

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Любановой Анны Шоломовны «Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация посвящена актуальной проблеме существования и единственности решений новых классов задач для уравнений диффузии и фильтрации, а также обратных задач для уравнений соболевского типа. Полученные результаты представляют дальнейшее развитие методов, созданных в работах Ю.Я. Белова, Н.Н. Яненко, А.И. Прилепко, М.М. Лаврентьева, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова по теории операторных уравнений и обратных задач.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, содержит 314 страниц, включая список литературы из 324 наименований.

Во введении дается обзор современного состояния изучаемых проблем, приведены рассматриваемые в диссертации уравнения и системы и сформулирована цель работы: математическое исследование проблемы разрешимости начально - краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации. Кроме того, дана краткая сводка результатов диссертации по главам.

В §1.1 первой главы приводятся вспомогательные сведения по вопросам корректности краевых задач для уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Основным результатом §1.2 является доказательство теоремы 1.2.2 существования и единственности решения линейного уравнения соболевского типа с нелинейным смешанным граничным условием. Вопросам повышения гладкости полученного решения посвящены теоремы 1.2.3 и 1.2.4.

§1.3 посвящен краевым задачам для нелинейных уравнений соболевского типа, операторы которых немонотонны в банаховых пространствах. Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного уравнения фильтрации с начальным условием и граничными данными Дирихле. Теорема 1.3.2 дает достаточные условия существования и единственности обобщённого решения.

В §1.4 обсуждаются достаточные условия, при которых справедливы теоремы сравнения для некоторых уравнений третьего порядка соболевского типа (теоремы 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.4). Теоремы сравнения используются при доказательстве разрешимости обратных задач.

Вторая глава диссертации состоит из 6 параграфов и посвящена новому классу обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных уравнениях соболевского, параболического и эллиптического типа по дополнительной информации о решении на границе области. В §2.1 обсуждаются особенности постановки обратных задач для уравнений соболевского типа, дается формулировка интегральных условий переопределения на границе. Мотивацией для поиска физически обоснованных условий переопределения послужила модель фильтрации в трещиноватой среде Баренблата, Желтова и Кочкиной. Основными результатами данного параграфа являются новые постановки коэффициентных обратных задач для линейного уравнения соболевского типа с неизвестными коэффициентами v , η , k , g .

В §2.2 рассматривается обратная задача отыскания неизвестного коэффициента $g = g(t)$ при $v = k = 1$ и постоянной $\eta > 0$ при дополнительном интегральном условии на границе. Основными результатами данного параграфа являются достаточные условия существования и единственности (теорема 2.2.2) и непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных (теорема 2.2.3).

Основная идея доказательства существования решения задачи, а также обратных задач, рассматриваемых в §2.3, 2.4 и 2.6, близка к методам, предложенным А.И. Прилепко, и состоит в сведении обратной задачи к эквивалентной задаче с нелинейным операторным уравнением для коэффициента $g(t)$. А. Ш. Любановой предлагается другой подход к построению операторного уравнения, при котором используется продолжение граничных функций внутрь области в виде решений некоторых краевых задач, позволяющее получить искомое операторное уравнение.

В §2.3 изучается обратная задача идентификации неизвестного коэффициента $k(t)$ в упомянутом выше линейном уравнении с постоянной $\eta > 0$, $v = 1$ и известной функцией $g = g(t, x)$ (теорема 2.3.1).

В §2.4 обсуждаются вопросы асимптотического поведения решения обратной задачи с неизвестным коэффициентом $k(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Основными результатами данного параграфа являются две теоремы. В теореме 2.4.2 приводятся условия на исходные данные, которые гарантируют стабилизацию решения нестационарной обратной задачи к решению соответствующей стационарной обратной задачи при $t \rightarrow +\infty$. Достаточные условия однозначной разрешимости стационарной задачи дает теорема 2.4.1.

§2.5 главы 2 посвящен исследованию поведения решения обратной задачи с неизвестным коэффициентом $k(t)$ в исходном уравнении при $\eta \rightarrow 0$ и корректности соответствующей обратной задачи для параболического уравнения. Основными результатами данного параграфа являются доста-

точные условия сходимости последовательностей при $\eta \rightarrow 0$ (теорема 2.4.2), и теорема существования и единственности сильного решения параболической обратной задачи (теорема 2.4.4).

В §2.6 устанавливаются условия разрешимости и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестного коэффициента $\eta = \eta(t)$ в старшем члене исходного уравнения при $k = 1$ и $g = g(t, x)$ (теоремы 2.6.3, 2.6.4).

В главе 3, результаты, полученные в главе 2, обобщаются на случай нелинейных уравнений соболевского типа и стационарных уравнений фильтрации.

В §3.1 рассматривается обратная задача отыскания неизвестного коэффициента в нелинейном уравнении фильтрации с начальным условием, граничным условием Дирихле и условием переопределения. Основным результатом данного параграфа являются достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи (теорема 3.1.1).

Целью §3.2 является исследование корректности стационарной обратной задачи отыскания неизвестного постоянного коэффициента в уравнении фильтрации. Главный результат данного параграфа – это достаточные условия существования и единственности решения стационарной задачи (теорема 3.2.3).

В главе 4 методы решения обратных задач применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений диффузии. Здесь рассматриваются задачи, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций.

В §4.1 рассматриваются нелокальные задачи для параболической системы с соответствующими краевыми условиями, причем условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Основными результатами данного параграфа являются достаточные условия существования и единственности решения (теоремы 4.1.3 и 4.1.4).

В §4.2 обсуждаются условия разрешимости и единственности решения аналогичной нелокальной задачи для системы уравнений, неразрешенных относительно производных по времени (теоремы 4.2.5, 4.2.6 и 4.2.7).

Автореферат написан достаточно подробно и правильно отражает все основные положения диссертации.

Из приведенного краткого обзора содержания диссертации следует, что она посвящена качественному анализу новых классов краевых задач для уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени, в том числе уравнений соболевского типа, нелинейных обратных задач. Задача отыскания глобальных решений нелокальных кра-

вых задач является очень трудной. Здесь автор продемонстрировал виртуозную технику использования как известных подходов из современной теории уравнений диффузии и фильтрации, так и оригинальную собственную технику.

Сделаем несколько замечаний по диссертации.

1. Следовало бы подробнее остановиться на постановке интегральных условий переопределения в обратных задачах (например, гл.2, стр. 90-92). Можно ли ставить другие условия?
2. В определении обобщенного решения на стр. 46 (и в некоторых других подобных определениях) целесообразно бы оговаривать физические существенные ограничения на искомые решения (например, указав границы изменения значений искомых функций). Тогда формулировки результатов о существовании решений были бы более понятны.
3. Для полноты понимания результатов о разрешимости обратных задач для уравнений фильтрации было бы уместно привести условия выполнения физического принципа максимума для насыщенности.
4. В тексте диссертации имеются опечатки (например, стр.31 последняя строка; стр. 49, последняя строка).

Отмеченные недостатки не снижают общей положительной оценки диссертации. Автору удалось преодолеть значительные трудности, особенно при построении решений обратных задач восстановления неизвестных коэффициентов в линейных и нелинейных уравнениях по дополнительной информации о решении на границе области (главы 2,3), а также при исследовании нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений диффузии, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций (глава 4).

Достоверность результатов не вызывает сомнений, поскольку они основаны на строго доказанных теоремах. При этом автор продемонстрировал глубокие знания и высокую технику в области качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Все результаты является новыми и своевременно опубликованы в центральных российских и зарубежных научных изданиях (17 из них из списка ВАК), неоднократно обсуждались на различных конференциях и семинарах и широко известны специалистам в области дифференциальных уравнений. Они могут быть использованы в МГУ им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, СФУ (Красноярск), НГУ (Новосибирск), ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, ИТПМ СО РАН и других родственных организациях.

Диссертация А.Ш. Любановой является цельным и завершенным исследованием, в котором аналитическими методами описаны особенности

новых классов краевых задач для уравнений диффузии и фильтрации, обоснована корректность этих моделей, развит метод решения обратных задач на основе продолжения граничных функций внутрь области.

Считаю, что диссертация «Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации» представляет собой крупное научное достижение в области качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений диффузии и фильтрации, отличается комплексным подходом к изучению таких задач: определение условий корректности обратных задач, получение априорных оценок, доказательство существования и единственности решений в различных функциональных пространствах. Она отвечает всем требованиям пунктов 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор А.Ш. Любанова заслуживает присуждения ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент

заведующий кафедрой дифференциальных уравнений;
профессор, доктор физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»



Папин Александр Алексеевич

17.10.2025

Я, Папин Александр Алексеевич, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета и их дальнейшей обработкой.

Место работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Алтайский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений

адрес: 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61.

Тел. : 8(3852)298-156. Эл.почта: papin@math.asu.ru

Подпись Папина А.А. заверяю



Подпись заверяю