

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА СИБИРСКОГО  
ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

**Кузнецов Денис Александрович**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ  
МАТЕРИАЛОВ ПРИ СМЕШАННОМ НАГРУЖЕНИИ**

Специальность 1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Кургузов В.Д.

Новосибирск 2026

## Оглавление

Введение .....	4
1. Виды разрушения и критерии предельного состояния тел с трещинами .....	16
1.1. Виды разрушения .....	16
1.2. О критериях разрушения.....	17
1.3. Выводы по главе 1 .....	26
2. Трёхточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении .....	29
2.1. Конечно-элементный анализ.....	29
2.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения .....	40
2.3. Критерии хрупкого разрушения .....	42
2.4. Выводы по главе 2 .....	50
3. Разрушение хрупких балок при антисимметричном четырёхточечном изгибе .....	51
3.1. Конечно-элементный анализ.....	52
3.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения .....	59
3.3. Критерии хрупкого разрушения .....	61
3.3.1. Обобщённый критерий максимальных окружных напряжений .....	63
3.3.2. Расширенный критерий максимальных окружных деформаций .....	64
3.3.3. Обобщённый критерий плотности энергии деформирования .....	65
3.3.4. Обобщённый критерий максимальных окружных осреднённых напряжений .....	67
3.3.5. Критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии и обобщённый критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии .....	69

3.4. Сравнение результатов расчётов с лабораторным экспериментом .....	72
3.5. Прогнозирование угла начала разрушения .....	74
3.6. Выводы по главе 3 .....	83
4. Анализ разрушения бразильского диска с круглым отверстием в смешанном режиме .....	86
4.1. Конечно-элементный анализ.....	86
4.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения .....	94
4.3. Критерии хрупкого разрушения .....	98
4.4. Сравнение результатов расчётов с лабораторным экспериментом .....	99
4.5. Прогнозирование угла начала разрушения .....	100
4.6. Выводы по главе 4 .....	104
Заключение .....	106
Список литературы .....	110

## Введение

### Актуальность темы работы

Создание новых, современных материалов, более жёсткие условия эксплуатации конструкций, необходимость увеличения сроков их жизни и усовершенствование процессов изготовления их элементов — всё это выявляет необходимость модернизации подходов к расчётам на прочность и к исследованиям разрушения материалов, из которых они изготавливаются. Наличие трещиноподобных дефектов (скоплений дислокаций и вакансий, непроваров, расслоений, полостей, включений, дефектов связи поверхностей раздела, коррозионных повреждений и т.д.), является одним из самых важных факторов, вызывающих разрушение в конструкциях, и делает актуальными исследования в области построения простых аналитических моделей, наиболее подходящих для использования в инженерных расчетах. Описанная проблематика, особенно в части хрупкого и квазихрупкого разрушения, представляет интерес для многих отраслей национальной экономики таких, как машиностроение, добывающая промышленность, строительство.

Для оценки предельного состояния тел с трещинами-разрезами, в механике разрушения, являющейся разделом механики деформируемого твердого тела и изучающей разрушение как следствие развития трещин, принято использовать критерии разрушения [1, 4, 21, 22, 27]. О преимуществах и недостатках силовых и деформационных критериев разрушения написано множество работ [47, 71, 86, 105, 111], модели в которых основаны на однопараметрическом подходе к описанию разрушения хрупких и квазихрупких материалов. Однако в последние годы наблюдается устойчивый рост интереса к разработке и использованию новых моделей исследования напряжённого состояния тел с трещинами, изучаемых двухпараметрической механикой разрушения и позволяющих более точно описать напряжённо-деформированное состояние (НДС) в окрестности вершины трещины. Для учета влияния геометрии на прогноз разрушения

хрупких и квазихрупких материалов необходимо применять двухпараметрические критерии разрушения, учитывающие локальное стеснение деформаций в окрестности вершины трещины, обусловленное влиянием первого несингулярного члена распределения поля напряжений у вершины трещины ( $T$ -напряжения). Важность учёта  $T$ -напряжений в линейной механике разрушения описана в [59]. В работах [12, 13, 14, 15] показана значимость  $T$ -напряжения в двухпараметрической механике разрушения и экспериментально подтверждена необходимость использования несингулярных компонент поля напряжений в критериях разрушения.

### **Степень разработанности темы**

Достоверно известно, что разрушение элементов конструкций вследствие роста имеющихся внутри них трещин часто происходит при нагружении смешанного типа. Определение направления распространения трещины и величины критической нагрузки, которая соответствует наименьшему сопротивлению разрушению элемента конструкции с трещинами, являются двумя основными проблемами механики разрушения при смешанном нагружении. Исследование процесса разрушения в смешанном режиме деформирования с целью получения эффективных параметров, управляющих ростом трещины, осуществляется обычно путем проведения экспериментов на модельных материалах и с помощью подходящих методов испытаний. Для исследования разрушения хрупких и почти изотропных материалов, таких как керамика [30, 50, 56, 98, 100], стекло [38, 72], полиметилметакрилат (ПММА) и другие полимеры [31, 35, 45, 60, 75], горные породы [32, 33, 54, 104], графит [37, 81], оконное стекло [96] и другие, были разработаны различные тестовые конфигурации образцов.

Выбор релевантного метода испытаний и подходящей геометрии образцов для экспериментов по определению вязкости разрушения важен для получения достоверных и точных данных по трещиностойкости изучаемого материала.

Соответственно, двумя основными требованиями являются простота изготовления образцов и простота испытаний данного материала на вязкость разрушения. Для испытаний используются образцы в форме прямоугольной балки, диска, полудиска, треугольной пластины или другой геометрии, подверженные различным типам нагрузок, наиболее подходящие для изучения конкретного материала. Например, прямоугольные балки, подвергаемые изгибающей нагрузке, применяют для испытаний на вязкость разрушения керамических и полимерных материалов [30, 31, 35, 38, 45, 50, 56, 60, 72, 73, 74, 75, 82, 93, 98, 100], в то время как разрушение горных пород оценивают методом бразильской пробы — сжатием цилиндрического образца по диаметру [2, 30, 32, 37, 40, 54, 101].

Наибольшее распространение получили испытания балок по схеме трёх- и четырёхточечного изгиба. Так, например, в работе [78] при четырёхточечном нагружении в смешанном режиме исследована вязкость разрушения в двух направлениях (параллельном и перпендикулярном внешнему воздействию) обжато поликристаллического вольфрама. Авторы [48, 76, 90] изучили асимметричный четырёхточечный изгиб для определения разрушения алюминия 5083 [90], четырёх марок металлических сплавов [76] и вязкой стали НУ100 [48] в смешанном режиме I+II. В работе [89] использована трёх- и четырёхточечная геометрия испытаний на изгиб балок из ПММА с трещинами для исследования в смешанном режиме I+II вязкости разрушения и траектории разрушения. Аналогичный анализ выполнен в [109] для получения характеристик разрушения эпоксидной смолы в смешанном режиме I+II на примере асимметричных прямоугольных балок в условиях трёх- и четырёхточечного изгиба.

В [83] отмечают некоторые проявляющиеся на практике недостатки балочных образцов, рассмотренных в [48, 76, 78, 89, 90, 109]. Во-первых, эксцентричная балка с надрезом, подвергаемая трёхточечному изгибному нагружению, не способна к полному и законченному смешанному деформированию, особенно в случаях нагружения по II моде. Во-вторых, одновременное применение четырёх нагрузочных роликов на верхней и нижней

кромках балки организовать непросто. Требуется точная настройка испытательной оснастки, а также тщательное изготовление балки для получения двух параллельных плоских кромок, верхней и нижней. В противном случае образец будет нагружаться тремя первыми контактирующими роликами, что приведет к нежелательным прогибам. Кроме того, образцы балок с трёх- и четырёхточечным изгибом, использованные в [48, 76, 78, 89, 90, 109], имеют большое отношение сторон (длины к ширине), то есть для подготовки тестируемого образца необходим большой объём материала.

Бразильский диск с центральной трещиной — один из самых популярных образцов, используемых для изучения хрупкого разрушения в смешанном режиме I+II, по причине простоты в изготовлении и несложного приспособления для нагружения. Изменяя угол наклона между центральной трещиной и линией приложения силы, можно получить разрушение в смешанном режиме I+II или разрушение по чистому режиму II. В работах [52, 62] получены аналитические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений и первого несингулярного компонента поля напряжений у вершины трещины для образца этого типа с помощью метода весовых функций. Бразильский диск с центральной трещиной также успешно используется для изучения свойств разрушения таких хрупких материалов как ПММА и керамика [30, 36, 46, 110], наблюдается хорошее согласование результатов экспериментов по определению угла зарождения трещины и разрушающей нагрузки с данными, полученными при помощи других методов исследования, а также их хорошее соответствие теоретическим прогнозам.

В работе [51] представлен полукруглый образец для испытаний на изгиб, который также часто используется для испытаний на смешанное разрушение [40]. Простота геометрии образца и процедуры подготовки к испытанию с использованием стандартного испытательного оборудования являются его основными преимуществами [39]. Изменяя угол ориентации трещины относительно линии приложения нагрузки, для этого образца можно получить как смешанный режим нагружения (I+II), так и чистые режимы I и II. В работах

[32, 34] образец такого вида используется для изучения влияния масштабного эффекта на разрушение известняка в чистом и смешанном режимах нагружения. Не так давно предложен усовершенствованный полукруглый образец с вертикальной трещиной [41], подвергнутый асимметричной трёхточечной изгибающей нагрузке, а в [91] представлен модифицированный образец такого типа с наклонной краевой трещиной, подвергнутый асимметричной трёхточечной изгибающей нагрузке.

Несмотря на наличие довольно большого числа работ по исследованию проблемы выбора подходящих образцов для изучения процесса разрушения в смешанном режиме деформирования, необходимо постоянное расширение их номенклатуры, так как это способствует повышению информационного содержания экспериментальной программы, позволяет исследовать сценарии разрушения, приближенные к реализующимся в индустриальных приложениях, а также более подробно анализировать необратимые процессы в зоне предразрушения. Параметры управляющие ростом трещины, такие как коэффициенты интенсивности напряжений и  $T$ -напряжение, в силу сложности геометрии образцов не имеют аналитических выражений и должны быть вычислены с помощью конечно-элементного моделирования для каждого типа опытного образца.

### **Цели и задачи работы**

Целью диссертационной работы является модификация широко используемых критериев прочности, их сравнение с известными, экспериментальная верификация, компьютерное моделирование направления инициации трещин и начала смешанного разрушения в образцах из хрупких и квазихрупких материалов на основе предложенных критериев.

Для достижения цели работы необходимо было решить следующие задачи:

1. Методом конечно-элементного анализа получить значения коэффициентов интенсивности напряжений по I и II модам разрушения, а также  $T$ -

напряжения при различных геометрических параметрах опытных образцов с трещинами и разных условиях нагружения.

2. Провести критический анализ методов вычисления  $T$ -напряжений.
3. На основе полученных в результате компьютерного моделирования параметров проанализировать диапазон смешанности мод разрушения для используемых образцов.
4. Провести экспериментальные исследования вязкости разрушения опытных образцов с трещинами различной геометрии в смешанном режиме.
5. Для прогнозирования направления разрушения и величины критической нагрузки применить различные критерии разрушения, в том числе критерии, учитывающие параметр локального стеснения деформаций в окрестности вершины трещины.
6. Провести анализ согласованности экспериментальных данных и данных расчетов.

### **Методы исследования**

Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовались: аналитические методы линейной механики разрушения, экспериментальные методы исследования разрушения лабораторных образцов, компьютерное моделирование напряжённо-деформированного состояния образцов с трещинами, пакет программ символьной алгебры Wolfram Mathematica 14.0, комплекс программ конечно-элементного моделирования MSC.Marc 2020.

### **Научная новизна**

1. Предложены модифицированные конфигурации опытных образцов с трещинами, позволяющие получить весь диапазон смешанности режимов разрушения I+II, включая чистый I и чистый II.

2. В результате компьютерного моделирования получены массивы данных, содержащие параметры, управляющие ростом и направлением распространения трещины при смешанном нагружении образцов различной геометрии.
3. Проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения новых материалов (эбонит, сферопласт) в условиях смешанного нагружения.
4. Для прогнозирования направления распространения (зарождения) трещины и величины критической нагрузки, использованы двухпараметрические критерии разрушения, учитывающие  $T$ -напряжение.
5. Получено точное представление обобщенной вязкости разрушения (обобщенный критический коэффициент интенсивности напряжений) для деформационного (EMTSN — Extended Maximum Tangential Strain) и энергетического (GSED — Generalized Strain Energy Density) критериев разрушения.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы состоит в оценке и сравнении двухпараметрических критериев разрушения с критериями, используемыми в классической (однопараметрической) механике разрушения.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования предложенных образцов для исследования вязкости разрушения и критериев оценки критического состояния хрупких и квазихрупких материалов без затрат ресурсов и времени на верификацию. Уникальные массивы данных, полученные в результате проведенных конечно-элементных вычислений, могут быть использованы для построения алгоритмов (аппроксиматоров) для ускоренного нахождения параметров напряжённого состояния нестандартных образцов с трещинами, универсальная методика представлена в работе [25] и может быть использована для образцов любой формы.

## Личный вклад автора

Постановка задач принадлежит научному руководителю, выбор методов исследования — совместно с научным руководителем. Анализ литературных источников, обработка экспериментальных результатов, компьютерное моделирование и исследование предельных состояний образцов с трещинами, анализ полученных результатов, формулировка основных научных положений и выводов выполнено автором диссертационной работы самостоятельно. Подготовка полученных результатов к публикации проводилась лично и с соавторами. Таким образом, основные положения диссертации получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

## Положения выносимые на защиту

1. Компьютерное моделирование НДС образцов с трещинами, определение по его результатам параметров, управляющих ростом трещины в условиях смешанного нагружения.
2. Более точный метод вычисления  $T$ -напряжений по смещениям.
3. Анализ диапазона смешанности режимов разрушения в исследованных образцах.
4. Экспериментальные исследования вязкости разрушения образцов различной геометрии в смешанном режиме.
5. Прогноз направления разрушения и величины критической нагрузки по различным критериям разрушения, учитывающим  $T$ -напряжение.
6. Сравнительный анализ прогнозируемых критических нагрузок с экспериментальными данными.

## **Степень достоверности результатов**

Достоверность результатов обеспечивается корректным применением математического аппарата, соотношений линейной механики разрушения, апробированных методов прикладной математики, соответствием численных решений известным решениям, приведенным в справочной литературе, сопоставлением и качественным совпадением результатов компьютерного моделирования с экспериментальными данными, а также сравнением полученных результатов с результатами других исследователей.

## **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 4 всероссийских конференциях: Наука Промышленность Оборона. XXIV Всероссийская научно-техническая конференция (Новосибирск, 2023, 2025); XXVIII Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Красноярск, 2023); Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвящённая 105-летию со дня рождения академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2024).

В полном объёме материалы диссертации были представлены и обсуждались на семинарах научного направления «Механика деформируемого твёрдого тела» ИГиЛ СО РАН (руководители семинара: д.ф.-м.н. Коробейников С.Н., д.ф.-м.н. Шутов А.В.).

## **Публикации по теме диссертации**

Результаты исследований по теме диссертационной работы опубликованы в 6-ти статьях, в том числе в 3-х статьях в российских журналах из перечня ВАК и индексируемых в Scopus, в 1-ой статье в зарубежном журнале, индексируемом

в Web of Science/Scopus, входящем в первый квартиль Q1 Web of Science, и в 2-х статьях в сборниках трудов всероссийских конференций.

### Список опубликованных работ автора по теме диссертации

#### *Публикации в изданиях, рекомендуемых ВАК*

1. Кургузов, В. Д. Трёхточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении / В. Д. Кургузов, А. Г. Демешкин, **Д. А. Кузнецов** // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023. — Т. 16, № 3. — С. 345–357. — DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.3.29.
2. Уфимцев, К. П. Аппроксиматоры для ускоренного вычисления параметров напряжённого состояния в нестандартных образцах с трещинами / К. П. Уфимцев, **Д. А. Кузнецов**, А. В. Шутов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2024. — Т. 17, № 3. — С. 308–319. — DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.26.
3. Кургузов, В. Д. Разрушение хрупких балок при антисимметричном четырёхточечном изгибе / В. Д. Кургузов, **Д. А. Кузнецов** // Вычислительная механика сплошных сред. — 2024. — Т. 17, № 4. — С. 393–410. — DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.32.
4. Kurguzov, V. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading / V. Kurguzov, **D. Kuznetsov** // Engineering Fracture Mechanics. — 2024. — Vol. 297. — 109875. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875.

#### *Публикации в других изданиях*

5. **Кузнецов, Д. А.** Трёхточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении / Д. А. Кузнецов // Наука. Промышленность. Оборона : труды XXIV Всероссийской научно-технической конференции : в 4 т. / коллектив авторов ; под ред. А. В. Гуськова. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2023. — Т. 1. — С. 57–62.

6. **Кузнецов, Д. А.** Анализ разрушения дискового образца с круглым отверстием в смешанном режиме методом бразильской пробы / Д. А. Кузнецов // Наука. Промышленность. Оборона : труды XXVI Всероссийской научно-технической конференции : в 4 т. / коллектив авторов ; под ред. А. В. Гуськова. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2025. — Т. 1. — С. 114–120.

### **Структура и объём работы**

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка используемой литературы (111 наименований), изложена на 122 страницах и содержит 42 рисунка и 5 таблиц.

### **Краткое содержание работы**

**Во введении** отражены актуальность и степень разработанности темы исследования. Сформулированы цель и задачи работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту, а также описана структура диссертации.

**Первая глава** представляет обзор механизмов разрушения и даёт представление о критериях оценки предельного состояния тел с трещинами.

**Во второй главе** для исследования механизма разрушения по смешанному типу (I+II) представлен образец эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с надрезом (трещиной), рассмотрено его поведение при асимметричном изгибном нагружении.

**В третьей главе** рассматривается образец в виде эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, подвергнутый антисимметричному четырёхточечному нагружению.

**Четвёртая глава** посвящена анализу разрушения образца бразильского диска с центральным круглым отверстием, ослабленного двумя внутренними краевыми радиальными трещинами, при смешанном режиме нагружения.

**В заключении** сформулированы выводы на основе проведённого исследования.

## **1. Виды разрушения и критерии предельного состояния тел с трещинами**

Механическим разрушением можно считать любое изменение размера, формы и свойств материала конструкции целиком или её отдельного элемента, в результате чего она перестает удовлетворительно выполнять свои функции [11]. Ясно, что процесс разрушения представляет собой физический процесс и начинается он на микроуровне, когда на начальном этапе нагружения в твёрдом теле начинают образовываться микродефекты, которые впоследствии, при продолжении нагружения, объединяются и образуют макротрещины. Таким образом, под разрушением следует понимать процесс образования новых свободных поверхностей в твёрдом теле под действием механической нагрузки. Данный процесс зависит от механических свойств материала и условий внешнего воздействия.

Для оценки разрушения по причине развития макротрещин недостаточно знания напряжённо-деформированного состояния, необходима оценка наступления предельного состояния материала, то есть начала неконтролируемого, неустойчивого роста присутствующей в нём трещины. Данную оценку получают при помощи критериев механики разрушения, формулировка которых может быть основана на локальных подходах, оценка критического состояния в пределах малой области у вершины трещины, и на глобальных подходах, оценивающих критическое состояние тела в целом. Возникает также задача прогнозирования направления роста трещины.

### **1.1. Виды разрушения**

Если основываться на практическом подходе к разрушению конструкций, то особый интерес представляют два вида разрушения: хрупкое и вязкое. Известно, что внешние условия могут существенно влиять на переход от вязкого разрушения к хрупкому и наоборот. Считается, что особую опасность представляет именно хрупкое разрушение, так как в этом случае происходит

быстрый рост нестабильных трещин в материале, при котором номинальное напряжение не превышает предела текучести. Вязкое же разрушение сопровождается значительной деформацией под напряжениями, превышающими предел текучести материала, поэтому оно может быть выявлено и предотвращено и, соответственно, не представляет большой опасности. Известно также, что распространение вязкой трещины связано со значительным расходом энергии, подводимой извне, а хрупкая трещина растёт за счет энергии, накопленной в теле. Рост хрупкой трещины сопровождается некоторой пластической деформацией перед её вершиной.

Деление разрушения на вязкое и хрупкое считается условным, так как для того, чтобы чётко классифицировать эти виды разрушения, необходимо учесть множество факторов, таких как структурное состояние и физико-механические свойства материала, особенность его взаимодействия с окружающей средой, наличие дефектов, условия нагружения и др. Поэтому можно классифицировать виды разрушения следующим образом: по степени пластичности, реализованной к моменту разрушения — хрупкое, квазихрупкое и вязкое; по условиям нагружения — статическое, динамическое, однократное, длительное, циклическое (малоцикловая усталость, многоцикловая усталость); по структурному признаку разрушения — внутризёренное, межзёренное, смешанное; по виду деформации в вершине трещины — нормальный отрыв, поперечный сдвиг, продольный сдвиг, их комбинации; по кинетике процесса разрушения — быстрое разрушение, замедленное разрушение; по виду воздействия окружающей среды — общая коррозия, расслаивающая, фреттинг-коррозия, щелевая коррозия, межкристаллическая, питтинговая и др.) и т.д.

## 1.2. О критериях разрушения

Первое математическое описание хрупкого разрушения в результате распространения трещины в твёрдом теле было представлено в работе А. А. Гриффитса (1921 г.) [58], в которой рост трещины описывался при помощи

энергетического подхода. Гриффитс предположил, что развитие трещины становится возможным без работы внешних сил, если увеличение поверхностной энергии тела, вызванное приращением площади поверхности трещины, компенсируется соответствующим уменьшением потенциальной энергии упругой деформации. Исходя из данного предположения, можно получить выражения для напряжения разрушения  $\sigma_c$  при заданной полудлине трещины  $l$  или для её критической величины  $l_c$  при известном внешнем напряжении  $\sigma$ :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E'\gamma_s}{\pi l}}, \quad l_c = \frac{2E'\gamma_s}{(\pi\sigma)^2}, \quad (1.1)$$

где  $E' = E$  при плоском напряжённом состоянии (ПНС) и  $E' = E / (1 - \nu^2)$  при плоском деформированном состоянии (ПДС),  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\gamma_s$  — удельная поверхностная энергия. Нужно отметить, что данное условие является дополнением к уравнениям теории упругости и позволяет решать её задачи о концентрации напряжений для тел с разрезами, как задачи о распространении трещин. При этом анализ процессов нелинейного деформирования в зоне предразрушения на фронте трещины не производится.

В сороковые годы XX века в процесс производства различных стальных конструкций начала внедряться новая технология — сварное соединение. Данная технология позволила значительно сократить время производственного цикла, но её массовое использование привело к значительному росту аварий, связанных с разрушением сварных конструкций. По этой причине возрождается интерес к проблеме хрупкого разрушения. Добавив к величине поверхностной энергии тела в теории Гриффитса значение работы пластической деформации при образовании единицы поверхности разрушения, Е. Орован (1955 г.) [88] и, независимо от него, Дж. Ирвин (1957 г.) [64] ввели понятие квазихрупкого разрушения. Ими было предложено представлять удельную энергию разрушения равной только удельной работе пластических деформаций:

$$2\gamma = 2\gamma_s + \gamma_p \approx \gamma_p, \quad (1.2)$$

так как  $\gamma_p \gg 2\gamma_s$ . Такой подход позволил ввести характеристики материала, позволяющие оценить его сопротивление распространению трещин.

Ирвин при рассмотрении критерия разрушения исходил из интенсивности высвобождения упругой энергии (притока энергии в вершину трещины приходящегося на единицу площади трещины):

$$G = -\frac{dW}{dS} \quad (1.3)$$

и сопротивления росту трещины:

$$G_c = 2\gamma_{eff}, \quad (1.4)$$

где  $2\gamma_{eff} = 2\gamma_s + \gamma_p$  — эффективная удельная работа разрушения. Тогда условие хрупкого разрушения можно представить в виде:

$$G = G_c, \quad (1.5)$$

а выражение для критической величины напряжений запишется как

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E'G_c}{\pi l}}. \quad (1.6)$$

Анализ напряжённого состояния в вершине трещины позволил установить особенность напряжения в виде квадратного корня из расстояния от кончика трещины, а амплитудный коэффициент при этой особенности был назван коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). При этом силовой критерий разрушения Ирвина формулируется следующим образом: трещина начнёт своё распространение тогда, когда КИН достигнет некоторой величины, постоянной для данного материала и условий нагружения. Соответствующая критическая величина КИН  $K_c$  получила название вязкости разрушения и оценивает способность материала сопротивляться распространению в нём трещин. Указанный критерий справедлив для квазихрупкого разрушения при условии малости области нелинейных эффектов у вершины трещины. Критическое

напряжение, вызывающее разрушение, в силовой интерпретации Ирвина, определяется формулой:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l}} \quad (1.7)$$

здесь  $K_{Ic}$  — критический КИН для трещины нормального отрыва.

В 1957 г. была опубликована работа М. Вильямса [107], в которой напряжения у вершины трещины представлены в виде ряда, содержащего сингулярные и несингулярные члены разложения. Как отмечается в [12], долгое время в решении Вильямса был востребован только сингулярный член, связанный с КИН, в то время как влияние несингулярного члена ( $T$ -напряжения) не было изучено и считалось незначительным. В случае смешанного режима разрушения (I+II) поле напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}), \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $r, \theta, x, y$  — полярная и декартова системы координат с началом в вершине трещины;  $K_I, K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряжений по I и II модам разрушения, соответственно;  $T$  —  $T$ -напряжение.

Возможность исследования поведения тела с трещиной при помощи коэффициентов интенсивности напряжений, по существу, ограничена линейной механикой разрушения, когда диаграмма напряжения–деформации имеет линейный начальный участок, а размер зоны предразрушения мал по сравнению с характерными размерами трещины и тела. В случае, когда размер зоны пластичности у вершины трещины выходит за пределы 10% от её длины [22], возникает необходимость в определении закономерностей поведения тела с

трещиной в зависимости от способности материала сопротивляться пластическим деформациям. Модели с достаточно развитой пластической зоной перед вершиной трещины рассматриваются в рамках нелинейной механики разрушения, значительный вклад в которую внесли М.Я. Леонов, А.В. Панасюк, Д. Дагдейл, А. Уэллс, Г.П. Черепанов, Дж. Райс и др. [10, 16, 20, 21, 22, 28, 65].

Модели М.Я. Леонова, А.В. Панасюка, Д. Дагдейла и А. Уэллса базируются на раскрытии в вершине трещины и предполагают, что трещина начнёт расти, когда величина раскрытия в её вершине достигнет своего критического значения, характерного для рассматриваемого материала. Модели Г.П. Черепанова и Дж. Райса основаны на концепции энергетического инвариантного интеграла ( $J$ -интеграл, интеграл Черепанова–Райса) для нелинейного упругого тела с трещиной в условиях плоской деформации. Особенностью энергетического  $J$ -интеграла является его независимость от контура интегрирования вокруг вершины трещины, это справедливо в рамках деформационной теории пластичности, в которой не предполагается разгрузки материала по линейному закону Гука. Свойство инвариантности и показанная Дж. Хатчинсоном, Дж. Райсом и Г. Розенгреном способность оценивать величину сингулярности напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины позволили использовать  $J$ -интеграл в качестве критериальной величины при формулировке критерия разрушения: трещина начинает распространяться, когда инвариантный  $J$ -интеграл достигнет предельного значения  $J_c$ . Предельное значение  $J$ -интеграла называют упругопластической вязкостью разрушения.

Хорошо известно, что при действии чистого I режима разрушения трещина растёт в своем первоначальном направлении [97]. И для прогнозирования разрушения применяется либо силовой критерий Ирвина, либо энергетический критерий Гриффитса. Эксперименты по разрушению в смешанном режиме (I+II) показывают, что трещина не продолжает распространение в своём первоначальном направлении, а значит коэффициент интенсивности напряжения  $K_{II}$  также играет важную роль при распространении трещины. Следовательно, необходимо использовать подходящие критерии разрушения, позволяющие

достоверно прогнозировать не только предельное состояние тела с трещиной, но и направление распространения трещины.

Также как и для трещины нормального отрыва, при разрушении в смешанном режиме используют концепции оценки предельного состояния основанные на напряжённом состоянии вблизи вершины трещины и на энергетическом балансе. Трещина растёт в наиболее выгодном для неё направлении, в частности, в направлении, в котором скорость высвобождения упругой энергии деформирования максимальна. Считается, что в условиях смешанного напряжённого состояния данный подход сопряжён со значительными трудностями в математических расчетах [97], но, несмотря на это, успешно применяется для прогнозирования разрушения тел с трещинами смешанного режима [63, 87, 93].

С другой стороны, направление роста трещины можно прогнозировать напрямую с помощью существующих решений для коэффициентов интенсивности напряжений, что позволяет избежать сложностей вычислительного характера.

Самым применяемым силовым критерием является критерий максимальных растягивающих напряжений, предложенный Ф. Эрдоганом и Дж. Си [55]: трещина начинает своё распространение в направлении перпендикулярном действию максимальных растягивающих напряжений при условии достижения ими критического значения. Недостатком этого критерия считают то, что он не учитывает остальные компоненты тензора напряжений. Нужно отметить, что данного недостатка лишён деформационный критерий максимальных окружных деформаций, согласно которому рост трещины произойдет в направлении, в котором окружная деформация достигает своего критического значения. Кроме того, критерий максимальных окружных деформаций напрямую зависит от напряжённо-деформированного состояния (ПНС или ПДС), а также от коэффициента Пуассона и модуля Юнга. Лишены этого недостатка и энергетические критерии.

В 1974 г. Дж. Си предложил критерий разрушения в смешанном режиме, основанный на концепции плотности энергии деформации [95]. Для этого он ввёл понятие коэффициента плотности энергии деформации:

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2, \quad (1.9)$$

здесь коэффициенты  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu\pi}(\kappa - \cos\theta)(1 + \cos\theta), \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu\pi}\sin\theta[2\cos\theta - (\kappa - 1)], \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu\pi}[(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В формулах (1.10)  $\mu$  — модуль сдвига,  $\kappa$  — параметр вида напряжённого состояния ( $\kappa = 3 - 4\nu$  в условиях ПДС,  $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)$  в условиях ПНС). Легко заметить, что коэффициент плотности энергии деформации  $S$  является функцией угла  $\theta$ .

Основные утверждения критерия плотности энергии деформации для хрупкого разрушения заключаются в следующем: трещина зарождается в направлении  $\theta_0$ , в котором плотность энергии деформации минимальна; трещина начинает расти, когда минимальное значение плотности энергии деформации достигает своего критического значения  $S_c$  на некотором расстоянии  $r_c$  от вершины трещины ( $r_c$  — критическое расстояние). В математической форме записи критерий выглядит следующим образом:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0, \quad S(r_c, \theta_0) = S_c. \quad (1.11)$$

Известно, что полная удельная энергия деформации может быть представлена как сумма энергии изменения объема (энергия дилатации)  $T_V$  и энергии формоизменения  $T_D$ . В своей работе [99] П. Теокарис и Н. Андрианопулос отмечают, что малая область вокруг вершины трещины, называемая зоной пластичности, в сущности, не имеет форму круга с

постоянным радиусом, кроме того, должна существовать нижняя граница этого радиуса, в которой не выполняется принятая асимптотика поля напряжений и где необходимо точное решение задачи теории упругости, которая является нелинейной и достаточно сложной. В виду этих замечаний, ими было предложено оценивать зону пластичности у вершины трещины при помощи критерия текучести Мизеса (на поверхности текучести Мизеса удельная энергия формоизменения постоянна). Выражения для  $T_V$  и  $T_D$  могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} T_V &= \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_x + \sigma_y)^2, \\ T_D &= \frac{(1+\nu)}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Итак, критерий максимальной плотности энергии дилатации гласит, что размер зоны пластичности вокруг вершины трещины ограничен условием текучести Мизеса, а трещина распространяется в направлении максимума плотности энергии дилатации:

$$\left. \begin{aligned} T_D(r, \theta) \Big|_{r=r(\theta)} &= T_{D,0} = \text{const.} \\ T_V(r(\theta), \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} &\geq T_{V,0} = \text{const.} \\ \frac{\partial T_V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} &= 0, \quad \frac{\partial^2 T_V}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Критерии, учитывающие неоднородность поля напряжений вблизи концентратора, относятся к нелокальным критериям. Считается, что использование нелокального подхода, учитывающего структуру среды, позволяет провести более точное прогнозирование разрушающей нагрузки в подобных условиях [2, 3, 9]. Таким образом, разрушение среды следует рассматривать как процесс, происходящий на некоторой характерной для данного материала структуре, то есть сплошная среда наделяется неким представительным размером.

Основоположником данного вида критериев можно считать Г. Нейбера, который предложил проводить осреднение напряжений в зоне предразрушения материала вблизи концентратора [85]. Данный тип критерия разрушения получил название интегрального. Следует отметить, что задолго до работы Нейбера идея данного подхода была высказана К. Вигхардом, который получил распределение поля напряжений в окрестности острого углового выреза, расположенного в упругой плоскости [106]. В 1969 г. В. Новожилов в своих работах [17, 18] независимо от Нейбера использовал аналогичный подход к оценке прочности упругого тела, ослабленного разрезом. Интегральный критерий Новожилова-Нейбера имеет вид:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_n(r) dr = \sigma_0, \quad (1.14)$$

где  $d$  — характерный размер усреднения наиболее опасного напряжения в направлении распространения трещины,  $\sigma_n$  — нормальное напряжение,  $\sigma_0$  — предельное напряжение материала без концентратора. Размер  $d$  полагают константой материала. Введение механизма усреднения напряжений объясняется образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Считается, что размер этой зоны приблизительно равен  $d$  и сопоставим с характерным линейным размером структуры материала.

К другому типу нелокальных критериев относятся градиентные критерии. В них помимо характерного размера вводится величина, характеризующая изменение поля напряжений на нём и задаваемая геометрией нагружения. Значительный вклад в разработку таких критериев внесли И. Лайтаи [68], М.Д. Новопапин и С.В. Сукнев [19, 23], В.Д. Харлаб [26], М.А. Леган [7, 8] и др.

В общем случае градиентный подход может быть описан следующей функциональной зависимостью [19]:

$$\sigma_{\max} = f(\sigma_0, \delta/L_e), \quad (1.15)$$

здесь  $\sigma_{\max}$  — максимальное локальное напряжение в вершине концентратора напряжения,  $\delta$  — характерный линейный размер структуры материала,  $L_e$  — параметр, характеризующий размер зоны концентрации напряжений. Если параметр  $L_e$  значительно превосходит структурный размер материала, то нелокальные критерии разрушения совпадают с локальными, а в конструкциях с концентратором напряжений локальная прочность ниже величины предельного напряжения  $\sigma_0$  на величину коэффициента концентрации напряжения. Когда величина  $L_e$  становится сопоставимой с  $\delta$ , влияние характерного линейного размера структуры материала становится заметным и с дальнейшим уменьшением величины зоны неравномерности поля напряжений влияние  $\delta$  растёт. Таким образом вводится безразмерный параметр  $\delta/L_e$ , характеризующий масштаб в рассматриваемой задаче. Функция локальной прочности  $f(\sigma_0, \delta/L_e)$  определяется с учётом дополнительных условий, отражающих специфику задачи.

### 1.3. Выводы по главе 1

Согласно классическому подходу к оценке прочности элементов конструкций предельное состояние наступает в сплошном теле, но в реальных элементах конструкций практически всегда присутствуют дефекты различного происхождения. Данный факт позволяет сделать вывод о том, что классические методы не позволяют достоверно оценить реальную прочность конструкций по эквивалентным напряжениям. В таких случаях необходимо применять в расчетах модели и методы механики разрушения, которые исходят из предположения об изначальном присутствии дефектов в элементах конструкций.

Также необходимо уделять особое внимание виду разрушения. Основными видами разрушения считают хрупкое и вязкое. Переход от вязкого разрушения к хрупкому и наоборот может в значительной степени контролироваться внешними условиями. Наиболее опасным принято считать хрупкое разрушение, при

котором трещина может расти нестабильно с ускорением до  $10^8$  м/с<sup>2</sup> при номинальном напряжении, не превышающем предела текучести. И напротив, считается, что вязкое разрушение не представляет особой опасности, поскольку оно сопровождается значительной деформацией при напряжениях, существенно превышающих предел текучести материала, и может быть вовремя выявлено и предотвращено.

Развитие механики разрушения прошло длительный путь от первого математического описания А. А. Гриффитсом хрупкого разрушения в результате распространения трещины в твёрдом теле при помощи энергетического подхода до настоящего времени, когда особое место начинает занимать двухпараметрическая механика разрушения твёрдых тел, основанная на новых моделях и критериях. Большой вклад в развитие механики разрушения внесли не только зарубежные, но и отечественные исследователи.

В [22] отмечается, что ещё задолго до А. А. Гриффитса многие исследователи связывали результат разрушения конструкций с наличием и ростом в них трещин, например, шотландский инженер Дж. Маккуорн Рэнкин, изучая причины поломки железнодорожных осей локомотивов, в 1843 г. пришёл к выводу, что «возникновение разрушения начинается с появлением гладкой, имеющей правильную форму, мельчайшей трещины, которая затем опоясывает шейку вала и проникает вглубь её в среднем на 12–13 мм. В дальнейшем трещинки постепенно распространяются от поверхности к центру оси... до тех пор, пока толщина неповрежденного металла в центре станет недостаточной, чтобы выдержать удары, которым она подвергается». А наиболее значимые исследования по разрушению конструкций провёл русский учёный Д. К. Чернов. В своём докладе «О выгорании каналов в стальных орудиях» (1912 г.), в основу которого были положены лекции автора, прочитанные им в 1889 году в Михайловской артиллерийской академии, он уделил внимание проблеме стойкости стали против разрушительного действия пороховых газов или так называемого выгорания каналов стальных орудий при стрельбе. В итоге Д. К. Чернов сделал вывод, что орудия следует изготавливать из металла, который, без

ущерба его механическим качествам, обладал бы возможно большей пластичностью и вязкостью. Это необходимо для того, чтобы при большом расширении и следующем затем большом сжатии металл не давал ни малейших следов трещин. Он установил так же, что после многократных, быстропротекающих нагревов и охлаждений на поверхности металла появляется сеть мельчайших трещинок, рисунок которой зависит от толщины поверхностного слоя, подвергаемого объёмным изменениям, и от природы материала.

В этой же работе авторы вспоминают слова известного учёного в области механики разрушения Г. П. Черепанова, которые не потеряли своей значимости в настоящее время: «механика разрушения уже прошла стадию становления, началась её детализация, уточнение, обобщение и, что особенно важно с практической стороны, наступило время широкого внедрения её достижений».

## 2. Трёхточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении

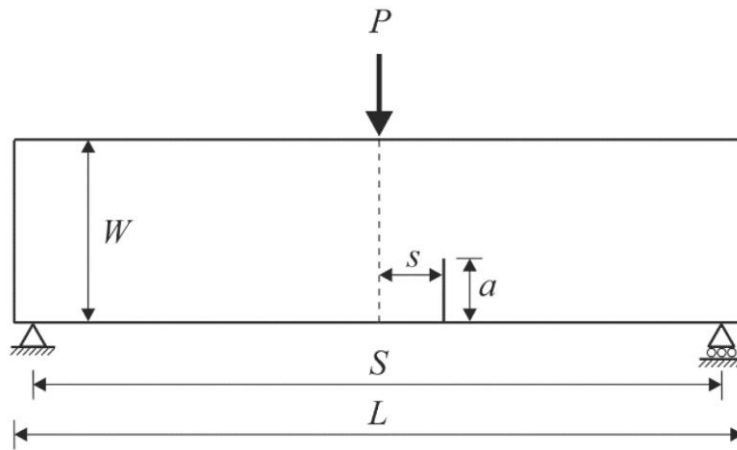
В этой главе для исследования механизма разрушения по смешанному типу (I+II) представлен образец эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с надрезом (трещиной), рассмотрено его поведение при асимметричном изгибном нагружении. Данная конфигурация образца проста в изготовлении и не требует сложной оснастки при испытаниях на разрушение. Толщина образца выбирается такой, чтобы были обеспечены условия плоской деформации. Условия смешанного нагружения создаются либо путём сдвига трещины, либо сдвигом точки приложения внешней нагрузки. Напряжённо-деформированное состояние образца анализируется сначала численно, методом конечных элементов (МКЭ) рассчитываются параметры разрушения при различных смешанных режимах, затем проверяется его практическая пригодность (проводится серия экспериментов по определению вязкости разрушения в смешанном режиме как хорошо известного хрупкого материала ПММА, так и нового, ранее не исследованного материала — сферопласта). Наконец, по результатам, полученным в ходе испытаний, предсказываются параметры разрушения с использованием обобщенного критерия максимальных окружных напряжений, учитывающего второй (несингулярный) член напряжений в разложении Вильямса.

### 2.1. Конечно-элементный анализ

Рисунок 2.1 иллюстрирует схему испытаний образца-балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, с помощью которого анализируется разрушение по смешанной моде I+II. Изображены два вида экспериментов: эксцентричная трещина и асимметричная нагрузка. Приняты следующие обозначения:  $L$  — длина образца,  $S$  — расстояние между опорами (длина пролёта),  $W$  — ширина образца,  $t$  — толщина,  $a$  — длина трещины,  $S$

— расстояние от трещины до линии симметрии образца,  $p$  — расстояние от точки приложения нагрузки до линии симметрии образца. Чтобы обеспечить выполнение условий плоской деформации, на длину и толщину балки накладывається ограничение:  $W = 2t$ .

a)



б)

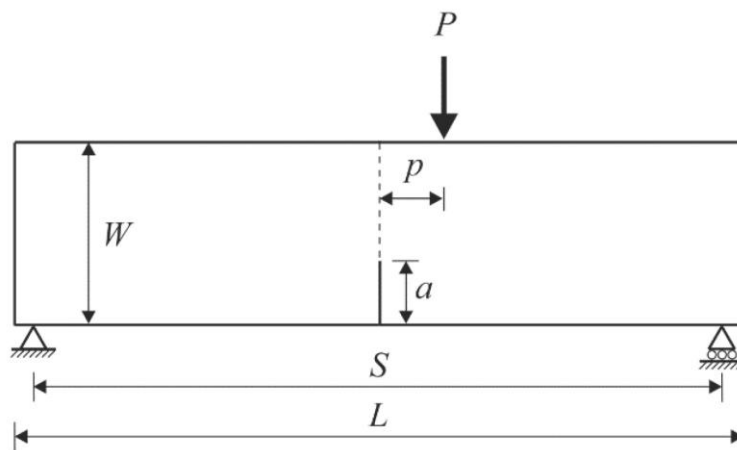


Рисунок 2.1 — Схема трёхточечного изгиба образца с краевой трещиной: эксцентричная трещина (а), асимметричная нагрузка (б)

Подобные образцы широко применяются в экспериментальной механике разрушения для определения характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) различных материалов. Изменяя геометрию образца и/или место приложения нагрузки, можно влиять на состояние смешанных мод в вершине трещины и ожидать, что при деформировании возникнут различные комбинации нормального отрыва и поперечного сдвига. Действительно, смещение положения

трещины или точки приложения нагрузки приводит к нарушению симметрии задачи, поэтому для контроля деформаций берегов трещины требуется рассмотрение смешанного режима растяжения и сдвига. Варьируется только один из двух геометрических параметров:  $S$  или  $p$ , второй полагается равным нулю.

В случае смешанной моды I+II разрушения компоненты напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, представляются в виде (1.8).

КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  в образце можно представить в виде:

$$K_I = \frac{P}{Wt} \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad K_{II} = \frac{P}{Wt} \sqrt{\pi a} Y_{II} \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad (2.1)$$

где  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  — геометрические коэффициенты, соответствующие I и II режимам, которые являются функциями относительных длин трещины  $a/W$  и пролета  $S/W$ . Хорошо известно, что  $T$ -напряжение, то есть первый несингулярный член асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины, наряду с коэффициентами интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ , также играет важную роль в процессе разрушения по смешанной моде.  $T$ -напряжение отражает степень стеснения деформаций перед фронтом трещины, действует в плоскости трещины в направлении её возможного распространения и может быть как растягивающим, так и сжимающим. Для образца изгибаемой балки оно записывается как

$$T = \frac{P}{Wt} T_* \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad (2.2)$$

где  $T_*$  — безразмерный геометрический коэффициент.

Для определения критических КИН (соответствующих значениям вязкости разрушения по I и II модам), а также для исследования разрушения образца при смешанном нагружении для разных геометрий необходимо вычислить три геометрических параметра разрушения:  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  и  $T_*$ . Анализ НДС образца в

различных случаях смешанных мод выполнялся МКЭ в пакете прикладных программ MSC.Marc [77]. Конечно-элементные модели образца создавались с использованием  $36 \div 80$  тыс. 8-узловых квадратичных элементов, а для повышения точности численных результатов область вблизи вершины трещины покрывалась элементами сингулярного типа. Сингулярный элемент конструировался путем сдвига промежуточного узла на четверть длины ребра элемента к вершине трещины. На рисунке 2.2 показаны два типа расчетной сетки в окрестности вершины трещины: прямоугольная и радиальная.

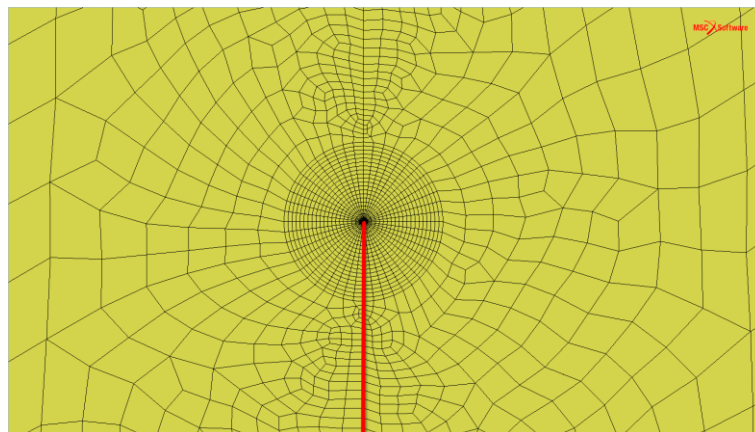
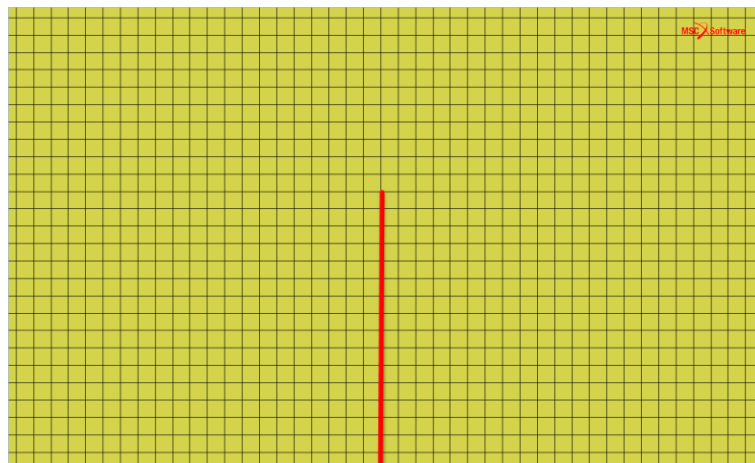


Рисунок 2.2 — Фрагменты расчетной сетки в окрестности вершины трещины при разном разбиении: прямоугольное (а), радиальное (б); сплошная линия изображает трещину

У вершины трещины размер прямоугольного элемента равнялся 0,05 мм, что составляет  $1/200$  длины трещины, размер радиального элемента был в два раза меньше. Область сгущения радиальной сетки имела радиус 0,5 мм. В

ближайшем к вершине кольце элементов использовались треугольные 6-узловые элементы, по окружности кольцо разбивалось на 48 элементов. Расчеты показали незначительную разницу в результатах, полученных на прямоугольной и радиальных сетках (при единичной нагрузке  $K_I = 0,24017$  на прямоугольной сетке и  $K_I = 0,24038$  на радиальной).

Геометрические параметры  $a/W$ ,  $S/W$  и параметры нагрузки рассматривались в широком диапазоне значений. Для проведения КЭ анализа были выбраны следующие размеры:  $L = 80$  мм,  $S = 72 \div 76$  мм,  $W = 18 \div 20$  мм и  $t = 8,3 \div 9$  мм. Относительная длина трещины  $a/W$  варьировалась от 0,3 до 0,6. Материал моделей принят линейно-упругим изотропным с механическими свойствами:  $E = 3$  ГПа — модуль Юнга и  $\nu = 0,35 \div 0,36$  — коэффициент Пуассона. В результате выполнения статического расчёта с приложенной единичной нагрузкой  $P = 1$  Н и вычисления  $J$ -интеграла для каждого анализируемого образца найдены значения  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ . Для инвариантного  $J$ -интеграла в случае плоской деформации учитывалось, что он связан с  $K_I$ ,  $K_{II}$  соотношением  $E'J = K_I^2 + K_{II}^2$ , где  $E' = E/(1-\nu^2)$ . В процедуре численного интегрирования контурный  $J$ -интеграл преобразовывался в интеграл по площади, интегрирование велось по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычислялись внутри элементов в точках гауссовых квадратур. В расчетах использовались 4 контура интегрирования, результаты для 3-го и 4-го контуров отличались незначительно. Разделение  $J$ -интеграла на I и II моды в коде MSC.Marc базируется на методе Ши–Асаро [94].

Рассмотрены два случая нагружения, вызывающие разрушение по смешанной моде:

1. Точка приложения нагрузки не меняла местоположения, направление действия сосредоточенной силы  $P$  совпадало с осью симметрии балки, трещина же смещалась на расстояние  $s$  от оси симметрии образца в пределах от 2,5 мм до 30 мм с шагом 2,5 мм.

2. Трещина располагалась на оси симметрии балки, точка приложения нагрузки смещалась на расстояние  $p$  от середины образца, которое возрастало от 2,5 мм до 30 мм с шагом 2,5 мм.

Результаты расчётов представлены на рисунке 2.3, где приведены зависимости  $Y_I$  и  $Y_{II}$  от расстояний  $s$  и  $p$ . Как видно из рисунка, графики  $Y_I(s)$  и  $Y_I(p)$  совпадают с высокой степенью точности — при смещении трещины (либо нагрузки) на одно и то же расстояние сопротивление разрушению образца по моде I одинаково.

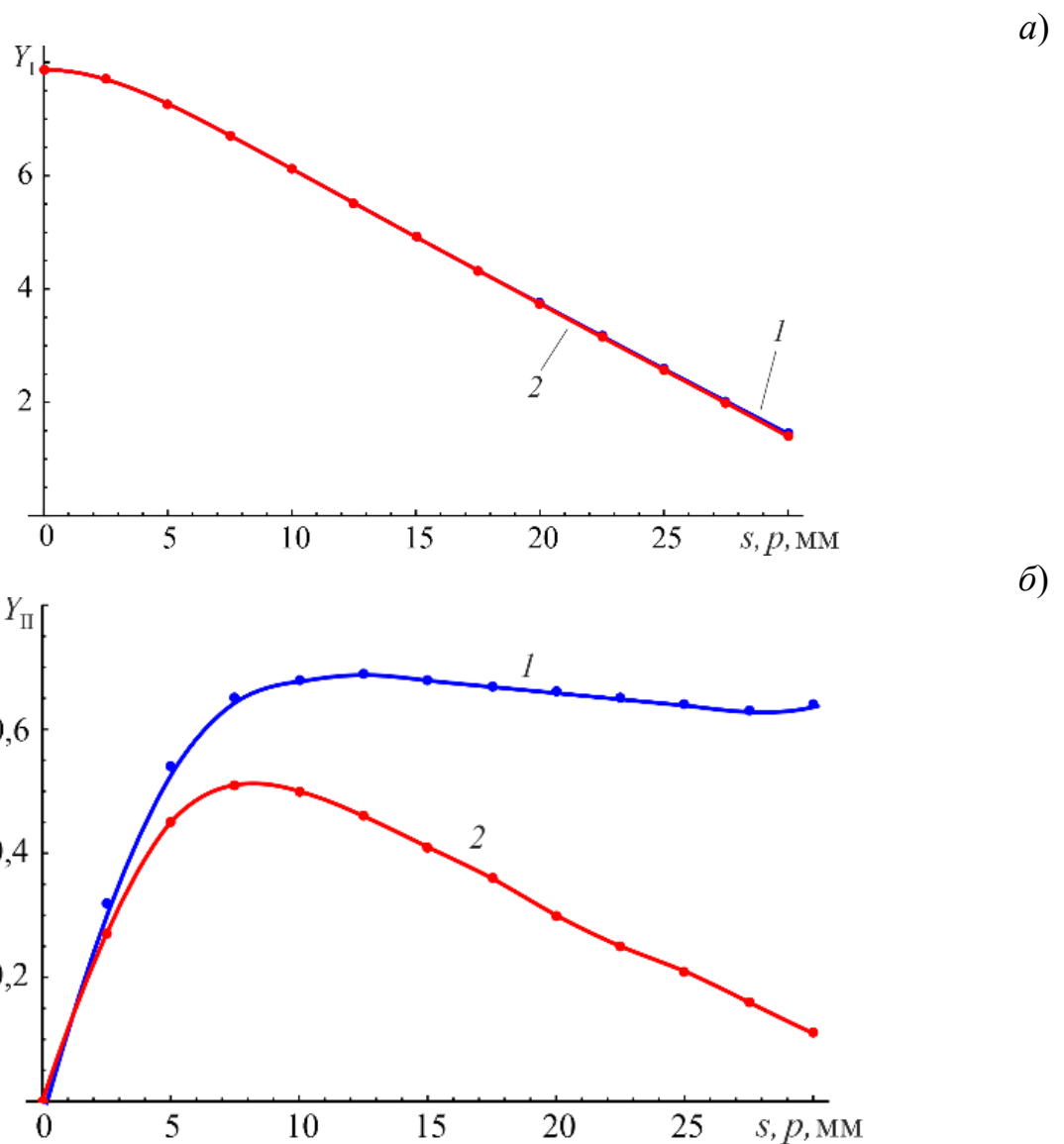


Рисунок 2.3 — Зависимости  $Y_I(s)$ ,  $Y_I(p)$  (а) и  $Y_{II}(s)$ ,  $Y_{II}(p)$  (б); сдвиг трещины (кривая 1), сдвиг нагрузки (кривая 2)

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении  $T$ -напряжения. Обзор литературы показывает, что в большинстве случаев при получении  $T$ -напряжения рассматриваются простые как геометрия исследуемой области, так и вид нагрузки [24, 59, 102]. В работах [42, 103]  $T$ -напряжение прямо рассчитывается с помощью МКЭ. Показано, что для I моды разрушения более надёжные результаты с меньшим измельчением сетки достигаются, если используются узловое смещения берегов трещины. В [29, 84] предлагаются подходы к расчёту  $T$ -напряжения для любой нагрузки смешанного режима I+II без необходимости расчета КИН. Предложенные подходы дают результаты, хорошо согласующиеся с аналитическими расчётами.

Из асимптотики поля напряжений (1.8) следует, что при нагружении в I режиме  $T$ -напряжение может быть найдено по формулам:

$$T = \sigma_x - \sigma_y \text{ при } \theta = 0 \text{ либо } T = \sigma_x \text{ при } \theta = \pm\pi, \quad (2.3)$$

то есть по компонентам напряжений на продолжении трещины  $\theta = 0$  или на её берегах  $\theta = \pm\pi$ . Однако такой способ менее надёжен, чем вычисление  $T$ -напряжения по смещениям, так как компоненты напряжений определяются внутри элементов, а их значения в узлах находятся путем экстраполяции. При отыскании  $T$ -напряжений по смещениям следует помнить, что берега трещины свободны от нагрузок и закон Гука для малых деформаций даёт:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon_x$  и  $u_x$  — параллельные трещине деформация и перемещение. На берегах трещины ( $\theta = \pm\pi$ ) из (2.3) и (2.4) следует:

$$T = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Поскольку  $T$  — константа, после замены производной  $\partial u_x / \partial x$  разностным отношением  $(u_x(x) - u_x(0)) / x$ , (2.5) переписывается в виде:

$$T = E' \frac{u_x(x) - u_x(0)}{x}, \quad (2.6)$$

где величина  $u_x(0)$  — перемещение  $u_x$  в вершине трещины.

В случае смешанного нагружения (наличия I моды, либо II моды, либо обеих) в любом радиальном направлении от вершины трещины существует сингулярное слагаемое. Поэтому сингулярный член в  $\sigma_x$  никогда не исчезнет, и вышеописанный метод будет непригоден. Тем не менее,  $T$ -напряжение можно вычислить, если воспользоваться свойствами симметрии режима I и антисимметрии режима II и находить напряжение напрямую, без вычисления КИН.

Так, если напряжения одной половины образца с трещиной добавить к напряжениям другой половины, то напряжения II моды исчезнут, а напряжения I моды удвоятся. Вследствие такого приема, подобно I моде нагружения,  $T$ -напряжение может быть определено по любому направлению из вершины трещины непосредственно по результатам конечно-элементного анализа. Наиболее удобными направлениями являются  $\theta = \pm\pi$ . Поскольку, в методе смещений (2.4)–(2.6), требуется только одна компонента напряжений, то

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_{\theta=-\pi} + (\sigma_x)_{\theta=\pi}] \quad (2.7)$$

или

$$T = \frac{1}{2x} E' [u_x(x, -\pi) + u_x(x, +\pi) - 2u_x(0)] . \quad (2.8)$$

На рисунке 2.4а представлено типичное распределение смещений в малой окрестности вершины трещины на одном из её берегов; по оси абсцисс отложено расстояние от вершины трещины. Как видно, в ближайшем к вершине элементе наблюдаются сильные осцилляции решения, причём такая картина характерна и для прямоугольного разбиения на элементы, и для радиального. Поэтому из рассмотрения исключаются три сеточных узла слева, а в остальных узлах сетки оставляются только те смещения, которые «хорошо» ложатся на прямую линию. Её уравнение находится методом наименьших квадратов. Аппроксимирующая прямая показана на рисунке 2.4б, точки — значения смещений в узлах конечно-

элементной сетки, тангенс угла её наклона к оси абсцисс — это и есть разностное отношение в (2.6).

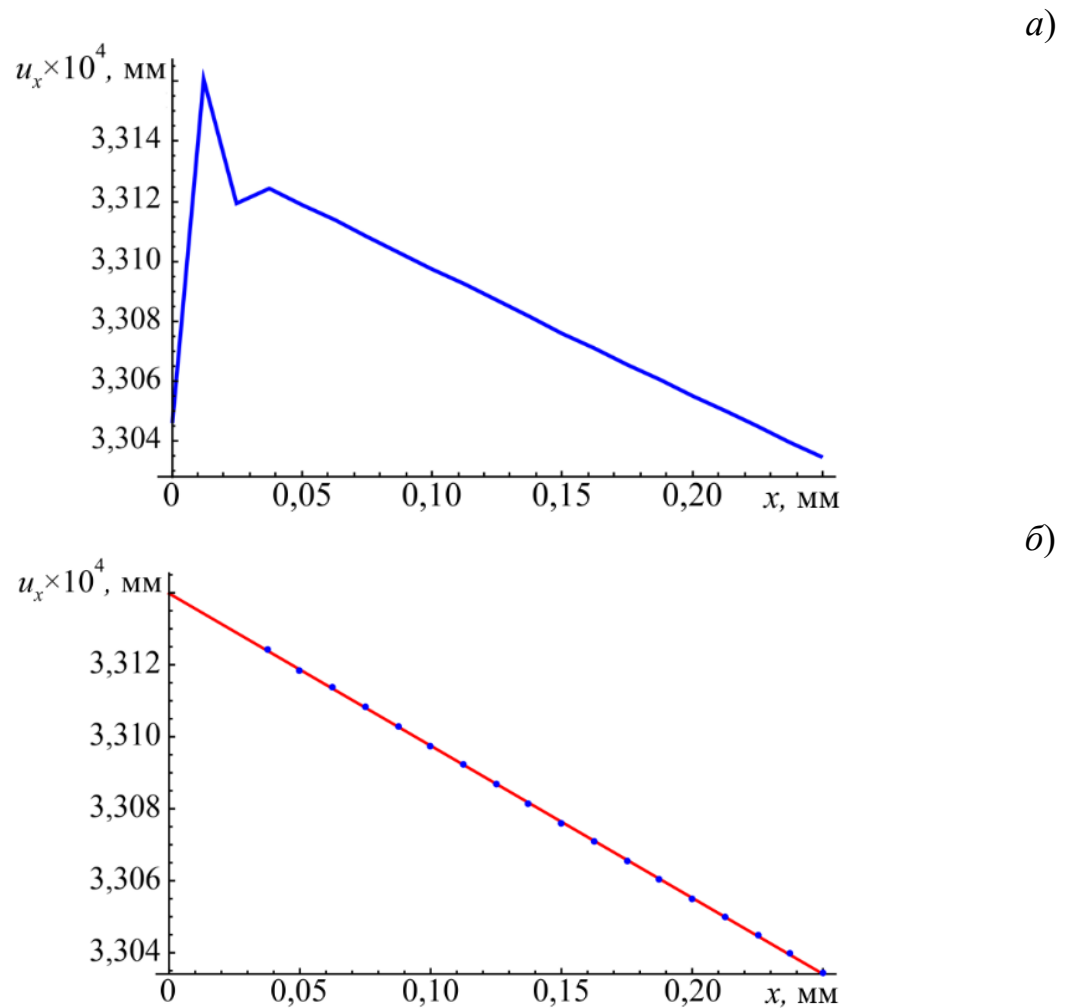


Рисунок 2.4 — Типичное распространение смещений на берегах трещины (а), аппроксимация методом наименьших квадратов (б)

Для оценки  $T$ -напряжений в эксцентричных балках выполнен расчёт безразмерного геометрического коэффициента  $T_*$  в зависимости от расстояний  $S$  и  $p$  (рисунок 2.5). Из рисунка следует, что в эксцентричных балках степень стеснения деформаций в окрестности вершины трещины примерно одинакова. Исследовано и влияние комбинации мод I и II на разрушение образцов, которое характеризуется параметром смешанности мод (mode mixity) или коэффициентом смешанности нагружения  $M_e$ :

$$M_e = (2 / \pi) \operatorname{arctg}(K_I / K_{II}) . \quad (2.9)$$

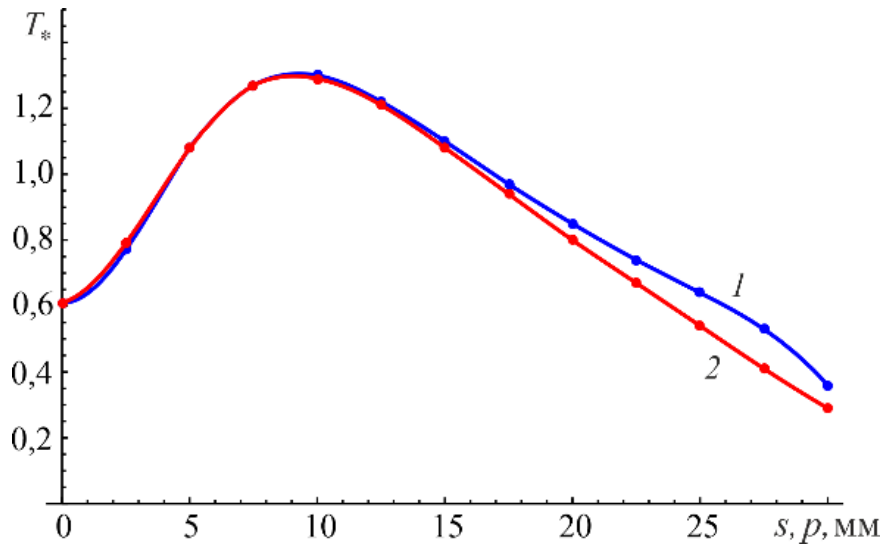


Рисунок 2.5 — Зависимости  $T_*(s)$ ,  $T_*(p)$ : сдвиг трещины (кривая 1), сдвиг нагрузки (кривая 2)

Значения  $M_e$  изменяются в пределах от 1 (чистая мода I) до 0 (чистая мода II). На рисунке 2.6а представлены графики его зависимости от расстояний  $s$  и  $p$ . Как видно, используемые схемы нагружения образцов не позволяют получить смешения мод, близкие к моде II: минимальные значения  $M_e$  при сдвиге трещины 0,75, при сдвиге нагрузки 0,95.

Степень влияния несингулярного члена  $T$ , в сравнении с сингулярными коэффициентами  $K_I$  и  $K_{II}$ , на процесс разрушения по смешанному типу в литературе часто характеризуется параметром  $B$ , называемым коэффициентом двухосности, который определяется как

$$B = T\sqrt{\pi a}/K_e, \quad (2.10)$$

где  $a$  — длина трещины,  $K_e = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  — эффективный КИН.

Рисунок 2.6б содержит вариации  $B$  для различных геометрических условий и условий нагружения анализируемых образцов. Чем выше значение параметра  $B$  в образце, тем более важную роль играет  $T$ -напряжение в разрушении по смешанному типу. Величина коэффициента двухосности зависит от геометрии и условий нагружения испытываемого образца. Выполненный обзор литературы показывает, что этот параметр не достигает больших значений в таких конфигурациях задачи, как четырехточечный изгиб балки с краевой

трещиной или нагруженная по диагонали квадратная пластина. Его значение меньше 1 для многих тестируемых образцов, в том числе для образца вида изгибаемой эксцентричной балки, для которого значение изменяется в диапазоне от 0,075 до 0,25 для различных расположений трещины и внешней нагрузки. Это говорит о малом влиянии  $T$ -напряжения при смешанном разрушении материалов, испытываемых на таких образцах.

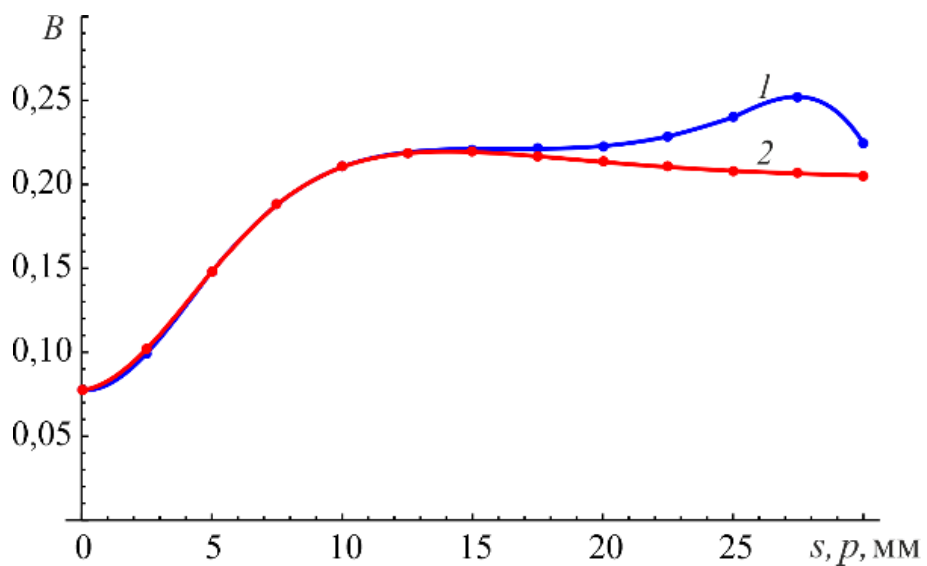
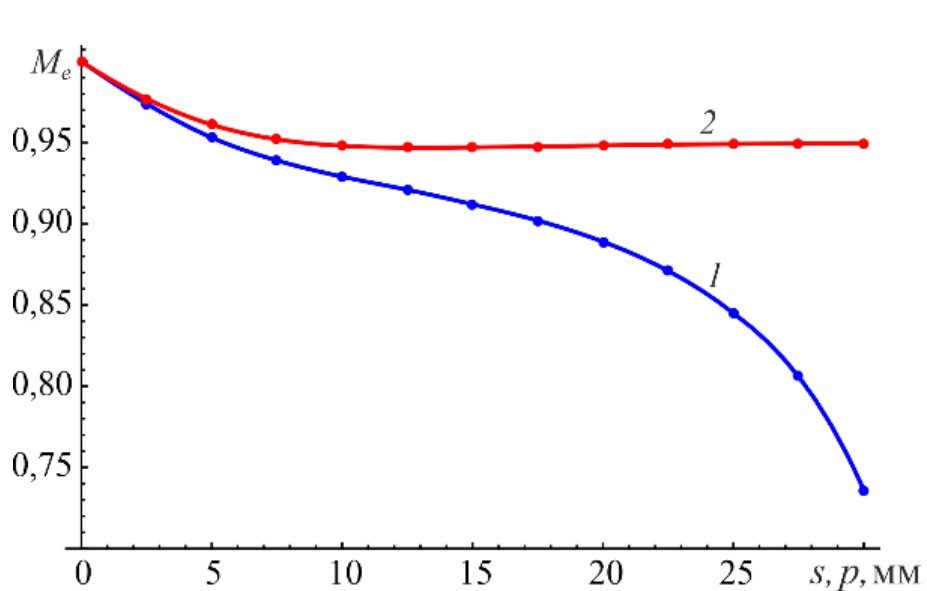


Рисунок 2.6 — Зависимости  $M_e(s)$ ,  $M_e(p)$  (а) и  $B(s)$ ,  $B(p)$  (б); сдвиг трещины (кривая 1), сдвиг нагрузки (2)

## 2.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения

Для определения вязкости разрушения конкретного материала при смешанном нагружении использовались сферопласт и полиметилметакрилат (ПММА).

Сферопласт представляет собой пористо-армированный композит со стеклянными микросферами в качестве наполнителя. Средний диаметр микросфер 0,02 мм, толщина стенок примерно 0,001 мм, объёмная доля сферических включений составляет около 60%. Ввиду сложности структуры материала механизм его разрушения зависит от многих факторов и может меняться при изменении условий нагружения. При нормальных температурах сферопласт обнаруживает хрупкий тип разрушения, его  $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмма деформирования остается практически линейной вплоть до разрушения.

ПММА является хорошо известным испытательным материалом, используемым в лабораторных исследованиях вязкости хрупкого разрушения из-за его однородного и хрупкого поведения, а также других преимуществ, таких как низкая стоимость, прозрачность, простота резки, а также удобство введения острых трещин в образцы для испытаний на разрушение. Из листового ПММА толщиной 8,3 ÷ 9 мм вырезались прямоугольные образцы, размеры которых приведены в предыдущем разделе. Для каждого типа нагружения и геометрии изготавливались 3–5 одинаковых образцов. Испытания на разрушение проводились при статической нагрузке и комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин.

Предварительно осуществлялись эксперименты на одноосное растяжение, в которых определялись модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и предел прочности материала на растяжение  $\sigma_t$ . В отдельном тесте на симметричный трёхточечный изгиб находилась трещиностойкость  $K_{Ic}$ . Механические свойства материалов приведены в таблице 2.1.

На рисунке 2.7 демонстрируются разрушенные образцы из разных материалов с различным расположением исходных трещин. Судя по фотографиям, разрушение всех образцов начиналось с вершины трещины. Однако, в зависимости от смешанности мод (от сдвига либо трещины, либо нагрузки), при разрушении наблюдаются отличающиеся траектории трещин. При увеличении сдвига исходной трещины происходит большее отклонение траектории трещины от вертикали, что приводит к росту величины угла зарождения трещины за счет движения к чистой моде II. Это свидетельствует о заметном влиянии смешанной моды (или вклада сдвиговой моды II) на разрушение испытанных образцов.

Таблица 2.1 — Механические свойства материалов

Параметр Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	$\sigma_t$ , МПа	$K_{Ic}$ , МПа·м <sup>1/2</sup>
Сферопласт	3,0	0,36	16,5	1,12
ПММА	3,0	0,35	54,0	1,74

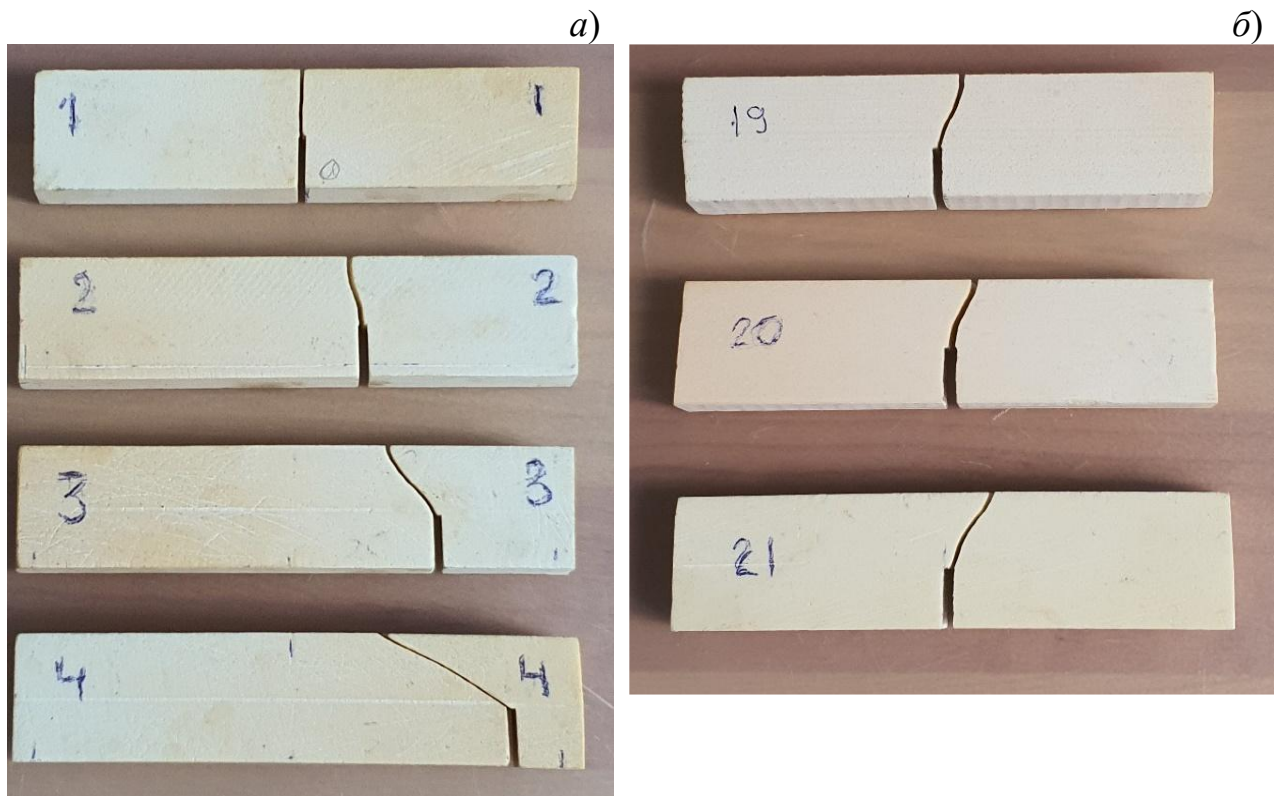


Рисунок 2.7 — Разрушенные образцы из сферопласта (а, б) и ПММА (в, г); сдвиг трещины (а, в), сдвиг нагрузки (б, г) (лист 1 из 2)

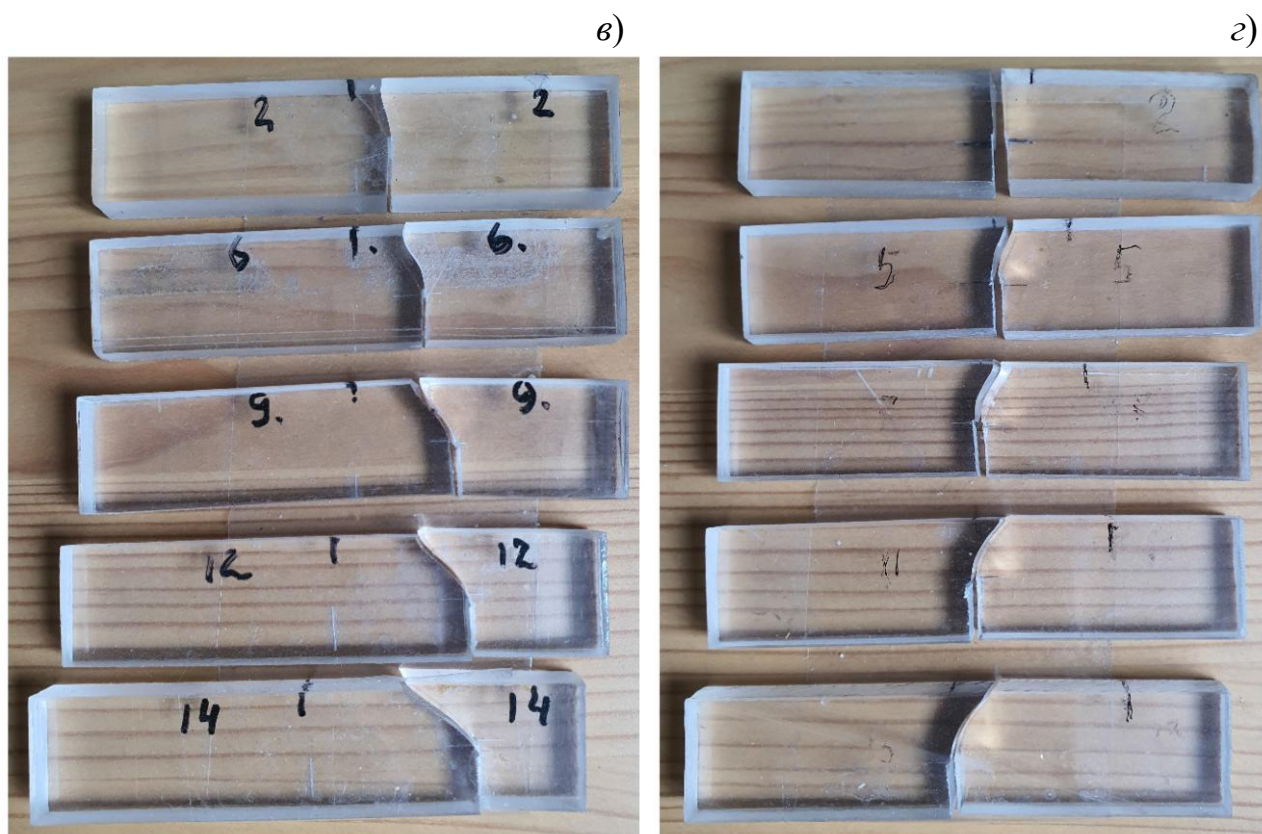


Рисунок 2.7 (лист 2 из 2)

### 2.3. Критерии хрупкого разрушения

Для изучения характеристик разрушения тестируемых материалов и демонстрации практических возможностей образцов из них использовались критерий максимальных тангенциальных напряжений (Maximum Tangential Stress — MTS) и обобщённый критерий максимальных тангенциальных напряжений (Generalized Maximum Tangential Stress — GMTS) как наиболее распространённые [5, 6, 30, 31, 32, 37, 38, 73, 83, 89, 93]. Они применимы к широкому классу хрупких и квазихрупких материалов, таких как горные породы, керамика, полиметилметакрилат, графит. Критерий GMTS — это модификация критерия MTS, учитывающая влияние  $T$ -напряжения. Трещина, согласно критерию GMTS, зарождается в направлении  $\theta_0$ , для которого тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta$  имеет максимальное значение. Кроме того, трещина начинает

распространяться при тангенциальном напряжении  $\sigma_\theta$  вдоль  $\theta_0$ , достигающем критического значения  $\sigma_t$  на критическом расстоянии  $r_c$  от вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_t. \quad (2.11)$$

Окружное напряжение  $\sigma_\theta$  для линейно-упругого материала в окрестности вершины трещины в случае смещения мод I и II записывается в виде:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}). \quad (2.12)$$

Члены более высокого порядка  $O(r^{1/2})$  вблизи вершины трещины можно считать пренебрежимо малыми. После дифференцирования (2.11) по  $\theta$  и приравнивания результата к нулю, согласно (2.11), получается следующее уравнение относительно угла зарождения трещины  $\theta_0$ :

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (2.13)$$

С учетом представления КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$  (2.1) и  $T$ -напряжений (2.2), уравнение (2.13) преобразуется к виду:

$$Y_I \sin \theta_0 + Y_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T_* \alpha \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0, \quad (2.14)$$

где  $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$ . Если теперь найденный угол  $\theta_0$  подставить в (2.12), то условие разрушения (2.11) запишется как

$$K_{If} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3K_{IIf} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \sqrt{2\pi r_c} T_f \sin^2 \theta_0 = \sqrt{2\pi r_c} \sigma_t. \quad (2.15)$$

В этом уравнении  $K_{If}$  и  $K_{IIf}$  — коэффициенты интенсивности напряжений в I и II режимах разрушения;  $T_f$  —  $T$ -напряжение при разрушении. Уравнение (2.15) справедливо для всех режимов смещения нагрузок, в том числе для чистых режимов I и II. Для чистого I режима, когда  $K_{IIf} = 0$ ,  $K_{If} = K_{Ic}$ , а  $\theta_0 = 0$ , выражение (2.15) принимает вид:

$$K_{Ic} = \sqrt{2\pi r_c} \sigma_t. \quad (2.16)$$

Подстановка (2.16) в (2.15) дает выражение:

$$\frac{P_f}{Wt} \sqrt{\pi a} \left( Y_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3Y_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \alpha T_* \sin^2 \theta_0 \right) = K_{Ic}, \quad (2.17)$$

где  $P_f$  — критическая нагрузка.

Предел прочности на одноосное растяжение —  $\sigma_t$ , и критический КИН (трещиностойкость) по I моде —  $K_{Ic}$ , являются константами материала, которые подлежат экспериментальному определению. Критическое расстояние  $r_c$  примерно равно размеру зоны предразрушения перед вершиной трещины и оценивается обычно через параметры разрушения  $K_{Ic}$ ,  $\sigma_t$  по формуле, следующей из (2.16):

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2. \quad (2.18)$$

Для сравнения критических нагрузок, предсказанных с использованием критерия GMTS (2.17), с результатами испытаний образцов из сферопласта и оргстекла на рисунке 2.8 приведены зависимости критической нагрузки  $P_f$  при разных положениях надреза и места приложения внешней силы. В испытаниях сферопласта наблюдается сильное расхождение расчёта с экспериментом при больших смещениях (на 30 мм) как надреза, так и точки приложения нагрузки, что можно объяснить сложностью симметричной установки на опоры испытательной машины для протяжённых балок с большим эксцентриситетом. Для испытаний ПММА изготавливались образцы двух видов: из листового оргстекла (ПММА-1) и блока (ПММА-2). Балки, вырезаемые из листа, имели ту же толщину, что и лист, обработке подвергались только их боковые поверхности. При нарезке из массивного блока образцы требовали обработки в трёх плоскостях.

Выше в таблице 2.1 механические характеристики приведены для ПММА-1. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, предел прочности ПММА-2 те же (в пределах погрешности экспериментального измерения); немного отличается трещиностойкость  $1,62 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ . Размеры образцов также были другими: из

ПММА-1  $L = 80$  мм,  $S = 72$  мм,  $W = 18,4$  мм,  $t = 9$  мм,  $a = 8,8$  мм, из ПММА-2  $L = 76$  мм,  $S = 68$  мм,  $W = 17$  мм,  $t = 8,3$  мм,  $a = 8,2$  мм. Результаты для ПММА, по сравнению со сферопластом, оказались заметно лучше. Графики на рисунке 2.8а–г демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных точек с численным расчётом. Как видно из рисунка 2.8, критерий GMTS дает консервативную оценку критической нагрузки для всех испытанных материалов и всех видов нагружения.

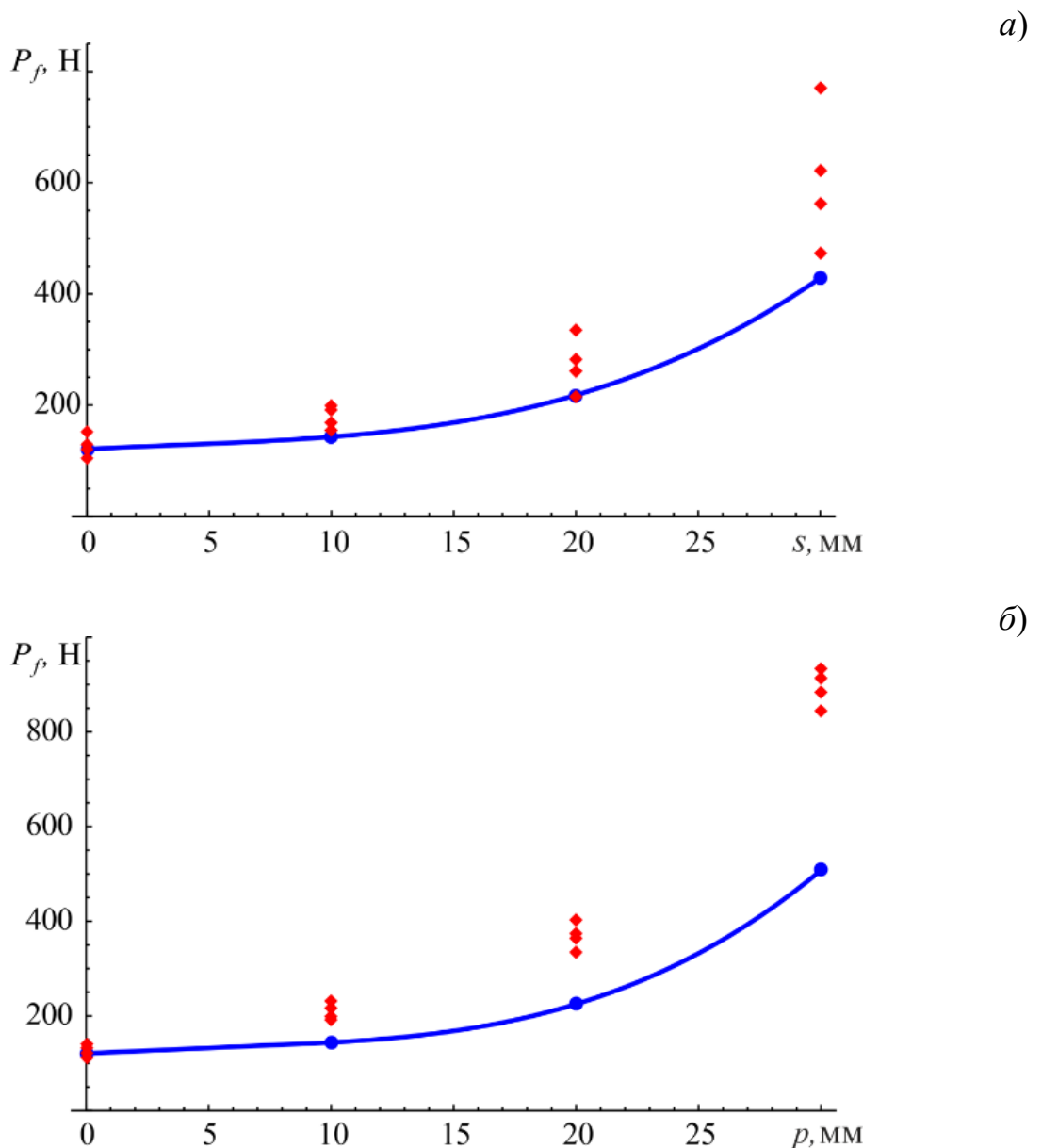
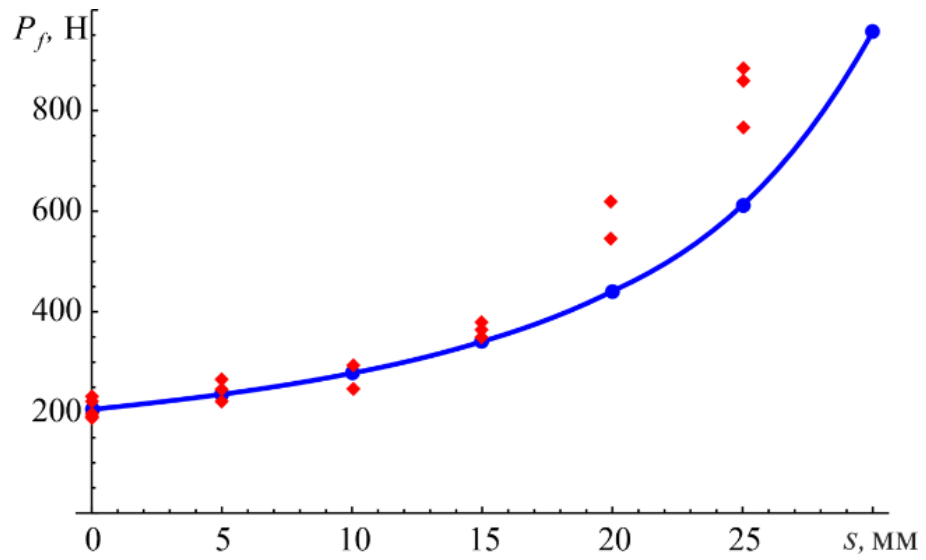
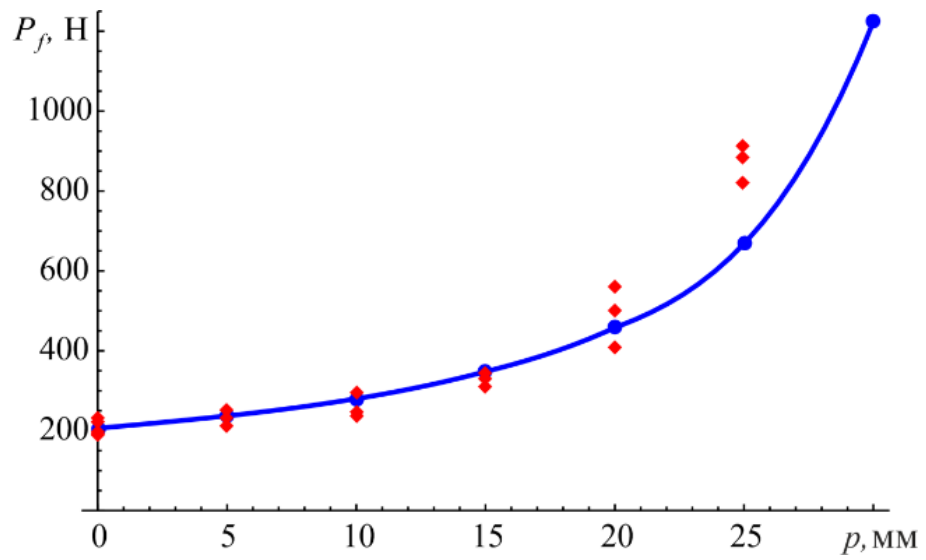


Рисунок 2.8 — К сравнению критических нагрузок, предсказанных с использованием критерия GMTS, и результатов испытаний образцов из разных материалов: сферопласт (а, б); ПММА-1 (в, г); ПММА-2 (д, е): сдвиг трещины (а, в, д), сдвиг нагрузки (б, г, е); компьютерный расчет (точки), данные эксперимента (ромбики) (лист 1 из 3)

б)



в)



г)

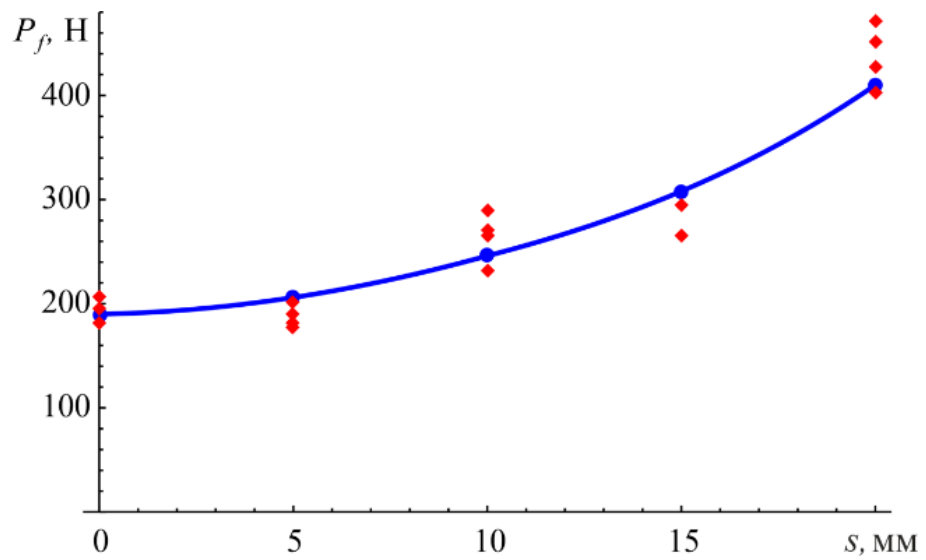


Рисунок 2.8 (лист 2 из 3)

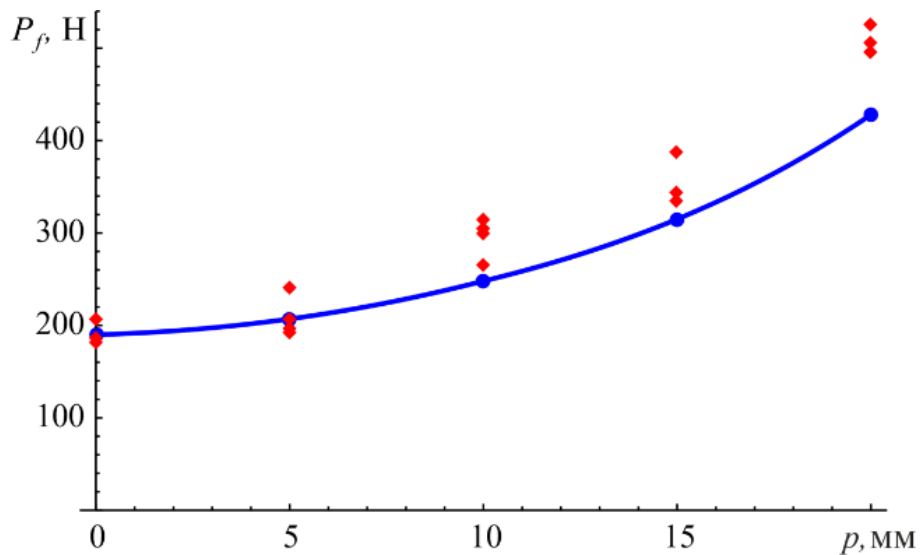


Рисунок 2.8 (лист 3 из 3)

Абсолютные значения углов инициации трещины для образцов вида ПММА-1 без учёта  $T$ -напряжения (критерий MTS) и с учётом его влияния (критерий GMTS) в зависимости от геометрии нагружения представлены на рисунках 2.9, 2.10 и в таблицах 2.2, 2.3. Значения угла инициации по критерию GMTS определяются из выражения (2.14). Для определения угла инициации трещины по критерию MTS в формуле (2.14) значение  $T$  следует положить равным нулю.

Из рисунка 2.9 можно увидеть, что учёт  $T$ -напряжения приводит к росту вычисляемого значения угла инициации трещины, что подтверждает сделанные в обзорной работе [59] выводы о влиянии величины  $T$ -напряжения и его знака на траекторию развития трещины. Например, в [12] при помощи экспериментальных исследований доказано, что отрицательное значение  $T$ -напряжения приводит к стабилизации траектории трещины, в то время как положительное значение провоцирует её неустойчивое поведение. В работе [30] проанализировано влияние первого несингулярного члена в разложении в ряд Вильямса на угол инициации трещины для некоторых видов керамики с использованием критерия GMTS.

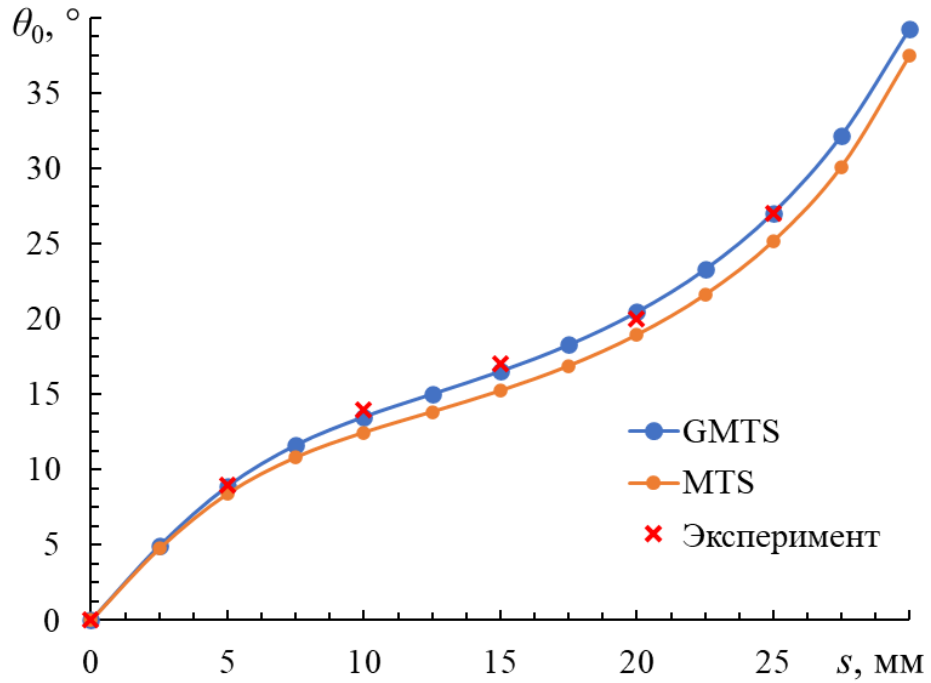


Рисунок 2.9 — К сравнению зависимостей  $\theta_0(s)$  (сдвиг трещины), полученных с использованием критериев MTS и GMTS, с экспериментом

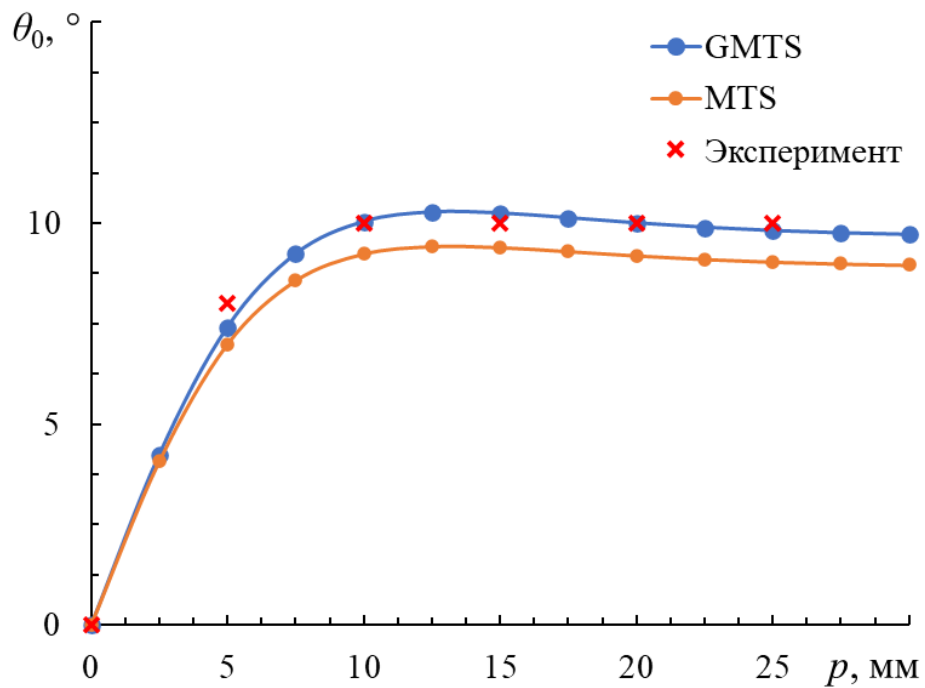


Рисунок 2.10 — К сравнению зависимостей  $\theta_0(p)$  (сдвиг нагрузки), полученных с использованием критериев MTS и GMTS, с экспериментом

Таблица 2.2 — Сравнение теоретических и экспериментальных углов начала разрушения (сдвиг трещины)

$s$ , мм	$M_e$	$\theta_0, ^\circ$ (GMTS-критерий)	$\theta_0, ^\circ$ (MTS-критерий)	$\theta_0, ^\circ$ (эксперимент)
5	0,95	8,9	8,4	9,0
10	0,93	13,5	12,5	14,0
15	0,91	16,5	15,2	17,0
20	0,89	20,5	18,9	20,0
25	0,85	27,0	25,2	27,0

Таблица 2.3 — Сравнение теоретических и экспериментальных углов начала разрушения (сдвиг нагрузки)

$p$ , мм	$M_e$	$\theta_0, ^\circ$ (GMTS-критерий)	$\theta_0, ^\circ$ (MTS-критерий)	$\theta_0, ^\circ$ (эксперимент)
5	0,96	7,4	7,0	8,0
10	0,95	10,0	9,2	10,0
15	0,95	10,3	9,4	10,0
20	0,95	10	9,2	10,0
25	0,95	9,8	9,0	10,0

Вид зависимостей угла начала разрушения от геометрии нагружения, представленных на рисунке 2.10, обусловлен тем, что начиная с определённого значения сдвиг нагрузки перестает оказывать влияние на смешанность мод разрушения (см. рисунок 2.6а).

Согласно таблицам 2.2, 2.3 и рисункам 2.9, 2.10, обобщенный критерий максимальных тангенциальных напряжений точнее предсказывает углы инициации трещины, чем классический критерий, учитывающий только сингулярные члены разложения Вильямса. Необходимо отметить, что оба критерия для образцов эксцентричной балки с краевой трещиной дают схожие результаты.

## 2.4. Выводы по главе 2

В этой главе предложен образец в виде эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с надрезом (трещиной). Для исследования разрушения в смешанном режиме I+II балка подвергается асимметричному трёхточечному изгибу. Преимущество данного образца в сравнении с образцом, имеющим наклонные трещины, заключается в простоте его изготовления. С помощью МКЭ получены величины параметров разрушения: КИН,  $T$ -напряжения. Вычислен параметр двухосности  $B$ , при разных геометрических условиях и условиях нагружения (то есть при различных  $a/W$ ,  $S/W$ ). Путём численного анализа и сравнения с доступными аналитическими решениями установлено, что для точного определения  $T$ -напряжений необходимо, во-первых, вычислять их по смещениям и, во-вторых, не принимать во внимание в конечно-элементной сетке ближайшие к вершине трещины 3–4 узла, где наблюдается сильная осцилляция решения.

С использованием предложенного образца проведены исследования вязкости разрушения сферопласта и ПММА в смешанном режиме. Обобщённый критерий максимальных растягивающих напряжений успешно применён для прогнозирования направления распространения (или зарождения) трещины и величины критической нагрузки. Следует признать, что, несмотря на простоту геометрии и создания нагружения, предложенная форма образца не охватывает весь диапазон смещения мод (от чистой моды I до чистой моды II). Однако, учитывая хорошую согласованность полученных численных и экспериментальных результатов как между собой, так и с предсказаниями критерия разрушения, этот образец может быть предложен для испытаний с целью изучения разрушения смешанного типа в технических материалах, таких как сферопласт, оргстекло, эбонит, гетинакс, при наклонных надрезах (трещинах).

### 3. Разрушение хрупких балок при антисимметричном четырёхточечном изгибе

В данной главе рассматривается балочный образец, подвергаемый антисимметричному четырёхточечному изгибу. Образец такой конфигурации позволяет в этих условиях получить чистую II моду, поэтому ранее к этим образцам часто прибегали при испытаниях на вязкое разрушение материалов в чистом II режиме (при поперечном сдвиге). В то же время, как будет показано далее, путём изменения положения трещины относительно середины балочного образца, можно добиться широкого спектра смешивания режимов I и II. Вследствие этого образец–балка имеет особую важность для исследования трещиностойкости различных материалов.

Толщина образца выбиралась такой, чтобы обеспечивалось условие плоской деформации. Для расчёта параметров разрушения в условиях различного смешения режимов нагружения (I+II) использовался метод конечных элементов. С целью оценки практической пригодности балочного образца была проведена серия экспериментов по определению вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме. Прогнозирование направления разрушения и критической нагрузки осуществлялось при помощи обобщённого критерия максимальных окружных напряжений (GMTS), расширенного критерия максимальных окружных деформаций (Extended Maximum Tangential Strain — EMTSN), обобщённого критерия плотности энергии деформирования (Generalized Strain Energy Density — GSED), обобщённого критерия максимальных окружных осредненных напряжений (Generalized Maximum Averaged Stress — MATS), критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии (Maximum Elastic Energy Release Rate — MERR) и обобщённого критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии (Generalized Maximum Elastic Energy Release Rate — GMERR).

### 3.1. Конечно-элементный анализ

Схема испытания на антисимметричный четырёхточечный изгиб эксцентричной балки прямоугольного сечения с краевой трещиной (рисунок 3.1) позволяет провести исследование материала на разрушение при смешанном режиме I+II. На рисунке показано:  $P$  — прикладываемая нагрузка,  $L$  — расстояние от опор до середины образца,  $d$  — расстояние от места приложения нагрузки до середины образца,  $S$  — сдвиг трещины относительно середины образца,  $a$  — длина трещины,  $W$  — высота образца,  $t$  — его толщина.

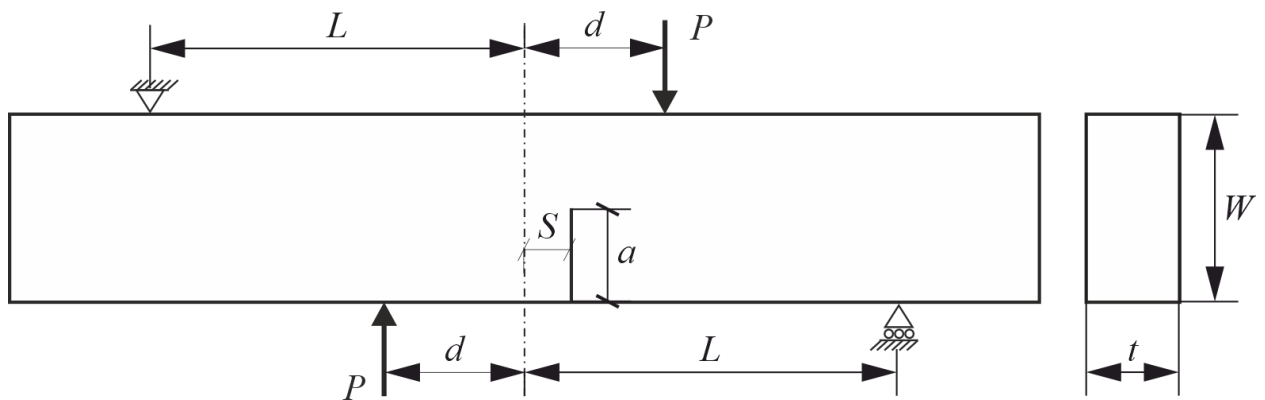


Рисунок 3.1 — Геометрия и схема нагружения образца

Варьируя сдвиг  $S$ , можно создать различные комбинации смешанных мод I+II, в том числе чистые виды деформации в вершине трещины: нормальный отрыв и поперечный сдвиг. Так, если  $S$  равно нулю, то в середине образца отсутствует изгибающий момент, но действуют перерезывающие силы и по этой причине в таком образце будет реализован чистый II режим нагружения. При сдвиге трещины получается смешанный I+II режим деформирования, а когда трещина достигает линии приложения нагрузки, возникает чистая I мода.

В случае смешанного I+II режима нагружения асимптотические разложения компонент поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, могут быть записаны в полярных координатах как:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Выражения для КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ -напряжения в исследуемом образце представляются так

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right), \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} Y_{II} \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right), \quad T = \sigma T_* \left( \frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right). \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma = P/(Wt)$ ;  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  — безразмерные КИН и  $T_*$  — безразмерное  $T$ -напряжение, которые являются функциями относительных величин: длины трещины  $a/W$  и сдвига трещины  $S/d$ .

Таким образом, для анализа разрушения образца при смешанном нагружении необходимо получить три параметра разрушения:  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  и  $T_*$ , для различных исследуемых конфигураций (геометрических форм области и видов нагружения). Для отыскания требуемых величин применялся конечно-элементный программный пакет MSC.Marc. На рисунке 3.2 представлен пример КЭ модели балки, состоящей из  $\sim 49000$  8-узловых квадратичных элементов. В области вершины трещины, для повышения точности расчётов, использовались сингулярные элементы, которые конструировались путем сдвига промежуточного узла к вершине трещины на четверть длины их ребра.

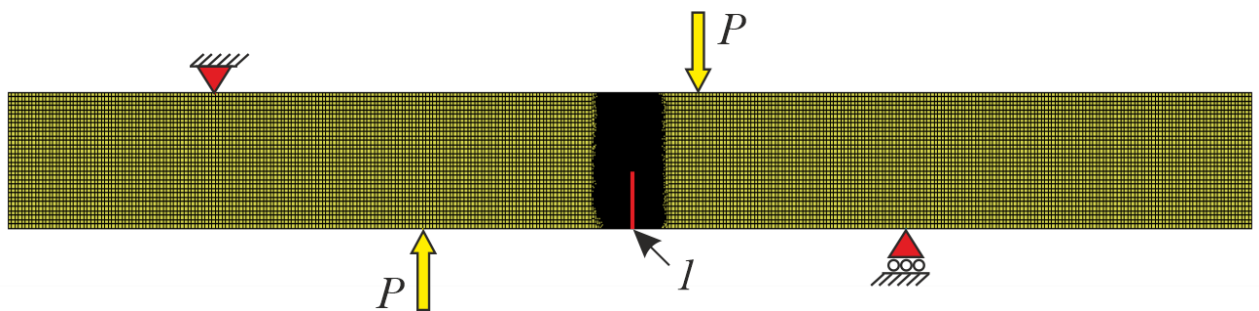


Рисунок 3.2 — Конечно-элементная модель балки,  $l$  — трещина

Как и в предыдущей главе, коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  вычислялись с помощью инвариантного контурного  $J$ -интеграла, который в процедуре численного интегрирования преобразуется в интеграл по площади. Интегрирование ведется по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычисляются внутри элементов в точках гауссовых квадратур. В расчетах использовались четыре контура интегрирования, результаты для третьего и четвертого контуров отличались незначительно.

Конечно-элементное исследование разрушения проводилось на образцах с геометрическими параметрами:  $W = 15,5$  мм,  $t = 7$  мм,  $L = 50$  мм,  $d = 14 \div 22$  мм (шаг 2 мм),  $a/W = 0,1 \div 0,8$  (шаг 0,1),  $S/d = 0 \div 1$  (шаг 0,125). Их материал считался линейно-упругим изотропным со следующими механическими свойствами:  $E = 2,9$  ГПа — модуль Юнга и  $\nu = 0,35$  — коэффициент Пуассона. В результате выполнения статического расчёта с приложением единичной нагрузки  $P = 1$  Н и вычислением  $J$ -интеграла для каждого образца были определены соответствующие значения  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ .

Для анализа роли геометрии образца в формировании его напряжённого состояния и для получения всего спектра смешивания I и II режимов смоделировано 360 геометрических форм. На рисунках 3.3 и 3.4 представлены зависимости  $Y_I$  и  $Y_{II}$  от отношения  $S/d$  для различных относительных длин трещины и от отношения  $a/W$  для различных  $S/d$  при  $d = 22$  мм. Из рисунка 3.3а, б видно, что при нулевом сдвиге трещины относительно середины балки, как и ожидалось, наблюдается отсутствие влияния I режима нагружения при максимальном проявлении режима II. С ростом отношения  $S/d$  роль I моды возрастает при практически неизменном вкладе II моды. При приближении  $S/d$  к единице происходит резкое снижение воздействия II режима до минимальных значений, и при  $S/d = 1$  главной становится I мода с незначительным вкладом II моды нагружения.

Рисунок 3.4а демонстрирует повышение влияния I режима нагружения с ростом длины трещины для разных отношений  $S/d$ , кроме нулевого, при

котором I режим фактически отсутствует для всего заданного диапазона значений  $a/W$ . Наряду с этим безразмерный КИН  $Y_{II}$  растёт с увеличением длины трещины (см. рисунок 3.4б), но с приближением отношения  $S/d$  к единице, рост становится менее выраженным.

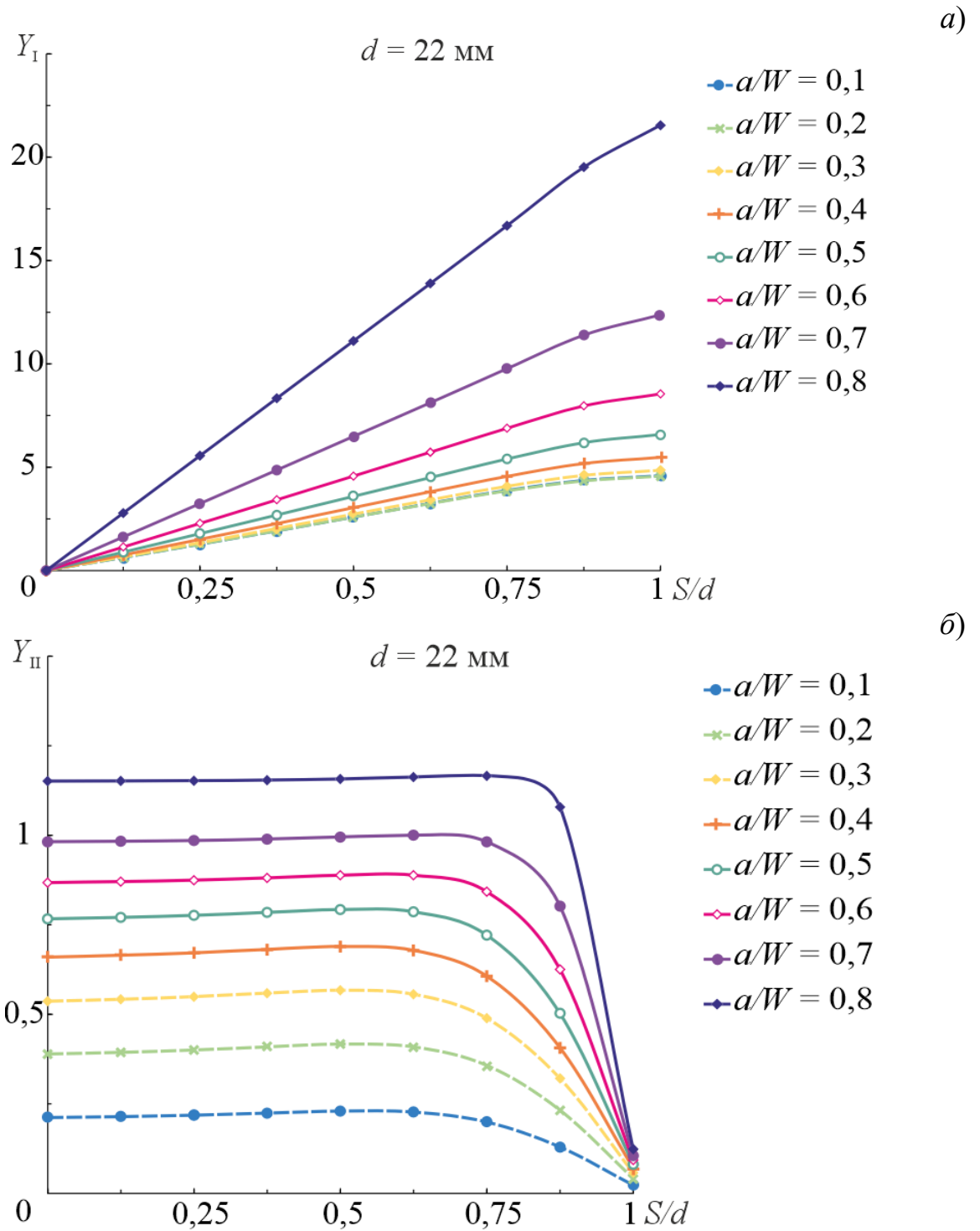
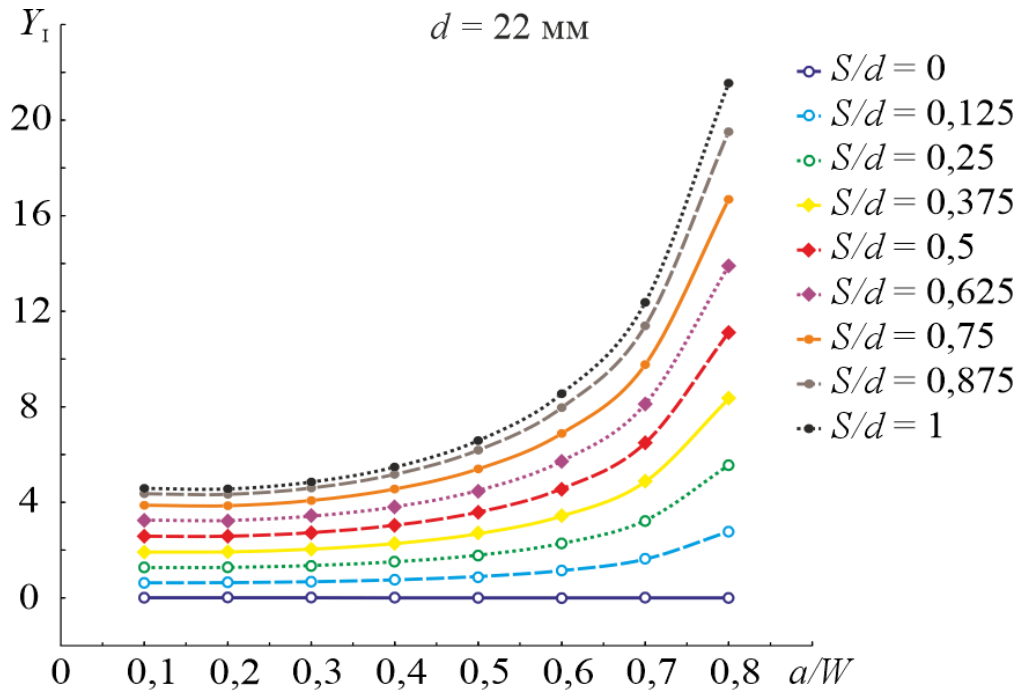


Рисунок 3.3 — Зависимости  $Y_I(S/d)$  (а),  $Y_{II}(S/d)$  (б) при различных относительных длинах трещины  $a/W$

a)



б)

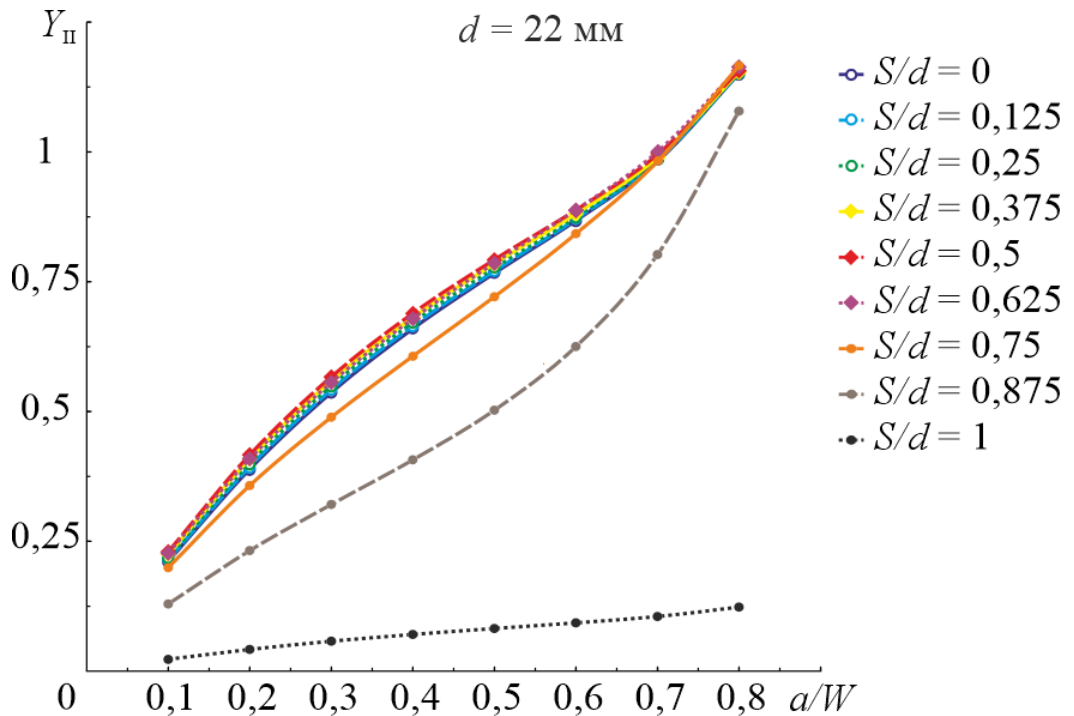


Рисунок 3.4 — Зависимости  $Y_I(a/W)$  (а),  $Y_{II}(a/W)$  (б) при различных отношениях  $S/d$

Расчёт  $T$ -напряжения базируется на тех же рассуждениях, что приведены в разделе 2.1 настоящей работы.

Зависимости безразмерного параметра  $T_*$  от величины относительного сдвига трещины  $S/d$  при фиксированном  $d = 22$  мм и меняющейся в заданном диапазоне значений относительной длине трещины  $a/W$  представлены на рисунке 3.5а. Рисунок 3.5б иллюстрирует зависимость безразмерного параметра  $T_*$  от отношения  $a/W$  при фиксированном расстоянии  $d = 22$  мм и меняющемся в заданном диапазоне отношении  $S/d$ .

Из рисунка 3.5 видно, что для нулевого относительного сдвига  $S/d$  значение безразмерного параметра  $T_*$  близко к нулю для всего диапазона длин трещины. Для коротких трещин значения  $T_*$  отрицательны и меняют знак на положительный в диапазоне относительных длин трещины  $a/W = 0,3 \div 0,5$  в зависимости от величины отношения  $S/d$ . С увеличением сдвига трещины относительно середины образца значение параметра  $T_*$  растёт. Всё это указывает на важность учёта влияния величины и знака  $T$ -напряжения на сопротивление разрушению хрупких и квазихрупких материалов в смешанном режиме (I+II).

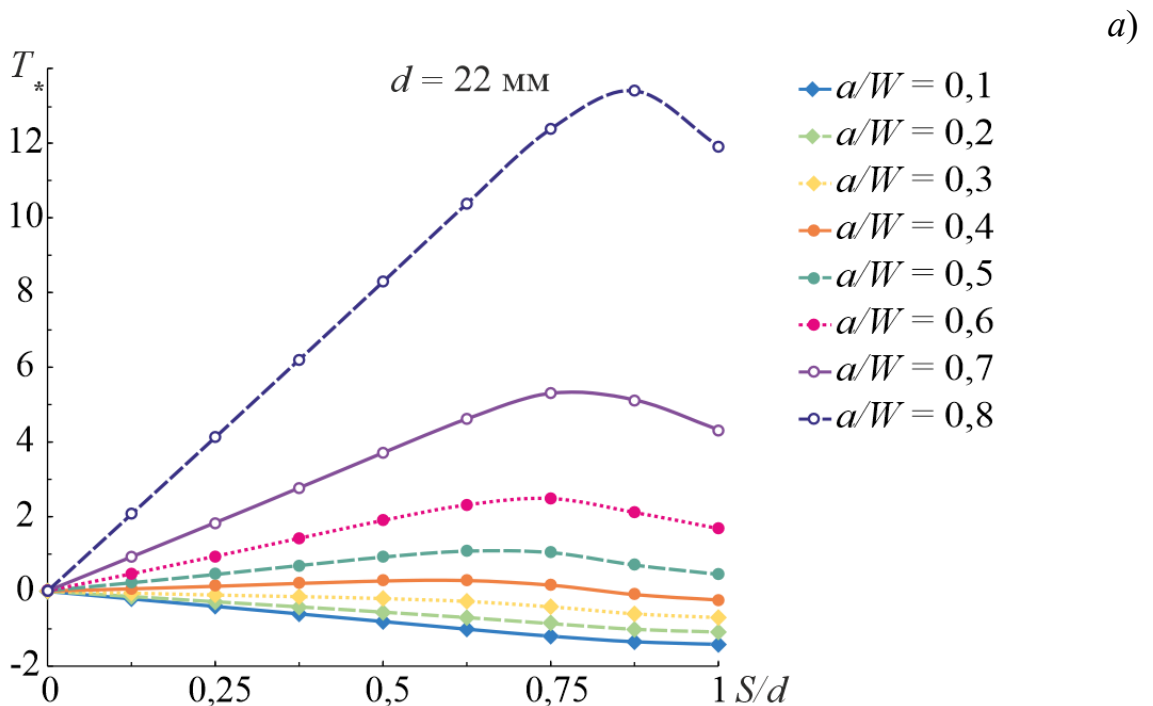


Рисунок 3.5 — Зависимости  $T_*(S/d)$  (а),  $T_*(a/W)$  (б) для  $d = 22$  мм  
(лист 1 из 2)

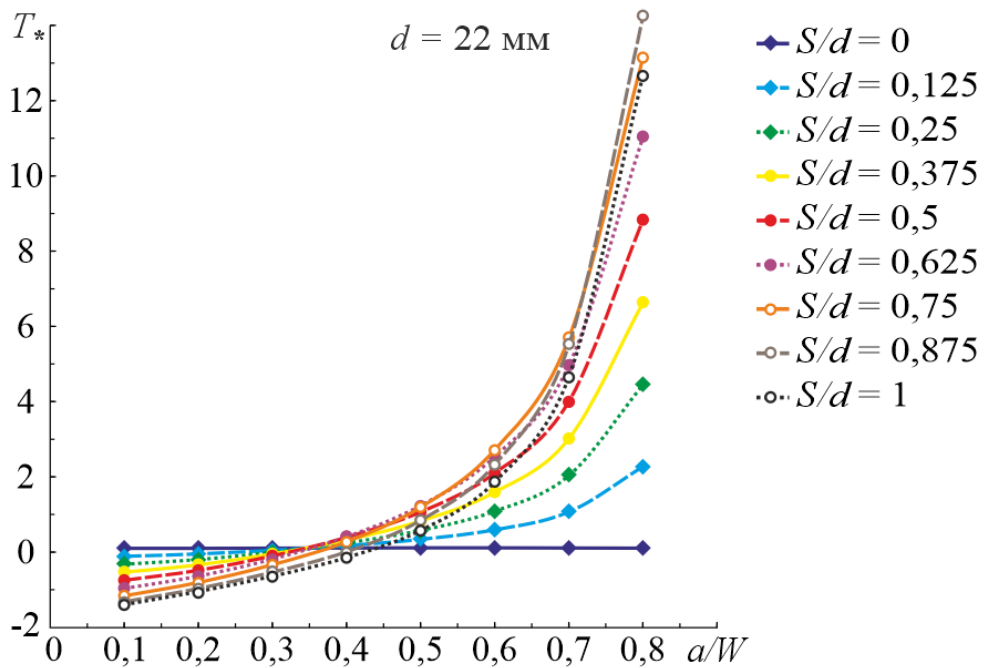


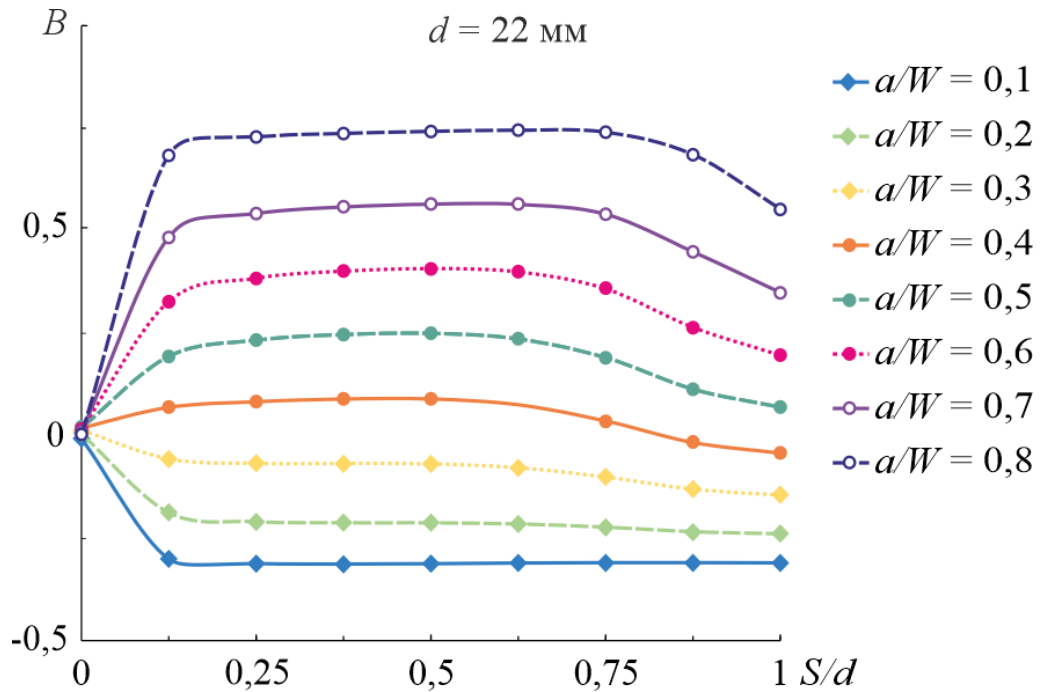
Рисунок 3.5 (лист 2 из 2)

Кроме этого, для анализа воздействия  $T$ -напряжения на процесс разрушения в смешанном режиме (I+II) возможно использование безразмерного параметра — коэффициента двухосности  $B$ . Коэффициент двухосности является функцией геометрической формы образца, зависит от схемы нагружения и определяется выражением (2.10).

Рисунок 3.6 иллюстрирует изменение параметра  $B$  в зависимости от расположения трещины в образце для заданного диапазона значений  $a/W$  и в зависимости от длины трещины для заданного диапазона отношений  $S/d$  при фиксированном  $d = 22 \text{ мм}$ .

Видно, что коэффициент двухосности для  $S/d = 0$  (режим II) при различных длинах трещины имеет значения, близкие к нулевым. С ростом отношения  $S/d$  коэффициент  $B$  достигает величины, которая остаётся практически постоянной во всём диапазоне длин трещин, что говорит о его нечувствительности к сдвигу трещины. Для коротких трещин коэффициент двухосности принимает отрицательные значения, для трещин с относительной длиной  $a/W$ , лежащей в диапазоне  $0,4 \div 0,8$ , он в основном положительный.

a)



б)

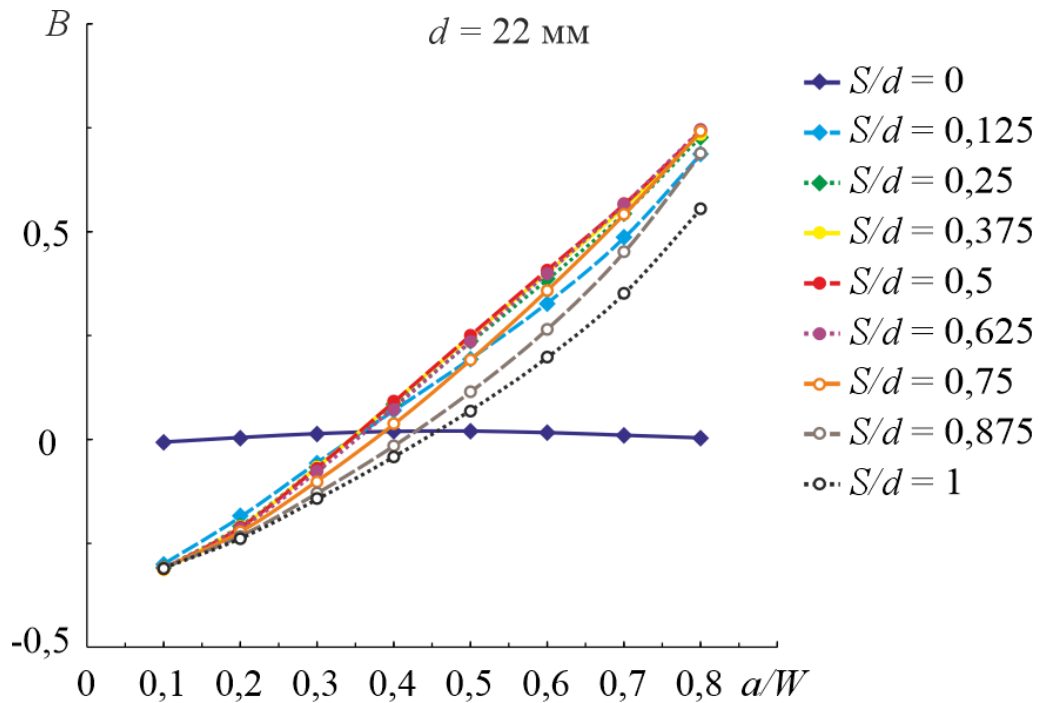


Рисунок 3.6 — Зависимости  $B(S/d)$  (а),  $B(a/W)$  (б) для  $d = 22$  мм

### 3.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения

В опытах по изучению вязкости разрушения при смешанном нагружении использовались балочные образцы, изготовленные из эбонита. Хорошо известно,

что данный материал лёгок в обработке, имеет небольшую стоимость и разрушается по квазихрупкому типу. Образцы вырезались из пластины толщиной  $6,8 \div 7$  мм. Эксперименты проводились при статической нагрузке и комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин. Для каждого расположения трещины было изготовлено по 3–5 одинаковых образцов следующих размеров:  $W = 15,5$  мм,  $t = 7$  мм,  $L = 50$  мм,  $d = 20$  мм. Относительная длина трещины составляла  $a/W = 0,5$ , сдвиг трещины  $S$  варьировался от 0 до 20 мм с шагом 5 мм. Механические свойства эбонита приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 — Механические свойства материала

Параметр Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	$\sigma_t$ , МПа	$K_{Ic}$ , МПа·м <sup>1/2</sup>
Эбонит	2,9	0,35	52	1,95



Рисунок 3.7 — Разрушенные образцы из эбонита

На рисунке 3.7 представлены разрушенные образцы с разным расположением исходных трещин. Видно, что разрушение начинается с вершины трещины. Максимальный угол отклонения траектории трещины наблюдается у образца с  $S = 0$  мм; в данной конфигурации реализуется чистый II режим разрушения. В процессе увеличения сдвига трещины угол излома её траектории постепенно уменьшается, что обусловлено возникновением смешанного режима I+II, в котором влияние II моды на процесс разрушения снижается и постепенно возрастает воздействие I моды. При максимально допустимом сдвиге трещины  $S = 20$  мм её траектория имеет практически нулевой угол отклонения, а нулевой угол отклонения соответствует чистому режиму I. Таким образом, данный тип образца в условиях антисимметричного четырёхточечного изгиба позволяет исследовать полный спектр смешивания режимов разрушения, в том числе чистые I и II режимы.

### 3.3. Критерии хрупкого разрушения

Предсказание направления распространения трещины является одной из проблем, перспективных для исследований в области механики разрушения. Ориентация трещины имеет большое значение для предотвращения её дальнейшего распространения и её установление должно осуществляться в условиях сложного напряжённого состояния, обычно реализуемого в вершине трещины и приводящего к разрушению в смешанном режиме. В связи с этим в последнее время активно ведется работа по созданию критериев, позволяющих прогнозировать зарождение и направление роста трещин, и одним из способов уточнения результатов применения этих критериев является введение в рассмотрение  $T$ -напряжения.

Для прогнозных вычислительных экспериментов применено шесть критериев разрушения: обобщённый критерий максимальных окружных напряжений (GMTS), расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN), обобщённый критерий плотности энергии

деформирования (GSED), обобщённый критерий максимальных окружных осреднённых напряжений (MATS), критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) и обобщённый критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (GMERR).

Как уже отмечалось в предыдущей главе, критерии MTS и GMTS наиболее часто используются при изучении хрупкого разрушения. Они подходят для оценки запасов прочности широкого круга хрупких и квазихрупких материалов, таких как горные породы, керамика, полиметилметакрилат, графит. Критерий GMTS представляет собой модификацию критерия MTS, учитывающую влияние  $T$ -напряжения.

Деформационный критерий MTSN (максимальных окружных деформаций) [49, 108] учитывает значение коэффициента Пуассона и предполагает, что максимальная окружная деформация является более важным фактором при прогнозировании результатов процесса разрушения, чем растягивающие напряжения. Особенностью критерия EMTSN, в сравнении с MTSN, является учёт вклада первого несингулярного члена [73, 81].

Критерий плотности энергии деформирования (SED) [69, 70, 93] представляет собой локальный энергетический критерий. Как известно, энергетические критерии, в отличие от силовых, позволяют привлекать при анализе большее число компонент тензора напряжений. В основе этого критерия лежит предположение о том, что хрупкое разрушение происходит тогда, когда локальная плотность энергии деформирования, оцениваемая в контрольном объеме, достигает критического значения, которое, как доказано, не зависит ни от геометрии области исследования, ни от условий нагружения [57, 67, 92]. Запись обобщённого критерия плотности энергии деформирования (GSED) включает  $T$ -напряжение [43, 44, 66].

Обобщённый критерий максимальных окружных осреднённых напряжений (MATS) — нелокальный критерий, учитывающий характерный размер структуры материала  $d_0$  и позволяющий решить проблему резко возрастающего напряжения перед вершиной трещины путем осреднения

напряжений на расстоянии, соответствующем  $d_0$ . Данный критерий подходит для оценки прочности хрупких и квазихрупких материалов, так как в них зона предразрушения  $d$  не превышает характерный размер структуры материала  $d_0$  или сопоставима с ним, то есть для материалов, у которых неупругие пластические свойства перед вершиной трещины проявляются слабо. Суть критерия состоит в том, что трещина начинает свой рост тогда, когда максимальное среднее окружное напряжение в зоне предразрушения у вершины трещины достигает критического значения [12]. В работах [53, 79, 80] показана хорошая согласованность прогнозов на основе этого критерия с экспериментальными данными.

Критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) базируется на принципе минимума потенциальной энергии деформации и является обобщением теории Гриффитса. Суть данного критерия заключается в том, что среди всех допустимых направлений роста трещины реально то, которое максимизирует скорость высвобождения упругой энергии деформации [63, 87, 93]. Обобщённый критерий GMERR включает в себя оценку критического состояния материала с использованием первого несингулярного члена в разложении Вильямса [61].

### 3.3.1. Обобщённый критерий максимальных окружных напряжений

Определяющие выражения критерия GMTS представлены разделе 2.3. Согласно условию предельного состояния (2.11) трещина зарождается в направлении  $\theta_0$ , где тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta$  имеет максимальное значение, а условие распространения трещины обеспечивается достижением этим напряжением критического значения  $\sigma_t$  на критическом расстоянии  $r_c$  от вершины трещины.

Уравнение для определения критической нагрузки по этому критерию имеет вид:

$$\sigma_f \sqrt{\pi a} \left( Y_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3Y_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \alpha T_* \sin^2 \theta_0 \right) = K_{Ic} , \quad (3.3)$$

где  $\sigma_f$  — критическое номинальное напряжение, эквивалентное  $P_f / (Wt)$ .

### 3.3.2. Расширенный критерий максимальных окружных деформаций

В соответствии с этим критерием трещина распространяется в направлении  $\theta_0$ , в котором окружная деформация  $\varepsilon_\theta$  имеет максимум, при достижении ей своего критического значения  $\varepsilon_c$  на критическом расстоянии  $r_c$  от вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \varepsilon_\theta(r_c, \theta_0) = \varepsilon_c . \quad (3.4)$$

Выражение для  $\varepsilon_\theta$  имеет вид:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E'} (\sigma_\theta - \nu' \sigma_r) . \quad (3.5)$$

Здесь  $E' = E / (1 - \nu^2)$ ,  $\nu' = \nu / (1 - \nu)$  в условиях плоской деформации,  $E' = E$ ,  $\nu' = \nu$  в условиях плоского напряжённого состояния.

После введения обозначений:

$$A_1(\theta) = (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}, \quad A_2(\theta) = (3 - 2\kappa) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2}, \quad (3.6)$$

$$A_3(\theta) = \kappa + 1 - 4 \cos^2 \theta,$$

где  $\kappa$  — параметр вида напряжённого состояния ( $\kappa = 3 - 4\nu$  в условиях плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  в условиях плоского напряжённого состояния), формула (3.5) с учетом (3.1) и (3.6) запишется как

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{4E\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I A_1(\theta) + K_{II} A_2(\theta) + T \sqrt{2\pi r} A_3(\theta) \right] . \quad (3.7)$$

Согласно формулировке расширенного критерия максимальных окружных деформаций, угол инициации трещины можно отыскать, решив уравнение:

$$\begin{aligned}
& K_{\text{I}} \left[ (3 - 2\kappa) \sin \frac{\theta_0}{2} - 3 \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] + \\
& + K_{\text{II}} \left[ (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] + 8T \sqrt{2\pi r_c} \sin 2\theta_0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

или с учётом (3.2):

$$\begin{aligned}
& Y_{\text{I}} \left[ (3 - 2\kappa) \sin \frac{\theta_0}{2} - 3 \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] + \\
& + Y_{\text{II}} \left[ (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] + 8T_* \alpha \sin 2\theta_0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

С использованием выражения (3.7), условие разрушения (3.4) может быть записано в виде:

$$\frac{1 + \nu}{4E\sqrt{2\pi r_c}} \left[ K_{\text{I}f} A_1(\theta_0) + K_{\text{II}f} A_2(\theta_0) + T_f \sqrt{2\pi r_c} A_3(\theta_0) \right] = \varepsilon_c. \tag{3.10}$$

Для чистого режима I ( $K_{\text{II}f} = 0$ ,  $K_{\text{I}f} = K_{\text{Ic}}$ ,  $T_f = T_c$ ,  $\theta_0 = 0$ ), получается:

$$\frac{1 + \nu}{4E\sqrt{2\pi r_c}} K_{\text{Ic}} \left[ 2(\kappa - 1) + (\kappa - 3) \frac{T_c}{\sigma_t} \right] = \varepsilon_c. \tag{3.11}$$

Выражение (3.10), с учетом (3.2), принимает вид:

$$\sigma_f \sqrt{\pi a} \left[ Y_{\text{I}} A_1(\theta_0) + Y_{\text{II}} A_2(\theta_0) + T_* \alpha A_3(\theta_0) \right] = K_{\text{Ic}}^*. \tag{3.12}$$

Параметр  $K_{\text{Ic}}^*$  называется обобщенной вязкостью разрушения и учитывает коэффициент Пуассона. Формула для его определения выглядит так:

$$K_{\text{Ic}}^* = K_{\text{Ic}} \left[ 2(\kappa - 1) + (\kappa - 3) \frac{T_c}{\sigma_t} \right]. \tag{3.13}$$

### 3.3.3. Обобщённый критерий плотности энергии деформирования

В соответствии с работами [104, 105, 107, 108, 111] выражение для плотности энергии деформирования  $D$  имеет вид:

$$D = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[ K_I^2 B_1(\theta) + K_{II}^2 B_2(\theta) + K_I K_{II} B_3(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_I T B_4(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_{II} T B_5(\theta) + 2\pi r T^2 B_6(\theta) \right], \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(\theta) &= \frac{2\kappa-1}{8} + \frac{\kappa-1}{4} \cos \theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta, & B_2(\theta) &= \frac{2\kappa+3}{8} - \frac{\kappa-1}{4} \cos \theta + \frac{3}{8} \cos 2\theta, \\ B_3(\theta) &= \frac{1-\kappa}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta, & B_4(\theta) &= \frac{2\kappa-3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2}, \\ B_5(\theta) &= -\frac{2\kappa+1}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2}, & B_6(\theta) &= \frac{\kappa+1}{8}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Согласно критерию GSED, трещина начинает свое распространение в направлении  $\theta_0$ , в котором плотность энергии деформирования  $D$  минимальна, и достигает критического значения  $D_c$  на критическом расстоянии  $r_c$ :

$$\left. \frac{\partial D}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0, \quad D(r_c, \theta_0) = D_c \quad (3.16)$$

Угол  $\theta_0$  находится из решения уравнения:

$$\begin{aligned} & K_I^2 C_1(\theta_0) + K_{II}^2 C_2(\theta_0) + K_I K_{II} C_3(\theta_0) + \\ & + \sqrt{2\pi r_c} K_I T C_4(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{II} T C_5(\theta_0) + 2\pi r_c T^2 C_6(\theta_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

или с учетом представления (3.2):

$$\begin{aligned} & Y_I^2 C_1(\theta_0) + Y_{II}^2 C_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} C_3(\theta_0) + \\ & + Y_I T_* \alpha C_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha C_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 C_6(\theta_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_1(\theta_0) &= \frac{1-\kappa}{4} \sin \theta_0 + \frac{1}{4} \sin 2\theta_0, & C_2(\theta_0) &= \frac{\kappa-1}{4} \sin \theta_0 - \frac{3}{4} \sin 2\theta_0, \\ C_3(\theta_0) &= \frac{1-\kappa}{2} \cos \theta_0 + \cos 2\theta_0, & C_4(\theta_0) &= \frac{3-2\kappa}{8} \sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{5}{8} \sin \frac{5\theta_0}{2}, \\ C_5(\theta_0) &= -\frac{2\kappa+1}{8} \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{5}{8} \cos \frac{5\theta_0}{2}, & C_6(\theta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Критерий разрушения (3.16) с учетом записи (3.14) для плотности энергии деформирования  $D$  переписется в виде:

$$\frac{1+\nu}{2\pi E} \left[ K_{I\Gamma}^2 B_1(\theta_0) + K_{II\Gamma}^2 B_2(\theta_0) + K_{I\Gamma} K_{II\Gamma} B_3(\theta_0) + \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi r_c} K_{I\Gamma} T_f B_4(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{II\Gamma} T_f B_5(\theta_0) + 2\pi r_c T_f^2 B_6(\theta_0) \right] = D_c. \quad (3.20)$$

Для условия чистой I моды ( $K_{II\Gamma} = 0$ ,  $K_{I\Gamma} = K_{Ic}$ ,  $T_f = T_c$ ,  $\theta_0 = 0$ ) получается:

$$D_c = \frac{1+\nu}{2\pi E} K_{Ic}^2 \left[ \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 + \frac{T_c}{\sigma_t} \right) + \frac{\kappa+1}{8} \left( \frac{T_c}{\sigma_t} \right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

Наконец, с использованием безразмерного представления параметров (3.2) и выражения (3.21) критерий разрушения (3.20) принимает вид:

$$\left( \sigma_f \sqrt{\pi a} \right)^2 \left[ Y_I^2 B_1(\theta_0) + Y_{II}^2 B_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} B_3(\theta_0) + \right. \\ \left. + Y_I T_* \alpha B_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha B_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 B_6(\theta_0) \right] = \left( K_{Ic}^* \right)^2, \quad (3.22)$$

где

$$K_{Ic}^* = K_{Ic} \sqrt{ \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 + \frac{T_c}{\sigma_t} \right) + \frac{\kappa+1}{8} \left( \frac{T_c}{\sigma_t} \right)^2 }. \quad (3.23)$$

### 3.3.4. Обобщённый критерий максимальных окружных осреднённых напряжений

Исходя из асимптотики компоненты  $\sigma_\theta(r, \theta)$  поля напряжений в вершине трещины (см. (3.1)) выражение для окружных напряжений после осреднения по длине зоны предразрушения  $d$  становится следующим:

$$\bar{\sigma}_\theta(d, \theta) = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_\theta(r, \theta) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi d}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right) + \\ + T \sin^2(\theta). \quad (3.24)$$

Если предположить, что при достижении окружными напряжениями своего критического значения размер зоны предразрушения  $d$  будет сопоставим с критическим расстоянием  $r_c$ , то тогда условие распространения трещины,

согласно критерию максимальных окружных осреднённых напряжений, запишется в виде:

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \bar{\sigma}_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_t. \quad (3.25)$$

Таким образом, угол зарождения трещины  $\theta_0$  можно найти из условия (3.25) после решения уравнения:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{8}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (3.26)$$

Принимая во внимание выражения (3.2) для  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ , в безразмерном виде, использующем параметры  $Y_I$  и  $Y_{II}$ , можно получить уравнение для нахождения угла  $\theta_0$ :

$$Y_I \sin \theta_0 + Y_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{8}{3} T_* \alpha \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (3.27)$$

Подстановка вычисленного угла  $\theta_0$  в выражение для  $\bar{\sigma}_\theta$  (3.24) и учёт условия достижения осреднённым по размеру зоны предразрушения окружным напряжением своего предельного значения, равного  $\sigma_t$ , дают следующее:

$$K_{If} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3K_{IIf} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \sqrt{\frac{\pi r_c}{2}} T_f \sin^2 \theta_0 = \sqrt{\frac{\pi r_c}{2}} \sigma_t. \quad (3.28)$$

Здесь, в отличие от работы [12], расстояние  $r_c$  полагается константой материала и находится по формуле (2.18), которая, по сути, является формулой Ирвина для оценки размера зоны пластичности. Тогда, учитывая представление (3.2), можно записать выражение для нахождения критического номинального напряжения:

$$\sigma_f \sqrt{\pi a} \left( Y_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3Y_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + T_* \alpha \sin^2 \theta_0 \right) = K_{Ic}. \quad (3.29)$$

### 3.3.5. Критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии и обобщённый критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии

Высвобождаемая упругая энергия деформации  $G$  представляет собой энергию, необходимую для роста трещины. Критерии утверждают, что трещина начнёт продвигаться на величину  $r_c$  в направлении  $\theta_0$  при достижении скоростью высвобождения упругой энергии деформации своего максимального значения в этом направлении. Обобщённый критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии, к тому же, позволяет учитывать влияние  $T$ -напряжения. Условие начала разрушения в этом случае записывается как

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad G(r_c, \theta_0) = G_c. \quad (3.30)$$

В работе [61] принимается допущение, что в вершине излома трещины под углом инициации  $\theta_0$ , при условии стремления к нулю длины отростка, коэффициенты интенсивности могут быть представлены в виде:

$$K_{I\theta} = \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta(r, \theta), \quad K_{II\theta} = \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta}(r, \theta), \quad (3.31)$$

скорость высвобождения упругой энергии запишется так:

$$G = \frac{1}{E'} (K_{I\theta}^2 + K_{II\theta}^2) = \frac{2\pi r}{E'} (\sigma_\theta^2(r, \theta) + \tau_{r\theta}^2(r, \theta)), \quad (3.32)$$

а с учетом асимптотики поля напряжений (3.1) выражение (3.32) становится следующим:

$$G = \frac{1}{E'} \left[ K_I^2 D_1(\theta) + K_{II}^2 D_2(\theta) + K_I K_{II} D_3(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_I T D_4(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_{II} T D_5(\theta) + 2\pi r T^2 D_6(\theta) \right]. \quad (3.33)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
D_1(\theta) &= \cos^4 \frac{\theta}{2}, & D_2(\theta) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right), \\
D_3(\theta) &= -4 \cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, & D_4(\theta) &= \sin^2 \theta \cos \frac{\theta}{2}, \\
D_5(\theta) &= 4 \left( \sin^5 \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right), & D_6(\theta) &= \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Из условия (3.30) следует, что для нахождения угла инициирования трещины необходимо решить уравнение:

$$\begin{aligned}
&F_1(\theta_0)K_I^2 + F_2(\theta_0)K_{II}^2 + F_3(\theta_0)K_I K_{II} + \\
&+ F_4(\theta_0)\sqrt{2\pi r_c} K_I T + F_5(\theta_0)\sqrt{2\pi r_c} K_{II} T + F_6(\theta_0)2\pi r_c T^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

или с учётом (3.2):

$$\begin{aligned}
&Y_I^2 F_1(\theta_0) + Y_{II}^2 F_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} F_3(\theta_0) + \\
&+ Y_I T_* \alpha F_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha F_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 F_6(\theta_0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

В уравнениях (3.35), (3.36) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
F_1(\theta_0) &= -\frac{1}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1), & F_2(\theta_0) &= \frac{1}{2} \sin \theta (3 \cos \theta - 1), \\
F_3(\theta_0) &= 1 - \cos \theta - 2 \cos^2 \theta, & F_4(\theta_0) &= \frac{1}{8} \left( 5 \sin \frac{5\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \\
F_5(\theta_0) &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( 5 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 1 \right), & F_6(\theta_0) &= \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Так как, согласно критерию (3.30), трещина будет расти в направлении  $\theta_0$  при достижении  $G$  своего критического значения, то с учётом (3.33) можно записать:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E'} \left[ K_{If}^2 D_1(\theta_0) + K_{IIf}^2 D_2(\theta_0) + K_{If} K_{IIf} D_3(\theta_0) + \right. \\
&\left. + \sqrt{2\pi r_c} K_{If} T_f D_4(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{IIf} T_f D_5(\theta_0) + 2\pi r_c T_f^2 D_6(\theta_0) \right] = G_c.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Для чистого режима I ( $K_{IIf} = 0$ ,  $K_{If} = K_{Ic}$ ,  $T_f = T_c$ ,  $\theta_0 = 0$ ) получается:

$$G_c = K_{Ic}^2 / E'. \tag{3.39}$$

С учётом (3.39) и представления (3.2) выражение (3.33) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_f \sqrt{\pi a}\right)^2 \left(Y_I^2 D_1(\theta_0) + Y_{II}^2 D_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} D_3(\theta_0) + \right. \\ & \left. + Y_I T_* \alpha D_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha D_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 D_6(\theta_0)\right) = K_{Ic}^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь значение критического расстояния  $r_c$  оценивается по формуле (2.18).

Выражения для определения интенсивности высвобождения упругой энергии деформации  $G$ , угла инициации трещины  $\theta_0$  и критической нагрузки в критерии максимальной скорости высвобождения упругой энергии легко получить, если исключить из формул для обобщённого критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии слагаемые, содержащие  $T$ -напряжения:

$$Y_I^2 F_1(\theta_0) + Y_{II}^2 F_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} F_3(\theta_0) = 0, \quad (3.41)$$

$$\left(\sigma_f \sqrt{\pi a}\right)^2 \left(Y_I^2 D_1(\theta_0) + Y_{II}^2 D_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} D_3(\theta_0)\right) = K_{Ic}^2. \quad (3.42)$$

Shahani и Tabatabaei [93] представили для скорости высвобождения упругой энергии деформации в критерии максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) такую форму записи:

$$G = c_{11} K_I^2 + c_{12} K_I K_{II} + c_{22} K_{II}^2. \quad (3.43)$$

Здесь коэффициенты  $c_{ij}$  — полиномы вида:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4.8678\beta^5 + 5.4844\beta^4 - 4.0616\beta^3 - 5.9047\beta^2 - 0.07633\beta + 0.99914, \\ c_{12} &= 21.115\beta^6 - 26.99\beta^5 + 18.332\beta^4 + 31.462\beta^3 \\ &+ 0.67634\beta^2 - 6.2579\beta + 1.2617 \cdot 10^{-5}, \\ c_{22} &= 12.839\beta^5 - 8.6465\beta^4 + 14.686\beta^3 + 10.287\beta^2 + 0.27363\beta + 1.0031, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где  $\beta = \theta/\pi$ .

Скорость высвобождения упругой энергии  $G$  может иметь и такое представление:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{E'} \left[ K_I^2 \left( C_{11}^2(\theta) + C_{11}^2(\theta) \right) + 2K_I K_{II} \left( C_{11}(\theta) C_{12}(\theta) + C_{21}(\theta) C_{22}(\theta) \right) + \right. \\ & \left. + K_{II}^2 \left( C_{11}^2(\theta) + C_{11}^2(\theta) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Hussain и др. [63] определили входящие в (3.45) коэффициенты  $C_{ij}(\theta)$  ( $i, j = 1, 2$ ) при помощи комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} C_{11}(\theta) &= \left( \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\theta/2\pi} \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \cos \theta, \\ C_{12}(\theta) &= \left( \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\theta/2\pi} \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left( \frac{3}{2} \right) \sin \theta, \\ C_{21}(\theta) &= \left( \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\theta/2\pi} \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \sin \theta, \\ C_{22}(\theta) &= \left( \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\theta/2\pi} \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nuismer [87] получил выражения для  $C_{ij}(\theta)$  в предположении идентичности поля напряжений в вершине трещины и на кончике её отростка при стремлении длины отростка к нулю:

$$\begin{aligned} C_{11}(\theta) &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}, \quad C_{12}(\theta) = -\frac{3}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \\ C_{21}(\theta) &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \quad C_{22}(\theta) = \frac{1}{2}(3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Необходимо отметить, что формулы (3.43) и (3.45) не учитывают влияние  $T$ -напряжения и используются для оценки предельного состояния материала в критерии MERR. К тому же, величины разрушающей нагрузки, рассчитанные по формуле (3.42) и по выражению с  $C_{ij}(\theta)$  (см. [87]), совпадают.

### 3.4. Сравнение результатов расчётов с лабораторным экспериментом

На рисунке 3.8а для сравнения показаны графики нагрузок, предсказанные вычислениями с использованием различных критериев хрупкого разрушения из предыдущего раздела, и результаты лабораторных испытаний образцов из эбонита. Рисунок позволяет оценить изменение критической нагрузки в зависимости от смешивания режимов нагружения (I+II), получаемого в данном образце путём сдвига трещины относительно его середины. На рисунке 3.8б

представлены зависимости критической нагрузки от относительного сдвига трещины для критериев GMERR и MERR. Данные расчетов по критерию MERR приведены в нескольких вариантах (3.43)–(3.47).

Критерий GSED демонстрирует хорошее согласие между данными вычислительных и лабораторных экспериментов. Оценки разрушения по локальному силовому критерию GMTS, нелокальному силовому критерию MATS и энергетическим критериям GMERR, MERR являются очень близкими друг к другу и к экспериментальным результатам. Деформационный критерий EMTSN представлен в двух вариантах: найдена разрушающая нагрузка для условий плоской деформации и плоского напряжённого состояния. Несмотря на то, что толщина испытательного образца соответствует плоской деформации ( $t \geq t_{\min} = 2,5(K_{Ic} / \sigma_t)^2$ ), расчет по критерию EMTSN в условиях плоского напряжённого состояния показывает лучший результат. При вычислениях по критерию EMTSN условие плоской деформации более консервативно.

a)

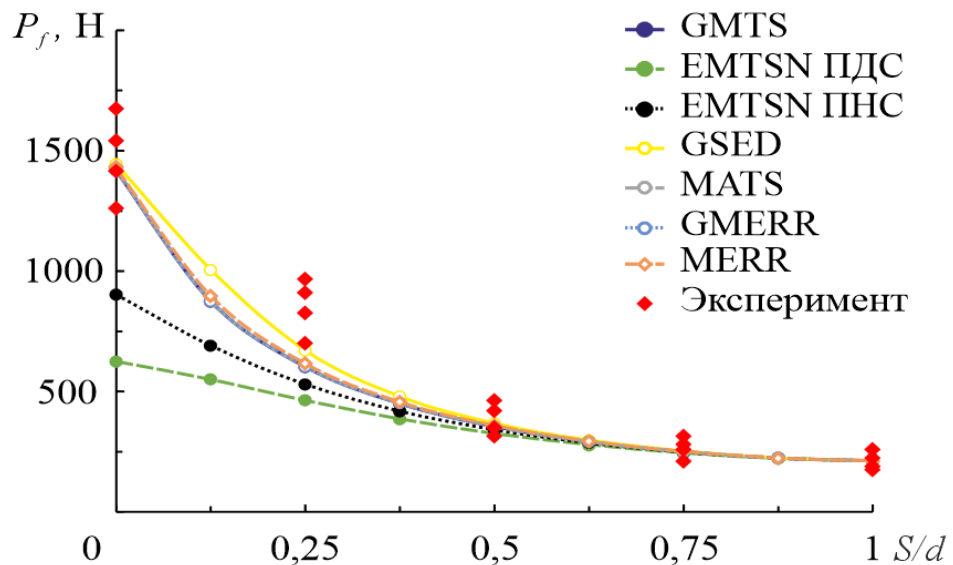


Рисунок 3.8 — К сравнению критических нагрузок, предсказанных вычислениями с использованием критериев хрупкого разрушения, с результатами лабораторных испытаний (лист 1 из 2)

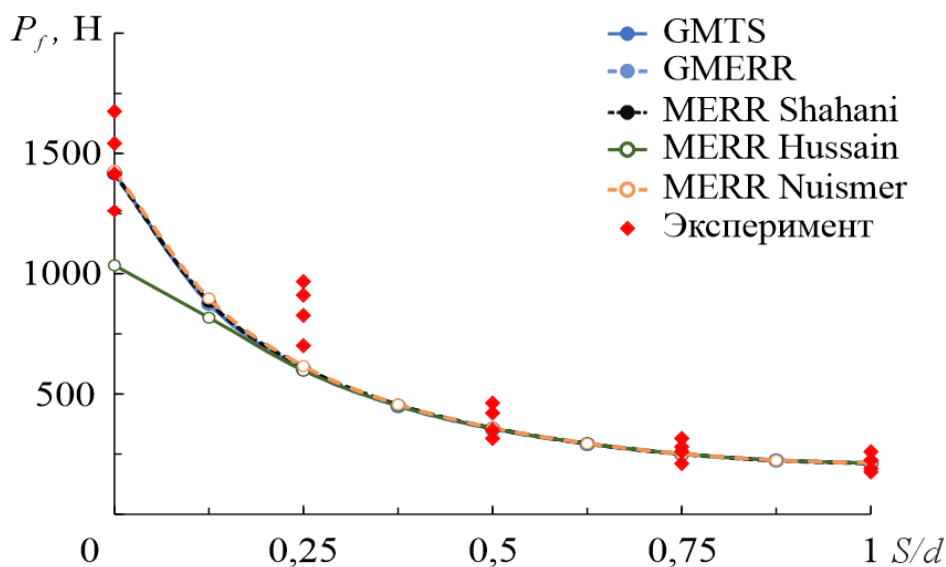


Рисунок 3.8 (лист 2 из 2)

Значения разрушающей нагрузки, отвечающие критерию MERR и условию смешанного нагружения (I+II), полученные из выражений (3.44) и (3.47), почти совпадают (рисунок 3.8б), к тому же, они близки и к величинам разрушающей нагрузки, рассчитанной по критериям GMERR и GMTS, учитывающим  $T$ -напряжения. Это говорит о небольшом влиянии первого несингулярного члена разложения в ряд Вильямса на разрушение испытательного образца данной конфигурации в условиях смешанного режима I+II. Оценка разрушающей нагрузки по критерию MERR с использованием выражений (3.46) в условиях чистого сдвига ( $S/d = 0$ ) является более консервативной, увеличение относительного сдвига трещины, то есть переход в режим I+II и приближение к практически чистому режиму I ( $S/d = 1$ ), приводит к хорошей согласованности с экспериментом.

### 3.5. Прогнозирование угла начала разрушения

Исследование влияния смешанности режимов нагружения и  $T$ -напряжения на угол инициации трещины имеет практический интерес. В

предыдущей главе для прогнозирования угла начала разрушения в образце эксцентричной балки с краевой трещиной был успешно применён обобщённый критерий максимальных окружных напряжений (GMTS-критерий), учитывающий  $T$ -напряжение. Следует отметить, что классический силовой критерий максимальных окружных напряжений (MTS-критерий), предложенный Эрдоганом и Си [55], показал хорошие результаты в прогнозировании угла инициации трещины в пластине с трещиной в условиях растяжения и чистого сдвига. Позже, Си использовал для предсказания угла инициации трещины критерий плотности энергии деформирования (SED-критерий) [95]. Он также показал зависимость угла инициации центральной трещины в пластине, прогнозируемого с помощью SED-критерия, для разных значений смешанности мод (I+II), от коэффициента Пуассона, отметив, что эта зависимость нуждается в экспериментальном подтверждении. Пластина подвергалась одноосному растяжению или сжатию. Смешанность режимов достигалась поворотом трещины относительно оси нагружения. При напряжённом состоянии близком к чистому сдвигу (режим II) обнаружено значительное влияние коэффициента Пуассона на угол начала разрушения, которое уменьшалось с увеличением доли I моды. В чистом I режиме разрушения влияние коэффициента Пуассона на угол начала разрушения отсутствовало.

В [73] авторы, применив EMTSN-критерий, сравнили предсказанные углы инициации трещины в балочных образцах с краевой трещиной, изготовленных из известняка и подвергаемых испытаниям на трёхточечный изгиб, с экспериментальными исследованиями и получили хорошее соответствие. Смешанность режимов нагружения достигалась путём наклона трещины относительно линии приложения нагрузки.

Критерий осреднённых максимальных тангенциальных напряжений для определения направления распространения трещин смешанного типа использовал в своей работе Ю.Г. Матвиенко [12]. Результаты прогнозирования сопоставлены с экспериментальными данными для трещин смешанного типа (I+II) в дисках из известняка с центральными наклонными трещинами в условиях

осевого сжатия [32]. Отмечено, что направления распространения трещины по критерию MATS находятся в хорошем соответствии с экспериментом.

В [63] авторы предсказывают угол инициации трещины смешанного типа в растягиваемой бесконечной пластине в условиях плоской деформации при помощи критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии деформации (MERR-критерий) и проводят сравнение с критерием максимальных растягивающих напряжений. Выявлено, что оба критерия дают близкий результат. Для верификации критерия успешно применён эксперимент по растяжению достаточно большого листа металлической фольги с криволинейной трещиной, позволяющей получить чистый II режим разрушения.

На рисунке 3.9 представлены углы начала разрушения, предсказанные с использованием различных критериев разрушения для образцов с геометрией, аналогичной испытанным:  $W = 15,5$  мм,  $t = 7$  мм,  $L = 50$  мм,  $d = 20$  мм. Относительная длина трещины  $a/W = 0,5$ , сдвиг трещины  $S$  варьируется от 0 до 20 мм с шагом 5 мм.

Углы начала разрушения, полученные с использованием силовых критериев GMTS и MATS, практически совпали для этого образца (рисунок 3.10). Факт незначительного отличия в углах инициации трещины, прогнозируемых при помощи классического MTS-критерия, не учитывающего влияние  $T$ -напряжения, и MATS-критерия, отмечен в работе [12]. В разделе 2.3 предыдущей главы показано, что обобщённый критерий максимальных тангенциальных напряжений точнее предсказывает экспериментальные углы инициации трещины в образцах эксцентричной балки с краевой трещиной, чем классический MTS-критерий. Установлено также, что оба критерия дают схожие результаты.

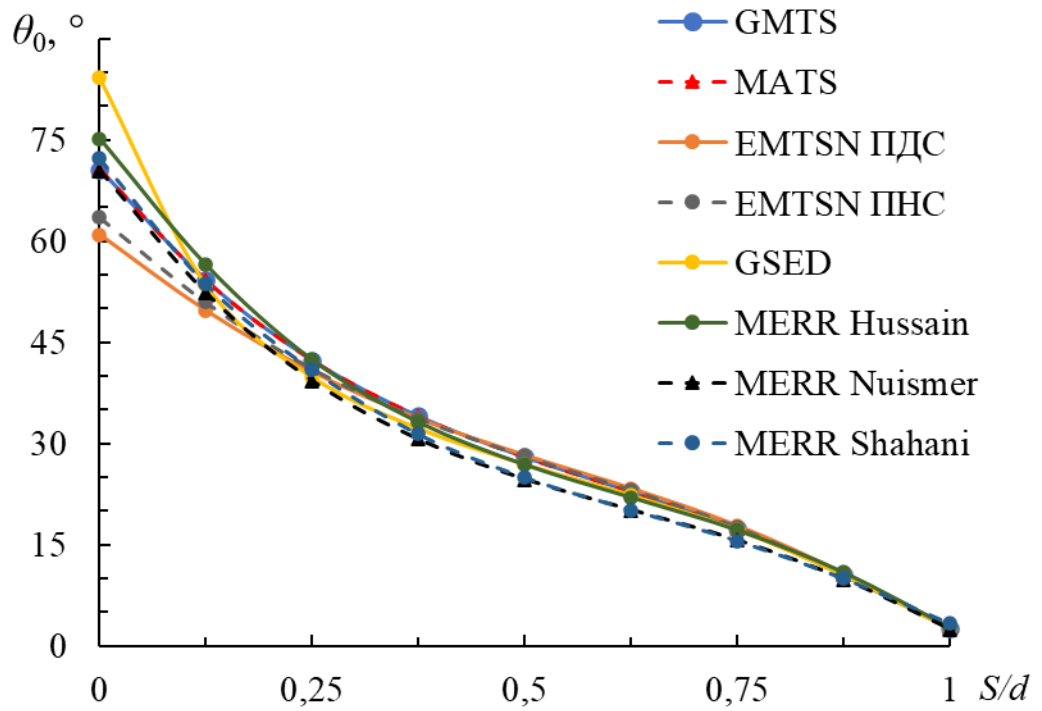


Рисунок 3.9 — Углы инициации трещины  $\theta_0$ , предсказанные с использованием различных критериев, в зависимости от сдвига трещины

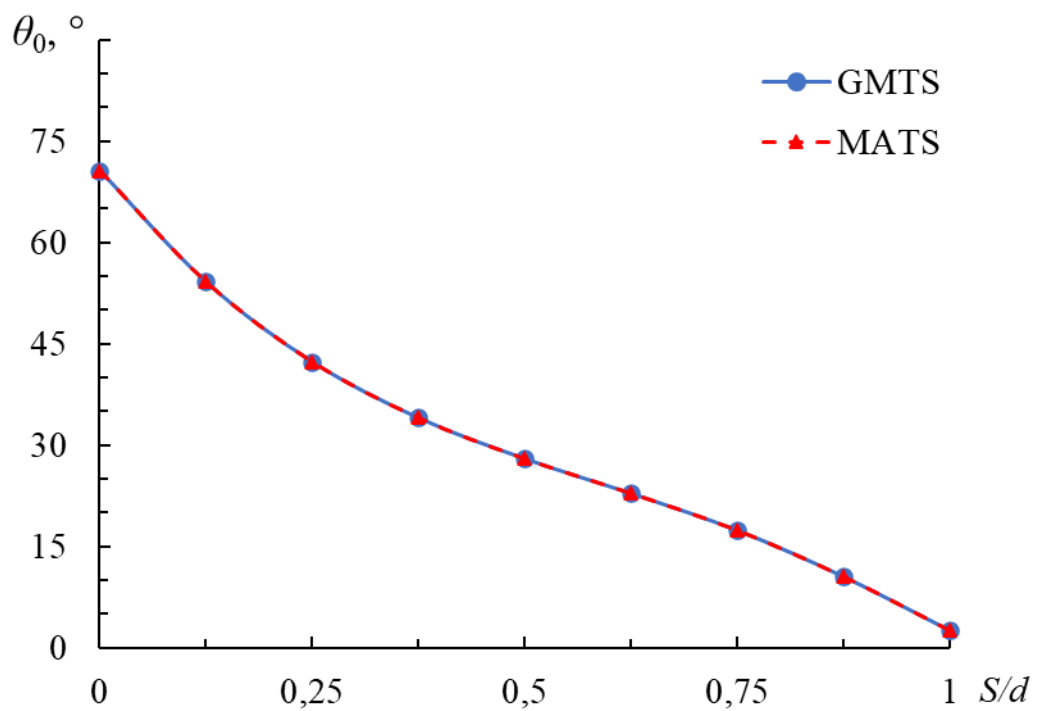


Рисунок 3.10 — Углы инициации трещины  $\theta_0$ , предсказанные с использованием критериев GMTS и MATS, в зависимости от сдвига трещины

Энергетические критерии GSED и MERR дают оценку угла начала разрушения, схожую с силовым GMTS (рисунок 3.11). Критерий GSED в условиях чистого II режима (при  $S/d = 0$ ) прогнозирует значение угла  $\theta_0$  выше остальных критериев, с увеличением отношения  $S/d$  оценка становится сопоставимой с другими.

Оценки угла инициации трещины по критерию MERR (рисунок 3.11), полученные с использованием коэффициентов (3.44) (на рисунке MERR Shahani) и (3.47) (на рисунке MERR Nuismer), близки друг к другу. Оценка угла начала разрушения при помощи критерия MERR с использованием коэффициентов (3.46) (на рисунке MERR Hussain) даёт значения несколько выше, чем при использовании выражений (3.44) и (3.47).

Критерий EMTSN при чистом режиме II даёт минимальный угол отклонения. С увеличением вклада I режима оценки EMTSN сближаются с прогнозами других критериев (рисунок 3.9).

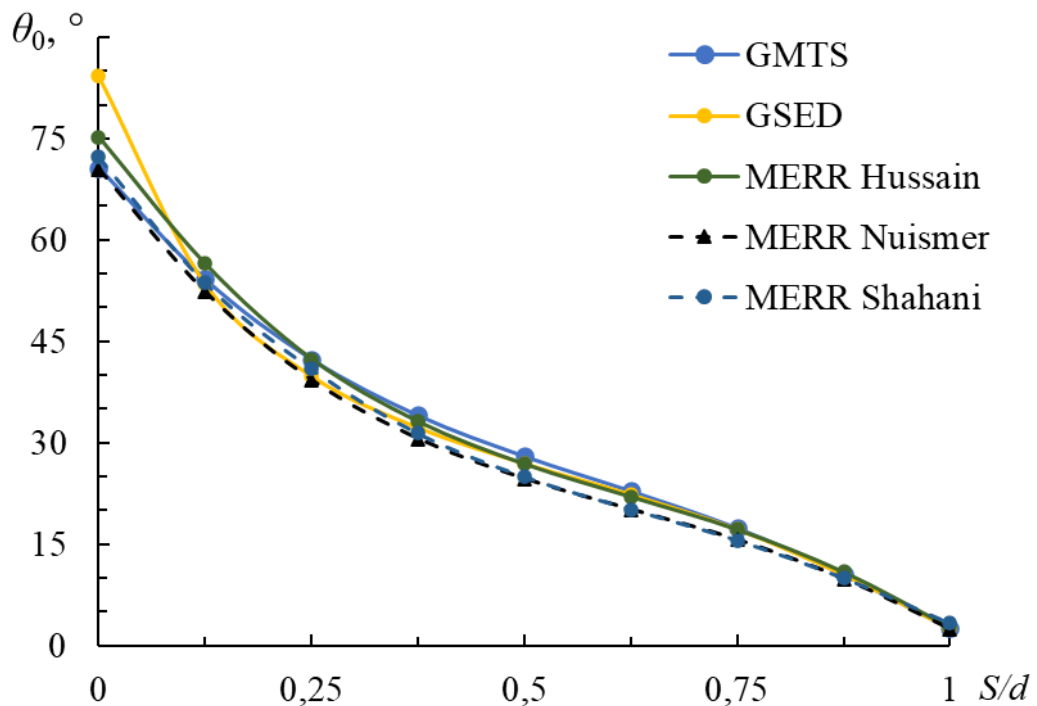


Рисунок 3.11 — Углы инициации трещины  $\theta_0$ , предсказанные с использованием критериев GMTS, GSED и MERR, в зависимости от сдвига трещины

На рисунке 3.12 представлены зависимости  $T_*(S/d)$  для трещин длиной  $a=0,5W$  и  $a=0,1W$  в образцах со следующей геометрией:  $W=15,5$  мм,  $t=7$  мм,  $L=50$  мм,  $d=20$  мм. Для короткой трещины ( $a=0,1W$ ) безразмерный параметр  $T_*$  принимает отрицательные значения, для  $a=0,5W$  параметр  $T_*$  принимает положительные значения.

Для иллюстрации влияния  $T$ -напряжения на угол инициации трещины на рисунках 3.13 и 3.14 приведены зависимости угла  $\theta_0$  от отношения  $S/d$ . Углы  $\theta_0$  определены при помощи классического SED-критерия, не учитывающего  $T$ -напряжение, и GSED-критерия, в котором  $T$ -напряжение учтено. Критериальное выражение для определения угла  $\theta_0$  по SED получается путём исключения из формулы (3.17) членов, содержащих  $T$ -напряжение.

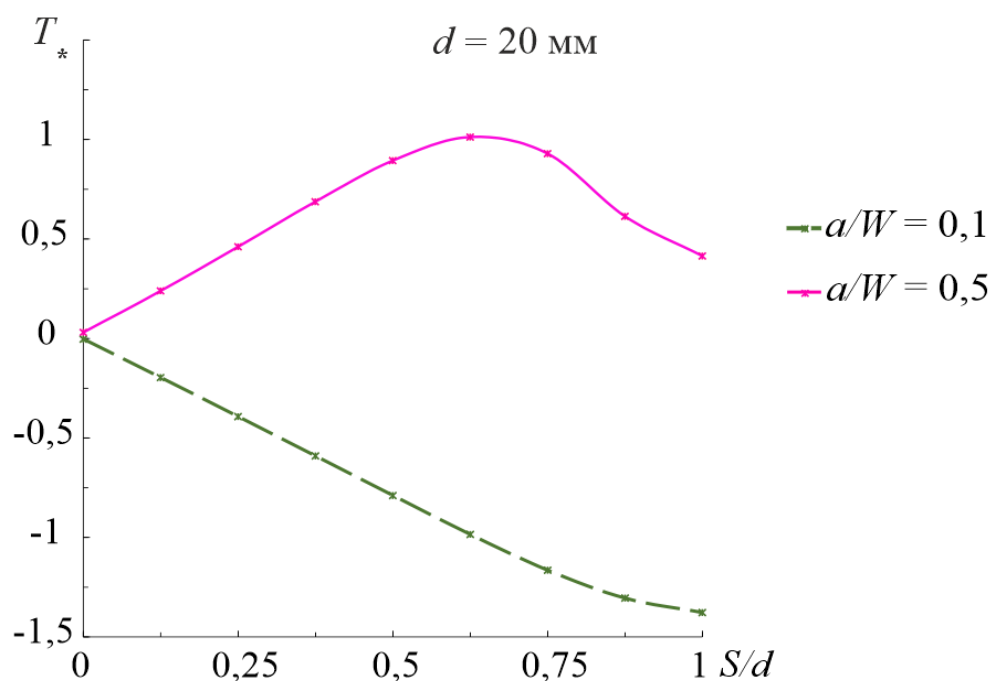


Рисунок 3.12 — Зависимости  $T_*(S/d)$  для трещин длиной  $a=0,5W$  и  $a=0,1W$

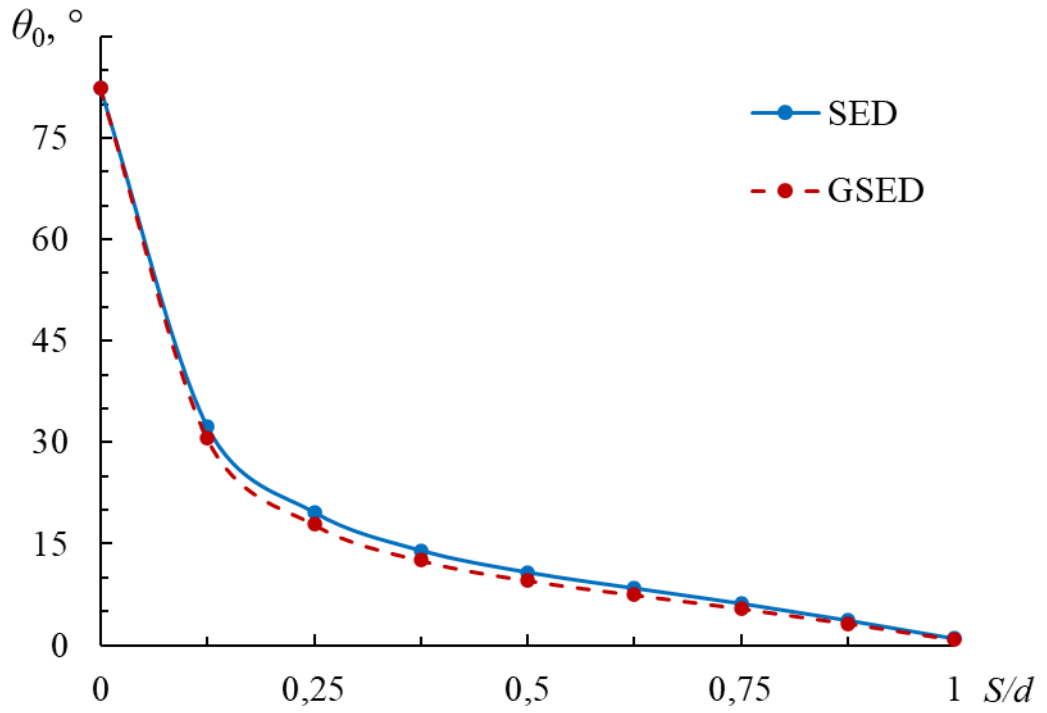


Рисунок 3.13 — Зависимости  $\theta_0(S/d)$  для трещины  $a = 0,1W$

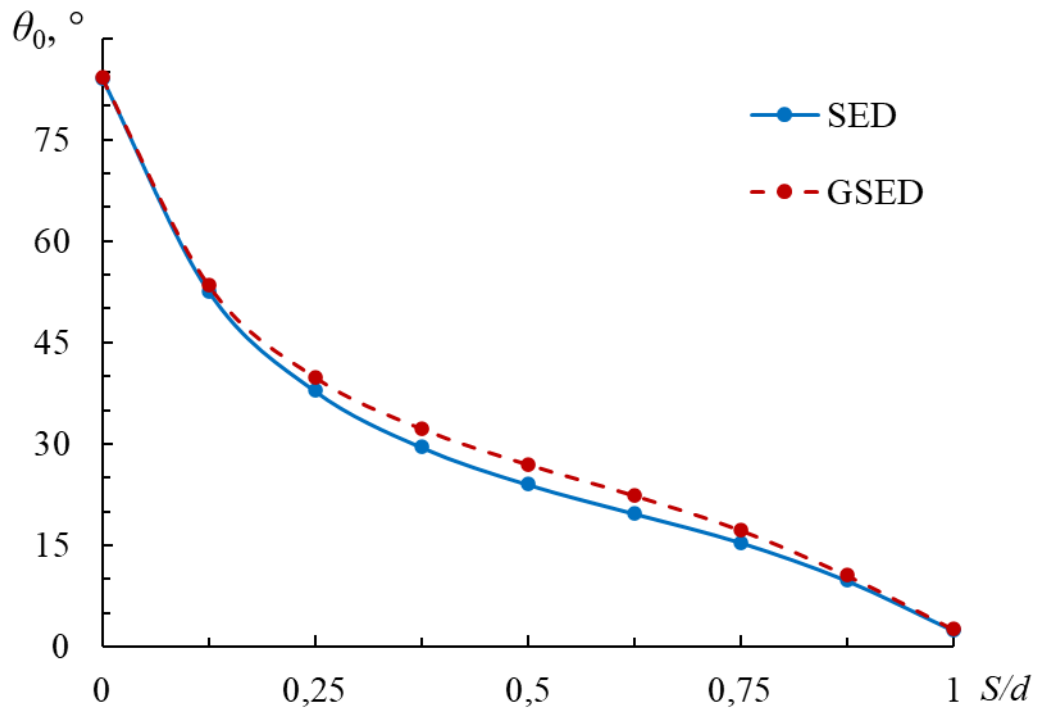


Рисунок 3.14 — Зависимости  $\theta_0(S/d)$  для трещины  $a = 0,5W$

Рисунки 3.13 и 3.14 наглядно иллюстрируют влияние знака  $T$ -напряжения на угол инициации трещины в балочном образце антисимметричного четырёхточечного изгиба. Очевидно, что отрицательные значения  $T$ -напряжения уменьшают прогнозируемый с помощью критерия GSED угол начала разрушения в условиях смешанного I+II режима по сравнению с прогнозом по SED-критерию. И наоборот, положительные  $T$ -напряжения увеличивают значения угла инициации трещины, предсказанного с помощью GSED-критерия, по сравнению с прогнозом критерия SED.

Среди представленных в разделе 3.3 выражений для прогнозирования предельного состояния тел с трещинами в условиях смешанного нагружения присутствуют два критерия разрушения, зависящие от коэффициента Пуассона: обобщённый критерий плотности энергии деформирования и расширенный критерий максимальных окружных деформаций. На рисунках 3.15, 3.16 представлены зависимости углов инициации трещины от отношения  $S/d$ , предсказанных с помощью критериев EMTSN и GSED, для нескольких значений коэффициента Пуассона:  $\nu = 0,15$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\nu = 0,499$ .

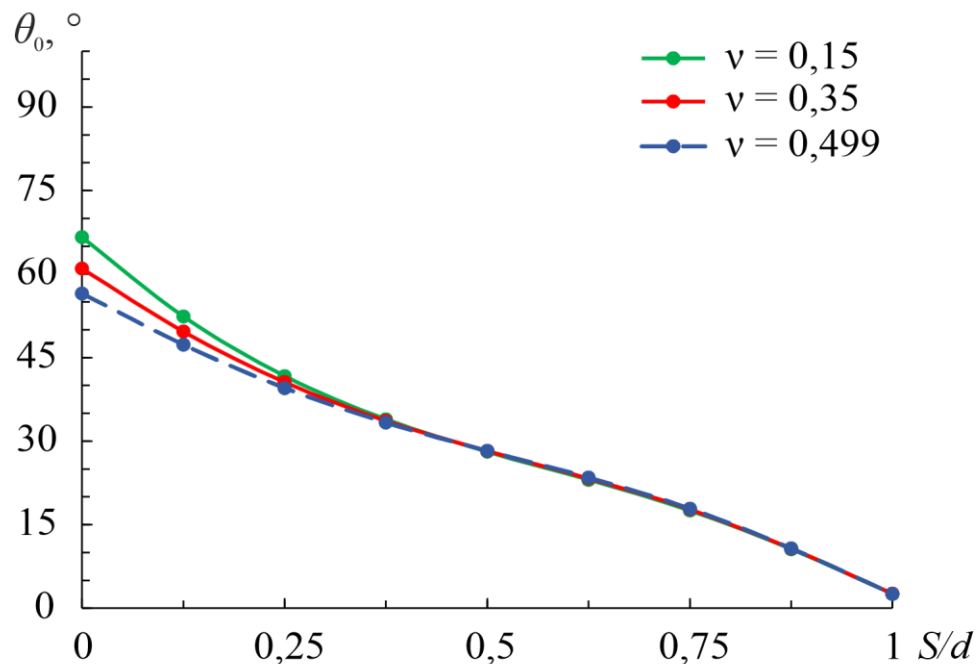


Рисунок 3.15 — Зависимости  $\theta_0(S/d)$  по EMTSN-критерию для  $\nu = 0,15$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\nu = 0,499$

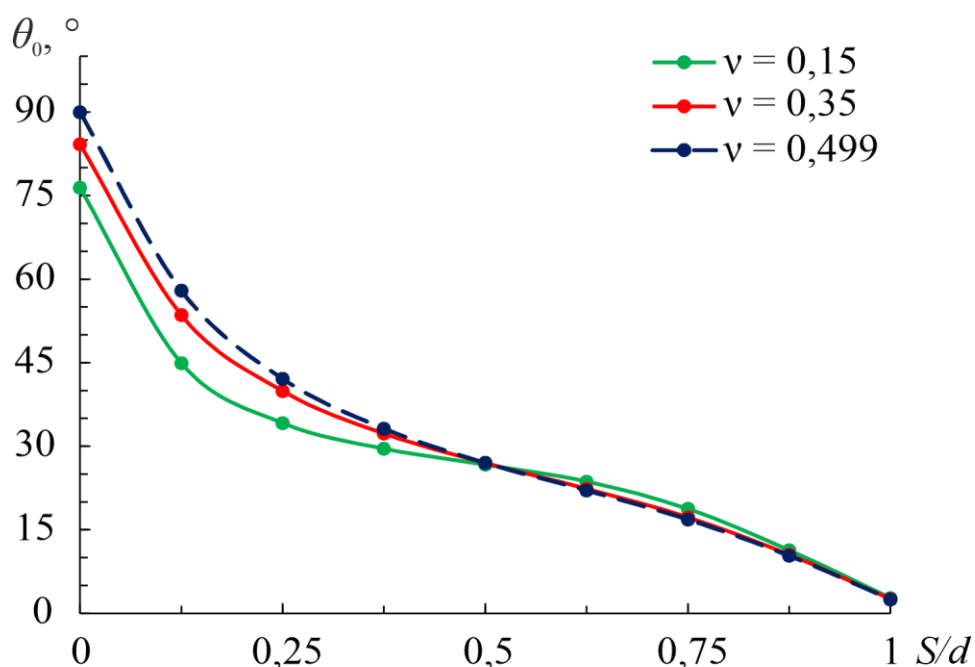


Рисунок 3.16 — Зависимости  $\theta_0(S/d)$  по GSED-критерию для  $\nu = 0,15$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\nu = 0,499$

Из рисунка 3.15 видно, что с увеличением коэффициента Пуассона угол инициации трещины, оцениваемый EMTSN-критерием в области, близкой к чистому режиму II ( $S/d = 0$ ), снижается. По мере перехода от смешанного I+II режима к чистому режиму I ( $S/d = 1$ ) влияния коэффициента Пуассона на угол начала разрушения заметно уменьшается и в области действия чистого режима I практически отсутствует.

Зависимость критерия GSED от коэффициента Пуассона (рисунок 3.16) показывает обратный результат по сравнению с EMTSN-критерием: с увеличением  $\nu$  происходит увеличение прогнозируемого угла инициации трещины в области близкой к чистому второму режиму. При приближении к режиму I влияние коэффициента Пуассона практически исчезает.

Рисунок 3.17 иллюстрирует влияние коэффициента Пуассона на угол инициации трещины, рассчитанный по критериям SED и GSED. При уменьшении  $\nu$  разница между углами, предсказанными GSED и SED в области действия смешанного режима нагружения, возрастает.

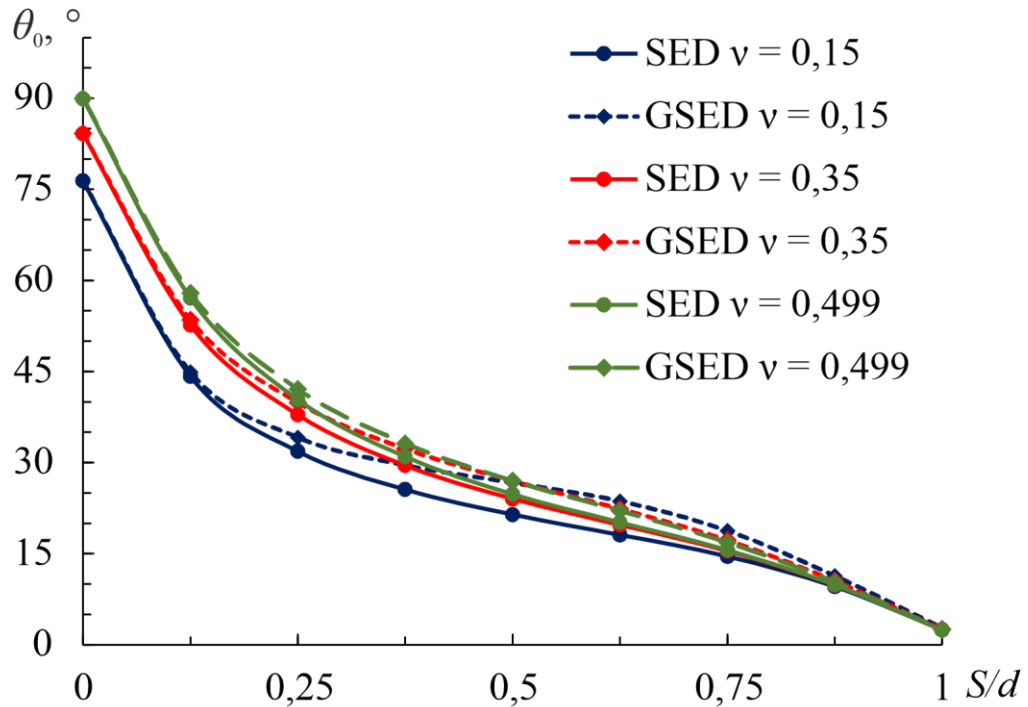


Рисунок 3.17 — К сравнению влияния величины коэффициента Пуассона на угол инициации трещины, рассчитанный по критериям SED и GSED

### 3.6. Выводы по главе 3

В главе 3 предложен образец в виде эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, подвергнутый антисимметричному четырёхточечному нагружению. Смешанный режим разрушения I+II генерировался путем сдвига трещины относительно середины образца. Методом конечных элементов получены коэффициенты интенсивности напряжений для I и II режимов разрушения, а также  $T$ -напряжения для различных геометрических параметров образца. В процессе моделирования варьировались относительный сдвиг трещины  $S/d$  и относительная длина трещины  $a/W$ .

Построены графики зависимостей безразмерного параметра  $T_*$  от относительного сдвига трещины и от относительной длины трещины для фиксированного значения  $d = 22$  мм. Установлено, что при  $S/d = 0$  значение  $T_*$  близко к нулевому для всего диапазона длин трещины. Для трещин с  $a/W \leq 0,3$  значения  $T_*$  отрицательны; смена знака на положительный происходит в

диапазоне относительных длин трещины  $0,3 \div 0,5$  и зависит от величины отношения  $S/d$ . С увеличением сдвига трещины относительно середины образца параметр  $T_*$  растёт и, как следствие, увеличивается его влияние на сопротивление разрушению хрупких и квазихрупких материалов в смешанном режиме I+II. Помимо этого, для анализа роли  $T$ -напряжения в процессе разрушения при смешанном режиме (I+II) использован безразмерный параметр двухосности  $B$ , который является функцией геометрии образца и зависит от схемы нагружения. Отмечено, что коэффициент двухосности для  $S/d = 0$  (чистый режим II) и различных длин трещины имеет значения, близкие к нулевым. С ростом  $S/d$  коэффициент  $B$  достигает величины, которая остаётся практически постоянной для всего диапазона длин трещин, что говорит о его нечувствительности к сдвигу трещины.

На предложенных образцах проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме (I+II). Для каждого вида нагружения и геометрии испытано по 3–5 одинаковых образцов. Опыты проводились при статической нагрузке до полного разрушения образцов. Для прогнозирования как направления разрушения, так и величины критической нагрузки в вычислительных экспериментах использовались критерии разрушения GMTS, EMTSN, GSED, MATS, MERR и GMERR. Критерии GMTS, GSED, MATS, MERR и GMERR продемонстрировали хорошее соответствие данных численного расчёта экспериментальным критическим нагрузкам. Наиболее консервативный прогноз по критической нагрузке даёт критерий EMTSN для значений относительного сдвига трещины  $S/d$  в диапазоне от 0 до 0,5, что соответствует параметрам общепринятого инженерного подхода при оценке разрушения конструкций с запасом по прочности.

Построены зависимости углов инициации трещины по различным критериям разрушения от отношения  $S/d$ . Проанализировано влияние знака  $T$ -напряжения на прогноз направления начала разрушения.

Проведён анализ влияния коэффициента Пуассона на оценку угла инициации трещины по деформационному критерию EMTSN и энергетическому критерию GSED. Установлено, что в условиях смешанного нагружения (режим I+II) разница между углами, предсказанными критериями GSED и SED, возрастает при уменьшении  $\nu$ .

Учитывая хорошую согласованность полученных экспериментальных результатов и результатов, прогнозируемых при помощи расчётов по представленным здесь критериям разрушения, испытательный образец данной конфигурации может быть тестовым при исследовании разрушения хрупких и квазихрупких материалов в чистом II и смешанном I+II режимах. При значении  $S/d \rightarrow 1$  происходит приближение к чистому I режиму, но сохраняется незначительное влияние II режима, поэтому для изучения разрушения в чистом режиме I наиболее подходящей схемой нагружения является трёхточечный изгиб.

#### 4. Анализ разрушения бразильского диска с круглым отверстием в смешанном режиме

В этой главе рассматривается образец бразильского диска с центральным круглым отверстием [66, 101]. Диск содержит две радиальные трещины на внутреннем крае, которые можно поворачивать, чтобы получить весь диапазон смешанных режимов разрушения. Напряжённо-деформированное состояние такого образца сначала анализируется численно методом конечных элементов для расчета параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений и  $T$ -напряжений) при различной длине трещины и различных диаметрах отверстий в различных смешанных режимах нагружения. Затем проверяется практическая пригодность предложенного образца путём проведения серии экспериментов по определению вязкости разрушения в смешанном режиме. Толщина образца выбирается такой, чтобы были обеспечены условия плоской деформации. Для прогнозирования направления разрушения и критической нагрузки используются три критерия разрушения: обобщённый критерий максимальных растягивающих напряжений (GMTS), расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN) и обобщённый критерий плотности энергии деформирования (GSED).

##### 4.1. Конечно-элементный анализ

Геометрия и схема нагружения бразильского диска с центральным отверстием представлены на рисунке 4.1. Образец представляет собой диск с отверстием в центре и двумя внутренними краевыми радиальными трещинами. На этом рисунке  $P$  — прикладываемая нагрузка,  $R$  — радиус бразильского диска,  $r$  — радиус отверстия,  $t$  — толщина диска. Краевые трещины длиной  $a$  наклонены к направлению вертикальной сжимающей нагрузки под углом  $\beta$ . Изменяя угол ориентации  $\beta$ , можно получить различные комбинации I и II режимов разрушения. Действительно, если угол  $\beta$  равен нулю, то раскрытие

берегов трещин происходит без какого-либо сдвига и наблюдается чистая I мода, изменение ориентации трещины приведет к возникновению смешанного режима I+II растяжения и сдвига.

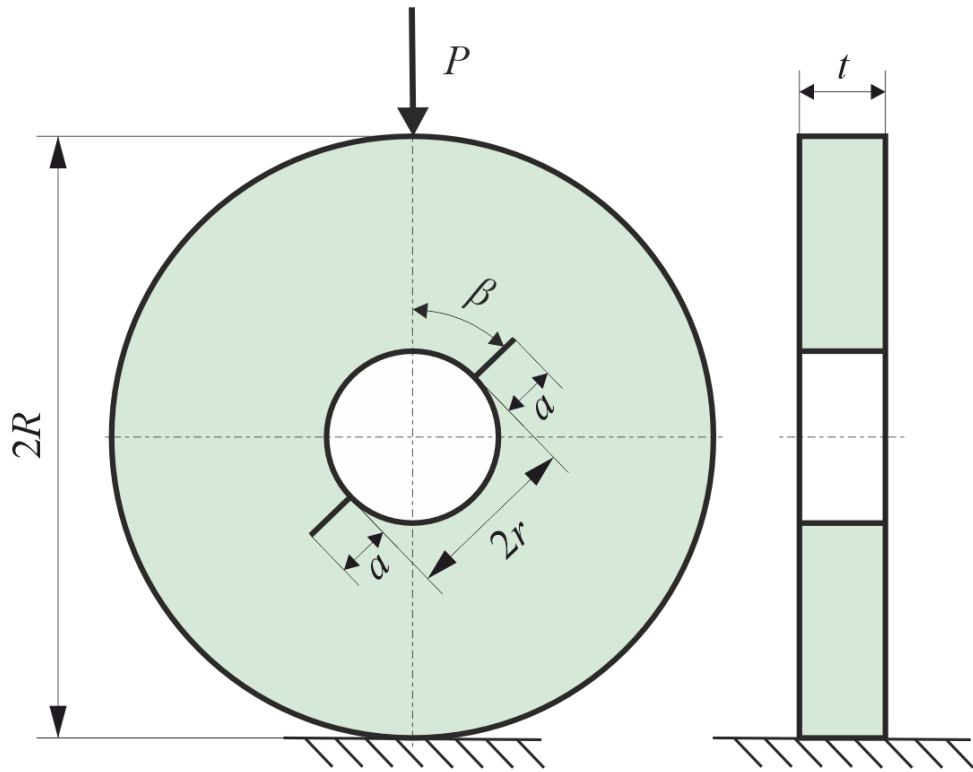


Рисунок 4.1 — Геометрия и схема нагружения образца

Вводя интенсивность нагрузки  $\sigma = P/(\pi ht)$ , где  $h = R - r$ , можно записать выражения для коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и для  $T$ -напряжения в виде:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{h}, \frac{r}{R}, \beta \right), \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} Y_{II} \left( \frac{a}{h}, \frac{r}{R}, \beta \right), \quad T = \sigma T_* \left( \frac{a}{h}, \frac{r}{R}, \beta \right), \quad (4.1)$$

где  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  — безразмерные коэффициенты интенсивности напряжений, а  $T_*$  — безразмерное  $T$ -напряжение, зависящие от относительной длины трещины  $a/h$ , относительного радиуса  $r/R$  и от угла ориентации трещины  $\beta$ . Как уже отмечалось ранее,  $T$ -напряжение, то есть первый несингулярный член асимптотики поля напряжений вблизи вершины трещины, наряду с коэффициентами интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ , также играет важную

роль при смешанном разрушении. Вспомним, что  $T$ -напряжение отражает степень ограничения деформации перед фронтом трещины, действует в плоскости трещины в направлении её возможного распространения и может быть как растягивающим, так и сжимающим.

Чтобы определить критические коэффициенты интенсивности напряжений (соответствующие значениям вязкости разрушения по I и II модам), а также изучить разрушение образца при смешанной нагрузке, необходимо рассчитать три геометрических параметра разрушения ( $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$ ) для различных геометрических условий и условий нагружения. Для этой цели применяется программное обеспечение MSC.Marc. Для каждой конечно-элементной модели образца используется в среднем 90 000 изопараметрических 8-узловых элементов с квадратичной аппроксимацией геометрии и перемещений. На рисунке 4.2 представлена типичная КЭ модель бразильского диска с двумя трещинами. С целью повышения точности результатов область у вершины каждой трещины дискретизируется при помощи элементов сингулярного типа. Сингулярный элемент конструируется путем сдвига промежуточного узла на четверть длины ребра элемента к вершине трещины. Длина кромки элемента у вершины трещины равняется 0,025 мм, что составляет порядка  $1/500 \div 1/200$  длины трещины. Материал моделей принят линейно-упругим изотропным со следующими механическими свойствами: модуль Юнга  $E = 2,9$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,35$ .

Геометрические параметры  $a/h$ ,  $r/R$  и угол наклона  $\beta$  варьировались в широком диапазоне значений. Рассматривались модели следующей геометрии:  $R = 19,5$  мм,  $t = 8,5$  мм, радиус отверстия  $r$  варьировался от 3 мм до 10,5 мм, а относительная длина трещины  $a/h$  варьировалась от 0,1 до 0,7. Угол ориентации  $\beta$  менялся в пределах от  $0^\circ$  до  $32^\circ$ . В результате проведения статического КЭ анализа с приложением единичной нагрузки  $P = 1$  Н для каждого анализируемого образца были определены соответствующие значения  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ .

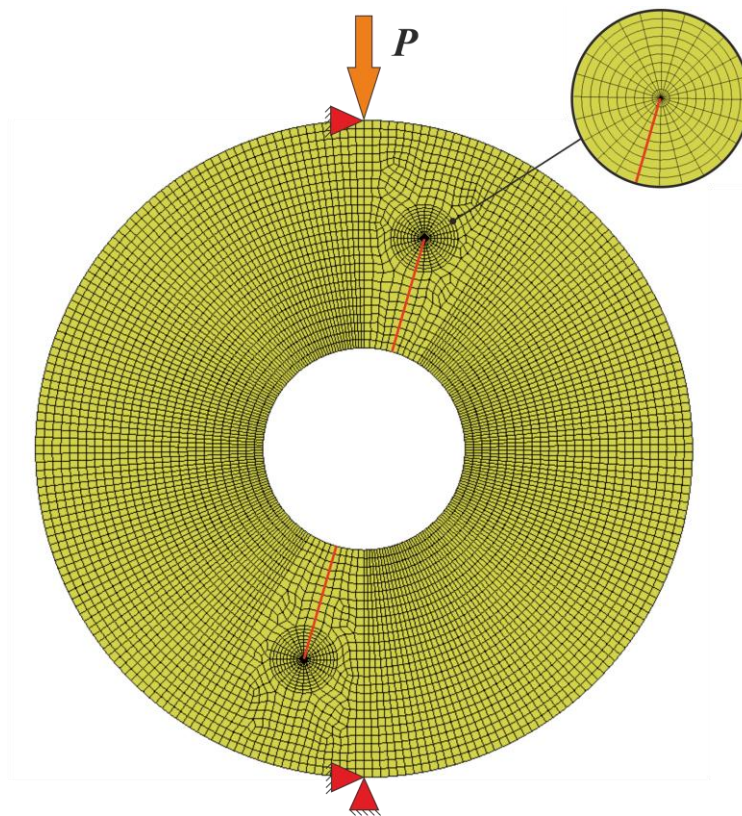


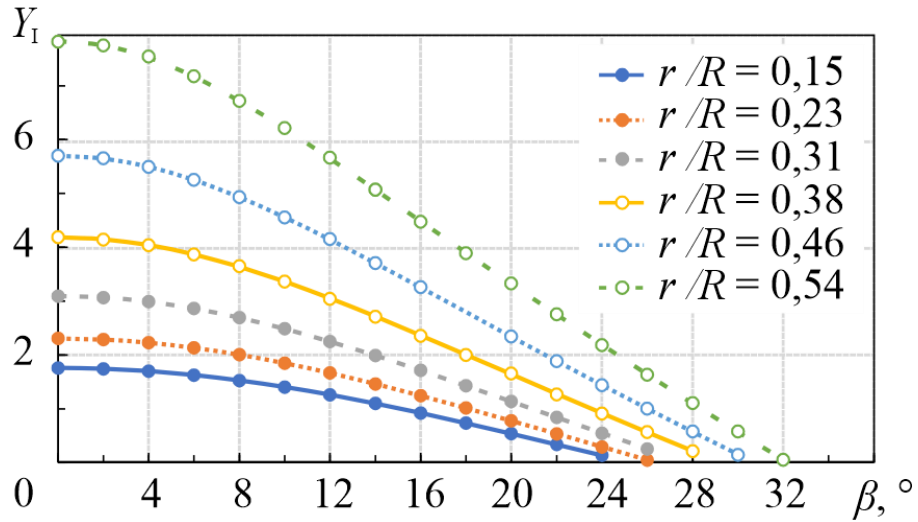
Рисунок 4.2 — Характерная КЭ модель бразильского диска (треугольниками со штриховкой показаны ограничения её перемещений); на выноске область вершины трещины в увеличенном масштабе

Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  вычислялись с помощью инвариантного  $J$ -интеграла, который для случая плоской деформации связан с ними соотношением  $E'J = K_I^2 + K_{II}^2$ , где  $E' = E/(1-\nu^2)$ . В процедуре численного интегрирования контурный  $J$ -интеграл преобразуется в интеграл по площади, интегрирование ведется по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычисляются внутри элементов в точках гауссовых квадратур.

Для определения влияния геометрии образца на его напряжённое состояние и получения всего спектра смещения режимов I+II было проанализировано 615 КЭ моделей. Результаты приведены на рисунках 4.3 и 4.4, где представлены полученные зависимости  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  от угла  $\beta$  для различных геометрических конфигураций модели. Видно, что параметр  $Y_I$  уменьшается с увеличением угла ориентации трещины. Чистый режим I имеет место, когда

$\beta = 0^\circ$ . Безразмерный параметр  $Y_{II}$  сначала растёт вслед за углом  $\beta$ , а затем несколько уменьшается.

a)



б)

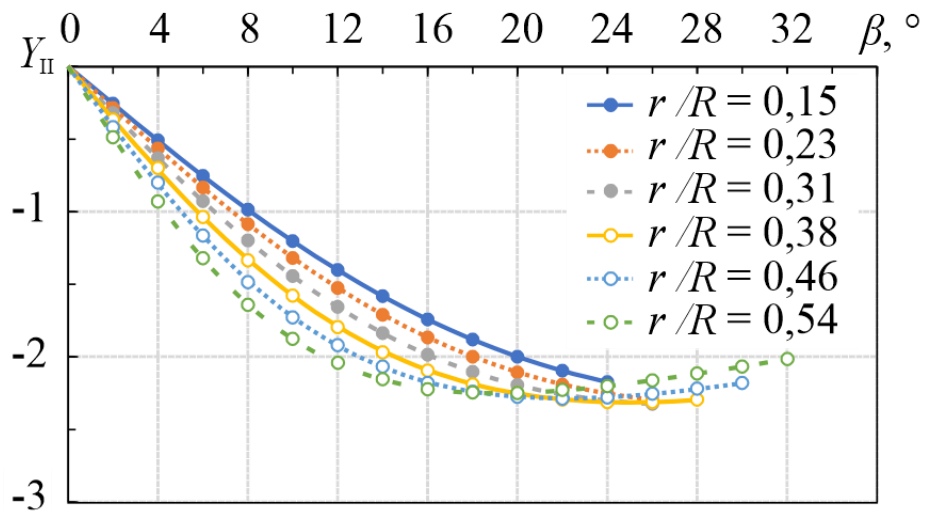


Рисунок 4.3 — Зависимости  $Y_I(\beta)$  (а),  $Y_{II}(\beta)$  (б) при постоянной относительной длине трещины  $a/h = 0,4$  и разном относительном радиусе  $r/R$

На рисунке 4.3а можно заметить, что с увеличением внутреннего радиуса  $r$  модели при фиксированном отношении  $a/h = 0,4$  происходит значительный рост геометрического параметра  $Y_I$ , что свидетельствует об усилении влияния режима I на напряжённое состояние в вершине трещины. Необходимо отметить,

что чем больше  $r$ , тем больше и угол  $\beta$ , при котором достигается чистый режим II.

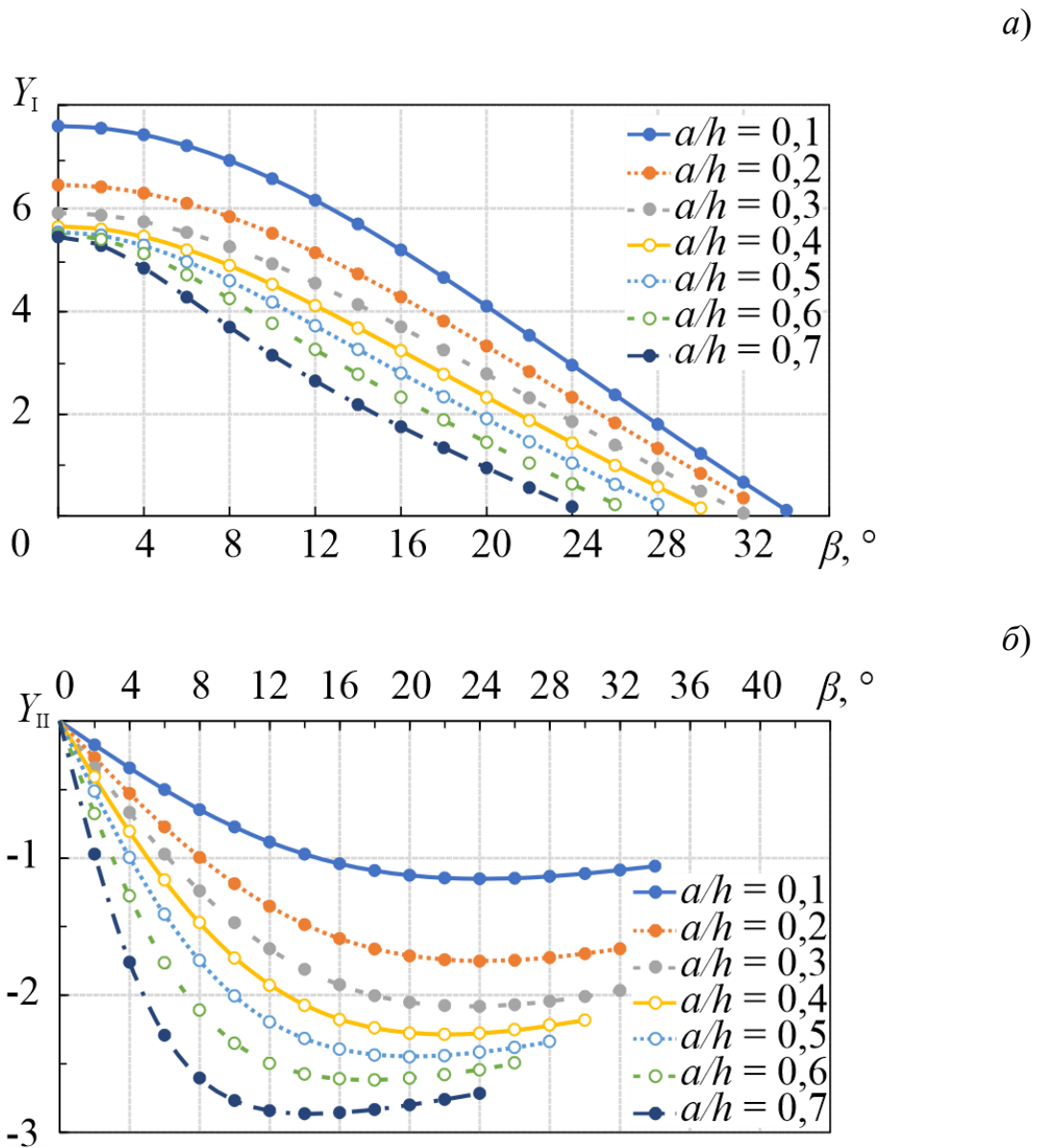


Рисунок 4.4 — Зависимости  $Y_I(\beta)$  (а),  $Y_{II}(\beta)$  (б) при постоянном относительном радиусе  $r/R=0,46$  и разной относительной длине трещины  $a/h$

На рисунке 4.4б видно увеличение влияния поперечного сдвига на напряжённое состояние в вершине трещины с ростом её длины при фиксированном внутреннем радиусе модели. При этом наблюдается уменьшение значения угла ориентации трещины, при котором имеет место чистый режим II ( $Y_I=0$ , рисунок 4.4а). Из анализа рисунков 4.3а и 4.4а следует вывод, что

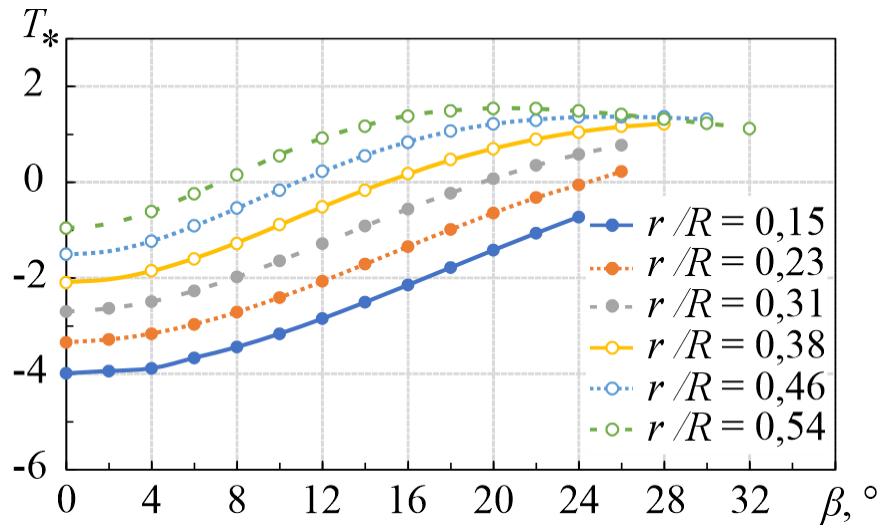
безразмерный параметр  $Y_I$  становится равным нулю при достаточно большом угле наклона трещины  $\beta$ , что позволяет использовать этот тип образца для проведения серии испытаний на разрушение для всего диапазона смешивания мод I и II.

Таким образом, для различных возможных комбинаций геометрии образца угол  $\beta$  принимает разные максимальные значения, что говорит о достижении чистого II-го режима нагружения, при котором  $Y_I = 0$ . Дальнейшее увеличение угла  $\beta$  нецелесообразно, поскольку значения параметра  $Y_I$  становятся отрицательными.

Вычисление  $T$ -напряжения, как и в предыдущих главах, производится по смещениям (формулы (2.6) и (2.8)), так как в случае расчета по напряжениям происходит потеря точности по причине того, что компоненты тензора напряжений рассчитываются внутри элементов, а их значения в узлах находятся путем экстраполяции.

Результаты расчётов приведены на рисунке 4.5 в виде графиков зависимости  $T_*$  от угла ориентации трещины  $\beta$  для различных значений  $r/R$  и  $a/h$ . Как видно из рисунка 4.6а, при малых радиусах отверстия диска знак  $T$ -напряжения не меняется и является отрицательным. С увеличением внутреннего радиуса  $T$ -напряжения переходят в положительную область при меньших значениях угла ориентации трещины, приближаются к чистому режиму II и всегда имеют положительный знак. Из рисунка 4.6б легко увидеть, что с ростом величины отношения  $a/h$  при фиксированном значении  $r/R = 0,46$  также наблюдается уменьшение угла ориентации трещины, при котором  $T$ -напряжения становятся положительными. Большее значение безразмерного параметра  $T_*$  в образце указывает на то, что  $T$ -напряжение в условиях смешанного разрушения начинает играть более важную роль. Следовательно, величина и знак  $T$ -напряжения могут оказывать существенное влияние на сопротивление разрушению хрупких или квазихрупких материалов в смешанном режиме (I+II).

a)



б)

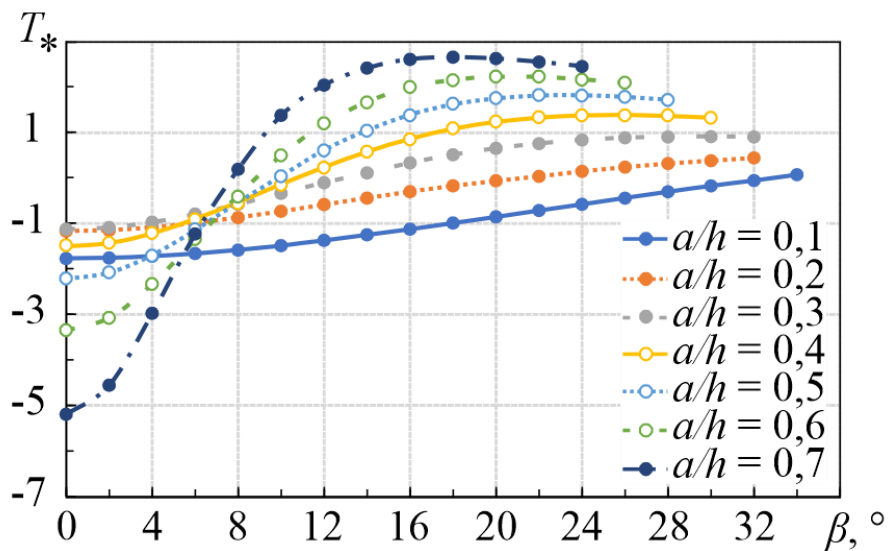


Рисунок 4.5 — Зависимости  $T_*(\beta)$ : относительная длина трещины постоянна ( $a/h=0,4$ ), а значения  $r/R$  изменяются (а); зафиксирован относительный радиус ( $r/R=0,46$ ), а величина  $a/h$  переменна (б)

Для данного типа образца при отношении  $a/h=0,1$  (короткая трещина)  $T$ -напряжения принимают отрицательные значения практически во всём диапазоне изменения угла ориентации трещины  $\beta$  для всех отношений  $r/R$  (рисунок 4.6а). Аналогичная картина наблюдается при малом радиусе центрального отверстия ( $r/R=0,15$ ): безразмерный параметр  $T_*$  отрицательный практически во всём диапазоне изменения угла  $\beta$  и для всех значений отношения  $a/h$  (рисунок 4.6б). То есть для таких геометрий образца  $T$ -напряжения

практически всегда сжимающие. Но для коротких трещин абсолютная величина  $T$ -напряжений в режиме I значительно меньше их абсолютной величины при малом радиусе центрального отверстия.

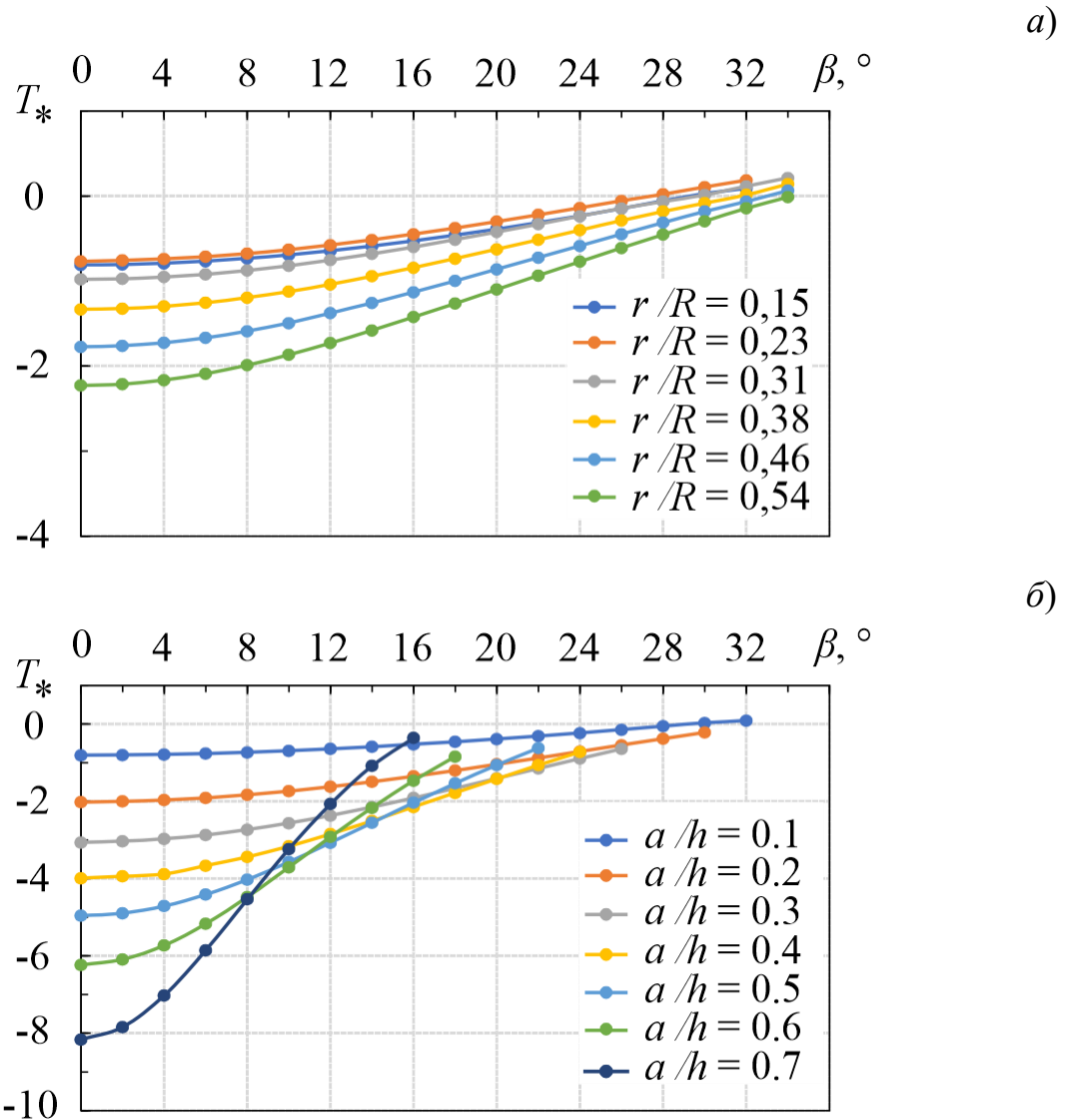


Рисунок 4.6 — Зависимости  $T_*(\beta)$ : относительная длина трещины постоянна ( $a/h=0,1$ ), а значения  $r/R$  изменяются (a); зафиксирован относительный радиус ( $r/R=0,15$ ), а величина  $a/h$  переменна (б)

#### 4.2. Экспериментальные исследования вязкости разрушения

С целью изучения практической применимости дискового образца с центральным отверстием, была проведена серия испытаний на смешанное разрушение. Образцы были изготовлены из эбонита.

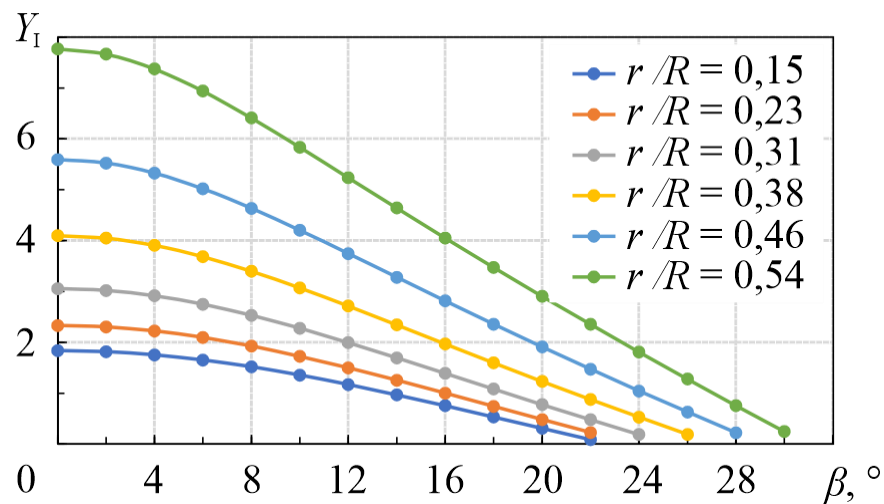
Эбонит — это твёрдая разновидность резины, лишённая характерной эластичности, тёмно-бурого или чёрного цвета, реже с песочным оттенком. Он обладает высокими электроизоляционными свойствами, благодаря чему используется при изготовлении сложных точных электроприборов и для изоляции проводников электрического тока. Этот материал представляет собой натуральный или синтетический каучук, прошедший процесс вулканизации после смешивания с серой. Под воздействием температуры смесь твердеет. Качество эбонита зависит от степени его чистоты. Лучшим считается материал, состоящий только из серы и каучука. Оптимальное содержание серы в эбоните составляет 30–50% в расчёте на массу каучука. Чем выше содержание серы, тем твёрже и прочнее материал, однако повышается сложность его обработки.

По твёрдости материал можно сравнить с костью. По этой причине изделия из него обладают высокой устойчивостью к истиранию. Благодаря твёрдости обработка эбонита мало чем отличается от работы с пластмассами. Его можно резать, пилить, затачивать, шлифовать, полировать, сверлить. Эбонит отличается не только влагостойкостью, но и полным отсутствием гигроскопичности. При погружении в воду эбонит совсем её не впитывает. Кроме того, он не пропускает газы. Это позволяет использовать материал для изготовления корпусов аккумуляторов. Эбонит в целом характеризуется инертностью. Он не взаимодействует с другими веществами, с которыми контактирует. Это исключает изменение плотности химически активных веществ. Трубки из него используются для соединения сосудов, содержащих химические реагенты.

Путём разрезания из цилиндрического эбонитового стержня при помощи высокоскоростной циркулярной пилы было изготовлено в общей сложности 30 дисковых образцов. Для создания трещин в образцах с помощью электрической лобзиковой пилы был сделан надрез шириной 0,5 мм и длиной 8,25 мм. Изготовленные образцы имели следующие размеры:  $R=19,5$  мм,  $r=3$  мм,  $t=8,5$  мм и  $a=8,25$  мм. Таким образом, относительная длина трещины в образцах составила  $a/h=0,5$ , а относительный радиус  $r/R=0,15$ .

Безразмерные параметры  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  и  $T_*$ , соответствующие экспериментальным условиям, и полученные при помощи метода конечных элементов, показаны на рисунках 4.7 и 4.8. Можно заметить, что при угле ориентации трещины  $\beta$ , равном примерно  $22^\circ$ , параметр  $Y_I$  становится равным 0, и возникают условия чистого II режима. Поэтому для исследования перехода от чистого I режима разрушения к чистому II режиму углы ориентации трещины, при испытаниях, составляли  $0^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, 20^\circ$ . Чтобы оценить дисперсию результатов, для каждого угла ориентации трещины было испытано по 5 идентичных образцов.

а)



б)

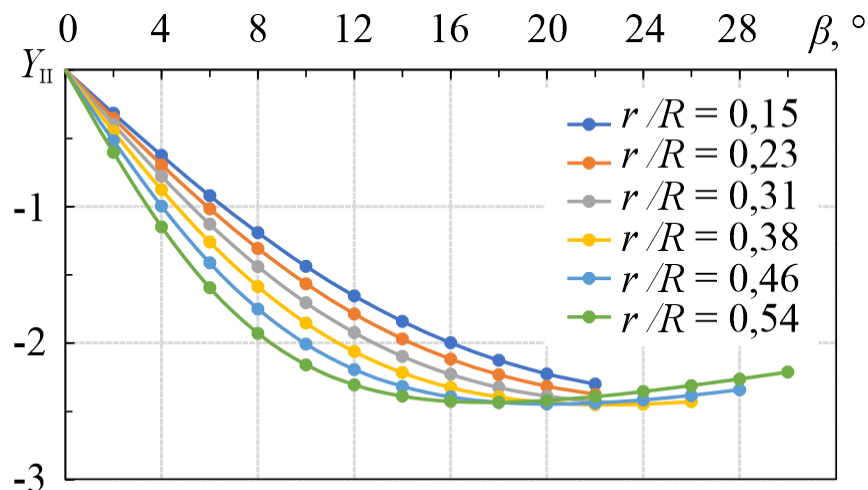


Рисунок 4.7 — Зависимости  $Y_I(\beta)$  (а),  $Y_{II}(\beta)$  (б) при постоянной относительной длине трещины  $a/h=0,5$  и разном относительном радиусе  $r/R$

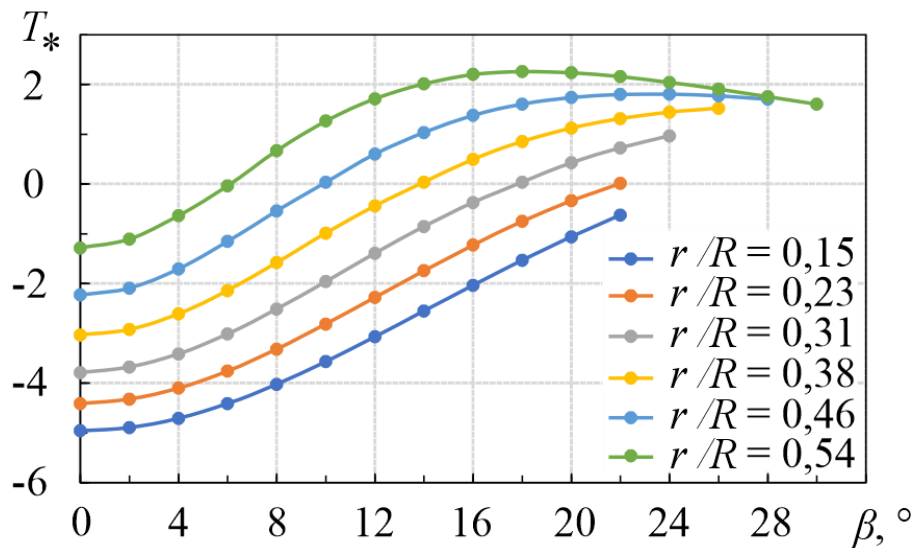


Рисунок 4.8 — Зависимости  $T_*(\beta)$  при постоянной относительной длине трещины  $a/h=0,5$  и разном относительном радиусе  $r/R$

Испытания на разрушение проводились при статической нагрузке при комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин. Были проведены предварительные эксперименты по одноосному растяжению, в ходе которых были определены модуль Юнга, коэффициент Пуассона и предел прочности материала на растяжение. В ходе отдельного испытания на симметричный трёхточечный изгиб был определён критический КИН эбонита. Механические свойства материала представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Механические свойства материала

Параметр Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	$\sigma_t$ , МПа	$K_{Ic}$ , МПа·м <sup>1/2</sup>
Эбонит	2,9	0,35	52	1,56

На рисунке 4.9 показаны разрушенные образцы с разными углами наклона исходных трещин. Разрушение всех образцов начинается с вершины трещины. По мере распространения трещины её траектория отклоняется от направления исходной трещины и всегда заканчивается в точке приложения нагрузки. В зависимости от режима (т. е. угла ориентации исходной трещины) при разрушении образцов наблюдаются разные траектории трещин. С увеличением

угла ориентации исходной трещины наблюдается увеличение угла её дальнейшего распространения. Это наблюдение позволяет сделать вывод, что смешение режимов разрушения (или вклад II режима) оказывает заметное влияние на разрушение образцов: по мере приближения к чистому II режиму угол инициации трещины увеличивается.

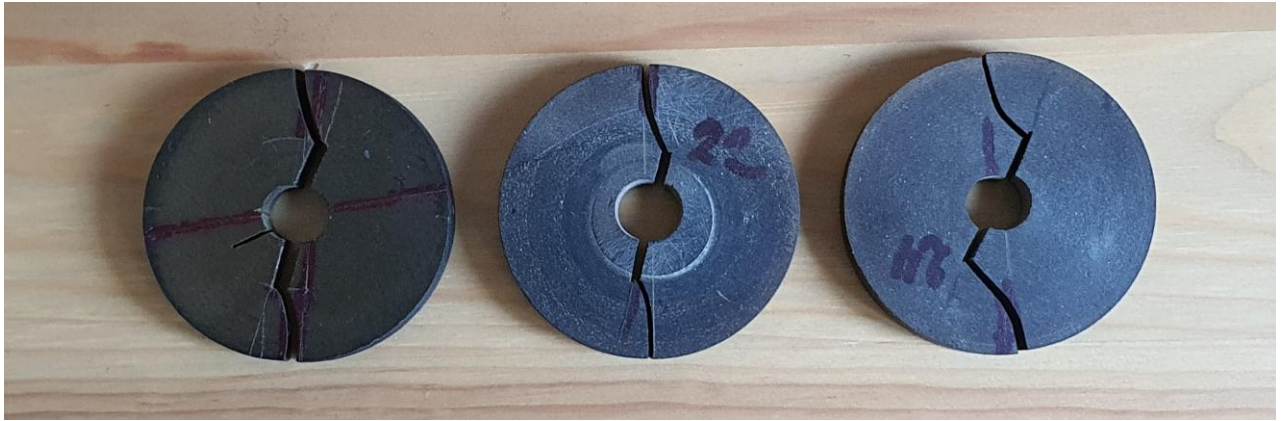


Рисунок 4.9 — Разрушенные дисковые образцы

### 4.3. Критерии хрупкого разрушения

С целью прогнозирования результатов эксперимента были применены три локальных критерия разрушения, которые уже были сформулированы в главе 3 настоящей работы: обобщенный критерий максимальных окружных напряжений (GMTS, раздел 2.3), расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN, раздел 3.3.2), обобщенный критерий плотности энергии деформирования (GSED, раздел 3.3.3).

Следует отметить, что авторами [43, 44] в критерии GSED дано неверное выражение для критического значения плотности энергии деформирования, поскольку оно было получено исходя из ошибочного предположения о равенстве нулю  $T$ -напряжения в условиях I чистого режима разрушения. Результаты расчётов  $T$ -напряжения, показанные на рисунках 4.5, 4.6 и 4.8, свидетельствуют

о том, что при  $\beta = 0^\circ$  параметр  $T_* < 0$  во всём диапазоне изменения параметров  $a/h$  и  $r/R$ .

#### 4.4. Сравнение результатов расчётов с лабораторным экспериментом

Выбранные для исследования критерии разрушения можно использовать для прогнозирования изменения критической нагрузки в зависимости от смешанности режимов и последующего сопоставления с результатами экспериментов. На рисунке 4.10 показаны результаты сравнения критических нагрузок, рассчитанных при помощи критерия GMTS (формула (3.3)), критерия EMTSN в условиях ПНС и ПДС (формула (3.12)) и критерия GSED (формула (3.22)) с данными испытаний дисковых образцов из эбонита. Приведены значения критической нагрузки в зависимости от угла ориентации трещины. Кружки на рисунке — это результаты компьютерных расчётов, красные ромбы — экспериментальные данные. Критерий GSED демонстрирует хорошее соответствие между экспериментальными точками и результатами численного расчёта. Критерий EMTSN представлен в двух вариантах: при плоском напряжённом состоянии и плоской деформации. Толщина образца, обеспечивающая выполнение условий плоской деформации, определяется по формуле  $t \geq t_{\min} = 2,5(K_{Ic}/\sigma_t)^2$ . Подставив в эту формулу значения прочностных параметров для эбонита из таблицы 4.1, мы получим  $t_{\min} = 2,24$  мм, то есть толщина экспериментальных образцов  $t = 8,5$  мм довольно хорошо соответствует условию плоской деформации. Однако критерий EMTSN (ПНС) лучше согласуется с экспериментальными данными, чем критерий EMTSN (ПДС). Критерий EMTSN в условиях плоской деформации даёт консервативную оценку критической нагрузки во всём диапазоне смешанности режимов. Лучше всего с экспериментом согласуется критерий GSED.

Необходимо отметить, что для критерия EMTSN, как видно из уравнения

$$\sigma_\theta - \nu' \sigma_\tau = \sigma_t, \quad (4.2)$$

прочность материалов при двухосном растяжении должна быть выше, чем при одноосном.

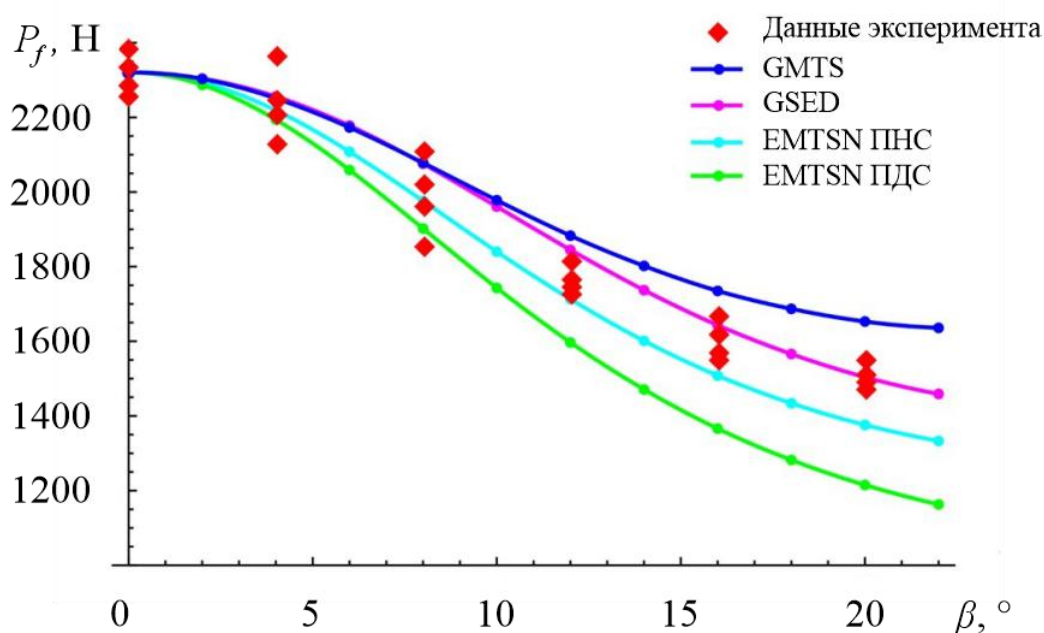


Рисунок 4.10 — К сравнению критических нагрузок, предсказанных вычислениями с использованием критериев хрупкого разрушения, с результатами лабораторных испытаний

#### 4.5. Прогнозирование угла начала разрушения

Углы инициации трещины предсказывались с помощью силового критерия (GMTS), деформационного критерия (EMTSN) и энергетического критерия (GSED). Критерий EMTSN применялся в двух вариантах: ПДС и ПНС. Как отмечено в предыдущем разделе, критерий EMTSN ПНС лучше согласуется с экспериментальными данными, хотя и он и EMTSN ПДС дают консервативную оценку разрушающей нагрузки в условиях смешанного нагружения. Все критерии учитывают  $T$ -напряжение. Геометрия образца такая же, как и при прогнозировании критических нагрузок:  $R=19,5$  мм,  $r=3$  мм,  $t=8,5$  мм и  $a=8,25$  мм.

На рисунке 4.11 представлены результаты прогнозирования углов начала разрушения. Углы по EMTSN ПДС и EMTSN ПНС практически совпадают. Критерий GSED даёт наибольшие углы инициации трещины среди всех рассматриваемых. Силовой GMTS-критерий показал более консервативные результаты в сравнении с GSED. В предыдущей главе получен аналогичный результат для балочного образца на четырёхточечный изгиб.

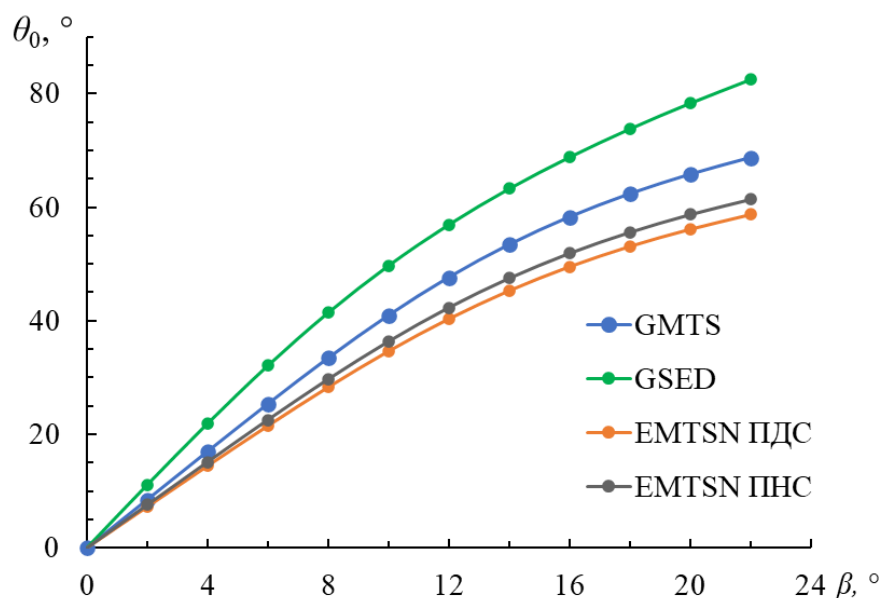


Рисунок 4.11 — Зависимости  $\theta_0(\beta)$ , предсказанные с использованием критериев GMTS, GSED и EMTSN

Покажем, что отрицательные значения  $T$ -напряжения уменьшают предсказываемый угол инициации трещины, для этого приведём зависимости  $\theta_0(\beta)$  для критерия SED и GSED (рисунок 4.12). Напомним, что критерий SED не учитывает первый несингулярный член в разложении Вильямса. Действительно, как видно из рисунка, сжимающие  $T$ -напряжения уменьшают угол начала разрушения в области смешанного режима I+II. При этом эффект более выражен ближе к режиму I.

На рисунке 4.13 приведены зависимости угла начала разрушения  $\theta_0$  от угла ориентации трещины  $\beta$  для растягивающих  $T$ -напряжений, полученные по критериям SED и GSED. Рисунок 4.8 показывает зависимость  $T$ -напряжения от

угла ориентации трещины при  $r/R = 0,54$ . Видно, что  $T$ -напряжение меняет знак с минуса на плюс при  $\beta = 6^\circ$ . Этот переход наблюдается и на рисунке 4.13.

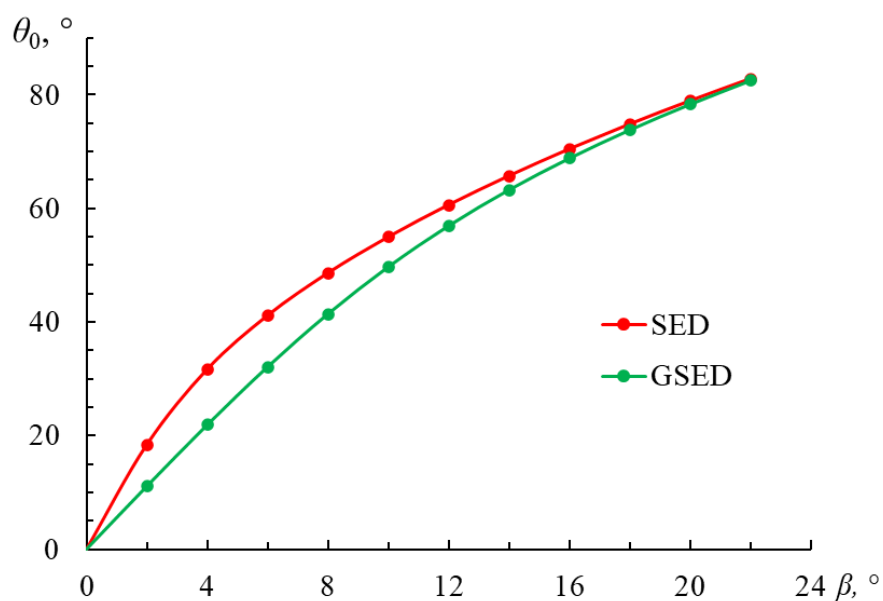


Рисунок 4.12 — Зависимости  $\theta_0(\beta)$ , предсказанные с использованием критериев SED и GSED при  $r/R = 0,15$

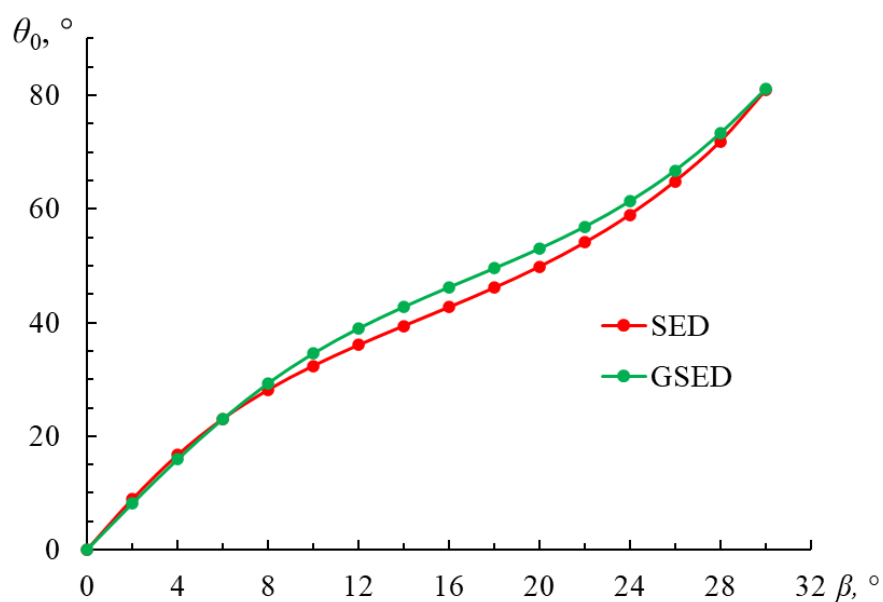


Рисунок 4.13 — Зависимости  $\theta_0(\beta)$ , предсказанные с использованием критериев SED и GSED при  $r/R = 0,54$

Влияние знака  $T$ -напряжений на результаты расчёта угла инициации по критериям MTSN (без учёта  $T$ -напряжения) и EMTSN (с учётом  $T$ -напряжения) показано на рисунках 4.14 и 4.15. При относительном радиусе  $r/R=0,15$   $T$ -напряжения сжимающие, при  $r/R=0,54$   $T$ -напряжения растягивающие (см. рисунок 4.8).

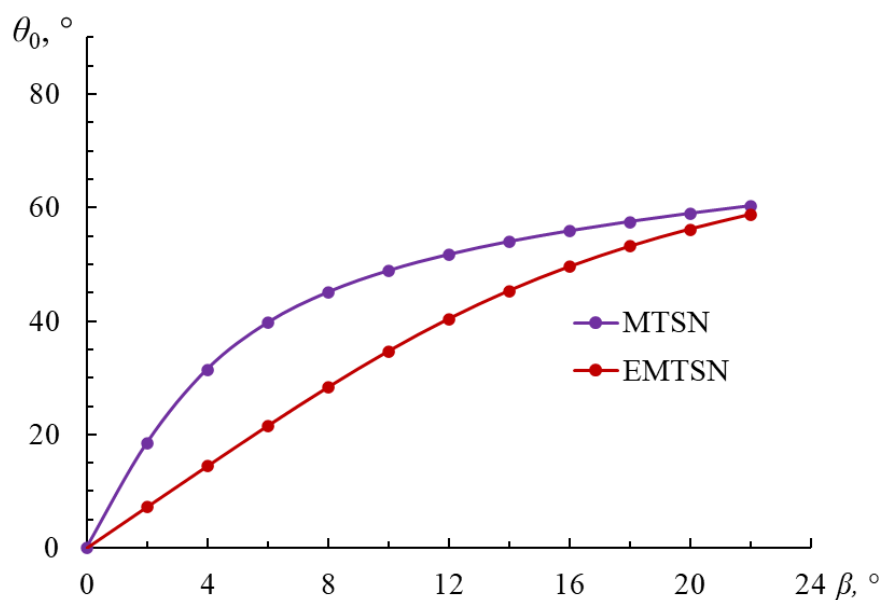


Рисунок 4.14 — Зависимости  $\theta_0(\beta)$ , предсказанные с использованием критериев MTSN и EMTSN при  $r/R = 0,15$

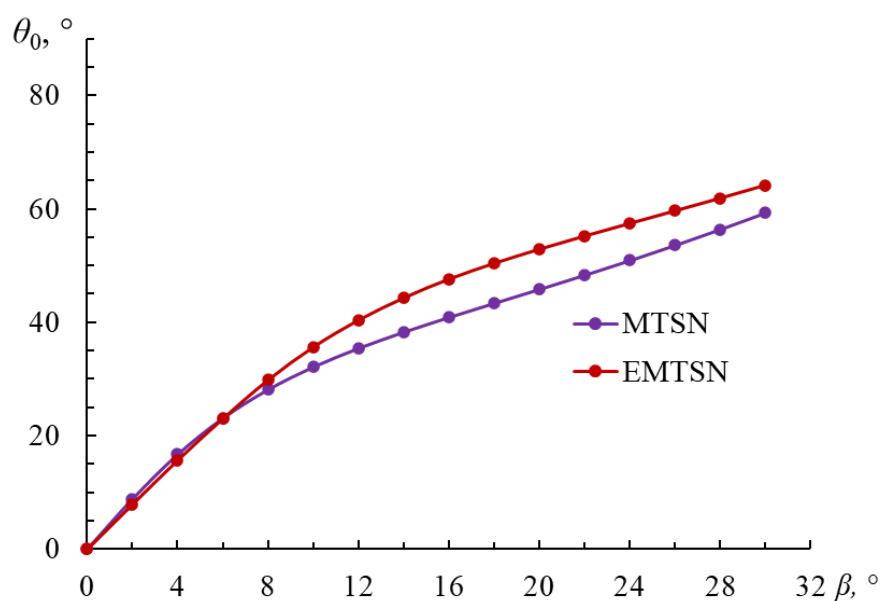


Рисунок 4.15 — Зависимости  $\theta_0(\beta)$ , предсказанные с использованием критериев MTSN и EMTSN при  $r/R = 0,54$

Как и для критериев SED и GSED (рисунок 4.13), для MTSN и EMTSN при  $\beta = 6^\circ$  наблюдается переход, обусловленный сменой знака  $T$ -напряжения, когда критерий, учитывающий  $T$ -напряжение, из области, в которой он недооценивает угол инициации трещины, переходит в область, в которой оценка угла становится выше, чем по критерию, не учитывающему первый несингулярный член в разложении Вильямса (рисунок 4.15).

#### 4.6. Выводы по главе 4

В этой главе был рассмотрен образец бразильского диска с центральным круглым отверстием, ослабленный двумя внутренними краевыми радиальными трещинами. Смешанные режимы разрушения I+II были получены путём поворота трещин на некоторый угол от вертикальной оси. Вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для I и II режимов разрушения, а также  $T$ -напряжений для различных геометрических параметров диска и радиальных трещин производились методом конечных элементов. Изменялись отношение внутреннего и внешнего диаметров, отношение длины трещины к ширине кольца и угол наклона трещины. Были проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме. Для каждого типа нагрузки и геометрии было испытано 5 идентичных образцов. Испытания проводились при статической нагрузке до полного разрушения образцов. Во всех экспериментах фиксировались угол инициации трещины и критическая нагрузка. Для прогнозирования направления роста трещины и критической нагрузки использовались критерии разрушения GMTS, EMTSN и GSED. Критерии GMTS и GSED демонстрируют хорошее соответствие между экспериментальными значениями критических нагрузок и результатами численного расчёта. Критерий EMTSN даёт заниженную оценку критической нагрузки. При расчёте прочности реальных конструкций лучше недооценить разрушающую нагрузку, чем переоценить, поскольку недооценка идёт в запас прочности конструкции, а переоценка, наоборот, в ущерб прочности.

Построены зависимости углов инициации трещины по различным критериям разрушения от отношения угла ориентации трещины в образце  $\beta$ . Проанализировано влияние знака  $T$ -напряжения на прогноз угла начала разрушения.

Учитывая хорошее соответствие полученных экспериментальных результатов прогнозам критериев разрушения, полый бразильский диск можно использовать в качестве испытательного образца при изучении разрушения по смешанному типу (I+II) в технических материалах, таких как плексиглас, эбонит, гетинакс.

## Заключение

В диссертационной работе были рассмотрены следующие задачи:

1. Задача о трёхточечном изгибе образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении.
2. Задача о разрушении хрупких балок при антисимметричном четырёхточечном изгибе.
3. Задача о разрушении бразильского диска с круглым отверстием в смешанном режиме.

Для каждой из представленных задач методом конечно-элементного анализа получены значения коэффициентов интенсивности напряжений по I и II модам разрушения, а также  $T$ -напряжения при различных геометрических параметрах опытных образцов с трещинами и разных условиях нагружения. Проанализированы известные способы расчета  $T$ -напряжений. В ближайшем к вершине трещины элементе наблюдались сильные осцилляции решения смещений, которые не упоминаются в литературе, поэтому для отыскания  $T$ -напряжений с максимально возможной точностью предложено вычислять их по смещениям при отсечении ближайших к вершине трещины 3–4 узлов. Проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения опытных образцов с трещинами различной геометрии в смешанном режиме. Для каждого типа нагружения и геометрии испытано по 3–5 одинаковых образцов. В экспериментах фиксировались угол инициации трещины и критическая нагрузка.

Для прогнозирования направления разрушения и величины критической нагрузки были применены следующие критерии разрушения:

- обобщённый критерий максимальных окружных напряжений (GMTS);
- расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN);
- обобщённый критерий плотности энергии деформирования (GSED);
- обобщённый критерий максимальных окружных осреднённых напряжений (MATS);
- обобщённый критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (GMERR).

Для критериев EMTSN и GSED получено точное представление обобщённой вязкости разрушения (обобщённый критический коэффициент интенсивности напряжений).

В задаче трёхточечного изгиба образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении проведены исследования вязкости разрушения сферопласта и ПММА в смешанном режиме. Обобщённый критерий максимальных окружных напряжений успешно применён для прогнозирования направления распространения (или зарождения) трещины и величины критической нагрузки.

Построены зависимости углов инициации трещины по критериям MTS и GMTS от величины сдвига трещины и сдвига нагрузки. Показано, что учёт  $T$ -напряжения приводит к увеличению рассчитанного значения угла инициации трещины для образца заданной геометрии и повышает точность его предсказания по сравнению с классическим критерием, учитывающим только сингулярные члены разложения Вильямса. Отмечено, что оба критерия для образцов эксцентричной балки с краевой трещиной дают схожие результаты.

Установлено, что предложенная форма образца не охватывает весь диапазон смещения мод (от чистой моды I до чистой моды II). Однако, на основании хорошей согласованности полученных численных и экспериментальных результатов как между собой, так и с предсказаниями критериев разрушения, этот образец можно рекомендовать для испытаний с целью изучения разрушения смешанного типа в технических материалах, таких как сферопласт, оргстекло, эбонит, гетинакс, при наклонных надрезах (трещинах).

В задаче о разрушении хрупких балок при антисимметричном четырёхточечном изгибе были проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме (I+II). Для предсказания как направления разрушения, так и величины критической нагрузки в вычислительных экспериментах использовались следующие критерии разрушения: GMTS, EMTSN, GSED, MATS, MERR и GMERR. Критерии GMTS, GSED, MATS, MERR и GMERR демонстрируют хорошее соответствие данных численного расчета

экспериментальным. Критерий EMTSN — максимальных окружных деформаций — даёт консервативную оценку критической нагрузки для значений относительного сдвига трещины  $S/d$  в диапазоне от 0 до 0.5. Данный факт соответствует общепринятому инженерному подходу при оценке разрушения конструкций с запасом по прочности.

Построены зависимости углов инициации трещины по различным критериям разрушения от отношения  $S/d$ . Проанализировано влияние знака  $T$ -напряжения на прогноз направления начала разрушения.

Проведён анализ влияния коэффициента Пуассона  $\nu$  на оценку угла инициации трещины по деформационному критерию EMTSN и энергетическому критерию GSED. Показано, что в условиях смешанного нагружения (режим I+II) разница между углами, предсказанными критериями GSED и SED, возрастает при уменьшении  $\nu$ .

На основании проведённого исследования сделан вывод, что испытательный образец данной конфигурации можно применять при исследовании разрушения хрупких и квазихрупких материалов в чистом II и смешанном I+II режимах. Хотя, при значении  $S/d \rightarrow 1$  происходит приближение к чистому I режиму, но всё же сохраняется незначительное влияние II режима, поэтому для изучения разрушения в чистом режиме I рекомендовано использовать схему нагружения по типу трёхточечного изгиба.

С целью определения критической нагрузки и угла инициации трещины в задаче о разрушении бразильского диска с круглым отверстием в смешанном режиме были проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита. Для прогнозирования направления роста трещины и критической нагрузки использовались критерии разрушения GMTS, EMTSN и GSED. Обнаружено, что критерии GMTS и GSED демонстрируют хорошее соответствие между экспериментальными значениями критических нагрузок и результатами численного расчёта, в то время как критерий EMTSN даёт заниженную оценку критической нагрузки, что при расчёте прочности реальных конструкций идёт в запас прочности.

Построены зависимости углов инициации трещины по различным критериям разрушения от отношения угла ориентации трещины в образце  $\beta$ . Проанализировано влияние знака  $T$ -напряжения на прогноз угла начала разрушения.

С учётом хорошего соответствия полученных экспериментальных результатов прогнозам критериев разрушения, полый бразильский диск может быть использован в качестве испытательного образца при изучении разрушения по смешанному типу (I+II) в технических материалах (плексиглас, эбонит, гетинакс).

**Список литературы**

1. Броек, Д. Основы механики разрушения / Д. Броек. — Москва : Высшая школа, 1980. — 368 с.
2. Ефимов, В. П. Измерение прочности на растяжение бразильским методом / В. П. Ефимов // ФТПРПИ. — 2021. — № 6. — С. 49–60. — DOI: 10.15372/FTPRPI20210605.
3. Ефимов, В. П. Применение интегрального критерия разрушения для определения прочности на растяжение горных пород / В. П. Ефимов // ФТПРПИ. — 2019. — № 3. — С. 44–52. — DOI: 10.15372/FTPRPI20190306.
4. Качанов, Л. М. Основы механики разрушения / Л. М. Качанов. — Москва : Наука, 1974. — 312 с.
5. Кургузов, В. Д., Трёхточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении / В. Д. Кургузов, А. Г. Демешкин, Д. А. Кузнецов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023. — Т. 16, № 3. — С. 345–357. — DOI: 10.7242/1999-6691/2023.
6. Кургузов, В. Д. Разрушение хрупких балок при антисимметричном четырехточечном изгибе / В. Д. Кургузов, Д. А. Кузнецов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2024. — Т. 17, № 4. — С. 393–410. — DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.32.
7. Леган, М. А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения / М. А. Леган // Прикладная механика и техническая физика. — 1993. — Т. 34, № 4. — С. 146–154.
8. Леган, М. А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода / М. А. Леган // Прикладная механика и техническая физика. — 1994. — Т. 35, № 4. — С. 117–124.
9. Леган, М. А. Расчет на прочность цилиндров с отверстием при совместном использовании метода граничных элементов и нелокальных критериев разрушения / М. А. Леган, В. А. Блинов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2017. — Т. 10, № 3. — С. 332–340.

10. Леонов, М. Я. Механика деформаций и разрушения / М. Я. Леонов. — Фрунзе : Илим, 1981. — 236 с.
11. Максименко, В. Н. Основы прикладной механики разрушения. Ч. 1 : учеб. пособие / В. Н. Максименко ; Новосиб. гос. техн. ун-т. — Новосибирск, 1994. — 181 с.
12. Матвиенко, Ю. Г. Двухпараметрическая механика / Ю. Г. Матвиенко. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 208 с.
13. Матвиенко, Ю. Г. Два подхода к учёту несингулярных T-напряжений в критериях механики разрушения тел с вырезами / Ю. Г. Матвиенко // Проблемы машиностроения и надёжности машин. — 2011. — № 5. — С. 104–110.
14. Матвиенко, Ю. Г. Несингулярные T-напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения / Ю. Г. Матвиенко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2012. — Т. 78, № 2. — С. 51–58.
15. Матвиенко, Ю. Г. Влияние несингулярных компонентов T-напряжений на зоны пластической деформации у вершины трещины нормального отрыва / Ю. Г. Матвиенко, Р. А. Починков // Деформация и разрушение материалов. — 2012. — № 3. — С. 6–14.
16. Механика разрушения и прочность материалов : справочное пособие : в 4 т. / под общ. ред. В. В. Панасюка. — Киев : Наукова думка, 1988.
17. Новожилов, В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // Прикладная математика и механика (ПММ). — 1969. — Т. 33, № 2. — С. 212–222.
18. Новожилов, В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах / В. В. Новожилов // Прикладная математика и механика (ПММ). — 1969. — Т. 33, № 5. — С. 797–812.
19. Новопашин, М. Д. Градиентные критерии предельного состояния / М. Д. Новопашин, С. В. Сукнев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2007. — № 4(54). — С. 316–335.
20. Панасюк, В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. — Киев : Наукова думка, 1968. — 246 с.

21. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. — Москва : Наука, 1985. — 504 с.
22. Пестриков, В. М. Механика разрушения : курс лекций / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. — Санкт-Петербург : Профессия, 2012. — 552 с.
23. Сукнев, С. В. Определение локальных механических свойств материалов / С. В. Сукнев, М. Д. Новопашин // Доклады академии наук. — 2000. — Т. 373, № 1. — С. 48–50.
24. Тырымов, А. А. Численное моделирование T-напряжений и коэффициента биаксиальности напряжений для образца с центральной трещиной при смешанных граничных условиях / А. А. Тырымов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2020. — Т. 13, № 4. — С. 393–401. — DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.30.
25. Уфимцев, К. П. Аппроксиматоры для ускоренного вычисления параметров напряжённого состояния в нестандартных образцах с трещинами / К. П. Уфимцев, Д. А. Кузнецов, А. В. Шутов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2024. — Т. 17, № 3. — С. 308–319. — DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.26.
26. Харлаб, В. Д. Критерий прочности, учитывающий влияние градиента напряжённого состояния / В. Д. Харлаб, В. А. Минин // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. — Ленинград : Ленинградский инж.-строит. ин-т, 1989. — С. 53–57.
27. Хеллан, К. Введение в механику разрушения / К. Хеллан ; пер. с англ. под ред. Е. М. Морозова. — Москва : Мир, 1988. — 364 с.
28. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. — Москва : Наука, 1974. — 640 с.
29. Acanfora, M. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes / M. Acanfora, P. Gallo, S. M. J. Razavi, M. R. Ayatollahi, F. Berto // Физическая мезомеханика. — 2018. — Т. 21, № 1. — С. 30–40. — DOI: 10.24411/1683-805X-2018-11005.
30. Aliha, M. R. M. Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion / M. R. M. Aliha, M. R.

Ayatollahi // *International Journal of Solids and Structures*. — 2012. — Vol. 49. — P. 1877–1883. — DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.029.

31. Aliha, M. R. M. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate / M. R. M. Aliha, M. R. Ayatollahi // *Materials Science and Engineering: A* — 2010. — Vol. 527. — P. 526–530. — DOI: 10.1016/j.msea.2009.08.055.

32. Aliha, M. R. M. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading / M. R. M. Aliha, M. R. Ayatollahi, D. J. Smith, M. J. Pavier // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2010. — Vol. 77. — P. 2200–2212. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.009.

33. Aliha, M. R. M. Application of cracked triangular specimen subjected to three-point bending for investigating fracture behavior of rock materials / M. R. M. Aliha, G. R. Hosseinpour, M. R. Ayatollahi // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. — 2013. — Vol. 46. — P. 1023–1034. — DOI: 10.1007/s00603-012-0325-z.

34. Aliha, M. R. M. Geometry effects and statistical analysis of mode I fracture in gulating limestone / M. R. M. Aliha, M. Sistaninia, D. J. Smith, M. J. Pavier, M. R. Ayatollahi // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2012. — Vol. 51. — P. 128–135. — DOI: 10.1016/j.ijrmms.2012.01.017.

35. Araki, W. Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin / W. Araki, K. Nemoto, T. Adachi, A. Yamaji // *Acta Materialia*. — 2005. — Vol. 53. — P. 869–857. — DOI: 10.1016/j.actamat.2004.10.035.

36. Atkinson, C. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test / C. Atkinson, R. E. Smelser, J. Sanchez // *International Journal of Fracture*. — 1982. — Vol. 18. — P. 279–291. — DOI: 10.1007/BF00015688.

37. Ayatollahi, M. R. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion / M. R. Ayatollahi, M. R. M. Aliha // *Carbon*. — 2008. — Vol. 46. — P. 1302–1308. — DOI: 10.1016/j.carbon.2008.05.008.

38. Ayatollahi, M. R. Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion / M. R. Ayatollahi, M. R. M. Aliha // *International Journal of Solids and Structures*. — 2009. — Vol. 46. — P. 311–321. — DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.08.035.

39. Ayatollahi, M. R. On determination of mode II fracture toughness using semi-circular bend specimen / M. R. Ayatollahi, M. R. M. Aliha // *International Journal of Solids and Structures*. — 2006. — Vol. 43. — P. 5217–5227. — DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.07.049.
40. Ayatollahi, M. R. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading / M. R. Ayatollahi, M. R. M. Aliha // *Computational Materials Science*. — 2007. — Vol. 38. — P. 660–670. — DOI: 10.1016/j.commatsci.2006.04.008.
41. Ayatollahi, M. R. An improved semi-circular bend specimen for investigating mixed mode brittle fracture / M. R. Ayatollahi, M. R. M. Aliha, H. Saghafi // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2011. — Vol. 78, No. 1. — P. 110–123. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.10.001.
42. Ayatollahi, M. R. Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading / M. R. Ayatollahi, M. J. Pavier, D. J. Smith // *International Journal of Fracture*. — 1998. — Vol. 91. — P. 283–298. — DOI: 10.1023/A:1007581125618.
43. Ayatollahi, M. R. A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials / M. R. Ayatollahi, M. Rashidi Moghaddam, F. Berto // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. — 2015. — Vol. 79. — P. 70–76. — DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.09.004.
44. Ayatollahi, M. R. Geometry effects on fracture trajectory of PMMA samples under pure mode-I loading / M. R. Ayatollahi, M. Rashidi Moghaddam, N. Razavi, F. Berto // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2016. — Vol. 163. — P. 449–461. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.05.014.
45. Ayatollahi, M. R. Mixed mode brittle fracture in epoxy/multi-walled carbon nanotube nanocomposites / M. R. Ayatollahi, S. Shadlou, M. M. Shokrieh // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2011. — Vol. 78. — P. 2620–2632. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.06.021.

46. Banks-Sills, L. Fracture testing of Brazilian disk sandwich specimens / L. Banks-Sills, J. Schwartz // *International Journal of Fracture*. — 2002. — Vol. 118. — P. 191–209. — DOI: 10.1023/A:1022922926897.
47. Berto, F. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches / F. Berto, P. Lazzarin // *Materials Science and Engineering: R: Reports*. — 2014. — Vol. 75. — P. 1–48. — DOI: 10.1016/j.mser.2013.11.001.
48. Bhattacharjee, D. Ductile fracture in HY100 steel under mixed mode I/mode II loading / D. Bhattacharjee, J. F. Knott // *Acta Metallurgica et Materialia*. — 1994. — Vol. 42. — P. 1747–1754. — DOI: 10.1016/0956-7151(94)90385-9.
49. Chang, K. J. On the maximum strain criterion – a new approach to the angled crack problem / K. J. Chang // *Engineering Fracture Mechanics*. — 1981. — Vol. 14. — P. 107–124. — DOI: 10.1016/0013-7944(81)90021-7.
50. Choi, S. R. Fracture behavior under mixed-mode loading of ceramic plasma-sprayed thermal barrier coatings at ambient and elevated temperatures / S. R. Choi, D. Zhu, R. A. Miller // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2005. — Vol. 72. — P. 2144–2158. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.01.010.
51. Chong, K. P. New specimen for fracture toughness determination for rock and other materials / K. P. Chong, M. D. Kuruppu // *International Journal of Fracture*. — 1984. — Vol. 26. — P. R59–R62. — DOI: 10.1007/BF01157555.
52. Dong, S. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression / S. Dong, Y. Wang, Y. Xia // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2004. — Vol. 71. — P. 1135–1148. — DOI: 10.1016/S0013-7944(03)00120-6.
53. Dyskin, A. V. Crack growth criteria incorporating non-singular stresses: size effect in apparent fracture toughness / A. V. Dyskin // *International Journal of Fracture*. — 1997. — Vol. 83. — P. 191–206. — DOI: 10.1023/A:1007304015524.
54. Erarslan, N. Mixed-mode fracturing of rocks under static and cyclic loading / N. Erarslan, D. J. Williams // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. — 2013. — Vol. 46. — P. 1035–1052. — DOI: 10.1007/s00603-012-0303-5.

55. Erdogan, F. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear / F. Erdogan, G. C. Sih // *Journal of Basic Engineering*. — 1963. — Vol. 85, No. 4. — P. 519–527. — DOI: 10.1115/1.3656897.

56. Fett, T. Fracture tests for ceramics under mode-I, mode-II and mixed-mode loading / T. Fett, G. Gerteisen, S. Hahnenberger, G. Martin, D. Munz // *Journal of the European Ceramic Society*. — 1995. — Vol. 15. — P. 307–312. — DOI: 10.1016/0955-2219(95)90353-K.

57. Foti, P. Fatigue assessment of cruciform joints: Comparison between Strain Energy Density predictions and current standards and recommendations / P. Foti, D. Santonocito, G. Risitano, F. Berto // *Engineering Structures*. — 2021. — Vol. 230. — P. 111708. — DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111708.

58. Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solid / A. A. Griffith // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. — 1920. — Vol. 221, No. 2. — P. 163–198. — DOI: 10.1098/rsta.1921.0006.

59. Gupta, M. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics / M. Gupta, R. C. Alderliesten, R. Benedictus // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2015. — Vol. 134. — P. 218–241. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013.

60. He, M. Y. Asymmetric four-point crack specimen / M. Y. He, J. W. Hutchinson // *Journal of Applied Mechanics*. — 2000. — Vol. 67. — P. 207–209. — DOI: 10.1115/1.321168.

61. Hou, C. A generalized maximum energy release rate criterion for mixed mode fracture analysis of brittle and quasi-brittle materials / C. Hou, X. Jin, X. Fan, R. Xu, Z. Wang // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. — 2019. — Vol. 100. — P. 78–85. — DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.12.015.

62. Hua, W. T-stress for a centrally cracked Brazilian disk under confining pressure / W. Hua, Y. Li, S. Dong, N. Li, Q. Wang // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2015. — Vol. 149. — P. 37–44. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.048.

63. Hussain, M. A. Strain energy release rate for a crack under combined Mode I and II / M. A. Hussain, S. L. Underwood, J. Pu // *Fracture Analysis : ASTM STP 560*. —

Philadelphia : American Society for Testing and Materials, 1974. — P. 2–28. — DOI: 10.1520/STP33130S.

64. Irwin, G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. Irwin // *Journal of Applied Mechanics*. — 1957. — Vol. 24. — P. 361–364. DOI: 10.1115/1.4011547

65. Kanninen, M. F. *Advanced fracture mechanics* / M. F. Kanninen, C. H. Popelar. — New York ; Oxford : Oxford University Press, 1985. — 563 p.

66. Kurguzov, V. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading / V. Kurguzov, D. Kuznetsov // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2024. — Vol. 297. — Art. 109875. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875.

67. Kusch, A. Strain Energy Density as Failure Criterion for Quasi-Static Uniaxial Tensile Loading / A. Kusch, S. Salamina, D. Crivelli, F. Berto // *Frattura ed Integrità Strutturale*. — 2021. — Vol. 15. — P. 331–349. — DOI: 10.3221/IGF-ESIS.57.24.

68. Lajtai, E. Z. Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation / E. Z. Lajtai // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 1972. — Vol. 9. — P. 569–578.

69. Lazzarin, P. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches / P. Lazzarin, R. Zambardi // *International Journal of Fracture*. — 2001. — Vol. 112. — P. 275–298. — DOI: 10.1023/A:1013595930617.

70. Lazzarin, P. Local strain energy density and fatigue strength of welded joints under uniaxial and multiaxial loading / P. Lazzarin, P. Livieri, F. Berto, M. Zappalorto // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2008. — Vol. 75. — P. 1875–1889. — DOI: 10.1016/J.ENGFRACTMECH.2006.10.019.

71. Leguillon, D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch / D. Leguillon // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. — 2002. — Vol. 21, No. 1. — P. 61–72. — DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01184-6.

72. Li, M. Mixed-mode fracture of ceramics in asymmetric four-point bending: Effect of crack-face grain interlocking/bridging / M. Li, M. Sakai // *Journal of the*

American Ceramic Society. — 1996. — Vol. 79. — P. 2718–2726. — DOI: 10.1111/j.1151-2916.1996.tb09037.x.

73. Li, Y. Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens / Y. Li, S. Dong, M. J. Pavier // *Geomechanics and Engineering*. — 2020. — Vol. 20, No. 1. — P. 9–18. — DOI: 10.12989/gae.2020.20.1.009.

74. Lin, Q. Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SENB) rock specimens / Q. Lin, X. Bian, P.-Z. Pan, Y. Gao, Y. Lu // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2021. — Vol. 248. — Art. 107709. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107709.

75. Maccagno, T. M. The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II / T. M. Maccagno, J. F. Knott // *Engineering Fracture Mechanics*. — 1989. — Vol. 34, No. 1. — P. 65–86. — DOI: 10.1016/0013-7944(89)90243-9.

76. Maccagno, T. M. The low temperature brittle fracture behaviour of steel in mixed modes I and II / T. M. Maccagno, J. F. Knott // *Engineering Fracture Mechanics*. — 1991. — Vol. 38, No. 2. — P. 111–128. — DOI: 10.1016/0013-7944(91)90076-D.

77. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information / MSC Software Corporation. — 2020. — 1061 p.

78. Margevicius, R. W. Fracture toughness of polycrystalline tungsten under mode I and mixed mode I/II loading / R. W. Margevicius, J. Riedle, P. Gumbsch // *Materials Science and Engineering: A*. — 1999. — Vol. 270. — P. 197–209. — DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00252-X.

79. Matvienko, Y. G. Local fracture criterion to describe failure assessment diagrams for a body with a crack/notch / Y. G. Matvienko // *International Journal of Fracture*. — 2003. — Vol. 124. — P. 107–112. — DOI: 10.1023/B:FRAC.0000018229.08344.96.

80. Matvienko, Y. G. The concept of the average stress in the fracture process zone for the search of the crack path / Y. G. Matvienko, M. M. Semenova // *Frattura ed Integrità Strutturale*. — 2015. — Vol. 9, No. 34. — P. 255–260. — DOI: 10.3221/IGF-ESIS.34.27.

81. Mirsayar, M. M. Strain-based criteria for mixed-mode fracture of polycrystalline graphite / M. M. Mirsayar, F. Berto, M. R. M. Aliha, P. Park // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2016. — Vol. 156. — P. 114–123. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.02.011.

82. Mirsayar, M. M. The role of T-stress on kinking angle of interface cracks / M. M. Mirsayar, P. Park // *Materials and Design*. — 2015. — Vol. 80. — P. 12–19. — DOI: 10.1016/j.matdes.2015.05.007.

83. Mousavi, S. S. On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II / S. S. Mousavi, M. R. M. Aliha, D. M. Imani // *Polymer Testing*. — 2020. — Vol. 81. — Art. 106199. — DOI: 10.1016/j.polymertesting.2019.106199.

84. Nazarali, Q. The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode loading conditions / Q. Nazarali, X. Wang // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. — 2011. — Vol. 34. — P. 792–803. — DOI: 10.1111/j.1460-2695.2011.01573.x.

85. Neuber, H. Kerbspannungslehre, Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung / H. Neuber. — Berlin : Springer-Verlag, 1937. — 160 p.

86. Newman, J. C. A review of the CTOA/CTOD fracture criterion / J. C. Newman, M. A. James, U. Zerbst // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2003. — Vol. 70, No. 3–4. — P. 371–385. — DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00125-X.

87. Nuismer, R. J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture / R. J. Nuismer // *International Journal of Fracture*. — 1975. — Vol. 11. — P. 245–250. — DOI: 10.1007/BF00038891.

88. Orowan, E. Energy criteria of fracture / E. Orowan // *Welding Journal Research Supplement*. — 1955. — Vol. 34, No. 3. — P. 157–160.

89. Pereira, S. A. G. Mixed mode fracture: Numerical evaluation and experimental validation using PMMA specimens / S. A. G. Pereira, S. M. O. Tavares, P. M. S. T. de Castro // *Frattura ed Integrità Strutturale*. — 2019. — Vol. 49. — P. 412–428. — DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.40.

90. Ravichandaran, R. Mixed-mode fracture analysis of aluminum alloy 5083 subjected to four point bending / R. Ravichandaran, G. Thanigaiyarasu // *Journal of Applied Sciences*. — 2011. — Vol. 11. — P. 2214–2219. — DOI: 10.3923/jas.2011.2214.2219.

91. Saghafi, H. A new fracture toughness test covering mixed-mode conditions and positive and negative T-stresses / H. Saghafi, S. Monemian // *International Journal of Fracture*. — 2010. — Vol. 165, No. 1. — P. 135–138. — DOI: 10.1007/s10704-010-9499-0.

92. Sajjadi, S. H. Comparing Energy-Based Criterion with Strain-Based Criterion for Predicting Brittle Fracture in V-Shaped Notches under Mixed-Mode I/II Loading Conditions / S. H. Sajjadi, A. R. Khorshidvand, M. Jabbari, M. Javadi // *Physical Mesomechanics*. — 2021. — Vol. 24, No. 3. — P. 291–302. — DOI: 10.1134/S1029959921030073.

93. Shahani, A. R. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen / A. R. Shahani, S. A. Tabatabaei // *Materials and Design*. — 2009. — Vol. 30. — P. 2630–2635. — DOI: 10.1016/j.matdes.2008.10.031.

94. Shih, C. F. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I — Small scale yielding / C. F. Shih, R. J. Asaro // *Journal of Applied Mechanics*. — 1988. — Vol. 55. — P. 299–316. — DOI: 10.1115/1.3173676.

95. Sih, G. C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems / G. C. Sih // *International Journal of Fracture*. — 1974. — Vol. 10, No. 3. — P. 305–321. — DOI: 10.1007/BF00035493.

96. Smetannikov, O. Y. Numerical model of fracture growth in hydraulic re-fracturing / O. Y. Smetannikov, Y. A. Kashnikov, S. G. Ashikhmin, A. E. Kukhtinskiy // *Frattura ed Integrità Strutturale*. — 2019. — Vol. 49. — P. 140–155. — DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.16.

97. Sun, C. T. Fracture mechanics. / C. T. Sun, Z.-H. Jin. — Academic Press, 2012. — 336 p.

98. Suresh, S. Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials / S. Suresh, C. F. Shih, A. Morrone, N. P. O'Dowd // *Journal of the American Ceramic Society*. — 1990. — Vol. 73. — P. 1257–1267. — DOI: 10.1111/j.1151-2916.1990.tb05189.x.

99. Theocaris, P. S. The T-Criterion applied to ductile fracture / P. S. Theocaris, N. P. Andrianopoulos // *International Journal of Fracture*. — 1982. — Vol. 20. — P. 125–130.

100. Tikare, V. Combined mode I–mode II fracture of 12-mol%-ceria-doped tetragonal zirconia polycrystalline ceramic / V. Tikare, S. R. Choi // *Journal of the American Ceramic Society*. — 1997. — Vol. 80. — P. 1624–1626. — DOI: 10.1111/j.1151-2916.1997.tb03030.x.

101. Torabi, A. R. Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole / A. R. Torabi, S. Etesam, A. Sapora, P. Cornetti // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2017. — Vol. 186. — P. 496–503. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.11.008.

102. Wang, X. Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions / X. Wang // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2002. — Vol. 69. — P. 1339–1352. — DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00149-7.

103. Wang, X. Estimations of the T-stress for small cracks at notches / X. Wang, T. Lewis, R. Bell // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2006. — Vol. 73. — P. 366–375. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.06.009.

104. Wang, C. On the I–II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen / C. Wang, Z. M. Zhu, H. J. Liu // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. — 2016. — Vol. 39. — P. 1193–1203. — DOI: 10.1111/ffe.12422.

105. Weißgraeber, P. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers / P. Weißgraeber, D. Leguillon, W. Becker // *Archive of Applied Mechanics*. — 2016. — Vol. 86, No. 1–2. — P. 375–401. — DOI: 10.1007/s00419-015-1091-7.

106. Wieghardt, K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper / K. Wieghardt // *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. — 1907. — Vol. 55, № 1–2. — P. 60–103.

107. Williams, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack / M. L. Williams // *Journal of Applied Mechanics*. — 1957. — Vol. 24. — P. 109–114.
108. Wu, H. C. Dual failure criterion for plain concrete / H. C. Wu // *Journal of Engineering Mechanics–ASCE*. — 1974. — Vol. 100, No. 6. — P. 1167–1181.
109. Zappalorto, M. Mixed mode (I+II) fracture toughness of polymer nanoclay nanocomposites / M. Zappalorto, M. Salviato, M. Quaresimin // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2013. — Vol. 111. — P. 50–64. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2013.09.006.
110. Zhou, J. Mode-I fracture toughness measurement of PMMA with the Brazilian disk test / J. Zhou, Y. Wang, Y. Xia // *Journal of Materials Science*. — 2006. — Vol. 41. — P. 5778–5781. — DOI: 10.1007/s10853-006-0980-0.
111. Zhu, X.-K. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization / X.-K. Zhu, J. A. Joyce // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2012. — Vol. 85. — P. 1–46. — DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.001.