На правах рукописи

Любанова Анна Шоломовна

ОБРАТНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФУЗИИ И ФИЛЬТРАЦИИ

Специальность 1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Красноярск 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный консультант:

Андреев Виктор Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук – обособленного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук», главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений механики

Официальные оппоненты:

Антонцев Станислав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственноое бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Алексеев Геннадий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Папин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный университет», заведующий кафедрой дифференциальных уравнений

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет»

Защита состоится 11 ноября 2025 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: igil@hydro.nsc.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте http://www.hydro.nsc.ru Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « 18 » июля 2025 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета
24.1.055.01, д.ф.-м.н. Прокуд Прокудин Дмитрий Алексеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации. Появление новых математических моделей, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений диффузии и фильтрации. К таким уравнениям относятся параболические и связанные с ними стационарные уравнения и системы, а также уравнения, неразрешенные относительно старшей производной по времени, высшего порядка (третьего и выше) с производной по времени первого порядка, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}A(u) + B(u) = f \tag{1}$$

или

$$A\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) + B(u) = f, \tag{2}$$

где A и B – дифференциальные или интегро-дифференциальные, вообще говоря, нелинейные операторы по пространственным переменным четного порядка. Уравнения (1) и (2) с линейными операторами A и B одного и того же порядка относятся к классу так называемых простых уравнений соболевского типа.

Актуальность темы исследования. Коэффициенты уравнений и систем диффузии и фильтрации характеризуют физические свойства среды, которые трудно определить экспериментально. Так свойства и структура трещиноватой среды (например, гидравлические свойства и проницаемость) могут меняться со временем и зависят от естественных условий залегания пласта, которые практически невозможно воссоздать в лабораторных условиях с необходимой точностью. Поэтому параметры среды следует определять с помощью математических моделей на основе дополнительной информации о поведении среды в естественных условиях, а не на основе лабораторных экспериментов.

При моделировании процессов массопереноса в сплошных средах со сложным химическим составом, например, электролитического рафинирования цветных металлов возникают нелокальные задачи для систем уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Это связано с тем, что концентрация основного металла, как правило, известна и на начальной, и на конечной стадии процесса, тогда как концентрация примесей, в частности, состав шлама благородных металлов, не поддается определению с приемлемой точностью. Такие задачи можно рассматривать как обратные задачи отыскания неизвестной концентрации примесей в начальный момент по дополнительной информации о содержании основного металла на конечной стадии процесса. Представляют интерес подобные задачи и для уравнений соболевского типа, которые наряду с обширными физическими приложениями используются для регуляризации различных уравнений и систем.

Таким образом, широкие приложения и трудности определения физических параметров сложных сред приводят к необходимости постановки и изучения различных краевых задач для неклассических уравнений и систем диффузии и фильтрации.

Степень разработанности темы исследования. Наиболее интенсивные теоретические исследования задач диффузии и фильтрации связаны с прямыми и обратными задачами для уравнений и систем второго порядка. Большой вклад в развитие качественной теории краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации внесли труды П.Я. Полубариновой-Кочиной (1952), А.Н. Коновалова (1988), С.Н. Антонцева, А.В. Кажихова и В.Н. Монахова (1983), Г.И. Баренблатта, В.М. Ентова и В.М. Рыжика (1984). Следует также отметить работы С.Н. Антонцева и В.Н. Монахова (1978), Г.В. Алексеева и Н.В. Хуснутдиновой (1972), А.А. Папина (2009), В.В. Шелухина (2006), В.В. Шелухина и Ю. Амира (2007).

В последние десятилетия решение некоторых прикладных задач способствовало развитию новых направлений в теории диффузии и фильтрации. Так появление моделей фильтрации баротропного газа в неоднородных пористых средах вызвало интерес к изучению свойств решений параболических уравнений с нелинейностями переменного степенного роста. Задачи, связанные с прогнозом и регулированием уровня грунтовых вод, привели к краевым задачам для нагруженных параболических уравнений и систем. (В литературе принято использовать термин "нагруженное уравнение"для уравнений с частными производными, содержащих следы или значения некоторых функционалов от решения.) Корректность краевых задач для различных нагруженных параболических уравнений изучалась в работах М.Т.Дженалиева (2006), В.Н.Старовойтова (2021), О.Д.Власия и Б.И.Пташника (2003) и других авторов. Краевые задачи для нагруженных уравнений возникают также при решении обратных задач отыскания неизвестных коэффициентов в уравнениях диффузии и фильтрации.

Теория обратных задач для уравнений математической физики развивается представителями ряда отечественных и зарубежных математических школ, главным образом, Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым). Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимаются задачи определения коэффициентов и правых частей дифференциальных уравнений по некоторым функционалам от их решений. К обратным можно отнести задачи управления, а также задачи определения неизвестных ядер в интегро-дифференциальных уравнениях, граничных данных или начальных условий.

Характерной особенностью обратных задач является их некорректность по Адамару. При их исследовании используются общие понятия и подходы, развитые в работах А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, А.Н.Прилепко и их учеников. Подход, предложенный А.Н.Тихоновым, основан на методе регуляризации, согласно которому для исходной некорректной задачи строится регуляризирующее семейство операторов и ее приближенное решение ищется как элемент, доставляющий минимум некоторому стабилизирующему функционалу (функционалу Тихонова). Из всех некорректных задач М.М.Лаврентьев предложил выделить класс условно-корректных, к которым относятся в том числе и обратные задачи для дифференциальных уравнений. Условия таких задач во многих случаях позволяют выразить неизвестные параметры через основную искомую функцию (например, с помощью преобразований Фурье и Лапласа) и исключить их из уравнений.

В работах А.И.Прилепко и его учеников предложен иной подход, при котором обратная задача сводится к некоторому эквивалентному операторному уравнению для неизвестного параметра. Эквивалентность понимается в том смысле, что обратная задача разрешима тогда и только тогда, когда имеет решение операторное уравнение для неизвестного параметра. Причем решение операторного уравнения является искомым параметром обратной задачи. Подход, предложенный А.И.Прилепко, позволяет свести обратную задачу к эквивалентному операторному уравнению для искомого коэффициента p вида $p = A_u(p)$, правая часть которого может зависеть явно как от решения обратной задачи u, так и от неизвестного параметра p, что дает более широкие возможности при построении операторного уравнения. Этот подход используется при исследовании обратных задач в данной диссертации.

Большинство работ по обратным задачам для эволюционных и стационарных уравнений диффузии и фильтрации посвящены вопросам корректности различных задач отыскания коэффициентов и правых частей, зависящих от времени и пространственных переменных, в уравнениях второго порядка. Одной из наиболее сложных и практически важных среди них является задача восстановления коэффициента проницаемости (или диффузии) k в уравнении

$$u_t = div(k(t,x)\nabla u) \tag{3}$$

и в соответствующем стационарном уравнении. Исследование обратных задач идентификации старшего коэффициента k, зависящего от t, восходит к работам Д.Р.Кэннона (J.R.Cannon, 1963) и Б.Ф.Джонса-мл. (B.F.Jones-Jr, 1962), посвященным обоснованию корректности в смысле классического решения обратной задачи определения коэффициента $k(t)$ на множестве $0 < x < \infty$, $0 < t < T < \infty$ при начальных данных, граничном условии Дирихле и условии переопределения Неймана на конце $x = 0$. Корректность обратных задач определения коэффциента k в (3), зависящего от пространственных переменных x или от переменных t и x, исследовалась как в случае неограниченной области по x, например, корректность «в малом» по t задачи Коши для (3) (Н.Я.Безнощенко), так и в ограниченных областях с различными условиями переопределения (см., например, работы С.И.Кабанихина, М.А.Шишленина, А.И.Кожанова).

Модели процессов диффузии и фильтрации, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах, приводят к уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной по времени. Теоретические исследования краевых задач для таких уравнений восходят к работе А. Пуанкаре (H.Poincaré, 1885). Особенно большой интерес к этим уравнениям возник в связи с работой С. Л. Соболева 1954 года, которая дала толчок развитию качественной теории данного класса уравнений высших порядков. Изучение этих уравнений продолжили В. П. Маслов, М. И. Вишик, Т. И. Зеленяк, С. А. Гальперн и другие.

В 1969 году Т. Тингом (T.W.Ting) для линейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \eta\Delta u) - k\Delta u = f, \tag{4}$$

впервые был введен термин «псевдопараболическое уравнение» в связи с тем, что при $\eta \to 0$ решение этого уравнения стремится к решению соответствующего параболического уравнения в смысле нормы пространства L^2. Впоследствии этот термин распространился на все линейные и нелинейные уравнения вида (1) и (2) с линейными операторами A и B одного и того же порядка. В 1997 году Г.В.Демиденко и С.В.Успенский предложили классификацию линейных уравнений с постоянными коэффициентами, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Согласно данной классификации линейные уравнения вида (1) и (2), не являются псевдопараболическими. Они относятся к классу простых уравнений соболевского типа. В настоящее время в литературе встречаются оба названия уравнений (1) и (2). В данной диссертационной работе для них используется термин «уравнение соболевского типа».

Исследования уравнений вида (1) и (2) ведутся в нескольких направлениях. В пятидесятые и шестидесятые годы прошлого века внимание исследователей было обращено главным образом к линейным уравнениям (1) и (2) с эллиптическими операторами A и B. Изучалась корректность различных задач, асимптотическое поведение и гладкость обобщенных решений. В семидесятые и восьмидесятые годы работы по линейным уравнениям были посвящены обобщению и развитию полученных ранее результатов для уравнений типа (1) с коэрцитивными операторами A и B произвольного четного порядка.

С семидесятых годов началось активное изучение нелинейных уравнений соболевского типа. Интерес к различным краевым задачам для нелинейных уравнений вызван появлением новых нелинейных модельных уравнений диффузии и фильтрации и развитием аппарата нелинейного функционального анализа для решения таких задач, в частности, теории монотонных операторов. Широкий круг работ посвящен вопросам глобальной и локальной во времени разрешимости и разрушения решений краевых задач для нелинейных уравнений (1) с линейным оператором A.

В 1985 году М.Бохм (M.Bohm) и Р.Е.Шоуолтер (R.E.Showalter) предложили новое модельное уравнение фильтрации в трещиноватой среде вида

$$(u + \eta A(\psi_1(u)))_t + B(\psi_2(u)) = f(t, x, u), \tag{5}$$

в котором учитываются нелинейные зависимости проницаемости и гидравлических свойств среды от давления жидкости в трещинах, где A и B – линейные эллиптические операторы. Ими и А.И.Кожановым установлены достаточные условия разрешимости краевой задачи для (5). При некоторых дополнительных условиях на $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ М.Бохм и Р.Е.Шоуолтер доказали единственность решения и теорему сравнения.

Все результаты по разрешимости и единственности решения начально-краевых задач для уравнения (5) получены при условии положительности и отграниченности от нуля производной $\psi_1'(s)$. Что касается нелинейностей, не удовлетворяющих этому условию, существование решения уравнения (5) с некоторыми нелинейностями степенного порядка установлено в работах В.-П.Дулла (V.-P.Düll, 2006) и А.Микелика (A.Mikelić, 2010). Вопрос о единственности решения остается открытым.

Другое направление в качественной теории уравнений диффузии и фильтрации, неразрешенных относительно производной по времени, связано с исследованием вырожденных уравнений с необратимым оператором A. В монографии Р.В. Кэролла и Р.Е. Шоуолтера (R.W.Carroll, R.E.Showalter, 1976) найдены условия разрешимости задач Коши для слабо вырожденных уравнений (1) и (2) с оператором $A = A_1 + I$, где I – тождественный оператор, оператор A_1 допускает вырождение, хотя оператор A остается обратимым в некотором банаховом пространстве. Н.А.Сидоровым (1984) изучен класс вырожденных операторных дифференциальных уравнений (1) в банаховых пространствах с неограниченными операторами, обладающих свойством конвергентности.

В работах Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова получил глубокое развитие полугрупповой подход к общей теории сингулярных уравнений (1). И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов (2000) предложили оригинальный метод доказательства существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) с необратимым оператором при старшей производной в гильбертовом пространстве. Данный метод основан на изучении свойств спектральной задачи (пучка) $Bu = \lambda Au$, связанной с операторным дифференциальным уравнением (1).

Широкий спектр результатов для уравнений и систем соболевского типа представлен в работах Г.В.Демиденко и С.В.Успенского (1997, 1998). В данных работах устанавливаются условия разрешимости в весовых пространствах задачи Коши и смешанных задач для дифференциальных уравнений и систем соболевского типа, доказываются теоремы единственности, изучаются асимптотические свойства решений.

Наименее изученным направлением исследований в теории диффузии и фильтрации являются обратные задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, в частности, уравнений соболевского типа. На сегодняшний день большинство результатов в этом направлении связаны с задачами восстановления правой части уравнений. Первый результат, полученный У.Ранделлом (W.Rundell) и Д.Л.Колтоном (D.L.Colton) в 1980 году, относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника f в уравнении (1) с $A = I + L$, $B = L$, где L – линейный эллиптический оператор второго порядка по пространственным переменным, I – тождественный оператор. В данной работе доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестной правой части, зависящей от x, по известному следу u при $t = T$, а также в случае зависимости от t по информации о потоке u в некоторой точке границы области $\partial\Omega$.

Цикл работ Б.С.Аблабекова, М.Ш.Мамаюсупова и С.Н.Землянского (1983,

1988) посвящен изучению условий существования и единственности классического решения задачи определения функции, зависящей от пространственных переменных, в правой части уравнения (4) в дивергентной форме с переменными коэффициентами η, k. В работе Ю.Е.Аниконова (2004) представлены формальные операторные формулы для определения неизвестной правой части и решения обратной задачи для уравнения соболевского типа с финальным условием переопределения.

А.И.Кожанов (2012), А.В.Уразаева и В.Е.Федоров (2004, 2008) исследовали корректность обратных задач восстановления неизвестных функций в правой части f вырождающихся уравнений и систем соболевского типа при различных условиях переопределения. В частности, А.В.Уразаевой и В.Е.Федоровым доказана однозначная разрешимость задачи восстановления вектор-функции в правых частях системы уравнений соболевского типа в абстрактном банаховом пространстве в случае существования аналитической полугруппы или группы оператора системы. С помощью данных результатов установлены необходимые и достаточные условия разрешимости и единственности сильного обобщенного решения задачи определения правых частей линеаризованной системы Осколкова.

Все приведенные выше результаты получены для линейных уравнений соболевского типа. Что касается обратных задач для нелинейных уравнений и систем, здесь следует отметить работы Н.Д. Ивановой, В.Е. Федорова, К.М. Комаровой (2012) и С.Н. Антонцева, Х. Хомпыша (2021), в которых установлено существование и единственность обобщенного решения обратной задачи определения функции в правой части нелинейной системы, описывающей течение жидкости Кельвина-Фойгта

$$\bar{v}_t - \lambda\Delta\bar{v}_t - \nu\Delta\bar{v} + (\bar{v}\nabla\bar{v}) + \nabla p = \bar{g}(x,t), \qquad div\,\bar{v} = 0$$

и ее обобщения с членом $\nu\mathrm{div}(|\nabla\bar{v}|^{q-2}\nabla\bar{v}) + \gamma|\bar{v}|^{m-2}\bar{v}$ вместо $\nu\Delta\bar{v}$, где λ и ν – положительные константы, $q > 1$ и $m > 1$ при интегральном условии переопределения. Для задачи восстановления функции h в правой части слабо нелинейного уравнения

$$u_t - a\Delta u_t - \Delta u + (\bar{b}, \nabla u) - |u|^p u = h(t)g(x),$$

с интегральным условием переопределения установлены условия разрушения решения u за конечный промежуток времени, а также условия стабилизации u к 0 при $t \to +\infty$.

Другой тип обратных задач для (1) связан с восстановлением ядер в интегральном члене уравнения (1) с интегро-дифференциальным оператором B. В частности, в работах А.А.Асанова, Е.Р.Атаманова (1995) и А.Лоренци, Е.Папарони (A.Lorenzi, E.Paparoni, 1997) получены достаточные условия разрешимости, единственности и устойчивости решения обратной задачи восстановления ядер $K_i(t)$

в линейном операторном дифференциальном уравнении

$$u_t - A_1u_t - A_2u = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^t K_i(t-s)B_iu(s)ds + f$$

с обратимым оператором $I - A_1$, действующим в некотором банаховом пространстве, при условиях $u(0) = u_0$ и $\Phi_i(A_1 - I)u = g_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Здесь операторы $A_i, B_i : X \to X$, $\Phi_i : X \to \mathbf{R}$ замкнуты.

С описанными выше обратными задачами для уравнений и систем соболевского типа тесно связаны задачи управления, которые по сути своей также являются обратными задачами. Причем управление или управляющие параметры в таких задачах, как правило, находятся в правой части или на границе области. Такие задачи с различными критериями управления изучались Л.В.Уайтом и Т.-Ц.Ли (1983), а также В.Е.Федоровым и М.В.Плехановой (2004, 2013).

Наиболее сложными для исследования и практически значимыми являются задачи идентификации коэффициентов уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Эти задачи сравнительно мало изучены. Здесь следует отметить цикл работ Я.Т.Мегралиева и Г.К.Шафиевой, в которых исследуются обратные задачи отыскания неизвестного младшего коэффициента $p(t)$ в уравнении

$$u_t - bu_{txx} - a(t)u_{xx} = p(t)u + f \tag{6}$$

с различными краевыми условиями и условиями переопределения в случае одной пространственной переменной $x \in (0, 1)$. В частности, найдены достаточные условия корректности обратной задачи восстановления $p(t)$ по известной информации о сумме $u(0.5, t) + \int_0^t u(x, t)dx$. Эти результаты обобщены на случай уравнения типа (6) с операторами произвольного четного порядка по пространственной переменной.

Наименее изучены обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов при производных u по t и x для уравнений соболевского типа. Сложность этих задач объясняется их существенной нелинейностью. Причем нелинейность, связанная именно с природой самой обратной задачи, а не со структурой уравнения, создает основные трудности для исследования. Условия корректности таких задач обсуждались в работах А.И. Кожанова (2010), М.Ш. Мамаюсупова (1983), С.Г. Пяткова и С.Н. Шергина (2015, 2016) и С.Н. Шергина, Е.И. Сафонова и С.Г. Пяткова (2019). В частности, Мамаюсуповым доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи отыскания функций $u(t, x)$, $b(y)$, $c(y)$ и константы a в уравнении

$$(u - \Delta u)_t = a\Delta u + b(y)u_y + c(y) + \delta(t, x, y), \quad (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0$$

при заданных $u(t, x, 0)$, $u_y(t, x, 0)$ и $u(0, x, y)$. Здесь $\delta(t, x, y)$ - дельта-функция Дирака. Достаточные условия существования сильных обобщенных решений обратных задач нахождения неизвестного коэффициента $p(t)$ при u, а также u_t с интегральным условием переопределения по области в случае многих пространственных переменных установлены в работе А.С.Кожанова. В работах е наряду с задачами восстановления неизвестной правой части в уравнениях соболевского типа рассматривались задачи идентификации r неизвестных коэффициентов, стоящих в правой части, и в слагаемых вида $c_k(t)M_k u$ по заданным следам решения u в r внутренних точках области, где M_k – дифференциальные операторы второго порядка по пространственным переменным, $k = r_0 + 1, \ldots, r$.

Как отмечалось выше, краевые задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации представляют большой прикладной интерес. Вместе с тем, многие практически значимые задачи либо мало изучены, либо не изучались совсем. В частности, обратные задачи отыскания коэффициентов в старших членах (третьего порядка) уравнений соболевского типа ранее не изучались. То же самое можно сказать и о нелокальных краевых задачах для систем уравнений диффузии параболического и соболевского типа с условиями по времени, заданными в разные моменты времени только для одной из неизвестных функций (задача о примесях). Кроме того, условия переопределения, физически оправданные для одних процессов, не подходят для других. В связи с этим возникает необходимость постановки и изучения новых задач для уравнений фильтрации и диффузии.

Цель настоящей диссертационной работы состоит в определении новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации и условий, гарантирующих корректность этих задач. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

– установить условия существования и единственности решения краевых задач для линейных уравнений соболевского типа с нелинейным граничным условием;

– определить условия корректности обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов линейного уравнения фильтрации соболевского типа с интегральными условиями переопределения на границе; исследовать свойства решений таких обратных задач, а именно устойчивость (непрерывную зависимость от входных данных задачи), гладкость, асимптотическое поведение;

– доказать однозначную разрешимость обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов нелинейного уравнения фильтрации соболевского типа и соответствующего стационарного уравнения с интегральными условиями переопределения на границе;

– установить достаточные условия существования и единственности обобщенного решения нелокальных краевых задач для нагруженных систем уравнений параболического и соболевского типа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и оригинальными. При исследовании корректности коэффициентных обратных задач используется оригинальный подход, разработанный автором на основе метода сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента. В работе впервые поставлены и исследованы обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов линейных и нелинейных уравнений фильтрации эллиптического и соболевского типа, а также линейных уравнений параболического типа с интегральными условиями переопределения относительно потока на границе области. Впервые доказано существование и единственность сильных обобщенных решений, получены оценки непрерывной зависимости решений от входных данных, найдены достаточные условия стабилизации решения обратной задачи для уравнения соболевского типа при $t \to +\infty$. Впервые исследована обратная задача восстановления неизвестного коэффициента в старшем члене уравнения фильтрации соболевского типа. Впервые доказаны теоремы существования и единственности решения нелокальных задач для систем двух уравнений диффузии с условиями по времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в следующих областях: качественная теория уравнений в частных производных, теория обратных задач, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности для обратных задач фильтрации, могут быть использованы при разработке численных алгоритмов решения этих задач.

Практическая значимость работы заключается в том, что математические модели, лежащие в основе изучаемых обратных и нелокальных задач, описывают физические процессы, имеющие важное значение для нефтедобычи и цветной металлургии.

Методология и методы исследования. Для исследования перечисленных задач используются методы функционального анализа и теории уравнений в частных производных, а именно, метод монотонности, теоремы вложения, теоремы о неподвижной точке, метод Галеркина, методы получения априорных оценок, метод регуляризации, итерационные методы. Для доказательства разрешимости обратных задач с интегральными условиями переопределения применяется метод, разработанный автором на основе продолжения граничных данных и сведения обратных задач к операторному уравнению для неизвестного коэффициента.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

– доказана однозначная разрешимость краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием;

– установлены условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в члене второго порядка линейного уравнения соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе области;

– получены достаточные условия корректности нового класса обратных задач отыскания неизвестного коэффициента в старшем члене линейных уравнений соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе области;

– доказано существование и единственность решения нового класса обратных задач для нелинейного уравнения фильтрации соболевского типа с неизвестным коэффициентом в члене второго порядка в случае интегрального условия переопределения на границе области;

– установлены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения нелокальной задачи для нагруженной системы уравнений диффузии с условиями в начальный и финальный моменты времени, заданными только для одной из неизвестных функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств всех утверждений.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), а также Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных конференциях:

– Японско-Новосибирский семинар по обратным задачам «Inverse and Ill-posed Problems» (Обратные и некорректные задачи) (Киото, Япония, 1994);

– международная конференция «The Meeting of Japanese Mathematical Society» (Собрание Японского математического общества) (Сендаи, Япония, 1995);

– международная конференция «Математические модели и методы их исследования» (Краноярск, Россия, 1997, 1999, 2001);

– «Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98)», посвященный памяти С.Л.Соболева (Новосибирск, Россия, 1998)

– международная конференция «Некорректные и обратные задачи», посвященная 70-летию М. М. Лаврентьева, (Новосибирск, Россия, 2002);

– международная конференция «Обратные и некорректные задачи», посвященная 75-летию М. М. Лаврентьева (Новосибирск, Россия 2007);

– международная конференция «Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий» (Красноярск, Россия, 2008);

– международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения (Москва, Россия, 2009);

– международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Яненко (Новосибирск, Россия, 2011);

– международная конференция «Математические и информационные технологии MIT 2011» (Сербия, Черногория, 2011);

– «6-я международная конференция «Inverse Problems: Modeling and Simulation» (Обратные задачи: моделирование и имитация) (Анталья, Турция, 2012);

– международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск, Россия, 2012);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева (Новосибирск, Россия, 2013);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященная 70-летию со дня рождения ректора НГУ В.Н.Врагова (Улан-Удэ, Россия, 2015)

– международная конференция «IX Сибирский конгресс женщин-математиков» (Красноярск, Россия, 2016);

– VIII международная конференция по математическому моделированию (Якутск, Россия, 2017);

– международная конференция «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, Россия, 2017);

– международная конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, Россия, 2018);

– международная конференция «Математика в приложениях. Международная научная конференция в честь 90-летия С.К. Годунова» (Новосибирск, Россия, 2019);

– одиннадцатая международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Россия, 2019);

– международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, Россия, 2020);

– международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященная 90-летию БГПИ-БГУ (Улан-Удэ, Россия, 2022);

– международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия, 2022);

– международная конференция «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's», посвященная 100-летию О.А.Ладыженской (Санкт-Петербург, Россия, 2022).

– российско-китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» в 2023 году (Новосибирск, Россия);

– международная конференция «Современные проблемы обратных задач», посвященная 85-летию академика РАН В.Г. Романова в 2023 году (Новосибирск, Россия).

Работа также обсуждалась на научных семинарах:

– на научном семинаре по уравнениям математической физики департамента математики университета Кейо (Япония) под руководством профессора А.Тани;

– на семинаре научно-исследовательского института математики Северо-восточного федерального университета «Неклассические уравнения математической физики» под руководством профессора И.Е.Егорова;

– на семинаре научной школы «Математическое моделирование в решении задач естествознания и социально-экономической сферы» Югорского государственного университета под руководством профессора С.Г.Пяткова;

– на семинаре кафедры математического анализа Челябинского государственного университета под руководством профессора В.Е.Федорова;

– на семинарах Института математики СО РАН имени С.Л.Соболева: семинар «Избранные вопросы математического анализа» под рукводством профессора Г.В.Демиденко, семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа под руководством профессора В.С.Белоносова, семинар лаборатории обратных задач математической физики под руководством профессора Ю.Я.Аниконова и доктора физико-математических наук М.В. Нещадима, семинар лаборатории дифференциальных и разностных уравнений под руководством профессора А.И.Кожанова, семинар лаборатории вычислительных проблем задач математической физики под руководством профессора А.М.Блохина, семинар «Теоретические и вычислительные проблемы математической физики» под руководством профессора Д.Л.Ткачева;

– на учебно-исследовательском семинаре механико-математического факультета Московского государственного университета «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» под руководством академика РАН В.А.Садовничего и профессора А.И.Прилепко;

– на научном семинаре кафедры математики физического факультета Московского государственного университета «Обратные задачи математической физики» под руководством профессора А. Б. Бакушинского, профессора А. В. Тихонравова и профессора А. Г. Яголы;

– на научном семинаре Института гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН «Математические модели механики сплошных сред» под руководством члена-корреспондента РАН П. И. Плотникова и доктора физико-математических наук В. Н. Старовойтова;

– на совместном научном семинаре отдела ИВМ СО РАН «Дифференциальные уравнения механики» и базовой кафедры математического моделирования и процессов управления Сибирского федерального университета «Математическое моделирование в механике» под руководством профессора В. К. Андреева;

– на межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» под руководством профессора А. И. Кожанова, профессора И. Е. Егорова, профессора С. В. Попова, профессора В. Е. Федорова, профессора А. П. Солдатова, профессора С. Г. Пяткова;

– на научном семинаре Института гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН «Прикладная гидродинамика» под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Пухначева и доктора физико-математических наук Е. В. Ерманюка;

– на научном семинаре Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН «Математические проблемы геофизики» под руководством члена-корреспондента РАН С. И. Кабанихина и профессора М. А. Шишленина;

– на научном семинаре кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ под руководством профессора А.Б.Костина, профессора О. В. Нагорнова и доктора физико-математических наук В.Б.Шерстюкова;

– на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Сибирского федерального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 41 работе [1–41], 17 статей (4 в соавторстве) – в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. 10 статей [1–3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15] опубликованы в журналах первого и второго квартиля Web of Science и Scopus, 16 статей – в научных изданиях «Белого списка». В работах [2, 3, 5] вклад автора в основные результаты является решающим. В статье [14] автору диссертации принадлежат результаты раздела 4 (теоремы 4.1 и 4.2).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 317 наименований, из них 41 работа автора по теме диссертации. Главы состоят из параграфов, которые в свою очередь содержат пункты. Общий объем диссертации составляет 314 страниц. Нумерация формул, утверждений (теорем, лемм и т.п.) и замечаний является сквозной в пределах одного параграфа, номера состоят из трех цифр: номер главы, номер параграфа и порядковый номер формулы или утверждения. Во введении используются только порядковые номера формул. Для задач применяется сквозная нумерация в пределах главы, номер состоит из номера главы и порядкового номера задачи.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель и научные задачи диссертационной работы, определены методы исследований, обоснована научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации. Описаны методы исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту, охарактеризована степень достоверности и представлена информация о публикациях и апробации полученных результатов.

Первая глава посвящена вопросам корректности краевых задач для уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени, и исследованию свойств их решений. В §1.1 доказываются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейной системы операторных дифференциальных уравнений в абстрактном банаховом пространстве. Идеи и метод доказательства этих теорем используются в дальнейшем при исследовании корректности краевой задачи для уравнения соболевского типа с нелинейными граничными условиями в §1.2.

Пусть задача рассматривается в некоторой области $\Omega \subset R^n$, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, T - действительное число и $Q_T = \Omega \times (0,T)$ - цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ - через t, а точки цилиндра Q_T и боковой поверхности S_T - через (t,x). Всюду ниже будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ – норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, соответственно; $\|\cdot\|_j$ и $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle_j$ – норма в $W_2^j(\Omega)$ и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^j(\Omega)$ и $W_2^{-j}(\Omega)$, соответственно $(j=1,2)$. Будем также обозначать через $\|\cdot\|_{p/2}$ норму в $W_2^{p/2}(\partial\Omega)$, $p=1,3$.

Определим линейный оператор $M : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ вида

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I,$$

где I – тождественный оператор, $\mathcal{M}(x)$ - матрица функций $m_{ij}(x)$, $i,j=1,2,...,n$, $m(x)$ скалярная функция. Будем предполагать выполненными следующие условия.

XV. $m_{ij}(x)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, и $m(x)$ ограничены в Ω. M – сильно эллиптический оператор, то есть для любых $v \in W_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$m_1\|v\|_1^2 \leq \left\langle Mv, v\right\rangle_{1,M} \leq m_2\|v\|_1^2 \qquad (1.2.1)$$

с положительными постоянными m_1 и m_2, где

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_{1,M} = \int\limits_\Omega \left[(\mathcal{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2)_R + m(x)v_1v_2\right]dx, \quad v_1,v_2 \in W_2^1(\Omega).$$

XVI. Оператор M самосопряжен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ для $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Рассмотрим следующую краевую задачу для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным смешанным граничным условием.

Задача 1.1. При заданных функциях $k(t)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\sigma(x)$, $\gamma(r)$, $\beta(t,x)$ и постоянной η требуется найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t + \eta Mu_t + kMu = f, \quad (t,x) \in Q_T, \qquad (1.2.2)$$

и краевым условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (1.2.3)$$

$$\Big(\eta\frac{\partial u_t}{\partial\bar{N}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial\bar{N}} + \sigma(x)(\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u))\Big)|_{S_T} = \beta(t,x). \qquad (1.2.4)$$

Относительно $\gamma(u)$ и $\sigma(x)$ предполагается, что $\sigma \in C(\overline{\Omega})$, $\sigma \geq 0$; $\gamma(r) \in C^1(-\infty,+\infty)$ и $\gamma(0)=0$, а также существуют положительные постоянные ν_i, $i=1,2,3$, $q\geq 2$ такие, что

$$\nu_1|r|^{q-2} \leq \gamma'(r) \leq \nu_2|r|^{q-2} + \nu_3 \qquad (1.2.5)$$

для всех $r \in (-\infty, +\infty)$.

Введем банахово пространство B с нормой

$$\|v\|_B = \langle Mv, v\rangle_{1,M}^{1/2} + \Big(\int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)|v|^q ds\Big)^{1/q},$$

и оператор $\tilde{M}$, действующий из B в сопряженное пространство B^* по следующему правилу: для каждого $u \in B$ элемент $\tilde{M}u$ задает функционал

$$J(v) = \langle \tilde{M}u, v\rangle_B \equiv \langle Mu, v\rangle_{1,M} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\gamma(u) v ds,$$

определенный на всех $v \in B$.

Под обобщенным решением задачи 1.1 понимается функция u из пространства $W = \Big\{u \big| u \in C([0,T]; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;B), u_t \in L^\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), (\tilde{M}u)_t \in L^{q/(q-1)}(0,T;B^*)\Big\}$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \Big\{(u_t, v) + \eta\langle Mu_t, v\rangle_{1,M} + k(t)\langle Mu, v\rangle_{1,M} + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma\Big[\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u)\Big] v ds\Big\} dt$$

$$= \int\limits_0^T \Big\{\big(f, v\big) + \int\limits_{\partial\Omega} \beta v ds\Big\} dt \qquad (1.2.7)$$

для любого $v \in L^q(0,T;B)$ и начальным данным $u(0,x) = u_0(x)$ для почти всех $x \in \overline{\Omega}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\eta > 0$, выполняются предположения XV, XVI и*

(i) $k(t) \in C([0,T])$, $f \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\sigma \in C(\overline{\Omega})$, $\gamma(r) \in C^1(-\infty,+\infty)$, $u_0 \in B$, $\beta \in L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))$;

(ii) $\sigma(x) \geq 0$, $\gamma(0) = 0$, *существуют положительные постоянные* k_0, ν_i, $i = 1,2,3$, *и* $q \geq 2$ *такие, что* $k(t) \geq k_0$ *для всех* $t \in [0,T]$ *и справедливо (1.2.5) для любого* $r \in (-\infty,+\infty)$.

Тогда задача 1.1 имеет обобщенное решение, и это решение единственно.

§1.3 посвящен краевым задачам для нелинейных уравнений соболевского типа, операторы которых немонотонны в банаховых пространствах. В §1.4 обсуждаются достаточные условия, при которых справедливы теоремы сравнения для уравнений третьего порядка соболевского типа.

Вторая глава диссертации посвящена новому классу обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных уравнениях по дополнительной информации о решении на границе области. В §2.1 обсуждаются особенности постановки обратных задач для линейных уравнений соболевского типа, формулировка интегральных условий переопределения на границе. В §2.2 –

2.6 исследуется корректность сформулированных обратных задач идентификации неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, в линейном уравнении соболевского типа и свойства их решений. В §2.2 рассматривается обратная задача отыскания младшего коэффициента, а §2.3 посвящен обратной задаче восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка в линейном уравнении соболевского типа.

Будем снова предполагать, что M – линейный оператор того же вида, что и в задаче 1.2, удовлетворяющий несколько иным условиям.

I. $m_{ij}(x)$, $\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_l}$, $i, j, l = 1, 2, \ldots, n$, и $m(x)$ ограничены в Ω. M – сильно эллиптический оператор, то есть для любых $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства (1.2.1).

II. Оператор M самосопряжен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим следующую обатную задачу.

Задача 2.2 При заданной постояной η и функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ найти пару функций $\{u(t,x), k(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t + \eta M u_t + k(t)\, M u + g(t,x) u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.3.4}$$

краевым условиям

$$(u + \eta M u)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3.5}$$

$$u\big|_{S_T} = \beta(t,x), \tag{2.3.6}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{\overline{N}}} + k(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{N}}} \right\} \omega(t,x)\, dS + \varphi_1(t) k(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.3.7}$$

Будем предполагать, что $\partial\Omega \subset C^2$. Введем функции $a(t,x)$, $b(t,x)$ и $h^\eta(t,x)$, как решения задач Дирихле

$$Ma = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad a\big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x); \tag{2.3.8}$$

$$Mb = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad b\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x); \tag{2.3.9}$$

$$h^\eta + \eta M h^\eta = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h^\eta\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x) \tag{2.3.10}$$

и обозначения

$$\Psi(t) = \big\langle Ma, b \big\rangle_{1,M}, \qquad F(t,x) = a_t - f(t,x) + g(t,x) a, \tag{2.3.11}$$

$$\Phi^\eta(t) = \varphi_2(t) - \frac{\eta}{2} \left\langle M a_t, b \right\rangle_{1,M} + (f(t,x) - a_t, h^\eta). \tag{2.3.12}$$

Однозначная разрешимость задачи 2.2 «в целом» по t гарантируется следующей теоремой.

Теорема 2.3.1 *Пусть выполняются предположения I–II и η – положительная постоянная. Предположим, что*
(i) $f \in C([0,T];L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;
(ii) f, U_0, β, ω, φ_1 *неотрицательны и*

$$\int\limits_{\Omega} h^\eta\, dx \geq h_0 = \mathrm{const} > 0, \quad t \in [0,T]; \tag{2.3.14}$$

(iii) *существуют константы* α_i, $i = 0,1,2$, *такие, что* $0 \leq \alpha_i \leq 1$ *при* $i = 0,1$, $\alpha_0 + \alpha_1 < 2$, $\alpha_2 > 0$ *и*

$$(1-\alpha_0)\,\varphi_1(t) + (1-\alpha_1)\,\Psi(t) \geq \alpha_2, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.15}$$

$$\chi(0) + a(0,x) - U_0(x) \geq 0 \tag{2.3.16}$$

почти для всех $x \in \Omega$,

$$g(t,x)\chi(t) + \chi'(t) + F(t,x) \geq 0 \tag{2.3.17}$$

почти для всех $(t,x) \in Q_T$, *где*

$$\chi(t) = \eta\,(\alpha_0\varphi_1(t) + \alpha_1\Psi(t))\left[\int\limits_{\Omega} h^\eta\, dx\right]^{-1};$$

(iv) *для любого* $t \in [0,T]$ *выполняется неравенство*

$$\Phi^\eta(t) \geq \Phi_0^\eta = \mathrm{const} > 0 \tag{2.3.18}$$

и $g(t,x)$ *удовлетворяет условию*

$$\max_{\overline{\Omega}} g(t,x) \leq \frac{\Phi^\eta(t)}{\eta}\left[\varphi_1 + \Psi + 2\eta^{-1}(a,h^\eta)\right]^{-1}. \tag{2.3.19}$$

Тогда задача 2.2 имеет единственное решение $\{u,k\} \in C^1([0,T];W_2^2(\Omega)) \times C([0,T])$. *Причем, для u справедливы оценки*

$$0 \leq u(t,x) \leq \chi(t) + a(t,x) \qquad (2.3.20$$

почти для всех $(t,x) \in Q_T$ *и*

$$\|u(t)\|_1^2 + \|u_t(t)\|^2 + \eta\left(\|u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right) \leq C, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.21}$$

и коэффициент $k(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$k_0 \leq k(t) \leq k_1 \tag{2.3.22}$$

с некоторыми положительными константами k_0 *и* k_1.

Основная идея доказательства существования решения задачи 2.2 состоит в сведении данной задачи к эквивалентной обратной задаче с нелинейным операторным уравнением $k = Ak$ для коэффициента $k(t)$. Для построения такого уравнения используется продолжение функций β и ω внутрь области в виде решений задач (2.3.8)–(2.3.10). Далее, умножая (2.3.4) на h^η в смысле скалярного произведения $L^2(\Omega)$ и дважды интегрируя по частям во втором и третьем слагаемых с учетом условий (2.3.5)–(2.3.7), получаем операторное уравнение $y = Ay$ с оператором A, который каждому элементу $y \in C([0,T])$ ставит в соответствие элемент

$$Ay = \Big[\Phi^\eta(t) - (g(t,x)u_y, h^\eta)\Big]\Big(\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta}(a - u_y, h^\eta)\Big)^{-1},$$

где u_y – решение прямой задачи (2.3.4)–(2.3.6) при $k = y$.

Разрешимость обратной задачи 2.2 равносильна существованию решения операторного уравнения для $k(t)$, то есть наличию у оператора A неподвижной точки. Последнее доказывается в два этапа: 1) строится замкнутое ограниченное подножество $Y \subset C([0,T])$, которое оператор A переводит в себя, что возможно благодаря теореме сравнения для линейных уравнений (2.3.4); 2) доказывается, что оператор A является сжимающим на множестве Y, и применяется принцип сжимающих отображений.

Сжимаемость оператора A гарантирует единственность решения операторного уравнения и решения обратной задачи.

В §2.4 обсуждаются вопросы асимптотического поведения решения обратной задачи 2.2 при $t \to +\infty$. Доказывается, что при некоторых условиях на исходные данные решение задачи 2.2 стабилизируется к решению ассоциированной с ней стационарной обратной задачи.

§2.5 главы 2 посвящен исследованию поведения решения обратной задачи 2.2 при $\eta \to 0$ и корректности соответствующей обратной задачи для параболического уравнения.

В §2.6 главы 2 исследуется корректность обратной задачи восстановления неизвестного старшего коэффициента $\eta(t)$ в линейном уравнении (2.3.4).

Задача 2.5. При заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, постоянных r_1, r_2 и ν найти пару функций $\{u(t,x), \eta(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$(\nu u + \eta(t)\, Mu)_t + Mu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.6.2}$$

краевым условиям

$$(\nu u + \eta(t)Mu)\big|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6.3}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T \tag{2.6.4}$$

и условиям переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \left(\eta(t) \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t,x)\, ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{2.6.5}$$

$$\eta(0) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(0,x)}{\partial \overline{N}}\, \omega(0,x)\, ds + r_1 \eta(0) = r_2. \tag{2.6.6}$$

Обратная задача 2.5 рассматривается при $\nu = 1$ и $\nu = 0$. Для задачи 2.5 при $\nu = 1$ установлена разрешимость и единственность решения „в малом“ по t, а при $\nu = 0$ – „в целом“ по t.

В дальнейшем наряду с обозначениями, введенными выше, мы будем использовать обозначения $\Phi(t) = \varphi_2(t) - \Psi(t)$ и $\overline{\Phi} = \max_{t\in[0,T]} |\Phi(t)|$. Кроме того, будем считать, что $h^\eta(t,x)$ – решение задачи Дирихле

$$h^\eta + \eta(0) M h^\eta = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad h^\eta\big|_{\partial\Omega} = \omega(t,x). \tag{2.6.7}$$

Как известно из теории краевых задач для уравнений соболевского типа, необходимым условием существования решения краевой задачи является обратимость оператора под производной по t в начальный момент $t = 0$. В данном случае обратимость оператора $I + \eta(0)M$ эквивалентна однозначной разрешимости обратной задачи отыскания неизвестной постоянной $\eta(0)$ в уравнении (2.6.3) с условиями (2.6.4) при $t = 0$ и (2.6.6). Достаточные условия существования и единственности сильного обобщенного решения этой обратной задачи дает следующая лемма.

Лемма 2.6.1 *Пусть выполняются предположения I–II и $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\beta(0,x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(0,x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$; $\beta(0,x)$ неотрицательна на $\partial\Omega$, $r_1 \geq 0$;*

$$r_1 + \Psi(0) > 0; \tag{2.6.8}$$

$$F_0(x) \equiv a_0(x) - U_0(x) \geq 0; \qquad \Phi_0 \equiv r_2 - \big(F_0, b_0)\big) > 0. \tag{2.6.9}$$

где $a_0(x) = a(0,x)$, $b_0(x) = b(0,x)$ и $F_0 = F(0,x)$. Тогда задача (2.6.3), (2.6.4) при $t = 0$, (2.6.6) имеет решение в классе $W_2^2(\Omega) \times \mathbf{R}^+$, где $\mathbf{R}^+ = \{s | s \in \mathbf{R}, s > 0\}$. Причем

$$u(0,x) \leq a_0(x) \qquad \text{почти для всех } x \in \Omega, \tag{2.6.10}$$

$$0 < k_0 \equiv \frac{\Phi_0}{r_1 + \Psi(0)} \leq \eta(0) \leq \frac{r_2 k_0 m_1 + (1 + k_0 m_1)\|F_0\|\|b_0\|}{k_0 m_1 (r_1 + \Psi(0))} \equiv k_1, \tag{2.6.11}$$

Если

$$\Phi_0 \geq \gamma \left(m_2 m_1^{-2} (r_1 + \Psi(0)) \|b_0\| \|F_0\| \right)^{1/2}, \tag{2.6.12}$$

где γ - действительное число, $\gamma > 1$, то решение задачи (2.6.3), (2.6.4) при $t = 0$, (2.6.6) единственно.

Под локальным решением задачи 2.5 при $\nu = 1$ будем понимать пару функций $\{u, \eta\}$ со следующими свойствами:

1) $\eta(t) \in C^1([0,t_0])$ при некотором $0 < t_0 \leq T$;

2) $u \in C^1([0,t_0]; W_2^2(\Omega))$;

3) выполняется уравнение (2.6.2) в $Q_{t_0} = (0,t_0) \times \Omega$ и условия (2.6.3)–(2.6.6) при $t \in [0,t_0]$.

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2.6.2)–(2.6.6) «в малом» по t устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.6.3 *Пусть выполняются предположения I–II и условия (2.6.8), (2.6.9) и (2.6.12) леммы 2.6.1. Предположим, что*

(i) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;

(ii) U_0, β, ω, φ_1 *неотрицательны и существует положительная постоянная* Ψ_0 *такая, что*

$$\varphi_1(t) + \Psi(t) \geq \Psi_0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.6.14}$$

Тогда при некотором t_0, $0 < t_0 \leq T$, *задача (2.6.2)–(2.6.6) имеет единственное решение* $\{u,\eta\}$ *в классе* $V_{t_0} = \big\{ \{u,\eta\} \bigm| u \in C^1([0,t_0]; W_2^2(\Omega)),\ \eta \in C^1([0,t_0]) \big\}$. *Причем существуют положительные константы* η_0 *и* η_1 *такие, что* $\eta_0 \leq \eta(t) \leq \eta_1$ *для любого* $t \in [0,t_0]$.

Доказательство теоремы 2.6.3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.3.1. При этом $\eta(t)$ ищется в виде $\eta(t) = \eta(0) + q(t)$, где $q(t)$ - решение операторного уравнения $y = A_2 y$,

$$A_2 y = \Bigg\{ \eta(0)\big(\Psi(0) - \Psi(t) + \varphi_1(0) - \varphi_1(t)\big) +$$

$$+ \int\limits_0^t \Bigg[\Phi_1 - \big(F - g(a - u_y, h^\eta\big) + (\eta(0) + y)\big\langle Ma, b_\tau \big\rangle_{1,M} +$$

$$+ \frac{1}{\eta(0)}\big(y(a - u_y, h^\eta_\tau) - (w, h^\eta)\big)\Bigg] d\tau \Bigg\} \left[\Psi + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(a - u_y, h^\eta) \right]^{-1}, \tag{2.6.25}$$

$u_y = u_y(t,x)$ – решение прямой задачи (2.6.2)–(2.6.4) при $\eta(t) = \eta(0) + y(t)$.

В **третьей главе** обобщаются постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений и результаты, полученные в главе 2, на случай нелинейных уравнений фильтрации. Операторы таких уравнений немонотонны в банаховых пространствах. Однако эти операторы сохраняют монотонность в специальном смысле на некоторых подмножествах банаховых пространств. Это позволяет применять при исследовании обратных задач для таких уравнений методы доказательства, разработанные в предыдущей главе.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 3.1. При заданных функциях $\psi(\rho)$, $f(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega(t,x)$ и постоянной η найти пару функций $\{u(t,x), k(t)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$(u + \eta M\psi(u))_t + k(t) M\psi(u) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{3.1.1}$$

краевым условиям

$$\left.(u+\eta M\psi(u))\right|_{t=0}=U_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.1.2}$$

$$u=\beta(t,x),\quad (t,x)\in S_T \tag{3.1.3}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial(\psi(u))_t}{\partial\overline{N}}+k(t)\frac{\partial\psi(u)}{\partial\overline{N}}\right\}\omega(t,x)\,ds+\varphi_1(t)k(t)=\varphi_2(t) \tag{3.1.4}$$

при $t\in(0,T)$. Здесь также, как и ранее, M – оператор, удовлетворяющий условиям I и II.

Условия корректности задачи 3.1 в смысле сильного обобщенного решения устанавливаются в §3.1. Целью §3.2 является исследование корректности стационарной обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента k, ассоциированной с нестационарной обратной задачей, рассмотренной в §3.1.

Введем следующие предположения относительно функции $\psi(\rho)$.

III. Функция $\psi(\rho)$ является взаимнооднозначным отображением интервала $(-\infty,+\infty)$ на себя и удовлетворяет условиям:

1) отображение $\psi^{-1}(v)$ из $L^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ $(q\geq 2)$ деминепрерывно ($\psi^{-1}(\rho)$ – функция обратная к $\psi(\rho)$);

2) функция $\psi(\rho)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$ и $\psi(0)=0$. Кроме того, $\psi'(\rho)\geq\psi_0>0$, где ψ_0 – константа и для каждого $\sigma>0$ существует постоянная $L(\sigma)>0$ такая, что для всех $\rho_1,\rho_2\in E(\sigma)=\{\rho|\ |\rho|\leq\sigma\}$

$$|\psi'(\rho_1)-\psi'(\rho_2)|\leq L(\sigma)|\rho_1-\rho_2|. \tag{3.1.7}$$

Обозначим через $a(t,x)$ и $b(t,x)$ решения задач

$$M\psi(a)=0\quad \text{в } \Omega,\quad \left.a\right|_{\partial\Omega}=\beta(t,x); \tag{3.1.8}$$

$$Mb=0\quad \text{в } \Omega,\quad \left.b\right|_{\partial\Omega}=\omega(t,x). \tag{3.1.9}$$

Кроме этого, введем дополнительные обозначения:

$$\Psi(t)=\left\langle M\psi(a),b\right\rangle_{1,M},\qquad F(t,x)=a_t-f(t,x),$$

$$\Phi(t)\equiv\varphi_2+(f,b)-\eta\left\langle M(\psi(a))_t,b\right\rangle_{1,M},$$

$$\overline{\Psi}=\max_{t\in[0,T]}\Psi(t),\quad \overline{\varphi}_1=\max_{t\in[0,T]}\varphi_1(t),\quad \overline{\Phi}=\max_{t\in[0,T]}|\Phi(t)|.$$

Под сильным обобщенным решением обратной задачи 3.1 будем понимать пару функций $\{u,k\}$, определенных в $Q_{t^*}=(0,t^*)\times\Omega$, где $0<t^*\leq T$, со следующими свойствами:

1) $k(t)\in C([0,t^*])$;

2) $u(t,x) \in W(t^*) = \{v \,|\, \psi(v) \in C([0,t^*]; W_2^2(\Omega)),\ v \in C([0,t^*]; L^4(\Omega)),\ v_t \in L^\infty(0,t^*; L^2(\Omega)),\ (\psi(v))_t \in L^\infty(0,t^*; W_2^2(\Omega))\}$

3) пара $\{u, k\}$ удовлетворяет уравнению (3.1.1) почти всюду в Q_t^*, начальным данным (3.1.2) почти всюду в Ω и условиям (3.1.3)–(3.1.4) почти при всех $t \in (0, t^*)$.

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи 3.1 в таком смысле дает следующая теорема.

Теорема 3.1.1 *Пусть $n \leq 4$, $\eta > 0$ и выполняются предположения I–III. Пусть также*

(i) $\partial\Omega \subset C^2$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\psi(\beta) \in C^1([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,T])$, $\omega \in C([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$;

(ii) $f \geq 0$ *почти всюду в* Q_T *и* $U_0 \geq 0$ *почти для всех* $x \in \Omega$; β *и* ω *неотрицательны почти всюду на* S_T. *Кроме того,* $\omega > 0$ *почти всюду на поверхности* $[0,T] \times \Gamma$, *где* $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ *– множество ненулевой* $n-1$*-мерной меры;*

(iii) *существует постоянная* $\alpha > 0$ *такая, что*

$$\varphi_1 + \Psi \geq \alpha, \tag{3.1.16}$$

$$a_0(x) - U_0(x) \geq 0, \tag{3.1.17}$$

$$F(t,x) \equiv a_t - f \geq 0, \tag{3.1.18}$$

$$\Phi(t) \geq \Phi_0 + \frac{\alpha}{\alpha_1} \max_{t\in[0,T]} \left(\|a_t\| + \frac{1}{(\psi_0 \eta m_1)^{1/2}} \|f\| \right) \max_{t\in[0,T]} \|b\|, \tag{3.1.19}$$

где постоянная $\Phi_0 > 0$,

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2}{(\eta^3 m_1 \psi_0)^{1/2}} \|a_0 - U_0\| \max_{t\in[0,T]} \|b\| > 0. \tag{3.1.20}$$

Тогда существует $0 < t^* \leq T$, *такое, что задача 3.1 имеет единственное решение* $\{u, k\} \in W(t^*) \times C([0,T])$ *и справедливы оценки*

$$0 \leq u \leq a, \tag{3.1.21}$$

$$0 \leq k(t) \leq \delta^*(t)$$

почти всюду в Q_{t^*}, *где* $\delta^*(t) > 0$ *– функция непрерывная на* $[0, t^*]$.

В **четвертой главе** методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций.

Объектом исследования в §4.1 являются нелокальные задачи для параболических систем.

Пусть $M, L, B : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^*$ – линейные дифференциальные операторы вида

$$M = -\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + (\mathbf{m}, \nabla)_R + m(x)I,$$
$$L = -\mathrm{div}(\mathcal{L}(x)\nabla) + (\mathbf{l}, \nabla)_R + l(x)I, \tag{4.1.1}$$
$$B = -\mathrm{div}(\mathcal{B}(x)\nabla) + (\mathbf{b}, \nabla)_R + b(x)I,$$

соответственно, где $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$, $\mathcal{L}(x) \equiv (l_{ij}(x))$ и $\mathcal{B}(x) \equiv (b_{ij}(x))$ – матрицы функций, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x)$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x)$, и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$ – векторные функции; m, l, b – скалярные функции; I – тождественный оператор.

Постановка нелокальной задачи заключается в следующем.

Задача 4.1. При заданных функциях $g_k(x, p)$, $f_k(t, x)$, $\beta_k(t, x)$, $k = 1, 2$, $\gamma(x, p)$, $u_0(x)$ и $u_T(x)$ найти пару функций $\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$, удовлетворяющую системе уравнений

$$u_{1t} + Mu_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)AU_2 + f_1(t, x), \tag{4.1.2}$$

$$u_{2t} + Lu_2 = Bu_1 + \gamma(x, u_1) + f_2(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T, \tag{4.1.3}$$

и краевым условиям

$$u_1|_{t=0} = u_0(x), \quad u_1|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.1.4}$$

$$u_i|_{S_T} = \beta_i(t, x), \quad i = 1, 2. \tag{4.1.5}$$

Здесь $U_i(x) \equiv \int_0^T u_i dt$, $i = 1, 2$. A – линейный оператор. Предполагается, что A – это либо тождественный оператор, т. е. $A = I$, либо дифференциальный оператор вида

$$A = -\mathrm{div}(\mathcal{A}(x)\nabla) + (\mathbf{a}, \nabla)_R + a(x)I, \tag{4.1.6}$$

где $\mathcal{A}(x) \equiv (a_{ij}(x))$ – матрица функций, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ – векторная функция; a – скалярная функция.

Рассмотрим задачу 4.1 в случае $A = I$. Относительно коэффициентов операторов M, L и B предполагается следующее.

I$'$. M и L – операторы эллиптического типа, т. е. существуют положительные постоянные m_k и l_k, $k = 1, 2$ такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$m_1\|v\|_1^2 \le \langle Mv, v\rangle_1 \le m_2\|v\|_1^2, \tag{4.1.10}$$

$$l_1\|v\|_1^2 \le \langle Lv, v\rangle_1 \le l_2\|v\|_1^2. \tag{4.1.11}$$

II$'$. $m_{ij}(x) \in H^{r+1}(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^3(\Omega)$, где $H^{r+1}(\overline{\Omega})$ – пространство Гельдера, $0 < r < 1$, $l_{ij}(x), b_{ij}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $0 < r < 1$; $\mathbf{m} \in (H^r(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^2(\Omega)))^n$, $m(x) \in H^r(\overline{\Omega}) \cap W_\infty^2(\Omega)$; $\mathbf{l}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$, $l, b \in L^\infty(\Omega)$.

Под решением задачи 4.1 будем понимать пару функций $\{u_1, u_2\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $\{u_1, u_2\} \in V = \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in C([0, T]; W_2^4(\Omega))$, $v_{1t} \in L^2(0, T; W_2^4(\Omega))$, $v_2 \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $v_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))\}$;

2) пара функций $\{u_1, u_2\}$ удовлетворяет соотношениям (4.1.2)–(4.1.5).

Теорема 4.1.3. *Пусть выполняются предположения I′, II′ и* $\partial\Omega \in C^5$. *Предположим также, что*

(i) $f_1 \in C^r([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega}))$, $f_{1t} \in C([0,T]; W_2^2(\Omega))$, $f_{1tt} \in L^2(Q_T)$, $f_2 \in L^2(Q_T)$, $u_0, u_T \in H^{r+2}(\overline{\Omega}) \cap W_2^5(\Omega)$, $\beta_1 \in C([0,T]; H^{r+2}(\partial\Omega) \cap W_2^{7/2}(\partial\Omega))$, $\beta_{1t} \in C^r([0,T]; H^r(\partial\Omega)) \cap L^2(0,T; W_2^{7/2}(\partial\Omega))$, $\beta_{1tt}, \beta_{1ttt} \in L^2(0,T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$, $\beta_2, \beta_{2t} \in L^2(0,T; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$, $0 < r < 1$;

(ii) *если* $n \le 6$, *то функции* $g_k(x,p)$, $k = 1,2$, *дважды непрерывно дифференцируемы в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$; *если* $n > 6$, *то* $g_1(x,p) = c(x)p$, *где* $c(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ *и* $g_2(x,p) = g_2(x) \in C^2(\overline{\Omega})$; *функция* $\gamma(x,p)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$; *существует постоянная* $\nu > 0$ *и неотрицательная непрерывная функция* $q_1(s_1, s_2)$ $((s_1, s_2) \in \mathbf{R}^2)$ *такие, что* $|g_2(x,p)| \ge \nu$ *в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ *и*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L_2(Q_T)} \le q_1(\|v\|_{C([0,T];W_2^4(\Omega))}, \|v_t\|_{L^2([0,T];W_2^4(\Omega))}) \qquad (4.1.16)$$

для любого $v \in C([0,T]; W_2^4(\Omega))$ *с* $v_t \in L^2([0,T]; W_2^4(\Omega))$.

Тогда задача 4.1 имеет решение $\{u_1, u_2\} \in V$, *это решение единственно и* $u_{1tt} \in L^2(0,T; W_2^2(\Omega))$.

Существование решения задачи 4.1 доказывается в два этапа. На первом этапе устанавливается существование и единственность решения задачи (4.1.2), (4.1.4), (4.1.5), как обратной задачи восстановления неизвестной функции u_1 и источника U_2. Второй этап заключается в решении задачи для уравнения (4.1.3) относительно u_2 с граничными данными (4.1.5) при условии, что u_1 и U_2 известны.

В §4.2 обсуждаются условия разрешимости и единственности решения аналогичной нелокальной задачи для системы уравнений соболевского типа, неразрешенных относительно производных по времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены актуальные задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Исследована корректность новых классов краевых задач для уравнений и систем диффузии и фильтрации, в основе которых лежат математические модели, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах.

В работе доказано существование и единственность обобщенного решения краевой задачи для линейного уравнения соболевского типа с нелинейным граничным условием. В отличии от других работ, в которых существование обобщенного решения установлено при ограничениях на размерность по пространственным переменным и порядок степенного роста нелинейности q, связанных с теоремой вложения, данный результат получен при произвольной размерности и $q \ge 2$.

В диссертации представлен новый класс коэффициентных обратных задач с интегральными условиями переопределения на границе области, который ранее не рассматривался. В главе 2 исследованы обратные задачи восстановления неизвестных коэффициентов, зависящих от времени, линейных уравнений фильтрации соболевского типа, а также связанные с ними задачи для уравнений параболического и эллиптического типа. Для них установлены условия существования и единственности сильного обобщенного решения, доказана непрерывная зависимость решения от исходных данных. Основная идея предложенного метода доказательства существования решения состоит в продолжении исходных данных с границы внутрь области. Это позволяет свести обратную задачу к операторному уравнению второго рода для неизвестного коэффициента с оператором, имеющим неподвижную точку. Итерационные схемы, построенные при доказательстве теорем существования и единственности, могут быть использованы для разработки численных алгоритмов решения обратных задач.

Во второй главе также найдены достаточные условия на входные данные, при которых решение обратной задачи восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка линейного уравнения соболевского типа стабилизируется к решению сответствующей стационарной обратной задачи. Кроме того, доказана однозначная разрешимость параболической обратной задачи восстановления коэффициента в старшем члене с интегральным условием переопределения на границе с помощью регуляризации соответствующей обратной задачей для уравнения соболевского типа.

В главе 3 постановки и методы исследования корректности обратных задач, рассмотренных в предыдущей главе, обобщены на случай обратных задач восстановления неизвестного коэффициента в члене второго порядка нелинейных уравнений фильтрации с интегральными условиями переопределения на границе. Теоремы существования и единственности доказаны для уравнения, неразрешенного относительно производной по времени, и стационарного уравнения фильтрации.

В главе 4 методы решения обратных задач применены для изучения нового класса нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений параболического и соболевского типа, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Для этих задач найдены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения.

Результаты диссертационной работы представляют теоретический интерес для специалистов в области качественной теории уравнений в частных производных и теории обратных задач. Предложенные в работе подходы и методы доказательства могут стать основой для постановки и исследования новых краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in an elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Applicable Analysis. – 2008. – V. 87. – № 10-11. – P. 1121–1128.

2. Lyubanova, A. Sh. On Inverse Problems for Pseudoparabolic and Parabolic Equations of Filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Inverse Problems in science and enjineering. – 2011. – V. 19. – № 7. – P. 1023–1042.

3. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Applicable Analysis. – 2011. – V. 90. – № 10. – P. 1557–1571.

4. Lyubanova A. Sh. On the Approximation of a Parabolic Inverse Problem by Pseudoparabolic One / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального Университета. Серия «Математика и Физика». – 2012. – Т. 5. – № 3. – С. 326–336.

5. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The stabilization / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Applicable Analysis. – 2013. – V. 92. – № 3. – P. 573–585.

6. Любанова, А. Ш. Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А. Ш. Любанова // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54. – № 6. – С. 1315–1330.

7. Любанова, А. Ш. Обратная задача для псевдопараболического уравнения с интегральным условием переопределения / А. Ш. Любанова // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 4. – С. 505—515.

8. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in a quasi-linear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2014. – V. 22. – № 3. – P. 341–356.

9. Любанова, А. Ш. О некоторых краевых задачах для систем псевдопараболических уравнений / А.Ш. Любанова // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56. – № 4. – С. 835–852.

10. Lyubanova, A. Sh. On an inverse problem for quasi-linear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и Физика». – 2015. – V. 8. – № 1. – P 38–48.

11. Lyubanova, A. Sh. On nonlocal problems for systems of parabolic equations / A. Sh. Lyubanova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2015. – V. 421. – № 2. – P. 1767–1778.

12. Любанова, А. Ш. Обратные задачи для нелинейных стационарных уравнений / А. Ш. Любанова // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23. – № 2. – С. 65–77.

13. Lyubanova, A. Sh. The Inverse Problem for the Nonlinear Pseudoparabolic Equation of Filtration Type / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и Физика». – 2017. – Т. 10. – № 1. – С. 4–15.

14. Lyubanova, A. Sh. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equations of diffusion / A. Sh. Lyubanova, A. V. Velisevich // Applicable Analysis. – 2019. – V. 98. – №. 11. – P. 1997–2010.

15. Lyubanova, A. Sh. Nonlinear boundary value problem for pseudoparabolic equation / A. Sh. Lyubanova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – V. 493. – 124514. – 18 p.

16. Lyubanova, A. Sh. The Regularity of the Solutions of Inverse Problems for the Pseudoparabolic Equation / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия "Математика и Физика". – 2021. – Т. 14. – № 4. – С. 414–424.

17. Lyubanova, A. Sh. An Inverse Problem for Pseudoparabolic Equation with the Mixed Boundary Condition / A. Sh. Lyubanova // Журнал Сибирского федерального университета. Серия "Математика и Физика". – 2023. – Т. 16. – № 5. – С. 661–672.

Публикации в других изданиях

18. Белов, Ю. Я. Задача Коши для некоторых типов эволюционных уравнений и систем в банаховом пространстве / Ю. Я. Белов, А. Ш. Любанова // Численные методы механики сплошной среды. – 1987. – Т. 1. – № 1. – С. 16–27.

19. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova, M. Tsutsumi // The Meeting of Japanese Mathematical Society, Tohoku University, 1995, September. – Sendai, Japan: Tohoku University, 1995. – P. 112–113.

20. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for the linear pseudoparabolic and parabolic equation of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Математические модели и методы их исследования. Международная конференция. 25 – 30 августа 1997 года. – Красноярск: Красноярский государственный университет, 1997. – С. 25–26.

21. Lyubanova, A. Sh. On inverse problems for the pseudoparabolic and parabolic equation of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти

С.Л.Соболева (1908–1989). Тезисы докладов, часть I. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. – С. 47.

22. Lyubanova, A. Sh. On inverse problems for equations of filtration / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Математические модели и методы их исследования. Международная конференция. 18–24 августа 1999 года. – Красноярск: Изд-во Красноярского государственного университета, 1999. – С. 226–227.

23. Lyubanova, A. Sh. On some inverse problem for the pseudoparabolic equation of filtration type / A. Sh. Lyubanova // Математические модели и методы их исследования. Труды международной конференции. – Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2001. – Т. 2. – С. 73–78.

24. Lyubanova, A. Sh. On identification of the coefficients of pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova // «International Conference «Ill-Posed and Inverse Problems» dedicated to Prof. M.M.Lavrent'ev on the occasion of his 70th anniversary (August 5–9, 2002, Novosibirsk, Russia): Abstracts». – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2002. – P. 108.

25. Lyubanova, A. Sh. On Inverse Problem for Linear Pseudoparabolic Equations of Filtration / A. Sh. Lyubanova // «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Труды международной научной конференции, посвященной памяти академика А.А.Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. – Москва: Московский государственный университет, 2009. – С. 203–204.

26. Lyubanova, A. Sh. On new inverse problems for the pseudoparabolic equations of filtration in fissured media / A.Sh.Lyubanova // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: сб. тезисов международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Яненко. – Новосибирск: Изд-во Института вычислительных технологий СО РАН, 2011. – С. 110.

27. Lyubanova, A. Sh. On the identification of the piezo-conductivity coefficient in the pseudoparabolic equation of filtration type / A. Sh. Lyubanova // Математические и информационные технологии. МИТ–2011. 27.08. – 31.08.2011, Врњачка Бања, Србија. 31.08.–5.09.2011, Будва, Црна Гора. – Косовска Митровица: Друштво Математичара Косова и Метохије, Природно-математички факултет; Београд, Србија: МСТ Гајич, 2011. – С. 99–100.

28. Lyubanova, A. Sh. Identification of a constant coefficient in a quasilinear elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // Abstracts of 6th International Conference «Inverse Problems: Modeling and Simulation» held on May 21–26, 2012, Antalya, Turkey. – Izmir, Turkey: Izmir University, 2012. – P. 44–45.

29. Lyubanova, A. Sh. The identification of an unknown coefficient in a main term of a pseudoarabolic equation / A.Sh.Lyubanova // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. – С. 89.

30. Lyubanova, A. Sh. On some problem for the systems of evolution equations / A. Sh. Lyubanova // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, 2013. – С. 335.

31. Lyubanova, A. Sh. On boundary value problem for nonlinear parabolic systems / A. Sh. Lyubanova // Конференција Математичке и Информационе технологије (2013; Врњачка Бања, Бечичи). Zbornik radova Konferencije MIT [Matematičke i informacione technologije] 2013: [[održane] u Vrnjačkoj Banji od 5. do 9. septembra i u Bečićima od 10. do 14. septembra 2013 godine]. – Kosovska Mitrovica: Prirodno-matematički facultet; Novosibirsk: Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014. – C. 397–404.

32. Lyubanova, A. Sh. Inverse problems for the nonlinear stationary equations / A. Sh. Lyubanova // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов» / под ред. д. ф.-м. н. А.И.Кожанова и к. ф.-м. н. Б.Б. Ошорова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. – С. 10–11.

33. Любанова, А. Ш. Обратная задача для линейного псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А. Ш. Любанова // Вестник Московского университета им. С.Ю. Витте. Серия «Образовательные ресурсы и технологии». – 2016. – № 2(14). – С.357–363.

34. Любанова, А. Ш. О новых коэффициентных обратных задачах для псевдопараболических уравнений фильтрации / А.Ш.Любанова // Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2017. – С. 166–167.

35. Lyubanova, A. Sh. On some nonlocal problems for mixed systems of parabolic and pseudoparabolic equations / A. Sh. Lyubanova // VIII международная конференция по математическому моделированию: тезисы докладов». – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2017. – С. 25.

36. Lyubanova, A. Sh. On some boundary problems for the pseudoparabolic equation of diffusion / A. Sh. Lyubanova // Соболевские чтения. Международная школа-конференция, посвященная 110-летию со дня рождения

С.Л.Соболева (Новосибирск, 10–16 декабря 2018 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2018. – С. 226.

37. Lyubanova, A. Sh. The stabilization of the solution of an inverse problem for the pseudoparabolic equation / A.Sh.Lyubanova, A.V.Velisevich // Математика в приложениях. Международная научная конференция в честь 90-летия С.К. Годунова (4 – 10 августа 2019 года. Новосибирск): тезисы докладов. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2019. – С. 276.

38. Lyubanova, A. Sh. On an inverse problem for the elliptic equation with the mixed boundary condition / A.Sh.Lyubanova, A.V.Velisevich // IX Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 120-летию академика М.А.Лаврентьева, 7 – 11 сентября 2020 г. Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, 2020. – С. 39.

39. Lyubanova, A. Sh. Coefficient inverse problems for the filtration equations / A.Sh.Lyubanova, A.V.Velisevich // «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's», July 16 – July 22, 2022. Book of abstracts. – St. Petersburg: Steklov Institute of Mathematics. – P. 65.

40. Velisevich, A. V. Inverse Problems for the Nonlinear Stationary Equations / A.V.Velisevich, A.Sh.Lyubanova // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль. Издательство «Аркаим», Владимир. – 2022. – С. 73.

41. Lyubanova, A. Sh. The Stability of the Solutions to Stationary Inverse Problem / A.Sh.Lyubanova, A.V.Velisevich // Differential and Difference Equations. Russian - Chinese Conference. Abstracts / G. V. Demidenko (editor-in-chief). Novosibirsk: Novosibirsk State University. – 2023. – P. 97 – 98.

Подписано в печать 07.07.2025. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ 24812

Отпечатано Библиотечно-издательским комплексом
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-16; https://bik.sfu-kras.ru/
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru