\langle Mu_{y2}, u_{y2})\right\rangle_1 \leq \\
\leq \frac{y_1}{2}\left\langle M\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_1 + \left[\left\langle Ma_1, a_1\right\rangle_{1,M} + \|F_1\|\,\|a_1\|\right]\frac{|y_1 - y_2|^2}{y_1}.
\end{gathered}$$

или

$$\left\langle M\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_1 \leq \left[\left\langle Ma_1, a_1\right\rangle_{1,M} + \|F_1\|\,\|a_1\|\right]\frac{|y_1 - y_2|^2}{k_0^2} \equiv C_4|y_2 - y_1|^2. \tag{3.2.36}$$

С другой стороны, согласно определению оператора A

$$A(y_1) - A(y_2) = -\Psi_1^{-1}\left(g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})), b\right). \tag{3.2.37}$$

Ввиду (3.2.36) и предположения V

$$\begin{gathered}
|\big(g(\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})), b\big)| \leq g_1\|\psi(u_{y1}) - \psi(u_{y2})\|\,\|b\| \leq \\
\leq g_1\alpha(r)\|b\|\left\langle M\bar{w}, \bar{w}\right\rangle_{1,M}^{1/2} \leq C_5|y_1 - y_2|,
\end{gathered} \tag{3.2.38}$$

где $r = \|a_1\|_{L^p(\Omega)}$, $C_5 = g_1\alpha(r)\|b\|C_4^{1/2}$. Из (3.2.37) и (3.2.38) вытекает неравенство

$$|A(y_1) - A(y_2)| \leq \frac{C_5}{\Psi_1}\left|y_1 - y_2\right|,$$

которое доказывает непрерывность оператора A в $[k_0, K_0]$. Так как A отображает $[k_0, K_0]$ в себя, согласно теореме Брауэра уравнение (3.2.29) имеет решение $k \in [k_0, K_0]$. Это, в свою очередь, влечет за собой существование решения $\{u(x), k\}$ задачи (3.2.5)–(3.2.7). Найденное решение удовлетворяет соотношениям (3.2.19), (3.2.25), (3.2.31), (3.2.32) и (3.2.35). Кроме того, по лемме 3.2.1 для u спрведливы оценки (3.2.16), (3.2.19) с k_0 вместо k в константах C_1 и C_2.

Докажем, что если исходные данные обратной задачи удовлетворяют условию (3.2.26), то построенное решение единственно. Пусть (u', k') и (u'', k'') – два решения задачи (3.2.5) – (3.2.7). В силу (3.2.6), $(u' - u'')|_{\partial\Omega} = 0$. Вычитая (3.2.5) для (u'', k'') из (3.2.5) для (u', k'), умножая эту разность на $U = u' - u''$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям в результирующем тождестве, приходим к равенству

$$k'\big\langle M(U), U\big\rangle_1 + (g(\psi(u') - \psi(u'')), U) = (k' - k'')\big\langle M(a_1 - u''), U\big\rangle_1. \qquad (3.2.39)$$

Для оценки правой части (3.2.39) умножим (3.2.5) для u'' на $u'' - a_1$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом слагаемом. Будем иметь

$$k''\big\langle M(u'' - a_1), u'' - a_1\big\rangle_{1,M} + (g(\psi(u'') - \psi(a_1)), u'' - a_1) = -(F_1, u'' - a_1).$$

Отсюда ввиду предположения IV, (3.2.15) заключаем, что

$$\big\langle M(u'' - a_1), u'' - a_1\big\rangle_{1,M} \le \frac{c_0^2 \mathrm{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^2 m_1}\|F_1\|^2.$$

Из этого соотношения и уравнения (3.2.39) следует неравенство

$$\big\langle M(u' - u''), u' - u''\big\rangle_1 \le \frac{c_0^2 \mathrm{mes}^{2/n}\Omega}{k_0^4 m_1}\|F_1\|^2 |k' - k''|^2. \qquad (3.2.40)$$

С другой стороны, вычитая (3.2.28) для (u'', k'') из (3.2.28) для (u', k'), получим уравнение

$$k' - k'' = Ak' - Ak'' = -\frac{(g(\psi(u') - \psi(u'')), b)}{\Psi_1}. \qquad (3.2.41)$$

Оценим правую часть (3.2.41) по модулю с помощью (3.2.30), (3.2.40). С учетом предположения V и неравенства (3.2.25) имеем:

$$|\big(g(\psi(u') - \psi(u'')), b\big)| \le g_1\alpha(r)\|b\|\big\langle M(u' - u''), u' - u''\big\rangle_{1,M}^{1/2} \le$$
$$\le g_1\alpha(r)\|b\|\frac{\Psi_1^2 c_0 \mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{\Phi_1^2 m_1^{1/2}}\|F_1\||k' - k''|, \qquad (3.2.42)$$

где $r = \|a_1\|_{L^p(\Omega)}$. Соотношения (3.2.41)–(3.2.42) приводят к неравенству

$$|k' - k''| = |Ak' - Ak''| \le g_1 \alpha(r) \|b\| \frac{\Psi_1 c_0 \mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{\Phi_1^2 m_1^{1/2}} \|F_1\| |k' - k''|,$$

которое доказывает сжимаемость оператора A в силу (3.2.26). Из него следует, что $k' - k'' = 0$ и ввиду (3.2.40) $u' - u'' = 0$ почти всюду в Ω. Теорема доказана.

Как видно из доказательства теоремы 3.2.3, при $g = 0$ утверждение теоремы остается справедливым и без условий неотрицательности f, β, ω и ограничения (3.2.23). Однако в этом случае u не удовлетворяет неравенству (3.2.25).

Полученные результаты позволяют исследовать корректность задачи 3.2. Под ее решением будем понимать пару $\{u(x), k\}$, которая отвечает следующим требованиям:

1) k – положительное действительное число;

2) $\psi_1(u) \in W_2^2(\Omega)$, $\psi_2(u) \in L^2(\Omega)$;

3) $u(x)$ и k удовлетворяют условиям задачи 3.2.

Введем предположения относительно функций $\psi_j(\rho)$, $j = 1, 2$.

VI. Функции $\psi_j(\rho)$, $j = 1, 2$, являются непрерывными взаимно однозначными отображениями интервала $(-\infty, +\infty)$ на себя и удовлетворяют следующим условиям:

1) для любых $\rho_1, \rho_2 \in (-\infty, +\infty)$,

$$(\psi_1(\rho_1) - \psi_1(\rho_2))(\psi_2(\rho_1) - \psi_2(\rho_2)) \ge 0; \tag{3.2.43}$$

2) отображение $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(v)$ из $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ $(q \ge 2)$ деминепрерывно;

3) для любого $\rho \in (-\infty, +\infty)$ справедливо неравенство

$$|\psi_1(\rho)| \ge \tilde{c} |\psi_2(\rho)|^{1/p}, \tag{3.2.44}$$

где p, $\tilde{c} > 0$ – константы, $p > 0$ при $n \le 2$ и $0 < p \le n/(n-2)$ при $n > 2$;

4) для любого числа $r > 0$ и функций $v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$, $\|v_i\|_{L^p(\Omega)} \le r$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\|\psi_2(v_1) - \psi_2(v_2)\| \le \alpha(r) \big\langle M(\psi_1(v_1) - \psi_1(v_2)), \psi_1(v_1) - \psi_1(v_2) \big\rangle_{1,M}^{1/2},$$

где постоянная $\alpha(r) > 0$ зависит от r.

Из предположения VI вытекает справедливость условий предположения V для функции $\psi(\rho) = \psi_2(\psi_1^{-1}(\rho))$. В частности, для этой функции предположение IV и неравенство (3.2.12) эквивалентны соотношениям (3.2.43) и (3.2.44).

Достаточные условия однозначной разрешимости исходной задачи 3.2 дает следующая теорема.

Теорема 3.2.4. *Пусть выполняются предположения I, II и VI. Пусть также*

(iii) $f \in L^2(\Omega)$, $\psi_1(\beta) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $g(x) \in C(\overline{\Omega})$;

(iv) $\omega(x) \geq 0$ *и* $\beta(x) \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$, $f(x) \geq 0$ *почти всюду в* Ω, *выполняется условие (3.2.22),* $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$,

$$\Psi_2 \equiv \left\langle M\psi_1(a_2), b\right\rangle_{1,M} > 0, \tag{3.2.45}$$

$$F_2(x) \equiv g\psi_2(a_2) - f \geq 0, \tag{3.2.46}$$

$$\Phi_2 \equiv \varphi - (g\psi_2(a_2) - f, b) > 0. \tag{3.2.47}$$

Тогда задача 3.2 имеет по крайней мере одно решение $(u(x), k)$. *Причем для* u *справедлива оценка*

$$0 \leq u(x) \leq a_2(x).$$

Кроме того, если $g \equiv 0$ *или выполняется неравенство*

$$\Phi_2 > \left(g_1\alpha(r_2)\|b\|\Psi_2 c_0 m_1^{-1/2} mes^{1/n}\Omega\|F_2\|\right)^{1/2}, \tag{3.2.48}$$

где $r_2 = \|\psi_1(a_2)\|_{L^p(\Omega)}$, *то решение задачи 3.2 единственно.*

Теорема 3.2.4 является следствием теоремы 3.2.3.

Обратную задачу для уравнения (3.2.5) с граничными данными (3.2.6) и условием переопределения, заданным только на части Γ границы $\partial\Omega$, т. е.

$$k\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\,\omega\, ds, = \varphi, \tag{3.2.49}$$

можно свести к задаче (3.2.5) – (3.2.7). Если функция $\omega \in W_2^{3/2}(\Gamma)$ финитна на Γ и $\operatorname{supp}\omega \subset \Gamma$, то ее можно продолжить на всю границу $\partial\Omega$, положив $\omega = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$, и рассматривать интеграл в (3.2.49) по всей границе $\partial\Omega$. В этом случае теорема 3.2.3 формулируется следующим образом.

Следствие 3.2.5. *Пусть выполняются предположения I, II, IV, V,* $f \in L^2(\Omega)$, $\beta_1 \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(x) \in W_2^{3/2}(\Gamma)$, $g(x) \in C(\overline{\Omega})$. *Пусть также* $\beta_1(x) \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$; $f \geq 0$ *почти всюду в* Ω; $\omega(x)$ *неотрицательна и финитна на* Γ, $supp\,\omega \subset \Gamma$, $\omega(x) = 0$ *on* $\partial\Omega \setminus \Gamma$ *и выполняются условия* (3.2.21)–(3.2.24). *Тогда задача* (3.2.5), (3.2.6), (3.2.49) *имеет по крайней мере одно решение* $(u(x), k)$. *Причем,* $u(x)$ *удовлетворяет неравенству* (3.2.25) *почти всюду в* Ω. *Кроме того, если* $g \equiv 0$ *или выполняется неравенство (3.2.26), то решение задачи* (3.2.5), (3.2.6), (3.2.49) *единственно.*

Аналогичное утверждение справедливо для задачи 3.2. с условием переопределения, заданным на части Γ границы $\partial\Omega$, т. е.

$$k \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \psi_1(u)}{\partial \overline{N}}\, \omega\, ds = \varphi. \tag{3.2.50}$$

Следствие 3.2.6. *Пусть выполняются предположения I, II, VI,* $f \in L^2(\Omega)$, $\psi_1(\beta) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(x) \in W_2^{3/2}(\Gamma)$, $g(x) \in C(\overline{\Omega})$. *Пусть также* $\beta(x) \geq 0$ *почти всюду на* $\partial\Omega$; $f \geq 0$ *почти всюду в* Ω; $\omega(x)$ *неотрицательна и финитна на* Γ, $supp\,\omega \subset \Gamma$, $\omega(x) = 0$ *on* $\partial\Omega \setminus \Gamma$ *и выполняются условия* (3.2.45)–(3.2.47). *Тогда задача* (3.2.5), (3.2.6), (3.2.50) *имеет по крайней мере одно решение* $(u(x), k)$. *Кроме того, если* $g \equiv 0$ *или выполняется неравенство (3.2.48), то решение задачи* (3.2.5), (3.2.6), (3.2.50) *единственно.*

Решение задачи (3.2.5)–(3.2.7) устойчиво по φ. В условиях теоремы 3.2.3, гарантирующих единственность решения обратной задачи, справедливы оценки

$$|k_1 - k_2| \leq C_6 |\varphi_1 - \varphi_2|, \qquad \|u_1 - u_2\|_2 \leq C_7 |\varphi_1 - \varphi_2| \tag{3.2.51}$$

с некоторыми положительными постоянными C_6 и C_7, где $\{u_i, k_i\}$ – решение обратной задачи (3.2.5)–(3.2.7) при $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Эти оценки следуют из сжимаемости оператора A в уравнении (3.2.29). Действительно, для k_i справедливы уравнения (3.2.30) с

$$A_i(k_i) = (\Phi_{1i} + (g(\psi(a_1) - \psi(u_i)), b)\Psi_1^{-1}, \qquad i = 1, 2,$$

где $\Phi_{1i} = \varphi_i - (g\psi(a_1) - f, b)$, и неравенства (3.2.37) с $k_0^i = \Phi_{1i}\Psi_1^{-1}$ и $K_0 = (|\varphi_i| + |(f, b)| + g_1 C_3 \|b\|)\Psi_1^{-1}$. Для определенности будем считать, что $k_0^1 \leq k_0^2$, а значит $\Phi_{11} \le \Phi_{12}$. Повторяя рассуждения, приведшие к (3.2.40), можно получить аналогичное неравенство. А именно,

$$\langle M(u_1-u_2), u_1-u_2\rangle_1 \le \frac{c_0^2 \mathrm{mes}^{2/n}\Omega}{(k_0^1)^4 m_1}\|F_1\|\,|k_1-k_2|^2. \tag{3.2.52}$$

Составим разность уравнений (3.2.30) для k_0^i и оценим разность значений операторов $A_i(k_i)$ при $i=1,2$ по модулю. Ввиду (3.2.52) и предположения V

$$|k_1-k_2| = |A_1(k_1)-A_2(k_2)| \le \Big[|\varphi_1-\varphi_2| + g_1\alpha(r)\|b\|\langle M(u_1-u_2), u_1-u_2\rangle_{1,M}^{1/2}\Big]\Psi_1^{-1} \le$$

$$\le \Big[|\varphi_1-\varphi_2| + g_1\alpha(r)\|b\|\frac{\Psi_1^2 c_0 \mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{\Phi_{11}^2 m_1^{1/2}}\|F_1\|\,|k_1-k_2|\Big]\Psi_1^{-1},$$

откуда в силу (3.2.27) для Φ_{11} следует первое неравенство (3.2.51). Далее, умножим разность уравнений (3.2.5) для $\{u_1,k_1\}$ и $\{u_2,k_2\}$ на $M(u_1-u_2)$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и запишем полученное соотношение в виде

$$k_1\|M(u_1-u_2)\|^2 = -(g(\psi(u_1)-\psi(u_2)), M(u_1-u_2)) - (k_1-k_2)(Mu_2, M(u_1-u_2)).$$

Оценим правую часть этого равенства с помощью (3.2.18) для u_2 при $k=k_2$, первого неравенства (3.2.51) и (3.2.52). С учетом предположения V получим соотношение

$$k_1\|M(u_1-u_2)\|^2 \le \frac{1}{2k_1}\Big[g_1\|\psi(u_1)-\psi(u_2)\| + |k_1-k_2|\,\|Mu_2\|\Big]^2 + \frac{k_1}{2}\|M(u_1-u_2)\|^2 \le$$

$$\le \frac{C_6^2}{2(k_0^1)^3}\Big\{g_1 c(c')^p\Big(\|a_1\| + \frac{c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{k_0^1 m_1}\|F_1\|\max\{1, c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega\}\Big)^p + \|f\| +$$

$$+ g_1\alpha(r)\frac{c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{k_0^1 m_1^{1/2}}\|F_1\|\Big\}^2|\varphi_1-\varphi_2|^2 + \frac{k_1}{2}\|M(u_1-u_2)\|^2,$$

из которого следует, что

$$\|M(u_1-u_2)\| \le \frac{C_6}{(k_0^1)^2}\Big\{g_1 c(c')^p\Big(\|a_1\| + \frac{c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{k_0^1 m_1}\|F_1\|\max\{1, c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega\}\Big)^p +$$

$$+\|f\| + g_1\alpha(r)\frac{c_0\mathrm{mes}^{1/n}\Omega}{k_0^1 m_1^{1/2}}\|F_1\|\Big\}|\varphi_1-\varphi_2| \equiv C_8|\varphi_1-\varphi_2|. \tag{3.2.53}$$

Согласно теореме 5.1 из [87, Глава 2] для разности u_1-u_2 имеет место неравенство

$$\|u_1-u_2\|_2 \le \kappa(\|M(u_1-u_2)\| + \|u_1-u_2\|_1) \le \kappa(\|M(u_1-u_2)\| +$$

$$+m_1^{-1/2}\langle M(u_1-u_2),u_1-u_2\rangle_1),$$

которое вместе с (3.2.52), (3.2.53) и первым неравенством (3.2.51) влечет справедливость второй оценки (3.2.51) с $C_7=\kappa(C_8+c_0C_6(k_0^1)^{-2}m_1^{-1}\|F_1\|\mathrm{mes}^{1/n}\Omega)$.

Как отмечалось выше, интерес к задачам идентификации коэффициентов в эллиптических уравнениях, в том числе уравнениях типа (3.2.2) или (3.2.5), объясняется их широкими приложениями. Рассмотрим некоторые примеры таких задач в случае изотропных сред.

Установившийся процесс фильтрации изотермального газа описывается уравнением [16]

$$-\frac{k}{m\mu_1}\mathrm{div}(|u|^{p-2}\nabla u)=0, \tag{3.2.54}$$

где $p=3$, u – давление газа в порах, μ_1 – вязкость газа, k и m– проницаемость и пористость (относительный объем пустот или пор) породы соответственно. В этом случае $\psi_1(\rho)=(p-1)^{-1}|\rho|^{p-2}\rho$, $M=-(m\mu_1)^{-1}\Delta$ (Δ – оператор Лапласа) и $g\equiv 0$. При этом можно считать, что $\psi_2(\rho)=\rho$. Уравнение (3.2.54) удовлетворяет предположениям I, II, VI.

Рассмотрим обратную задачу 3.2 идентификации коэффициента k в области $\Omega\subset R^3_+=\{x|x\in\mathbf{R}^3,x_i\geq 0,i=1,2,3\}$. В условиях (3.2.3) и (3.2.4) положим $\beta(x)=\psi_1^{-1}(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4)$ и $\omega(x)=\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3+\omega_4$. Предположим, что постоянные $d_4>0$, $\omega_4>0$, $d_i\geq 0$ и $\omega_i\geq 0$, $i=1,2,3$. Пусть также $d_1\omega_1+d_2\omega_2+d_3\omega_3\geq\alpha>0$. Тогда решения задач (3.2.9) и (3.2.10) имеют вид $a_2(x)=\psi_1^{-1}(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4)$ и $b(x)=\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3+\omega_4$ во всей области Ω, и выполняются предположения (3.2.46)–(3.2.48). Если $\varphi>0$, то верно неравенство (3.2.47). Таким образом, согласно теореме 3.2.4 задача 3.2 для уравнения (3.2.54) имеет единственное решение.

В [158] представлена математическая модель неравновесных эффектов в одновременном течении несмешивающихся жидкостей в пористой среде. В случае установившегося течения базовое уравнение имеет вид

$$k\Delta\psi_1(u)=0, \tag{3.2.55}$$

где u – насыщенность (концентрация) воды, коэффициент k зависит от проницаемости пористой среды и поверхностного натяжения воды,

$$\psi_1(\rho) = -\int\limits_0^\rho \frac{f_1(s)f_2(s)}{f_1(s)+f_2(s)} J'(s)ds. \tag{3.2.56}$$

Безразмерные неотрицательные величины f_1 и f_2 называются относительными проницаемостями и удовлетворяют неравенству $0 \le f_i \le 1$. Функция Левретта J связана с капиллярным давлением. Для удобства можно считать, что концентрация воды $0 \le u \le 1$. Функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ являются гладкими на $[0, 1]$, причем $f_1(s)$ монотонно неубывающая, а $f_2(s)$ монотонно невозрастающая функция. Причем $f_1(s) = 0$, $f_2(s) = 1$ при $s \le 0$ и $f_i(s)$ постоянны при $s \ge 1$, $i = 1, 2$. $J(s)$ – неотрицательная и монотонно убывающая функция переменной s. В частности, относительные проницаемости и функцию Левретта можно аппроксимировать на (0,1) зависимостями вида

$$f_1(s) = c_1 s^p, \qquad f_2(s) = c_2(1-u)^\gamma, \qquad J(s) = c_3(1-u)^{r_1}u^{-r_2}$$

с положительными показателями p, γ, r_1, r_2 и константами $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

После достижения предельной концентрации, т. е. при $u \ge 1$ относительные проницаемости f_i и капиллярное давление становятся постоянными. Поэтому $\psi(u) = Ku$ при $u \ge 1$, где K - постоянная равная значению подинтегрального выражения (3.2.56) при $s = 1$. Таким образом, функция $\psi_1(\rho)$ непрерывна и строго возрастает на $[0, +\infty)$. При неотрицательных граничных данных поведение $\psi_1(\rho)$ при $\rho < 0$ не существенно, так как по теореме сравнения $u \ge 0$ почти всюду в области Ω. Можно считать, что $\psi_1(\rho) = \rho$ при $\rho < 0$. В этом случае оператор M и функция $\psi_1(\rho)$ отвечают предположениям I, II и VI. Таким образом, если выполняются условия (i) и (ii) теоремы 3.2.4, то задача 3.2 для уравнения (3.2.55) имеет единственное решение $(u(x), k)$.

Другая область применения уравнений типа (3.2.2) или (3.2.5) связана с моделированием электрических полей полупроводников. В отсутствии внешнего электрического поля потенциал собственного поля полупроводника в стационарном случае моделируется уравнением [123]

$$-k\Delta(u + \frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{\varepsilon^2}{6}u^3) + \lambda|u|^q u = 0, \tag{3.2.57}$$

где параметры k и λ зависят от электрической восприимчивости полупроводника, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $q \ge 0$. Оператор $M = -\Delta$ и функции $\psi_1(\rho) =$

$\rho + \frac{\varepsilon}{2}\rho^2 + \frac{\varepsilon^2}{6}\rho^2$ и $\psi_2(\rho) = |\rho|^q\rho$ удовлетворяют предположениям I, II и VI. При выполнении остальных предположений теоремы 3.2.4 обратная задача для (3.2.57) с условиями (3.2.3), (3.2.4) имеет единственное решение.

Примером модели анизотропной диссипации в полупроводнике является стационарное нелинейное уравнение [123]

$$-k(\alpha_1\Delta_2 u + \alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}) + \lambda|u|^q u = 0,$$

где Δ_2 – оператор Лапласа по переменным x_1 и x_2, параметры k и λ зависят от электрической восприимчивости, а постоянные $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, определяются тензором электрической поляризуемости полупроводника, $q \geq 0$. В данном случае оператор $M = -(\alpha_1\Delta_2 + \alpha_2\partial^2/\partial x_3^2)$ и функция $\psi(\rho) = |u|^q u$ при $q \leq 2$ удовлетворяют предположениям I, II, IV, V. Если выполняются остальные предположения теоремы 3.2.3, то обратная задача для данного уравнения с условиями (3.2.3), (3.2.7) имеет единственное решение.

Глава 4. Нелокальные краевые задачи для эволюционных систем

В данной главе методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений параболического и соболевского типа. (В литературе принято использовать термин "нагруженное уравнение"для уравнений с частными производными, содержащих следы или значения некоторых функционалов от решения [102].) В отличии от задач для систем уравнений, изученных в первой главе, здесь речь пойдет о задачах, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Рассматриваются два варианта условий: либо заданы следы одной из функций в начальный и финальный моменты времени, либо нелокальные условия в виде интеграла по времени и комбинации следов в начальный и финальный моменты. Устанавливаются достаточные условия глобальной однозначной разрешимости этих задач.

Изучение таких задач для систем нагруженных уравнений параболического типа с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций представляют как математический, так и практический интерес. Они возникают при моделировании процесса массопереноса (диффузии) в сплошных средах со сложным химическим составом, например, при электролитическом рафинировании цветных металлов. Концентрация основного металла и кислотного остатка в электролизной ванне, как правило, известна и на начальной, и на конечной стадии процесса, тогда как концентрация примесей, в частности, состава шлама благородных металлов, не поддается определению с приемлемой точностью [35].

Представляют интерес подобные задачи и для систем нагруженных уравнений соболевского типа, так как наряду с обширными физическими приложениями такие уравнения и системы используются в качестве различных регуляризаций соответствующих параболических уравнений и систем [21, 23, 104, 157, 165,311], а также уравнений смешанного типа [110,278]. Исследование начально-краевых задач для систем уравнений соболевского типа восходит к работе Гальперна [33]. Им посвящен и ряд более поздних работ (см. статью [36] и ссылки в ней).

Среди работ, которые связаны с вопросами, обсуждаемыми в данной главе, отметим также статьи [39–41, 307, 308, 317], где рассматривались нагруженные уравнения параболического и соболевского типа и задачи с нелокальными краевыми условиями.

4.1 Нелокальные задачи для систем параболических уравнений

Первым объектом исследования являются нелокальные задачи для параболических систем, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Такие задачи можно рассматривать как обратные задачи отыскания, например, неизвестной концентрации примесей в начальный момент по дополнительной информации о содержании основного металла на конечной стадии процесса. Аналогичные нелокальные задачи для систем нагруженных параболических уравнений возникают при решении обратных задач отыскания неизвестных коэффициентов в дифференциальных уравнениях [60, 64].

4.1.1 Постановка задач. Предварительные замечания

Задачи решаются в цилиндре $Q_T = (0,T)\times\Omega$, где $\Omega \in \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$, T – произвольное положительное действительное число. Как и в предыдущих главах, замыкание области Ω будем обозначать через $\overline{\Omega}$ и боковую поверхность цилиндра Q_T через $S_T = (0,T)\times\partial\Omega$. Также будем использовать обозначения скалярных произведений, отношений двойственности и норм в пространстве $\mathbf{R}^n$ и функциональных пространствах, введенные в §2 главы 1. Кроме того, обозначим через $H^q(\overline{\Omega})$ гельдеровское пространство функций, зависящих от переменных $x \in \overline{\Omega}$, $q > 0$.

Пусть $M, L, B : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ – линейные дифференциальные операторы вида

$$\begin{gathered} M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + (\mathbf{m},\nabla)_R + m(x)I, \\ L = -\mathrm{div}(\mathcal{L}(x)\nabla) + (\mathbf{l},\nabla)_R + l(x)I, \\ B = -\mathrm{div}(\mathcal{B}(x)\nabla) + (\mathbf{b},\nabla)_R + b(x)I, \end{gathered} \tag{4.1.1}$$

соответственно, где $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$, $\mathcal{L}(x) \equiv (l_{ij}(x))$ и $\mathcal{B}(x) \equiv (b_{ij}(x))$ – матрицы функций, $i,j = 1,2,\ldots,n$; $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x)$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x)$, и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$ – векторные функции; m, l, b – скалярные функции; I – тождественный оператор.

Рассмотрим две задачи для систем двух параболических уравнений.

Задача 4.1. При заданных функциях $g_k(x,p)$, $f_k(t,x)$, $\beta_k(t,x)$, $k=1,2$, $\gamma(x,p)$, $u_0(x)$ и $u_T(x)$ найти пару функций $\{u_1(t,x),u_2(t,x)\}$, удовлетворяющую системе уравнений

$$u_{1t}+Mu_1=g_1(x,U_1)+g_2(x,U_1)AU_2+f_1(t,x), \tag{4.1.2}$$

$$u_{2t}+Lu_2=Bu_1+\gamma(x,u_1)+f_2(t,x), \qquad (t,x)\in Q_T, \tag{4.1.3}$$

и краевым условиям

$$u_1|_{t=0}=u_0(x), \quad u_1|_{t=T}=u_T(x), \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{4.1.4}$$

$$u_i|_{S_T}=\beta_i(t,x), \quad i=1,2. \tag{4.1.5}$$

Здесь $U_i(x)\equiv\int_0^T u_i dt$, $i=1,2$. A – линейный оператор. Предполагается, что A – это либо тождественный оператор, т. е. $A=I$, либо дифференциальный оператор вида

$$A=-\mathrm{div}(\mathcal{A}(x)\nabla)+(\mathbf{a},\nabla)_R+a(x)I, \tag{4.1.6}$$

где $\mathcal{A}(x)\equiv(a_{ij}(x))$ – матрица функций, $i,j=1,2,\ldots,n$; $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x)$ – векторная функция; a – скалярная функция.

Задача 4.2. При заданных функциях $g_i(x,p)$, $f_i(t,x)$, $\beta_i(t,x)$, $i=1,2$, $a(x,p)$, $\mu(x)$ и $\varphi(x)$ найти пару функций $\{u_1(t,x),u_2(t,x)\}$, отвечающую системе уравнений

$$u_{1t}+Mu_1=Bu_2+f_1(t,x), \tag{4.1.7}$$

$$u_{2t}+Lu_2=f_2(t,x), \qquad (t,x)\in Q_T, \tag{4.1.8}$$

условиям

$$u_1|_{t=T}-u_1|_{t=0}=\mu(x), \quad U_1(x)=\varphi(x), \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{4.1.9}$$

и граничным данным (4.1.5).

В задаче 4.2 соотношения (4.1.9) являются нелокальными условиями, которые связывают значения функции u_1 в различные моменты времени. Корректность задач с подобными краевыми условиями изучалась в работах [101, 140, 141, 200].

Введем следующее предположение относительно операторов M, L.

I$'$. M и L – сильно эллиптические операторы, т. е. существуют положительные постоянные m_k и l_k, $k=1,2$ такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$m_1\|v\|_1^2 \le \big\langle Mv, v\big\rangle_1 \le m_2\|v\|_1^2, \tag{4.1.10}$$

$$l_1\|v\|_1^2 \le \big\langle Lv, v\big\rangle_1 \le l_2\|v\|_1^2. \tag{4.1.11}$$

Наряду с задачами 4.1 и 4.2 рассмотрим две вспомогательные задачи для линейного параболического уравнения

$$u_t + Lu = F(t,x) \tag{4.1.12}$$

с оператором L вида (4.1.1), граничным условием

$$u|_{S_T} = \beta(t,x). \tag{4.1.13}$$

и нелокальными данными

$$u|_{t=T} - u|_{t=0} = \mu(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.1.14}$$

или

$$\int\limits_0^T u(t)dt = \varphi(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.1.15}$$

Существование и единственность слабого обобщенного решения задач (4.1.12)–(4.1.14) и (4.1.12), (4.1.13), (4.1.15) гарантируется следующими теоремами.

Лемма 4.1.1. *Пусть выполняется предположение I для оператора L. Пусть также $F \in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, $\mu \in L_2(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $\beta_t \in L^2(S_T)$. Тогда задача (4.1.12)–(4.1.14) имеет единственное слабое решение u в классе $Y \equiv L^2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, которое непрерывно зависит от F, μ и β, т. е.*

$$\|u\|_Y \le C\Big\{\|\mu\| + \|\beta\|_{L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_t\|_{L^2(S_T)} + \|F\|_{L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big\},$$

где положительная константа C зависит от n, T, l_1, l_2 и $\mathrm{mes}\Omega$.

Лемма 4.1.2. *Пусть выполняется предположение I для оператора L, $l_{ij}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$, $i,j = 1,2,\cdots,n$; $\boldsymbol{l} \in (L^\infty(\Omega))^n$, $l \in L^\infty(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^2$. Пусть также $F \in L^2(Q_T)$, $\varphi \in W_2^2(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(0,T;W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\beta_t \in L^2(S_T)$. Тогда* *задача (4.1.12)–(4.1.13),(4.1.15) имеет единственное слабое решение* $u \in Y$, *которое непрерывно зависит от* F, μ *и* β, *т. е.*

$$\|u\|_Y \leq \tilde{C}\Big\{\|L\varphi\| + \|\beta\|_{L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_t\|_{L^2(S_T)} + \|F\|_{L^2(Q_T)}\Big\},$$

где положительная константа $\tilde{C}$ *зависит от* n, T, l_1, l_2 *и* $\mathrm{mes}\Omega$.

Леммы 4.1.1 и 4.1.2 сводятся к специальным случаям теорем 1 и 2 в [141] заменой функции u новой функцией $w+h$ в (4.1.12), (4.1.13), (4.1.15), где $Mh = 0$ и $h|_{S_T} = \beta$.

4.1.2 Задача с начальным и финальным условиями для u_1

Рассмотрим сначала задачу 4.1 в случае $A = I$. Введем следующее предположение относительно гладкости коэффициентов операторов M, L и B.

II$'$. $m_{ij}(x) \in H^{r+1}(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^3(\Omega)$, $l_{ij}(x), b_{ij}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$, $i,j = 1,2,\cdots,n$, $0 < r < 1$; $\mathbf{m} \in (H^r(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^2(\Omega)))^n$, $m(x) \in H^r(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^2(\Omega)$; $\mathbf{l}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$, $l, b \in L^\infty(\Omega)$.

Под решением задачи 4.1 будем понимать пару функций $\{u_1, u_2\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $\{u_1,u_2\} \in V = \{\{v_1,v_2\} | v_1 \in C([0,T]; W_2^4(\Omega))$, $v_{1t} \in L^2(0,T; W_2^4(\Omega))$, $v_2 \in Y$, $v_{2t} \in L^2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))\}$;

2) пара функций $\{u_1,u_2\}$ удовлетворяет соотношениям (4.1.2)–(4.1.5).

Теорема 4.1.3. *Пусть выполняются предположения I$'$, II$'$ и* $\partial\Omega \in C^5$. *Предположим также, что*

(i) $f_1 \in C^r([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega}))$, $f_{1t} \in C([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $f_{1tt} \in L^2(Q_T)$, $f_2 \in L^2(Q_T)$, $u_0, u_T \in H^{r+2}(\overline{\Omega}) \cap W_2^5(\Omega)$, $\beta_1 \in C([0,T]; H^{r+2}(\partial\Omega) \cap W_2^{7/2}(\partial\Omega))$, $\beta_{1t} \in C^r([0,T]; H^r(\partial\Omega)) \cap L^2(0,T; W_2^{7/2}(\partial\Omega))$, $\beta_{1tt}, \beta_{1ttt} \in L^2(0,T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\beta_2, \beta_{2t} \in L^2(0,T; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $0 < r < 1$;

(ii) *если* $n \leq 6$, *то функции* $g_k(x,p)$, $k = 1,2$, *дважды непрерывно дифференцируемы в* $\overline{\Omega} \times (-\infty,+\infty)$; *если* $n > 6$, *то* $g_1(x,p) = c(x)p$, *где* $c(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *и* $g_2(x,p) = g_2(x) \in C^2(\overline{\Omega})$; *функция* $\gamma(x,p)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega} \times (-\infty,+\infty)$;

существует постоянная $\nu > 0$ *и неотрицательная непрерывная функция* $q_1(s_1, s_2)$ $((s_1, s_2) \in \mathbf{R}^2)$ *такие, что* $|g_2(x, p)| \geq \nu$ *в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ *и*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L_2(Q_T)} \leq q_1(\|v\|_{C([0,T];W_2^4(\Omega))}, \|v_t\|_{L^2([0,T];W_2^4(\Omega))}) \tag{4.1.16}$$

для любого $v \in C([0,T]; W_2^4(\Omega))$ *с* $v_t \in L^2([0,T]; W_2^4(\Omega))$.

Тогда задача 4.1 имеет решение $\{u_1, u_2\} \in V$*, это решение единственно и* $u_{1tt} \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$.

Доказательство. Существование решения задачи 4.1 докажем в два этапа. На первом этапе установим существование и единственность решения задачи (4.1.2),(4.1.4),(4.1.5), как обратной задачи восстановления неизвестной функции u_1 и источника U_2. Второй этап заключается в решении задачи для уравнения (4.1.3) относительно u_2 с граничными данными (4.1.5) при условии, что u_1 и U_2 известны.

Рассмотрим задачу (4.1.2),(4.1.4),(4.1.5). Проинтегрируем (4.1.2) по t на $[0, T]$ и разделим результат на T. Ввиду (4.1.4) это даст

$$\delta u_1 + M\bar{u}_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)U_2 + \bar{f}_1, \tag{4.1.17}$$

где $\delta u_1 = T^{-1}(u_T(x) - u_0(x))$ и $\bar{v} = T^{-1}\int_0^T v\,dt$ для каждого $v \in L^1(0, T)$. Вычитая (4.1.17) из (4.1.2) получим, что

$$\tilde{u}_{1t} + M\tilde{u}_1 = f_1 - \bar{f}_1 + \delta u_1, \qquad \tilde{u}_1 = u_1 - \bar{u}_1.$$

Введем функцию h_1 как решение задачи $Mh_1 = 0$, $h_1|_{\partial\Omega} = \beta_1$ и перепишем последнее равенство в терминах новой неизвестной функции $w = \tilde{u}_1 - h_1 + \bar{h}_1$.

$$w_t + Mw = f_1 - \bar{f}_1 + \delta u_1 - h_{1t} \equiv F_1(t, x). \tag{4.1.18}$$

Из (4.1.4) и (4.1.5) следует, что

$$w|_{t=T} - w|_{t=0} = T\delta u_1 - h_1(T, x) + h_1(0, x) \equiv w_T(x), \tag{4.1.19}$$

$$w|_{S_T} = 0. \tag{4.1.20}$$

Согласно лемме 4.1.1 задача (4.1.18)–(4.1.20) имеет единственное обобщенное решение $w \in Y$ и

$$\|w\|_Y \leq C\Big\{\|\delta u_1\| + \|F_1\|_{L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big\}.$$

Докажем, что в условиях теоремы $w \in C(0,T;W_2^4(\Omega))$. Для этого рассмотрим итерационную схему

$$w_t^s + Mw^s = F_1(t,x), \tag{4.1.21}$$

$$w^s|_{t=0} = w^{s-1}|_{t=T} - w_T(x), \tag{4.1.22}$$

$$w^s|_{S_T} = 0, \quad s = 1,2,...; \qquad w^0 = 0. \tag{4.1.23}$$

По теореме 5.2 [86, Глава IV], $w^s \in C^r([0,T];H^{r+2}(\overline{\Omega}))$ и $w_t^s \in C^r([0,T];H^r(\overline{\Omega}))$. Вычитая (4.1.21) для w^s из того же уравнения для w^{s+1}, приходим к равенству

$$w_t^{s+1} - w_t^s + Mw^{s+1} - Mw^s = 0. \tag{4.1.24}$$

Умножим (4.1.24) на $M(w^{s+1}-w^s)$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене результирующего уравнения. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\langle w^{s+1}-w^s, M(w^{s+1}-w^s)\big\rangle_1 + \|M(w^{s+1}-w^s)\|^2 = 0.$$

Умножая это уравнение на $e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$, получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[e^{\alpha t}\big\langle w^{s+1}-w^s, M(w^{s+1}-w^s)\big\rangle_1\Big] + e^{\alpha t}\|M(w^{s+1}-w^s)\|^2 -$$

$$-\alpha e^{\alpha t}\big\langle w^{s+1}-w^s, M(w^{s+1}-w^s)\big\rangle_1 = 0. \tag{4.1.25}$$

В предположениях относительно оператора M для любого $v \in W_2^2(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ справедливы неравенства

$$m_3\|v\|_2 \le \|Mv\| \le m_4\|v\|_2. \tag{4.1.26}$$

с некоторыми постоянными $m_3 > 0$ и $m_4 > 0$. Следовательно,

$$\|M(w^{s+1}-w^s)\|^2 - \alpha\big\langle w^{s+1}-w^s, M(w^{s+1}-w^s)\big\rangle_1$$

$$\ge (m_3^2 - \alpha m_2)\|w^{s+1}-w^s\|_2^2. \tag{4.1.27}$$

Выбирая α из условия $\alpha < m_3^2/m_2$ и интегрируя (4.1.25) по t от 0 до τ, $0 < \tau \le T$, в силу (4.1.27) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\big\langle w^{s+1}-w^s, M(w^{s+1}-w^s)\big\rangle_1 + (m_3^2-\alpha m_2)\int\limits_0^\tau \|w^{s+1}-w^s\|_2^2\, e^{-\alpha(\tau-t)}\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2}e^{-\alpha\tau}\big\langle w^s - w^{s-1}, M(w^s - w^{s-1})\big\rangle_1\big|_{t=T},$$

из которого вытекает, что

$$\big\langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s)\big\rangle_1\big|_{\tau=T} \leq e^{-\alpha T}\big\langle w^s - w^{s-1}, M(w^s - w^{s-1})\big\rangle_1\big|_{t=T} \leq$$

$$\leq e^{-\alpha T(s-1)}\big\langle w^1, Mw^1\big\rangle_1\big|_{t=T} \leq e^{-\alpha Ts}\big\langle w_T, Mw_T\big\rangle_1$$

и

$$\int\limits_0^T \|w^{s+1} - w^s\|_2^2\,dt \leq m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}e^{-\alpha T(s-1)}\big\|w_T\big\|_1^2. \tag{4.1.28}$$

для каждого $s = 1, 2, \ldots$. Ввиду (4.1.24), (4.1.26) и (4.1.28)

$$\int\limits_0^T \|w_t^{s+1} - w_t^s\|^2\,dt \leq m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}e^{-\alpha T(s-1)}\big\|w_T\big\|_1^2, \tag{4.1.29}$$

$s = 1, 2, \ldots$.

Неравенства (4.1.28), (4.1.29) позволяют получить равномерные оценки на w^s и w_t^s. Заметим, что для w^1справедливо неравенство [86, Глава III]

$$\|w^1\|_1^2 + \int\limits_0^t \Big\{\|w^1\|_2^2 + \|w_t^1\|^2\Big\}dt \leq C_1 e^{C_2 t}(t+1)\Big[\|w_T\|_1^2 + \int\limits_0^t \|F_1\|^2 dt\Big],$$

где положительные постоянные C_1, C_2 зависят от n, m_2, m_4 и $\partial\Omega$. Тогда для каждого $s \geq 2$

$$\Big\{\int\limits_0^T \|w^s\|_2^2 dt\Big\}^{1/2} \leq \sum_{i=0}^{s-1}\Big[\int\limits_0^T \|w^{s-i} - w^{s-i-1}\|_2^2 dt\Big]^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big[\frac{m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2}\Big[\|w_T\|_1 + \|F_1\|_{L^2(Q_T)}\Big]. \tag{4.1.30}$$

Аналогичным образом можно получить оценку

$$\Big\{\int\limits_0^T \|w_t^s\|^2 dt\Big\}^{1/2} \leq \sum_{i=0}^{s-1}\Big[\int\limits_0^T \|w_t^{s-i} - w_t^{s-i-1}\|^2 dt\Big]^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big[\frac{m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2}\Big[\|w_T\|_1 + \|F_1\|_{L^2(Q_T)}\Big]. \tag{4.1.31}$$

В условиях теоремы $Mw^s \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega)\cap H^r(\overline{\Omega}))$ (см. [138, Глава 10]) и в силу (4.1.21) $w_t^s \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Следовательно, существуют следы $w^s(0,x), w^s(T,x)$ в классе $W_2^2(\Omega)$, и уравнение (4.1.21) справедливо при всех $(t,x)\in \overline{Q}_T$. Подействуем оператором M на (4.1.21) и (4.1.22). Перепишем результирующие равенства, вводя новую функцию $W^s = Mw^s - F_1(t,x)$. Это даст

$$W_t^s + MW^s = -F_{1t}, \tag{4.1.32}$$

$$W^s|_{t=0} = W^{s-1}|_{t=T} - Mw_T + T\delta F_1, \tag{4.1.33}$$

где $\delta F_1 = T^{-1}(F_1(T,x) - F_1(0,x))$. Ввиду (4.1.21), (4.1.23)

$$W^s|_{S_T} = 0. \tag{4.1.34}$$

Задача (4.1.32)–(4.1.34) имеет единственное решение $W^s \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Повторяя рассуждения, приведшие к (4.1.28) и (4.1.29), получаем оценки

$$\int\limits_0^T \|W^{s+1} - W^s\|_2^2\,dt \le m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}e^{-\alpha T(s-1)}\big\|Mw_T - T\delta F_1\big\|_1^2, \tag{4.1.35}$$

$$\int\limits_0^T \|W_t^{s+1} - W_t^s\|^2\,dt \le m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}e^{-\alpha T(s-1)}\Big\|Mw_T - T\delta F_1\Big\|_1^2 \tag{4.1.36}$$

справедливые при каждом $s = 1,2,\ldots.$

Далее, поскольку $w_t^s \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$, в условиях теоремы из уравнения (4.1.21) вытекает, что существует вторая производная $w_{tt}^s \in L^2(Q_T)$ и следы $w_t^s(0,x)$ и $w_t^s(T,x)$ в $L^2(S_T)$. Дифференцируя уравнение (4.1.21) по t и выражая $w_t^s(0,x)$ из (4.1.21) и (4.1.22), приходим к задаче

$$w_{tt}^s + Mw_t^s = F_{1t}(t,x),$$

$$w_t^s|_{t=0} = -Mw^{s-1}|_{t=T} - Mw_T(x) + F_1|_{t=0}, \qquad w^s|_{S_T} = 0, \quad s = 1,2,\ldots;$$

аналогичной (4.1.21) – (4.1.23). Согласно [138, Глава 10] эта задача имеет единственное решение, причем $w_t^s \in L^2(0,T;W_2^4(\Omega))$ и $w_{tt}^s \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Последнее означает, что на полученное уравнение можно подействовать оператором M. Это равносильно дифференцированию (4.1.32) по t. Имеем:

$$W_{tt}^s + MW_t^s = F_{1tt}.$$

Ввиду (4.1.32),

$$W_t^s|_{t=0} = W_t^{s-1}|_{t=T} + W_0(x),$$

где $W_0(x) \equiv M^2 w_T - T\delta(F_{1t} + MF_1)$. Из (4.1.34) вытекает условие

$$W_t^s|_{S_T} = 0.$$

Проводя рассуждения аналогичные доказательству (4.1.28) и (4.1.29), можно показать, что

$$\int\limits_0^T \|W_t^{s+1} - W_t^s\|_2^2\, dt \le m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T(s-1)} \big\|W_0\big\|_1^2, \tag{4.1.37}$$

$$\int\limits_0^T \|W_{tt}^{s+1} - W_{tt}^s\|^2\, dt \le m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T(s-1)} \big\|W_0\big\|_1^2 \tag{4.1.38}$$

при каждом $s = 1, 2, \ldots.$

Теперь мы можем получить равномерные оценки на W^s и W_t^s с помощью (4.1.35)–(4.1.38). Согласно [86, Глава III], для W^1 и W_t^1 имеют место неравенства

$$\|W^1\|_1^2 + \int\limits_0^t \Big\{\|W^1\|_2^2 + \|W_t^1\|^2\Big\} dt \le C_1 e^{C_2 t}(t+1)\Big[\|T\delta F_1 - Mw_T\|_1^2 + \int\limits_0^t \|F_{1t}\|^2 dt\Big],$$

$$\|W_t^1\|_1^2 + \int\limits_0^t \Big\{\|W_t^1\|_2^2 + \|W_{tt}^1\|^2\Big\} dt \le C_1 e^{C_2 t}(t+1)\Big[\|W_0\|_1^2 + \int\limits_0^t \|F_{1tt}\|^2 dt\Big],$$

$t \in [0, T]$. Тогда в силу (4.1.35) для каждого $s \ge 2$

$$\Big\{\int\limits_0^T \|W^s\|_2^2 dt\Big\}^{1/2} \le \sum_{i=0}^{s-1} \Big[\int\limits_0^T \|W^{i+1} - W^i\|_2^2 dt\Big]^{1/2} \le \Big[\frac{m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + $$
$$ + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2} \Big[\|T\delta F_1 - Mw_T\|_1 + \|F_{1t}\|_{L^2(Q_T)}\Big]. \tag{4.1.39}$$

Аналогичным образом, используя (4.1.36)–(4.1.38), получаем оценки

$$\Big\{\int\limits_0^T \|W_t^s\|^2 dt\Big\}^{1/2} \le \sum_{i=0}^{s-1} \Big[\int\limits_0^T \|W_t^{s-i} - W_t^{s-i-1}\|^2 dt\Big]^{1/2} \le$$
$$\le \Big[\frac{m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2} \times$$
$$\times \Big[\|T\delta F_1 - Mw_T\|_1 + \|F_{1t}\|_{L^2(Q_T)}\Big], \tag{4.1.40}$$

$$\left\{ \int_0^T \|W_t^s\|_2^2 dt \right\}^{1/2} \leq \sum_{i=0}^{s-1} \left[\int_0^T \|W_t^{s-i} - W_t^{s-i-1}\|_2^2 dt \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\frac{m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1) \right]^{1/2} \left[\|W_0\|_1 + \|F_{1tt}\|_{L^2(Q_T)} \right], \quad (4.1.41)$$

$$\left\{ \int_0^T \|W_{tt}^s\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \sum_{i=0}^{s-1} \left[\int_0^T \|W_{tt}^{s-i} - W_{tt}^{s-i-1}\|^2 dt \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\frac{m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1) \right]^{1/2} \left[\|W_0\|_1 + \|F_{1tt}\|_{L^2(Q_T)} \right]. \quad (4.1.42)$$

Из (4.1.28), (4.1.29), (4.1.35)–(4.1.38) вытекает, что последовательность w^s имеет предел $w \in L^2(0,T;W_2^4(\Omega))$, w_t^s сходится к w_t в $L^2(0,T;W_2^4(\Omega))$ и $w_{tt}^s \to w_{tt}$ в $L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$ при $s \to +\infty$. Тогда $w^s \to w$ в $C([0,T];W_2^4(\Omega))$ при $s \to +\infty$, что влечет за собой существование следов $w^s(0,x), w^s(T,x) \in W_2^4(\Omega)$ и $w^s(0,x) \to w(0,x)$, $w^s(T,x) \to w(T,x)$ в $W_2^4(\Omega)$ при $s \to +\infty$. Переходя к пределу в (4.1.21)–(4.1.22), заключаем, что функция w удовлетворяет уравнению (4.1.18) почти всюду в Q_T и данным (4.1.19) почти для всех $x \in \overline{\Omega}$. Ввиду (4.1.23) w также отвечает граничному условию (4.1.20). Кроме того, для w и $W = Mw - F_1$ остаются справедливыми оценки (4.1.30), (4.1.31), (4.1.39)–(4.1.42) .

Вернемся к задаче (4.1.2)–(4.1.5). Используя определение w, (4.1.1) и условие (4.1.10), выразим u_1 через w:

$$u_1 = w + u_0 - w(0,x) - h_1 + h_1(0,x).$$

Из этого равенства и гладкости w и β_1 заключаем, что $u_1 \in C([0,T];W_2^4(\Omega))$. В силу (4.1.26), оценок (4.1.30),(4.1.31),(4.1.39)–(4.1.43) для w и W, а также неравенств

$$\|v\|_{2+j} \leq D_j\{\|Mv\|_j + \|v\|_j\} \quad (4.1.43)$$

для $v \in W_2^{2+j}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $j = 1, 2$, которые следуют из [87, Глава 2] и [85, Глава 1], справедливы оценки

$$\left\{ \int_0^T \|u_1\|_4^2 dt \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_0^T \|h_1\|_4^2 dt \right\}^{1/2} + \|h_1(0,\cdot)\|_4 + \|u_0\|_4 +$$

$$+C_3\Big[\frac{m_2(m_3^2-\alpha m_2)^{-1}}{1-e^{-\alpha T/2}}+C_1e^{C_2T}(T+1)\Big]^{1/2}\times$$
$$\times\Big[\|T\delta F_1-Mw_T\|_1+\|F_{1t}\|_{L^2(Q_T)}+\|w_T\|_1+\|F_1\|_{L^2(Q_T)}\Big],$$
$$\Big\{\int\limits_0^T\|u_{1t}\|_4^2dt\Big\}^{1/2}\leq\Big\{\int\limits_0^T\|h_{1t}\|_4^2dt\Big\}^{1/2}+$$
$$+C_3\Big[\frac{m_2(m_3^2-\alpha m_2)^{-1}}{1-e^{-\alpha T/2}}+C_1e^{C_2T}(T+1)\Big]^{1/2}\Big[\|W_0\|_1+\|F_{1tt}\|_{L^2(Q_T)}\Big],\quad(4.1.44)$$
$$\Big\{\int\limits_0^T\|u_{1tt}\|^2dt\Big\}^{1/2}\leq\Big\{\int\limits_0^T\|h_{1tt}\|^2dt\Big\}^{1/2}+$$
$$+C_3\Big[\frac{m_4m_2(m_3^2-\alpha m_2)^{-1}}{1-e^{-\alpha T/2}}+C_1e^{C_2T}(T+1)\Big]^{1/2}\Big[\|W_0\|_1+\|F_{1tt}\|_{L^2(Q_T)}\Big].$$

Здесь положительная постоянная C_3 зависит от D_j, $j=1,2$, а D_j – от n и $\mathrm{mes}\Omega$.

Теперь можно найти u_2 как решение задачи для уравнения (4.1.3) с граничными данными (4.1.5) и условием

$$U_2\equiv\int\limits_0^T u_2\,dt=\big[\delta u_1+M\overline{u}_1-g_1(x,U_1)-\overline{f}_1\big](g_2(x,U_1))^{-1}\equiv\psi(x),\qquad(4.1.45)$$

которое следует из (4.1.17). В силу (4.1.44), предположений i), ii) и теоремы вложения $\psi(x)\in W_2^2(\Omega)$. Согласно лемме 4.1.2 задача (4.1.3), (4.1.5), (4.1.45) имеет единственное решение $u_2\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и $u_{2t}\in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Теорема доказана.

Перейдем к задаче 4.1 с дифференциальным оператором A вида (4.1.6). Введем следующие предположения.

III. $m_{ij},l_{ij},a_{ij},b_{ij}\in W_\infty^1(\Omega)$, $i,j=1,2,\cdots,n$; $\mathbf{m},\mathbf{l},\mathbf{a},\mathbf{b}\in(L^\infty(\Omega))^n$, $m,l,a,b\in L^\infty(\Omega)$.

IV. Существуют постоянные $\sigma_k>0$, $k=1,2$, такие, что для любого $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\sigma_1\|v\|_1^2\leq\big\langle Av,v\big\rangle_1\leq\sigma_2\|v\|_1^2.$$

Под решением задачи 4.1 с таким оператором A будем понимать пару функций $\{u_1,u_2\}$ со следующими свойствами:

1) $\{u_1, u_2\} \in V_1 = \{\{u_1, u_2\} | u_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; W_2^2(\Omega)),\ u_{1t} \in L^2(Q_T),\ u_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_2^1(\Omega)),\ u_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))\}$;

2) пара функций $\{u_1, u_2\}$ удовлетворяет соотношениям (4.1.2)–(4.1.5).

Теорема 4.1.4. *Пусть выполняются предположения I, III, IV и* $\partial\Omega \in C^2$. *Пусть также*

(iii) $\beta_k, \beta_{1t} \in L^2(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, *k=1,2,* $\beta_{1tt}, \beta_{2t} \in L^2(S_T)$, $f_k, f_{1t} \in L^2(Q_T)$, $u_0, u_T \in W_2^3(\Omega)$;

(iv) *функции* $g_k(x, p)$ *и* $\gamma(x, p)$ *непрерывны на* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$, $k = 1, 2$; *существуют положительная постоянная* ν *и неотрицательные непрерывные функции* $q_1(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ *и* $q_2(s_1, s_2)$ $((s_1, s_2) \in \mathbf{R}^2)$ *такие, что* $|g_2(x, p)| \geq \nu$ *для всех* $(x, p) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$,

$$\|g_1|_{p=v}\| \leq q_1(\|v\|_2) \tag{4.1.46}$$

для всех $v \in W_2^2(\Omega)$ *и*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L^2(Q_T)} \leq q_2(\|v\|_{L^2([0,T];W_2^2(\Omega))}, \|v_t\|_{L^2(Q_T)}) \tag{4.1.47}$$

для всех $v \in L^2([0, T]; W_2^2(\Omega))$ *с* $v_t \in L^2(Q_T)$.

Тогда задача 4.1 имеет единственное решение $\{u_1, u_2\} \in V_1$.

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 4.1.3 проинтегрируем (4.1.2) по t на $[0, T]$ и разделим результат на T. Ввиду (4.1.4) это даст

$$\delta u_1 + M\bar{u}_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)AU_2 + \bar{f}_1. \tag{4.1.48}$$

Вычитая (4.1.48) из (4.1.2) и переписывая разность в терминах функции w, приходим к задаче (4.1.18)–(4.1.20). Как отмечалось выше, согласно лемме 4.1.1 эта задача имеет единственное решение $w \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$, причем $w_t \in L^2([0, T]; W_2^{-1}(\Omega))$.

Покажем, что в условиях теоремы $w \in C(0, T; W_2^2(\Omega))$. Для этого снова рассмотрим итерационную схему (4.1.21)–(4.1.23). Согласно теореме 18 [138, Глава 10] $w^s \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $w_t^s \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$. Кроме того, для w^s

справедливы неравенства (4.1.28), (4.1.29), (4.1.30) при каждом $s = 1, 2, \dots$. Из (4.1.21) следует, что $w^s_{tt} \in L^2(Q_T)$. Дифференцируя уравнение (4.1.21) по t, приходим к аналогичному уравнению для w^s_t.

$$w^s_{tt} + Mw^s_t = F_{1t}(t,x).$$

Начальные данные для w^s_t дает уравнение (4.1.21) при $t = 0$, так как ввиду гладкости w^s оно выполняется при каждом $t \in [0,T]$.

$$w^s_t|_{t=0} = w^{s-1}_t|_{t=T} + Mw_T(x) - T\delta F_1.$$

Из (4.1.23) в свою очередь вытекает, что

$$w^s_t|_{S_T} = 0.$$

Таким образом, w^s_t является решением краевой задачи аналогичной (4.1.21)–(4.1.23). Применяя к этой задаче рассуждения, позволившие доказать неравенства (4.1.28), (4.1.29), (4.1.30), можно получить подобные оценки для w^s_t. А именно,

$$\int\limits_0^T \|w^{s+1}_t - w^s_t\|_2^2\,dt \le \frac{m_2 e^{-\alpha T(s-1)}}{(m_3^2 - \alpha m_2)} \big\|Mw_T(x) - T\delta F_1\big\|_1^2, \tag{4.1.49}$$

$$\int\limits_0^T \|w^{s+1}_{tt} - w^s_{tt}\|^2\,dt \le \frac{m_4 m_2 e^{-\alpha T(s-1)}}{m_3^2 - \alpha m_2} \big\|Mw_T(x) - T\delta F_1\big\|_1^2, \tag{4.1.50}$$

$$\Big\{\int\limits_0^T \|w^s_t\|_2^2 dt\Big\}^{1/2} \le C_3\Big[\frac{m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2} \times$$
$$\times\Big[\|T\delta F_1 - Mw_T\|_1 + \|F_{1t}\|_{L^2(Q_T)}\Big], \tag{4.1.51}$$

$$\Big\{\int\limits_0^T \|w^s_{tt}\|^2 dt\Big\}^{1/2} \le C_3\Big[\frac{m_4 m_2(m_3^2 - \alpha m_2)^{-1}}{1 - e^{-\alpha T/2}} + C_1 e^{C_2 T}(T+1)\Big]^{1/2} \times$$
$$\times\Big[\|T\delta F_1 - Mw_T\|_1 + \|F_{1t}\|_{L^2(Q_T)}\Big]. \tag{4.1.52}$$

для каждого $s = 1, 2, \ldots$.

Неравенства (4.1.28), (4.1.29), (4.1.49), (4.1.50) позволяют утверждать, что последовательность w^s сходится к w в $L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$ и w_t^s стремится к w_t в $L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$ при $s \to +\infty$. Тогда $w^s \to w$ в $C([0,T];W_2^2(\Omega))$ при $s \to +\infty$, что означает существование следов $w^s(0,x), w^s(T,x) \in W_2^2(\Omega)$, причем $w^s(0,x) \to w(0,x)$ и $w^s(T,x) \to w(T,x)$ в $W_2^2(\Omega)$ при $s \to +\infty$. Переходя к пределу в (4.1.21)–(4.1.22), можно показать, что w удовлетворяет уравнению (4.1.18) почти всюду в Q_T, данным (4.1.19) почти для всех $x \in \overline{\Omega}$ и в силу (4.1.23) граничному условию (4.1.20). Причем, для w остаются справедливыми оценки (4.1.30), (4.1.51)–(4.1.52).

Используя определение w, найдем u_1 и выразим U_2 из (4.1.48) через u_1. Имеем:

$$U_2 = q(x) + A^{-1}\psi(x), \tag{4.1.53}$$

где $\psi(x)$ определена в (4.1.45), q является решением уравнения $Aq = 0$ и $q|_{\partial\Omega} = \int_0^T \beta_2 dt$. Таким образом, мы получили задачу (4.1.3), (4.1.5), (4.1.53) для u_2. В условиях теоремы $q \in W_2^2(\Omega)$, $u_1 \in C([0,T];W_2^2(\Omega))$ и $\psi(x) \in L^2(\Omega)$. Следовательно, $q(x) + A^{-1}\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$. Согласно лемме 4.1.2 задача (4.1.3), (4.1.5), (4.1.45) имеет единственное решение $u_2 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и $u_{2t} \in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Теорема доказана.

Замечание 4.1.1. Условия (4.1.16) теоремы 4.1.4 и (4.1.46), (4.1.47) теоремы 4.1.5 сформулированы в общем виде. Для того, чтобы (4.1.16) было верно при $n < 6$, достаточно потребовать от функции $\gamma(x,p)$ непрерывности по x и p в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$. Действительно, в этом случае $u_1 \in C(\overline{Q}_T)$ и по теореме вложения

$$\|\gamma|_{p=u_1}\|_{L^2(Q_T)} \leq \text{const}.$$

Если $n \geq 6$, то (4.1.16) справедливо для функции $\gamma(x,p)$, удовлетворяющей неравенству

$$|\gamma| \leq \alpha_1 |p|^{\alpha_2} \tag{4.1.54}$$

в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$, где α_1 – положительная постоянная и $0 \leq \alpha_2 \leq (n+2)/(n-6)$. Аналогично, (4.1.47) имеет место, если функция $\gamma(x,p)$ непрерывна по x и p в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ при $n = 1$, и $\gamma(x,p)$ удовлетворяет соотношению (4.1.54) с $\alpha_2 \leq (n+2)/(n-2)$ при $n \geq 2$. Условие (4.1.46) при $n < 4$ выполняется для функции $g_1(x,p)$ непрерывной в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$. В случае $n \geq 4$ предположение

(4.1.46) справедливо для функции $g_1(x,p)$, отвечающей условию (4.1.54) (вместо $\gamma(x,p)$) в $\overline{\Omega}\times(-\infty,+\infty)$, где $\alpha_2\le 2n/(n-4)$.

4.1.3 Задача с нелокальными условиями для u_1

Рассмотрим теперь зададачу 4.2. Под решением задачи 4.2 будем понимать пару функций $\{u_1,u_2\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $\{u_1,u_2\}\in V_2=\{\{v_1,v_2\}|v_k\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;W_2^1(\Omega)),\ v_{kt}\in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)),\ k=1,2\}$;

2) для пары $\{u_1,u_2\}$ выполняются соотношения (4.1.5), (4.1.7)–(4.1.9).

Будем предполагать, что операторы M, L и B отвечают следующим ограничениям.

V. Коэффициенты $m_{ij}(x),l_{ij}(x),b_{ij}(x)\in W_\infty^1(\Omega)$, $i,j=1,2,\cdots,n$; $\mathbf{m},\mathbf{l}$, $\mathbf{b}\in(L^\infty(\Omega))^n$, $m,l,b\in L^\infty(\Omega)$.

VI. Операторы M, L и B являются эллиптическими, т. е. операторы M и L удовлетворяют неравенствам (4.1.10), (4.1.11) и существуют положительные константы k_B, K_B такие, что для любого $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$k_B\|v\|_1^2\le\big\langle Bv,v\big\rangle_1\le K_B\|v\|_1^2.$$

Достаточнные условия однозначной разрешимости задачи 4.2 в смысле введенного выше определения даются следующей теоремой.

Теорема 4.1.5. *Пусть выполняются предположения V, VI и $\partial\Omega\in C^2$. Пусть также*

(v) $f_1\in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, $\beta_1\in L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $\beta_{1t}\in L^2(Q_T)$, $\mu\in L^2(\Omega)$, $\varphi\in W_2^2(\Omega)$, $f_2\in L^2(Q_T)$, $\beta_2\in L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\partial\Omega))$.

Тогда задача 4.2 имеет единственное обобщенное решение $\{u_1,u_2\}\in V_2$.

Доказательство. Применим подход аналогичный доказательству теорем 4.1.3 и 4.1.4. Будем строить решение задачи 4.2 в два этапа. На первом этапе найдем функцию u_2 как решение краевой задачи для уравнения (4.1.8) с граничными данными (4.1.5) и интегральным условием по t, которое следует из

(4.1.7) и (4.1.9), и покажем, что u_2 единственно. Второй этап состоит в доказательстве существования и единственности функции u_1 как решения краевой задачи для уравнения (4.1.7) при известном u_2 с граничными данными (4.1.5) и первым из условий (4.1.9).

Проинтегрируем уравнение (4.1.7) по t от 0 до T и подействуем на полученное равенство оператором B^{-1}, который существует в силу предположения IV. Это даст:

$$\int_0^T u_2 dt = B^{-1}\Big(\mu(x) + M\varphi(x) - \int_0^T f_1(t,x)dt\Big). \tag{4.1.55}$$

Согласно теореме 4.1.2 задача (4.1.8),(4.1.5),(4.1.55) имеет единственное решение $u_2 \in Y$ и $u_{2t} \in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$.

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения (4.1.7) с граничными данными (4.1.5) и первым из условий (4.1.9). Правая часть $Bu_2 + f_1$ уравнения (4.1.7) известна и принадлежит пространству $L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Согласно лемме 4.1.1, эта задача имеет единственное решение $u_1 \in Y$ and $u_{1t} \in L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$.

Таким образом, решение $\{u_1, u_2\}$ задачи 4.2 существует и единственно в классе V_2. Теорема доказана.

4.2 Нелокальные задачи для системы нагруженных уравнений соболевского типа

Как отмечалось выше, эволюционные системы уравнений, в частности, параболические системы типа (4.1.7), (4.1.8) с $g_1 = g_1(x,u_1,u_2)$, $g_2 = 0$ моделируют процессы диффузии [28, 35]. Модели таких процессов, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах, при определенных допущениях приводят к уравнениям или системам соболевского типа [15]. С другой стороны, такие уравнения можно использовать для регуляризации эволюционных уравнений. Во второй главе это позволило доказать корректность обратной задачи 2.4 для параболического уравнения.

В данном параграфе устанавливаются условия разрешимости и единственности решения нелокальной задачи для системы уравнений соболевского типа с краевыми условиями аналогичными (4.1.4), (4.1.5). Исследование проводится в два этапа. Первый этап включает в себя обсуждение некоторых задач для уравнения соболевского типа. В частности, рассматривается краевая задача для линейного уравнения с нелокальным условием по времени. Кроме того, исследуется корректность одной обратной задачи для полулинейного нагруженного уравнения соболевского типа. На втором этапе доказываются теоремы существования и единственности решения нелокальной задачи для системы уравнений (см. постановку задачи 4.3 ниже) с помощью результатов, полученных на первом этапе.

4.2.1 Постановка задачи и предварительные замечания

Введем линейные дифференциальные операторы M_k, L_k, $k = 1, 2$, B, действующие из $W_2^1(\Omega)$ в $(W_2^1(\Omega))^*$:

$$M_k = -\mathrm{div}(\mathcal{M}_k(x)\nabla) + (\mathbf{m}_k, \nabla)_R + m_k(x)I, \tag{4.2.1}$$

$$L_k = -\mathrm{div}(\mathcal{L}_k(x)\nabla) + (\mathbf{l}_k, \nabla)_R + l_k(x)I,$$

$$B = -\mathrm{div}(\mathcal{B}(x)\nabla) + (\mathbf{b}, \nabla)_R + b(x)I,$$

где $\mathcal{M}_k(x) \equiv (m_{kij}(x))$, $\mathcal{L}_k(x) \equiv (l_{kij}(x))$ и $\mathcal{B}(x) \equiv (b_{ij}(x))$ – матрицы функций, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k(x)$, $\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_k(x)$, and $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$ – вектор-функции; m_k, l_k, b – скалярные функции; I – тождественный оператор.

Расссмотрим следующую задачу для системы уравнений соболевского типа.

Задача 4.3. При заданных функциях $g_k(x,p)$, $f_k(t,x)$, $\beta_k(t,x)$, $k = 1, 2$, $\gamma(x,p)$, $u_0(x)$ и $u_T(x)$ найти пару функций $\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$(M_1u_1)_t + M_2u_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)AU_2 + f_1(t, x), \tag{4.2.2}$$

$$(L_1u_2)_t + L_2u_2 = Bu_1 + \gamma(x, u_1) + f_2(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T, \tag{4.2.3}$$

и условиям

$$(M_1u_1)|_{t=0} = u_0(x), \quad (M_1u_1)|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.2.4}$$

$$u_k|_{S_T} = \beta_k(t, x). \tag{4.2.5}$$

Здесь $U_k(x) \equiv \int_0^T u_k dt$, $k = 1, 2$, A – линейный оператор. Так же как и в предыдущем параграфе, предполагается, что A – это либо тождественный оператор, т. е. $A = I$; либо дифференциальный оператор вида

$$A = -\mathrm{div}(\mathcal{A}(x)\nabla) + (\mathbf{a}, \nabla)_R + a(x)I, \tag{4.2.6}$$

где $\mathcal{A}(x) \equiv (a_{ij}(x))$ – матрица функций, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ – вектор-функция; a – скалярная функция.

Для удобства получения априорных оценок будем считать опреаторы M_1 и L_1 самосопряженными в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, то есть, $m_{1ij} = m_{1ji}, l_{1ij} = l_{1ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$.

В дополнение к задаче 4.3 рассмотрим вспомогательную задачу для линейного уравнения соболевского типа. При заданных $u_0(x)$, $F(t, x)$ найти функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$M_1 u_t + M_2 u = F(t, x), \tag{4.2.7}$$

для всех $(t, x) \in Q_T$ и условиям

$$M_1 u\Big|_{t=0} = u_0(x) \qquad x \in \Omega, \tag{4.2.8}$$

$$u\Big|_{S_T} = 0. \tag{4.2.9}$$

Следуя определению Шоуолтера и Тинга [304], однородную задачу, соответствующую (4.2.7)–(4.2.9), будем называть p-гладкой при целом $p \geq 2$, если коэффициенты $m_{kij}(x) \in C^{p-1}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (C^{p-2}(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in C^{p-2}(\overline{\Omega})$, $m_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2$; операторы M_k сильно эллиптические, то есть существуют положительные константы k_m, K_m такие, что для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$k_m \|v\|_1^2 \leq \big\langle M_k v, v \big\rangle_1 \leq K_m \|v\|_1^2, \qquad k = 1, 2; \tag{4.2.10}$$

и граница $\partial\Omega \subset C^p$.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи (4.2.7)–(4.2.9) дает следующая теорема [304].

Теорема 4.2.1. *1) Пусть однородная задача, соответствующая (4.2.7)–(4.2.9), является p-гладкой, $u_0(x) \in W_2^{p-2}(\Omega)$, $F(t, x) \in W_2^{p-2}(Q_T))$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0, T]; \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^p(\Omega))$ задачи (4.2.7)–(4.2.9).*

2) Пусть $\partial\Omega \subset C^{2+r}$, коэффициенты $m_{kij}(x) \in H^{1+r}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (H^r(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in H^r(\overline{\Omega})$, $0 < r < 1$, $m_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2$; операторы M_k сильно эллиптические, т. е. удовлетворяют условию (4.2.10); $u_0(x) \in H^r(\overline{\Omega})$, $F(t,x) \in C([0,T]; H^r(\overline{\Omega}))$. Тогда существует единственное классическое решение $u \in C^1([0,T]; H^{2+r}(\overline{\Omega}))$ задачи (4.2.7)–(4.2.9).

Из результатов [304] можно также получить оценки

$$\|u(t,x)\|_2 \leq C_2 \Big\{ \|u_0(x)\| \, e^{-\alpha t} + C_1 \Big[\int\limits_0^t \|F\|^2 \, e^{-2\alpha(t-\tau)} \, d\tau \Big]^{1/2} \Big\}, \tag{4.2.11}$$

$$\|u_t(t,x)\|_2 \leq C_2 \Big\{ \|u_0(x)\| \, e^{-\alpha t} + C_1 \Big[\int\limits_0^t \|F\|^2 \, e^{-2\alpha(t-\tau)} \, d\tau \Big]^{1/2} + \|F\| \Big\},$$

для любого $t \in [0, T]$. Положительные постоянные α, C_1, C_2 зависят от n, k_m, K_m, $\mathrm{mes}\Omega$ и не зависят от T.

4.2.2 Нелокальная задача для уравнения соболевского типа

Прежде чем приступить к исследованию задачи 4.3, установим условия корректности и изучим свойства решений некоторых краевых задач для одного уравнения соболевского типа.

Введем норму

$$\|v\|_M \,=\, \big(\|M_1 v\|^2 + \lambda \big\langle M_1 v, v \big\rangle_1 \big)^{1/2} \tag{4.2.12}$$

в функциональном пространстве $W \,\equiv\, W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, где $\lambda > 0$ – действительное число. Если прямая задача (4.2.7)-(4.2.9) с известной f является p-гладкой при $p \geq 2$, то норма (4.2.12) эквивалентна обычной норме в $W_2^2(\Omega)$, то есть существуют положительные константы μ_1, μ_2 такие, что для каждого $v \in W$

$$\mu_1 \, \|v\|_2 \leq \|v\|_M \leq \mu_2 \, \|v\|_2. \tag{4.2.13}$$

Постоянную λ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\nu}{\mu_2} \|v\|_M^2 \leq \nu \|v\|_2^2 \leq \big(M_2 v, M_1 v + \lambda v \big) \leq \nu_1 \|v\|_M^2, \tag{4.2.14}$$

$$\|M_2 v\| \leq \nu_2 \|v\|_M, \tag{4.2.15}$$

$$\|M_1 v\| \geq \nu_3 \|v\|_M \tag{4.2.16}$$

с положительными константами ν и ν_k, $k = 1, 2, 3$, для всех $v \in W$ (см. [86, с. 85-86]).

Наряду с задачей (4.2.7)–(4.2.9) мы рассмотрим задачу для (4.2.7) с граничными данными (4.2.9) и нелокальным условием

$$M_1 u(T, x) - M_1 u(0, x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.2.17}$$

и установим достаточные условия существования и единственности ее решения.

Теорема 4.2.2. *Пусть $\partial\Omega \subset C^2$ и выполняются следующие условия:*

(i) *коэффициенты $m_{kij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (C(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in C(\overline{\Omega})$ и $m_1(x) \geq 0$; операторы M_k, $k = 1, 2$, сильно эллиптические, то есть (4.2.10) справедливо для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$;*

(ii) $\varphi(x) \in L^2(\Omega)$, $F(t, x) \in L^2(Q_T))$.

Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0, T]; W)$ задачи (4.2.7), (4.2.9), (4.2.17). *Причем справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_M \leq 2C_2(1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\Big(\int\limits_0^T \|F\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big], \tag{4.2.18}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_M \leq C_3(1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\Big(\int\limits_0^T \|F\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big] + C_3'\|F\|. \tag{4.2.19}$$

Положительные константы C_3, C_3' и α_1 зависят от n, k_m, K_m, μ_2, ν, ν_j, $j = 1, 2, 3$, $\mathrm{mes}\Omega$ и не зависят от T.

Доказательство. Рассмотрим итерационную схему

$$M_1\, u_t^N \;+\; M_2\, u^N \;=\; F(t, x), \tag{4.2.20}$$

$$M_1 u^N(0, x) = h^N(x), \tag{4.2.21}$$

$$u^N\big|_{S_T} \;=\; 0, \tag{4.2.22}$$

$$h^{N+1}(x) \;=\; M_1 u^N(T, x) - \varphi(x), \quad N = 0, 1, 2, \ldots; \qquad h^0 \equiv -\varphi(x). \tag{4.2.23}$$

По теореме 4.2.1, задача (4.2.20)–(4.2.22) имеет единственное решение u^N из класса $C^1([0, T]; W)$ для каждого $N = 1, 2, \ldots$.

Пусть оператор P отображает $L^2(\Omega)$ в себя и $P(h) = M_1H(T,x)$ для каждого $h(x) \in L^2(\Omega)$, где $H(t,x)$ – решение задачи

$$M_1H_t + M_2H = F(t,x), \tag{4.2.24}$$

$$M_1H(0,x) = h(x), \tag{4.2.25}$$

$$H\Big|_{S_T} = 0. \tag{4.2.26}$$

Покажем, что оператор P является сжимающим. Действительно, пусть $h_1(x)$, $h_2(x)$ – произвольные элементы из $L^2(\Omega)$ и $H_1(x)$, $H_2(x)$ – решения задачи (4.2.24)–(4.2.26) с $h = h_1$ and $h = h_2$, соответственно. Тогда функция $H(t,x) = H_1 - H_2$ удовлетворяет уравнению

$$M_1H_t + M_2H = 0, \tag{4.2.27}$$

начальным данным

$$H(0,x) = h_1(x) - h_2(x) \tag{4.2.28}$$

и граничному условию (4.2.26). Умножая (4.2.27) на $(M_1H + \lambda H)e^{\nu t/\mu_2}$, интегрируя по частям по x в первом слагаемом и оценивая второе слагаемое левой части результирующего соотношения с помощью (4.2.14), получим

$$\frac{d}{dt}\Big\{e^{\alpha_1 t}\|H\|_M^2\Big\} \le 0,$$

откуда с учетом (4.2.28)

$$\|H(t,\cdot)\|_M \le e^{-\alpha_1 t}\,\|h_1 - h_2\| \tag{4.2.29}$$

для всех $t \in [0,T]$ или в силу определения оператора P

$$\|P(h_1) - P(h_2)\| \le e^{-\alpha_1 T}\,\|h_1 - h_2\|, \tag{4.2.30}$$

где $\alpha_1 = \nu/\mu_2$.

Перепишем равенство (4.2.23) как

$$h^N(x) = P(h^{N-1}(x)) - \varphi(x). \tag{4.2.31}$$

Аналогично соотношениям (4.2.29) и (4.2.30) из (4.2.20)–(4.2.22) можно получить неравенства

$$\|u^N - u^{N-1}\|_M \le e^{-\alpha_1 t}\,\|h^N - h^{N-1}\|,$$

$$\|h^{N+1}-h^N\| = \|P(h^N)-P(h^{N-1})\| \le e^{-\alpha_1 T}\,\|h^N-h^{N-1}\|,$$

которые приводят к оценкам

$$\|h^{N+1}-h^N\| \le e^{-\alpha_1 NT}\,\|h^1-h^0\|, \tag{4.2.32}$$

$$\|u^N-u^{N-1}\|_M \le e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\,\|h^1-h^0\| \tag{4.2.33}$$

для всех $t\in[0,T]$ и $N\ge 2$.

Далее, обозначим $u^{N+1}-u^N$ через $\tilde u^N$ и рассмотрим разность уравнений (4.2.20) для u^{N+1} и u^N. Умножая ее на $(M_1\tilde u^N+\lambda\tilde u^N)_t$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям по x, будем иметь

$$\|\tilde u^N_t\|^2_M = -(M_2\tilde u^N, M_1\tilde u^N_t)) - \lambda\big\langle M_2\tilde u^N, \tilde u^N_t\big\rangle_1,$$

откуда в силу (4.2.10), (4.2.15) и (4.2.33) можно получить неравенство

$$\|u^N_t-u^{N-1}_t\|_M \le C_4 e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\,\|h^1-h^0\|. \tag{4.2.34}$$

Здесь $C_4=\mathrm{const}>0$ зависит от K_m, ν_2, α_1 и не зависит от N. Наконец, (4.2.33) и (4.2.34) дают оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^N-u^{N-1}\|_M \le e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|, \tag{4.2.35}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^N_t-u^{N-1}_t\|_M \le C_4 e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|. \tag{4.2.36}$$

Неравенства (4.2.32), (4.2.35)–(4.2.36) показывают, что последовательности u^N и h^N являются фундаментальными и существуют функции $h\in L^2(\Omega)$ и $u\in C^1([0,T];W)$ такие,что $u^N\to u$ в $C^1([0,T];W)$ и $h^N\to h$ в $L^2(\Omega)$ при $N\to\infty$. Причем, в силу (4.2.31) и (4.2.32),

$$\|h^{N+1}\| \le \|h^1-h^0\|\sum_{i=0}^{N} e^{-\alpha_1 iT} + \|\varphi\| \le \frac{1}{1-e^{-\alpha_1 T}}\|h^1-h^0\| + \|\varphi\|.$$

Из (4.2.11) и (4.2.35) следует, что

$$\|u^N\|_M \le \|h^1-h^0\|\sum_{i=0}^{N} e^{-\alpha_1 iT} + \|u^0\|_M \le (1-e^{-\alpha T})^{-1}\|u^0(T,\cdot)\|_M + \|u^0\|_M \le$$

$$\le 2C_2(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\Big(\int_0^T \|F\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big]. \tag{4.2.37}$$

Аналогично из (4.2.20) с учетом (4.2.15), (4.2.16), (4.2.37) получаем

$$\|u_t^N\|_M \leq C_5(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\Big(\int\limits_0^T \|F\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big] + C_5'\|F\|,$$

где положительные постоянные C_5 и C_5' зависят от ν, ν_j, $j=1,2,3$, μ_2 и C_2 и не зависят от N. Переходя к пределу в (4.2.20),(4.2.21) и (4.2.31) заключаем, что u является решением задачи (4.2.7),(4.2.9),(4.2.17). Более того, u удовлетворяет оценкам (4.2.18) и (4.2.19) с $C_3 = C_5$ и $C_3' = C_5'$. Единственность решения следует из оценки (4.2.18) и линейности задачи (4.2.7),(4.2.9),(4.2.17). Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия, при которых решение u задачи (4.2.7), (4.2.9), (4.2.17) принадлежит $C^1([0,T];W_2^4(\Omega))$.

Теорема 4.2.3. *Пусть $\partial\Omega \subset C^4$ и выполняются условия:*

(iii) *$m_{1ij}(x) = m_{2ij}(x) = m_{ij}(x)$ и $m_{ij}(x) \in H^{3+r}(\overline{\Omega})$, $i,j = 1,2,\ldots,n$; $\mathbf{m}_2 \in (H^{2+r}(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in H^{2+r}(\overline{\Omega})$ с $m_1(x) \geq 0$ и (4.2.10) справедливо для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $0<r<1$;*

(iv) *$\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)\cap H^r(\overline{\Omega})$, $F(t,x) \in C([0,T];W_2^2(\Omega)\cap H^r(\overline{\Omega}))$.*

Тогда решение задачи (4.2.7)-(4.2.9) принадлежит $C^1([0,T];\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^4(\Omega))$. Кроме того, имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|u\|_4 \leq C'\Big[\|\varphi\|_2 + \Big[\int\limits_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\Big]^{1/2}\Big], \tag{4.2.38}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_t\|_4 \leq C''\Big[\|\varphi\|_2 + \Big[\int\limits_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\Big]^{1/2} + \|F\|_2\Big] \tag{4.2.39}$$

с некоторыми положительными константами C', C''.

Доказательство. Обратимся снова к итерационной схеме (4.2.20)–(4.2.23). Согласно теореме 4.2.1 $u^N \in C^1([0,T];W_2^4(\Omega)\cap H^{2+r}(\overline{\Omega}))$. Поэтому мы можем применить оператор M_1 к (4.2.20)–(4.2.21). Получим

$$M_1^2 u_t^N + M_1 M_2 u^N = M_1 F(t,x), \tag{4.2.40}$$

$$M_1^2 u^N(0,x) = M_1 h^N(x), \tag{4.2.41}$$

Введем линейный дифференциальный оператор $M_0 = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla)$, действующий из $W_2^1(\Omega)$ в $(W_2^1(\Omega))^*$, и перепишем (4.2.20) следующим образом:

$$(M_0 u^N)_t + M_0 u^N = F - (m_1 u)_t - (\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N - m_2 u^N. \tag{4.2.42}$$

Выразим $M_0 u^N$ из (4.2.42). Это даст

$$M_0 u^N = h^N e^{-t} - m_1 u^N + \int\limits_0^t \Big[(m_1 - m_2)u^N - (\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N + F\Big] e^{-(t-\tau)} d\tau. \tag{4.2.43}$$

Ввиду гладкости u^N уравнение (4.2.20), а следовательно и (4.2.43), выполняется на границе $\partial\Omega$. Из (4.2.43) вытекает, что

$$M_1 u^N|_{\partial\Omega} = \Big\{ e^{-t} h^N + \int\limits_0^t \Big[- (\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N + F\Big] e^{-(t-\tau)} d\tau \Big\}|_{\partial\Omega} \equiv \Psi^N|_{\partial\Omega}. \tag{4.2.44}$$

Введем новую функцию $V^N = M_1 u^N - \Psi^N$ и запишем (4.2.40), (4.2.41), (4.2.44) как краевую задачу для V^N.

$$(M_1 V^N)_t + M_1 V^N = -M_1\big[(m_2 - m_1)u^N\big], \tag{4.2.45}$$

$$M_1 V^N(0,x) = M_1 h^N(x) - M_1 \Psi^N(0,x) \equiv 0, \qquad V^N|_{\partial\Omega} = 0.$$

Умножим (4.2.45) на $V^N e^t$ скалярно в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям в полученном уравнении и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. Будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\Big[e^t \big\langle M_1 V^N, V^N\big\rangle_1\Big] \le \big|\big\langle M_1[(m_2 - m_1)u^N], V^N\big\rangle_1\big| e^t.$$

Отсюда в силу (4.2.10), (4.2.18) и предположения (iii) следует, что

$$\|V^N\|_1 \le C_6 (1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1}\big[\|\varphi\| + C_1 \|F\|_{L^2(Q_T)}\big], \tag{4.2.46}$$

где положительная постоянная C_6 зависит от $\|m_j\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $j = 1, 2$, T, C_2, k_m, K_m и не зависит от N. Далее, умножив (4.2.45) на $M_1 V^N$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и оценив правую часть результата с помощью неравенства Коши, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|M_1 V^N\|^2 + \|M_1 V^N\|^2 \le \frac{1}{2}\|M_1 V^N\|^2 + \frac{1}{2}\|M_1 (m_2 - m_1) u^N\|^2,$$

откуда

$$\|M_1V^N\|^2 \le \int\limits_0^t \|M_1(m_2-m_1)u^N\|^2\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau,$$

и в силу гладкости m_k, $k=1,2$, а также (4.2.12) и (4.2.13)

$$\|M_1V^N\| \le C_7 \max_{\tau\in[0,t]} \|u^N\|_M. \tag{4.2.47}$$

Положительная постоянная C_7 зависит от n, μ_j, $\|m_j\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $j=1,2$, mesΩ и не зависит от N. С помощью (4.2.18) и (4.2.47) из (4.2.45) можно получить аналогичное неравенство для V_t^N. А именно,

$$\|M_1V_t^N\| \le C_8 \max_{\tau\in[0,t]} \|u^N\|_M. \tag{4.2.48}$$

Здесь постоянная C_8 зависит от n, C_7, μ_j, $\|m_j\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $j=1,2$, mesΩ и не зависит от N. Далее с учетом (4.2.11), (4.2.15), (4.2.37) и определения Ψ_N имеем:

$$\|\Psi^N\| \le C_9(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\|F\|_{L^2(Q_T)}\Big]$$

и

$$\|\Psi_t^N\| \le C_{10}(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\Big[\|\varphi\| + C_1\|F\|_{L^2(Q_T)}\Big] + \|F\|.$$

Константы C_9, C_{10} зависят от $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_2\|_R$, μ_1, C_2, C_5 и не зависят от N.

Покажем, что последовательность V^N фундаментальна в $C^1(0,T;W_2^2(\Omega))$. Для этого рассмотрим разность $V^{N+1}-V^N$. В силу (4.2.45), она удовлетворяет соотношениям

$$M_1(V^{N+1}-V^N)_t + M_1(V^{N+1}-V^N) = -M_1\big[(m_2-m_1)(u^{N+1}-u^N)\big], \tag{4.2.49}$$

$$(V^{N+1}-V^N)|_{t=0} = (V^{N+1}-V^N)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Применяя к (4.2.49) рассуждения, приведшие к (4.2.47), (4.2.48) и учитывая (4.2.35), (4.2.36), можно получить оценки

$$\|M_1(V^{N+1}-V^N)\| \le C_7' e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\, \|h^1-h^0\|, \tag{4.2.50}$$

$$\|M_1(V_t^{N+1}-V_t^N)\| \le C_8' e^{-\alpha((N-1)T+t)}\, \|h^1-h^0\|. \tag{4.2.51}$$

где постоянные C_7', C_8' зависят от μ_1, C_7, C_8 и $\|m_j\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $j=1,2,$, и не зависят от N.

Ввиду свойств оператора M_1 для любого $v \in W_2^{2+s}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства (4.1.43), а именно,

$$\|v\|_{2+s} \le D_s\{\|M_1 v\|_s + \|v\|_{1+s}\} \tag{4.2.52}$$

при $s = 0, 1, 2$ с константой D_s, зависящими от n, M и mesΩ. Кроме того, вследствие (4.2.13), (4.2.52) при $s = 1$ и [86, с. 85] для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \cup W_2^4(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|v\|_3 \le D_1(\|M_1 v\|_1 + \|v\|_2) \le D_1\varepsilon\|M_1 v\|_2 + D_1(\mu_1^{-1} + c_\varepsilon)\|v\|_M, \tag{4.2.53}$$

где положительная постоянная c_ε зависит от ε, n и mesΩ. Тогда (4.2.33) и (4.2.53) дают

$$\|u^{N+1} - u^N\|_3 \le D_1\varepsilon\|M_1(u^{N+1} - u^N)\|_2 + D_1(\mu_1^{-1} + c_\varepsilon)e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1 - h^0\|. \tag{4.2.54}$$

Далее, в силу (4.2.33), (4.2.50)–(4.2.54),

$$\|M_1(u^{N+1} - u^N)\|_2 \le \|V^{N+1} - V^N\|_2 + \|\Psi^{N+1} - \Psi^N\|_2 \le$$

$$\le C_{11}\big(\|M_1(V^{N+1} - V^N)\| + \|V^{N+1} - V^N\|\big) + e^{-t}\|M_1(u^N - u^{N-1})|_{t=T}\|_2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \|(\mathbf{m}_2, \nabla)_R(u^{N+1} - u^N)\|_2\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau \le C_{12}e^{\alpha_1(N-1)T}\|h^1 - h^0\| +$$

$$+ e^{-t}\|M_1(u^N - u^{N-1})|_{t=T}\|_2 + C_{13}\int\limits_0^t \|u^{N+1} - u^N\|_3\, e^{-(t-\tau)} d\tau \le$$

$$\le (C_{14} + C_{13}D_1c_\varepsilon)e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1 - h^0\| + e^{-t}\|M_1(u^N - u^{N-1})|_{t=T}\|_2 +$$

$$+ C_{13}D_1\varepsilon\int\limits_0^t \|M_1(u^{N+1} - u^N)\|_2\, e^{-(t-\tau)} d\tau. \tag{4.2.55}$$

Здесь $C_{14} = (C_{12} + C_{13}D_1\mu_1^{-1})\|h^1 - h^0\|$, положительные постоянные C_{11}, C_{12}, C_{13} зависят от k_m, n, D_1, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_2\|_R$, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_{2x_i}\|_R$, и $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_{2x_ix_j}\|_R$, $i, j = 1, 2, ..., n$, mesΩ и не зависят от N. Согласно лемме Гроноулла из (4.2.55) следует, что

$$\|M_1(u^{N+1} - u^N)\|_2 \le \Big[(C_{14} + C_{13}D_1c_\varepsilon)\, e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1 - h^0\| +$$

$$+\,\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2\,e^{-t}\Big]\Big[1+C_{12}D_1\varepsilon\int\limits_0^t\exp(C_{12}D_1\varepsilon(t-\tau))\,d\tau\Big]\leq$$

$$\leq(C_{14}+C_{13}D_1c_\varepsilon)\,e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\|\exp(C_{13}D_1\varepsilon t)+$$

$$+\,\exp(-(1-C_{12}D_1\varepsilon)t)\,\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2. \qquad (4.2.56)$$

для любого $t\in[0,T]$. Положим в (4.2.56) $\varepsilon=(2C_{12}D_1)^{-1}$. В этом случае

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2\leq e^{-\frac{t}{2}}\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2$$

$$+\,C_{15}e^{-\alpha(N-1)T}\|h^1-h^0\|, \qquad (4.2.57)$$

где $C_{15}=(C_{14}+C_{13}D_1c_\varepsilon)\exp(C_{13}D_1\varepsilon T)$. Тогда

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)|_{t=T}\|_2\leq e^{-T/2}\,\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2+$$

$$+\,C_{15}\,e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|\leq e^{-T(N-1)/2}\,\|h^1-h^0\|_2+$$

$$+\,C_{15}\,e^{-\alpha_1(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|. \qquad (4.2.58)$$

Из (4.2.57) и (4.2.58) вытекает неравенство

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2\leq e^{-(t+T(N-1))/2}\,\|h^1-h^0\|_2+$$

$$+\,C_{15}\,(Ne^{-t/2}+1)e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|, \qquad (4.2.59)$$

где $\tilde\alpha=\min\{\alpha,\frac12\}$. Теперь мы можем оценить $\|u^{N+1}-u^N\|_4$. С учетом (4.2.35), (4.2.52)–(4.2.54) и (4.2.59) будем иметь:

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^{N+1}-u^N\|_4\leq D_2\max_{t\in[0,T]}\Big\{\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2+\|u^{N+1}-u^N\|_2\Big\}\leq$$

$$\leq D_2(2+C_{15}\,(N+1))e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|_2. \qquad (4.2.60)$$

Аналогичным образом можно вывести соотвествующее неравенство для разности $u_t^{N+1}-u_t^N$. В силу (4.2.20) (4.2.59),

$$\|M_1(u_t^{N+1}-u_t^N)\|_2=\|M_2(u^{N+1}-u^N)\|_2\leq$$

$$\leq D_2'(2+C_{15}'(N+1))e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|_2. \quad (4.2.61)$$

Здесь D_2' зависит от $\max_{i,j=1,2,\dots,n}\|m_{2ij}\|_{C^2(\overline\Omega)}$, $\max_{i=1,2,\dots,n}\|m_{2i}\|_{C^2(\overline\Omega)}$, $\|m_2\|_{C^2(\overline\Omega)}$ и D_2. Из (4.2.15), (4.2.54), и (4.2.61) получаем оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_t^{N+1}-u_t^N\|_4\leq D_2\max_{t\in[0,T]}\Big\{\|M_1(u_t^{N+1}-u_t^N)\|_2+\|u_t^{N+1}-u_t^N\|_2\Big\}\leq$$

$$\leq D_2(2+\mu_1^{-1}C_4+C_{15}'(N+1))e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\,\|h^1-h^0\|_2, \qquad (4.2.62)$$

Далее, ввиду (4.2.23), (4.2.52) и (4.2.60)

$$\|u^N\|_4 \le \sum_{i=0}^{N-1} \|u^{i+1} - u^i\|_4 + \|u^0\|_4 \le C_{15} D_2 \|h^1 - h^0\|_2 \sum_{i=0}^{N-1} (i+2) e^{-\tilde{\alpha} i T} +$$

$$+2D_2 \|h^1 - h^0\|_2 \sum_{i=0}^{N-1} e^{-\tilde{\alpha} i T} + \|u^0\|_4 \le C_{15} D_2 \frac{2 - e^{-\tilde{\alpha} T}}{(1 - e^{-\tilde{\alpha} T})^2} \|h^1 - h^0\|_2 +$$

$$+\frac{2D_2}{1 - e^{-\tilde{\alpha} T}} \|h^1 - h^0\|_2 \Big\} + \|u^0\|_4 \le \frac{C_{16}}{(1 - e^{-\tilde{\alpha} T})^2} \|u^0|_{t=T}\|_4 + \|u^0\|_4, \quad (4.2.63)$$

где C_{16} зависит от C_{15}, $\tilde{\alpha}$, T, D_2, $\|m_{ij}\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $\|m_1\|_{C^2(\overline{\Omega})}$ и не зависит от N. В силу (4.2.18), (4.2.44), (4.2.47) и (4.2.52) для U_0 справедливы неравенства

$$\|u^0\|_4 \le D_2 \big\{ \|M_1 u^0\|_2 + \|u^0\|_2 \big\} \le D_2 \big\{ D_0 \|M_1^2 u^0\| + D_0 \|M_1 u^0\| + \|u^0\|_2 \big\} \le$$

$$\le D_2 \big\{ D_0 \big[\|M_1 V^0\| + \|M_1 \Psi^0\| \big] + D_0 \|M_1 u^0\| + \|u^0\|_2 \big\} \le$$

$$\le C_{17} (1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1} \big[\|\varphi\| + C_1 \|F\|_{L^2(Q_T)} \big] + C_{18} \Big(\|M_1 \varphi\| + \|M_1 F\|_{L^2(Q_T)} +$$

$$+ \int_0^t \|u^0\|_4 d\tau \Big) \le C_{19} \Big[\|\varphi\|_2 + \Big(\int_0^T \|F\|_2^2 d\tau \Big)^{1/2} \Big] + C_{18} \int_0^t \|u^0\|_4 d\tau,$$

откуда согласно лемме Гронуолла следует, что

$$\max_{t \in [0,T]} \|u^0\|_4 \le C_{19} e^{C_{18} T} \Big[\|\varphi\|_2 + \Big(\int_0^T \|F\|_2^2 d\tau \Big)^{1/2} \Big].$$

Постоянные C_{17}, C_{18} и C_{19} зависят от $\tilde{\alpha}$, T, D_0, D_2, C_1, C_2 C_7, ν_1, μ_2, $\|\mathbf{m}_2\|_{(C^1(\overline{\Omega}))^n}$ и не зависят от N. Согласно теореме 4.2.1 $u^0 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))$. Поэтому последнее неравенство остается справедливым и для $\|u^0_{t=T}\|_4$. Оно вместе с (4.2.63) приводит к оценке

$$\|u^N\|_4 \le \Big(C_{16} (1 - e^{-\tilde{\alpha} T})^{-2} + 1 \Big) C_{19} e^{C_{18} T} \Big) \Big[\|\varphi\|_2 + \Big(\int_0^T \|F\|_2^2 d\tau \Big)^{1/2} \Big] \equiv$$

$$\equiv C_{20} \Big[\|\varphi\|_2 + \Big(\int_0^T \|F\|_2^2 d\tau \Big)^{1/2} \Big]. \quad (4.2.64)$$

Аналогичным образом, используя (4.2.19), (4.2.46), (4.2.48), (4.2.52), (4.2.53), (4.2.61) и (4.2.64), из уравнения (4.2.42) можно получить оценку

$$\|u_t^N\|_4 \leq C_{21}\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int\limits_0^t \|F\|_2^2\, d\tau\right)^{1/2} + \|F\|_2\right].$$

Из неравенств (4.2.60) и (4.2.62) следует, что последовательнотъ u^N фундаментальна в $C^1([0,T];W_2^4(\Omega))$ и сходится к решению u задачи (4.2.7), (4.2.9), (4.2.17) при $N \to \infty$. Причем для u справедливы оценки (4.2.38), (4.2.39) с $C' = C_{20}$ and $C'' = C_{21}$. Теорема доказана.

4.2.3 Обратная задача для нагруженного уравнения соболевского типа

Полученные выше результаты позволяют установить однозначную разрешимость следующей обратной задачи. При заданных $g_k(x,p)$, $k = 1,2$, $G(t,x)$, $u_0(x)$, $u_T(x)$ найти пару функций $(u(t,x),\ f(x))$, удовлетворяющих уравнению

$$M_1 u_t + M_2 u = g_1(x,U) + g_2(x,U)f(x) + G(t,x), \tag{4.2.65}$$

в Q_T, где $U = \int_0^T u dt$, краевым условиям

$$M_1 u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.2.66}$$

$$u\Big|_{S_T} = 0 \tag{4.2.67}$$

и условию переопределения

$$M_1 u\Big|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \Omega. \tag{4.2.68}$$

Задача (4.2.65)–(4.2.68) исследовалась ранее [63,289] в случае, когда функции g_1 и g_2 не зависят от U. Результат, полученный Ранделлом [289], относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника f в уравнении (4.2.65) с линейными операторами $M_1 = M + I$ (I – тождественный оператор) и $M_2 = M$. Ранделл доказал глобальную теорему существования и единственности решения обратной задачи (4.2.65)–(4.2.68), когда $g_1(x,U) \equiv 0$, $g_2(x,U) \equiv 1$ и $G(t,x) \equiv 0$. В [63] исследована обратная задача

(4.2.65)–(4.2.68) в случае вырожденного оператора M_1, эллиптического оператора M_2, $g_1(x,U) \equiv 0$ и $g_2 = g_2(t,x)$. Доказано существование сильного обобщенного решения.

Теорема 4.2.4. *Пусть выполняется предположение (i) теоремы 4.2.2, а также*

(v) $G(t,x) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_0, u_T \in L^2(\Omega)$;

(vi) *функции* $g_k(x,p)$, $k = 1,2$, *непрерывны в* $\overline{\Omega} \times (-\infty,+\infty)$; *существует положительная константа* ν *и неотрицательная непрерывная функция* $q_1(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ *такие, что* $|g_2(x,p)| \geq \nu$ *для всех* $(x,p) \in \overline{\Omega} \times (-\infty,+\infty)$,

$$\|g_1|_{p=v}\| \leq q_1(\|v\|_2)$$

для любого $v \in W_2^2(\Omega)$.

Тогда существует единственное решение $(u(t,x), f(x)) \in V \equiv C^1([0,T]; W) \times L^2(\Omega)$ *задачи (4.2.65)–(4.2.68) при любом* $T > 0$. *Причем, справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|u(t,\cdot)\big\|_M \leq C_{22}\Big[\|u_T\| + \|u_0\| + \Big(\int\limits_0^T \|G\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big], \tag{4.2.69}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_M \leq C_{23}\Big[\|u_T\| + \|u_0\| + \max_{t\in[0,T]} \|G\|\Big], \tag{4.2.70}$$

$$\|f\| \leq C_{24}\Big[\|u_T\| + \|u_0\| + \Big(\int\limits_0^T \|G\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big] \tag{4.2.71}$$

с некоторыми положительными постоянными C_{22}, C_{23} *и* C_{24}.

Доказательство. Проинтегрируем (4.2.65) по t от 0 до T и выразим $f(x)$ из полученного равенства. Это даст

$$f(x) = \left[\frac{1}{T}\Big(u_T - u_0 + M_2U - \int\limits_0^T G(t,x)\,dt\Big) - g_1(x,U)\right]\Big(g_2(x,U)\Big)^{-1}. \tag{4.2.72}$$

Введем новую функцию

$$v = u - \frac{1}{T}\int\limits_0^T u\,d\tau. \tag{4.2.73}$$

Она является решением уравнения

$$M_1 v_t + M_2 v \,=\, F_1(t,x), \tag{4.2.74}$$

где

$$F_1(t,x) \,=\, \frac{1}{T}\Big(u_T - u_0\Big) + G(t,x) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T G(s,x)\,ds.$$

В силу (4.2.65), (4.2.67) и (4.2.73) $v(t,x)$ удовлетворяет условиям

$$M_1 v(T,x) - M_1 v(0,x) \,=\, u_T(x) - u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.2.75}$$

$$v\Big|_{S_T} = 0. \tag{4.2.76}$$

Таким образом мы получаем две задачи: первая – (4.2.74)–(4.2.76) и вторая – (4.2.73), (4.2.66). Согласно теореме 4.2.2, задача (4.2.74)–(4.2.76) имеет единственное решение $v \in C^1([0,T];W)$ и справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|v\|_M \le \frac{2C_2}{1-e^{-\alpha_1 T}}\Bigg[\|u_T - u_0\| + C_1\Big(\int\limits_0^T \|F_1\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Bigg] \le$$

$$\le C_{25}\Bigg[\|u_T\| + \|u_0\| + \Big(\int\limits_0^T \|G\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Bigg],$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_t\|_M \le \frac{C_3}{1-e^{-\alpha_1 T}}\Bigg[\|u_T - u_0\| + C_1\Big(\int\limits_0^T \|F_1\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Bigg] + \max_{t\in[0,T]}\|F_1\| \le$$

$$\le C_{26}\Bigg[\|u_T\| + \|u_0\| + \Big(\int\limits_0^T \|G\|^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Bigg] + \max_{t\in[0,T]}\|G\|.$$

Здесь положительные постоянные C_{25} и C_{26} зависят от α_1, T, C_1, C_2, C_3. Из (4.2.74)–(4.2.76) следует, что $\int_0^T v dt \equiv 0$. Это позволяет найти u как решение интегрального уравнения (4.2.73). Ввиду (4.2.66),

$$u(t,x) = v(t,x) - v(0,x) + M_1^{-1}u_0(x) \tag{4.2.77}$$

и $u \in C^1([0,T];W)$. Кроме того, имеют место оценки (4.2.69) и (4.2.70) с положительными постоянными C_{22}, C_{23}, зависящими от T, ν_1, k_m, K_m, C_{25}, C_{26}. В свою очередь, из (4.2.72) и (4.2.77) заключаем, что $f(x)$ определяется функцией u единственным образом, $f(x) \in L^2(\Omega)$ и справедлива оценка (4.2.71), где положительная постоянная C_{24} зависит от T, ν_1, k_m, K_m, C_{22}, $\|m_{2ij}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_{2i}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_2\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Пара (u, f) является решением задачи (4.2.65)–(4.2.68). Действительно, ввиду (4.2.72) подстановка (4.2.73) в (4.2.74) позволяет убедиться в справедливости уравнения (4.2.65). В силу (4.2.1) и (4.2.77) выполняется (4.2.67). Далее, подставляя (4.2.72) в (4.2.65) и интегрируя результат по t от 0 до T, получаем, что $M_1 u(T, x) = u_T(x)$, т. е. выполняется (4.2.68).

Докажем, что решение (u, f) единственно. Пусть (u', f') и (u'', f'') – два решения задачи (4.2.65)–(4.2.68). Тогда пара $(\tilde{u}, \tilde{f}) = (u' - u'', f' - f'')$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} M_1\tilde{u}_t + M_2\tilde{u} = g_1(x, U') - g_1(x, U'') + (g_2(x, U') - g_2(x, U''))f' + \\ + g_2(x, U'')\tilde{f}, \qquad (4.2.78) \\ M_1\tilde{u}|_{t=0} - M_1\tilde{u}|_{t=T} = 0, \qquad \tilde{u}|_{S_T} = 0, \end{gathered}$$

где $U' = u' - \frac{1}{T}\int_0^T u' dt$, $U'' = u'' - \frac{1}{T}\int_0^T u'' dt$. Вводя функцию $\tilde{v} = \tilde{u} - \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{u} dt$ и повторяя рассуждения, приведшие к (4.2.74)–(4.2.76), (4.2.77), получим

$$\begin{gathered} M_1\tilde{v}_t + M_2\tilde{v} = 0, \\ M_1\tilde{v}|_{t=0} - M_1\tilde{v}|_{t=T} = 0, \qquad \tilde{u}|_{S_T} = 0 \end{gathered}$$

и $\tilde{u} = \tilde{v} - \tilde{v}(0, x)$, откуда согласно теореме 4.2.2 следует, что $\tilde{v} \equiv 0$ и, соответственно, $\tilde{u} \equiv 0$. В свою очередь из (4.2.78) вытекает, что $\tilde{f} \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 4.2.5. *Пусть $\partial\Omega \subset C^4$, выполняется предположение (iii) теоремы 4.2.3 и условия*

(vii) $u_0(x), u_T(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H^{2+r}(\overline{\Omega})$ *и* $G(t, x) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega}))$, $0 \leq r \leq 1$*;*

(viii) *Если $n \leq 6$, то функции $g_k(x, p)$, $k = 1, 2$, дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$; если $n > 6$, то $g_1(x, p) = c(x)p$, где $c(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, и $g_2(x, p) = g_2(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Существует постоянная $\nu > 0$ такая, что $|g_2(x, p)| \geq \nu$ для всех $(x, p) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$.*

Тогда $f \in W_2^2(\Omega)$, $u \in C^1([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega))$ *и справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|u(t,\cdot)\big\|_4 \le C'_{22}\Big[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \Big(\int\limits_0^T \|G\|_2^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big], \tag{4.2.79}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_4 \le C'_{23}\Big[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \max_{t\in[0,T]} \|G\|_2\Big], \tag{4.2.80}$$

$$\|f\|_2 \le C'_{24}\Big[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \Big(\int\limits_0^T \|G\|_2^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big] \tag{4.2.81}$$

с некоторыми положительными постоянными C'_{22}, C'_{23} *и* C'_{24}.

Доказательство. Согласно теореме 4.2.3 решение v задачи (4.2.74)–(4.2.76) принадлежит классу $C^1([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega))$ и выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,T]} \|v\|_4 &\le C'\Big[\|u_T - u_0\|_2 + \Big[\int\limits_0^T \|F_1\|_2^2\,d\tau\Big]^{1/2}\Big]\\ &\le C_{27}\Big[\|u_T - u_0\|_2 + \Big(\int\limits_0^T \|G\|_2^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big],\end{aligned} \tag{4.2.82}$$

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,T]} \|v_t\|_4 &\le C''\Big[\|u_T - u_0\|_2 + \Big[\int\limits_0^T \|F_1\|_2^2\,d\tau\Big]^{1/2} + \max_{t\in[0,T]} \|F_1\|_2\Big]\\ &\le C_{28}\Big[\|u_T - u_0\|_2 + \Big(\int\limits_0^T \|G\|_2^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big] + \max_{t\in[0,T]} \|G\|_2,\end{aligned} \tag{4.2.83}$$

где положительные постоянные C_{27} и C_{28} зависят от α_1, T, C', C''.

В силу (4.2.72), (4.2.77), (4.2.82) и (4.2.83) $u \in C^1([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega))$, $f \in W_2^2(\Omega)$ и справедливы оценки (4.2.79)–(4.2.81) с константами C'_{22}, C'_{23} and C'_{24}, зависящими от T, ν_1, k_m, K_m, C_{27}, C_{28}, $\|m_{ij}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_{2i}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_2\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Результаты, полученные выше, остаются справедливыми для уравнения (4.2.65) с оператором M_1 общего вида (4.2.1).

4.2.4 Корректность задачи 4.2

Начнем исследование задачи 4.2 со случая, когда A является линейным дифференциальным оператором вида (4.2.6).

Будем предполагать выполненными следующие условия.

VII. $l_{kij}(x), a_{ij}(x) b_{ij}(x) \in W^1_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $\mathbf{l}_k, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$, $k = 1, 2$, $l, a, b \in L^\infty(\Omega)$.

VIII. Операторы L_k и A являются сильно эллиптическими, т. е., существуют положительные постоянные k_l, K_l, k_a, K_a такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$

$$k_l \|v\|_1^2 \leq \big\langle L_k v, v \big\rangle_1 \leq K_l \|v\|_1^2, \qquad k = 1, 2,$$

$$k_a \|v\|_1^2 \leq \big\langle A v, v \big\rangle_1 \leq K_a \|v\|_1^2.$$

Под решением задачи 4.2 с таким оператором A будем понимать пару $\{u_1, u_2\}$ из класса $W_1 = \{\{v_1, v_2\} | v_k \in C^1([0,T]; W^2_2(\Omega)), k = 1, 2\}$, которая удовлетворяет соотношениям (4.2.2)–(4.2.5).

Теорема 4.2.6. *Пусть выполняюся предположения VII–VIII, условия (i) теоремы 4.2.2 и (vi) теоремы 4.2.4. Пусть также* $\partial\Omega \in C^2$, $u_0, u_T \in L^2(\Omega)$, $f_k \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta_k \in C^1([0,T]; W^{3/2}_2(\partial\Omega))$, $k = 1, 2$, *функция* $\gamma(x,p)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$, *существует неотрицательная непрерывная функция* $q_2(s_1, s_2)$ $((s_1, s_2) \in \mathbf{R}^2)$ *такая, что*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L^2(Q_T)} \leq q_2(\|v\|_{L^2([0,T]; W^2_2(\Omega))}, \|v_t\|_{L^2(Q_T)})$$

для любого $v \in L^2([0,T]; W^2_2(\Omega))$ *с* $v_t \in L^2(Q_T)$. *Тогда Задача 4.2 имеет единственное решение* $\{u_1, u_2\} \in W_1$. *Для* u_1 *и* u_2 *справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \Big[\|u_1\|_M + \|u_2\|_M\Big] \leq C_{29} \Big\{ \max_{t\in[0,T]} \Big[\|\beta_1\|_{W^{3/2}_2(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W^{3/2}_2(\partial\Omega)}\Big] + \\ + \|u_0\| + \|u_1\| + \|f_1\|_{L^2(Q_T)} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)} \Big\}, \tag{4.2.84}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \Big[\|u_{1t}\|_M + \|u_{2t}\|_M\Big] \leq C_{30} \Big\{ \|\beta_1\|_{C^1([0,T]; W^{3/2}_2(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T]; W^{3/2}_2(\partial\Omega))} + \\ + \|u_0\| + \|u_1\| + \max_{t\in[0,T]} \{\|f_1\| + \|f_2\|\} \Big\} \tag{4.2.85}$$

с некоторыми положительными постоянными C_{29} *и* C_{30}.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в два этапа. На первом этапе установим существование и единственность решения задачи (4.2.2), (4.2.4), (4.2.5) как обратной задачи восстановления неизвестной функции источника U_2 с финальным условием переопределения на u_1 при $t = T$. На втором этапе найдем u_2 как решение задачи для уравнения (4.2.3) с граничными данными (4.2.5) при условии, что известны u_1 и U_2.

Обозначим через h_1 решение задачи $M_1 h_1 = 0$, $h_1|_{\partial\Omega} = \beta_1$ и введем функцию $w_1 = u_1 - h_1$. Записывая (4.2.2), (4.2.4), (4.2.5) в терминах w_1, приходим к следующей обратной задаче отыскания пары функций (w_1, AU_2):

$$M_1 w_{1t} + M_2 w_1 = \tilde{g}_1(x, \bar{w}_1) + \tilde{g}_2(x, \bar{w}_1) AU_2, + f_1 - M_2 h_1 \tag{4.2.86}$$

$$M_1 w_1|_{t=0} = u_0(x), \tag{4.2.87}$$

$$M_1 w_1|_{t=T} = u_T(x), \tag{4.2.88}$$

$$w_1|_{S_T} = 0, \tag{4.2.89}$$

где $\bar{y} = T^{-1}\int_0^T y dt$ для $y \in L^1(0,T)$, $\tilde{g}_k(x, \bar{w}_1) = g_k(x, \bar{w}_1 + \bar{h}_1)$, $k = 1, 2$.

По теореме 4.2.4 эта задача имеет единственное решение $\{w_1, AU_2\}$. Причем $w_1 \in C^1([0,T]; W)$, $AU_2 \in L^2(\Omega)$, и для w_1 справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|w_1\|_M \le C_{22}\Big[\|u_T\| + \|u_0\| + \Big(\int_0^T \|f_1 - M_1 h_1\|^2 d\tau\Big)^{1/2}\Big], \tag{4.2.90}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|w_{1t}\|_M \le C_{23}\Big[\|u_T\| + \|u_0\| + \max_{t\in[0,T]} \|f_1 - M_1 h_1\|\Big], \tag{4.2.91}$$

Из условиий теоремы и гладкости w_1 следует, что $u_1 \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Так как для любого целого числа $\kappa > 1$ и $v \in W_2^{2\kappa}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{2\kappa} \le \sigma \|v\|_{W_2^{2\kappa-1/2}(\partial\Omega)} \tag{4.2.92}$$

(см. [86, p. 87–88]), где константа $\sigma > 0$ зависит от n и mesΩ, соотношения (4.2.90)–(4.2.91) позволяют вывести оценки для u_1 и u_{1t}.

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_1\|_M \le C_{31}\Big\{\|u_0\| + \|u_1\| + \max_{t\in[0,T]} \|\beta_1\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(Q_T)}\Big\}, \tag{4.2.93}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{1t}\|_M \le C_{32}\Big\{\|u_0\| + \|u_1\| + \|\beta_1\|_{C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \max_{t\in[0,T]} \|f_1\|\Big\}. \tag{4.2.94}$$

Здесь положительные постоянные C_{31} и C_{32} зависят от n, T, σ, k_m, K_m, $\mathrm{mes}\Omega$, C_1, C_2, C_3, C_{22} и C_{23}.

Проинтегрируем (4.2.2) и (4.2.3) по t на $[0,T]$ и разделим результирующие соотношения на T. Это даст

$$\delta u_1 + M_2 \bar{u}_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1) A U_2 + \bar{f}_1, \tag{4.2.95}$$

$$L_1(u_2(T,x) - u_2(0,x)) + L_2 U_2 = BU_1 + \int\limits_0^T (\gamma(x, u_1) + f_2) dt, \tag{4.2.96}$$

где $\delta u_1 = T^{-1}(u_T(x) - u_0(x))$. Выразим U_2 из (4.2.95) как

$$U_2 = A^{-1}\big[\big(\delta u_1 + M_2 \overline{u}_1 - g_1(x, U_1) - \overline{f}_1\big)(g_2(x, U_1))^{-1}\big] \equiv A^{-1}\psi(x). \tag{4.2.97}$$

и подставим в (4.2.96). Будем иметь

$$L_1(u_2(T,x) - u_2(0,x)) = -L_2 A^{-1}\psi + BU_1 + \int\limits_0^T (\gamma(x, u_1) + f_2) dt \equiv \Phi(x). \tag{4.2.98}$$

В силу (4.2.97), теоремы вложения и предположений теоремы $A^{-1}\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$ и $\Phi \in L^2(\Omega)$. Обозначая через h_2 решение задачи $L_1 h_2 = 0$, $h_2|_{\partial\Omega} = \beta_2$ и переписывая (4.2.3) относительно функции $w_2 = u_2 - h_2$ мы приходим к задаче (4.2.7),(4.2.9),(4.2.17) для w_2 с операторами L_k вместо M_k, $k = 1, 2$, где $F(t,x) = -L_2 h_2 + Bu_1 + \gamma(x, u_1) + f_2(t,x)$ и $\varphi(x) = \Phi(x) - L_1(h_2(T,x) - h_2(0,x))$. Согласно теореме 4.2.2, эта задача имеет единственное решение $w_2 \in C^1([0,T]; W)$. Следовательно существует единственное решение $u_2 \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ задачи (4.2.3), (4.2.5), (4.2.98). Ввиду (4.2.15), (4.2.18), (4.2.19), (4.2.92)–(4.2.94) и определения w_2 справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_2\|_M \le C_{33}\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \Big[\|\beta_1\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\Big] + \|u_0\| + \|u_1\| + \\ + \|f_1\|_{L^2(Q_T)} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\Big\}, \tag{4.2.99}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{2t}\|_M \le C_{34}\Big\{ \|\beta_1\|_{C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \\ + \|u_0\| + \|u_1\| + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\| + \|f_2\|\}\Big\}, \tag{4.2.100}$$

где положительные константы C_{33} и C_{34} зависят от T, σ, ν_1, ν_2, C_i, $i = 1, 2, 3$, C_{31}, C_{32}. Неравенства (4.2.93), (4.2.94), (4.2.99), (4.2.100) в свою очередь приводят к (4.2.84) и (4.2.85) с $C_{29} = C_{31} + C_{33}$ и $C_{30} = C_{32} + C_{34}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу 4.2 с $A = I$. В этом случае под решением задачи 4.2 будем понимать пару функций $\{u_1, u_2\}$ из класса $W_2 = \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega)),\ v_2 \in C^1(0,T; W_2^2(\Omega))\}$, которая удовлетворяет соотношениям (4.2.2)–(4.2.5).

Теорема 4.2.7. *Пусть $\partial\Omega \in C^4$, выполняются условия (iii) теоремы 4.2.3 и (viii) теоремы 4.2.5, предположения I, II относительно операторов L_k и B, $k = 1,2$, $f_1 \in C([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega}))$, $\beta_1 \in C^1([0,T]; H^{r+2}(\partial\Omega) \cap W_2^{7/2}(\partial\Omega))$, $f_2 \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta_2 \in C^1(0,T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $u_0, u_T \in H^r(\overline{\Omega}) \cap W_2^2(\Omega)$, $0 < r < 1$, функция $\gamma(x,p)$ непрерывна в $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$. существует неотрицательная непрерывная функция $q_1(\xi)$ $(\xi \in \mathbf{R})$ такая, что*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L_2(Q_T)} \leq q(\|v\|_{C^1([0,T];W_2^4(\Omega))})$$

для всех $v \in C([0,T]; W_2^4(\Omega))$ с $v_t \in L_2^2([0,T]; W_2^4(\Omega))$. Тогда задача 4.2 имеет единственное решение $\{u_1, u_2\} \in W_2$ и

$$\max_{t\in[0,T]}(\|u_1\|_4 + \|u_2\|_2) \leq C_{35}\Big\{\max_{t\in[0,T]}\Big[\|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\Big] +$$
$$+\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\Big\}, \qquad (4.2.101)$$

$$\max_{t\in[0,T]}(\|u_{1t}\|_4 + \|u_{2t}\|_2) \leq C_{36}\Big\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} +$$
$$+\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|\}\Big\}. \qquad (4.2.102)$$

Доказательство. Воспользуемся той же схемой, что и при доказательстве теоремы 4.2.6. Рассмотрим снова задачу (4.2.2),(4.2.4),(4.2.5) как обратную задачу восстановления неизвестной функции источника U_2 и затем найдем функцию u_2 как решение задачи для (4.2.3) с граничными данными (4.2.5) при известных u_1 и U_2.

Обратимся к задаче (4.2.86)–(4.2.89) для функции w_1. Согласно теореме 4.2.5, эта задача имеет единственное решение $w_1 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega))$, $AU_2 \in W_2^2(\Omega)$ и справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_1\|_4 \leq C'_{22}\Big[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \Big[\int_0^T \|f_1 - M_2h_1\|_2^2\,d\tau\Big]^{1/2}\Big], \qquad (4.2.103)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_{1t}\|_4 \leq C'_{23}\Big[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\|f_1 - M_2h_1\|_2\Big]. \qquad (4.2.104)$$

В силу (4.2.4), (4.2.92), (4.2.103), (4.2.104) и гладкости w_1, в условиях теоремы $u_1 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega))$ и имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_1\|_4 \le C_{37}\Big\{\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]} \|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))}\Big\}, \quad (4.2.105)$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{1t}\|_4 \le C_{38}\Big\{\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \max_{t\in[0,T]} \|f_1\|_2\Big\}. \quad (4.2.106)$$

Здесь положительные константы C_{37} и C_{38} зависят от n, T, σ, α, k_m, K_m, mesΩ, C_1, C'_{22} and C'_{23}.

Проинтегрируем (4.2.2) по t на $[0,T]$ и выразим U_2 через u_1 в виде

$$U_2 = \big(\delta u_1 + M_2\overline{u}_1 - g_1(x,U_1) - \overline{f}_1\big)(g_2(x,U_1))^{-1} \equiv \psi(x). \quad (4.2.107)$$

Подставляя (4.2.107) в равенство (4.2.3), проинтегрированное по t на $[0,T]$, получаем равенство

$$L_1(u_2(T,x) - u_2(0,x)) =$$
$$= -L_2\psi + BU_1 + \int_0^T (\gamma(x,u_1) + f_2(t,x))dt \equiv \Phi_1(x). \quad (4.2.108)$$

В условиях теоремы и гладкости u_1 из теремы вложения вытекает, что $\psi(x) \in W_2^4(\Omega)$ и $\Phi_1 \in W_2^2(\Omega)$. Переписывая (4.2.3), как уравнение для w_2 мы снова приходим к задаче (4.2.7),(4.2.9),(4.2.17) относительно w_2 с операторами L_k вместо M_k, $k=1,2$, где $F(t,x) = L_2h_2 + Bu_1 + \gamma(x,u_1) + f_2(t,x)$ и $\varphi(x) = \Phi_1(x) - L_1(h_2(T,x) - h_2(0,x))$. Согласно теореме 4.2.3, эта задача имеет единственное решение $w_2 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega))$. Следовательно, существует единственное решение $u_2 \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ задачи (4.2.3), (4.2.5), (4.2.108). В силу оределения w_2, (4.2.15), (4.2.92), (4.2.105) и (4.2.106), имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_2\|_2 \le C_{39}\Big\{\max_{t\in[0,T]} \Big[\|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\Big] + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 +$$
$$+\|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\Big\}, \quad (4.2.109)$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{2t}\|_2 \le C_{40}\Big\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} +$$
$$+\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|\}\Big\}, \quad (4.2.110)$$

где положительные постоянные C_{39} и C_{40} зависят от T, σ, ν_1, ν_2, C_i, $i=1,2,3$, C_{37}, C_{38}. Из неравенств (4.2.105), (4.2.106), (4.2.109) и (4.2.110) вытекают оценки (4.2.101) и (4.2.102) с $C_{34} = C_{37} + C_{39}$ и $C_{35} = C_{38} + C_{40}$. Теорема доказана.

Заключение

В диссертации решены актуальные задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Исследована корректность новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации, в основе которых лежат математические модели, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах.

В работе доказано существование и единственность обобщенного решения краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием. В отличии от других работ, в которых существование обобщенного решения установлено при ограничениях на размерность по пространственным переменным и порядок степенного роста нелинейности q, связанных с теоремой вложения, данный результат получен при произвольной размерности и $q \geq 2$.

В диссертации представлен новый класс коэффициентных обратных задач с интегральными условиями переопределения на границе области, который ранее не рассматривался. В главе 2 исследованы обратные задачи восстановления неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, линейных уравнений фильтрации соболевского типа, а также связанные с ними задачи для уравнений параболического и эллиптического типа. Для них установлены условия существования и единственности сильного обобщенного решения, доказана непрерывная зависимость решения от исходных данных. Основная идея предложенного метода доказательства существования решения состоит в продолжении исходных данных с границы внутрь области, что позволяет свести обратную задачу к операторному уравнению второго рода для неизвестного коэффициента с оператором, имеющим неподвижную точку. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности, могут быть использованы для разработки численных алгоритмов решения обратных задач.

Во второй главе также найдены достаточные условия на входные данные, при которых решение обратной задачи восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка линейного уравнения соболевского типа стабилизируется к решению сответствующей стационарной обратной задачи. Кроме того, доказана однозначная разрешимость параболической обратной задачи восстановления коэффициента в старшем члене с интегральным условием переопределения на границе с помощью регуляризации соответствующей обратной задачей для уравнения соболевского типа.

В главе 3 постановки и методы исследования корректности обратных задач, рассмотренных в предыдущей главе, обобщены на случай обратных задач восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка нелинейных уравнений фильтрации с интегральными условиями переопределения на границе. Теоремы существования и единственности доказаны для уравнения, неразрешенного относительно старшей производной по времени, и стационарного уравнения фильтрации.

В четвертой главе методы решения обратных задач применены для изучения нового класса нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений параболического и соболевского типа, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Для этих задач найдены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения.

Результаты диссертационной работы представляют теоретический интерес для специалистов в области качественной теории уравнений в частных производных и теории обратных задач. Предложенные в работе подходы и методы доказательства могут стать основой для постановки и исследования новых краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации.

Список литературы

1. Аблабеков, Б.С. Одномерные обратные задачи для уравнения фильтрации жидкостей в трещиноватой породе и приближенные методы решения / Б. С. Аблабеков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – № 21. – С. 273–272.

2. Алексеев, Г. В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания / Г. В. Алексеев // Доклады РАН. – 2013. – Т. 449. – № 6. – С. 652–656.

3. Алексеев, Г. В. О разрешимости первой краевой задачи и задачи Коши для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости / Г. В. Алексеев, Н. В. Хуснутдинова // Динамика сплошной среды. – 1971. – Вып. 7. – С. 33–46.

4. Алексеев, Г.В. О разрешимости первой краевой задачи для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости / Г. В. Алексеев, Н. В. Хуснутдинова // Доклады АН СССР. – 1972. – Т. 202. – № 2. – С. 310–312.

5. Алексеев, Г. В. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г. В. Алексеев, Е. А. Калинина // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2007. – Т. 10. – № 1(29). – С. 3–16.

6. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин // Доклады РАН. – 2016 – Т. 471. – № 1. – С. 32–36.

7. Алиев, Р. А. Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа / Р. А. Алиев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – № 1. – С. 3–9.

8. Аниконов, Ю. Е. К теории конструктивного исследования обратных задач для эволюционных уравнений: препринт / Ю. Е. Аниконов. – (Препринт

№ 143). – Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2004. – 30 с.

9. Антонцев, С. Н. Пространственные задачи нестационарной двухфазной фильтрации в неоднородных анизотропных пористых средах / С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 243. – № 3. – С. 553–556.

10. Антонцев, С. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. Н. Кажихов, В. Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 320 с.

11. Асанов А. А., Атаманов Е. Р. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения / А. А. Асанов, Е. Р. Атаманов // Сибирский Математический Журнал. – 1995. – Т. 36. – № 4. – С. 752–762.

12. Атаманов, Е. Р. Устойчивость и единственность решения смешанной задачи для псевдопараболического уравнения / Е. Р. Атаманов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1982. – № 15. – С. 283–288.

13. Атаманов, Е. Р. Неклассическая задача для многомерного псевдопараболического уравнения / Е. Р. Атаманов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим. – 1983. – № 16. – С. 264–268.

14. Афиногенова, О. А. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / О. А. Афиногенова, Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Доклады Российской Академии наук. – 2009. – Т. 424. – № 4. – С. 439–441.

15. Баренблатт, Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.

16. Баренблатт, Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт , В. М. Ентов , В. М. Рыжик. – Москва: Недра, 1984. – 211 с.

17. Безнощенко, Н. Я. Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении / Н. Я. Безнощенко // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 1. – С. 19–26.

18. Белов, Ю. Я. Об одной регуляризации уравнения Бюргерса / Ю. Я. Белов, Н. Н. Яненко // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. – 246. – № 3. – С. 521–524.

19. Белов Ю. Я. Нелокальное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве / Ю. Я. Белов, Н. Н. Яненко // Численные методы механики сплошной среды. – 1979. – Т. 10. – № 6. – С. 5–26.

20. Белов, Ю. Я. Об одном классе нелокальных нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Я.Белов, Н. Н.Яненко // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 252. – № 6. – С. 1292–1295.

21. Белов Ю. Я. Задача Коши для псевдопараболического уравнения в банаховом пространстве / Ю. Я. Белов, Н. Н. Яненко // Численные методы механики сплошной среды. – 1980. – Т. 11. – № 7. – С. 12–22.

22. Белов Ю. Я. Об одной системе дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Я. Белов, Н. Н. Яненко // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 263. – № 3. – С. 526–529.

23. Белов, Ю. Я. Задача Коши для некоторых типов эволюционных уравнений и систем в банаховом пространстве / Ю. Я. Белов, А. Ш. Любанова // Численные методы механики сплошной среды. – 1987. – Т. 1. – № 1. – С. 16–27.

24. Белов, Ю. Я. Об одной задаче для системы составного типа / Ю. Я. Белов, Т. Н. Шипина // Доклады Академии наук. – 2000. – Т. 370. – № 2. – С. 155–157.

25. Блохин, А. М. Конструирование вычислительных алгоритмов для задачи о баллистическом диоде / А.М.Блохин, А. С. Ибрагимова, Б. В. Семисалов

// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50. – № 1. – С. 188–208.

26. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач: монография / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1988. – 181 с.

27. Васин, И. А. Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений / И. А. Васин, В. Л. Камынин // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – № 4 – С. 750–766.

28. Вахрушев, А. В. Математическое моделирование процесса совместного электрохимического осаждения наночастиц AL_2O_3 в матрицу Cu. Часть 1. Математическая модель / А. В. Вахрушев, Е. К. Молчанов // Химическая физика и мезоскопия. – 2013. – Т. 15. – № 1. – С. 57–64.

29. Вишик, М. И. Задача Коши для уравнения с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения / М. И. Вишик // Математический сборник. – 1956. – Т. 39. – № 1. – С. 51–148.

30. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М.Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса / В. А. Водахова // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. XVIII. – № 2. – С. 280–285.

31. Войцеховский, А. В. О решении обратной задачи нестационарной фильтрации / В. П. Войцеховский, В. П. Танана // Вестник Челябинского университета. Серия «Математика, механика, информатика». – 2003. – № 3. – С. 5–15.

32. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения: монография / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.

33. Гальперн, С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С. А. Гальперн // Труды Московского математического общества. – 1960. – Т. 9. – С. 401–423.

34. Гольдман, Н. Л. Обратные задачи с финальным переопределением для параболических уравнений с неизвестными коэффициентами при старшей производной / Н. Л. Гольдман // Доклады Академии Наук. – 2011. – Т. 438. – № 2. – С. 162–167.

35. Дамаскин Б. Б. Введение в электрохимическую кинетику / Б. Б. Дамаскин, О. А. Петрий. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва: Высшая школа. – 1983. – 400 с.

36. Демиденко Г. В. Задача Коши для псевдопараболических систем / Г. В. Демиденко. – Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – №. 6. – С. 1251–1266.

37. Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной: научное издание / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.

38. Денисов А. М. Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом / А. М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1982. – Т. – 22. – № 4. – С. 858–864.

39. Дженалиев М. Т. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I / Т. М. Дженалиев // Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47. – С. 527–547.

40. Дженалиев, М. Т. Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Дифференциальные уравнения. 2007. – Т. 43 – № 4 – с. 498–508.

41. Дженалиев, М. Т. Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. II / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Дифференциальные уравнения. 2007. – Т. 43 – № 6 – с. 788–794.

42. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнений движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е. С. Дзекцер // Доклады АН СССР. – 1972. – Т. 202. – № 5. – С. 1031–1033.

43. Дзекцер, Е. С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах / Е. С. Дзекцер // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 220. – № 3. – С. 540–543.

44. Дубинский, Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю. А. Дубинский // В сб. Современные проблемы математики. Т. 9. – Москва: ВИНИТИ, 1976. – С. 31–35.

45. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

46. Егоров, И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения: научное издание / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

47. Зеленяк, Т. И. О смешанной задаче для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени / Т. И. Зеленяк // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 158. – № 6. – С. 1268–1270.

48. Зеленяк, Т. И. Об обобщенных собственных функциях оператора, связанного с одной задачей С.Л. Соболева / Т. И. Зеленяк // Сибирский Математический Журнал. – 1968. – Т. 9. – № 5. – С. 1075–1092.

49. Землянский, С. Н. Обратная задача определения правой части псевдопараболического уравнения высшего порядка / С. Н. Землянский // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983. – № 16. – С. 53–58.

50. Иванова, Н. Д. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения / Н. Д. Иванова, В. Е. Фёдоров, К. М. Комарова // Вестник ЧелГУ. – 2012. – № 15. – С. 49–70.

51. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

52. Кабанихин, С. И. Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным / С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2018. – № 1. – С. 55–63.

53. Кайкина, Е. И. Асимптотика решений при больших временах для нелинейных уравнений типа Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Успехи математических наук. – 2009. – Т. 64. – № 3. – С. 3–72.

54. Камынин, В. Л. О стабилизации к нулю решений обратной задачи для вырождающегося параболического уравнения с двумя независимыми переменными / В. Л. Камынин // Математические Заметки. – 2017. – Т. – 101. – № 6. – С. 860–870.

55. Камынин, В. Л. Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞ / В. Л. Камынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61. – № 3. – С. 413–427.

56. Кожанов, А. И. Смешанная задача для одного класса квазилинейных эволюционных уравнений третьего порядка / А. И. Кожанов // В сб. «Краевые задачи для нелинейных уравнений». – Новосибирск: СО АН СССР; Институт математики. – 1982. – С.118–128.

57. Кожанов, А. И. Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических / А. И. Кожанов. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. – Препринт № 17. – 31 с.

58. Кожанов, А. И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений / А. И. Кожанов // Доклады РАН. – 1992. – Т. 326. – № 5. – С. 781–786.

59. Кожанов, А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Математические заметки. – 1999. – Т. 65 – № 1. – С. 70–75.

60. Кожанов, А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче / А. И. Кожанов // Математические заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 840–853.

61. Кожанов, А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А. И. Кожанов // Сибирский математический журнал – 2005. – Т. 46, №5. – С. 1053–1071.

62. Кожанов, А. И. О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов // Научные Ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2010. – № 5(76). – С. 88–97.

63. Кожанов, А. И. Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2012. – Т. 5. – №. 11. – С. 33–42.

64. Кожанов, А. И. Обратные задачи определения граничных режимов для некоторых уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2016. – Т. 9. – №. 2. – С. 37–45.

65. Кожанов А. И. Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии / А. И. Кожанов // Математические заметки. – 2019. – Т. 106. – № 3. – С. 395–408.

66. Кожанов, А. И. О разрешимости обратных задач восстановления параметров в эллиптических уравнениях / А.И.Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2020. – Т. 27. – № 4. – С. 14 – 29.

67. Кожанов, А. И. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений / А. И. Кожанов, Н. С. Попов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10. – № 3. – С. 46–62.

68. Коновалов, А. Н. Задачи фильтрации несжимаемой жидкости: научное издание / А. Н. Коновалов. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.

69. Корпусов М.О., Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа / М. О. Корпусов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. – 42. – № 6. – С. 849–866.

70. Корпусов, М. О. Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа / М. О. Корпусов // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 5. – С. 1–8.

71. Корпусов, М. О. О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе / М. О. Корпусов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2012. – Т. 76. – № 2. – С. 103–140.

72. Корпусов, М. О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. – № 8. – С. 1237–1249.

73. Корпусов М. О. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 7. – С. 987–1004.

74. Корпусов, М. О. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 12. – С. 1835–1869.

75. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. 2 / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 11. – С. 2041–2048.

76. Корпусов, М. О. О «разрушении» решений нелинейных волновых уравнений типа Соболева с кубическими источниками / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Математические заметки. – 2005. – Т. 78 – № 4. – С. 559–578.

77. Корпусов, М. О. «Разрушение» решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Математические заметки. – 2006. – Т. 79. – № 6. – С. 879–899.

78. Корпусов, М. О. Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена – Бона – Махони – Бюргерса с нелокальным граничным условием / М. О. Корпусов, А. А. Панин // Теоретическая и математическая физика. – 2013. – Т. 175. – № 2. – С. 159–172.

79. Костюченко, А. Г. Задача Коши для уравнений типа Соболева-Гальперна / А. Г. Костюченко, Г. И. Эскин // Труды Московского математического общества. – 1961. – Т. 10. – С. 273–285.

80. Лаврентьев, М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа / М. М. Лаврентьев // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1956. – Т. 20. – № 6. – С. 819–842.

81. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962. – 96 с.

82. Лаврентьев, М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений: монография / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев. – Новосибирск: Наука, 1969. – 68 с.

83. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа: монография / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.

84. Лаврентьев, М. М. Теория операторов и некорректные научное издание: / М.М.Лаврентьев, Л.Я.Савельев. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999. – 702 с.

85. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа: монография / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – Москва: Наука, 1964. – 540 с.

86. Ладыженская, О. А., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа: монография / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

87. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения: монография / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

88. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: монография / Ж.-Л. Лионс. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.

89. Любанова, А. Ш. Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А. Ш. Любанова // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54. – № 6. – С. 1315–1330.

90. Любанова, А. Ш. Обратная задача для псевдопараболического уравнения с интегральным условием переопределения / А. Ш. Любанова // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 4. – С. 505—515.

91. Любанова, А. Ш. О некоторых краевых задачах для систем псевдопараболических уравнений / А.Ш. Любанова // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56. – № 4. – С. 835–852.

92. Любанова, А. Ш. Обратная задача для линейного псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А. Ш. Любанова // Вестник Московского университета им. С.Ю. Витте. Серия «Образовательные ресурсы и технологии». – 2016. – № 2(14). – С.357–363.

93. Любанова, А. Ш. Обратные задачи для нелинейных стационарных уравнений / А. Ш. Любанова // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23. – № 2. – С. 65–77.

94. Любанова, А. Ш. О новых коэффициентных обратных задачах для псевдопараболических уравнений фильтрации / А.Ш.Любанова // Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2017. – С. 166–167.

95. Макаров, А. Н. Законы теплообмена электрической дуги и факела металлургических печей и энергетических установок / А. Н. Макаров // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2013. – № 2 (13). – С. 22–26.

96. Мамаюсупов, М. Ш. О задаче определения коэффициентов псевдопараболического уравнения / М. Ш. Мамаюсупов // Исследования по интегродифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983. – № 16. – С. 290–297.

97. Мамаюсупов, М. Ш. О единственности восстановления правой части псевдопараболического уравнения / М. Ш. Мамаюсупов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983. – № 16. – С. 282–284.

98. Мамаюсупов, М. Ш. Обратная задача для уравнения в частных производных высокого порядка / М. Ш. Мамаюсупов, С. Н.З емлянский // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – № 21. – С. 268–272.

99. Маслов, В. П. О существовании убывающего при $t \to +\infty$ решения уравнения С.Л. Соболева для малых колебаний вращающейся жидкости в цилиндрической области / В. П. Маслов // Сибирский Математический Журнал. – 1968. – Т. 9. – № 6. – С.1351–1359.

100. Намсараева, Г. В. О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений / Г.В.Намсараева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20 – № 2. – С. 111–137.

101. Нахушев, А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения . – 1982. – Т. 18. – № 1. – С. 72–81.

102. Нахушев, А. М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М.Нахушев. – Москва: Наука, 2012. – 232 с.

103. Осколков, А. П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1972. – Т. 27. – С. 145–160.

104. Осколков, А. П. Об одной нестационарной квазилинейной системе с малым параметром, регуляризующей систему уравнений Навье-Стокса / А. П. Осколков // Проблемы математического анализа. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1973. – Вып. 3. – С. 78–87.

105. Осколков, А. П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1975. – Т. 52. – С. 128–158.

106. Осколков, А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Труды математического института АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

107. Осколков, А. П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л.Соболева / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.

108. Папин, А. А. О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации / А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 114–126.

109. Плеханова, М. В. Оптимальное управление вырожденными распределенными системами: монография / М.В.Плеханова, В.Е.Федоров. – Челябинск: Издательский центр ЮурГУ, 2013. – 174 с.

110. Плотников, П .И. Предельный переход по вязкости в уравнении с переменным направлением параболичности / П .И. Плотников // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 4. – С. 665–674.

111. Полубаринова-Кочина, П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – Москва: Издательство технико-теоретической литературы, 1952. – 676 с.

112. Полубаринова-Кочина, П. Я. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах / П. Я. Полубаринова-Кочина, С. В. Фалькович // Прикладная математика и механика. – 1947. – Т. 11. – № 6. – С. 629—-674.

113. Прилепко, А. И. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. I / А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 1. – С. 119–129.

114. Прилепко, А. И. Об определении параметра эволюционнного уравнения и обратных задачах математической физики. II / А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 4. – С. 694–701.

115. Прилепко, А. И. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении / А. И. Прилепко, В. В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 136–143.

116. Прилепко, А. И. Об обратной начальнокраевой задаче для нелинейной системы Навье–Стокса в случае финального переопределения / А. И. Прилепко, И. А. Васин // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 12. – С. 2164–2177.

117. Пухначев, В. В. О модели Войткунского–Амфилохиева–Павловского движения водных растворов полимеров / В. В. Пухначев, О. А. Фроловская // Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 2018. – Т. 300. – С. 176–189.

118. Пятков, С. Г. О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем / С. Г. Пятков // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. XIII. – № 4(44). – С. 83–96.

119. Пятков, С. Г. О некоторых классах обратных задач с данными переопределения на пространственных многообразиях / С. Г. Пятков // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – № 5. – С. 1114–1126.

120. Пятков, С. Г. Идентификация коэффициента теплопередачи по граничным интегральным данным / С. Г. Пятков, О. А. Солдатов // Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65. – № 4. – С. 709–726.

121. Пятков, С. Г. О некоторых эволюционных обратных задачах для параболических уравнений / С. Г. Пятков, Б. Н. Цыбиков // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418. – № 5. – С. 596–598.

122. Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах: монография / В. Г. Романов. – Москва: Научный мир, 2005. – 296 с.

123. Свешников, А. Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа: учебное издание / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – Москва: Физматлит, 2007. – 736 с.

124. Свиридюк, Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.

125. Свиридюк, Г. А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36. – № 5. – С. 1130–1145.

126. Свиридюк, Г. А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 604–616.

127. Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А.Сидоров // Математические Заметки. – 1984. – Т. 35. – № 4. – С. 569–578.

128. Смирнова, Л. Н. Математическая модель процесса внешнего теплообмена в газовых печах / Л. Н. Смирнова // American Scientific Journal. – 2016. – № 1–2 – С. 118–122 (Russian).

129. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1954. – № 18. – С. 3–50.

130. Танана, В. П. О регуляризации обратной одномерной задачи фильтрации в неоднородном пласте / В. П. Танана // Доклады Академии Наук СССР. – 1985. – Т. – 281. – № 5. – С. 1061–1063.

131. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ: монография / Р. Темам // Москва: Мир, 1981. – 408 с.

132. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач: учебное издание / А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин // Москва: Наука, 1979. – 288 с.

133. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач: научное издание / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола // Москва: Наука, 1990. – 232 с.

134. Токарева, М. А. Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде / М. А. Токарева, А. А. Папин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22. – № 2. – С. 81–93.

135. Уразаева, А. В. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 8. – С. 1111–1119.

136. Федоров, В. Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами / В.Е.Федоров // Доклады Академии Наук, 1996. Т. 351. № 3. С. 316–318.

137. Федоров, В. Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 11. – С. 1548–1556.

138. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – Москва: Мир, 1964. – 428 с.

139. Фроленков, И. В. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17. – № 1. – С. 135–148.

140. Шелухин, В. В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений / В. В. Шелухин // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32. – № 2. – С. 154–165.

141. Шелухин, В. В. Задача со средними по времени данными для монотонных параболических уравнений / В.В.Шелухин // Динамика сплошной среды. – 1989. – Вып. 93, 94. – С. 186–189.

142. Шелухин, В. В. Вырождающаяся параболическая система уравнений трехфазной фильтрации / В.В.Шелухин // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405. – № 6. – С. 740–743.

143. Шелухин, В. В. Об одной начально-краевой задаче для уравнений фильтрации трех несмешивающихся капиллярных жидкостей / В. В. Шелухин // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия «Математика, механика, информатика». – 2006. – Т. 6. – № 2. – С. 103–113.

144. Шелухин, В. В. О глобальной разрешимости уравнений фильтрации сжимаемых смешивающихся жидкостей / В. В. Шелухин, Ю. Амира // Доклады РАН. – 2007. – Т. 414. – № 3. – С. 304–308.

145. Шергин, С. Н. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С. Н. Шергин, С. Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – № 2. – С. 106–116.

146. Шишмарев, И. А. Об одном нелинейном уравнении типа Соболева / И. А. Шишмарев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 1. – С. 1–3.

147. Alessandrini G., Caburro R. The Local Calderon Problem and the Determination at the Boundary of the Conductivity / G. Alessandrini, R.

Caburro // Communications in Partial Differential Equations. – 2009. – V. 34. – № 8 – P. 918–936.

148. Al-Horani, M. Degenerate first order identification problems in Banach spaces / M. Al-Horani, A. Favini // В кн. «Differential equations: inverse and direct problems». (Lecture notes in pure and applied mathematics ; v. 251.) New York: Taylor & Francis Group, LLC, 2006. – P. 1–15.

149. Anderson, J. R. Global solvability for the porous medium equation with boundary flux governed by nonlinear memory / J. R. Anderson, K. Deng // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2015. – V. 423. – 1183–1202.

150. Anikonov, Yu. Ye. Explicit representation for the solution to a parabolic differential identification problem in a Banach space / Yu. Ye. Anikonov, A. Lorenzi // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2007. – V. 15. – № 7. – P. 669–681.

151. Antontsev, S. N. Stratigrafic modelling by the way of a pseudoparabolic problem with constraint / S. N. Antontsev, G. Gagneux, A. Mokrani, G. Vallet // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – V. 19. – № 1. – P. 195–209.

152. Antontsev, S. N. On the localization of solutions of doubly nonlinear parabolic equations with nonstandard growth in filtration theory / S. N. Antontsev, S. Shmarev // Applicable Analysis. – 2016. – V. – 95. – № 10. – P. 2162–2180.

153. Antontsev, S. N. Kelvin–Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping / S. N. Antontsev, H. B. de Oliveira, Kh. Khompysh // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – V. 473. – № 2. – P. 1122–1154.

154. Antontsev, S. N. An inverse problem for generalized Kelvin–Voigt equation with p-Laplacian and damping term / S. N. Antontsev, Kh. Khompysh // Inverse Problems/ – 2021. – T. 37. – № 8. – 085012. – 29 p.

155. Antontsev, S. N. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition / S. N. Antontsev, S. E. Aitzhanov, D. T. Zhanuzakova // Mathematical Methods in the Applied Sciences – 2023. – V. 46. – № 1. – P. 1111–1136.

156. Arrieta, J. M. Parabolic Problems with Nonlinear Boundary Conditions and Critical Nonlinearities / J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, A. R. Rodríguez-Bernal // Journal of Differential Equations. 1999. – V. 156. – № 2. – P. 376–406.

157. Barenblatt, G. I. A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward–backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow / G.I. Barenblatt, M. Bertsch, R. Dal Passo, M. Ughi // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1993. – V. 24. – № 6 – P. 1414–1439.

158. Barenblatt, G. I. Mathematical Model of the Non-Equilibrium Water-Oil Displacement in Porous Strata / G. I. Barenblatt, J. Garcia-Azorero, A. De Pablo, J. L. Vazquez // Applicable Analysis. – 1997. – V. – 65. – № 1–2. – P. 19–45.

159. Belov, Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations / Yu.Ya.Belov. – Inverse and ill-posed problems series. V. 32. – Utrecht: VSP, 2002. – 211 p.

160. Belov, Yu. Ya. The problem of determining the source function for a system of composite type / Yu. Ya. Belov, T. N. Shipina // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1998. – V. 6. – № 4. – 287–308.

161. Belov Yu. Ya. The problem of determining a coefficient in the parabolic equation and some properties of its solution / Yu. Ya. Belov, T. N. Shipina // Journal Inverse and Ill-Posed Problems. – 2001. – V. 9 – № 1. – P. 31–48.

162. Benjamin, T. B. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems / T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. – 1972. – V. 272. – № 1220. – P. 47–78.

163. Berdyshev, A. S. Solvability of Pseudoparabolic Equations with Non-Linear Boundary Condition / A. S. Berdyshev, S. E. Aitzhanov, G. O. Zhumagul // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41. – № 9. – P. 1772–1783.

164. Bertsch, M. Pseudo-parabolic regularization of forward–backward parabolic equations: A logarithmic nonlinearity / M. Bertsch, F. Smarrazzo, A. Tesei // Analysis and Partial Differential Equations/ – 2013. – V. 6. – № 7. – P. 1719–1754.

165. Bertsch, M. On a pseudoparabolic regularization of a forward-backward-forward equation / M. Bertsch, F. Smarrazzo, A. Tesei // Nonlinear Analysis/ – 2015. – V. 129. – P. 217–257.

166. Bertsch, M. Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Power-type nonlinearities / M. Bertsch, F. Smarrazzo, A. Tesei // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 2016. – V. 2016. – № 712. – P. 51–80.

167. Bakushinskii, A. B. Carleman weight functions for a globally convergent numerical method for ill-posed Cauchy problems for some quasilinear PDEs / A. B. Bakushinskii, M. V. Klibanov, N. A. Koshev // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2017. – V. 34. – 201–224.

168. Van Bockstal, K. Determination of a time-dependent diffusivity in a nonlinear parabolic problem / K. Van Bockstal, M. Slodička // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2015. – Vol. 23. – № 2. – C. 307–330.

169. Bohm, M. Diffusion in Fissured Media / M. Bohm, R. E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1985. – V. 16. – № 3. – P. 500–509.

170. Bohm, M. A Nonlinear Pseudoparabolic Diffusion Equation / M. Bohm, R. E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1985. – V. 16. – № 5. – P. 980–999.

171. Boltzmann, L. Ableitung des Stefanśchen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen

Lichttheorie / L. Boltzmann // Annalen der Physic. – 1884. – V. 258 – № 6. – C. 291–294.

172. Calderon, A. P. On an inverse boundary value problem / A. P. Calderon // B сб. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Rio de Janeiro, Brazil, 1980. – , Rio de Janeiro: Brazilian Mathematical Society, 1980. – P. 65–73.

173. Cannon, J. R. Determination of an Unknown Coefficient in a Parabolic Differential equation / J. R. Cannon // Duke Mathematical Journal. – 1963. – V. 30. – No 2. – P. 313-323.

174. Cannon, J. R. Determination of Certain Parameters in Heat Conduction Problems / J. R. Cannon // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1964. – V. 8. – № 2. – P. 188-201.

175. Cannon, J. R. An Inverse Problem for a Nonlinear Diffusion Equation / J. R. Cannon, P. Du Chateau // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1980. – V. 39. – № 2. – P. 272–289.

176. Cannon, J. R. A class of nonlinear nonclassical parabolic problems / J. R. Cannon, H. M. Yin // Journal of Differential Equations. – 1989. – V. 79. – № 2. – P. 266–288.

177. Cannon, J. R. Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation / J. R. Cannon, W. Rundell // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1991. – V. 160. – № 2. – 572–582.

178. Cannon, J. R. On a class of nonlinear parabolic equations with nonlinear trace type functionals / J. R. Cannon, H. M. Yin // Inverse Problems. – 1991. – V. 7. – № 1. – P. 149–161.

179. Carroll, R. W. Singular and Dgenerate Cauchy Problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. – Mathematics in Science and Enjineering. V. 127. – New York: Academic Press, 1976. – 333 p.

180. Du Chateau, P. Monotonicity and invertibility of coefficient-to-data mappings for parabolic inverse problems / P. Du Chateau // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1995. – V. 26. – № 6. – P. 1473–1487.

181. Du Chateau, P. An Inverse Problem for the Hydraulic Properties of Porous Media / P.Du Chateau // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1997. – V. 28. – №. 3. – P. 611–632.

182. Du Chateau, P. Analysis of an adjoint problem approach to the identification of an unknown diffusion coefficient / P.DuChateau, R.Thelwell, G.Butters // Inverse Problems. – 2004. – V. 20. – № 2. – P. 601–625.

183. Chen, P. J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P. J. Chen, M. E. Gurtin // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 1968. – V.19. – № 4. – P. 614–627.

184. Chen, P. J. On The Thermodynamics of Non-simple Elastic Materials with Two Temperatures / P. J. Chen, M. E. Gurtin, W. O. Wiliams // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 1969. – V. 20. – № 1. – P. 107–112.

185. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel J. Instability, Uniqueness and Nonexistence Theorems for the Equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip / B. D. Coleman, R. J. Duffin, J. Mizel // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – V. 19. – № 2. – P. 100–116.

186. Colton, D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable / D. Colton // Journal of Differential Equations. – 1972. – V. 12. – № 4. – P. 559–565.

187. Colton, D. On the Analytic Theory of Pseudoparabolic Equations / D. Colton // Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series. – 1972. – V. 23. – № 2. – P. 179–192.

188. Colton, D. Integral Operators and the First Initial Bounary Value Problem for Pseudoparabolic Equations with Analytic Coefficients / D. Colton // Journal of Differential Equations. – 1973. – V. 13. – № 4. – P. 506–522.

189. Cuesta, C. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves / C. Cuesta, C. J. van Duijn, J. Hulshof // European Journal of Applied Mathematics. – 2000. – V. 11. – № 4. – P. 381–397.

190. Cuesta, C. A model problem for groundwater flow with dynamic capillary pressure: Stability of travelling waves C. Cuesta, J. Hulshof // Nonlinear Analysis – Theory Methods & Applications. – 2003. – V. 52. – № 4. – P. 1199–1218.

191. Di Bendetto, E. Implicite Degenerate Evolution Equations and Applications / E. Di Bendetto, R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. – 1981. – V. 12. – № 5. – P. 731–751.

192. Di Bendetto, E. On the Maximum Principle for Pseudoparabolic Equations / E. Di Bendetto, M. Pierre // Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – V. – 30. – № 6. – P. 821–854.

193. Denisov, A. M. Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion / A. M. Denisov, A. Lorenzi // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2007. – V. 15. – № 6. – P. 599–610.

194. van Duijn, C. J. Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equations modelling two-phase flow in porous media / C. J. van Duijn, Y. Fan, L. A. Peletier, I. S. Pop // Nonlinear Analysis – Real World Applications. – 2013. – V. 14. – № 3. – P. 1361–1383.

195. Düll, V.-P. Some Qualitative Properties of Solutions to a Pseudoparabolic Equation Modeling Solvent Uptake in Polymeric Solids / V.-P. Düll // Communications in Partial Differential Equations. – 2006. – V. 31. – № 8. – P. 1117–1138.

196. Elayyan, A. On an inverse diffusion problem / A. Elayyan, V. M. Isakov // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 1997. – V. 57. – №. 6. – P. 1737–1748.

197. Fedorov, V. E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V. E. Fedorov, A. V. Urazaeva // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2004. – V. 12. – № 4. – P. 387–395.

198. Fedorov, V. E. Inverse problem for Oskolkov's system of equations / V. E. Fedorov, N. D. Ivanova // Mathematical Methods in Applied Sciences, 2017. – V. 40. – № 17. – P. 6123–6126.

199. Grosmann, U. D. Existence and Uniqueness of Solutions of Quasilinear Transmission Problems of Both Elliptic and Pseudoparabolic Type Simulating Oxygen Transport in Capillary and Tissue / U. D. Grossman // Mathematical Methods in Applied Sciences. – 1980. – V. 2. – № 1. – P. 34–47.

200. Han, Yu. A porous medium equation with nonlocal boundary condition and a localized source / Yu. Han, W. Gao // Applicable Analysis. – 2011. – V. 91. – № 3. – 601–613.

201. Hasanov A., Du Chateau P., Pektas B. An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2006. – V. 14. – № 5. – P. 435–463.

202. Hayashi, N. Asymptotics for dissipative nonlinear equations / N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev. – Lecture Notes in Mathematics. V. 1884. – Berlin, Heidlberg: Springer-Verlag, 2006. – 569 p.

203. Helmig R., Weiss A., Wohlmuth B. I. Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media / R. Helmig, A. Weiss, B. I. Wohlmuth // Computational Geosciences. – 2007. – V. 11. – № 3. – P. 261–274.

204. Hussein, M. S. Identification of the time-dependent conductivity of an inhomogeneous diffusive material / M. S. Hussein, D. Lesnic // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – V. 269. – 21441. – P. 35–58.

205. Hussein, M. S. An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient / M. S. Hussein, D. Lesnic, M. I. Ismailov // Mathematical methods in Applied Sciences. – 2016. – V. – 39. – P. 963–980.

206. Hussein, M. S. Multiple time-dependent coefficient identification thermal problems with a free boundary / M. S. Hussein, D. Lesnic, M. I. Ivanchov, H. A. Snitko // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – V. 99. – № 1. – P. 24–50.

207. Hussein, M. S. Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations / M. S. Hussein, D. Lesnic, V. L. Kamynin, A. V. Koctin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2020. – V. 28. – № 3. – P. 425–448.

208. Isakov, V. Some inverse problems for the diffusion equation / V. Isakov // Inverse Problems. – 1999. – V. 15. – № 1. – P. 3–10.

209. Isakov, V. On inverse problems in secondary oil recovery / V.Isakov // European Journal of Applied Mathematics. – 2008. – V. 19. – № 4. – P. 459–478.

210. Ivanchov M. I., Inverse Problems with Free Boundary for Heat Equation / M. I.Ivanchov // Ukrainian Mathematical Journal, 2003. V. 55. № 7. P. 1086–1098.

211. Ivanchov, M. I. Simultaneous Determination of two Coefficients of a Parabolic Equation in the Case of Nonlocal and Integral Conditions /M. I. Ivanchov, N. V. Pabyrivs'ka // Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – V. 53 – No. 5. – P. 674–684.

212. Ivanchov, M. I. Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space / M. Ivanchov, A. Lorenzi, N. Saldina // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2008. – V. 16. – № 4. – P. 397–415.

213. Jiang, S. Z. Recovering a time-dependent potential function in a multi-term time fractional diffusion equation by using a nonlinear condition / S. Z. Jiang, Y. J. Wu // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2021. – V. 29. – № 2. – P. 233–248.

214. Jones-Jr, B. F. The Determination of a Coefficient in a Parabolic Differential Equation. Part I. Existence and uniqueness / B. F. Jones-Jr // Journal of Mathematics and Mechanics. – 1962. – V. 11. – № 6. – P. 907-918.

215. Jones-Jr, B. F. Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations / B. F. Jones-Jr // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1963. – V. 16. – № 1. – P. 33–44.

216. Kanca, F. Inverse coefficient problem for a second-order elliptic equation with nonlocal boundary conditions / F. Kanca // Mathematical Methods in the Applied sciences. – 2016. – V. 39. – № 11. – P. 3152–3158.

217. Kanca, F. The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data / F. Kanca, M. I. Ismailov // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2012. – V. 20. – № 4. – P. 463–476.

218. Khompish, K. Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids / K.Khompish // Advanced Materials Research. – 2013. – V. 705. – P. 15–20.

219. C.-G. Kim, Z.-P. Liang, J.-P. Shi, Existence of positive solutions to a Laplace equation with nonlinear boundary condition / C.-G. Kim, Z.-P. Liang, J.-P. Shi // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2015. – V. 66. – № 6. – P. 3061–3083.

220. Klibanov, M. V. Global uniqueness of a multidimensional inverse problem for a nonlinear parabolic equation by a Carleman estimate / M. V .Klibanov // Inverse Problems. – 2004. – V. – 20. – № 4. – P. 1003–1032.

221. Klibanov, M. V. Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems / M. V. Klibanov // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2013. – V. 21. – № 4. – P. 477–560.

222. Klibanov M. V., Timonov A. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications / M. V. Klibanov, A. Timonov – Inverse and Ill-posed Problems Series. V. 46 – Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. – 490 p.

223. Kostin, A. V. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation / A.V.Kostin, S.I.Piskarev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2021. – V. 29. – № 2. – P. 267–281.

224. Kozhanov, A. I. Nonlinear inverse problems for elliptic equations / A. I. Kozhanov // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2001. – V. 9. – № 4. – P. 413–424.

225. Kozhanov A. I., Shipina T. N. Inverse Problems of Finding the Lowest Coefficient in the Elliptic Equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2020. – V. 14. – №4. – P. 528 – 542.

226. Korpusov, M. O. Local Solvability and Blow-up for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers and Korteveg-de Vris-Benjamin-Bona-Mahony Equations / M. O. Korpusov, E. V. Yushkov // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – V. 2014. – № 69 – P. 1–16.

227. Lavrentiev, M. M. Inverse Problems of Mathematical Physics / M. M. Lavrentiev, A. V. Avdeev, M. M. Lavrentiev-Jr., V. I. Priimenko. – Inverse and Ill-Posed Problems Series. V.44. – Utrecht: Koninklijke Brill NV, 2003. – 275 p.

228. Lesnic, D. Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions / D. Lesnic, S. A. Yousefi, M. I. Ivanchov // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2013. – V. 41. – № 1–2 – P. 301–320.

229. Levine, H. A. Nonexistence Theorems for the Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions and for the Porous Medium Equation Backward in Time / H. A. Levine, L. E. Payne // Journal of Differential Equations. – 1974. – V. 16. – № 2 – P. 319–334.

230. Li, F. Global existence and blow-up phenomena for nonlinear divergence form parabolic equations with inhomogeneous Neumann boundary conditions / F. Li, J. Li // Journal of Mathematical Analysis Application. – 2012. – V. 385. – № 2. – P. 1005–1014.

231. Li T.-T. Total Flux (Nonlocal) Boundary Value Problems for Pseudoparabolic Equation / T.-T. Li, L.W. White // Applicable Analysis. – 1983. – V. – 16. – № 1. – P. 17–31.

232. Liu C.-S. A two-stage Lie-group shooting method (TSLGSM) to identify time-dependent thermal diffusivity / C.-S. Liu // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2010. – V. 53 – № 21–22. – P. 4876–4884.

233. Lorenzi, A. Identification problems for pseudoparabolic integro-differential operator equations / A. Lorenzi, E. Paparoni // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1997. – V. 5. – № 3. – P. 235–253.

234. Lorenzi, A. Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation / A.Lorenzi, G.Mola // Inverse Problems. – 2012. – V. 28. – № 7. – 075006. – 23 p.

235. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for the pseudoparabolic equation of filtration type / A. Sh. Lyubanova // Математические модели и методы их исследования. Труды международной конференции. – Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2001. – Т. 2. – С. 73–78.

236. Lyubanova, A. Sh. On identification of the coefficients of pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova // «International Conference «Ill-Posed and Inverse Problems» dedicated to Prof. M.M.Lavrent'ev on the occasion of his 70th anniversary (August 5–9, 2002, Novosibirsk, Russia): Abstracts». – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2002. – P. 108.

237. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in an elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Applicable Analysis. – 2008. – V. 87. – № 10-11. – P. 1121–1128.

238. Lyubanova, A. Sh. On Inverse Problem for Linear Pseudoparabolic Equations of Filtration / A. Sh. Lyubanova // «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Труды международной научной конференции, посвященной памяти академика А.А.Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. – Москва: Московский государственный университет, 2009. – С. 203–204.

239. Lyubanova, A. Sh. On new inverse problems for the pseudoparabolic equations of filtration in fissured media / A.Sh.Lyubanova // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: сб. тезисов международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Яненко. – Новосибирск: Изд-во Института вычислительных технологий СО РАН, 2011. – С. 110.

240. Lyubanova, A. Sh. On the identification of the piezo-conductivity coefficient in the pseudoparabolic equation of filtration type / A. Sh. Lyubanova // Математические и информационные технологии. МИТ–2011. 27.08. – 31.08.2011, Врньачка Банья, Србиjа. 31.08.–5.09.2011, Будва, Црна Гора. – Косовска Митровица: Друштво Математичара Косова и Метохиjе, Природно-математички факултет; Београд, Србиjа: МСТ Гаjич, 2011. – С. 99–100.

241. Lyubanova A. Sh. On the Approximation of a Parabolic Inverse Problem by Pseudoparabolic One / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального Университета. Серия «Математика и Физика». – 2012. – Т. 5. – № 3. – С. 326–336.

242. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in a quasilinear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Abstracts of 6th International Conference «Inverse Problems: Modeling and Simulation» held on May 21–26, 2012, Antalya, Turkey. – Izmir, Turkey: Izmir University, 2012. – P. 44–45.

243. Lyubanova, A. Sh. The identification of an unknown coefficient in a main term of a pseudoarabolic equation / A.Sh.Lyubanova // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 89.

244. Lyubanova, A. Sh. On some problem for the systems of evolution equations / A. Sh. Lyubanova // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 18–24

августа 2013 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, 2013. – С. 335.

245. Lyubanova, A. Sh. On boundary value problem for nonlinear parabolic systems / A. Sh. Lyubanova // Конференциjа Математичке и Информационе технологиjе (2013; Врњачка Бања, Бечичи). Zbornik radova Konferencije MIT [Matematičke i informacione technologije] 2013: [[održane] u Vrnjačkoj Banji od 5. do 9. septembra i u Bečićima od 10. do 14. septembra 2013 godine]. – Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematički facultet; Novosibirsk: Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014. – С. 397–404.

246. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in a quasi-linear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2014. – V. 22. – № 3. – P. 341–356.

247. Lyubanova, A. Sh. On an inverse problem for quasi-linear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и Физика». – 2015. – V. 8. – № 1. – P 38–48.

248. Lyubanova, A. Sh. On nonlocal problems for systems of parabolic equations / A. Sh. Lyubanova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2015. – V. 421. – № 2. – P. 1767–1778.

249. Lyubanova, A. Sh. Inverse problems for the nonlinear stationary equations / A. Sh. Lyubanova // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов» / под ред. д. ф.-м. н. А.И.Кожанова и к. ф.-м. н. Б.Б. Ошорова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. – С. 10–11.

250. Lyubanova, A. Sh. The Inverse Problem for the Nonlinear Pseudoparabolic Equation of Filtration Type / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и Физика». – 2017. – Т. 10. – № 1. – С. 4–15.

251. Lyubanova, A. Sh. On some nonlocal problems for mixed systems of parabolic and pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova // VIII международная

конференция по математическому моделированию: тезисы докладов». – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2017. – С. 25.

252. Lyubanova, A. Sh. On some boundary problems for the pseudoparabolic equation of diffusion / A. Sh. Lyubanova // Соболевские чтения. Международная школа-конференция, посвященная 110-летию со дня рождения С.Л.Соболева (Новосибирск, 10–16 декабря 2018 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2018. – С. 226.

253. Lyubanova, A. Sh. Nonlinear boundary value problem for pseudoparabolic equation / A. Sh. Lyubanova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – V. 493. – 124514. – 18 p.

254. Lyubanova, A. Sh. The Regularity of the Solutions of Inverse Problems for the Pseudoparabolic Equation / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия "Математика и Физика". – 2021. – Т. 14. – № 4. – С. 414–424.

255. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation with the mixed boundary condition / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия "Математика и Физика". – 2023. – Т. 16. – № 5. – С. 661–672.

256. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova, M. Tsutsumi // The Meeting of Japanese Mathematical Society, Tohoku University, 1995, September. – Sendai, Japan: Tohoku University, 1995. – P. 112–113.

257. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for the linear pseudoparabolic and parabolic equation of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Математические модели и методы их исследования. Международная конференция. 25 – 30 августа 1997 года. – Красноярск: Красноярский государственный университет, 1997. – С. 25–26.

258. Lyubanova, A. Sh. On inverse problems for the pseudoparabolic and parabolic equation of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти

С.Л.Соболева (1908–1989). Тезисы докладов, часть I. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. – С. 47.

259. Lyubanova, A. Sh. On inverse problems for equations of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Математические модели и методы их исследования. Международная конференция. 18–24 августа 1999 года. – Красноярск: Изд-во Красноярского государственного университета, 1999. – С. 226–227.

260. Lyubanova, A. Sh. On Inverse Problems for Pseudoparabolic and Parabolic Equations of Filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Inverse Problems in science and enjineering. – 2011. – V. 19. – № 7. – P. 1023–1042.

261. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Applicable Analysis. – 2011. – V. 90. – № 10. – P. 1557–1571.

262. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The stabilization / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Applicable Analysis. – 2013. – V. 92. – № 3. – P. 573–585.

263. Lyubanova, A. Sh. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equations of diffusion / A. Sh. Lyubanova, A. V. Velisevich // Applicable Analysis. – 2019. – V. 98. – №. 11. – P. 1997–2010.

264. Lyubanova, A. Sh. The stabilization of the solution of an inverse problem for the pseudoparabolic equation / A.Sh.Lyubanova, A.V.Velisevich // Математика в приложениях. Международная научная конференция в честь 90-летия С.К. Годунова (4 – 10 августа 2019 года. Новосибирск): тезисы докладов. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2019. – С. 276.

265. Lyubanova, A. Sh. On an inverse problem for the elliptic equation with the mixed boundary condition / A.Sh.Lyubanova, A.V. Velisevich // IX Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 120-летию академика М.А.Лаврентьева, 7 – 11 сентября 2020 г. Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, 2020. – С. 39.

266. Lyubanova, A. Sh. Coefficient inverse problems for the filtration equations / A.Sh.Lyubanova, A.V. Velisevich // «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's», July 16 – July 22, 2022. Book of abstracts. – St. Petersburg: Steklov Institute of Mathematics. – P. 65.

267. Lyubanova, A. Sh. The Stability of the Solutions to Stationary Inverse Problem / A. Sh. Lyubanova, A. V. Velisevich // Differential and Difference Equations. Russian - Chinese Conference. Abstracts / G. V. Demidenko (editor-in-chief). Novosibirsk: Novosibirsk State University. – 2023. – P. 97 – 98.

268. Matahashi, T. On a Periodic Problem for Pseudoparabolic Equations of Soblev-Galperne Type / T. Matahashi, M. Tsutsumi // Mathematical Japonica. – 1978. – V. 22. – № 5. – P. 535–553.

269. Medeiros, L. A. Weak Solutions for a Nonlinear Dispersive Equation / L.A.Medeiros, M.M.Miranda // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1977. – V. 59. – № 3. – P. 432–441.

270. Mehraliyev, Y. T. Determination of an Unknown Coefficient in the Third Order Pseudoparabolic Equation with Non-Self-Adjoint Boundary Conditions / Y. T. Mehraliyev, G. Kh. Shafiyeva // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – V. 2014. – 358696. – 7 p.

271. Mehraliyev, Y. T. Inverse Boundary Value Problem for the Pseudoparabolic Equation of Third Order with Periodic and Integral Conditions / Y. T. Mehraliyev, G. Kh. Shafiyeva // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8. – № 23. – P. 1145–1155.

272. Mehraliyev, Y. T. On an inverse boundary-value problem for a pseudoparabolic third-order equation with integral condition of the first kind / Y. T. Mehraliyev, G. Kh. Shafiyeva // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 204. – № 3. – P. 343–350.

273. Mehraliyev, Y. T. On one coefficient inverse boundary value problem for a linear pseudoparabolic equation of the fourth order / Ya. Mehraliyev, S. Allahverdiyeva, A. Ramazanova // AIMS Mathematics. – 2022. – V. 8. – № 2. – P. 2622–2633.

274. Mikelić, A. A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure / A. Mikelić // Journal of Differential Equations. – 2010. – V. 248. – № 6. – P. 1561–1577.

275. Nachman, A. Reconstruction in the Calderon Problem with Partial Data / A. Nachman, B. Street, // Communications in Partial Differential Equations. – 2010. – V. 35. – № 2. – P. 375–390.

276. Nakamura, G. A nonuniqueness Theorem for Inverse boundary Value Problem in Elasticity / Nakamura G., Tanuma K. // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1996. – V. 56. – № 2. – P. 602–610.

277. Namazov, G. K. The inverse boundary value problem for a higher order nonlinear pseudoparabolic equation with nonself-adjoint boundary conditions / G.K.Namazov, Y.T.Mehraliev // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. – 2004. – V. 21. – № 24. – P. 151–156.

278. Novick-Cohen, A. Stable patterns for a viscous diffusion equation / A. Novick-Cohen, R.L. Pego // Transactions of the American Mathematical Society. – 1991. – V. 324. – № 1. – P. 331–351.

279. Padron, V. Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations / V. Padron // Communications in Partial Differential Equations. – 1998. – V. 23. – № 3-4. – P. 457–486.

280. Pilant, M. A Uniqueness Theorem for Determining Conductivity from Overspecified Boundary Data / M. Pilant, W. Rundell // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1988. – V. 136. – № 1. – P. 20–28.

281. Poincaré, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincaré // Acta Mathematica. – 1885. – V. 7. – № 1. – P. 259–380

282. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. – 709 p.

283. Pyatkov, S. G. On some mathematical models of filtration theory / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестник ЮрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8. – № 2. – С. 105–116.

284. Pyatkov, S. G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9. – № 2. – С. 75–89.

285. Pyatkov, S. G. Inverse Problems of Recovering the Heat Transfer Coefficient with Integral Data / S. G. Pyatkov, O. A. Soldatov, K. Fayazov // Journal of Mathematical Sciences. – 2023 – V. 274 – № 2. – P. 255–268.

286. Rundell W. 24.–The solution of Initial-Boundary Value Problems for Pseudo-parabolic Partial Differential Equations / W. Rundell // Proceeding of the Royal Society of Edinburgh. Section A Mathematics. – 1976. – V. 74. – № 24. – P. 311–326.

287. Rundell, W. Maximum Principles for PseudoparabolicPartial Differential Equations / W. Rundell, M. Stecher // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1977. – V. 57. – № 1. – P. 110–118.

288. Rundell, W. The nonpositivity of solutions to pseudo-parabolic equations / W. Rundell, M. Stecher // Proceeding of American Mathematical Society. – 1979. – V. 75. – № 2. – P. 251–254.

289. Rundell, W. Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data / W. Rundell, D. L. Colton // Applicable Analysis. – 1980. – V. 10. – № 3. – P. 231–242.

290. Seam N. Existence results for nonlinear pseudoparabolic problems / N. Seam, G. Vallet // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2011. – V. 12. – № 5. – P. 2625–2639.

291. Shen, X. Blow-up phenomena in porous medium equation systems with nonlinear boundary conditions / X. Shen, J. Ding // Computers & Mathematics with Applications. – 2019. – V. 77. – № 12. – P. 3250–3263.

292. Shergin, S. N. On some inverse coefficient problems with the pointwise overdetermination for mathematical models of filtration / S.N. Shergin, E.I. Safonov, S.G. Pyatkov // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12. – № 1. – С. 82–95.

293. Showalter, R. E. Partial Differential Equations of Sobolev-Galpern Type / R. E. Showalter // Pacific Journal of Mathematics. – 1969. – V. 31. – № 3. – P. 787–793.

294. Showalter, R. E. Local Regularity of Solution of Partial Diferential Equation of Sobolev-Galpern Type / R. E. Showalter // Pacific Journal of Mathematics. – 1970. – V. 34. – № 3. – P. 781–787.

295. Showalter, R. E. Well-posed problems for a partial differential equation of order $2m+1$ / R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. – 1970. – V. 1. – № 2. – P. 214–234.

296. Showalter, R. E. Degenerate evolution equations and applications / R. E. Showalter // Indiana University Mathematics Journal. – 1974. – V. 23. – № 8. – P. 655–677.

297. Showalter, R. E. Nonlinear Degenerate Evolution equations and Partial Differential Equations of Mixed Type / R. E. Showalter // SIAM Journal on Mathematical Analysys. – 1975. – V. 6. – № 1. – P. 25–42.

298. Showalter, R. E. The Sobolev Equation, I / R. E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5. – № 1. – P. 15–22.

299. Showalter, R. E. The Sobolev Equation, II / R. E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5. – № 2. – P. 81–99.

300. Showalter, R.E. A Nonlinear Parabolic-Sobolev Equation / R.E. Showalter // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1975. – V. 50. – № 1. – P. 183–190.

301. Showalter, R. E. Well-posed Problems for Some Nonlinear Dispersive Waves / R. E. Showalter // Journal de Mahimatiques Pures et Appliquees. – 1977. – V. 56. – № 2. – P. 123–135.

302. Showalter, R. E. Local Regularity, Boundary Values and Maximum Principles for Pseudoparabolic Equations / R. E. Showalter // Applicable Analysis. – 1983. – V. 16. – № 3. – P. 235–241.

303. Showalter, R. E. Monotone operators in Banach Space and Nonlinear Differential Equations / R. E. Showalter. – Mathematical Surveys and Monographs. Volume 49. – American Mathematical Society, 1997. – 286 c.

304. Showalter, R. E., Pseudoparabolic partial differential equations / R. E. Showalter, T. W. Ting // SIAM Journal of Mathematical Analysys. – 1970. – V. 1. – № 1. – P. 1–26.

305. Showalter, R. E. Asymptotic Behavior of Solutions of Pseudo-parabolic Partial Differential Equations / R. E. Showalter, T. W. Ting // Annali Matematica pura de applicata. Series 4. – 1971. – V. 90. – № 1. – P. 241–258.

306. Slodička, M., Lesnic D. Determination of the Robin coefficient in a nonlinear boundary condition for a steady-state problem // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2009. – V. 32. – № 10. – P. 1311 – 1324.

307. Starovoitov, V. N. Initial boundary value problem for a nonlocal in time parabolic equation / V. N. Starovoitov // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т. 15. – С. 1311–1319.

308. Starovoitov, V. N. Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation / V.N.Starovoitov // Mathematical Methods in Applied Sciences. – 2021. – V. 44. – № 1. – P. 1118–1126.

309. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Inverse and Ill-Posed Problems Series. Volum 42. – Utrecht: VSP, 2003. – 224 p.

310. Ting, T. W. Certain Non-Steady Flows of Second-order Fluids / T. W. Ting // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1963. – V. 14. – № 1. – P. 1–26.

311. Ting, T. W. Parabolic and Pseudoparabolic Partial Differential Equations / T. W. Ting // Journal of Mathematical Society of Japan. – 1969. – V. 21. – № 3. – P. 440–453.

312. Ting, T. W. A Cooling Process According to Two-Temperature Theory of Heat Conduction / T. W. Ting // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1974. – V. 45. – № 1. – P.23–31.

313. Trusdell, C. Second-order Effects in the Mechanics of Materials / C. Trusdell // Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics (Proceedings of International Simposium, Haifa, 1962). – Oxford: Pergamon Press, 1964. – P. 1–47.

314. Tsutsumi, M. On Some Nonlinear Pseudoparabolic Equations / M. Tsutsumi, T. Matahashi // Journal of Differential Equations. – 1979. – V. 32. – № 1. – P. 65–75.

315. Vainikko, G. M. Inverse Problem of Ground Water Filtration: Identifiability, Discretization and Regularization / G.M.Vainikko // «Inverse problems in diffusion processes (Lake St. Wolfgang, 1994)». Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. – Regensburg: Gesellschaft fr Angewandte Mathematik und Mechanik, 1995. – P. 90–107.

316. Velisevich, A. V. Inverse Problems for the Nonlinear Stationary Equations / A.V.Velisevich, A.Sh.Lyubanova // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль. Издательство «Аркаим», Владимир. – 2022. – С. 73.

317. Vlasii, O. D. A Problem with Nonlocal Conditions for Partial Differential Equations Unsolved with respect to the Leading Derivative / O. D. Vlasii, B. I. Ptashnik // Ukrainian Mathematical Journal. – 2003. – T. 55. – № 8. – P. 1238–1253.

318. White, L. W. Limit behavior of Sobolev total flux boundary control problems / L. W. White // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1983. – V. 13. – № 3. – P. 383–396.

319. Winkert, P. Global a priori bounds for weak solutions to quasilinear parabolic equations with nonstandard growth / P. Winkert, R. Zacher // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2016. – V. 145. – P. 1–23.

320. Yaman, M. Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation / M. Yaman // Journal of Inequalities and Applications – 2012. – V. 2012. – № 274. – P. 1–8.

321. Yang, X. Improvements on lower bounds for the blow-up time under local nonlinear Neumann conditions / X. Yang, Z. Zhou // Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 265. – P. 830–862.

322. Yang, X. Lifespan estimates via Neumann heat kernel / X. Yang, Z. Zhou // Zeitschrift f?r angewandte Mathematik und Physik. – 2019. – V. 70. – № 30. – 26 p.

323. Yankovsky, A. P. Modelling of thermal conductivity in hybrid composites made from binding matrix, with orthogonal reinforcement with tubes and with disperse-hardened hollow inclusions / A. P. Yankovsky // Thermophysics and Aeromechanics. – 2011. – V. 18. – № 1. – P. 135–150.

324. Yuan, G. Lipschitz Stability in the Determination of the Principal Part of a Parabolic Equation / G.Yuan, M.Yamamoto // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2009. – V. 15. – № 3. – P. 525–554.