Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

На правах рукописи

Горынин Арсений Глебович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. С.К. Голушко

Новосибирск 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. $\overline{...}$ – векторная величина
2. $\langle ... \rangle$ – операция интегрирования по толщине цилиндрической оболочки / поперечному сечению стержня
3. ∂_{α}^{i} – оператор i -ой производной в направлении α
4. (a_x, a_y) – координаты геометрического центра тяжести поперечного сечения стержня в плоскости xy
5. (A_x, A_y) – координаты точки, лежащей на пересечении линии действия равнодействующих распределённых нагрузок в сечении стержня
6. J – центральный центробежный момент инерции сечения стержня
7. J_{α} – момент инерции поперечного сечения стержня в направлении оси α
8. F – площадь поперечного сечения стержня

Введение

Тонкостенные слоистые стержни, пластины и оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций ответственного назначения. Широкое применение композитов в таких конструкциях выявило необходимость учета новых факторов и способствовало появлению новых задач в механике композитных материалов и конструкций. Математически обоснованные редуцированные модели конструкций из слоисто-волокнистых композитов позволяют отказаться от высокозатратного трехмерного конечно-элементного анализа. В силу наличия малых параметров, большинство тонкостенных конструкций поддаётся асимптотическому анализу, что позволяет упростить исходную пространственную постановку задачи. Асимптотические методы выступают математически строгой альтернативой широко распространенному в механике тонкостенных конструкций методу гипотез, имеющему свои недостатки, связанные с предположениями о характере распределения перемещений и/или напряжений в конструкции. **Актуальность исследования** обусловлена необходимостью развития новых методов повышенной точности для решения задач прочности композитных тонкостенных элементов конструкций свободных от априорных гипотез, обладающих высокой степенью универсальности и широкими границами применимости. **Объектами исследования** являются композитные слоистые стержни произвольного поперечного сечения, слоистые цилиндрические оболочки. **Предметами исследования** являются напряжённо-деформированное состояние (НДС) композитных тонкостенных элементов конструкций, разрешающие системы дифференциальных уравнений деформирования, краевые задачи в поперечных сечениях слоистых стержней, краевые задачи по толщине стенки цилиндрических оболочек, линейная задача теории упругости.

Степень разработанности темы исследования. Задачам анализа однородных и неоднородных стержней, пластин и оболочек посвящена обширнейшая литература. В связи с этим литературный обзор в большей степени посвящен более узкой тематике и ограничен рассмотрением задач статики. Значительное внимание уделено асимптотическим подходам к решению задач деформирования стержней и оболочек, а также задаче стесненного кручения однородных и композитных стержней.

Разработке теорий изотропных оболочек посвящены работы: А.И. Лурье [1], В.З. Власова [2], В.В. Новожилова [3, 4], С.П. Тимошенко, С.А. Войновского-Кригера [5], В.С. Черниной [6], А.Л. Гольденвейзера [7, 8], В.Л. Бидермана [9], Л.Г. Доннела [10] и др. Разработке теорий многослойных композитных оболочек и решению разнообразных конкретных задач посвящена обширная литература. Результаты представлены, в частности, в монографиях В.И. Королева [11], П.М. Огибалова, М.А. Колтунова [12], В.Л. Бажанова и др. [13], А.Н. Елпатьевского, В.В.

Васильева [14], И.Ф. Образцова и др. [15], А.К. Малмейстера, В.П. Тамужа, Г.А. Тетерса [16], В.В. Болотина, Ю.Н. Новичкова [17], Н.А. Алфутова и др. [18], Ю.В. Немировского, Б.С. Резникова [19], А.О. Рассказова и др. [20], С.А. Амбарцумяна [21], Э.И. Григолюка, Г.М. Куликова [22], В.В. Васильева [23], Ш.К. Галимова [24], Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко [25], Л.А Агаловяна [26], А.Н. Андреева, Ю.В. Немировского [27], Х. Альтенбаха [28, 29], С.К. Голушко, Ю.В. Немировского [30], E. Carrera et. al [31] и др.

Одним из перспективных направлений при построении непротиворечивых теорий однородных и неоднородных оболочек является использование асимптотических методов, в которых решение задачи ищется в виде разложений по малому параметру. Наиболее распространенным асимптотическим подходом является метод формальных асимптотических разложений, общая теория которого представлена, в частности, в монографиях: В.П. Маслова [32], В. Вазова [33], Дж. Коула [34], А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова [35], А. Найфэ [36], С.А. Ломова [37], Bender C. M., Orszag S [38].

Применению асимптотических методов в области механики твердого тела посвящены работы П.Е. Зино [39], Л.И. Маневича и др. [40], В.Л. Бердичевского [41, 42], Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [43], Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова [44], А.М. Ильина [45], С.М. Бауэр [46], A. Bensousson, J.L. Lions [47], А.Г. Колпакова [48], И.И. Аргатова [49], Георгиевского Д.В. [50] и др. Построению теории оболочек на основе асимптотических методов посвящены, в частности, работы А.Л. Гольденвейзера [7, 8], В.Л. Бердичевского [41, 51], П.Е. Товстика [52], Л.А. Агаловяна [26], М.Ф. Мехтиева [53], T. Levinski, J.J. Telega [54].

Метод формальных асимптотических разложений для решения осесимметричных задач деформирования оболочек вращения применялся, в частности, в работах Fettahlioglu O. A. [55], Wu C.P. et. Al [56–58], Niordson F. I. [59], Димитриенко Ю. И. и др. [60, 61], Ахмедова Н.К. [62]. В диссертационной работе для решения задачи деформирования слоистой цилиндрической оболочки используется альтернативный асимптотический подход на основе метода асимптотического расщепления [63–66], разработанный Горыниным Г.Л. и Немировским Ю.В. для решения задач деформирования слоистых стержней и пластин. Главное отличие метода асимптотического расщепления заключается в том, что в разложениях искомого решения по малому параметру присутствуют производные от функций макродеформирования.

Краткий обзор по теориям деформирования стержней

Построению теории однородных и неоднородных балок и стержней посвящены, в частности, работы Л.Г. Доннела [10], А.Р. Ржаницына [67], В.В. Васильева [23, 68], Б.Д. Аннина [69, 70], J.N. Reddy [71, 72, 73], W. Pilkey [74], L. Kollar [75], Г.Л. Горынина, Ю.В. Немировского

[63], L. Librescu [76], D. Hodges [77], П.А. Жилина [78], E. Carrera [79], A. Luongo, D. Zulli [80], А.В. Мищенко, Ю.В. Немировского [81] и др.

Из основной массы работ, посвященных задачам деформирования стержней, можно выделить три класса математических моделей деформирования слоистых стержней: модели на основе эквивалентного слоя (equivalent single layer approach), модели с учетом каждого слоя (layerwise approach) и модели на основе использования асимптотических методов. Подробные литературные обзоры по каждому из классов моделей можно найти в работах [77, 82–86].

Первый класс включает в себя использование статических и/или кинематических гипотез применительно ко всему пакету слоев. Основными гипотезами при изгибном деформировании стержней выступают классические гипотезы Бернулли-Эйлера, на основе которых удается эффективно рассчитывать однородные изотропные стержни. Однако в этом случае полностью отбрасываются сдвиговые компоненты тензора напряжений, отвечающие за депланацию поперечного сечения стержня при изгибе. Известно, что для слоистых неоднородных стержней классическая теория дает заниженные значения прогибов и завышает общую изгибную жесткость стержня [77, 82–85]. Поэтому для их анализа необходимо использование более точных стержневых теорий. В случае использования гипотез о характере распределения перемещений по всему пакету слоёв, порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений не зависит от числа слоёв. К этому подходу можно отнести первую сдвиговую теорию (FSDT) [72, 87], основанную на гипотезах С.П. Тимошенко и сдвиговые теории, в которых для продольных перемещений в стержне применяются разложения более высоких порядков для учета сдвиговых эффектов, такие как HOBT (high order shear theory), SOBT (second order shear theory) и т.д. [88–90]. Характерной проблемой такого подхода является нарушение непрерывности распределения сдвиговых напряжений по высоте сечения стержня. Существуют также теории, использующие тригонометрические, гиперболические и экспоненциальные функции для учета влияния сдвига [91]. Сюда так же можно отнести теории ломаной линии (zig-zag function approach) [92–94], в основе которых лежит введение кусочно-заданых функций (zig-zag function) по толщине пакета слоев. Отметим, что введение такого рода функций трудно реализуемо для балок не прямоугольного сечения.

Второй класс математических моделей, к которому можно отнести работы [17, 73, 95, 96], основан на подходах с учетом каждого слоя (layerwise approach) и предполагает введение кинематических гипотез для каждого слоя отдельно. При этом порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений растет вместе с количеством слоев. Теоретически данная техника дает наиболее точное распределение напряжений по толщине пакета, но на практике требует значительных вычислительных затрат по сравнению с моделями на основе эквивалентного слоя и трудно применима для стержней сложных поперечных сечений.

Третий класс математических моделей основан на применении асимптотических методов для анализа НДС стержней. Развитию асимптотических методов в теории стержней, в частности, посвящены работы Понятовского В.В. [97, 98], Образцова И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианова И.В. [99], Колпакова А.Г. [100], Агаловяна Л.А. [26, 101], Buannic N., Cartraud P. [102, 103], Назарова С.А. [104], Горынина Г.Л., Немировского Ю.В. [63], Kim J. S. et. al. [105, 106], Андрианова И.В., Маневича Л.Л. [107], Андрианова И. В., Данишевского В. В., Иванкова А. О. [108], Ветюкова Ю. [109, 110] и др.

Значительных результатов при построении теории анизотропных стержней удалось достичь при помощи использования вариационно-асимптотических методов, развитию которых применительно к задачам деформирования стержней посвящены работы Бердичевского В.Л. [41], Бутенко Ю.И. [111], Ходжеса Д. [77], Yu W. et al [112, 113].

Отметим, что основная масса исследований по асимптотическому анализу задач деформирования различных элементов конструкций посвящена преимущественно пластинам и оболочкам. Асимптотическому анализу стержней посвящено намного меньше работ. Как отмечено в работе Д. Ходжеса [77], анализ стержней с теоретической точки зрения более трудоёмок в связи с тем, что при понижении размерности задачи использование априорных гипотез о характере НДС внутри конструкции для стержней произвольного поперечного сечения более проблематично. Двумерная область поперечного сечения имеет больше степеней свободы для проявления различных типов деформирования в отличие от одномерного интервала по толщине пластины или оболочки и поэтому в общем случае трудно ввести общую универсальную гипотезу. Поэтому зачастую задача деформирования стержней сводится к анализу стержня-полосы в предположении плоского напряженного состояния или плоской деформации, что значительно упрощает процедуру асимптотического анализа. Также отметим, что большинство используемых стержневых теорий не учитывают поперечное распределение компонент тензора напряжений, то есть рассматривают балку в состоянии плоской деформации или же в плоском напряженном состоянии. Поэтому по прежнему актуальным является построение логически стройных и математически обоснованных теорий, позволяющих работать с исходной пространственной постановкой задачи, без введения существенных упрощающих предположений.

Краткий обзор работ по стеснённому кручению однородных и композитных стержней

При расчете стержней на кручение часто применяется теория чистого кручения Сен-Венана, в которой продольные напряжения полагаются равными нулю. Чистому кручению однородных и неоднородных стержней посвящена обширная литература, в частности, работы [114–116]. Тонкостенные стержни широко применяются в качестве силовых элементов конструкций в различных отраслях промышленности, включая авиа- и ракетостроение, а также промышленное и гражданское строительство. Преимуществом тонкостенных стержней является их высокие показатели жёсткости и небольшой вес. Однако их расчет сложен из-за особенностей возникающего в них НДС, в частности, стеснение депланации поперечных сечений тонкостенных стержней при кручении может вызывать значительные продольные напряжения. Известно, что для тонкостенных стержней открытого профиля пренебрежение продольными напряжениями при стеснённом кручении может приводить к значительной недооценке крутильной жёсткости стержня (в десять и более раз). Для учёта эффектов от стеснения депланации при кручении необходимы уточнённые методики расчёта.

Широко применяемой теорией расчета тонкостенных стержней открытого профиля является теория Власова В.З. [117], в основу которой положены две гипотезы: контур поперечного сечения стержня полагается недеформируемым в своей плоскости; деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют. Целый ряд работ направлен на устранение недостатков и противоречий теории Власова [118–123] и на её расширение для расчёта композитных тонкостенных стержней [68, 76, 124, 125]. При этом следует отметить, что теория Власова неприменима для расчёта стержней сплошного или замкнутого поперечных сечений.

Традиционно полагается, что эффекты от стеснения депланации для однородных замкнутых и сплошных поперечных сечений пренебрежимо малы, однако в ряде работ отмечается, что для композитных слоистых сечений влияние стеснённой депланации на возникающее НДС может быть значительным [124, 126]. Теория стеснённого кручения замкнутых тонкостенных однородных стержней была разработана Уманским А.А. [127] и в её основе используется гипотеза о равномерном распределении сдвиговых напряжений по толщине тонкой стенки. Существует альтернативный подход применительно к композитным стержням замкнутого профиля [68, 128], основанный на использовании уравнений равновесия и постановки задачи в напряжениях без использования кинематических гипотез. Преимуществом такого подхода является то, что уравнения равновесия выполняются точно. Отдельного внимания заслуживает полусдвиговая теория В.И. Сливкера [129], позволяющая частично учесть влияние деформаций сдвига. В рамках полусдвиговой теории касательные напряжения изгиба полагаются пренебрежимо малыми по сравнению с касательными напряжениями кручения. Значительным достоинством полусдвиговой теории является возможность ее применения для стержней как открытого, так и замкнутого профиля. В работе [130] приведен вывод уравнений равновесия изгиба и кручения тонкостенного стержня с произвольным контуром поперечного сечения по типу кессона крыла самолета в предположении, что пояса лонжеронов и стрингеров обладают жесткостью на растяжение–сжатие, а панели воспринимают только сдвиг. В статье [131] рассмотрена задача о стеснённом кручении однородных изотропных стержней поперечных сечений различных типов (сплошных и открытых). Авторы отмечают, что в случае, если прямоугольное сечение не может рассматриваться как тонкостенная полоса, гипотезы теории Власова для стержней открытого профиля становятся неприменимыми. В работах [124, 132] рассмотрено применение вариационно-асимптотического метода [41] для построения обобщённой теории Власова для анизотропных композитных стержней. Такой подход позволяет рассчитывать достаточно широкий класс задач, однако, как отмечают авторы, обобщённая теория в общем случае не может применяться для расчёта замкнутых тонкостенных профилей.

Эффекты от стеснённого кручения в коротких композитных стержнях произвольного профиля к настоящему времени являются мало исследованными. Поэтому разработка методик расчёта, позволяющих отказаться от введения гипотез под определённые типы поперечных сечений и позволяющих рассчитывать неоднородные стержни произвольного поперечного сечения в рамках единой теории является актуальной задачей.

Цель работы состоит в развитии теории метода асимптотического расщепления и разработке математических моделей деформирования композитных элементов конструкций в виде слоистых цилиндрических оболочек и слоистых анизотропных стержней произвольного поперечного сечения.

В рамках научного исследования ставятся четыре основные задачи.

Первая задача состоит в применении метода асимптотического расщепления к новому для метода классу конструкций: композитных цилиндрических оболочек и разработке математической модели расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке.

Вторая задача заключается в усовершенствовании существующей теории деформирования композитных слоистых анизотропных стержней на основе метода асимптотического расщепления за счет рассмотрения всех совместных видов деформирования стержня: растяжение-сжатия, изгиба в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях и кручения (в том числе стеснённого) стержня.

Третья задача состоит в разработке численного алгоритма для решения методом конечных элементов краевых задач в поперечных сечениях композитных стержней произвольной геометрии, возникающих в методе асимптотического расщепления.

Четвёртая задача заключается в разработке и валидации новых математических моделей для расчета НДС в слоистых стержнях с поперечной плоскостью симметрии анизотропии, а также в исследовании задач стеснённого кручения композитных стержней произвольного профиля (открытого, замкнутого и сплошного).

Научная новизна изложенных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

- Впервые применён метод асимптотического расщепления для решения статических задач деформирования однородных изотропных и композитных цилиндрических оболочек.
- Разработан усовершенствованный вариант теории деформирования композитных слоистых стержней на основе метода асимптотического расщепления с учётом деформаций кручения. Сформулированы новые условия разрешимости краевых задач в сечениях и представления для функции нагружения на внешнем контуре сечения.
- Разработан и верифицирован алгоритм численного решения краевых задач в сечении слоистых стержней произвольной формы методом конечных элементов.
- Разработано семейство математических моделей, позволяющее определять НДС в слоистых стержнях с различной степенью точности. Известные стержневые теории, такие как теория изгиба стержней на основе гипотез Бернулли-Эйлера, теория чистого кручения Сен-Венана и теория стеснённого кручения тонкостенных стержней Власова, являются частными случаями разработанных моделей.
- Получена разрешающая система деформирования слоистых стержней, позволяющая учитывать стеснённое кручение для произвольных типов поперечных сечений: открытых, замкнутых и сплошных.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых математических моделей для расчёта задач прочности композитных слоистых конструкций, свободных от априорных гипотез и обладающих высокой степенью универсальности и широкими границами применимости.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных математических моделей для расчёта используемых на практике как композитных, так и однородных конструкций. Работа частично выполнялась при поддержке гранта РФФИ № 18-29-18029: «Исследование структурных изменений высокопрочных углепластиков авиационного назначения на основе наномодифицированного цианэфирного связующего в открытых климатических условиях при имитации полетных циклов» (2018–2021 гг.) и Программы Центра Национальной технологической инициативы по направлению

«Технологии моделирования и разработки новых функциональных материалов с заданными свойствами» на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (проект 4.1).

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовались: 1) аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2) метод асимптотического расщепления; 3) метод конечных элементов; 4) метод сплайн коллокаций; 5) комплексы программ для конечно-элементного моделирования.

На защиту выносятся результаты, соответствующие пяти областям (2, 3, 4, 11, 12) исследования паспорта специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела» по физико-математическим наукам:

1. Применение метода асимптотического расщепления к новому для метода классу композитных конструкций: осесимметричных композитных цилиндрических оболочек
   (Области исследования 2, 3, 4, 11);
2. Математическая модель расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке, позволяющая восстанавливать все компоненты тензора напряжений без использования априорных гипотез
   (Области исследования 4, 11, 12);
3. Модификация теории пространственного деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода асимптотического расщепления с учётом аппроксимации кручения
   (Области исследования 2, 3, 4, 11);
4. Семейство математических моделей GN расчёта прочности слоистых стержней при трёхмерном нагружении: GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT. Сравнительный анализ, верификация и валидация семейства математических моделей GN
   (Области исследования 4, 11, 12);
5. Программа для ЭВМ BASA (Beam Asymptotic Splitting Analysis), позволяющая рассчитывать прочность композитных слоистых стержней произвольного поперечного сечения
   (Области исследования 11, 12);
6. Результаты математического и численного моделирования задач стеснённого кручения слоистых стержней произвольного профиля с помощью математической модели GN-RWBT
   (Области исследования 11, 12).

Обоснованность и достоверность результатов подтверждаются: 1) сравнением полученных результатов с известными аналитическими решениями; 2) сравнением с численными расчётами методом конечных элементов в двумерных и трёхмерных постановках на подробных сетках с использованием верифицированных комплексов программ; 3) сравнением с известными экспериментальными данными, опубликованными в открытой печати.

Представление работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 14 всероссийских и международных конференциях и семинарах: Российско-французском семинаре «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Ханты-Мансийск, 2019); Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск, 2017; Новосибирск, 2019, 2021, 2022; Красноярск, 2023); Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Томск, 2019; Красноярск, 2023); X международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутск, 2023); Международной конференции «IX Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2020); Международной конференции «Марчуковские научные чтения 2021» (Новосибирск, 2021); Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2017–2020); Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (Новосибирск, 2018, 2024).

В полном объёме материалы диссертации были представлены и обсуждались на семинарах: «Информационно-вычислительные технологии», ФИЦ ИВТ (руководители семинара: академик Ю.И. Шокин, д.ф.-м.н., профессор В.М. Ковеня, д.т.н., доцент В.Б Барахнин); «Теоретическая и прикладная механика», ИТПМ СО РАН (руководители семинара: академик Фомин В.М., д.ф.-м.н. Краус Е.И.); «Математическое моделирование в механике», ИВМ КНЦ СО РАН (руководитель семинара: д.ф.-м.н. Андреев В.К.); «Механика макро- и нано-структур» ИГиЛ СО РАН (руководители семинара: д.ф.-м.н. Коробейников С.Н., д.ф.-м.н. Шутов А.В.); «Краевые задачи в областях с негладкими границами», ИГиЛ СО РАН (руководитель семинара:д.ф.-м.н. Хлуднев А.М.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 19 работах, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, 2 публикации в трудах международных и всероссийских конференций, индексируемых в Web of Science и/или Scopus, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации

1. **Горынин, А. Г.** Исследование стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля методом асимптотического расщепления / А. Г. Горынин, Г. Л. Горынин, С. К.

Голушко // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 3(385). – С. 123-141. – DOI 10.15372/PMTF202315388

2. **Gorynin, A. G.** Mathematical modeling of three-dimensional stress-strain state of homogeneous and composite cylindrical axisymmetric shells / A. G. Gorynin, G. L. Gorynin, S. K. Golushko // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2024. Vol. 17, No. 1. P. 27–37.
3. **Горынин А.Г.**, Горынин Г.Л., Голушко С.К. / Моделирование стесненного кручения композитных стержней сплошных и замкнутых поперечных сечений // Известия вузов. Строительство. 2024. № 10. С. 5-25. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-790-10-5-25
4. **Горынин, А. Г.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665182 Российская Федерация. Программа BASA для расчёта прочности слоистых композитных стержней сложного поперечного сечения : № 2024660781 : заявл. 06.05.2024 : опубл. 27.06.2024
5. Голушко, С. К. Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости / С. К. Голушко, Г. Л. Горынин**, А. Г. Горынин** // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 188. С. 43-53. DOI 10.36535/0233-6723-2020-188-43-53.
6. Golushko, S. A new beam element for the analysis of laminated composites based on the asymptotic splitting method / S. Golushko, **A. Gorynin**, G. Gorynin // Journal of Physics: Conference Series: 9, Novosibirsk, Novosibirsk, 2020. P. 012066. DOI 10.1088/1742-6596/1666/1/012066
7. Golushko S., Gorynin G., **Gorynin A.** Analytic solutions for free vibration analysis of laminated beams in three-dimensional statement //EPJ Web of Conferences. EDP Sciences, 2019. Т. 221. – С. 01012.

Материалы конференций по теме диссертационной работы

1. **Горынин, А. Г.** Исследование собственных колебаний слоистой балки произвольного сечения с двумя степенями свободы / А. Г. Горынин // Тезисы XVIII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Иркутск, 21-25 августа 2017 года. – С. 27–28.
2. **Горынин, А. Г.** Применение метода асимптотического расщепления в задачах статики и динамики композитных слоистых балок / А. Г. Горынин // МНСК-2017: Математика : Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 17–20 апреля 2017 года. – С. 60.

3. **Горынин, А. Г.** Численно-аналитическое исследование собственных колебаний слоистых композитных балок на основе метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // МНСК-2018: Математика: Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 22–27 апреля 2018 года. – С. 167.
4. Голушко, С. К. Численное моделирование колебаний слоистых балок в пространственной постановке / С. К. Голушко, Г. Л. Горынин, **А. Г. Горынин** // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Сборник тезисов российско-французского семинара, Ханты-Мансийск, 25–29 августа 2019 года. – С. 22.
5. **Горынин, А. Г.** Численный анализ собственных колебаний слоистых балок на основе метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // МНСК-2019. Математика: Материалы 57-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 14–19 апреля 2019 года. – С. 142.
6. **Горынин, А. Г.** Численно-аналитическое моделирование собственных колебаний слоистых балок в пространственной постановке / А. Г. Горынин // Тезисы XX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 28 октября – 01 ноября 2019 года. С. 14–15.
7. **Горынин, А. Г.** Теория балки Тимошенко в рамках пространственной теории упругости / А. Г. Горынин // МНСК-2020: Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 10–13 апреля 2020 года. – С. 116.
8. **Горынин, А. Г.** Программная реализация метода асимптотического расщепления для анализа композитных стержней сложного профиля / А. Г. Горынин // Тезисы XXII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Новосибирск, 25–29 октября 2021 года. – С. 10–11.
9. **Горынин, А. Г.** Асимптотическое расщепление задачи деформирования композитных цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления / А. Г. Горынин // Тезисы XXIII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Новосибирск, 24–28 октября 2022 года.– С. 17.
10. **Горынин, А. Г.** Метод асимптотического расщепления в задачах расчета однородных и композитных цилиндрических оболочек / А. Г. Горынин, С. К. Голушко, Г. Л. Горынин // Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности : тезисы докладов, Красноярск, 10–15 июля 2023 года. – С. 27–28.

11. Горынин, Г. Л. Метод асимптотического расщепления в задачах расчета тонкостенных стержней произвольной формы / Г. Л. Горынин, С. К. Голушко, **А. Г. Горынин** // Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности : Тезисы докладов, Красноярск, 10–15 июля 2023 года. – С. 22–23.
12. **Горынин, А. Г.** Математическое моделирование стесненного кручения композитных тонкостенных стержней методом асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // Тезисы XXIV Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Красноярск, 23–27 октября 2023 года. – С. 18–19
13. **Горынин, А. Г.** Численно-аналитическое моделирование задач прочности элементов композитных конструкций с помощью метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин, С. К. Голушко, Г. Л. Горынин // X международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия): Тезисы докладов, Якутск, 17–20 июля 2023 года. – С. 135–136.
14. Golushko S. A combined analytical and numerical approach to solve spatial bending problems of composite beams/ S. K. Golushko, G. L. Gorynin, **A. G. Gorynin** // Marchuk Scientific Readings-2021: Abstracts of the Intern. conf., October 4–8, 2021 / Institute of comput. mathematics and mat. geophysics SB RAS. pp. 43
15. Голушко С.К. Конечно-элементный анализ изгиба композитных стержней на основе метода асимптотического расщепления / С. К. Голушко, Г. Л. Горынин, **А. Г. Горынин** // Тезисы IX международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённой 120-летию академика М. А. Лаврентьева: Тезисы докладов, Новосибирск, 7 – 11 сентября 2020 года. – С. 243–244.

Личный вклад автора заключается в получении новых теоретических результатов, обсуждении и разработке алгоритмов численного решения краевых задач, написании программного кода, работе в прикладных комплексах программ, проведении вычислительных экспериментов, анализе полученных результатов и подготовке публикаций. Вклад соискателя был значимым во всех выносимых на защиту по согласованию с соавторами результатах.

Благодарности. Хочу поблагодарить своего научного руководителя д.ф.-м.н. Голушко Сергея Кузьмича за грамотное руководство по научно-исследовательской работе, за приобретенные фундаментальные навыки и поддержку на всех этапах исследования. Особую признательность выражаю своему отцу, д.ф.-м.н. Горынину Глебу Леонидовичу, за многочасовые консультации по теории метода асимптотического расщепления и за его бесценный вклад в моё

развитие как человека и исследователя. Также благодарю своих коллег: к.ф.-м.н. Беляева Василия Алексеевича и Брындина Луку Сергеевича за ценные советы и всестороннюю помощь на всех этапах работы над диссертацией.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 166 наименований, одного приложения. Объём работы 150 страниц, включая 50 рисунков и 15 таблиц.

Краткое содержание работы по главам. Во **введении** приведены актуальность и степень разработанности темы исследования. Дан литературный обзор работ, посвященных статическим задачам деформирования композитных цилиндрических оболочек и композитных слоистых стержней в линейной упругой постановке. Сформулированы цель работы, объекты и предметы исследования, задачи, решенные в ходе достижения поставленной цели, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, выносимые на защиту результаты, обоснованность и достоверность результатов. Указаны сведения о представлении работы, публикациях и личном вкладе соискателя. Дана структура работы и ее краткое изложение по главам.

Глава 1 посвящена применению метода асимптотического расщепления к задаче расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке. **Глава 2** посвящена усовершенствованию общей теории пространственного деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода асимптотического расщепления. **Глава 3** посвящена разработке, численной реализации, верификации и валидации семейства математических моделей GN, описывающих деформирование слоистых стержней с разной степенью точности. **Глава 4** посвящена математическому моделированию стеснённого кручения композитных слоистых стержней различных типов поперечных сечений на основе разработанной математической модели GN-RWBT. В качестве тестовой рассмотрена задача о кручении консольного стержня концевым закручивающим моментом.

В **заключении** сформулированы выводы на основе проведенного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки исследуемой в работе тематики. В **приложении А** приведена копия свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ BASA и её описание.

1. Математическая модель расчёта напряжённо-деформированного состояния однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке

Цилиндрические композитные оболочки являются важными конструктивными элементами во многих высокотехнологичных отраслях промышленности, таких как авиа- и ракетостроение, производство композитных баков высокого давления. В главе для построения математической модели и исследования пространственного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек используется метод асимптотического расщепления (АР). Особое внимание уделено исследованию коротких и толстостенных цилиндрических оболочек, в которых возникающее НДС является принципиально моментным по всей длине оболочки [133–136].

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу деформирования цилиндрической оболочки в рамках линейной теории упругости в осесимметричной постановке. Для этого введем цилиндрическую систему координат, где ось z направлена вдоль оболочки, ось r направлена вдоль радиуса, а координата θ направлена в окружном направлении. Пусть h, L – толщина и длина оболочки, соответственно. Оболочка может быть выполнена из произвольного числа слоев постоянной по толщине длины, что схематично показано на рисунке 1.1 на примере оболочки из четырех слоев, где каждый слой имеет собственный цвет. Отсчет слоев ведется от внутренней поверхности от 1 до s, где s – количество слоёв. Для удобства записи введём обозначение $\partial_{\alpha}^{k}.$ для операции взятия k-ой производной в направлении α.

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат и в осесимметричной постановке имеют следующий вид

$$\begin{gathered}\partial_r^1(\sigma_{rr})_i + \partial_z^1(\sigma_{rz})_i + \frac{(\sigma_{rr})_i - (\sigma_{\theta\theta})_i}{r} = 0,\\ \partial_r^1(\sigma_{rz})_i + \partial_z^1(\sigma_{zz})_i + \frac{(\sigma_{rz})_i}{r} = 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $(\sigma_{rr})_i$, $(\sigma_{\theta\theta})_i$, $(\sigma_{zz})_i$ – компоненты тензора напряжений в i-ом слое в радиальном, окружном и продольном направлениях соответственно; $(\sigma_{rz})_i$ – сдвиговые напряжения в i-ом слое в плоскости rOz.

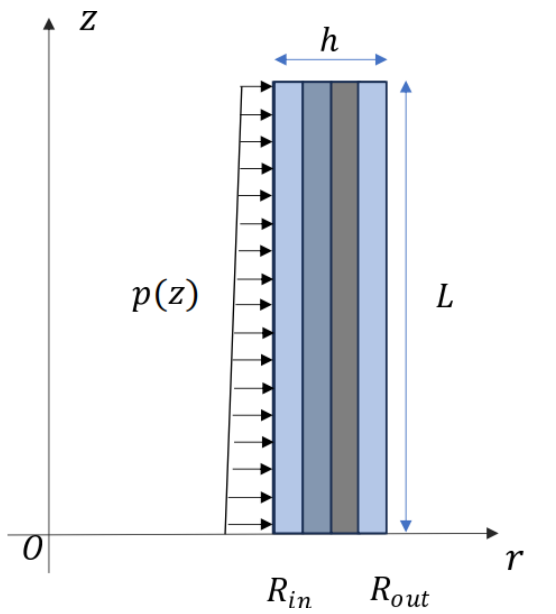


Рисунок 1.1. Схема нагружения композитной цилиндрической оболочки под действием внутренней нагрузки

На внутренней поверхности оболочки действует распределенная осесимметричная нагрузка $p(z)$, касательная составляющая нагрузки отсутствует. Внешняя сторона цилиндра свободна от нагрузок

$$\begin{gathered}(\sigma_{rr})_1(r,z)|_{r=R_{in}} = -p(z), \qquad (\sigma_{rr})_s(r,z)|_{r=R_{out}} = 0, \\ (\sigma_{rz})_1(r,z)|_{r=R_{in}} = 0, \qquad (\sigma_{rz})_s(r,z)|_{r=R_{out}} = 0.\end{gathered} \tag{1.2}$$

где R_{in}, R_{out} – внутренний и внешний радиусы оболочки, соответственно.

Связь между вектором перемещений и тензором деформаций при условии, что окружные компоненты перемещений равны нулю, имеет вид

$$\begin{gathered}(e_{rr})_i = \partial_r^1(u_r)_i, \qquad (e_{\theta\theta})_i = \frac{(u_r)_i}{r}, \qquad (e_{zz})_i = \partial_z^1(u_z)_i, \\ (e_{rz})_i = \frac{1}{2}(\partial_r^1(u_z)_i + \partial_z^1(u_r)_i).\end{gathered} \tag{1.3}$$

На границе между соседними i-ым и j-ым слоями потребуем выполнения непрерывности вектора перемещений и контактных напряжений

$$\begin{gathered}(\sigma_{rr})_i = (\sigma_{rr})_j, \qquad (\sigma_{rz})_i = (\sigma_{rz})_j, \\ (u_\alpha)_i = (u_\alpha)_j, \qquad \alpha \in \{r,\theta,z\}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

В каждом слое справедлив обобщенный закон Гука для ортотропного материала

$$\begin{gathered}(\sigma_{\alpha\alpha})_i = (E_{\alpha r})_i(e_{rr})_i + (E_{\alpha\theta})_i(e_{\theta\theta})_i + (E_{\alpha z})_i(e_{zz})_i, \qquad \alpha \in \{r,\theta,z\}, \\ (\sigma_{rz})_i = 2(G_{rz})_i(e_{rz})_i, \qquad i = (1 \dots s),\end{gathered} \tag{1.5}$$

где оси ортотропии материала сонаправлены с осями главной цилиндрической системы координат; $\left(E_{\alpha\beta}\right)_i, (G_{rz})_i$ – модули упругости для ортотропного материала в i-ом слое.

В совокупности выражения (1.1) – (1.5) образуют неполную краевую задачу теории упругости в осесимметричной постановке, так как не заданы краевые условия на торцах оболочки. Существенного упрощения краевой задачи удаётся достигнуть путём замены полных краевых условий на торцах оболочки на краевые условия для их интегральных характеристик по толщине оболочки (прогиб, изгибающий момент, поперечная сила и т.д.). Далее для построения асимптотического решения вместо полных краевых условий на торцах, будем использовать краевые условия для интегральных характеристик по толщине оболочки, ссылаясь на принцип Сен-Венана.

Перейдем к безразмерным переменным и функциям, не меняя их обозначения за исключением переменной r, которая приводится к безразмерной переменной x

$$x = \frac{r - R_{in}}{h}, \qquad z = \frac{z}{L}, \qquad x, z \in [0,1],$$
$$(u_\alpha)_i = \frac{(u_\alpha)_i}{h}, \qquad \left(E_{\alpha\beta}\right)_i = \frac{\left(E_{\alpha\beta}\right)_i}{\tilde{E}}, \qquad \left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i = \frac{\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i}{\tilde{E}}, \qquad p = \frac{p}{\tilde{E}}, \tag{1.6}$$

где $\tilde{E}$ – характерное значение модулей упругости.

После преобразований получим уравнения равновесия (1.1) в безразмерном виде

$$\begin{gathered} \partial_x^1(\sigma_{rr})_i + \varepsilon\, \partial_z^1(\sigma_{rz})_i + \varepsilon_1 \frac{(\sigma_{rr})_i - (\sigma_{\theta\theta})_i}{1 + \varepsilon_1 x} = 0, \\ \partial_x^1(\sigma_{rz})_i + \varepsilon\, \partial_z^1(\sigma_{zz})_i + \varepsilon_1 \frac{(\sigma_{rz})_i}{1 + \varepsilon_1 x} = 0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

В системе (1.7) присутствуют два параметра: параметр $\varepsilon = h/L$ – характеризует отношение толщины оболочки к её длине и полагается малым по величине для применения асимптотического анализа; параметр $\varepsilon_1 = h/R_{in}$ – характеризует отношение толщины оболочки к её внутреннему радиусу и не обязан быть малым по величине.

Соотношения (1.3) в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{gathered} (e_{rr})_i = \partial_x^1(u_r)_i, \qquad (e_{\theta\theta})_i = \varepsilon_1 \frac{(u_r)_i}{1 + \varepsilon_1 x}, \qquad (e_{zz})_i = \varepsilon \partial_z^1(u_z)_i, \\ (e_{rz})_i = \frac{1}{2}\left(\partial_x^1(u_z)_i + \varepsilon \partial_z^1(u_r)_i\right). \end{gathered} \tag{1.8}$$

1.2 Процедура асимптотического расщепления

Положим, что компоненты вектора перемещений и тензора напряжений представимы в виде следующих разложений по малому параметру ε

$$\left(u_z^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(u_r^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(U_r^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \tag{1.9}$$

$$\left(\sigma_{zz}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{rz}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\tau_{rz}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k,$$
$$\left(\sigma_{\alpha\alpha}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(\tau_{\alpha\alpha}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \quad \alpha \in \{r, \theta\}, \tag{1.10}$$

где $\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}$, $\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}$ – жесткостные функции, зависящие только от радиальной координаты и описывающие распределение перемещений и напряжений по толщине оболочки, соответственно; $\eta^{(n)}(z)$ – некоторая функция, зависящая только от продольной координаты z и описывающая деформирование оболочки на макроуровне; n – номер асимптотического приближения. Физический смысл функции $\eta^{(n)}$ будет раскрыт чуть позже.

Подставим выражения для перемещений (1.9) и напряжений (1.10) в обобщённый закон Гука (1.5) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях малого параметра. Получим связь между жесткостными функциями $\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}$ и $\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}$ для порядкового номера k

$$\left(\tau_{\alpha\alpha}^\eta\right)_i^{(k)} = (E_{\alpha r})_i \partial_x^1 \left(U_r^\eta\right)_i^{(k)} + (E_{\alpha\theta})_i\, \varepsilon_1 \frac{\left(U_r^\eta\right)_i^{(k)}}{1+\varepsilon_1 x} + (E_{\alpha z})_i \left(U_z^\eta\right)_i^{(k-1)},$$
$$\left(\tau_{rz}^\eta\right)_i^{(k)} = (G_{rz})_i \left(\partial_x^1 \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} + \left(U_r^\eta\right)_i^{(k-1)}\right). \tag{1.11}$$

Для удобства записи введём обозначение $\langle \dots \rangle$ для операции интегрирования некоторой величины по толщине оболочки с учётом того, что из-за слоистой структуры подынтегральные функции задаются послойно и необходимо интегрировать в пределах толщины каждого слоя x_i отдельно, а затем суммировать

$$\langle \dots \rangle = \sum_{i=1}^{s} \int_{x_i} (\dots)\, dx. \tag{1.12}$$

Подставим выражения для напряжений (1.10) в краевые условия на внутренней поверхности оболочки (1.2), получим дифференциальные соотношения между функцией нагрузки $p(z)$ и функцией макродеформирования $\eta^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{n+3} A_{rr}^{\eta,k}\, \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = p(z), \qquad \sum_{k=0}^{n+2} A_{rz}^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = 0, \qquad x = 0, \tag{1.13}$$

где $A_{rr}^{\eta,k}, A_{rz}^{\eta,k}$ – некоторые константы, которые удовлетворяют соотношениям

$$A_{rr}^{\eta,k} = -\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}(0), \qquad A_{rz}^{\eta,k} = -\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}(0).$$

Аналогично, подставляя выражения для напряжений (1.10) в краевые условия на внешней свободной поверхности оболочки (1.2), получим

$$\sum_{k=0}^{n+3}\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n+2}\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = 0, \qquad x = 1. \tag{1.14}$$

При этом заметим, что соотношения (1.14) выполняются автоматически, если выполнены следующие условия

$$\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}(1) = 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}(1) = 0. \tag{1.15}$$

Краевые задачи по толщине оболочки. Подставляя выражения (1.9), (1.10) в уравнения равновесия (1.7) и собирая слагаемые при одинаковых степенях малого параметра ε, получим ряд дифференциальных уравнений по толщине оболочки при разных значениях номера k

$$\begin{cases} \partial_x^1\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} + \varepsilon_1 \dfrac{\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)} - \left(\tau_{\theta\theta}^{\eta}\right)_i^{(k)}}{1+\varepsilon_1 x} = 0, \\ \partial_x^1\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} + \varepsilon_1 \dfrac{\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}}{1+\varepsilon_1 x} = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Заметим, что уравнения можно упростить, внеся множитель $1 + \varepsilon_1 x$ под знак производной

$$\begin{cases} \partial_x^1\left((1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}\right) + (1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} - \varepsilon_1\left(\tau_{\theta\theta}^{\eta}\right)_i^{(k)} = 0, \\ \partial_x^1\left((1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}\right) + (1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Краевые условия на внешней и внутренней поверхностях для функций $\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}, \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}$ следуют из соотношений (1.13), (1.14) и (1.15)

$$\begin{aligned} \left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}(0) &= -A_{rr}^{\eta,k}, \qquad \left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)}(1) = 0, \\ \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}(0) &= -A_{rz}^{\eta,k}, \qquad \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)}(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

На границе между соседними слоями выполняются условия согласования, которые следуют из подстановки выражений (1.9), (1.10) в (1.4)

$$
\begin{gathered}
\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_j^{(k)}, \qquad \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_j^{(k)}, \\
\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(U_{\alpha}^{\eta}\right)_j^{(k)}, \qquad \alpha \in \{r, z\}, \qquad i, j = (1 \dots s).
\end{gathered} \tag{1.19}
$$

Проинтегрируем систему (1.16) по x и учтём граничные условия (1.18). С учётом введённого обозначения (1.12) получим выражения для коэффициентов $A_{rr}^{\eta,k}$, $A_{rz}^{\eta,k}$

$$
\begin{gathered}
A_{rr}^{\eta,k} = \langle \varepsilon_1 \left(\tau_{\theta\theta}^{\eta}\right)_i^{(k)} - (1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \rangle, \\
A_{rz}^{\eta,k} = -\langle (1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \rangle.
\end{gathered} \tag{1.20}
$$

При этом введем следующие интегральные величины, которые понадобятся в дальнейшем

$$
B_{\alpha}^{\eta,k} = -\langle (1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \rangle, \qquad B_{\theta}^{\eta,k} = -\langle \left(\tau_{\theta\theta}^{\eta}\right)_i^{(k)} \rangle, \quad \alpha \in (r, z), \tag{1.21}
$$

Коэффициенты $B_r^{\eta,k}$ и $B_z^{\eta,k}$ будем называть сдвиговой и продольной жёсткостью цилиндрической оболочки соответственно для порядкового номера k. Коэффициент $B_{\theta}^{\eta,k}$будем называть окружной жесткостью оболочки для порядкового номера k. При этом отметим, что величина $A_{rz}^{\eta,k}$ совпадает с $B_z^{\eta,k}$, а коэффициент $A_{rr}^{\eta,k}$ выражается через жесткости $B_r^{\eta,k}, B_{\theta}^{\eta,k}$ следующим образом

$$
A_{rr}^{\eta,k} = B_r^{\eta,k} - B_{\theta}^{\eta,k}, \;\; A_{rz}^{\eta,k} = B_z^{\eta,k}.
$$

Выражения (1.11), (1.16), (1.18), (1.19) образуют краевые задачи по толщине оболочки для нахождения жесткостных функций $\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)}, \left(U_{\alpha}^{\eta}\right)_i^{(k)}$ для порядкового номера k. Выражения (1.20) задают необходимые условия разрешимости краевых задач, которые одновременно являются формулами для нахождения величин $A_{rr}^{\eta,k}$ и $A_{rz}^{\eta,k}$.

Краевая задачи при $\boldsymbol{k = 0}$. Рассмотрим решение краевой задачи при $k = 0$. При этом учтём, что если порядковый номер k для жесткостной функции становится отрицательным, то эта функция тождественно равна нулю. В этом случае уравнения (1.16) примут вид

$$
\begin{cases}
\partial_x^1 \left((1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{rr}^{\eta}\right)_i^{(0)} \right) - \varepsilon_1 \left(\tau_{\theta\theta}^{\eta}\right)_i^{(0)} = 0, \\
\partial_x^1 \left((1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{\eta}\right)_i^{(0)} \right) = 0.
\end{cases} \tag{1.22}
$$

Связь между $\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(0)}$ и $\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)_i^{(0)}$в соответствии с (1.11) при $k = 0$ имеет вид

$$\left(\tau^{\eta}_{\alpha\alpha}\right)^{(0)}_{i} = (E_{\alpha r})_i \partial^1_x \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} + (E_{\alpha\theta})_i \, \varepsilon_1 \frac{\left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i}}{1+\varepsilon_1 x}, \qquad \alpha \in (r,\theta),$$

$$\left(\tau^{\eta}_{rz}\right)^{(0)}_{i} = (G_{rz})_i \partial^1_x \left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i}. \tag{1.23}$$

Краевые условия при $k = 0$

$$\begin{gathered}
\left(\tau^{\eta}_{rr}\right)^{(0)}_{i}(0) = -A^{\eta,0}_{rr}, \qquad \left(\tau^{\eta}_{rr}\right)^{(0)}_{i}(1) = 0, \\
\left(\tau^{\eta}_{rz}\right)^{(0)}_{i}(0) = -B^{\eta,0}_{z}, \qquad \left(\tau^{\eta}_{rz}\right)^{(0)}_{i}(1) = 0,
\end{gathered} \tag{1.24}$$

где $A^{\eta,0}_{rr} = \varepsilon_1 \left\langle \left(\tau^{\eta}_{\theta\theta}\right)^{(0)}_{i} \right\rangle, B^{\eta,0}_{z} = 0.$

Подставим выражения (1.23) в (1.22), получим, что краевая задача распадается на два независимых уравнения

$$\begin{cases}
(1+\varepsilon_1 x)^2 (E_{rr})_i \, \partial^2_x \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} + \varepsilon_1 (1+\varepsilon_1 x)(E_{rr})_i \partial^1_x \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} - \varepsilon_1{}^2 (E_{\theta\theta})_i \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} = 0, \\
(1+\varepsilon_1 x)(G_{rz})_i \partial^2_x \left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i} + \varepsilon_1 (G_{rz})_i \partial^1_x \left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i} = 0.
\end{cases} \tag{1.25}$$

Нетрудно заметить, что и первое и второе уравнение (1.25) являются обобщёнными уравнениями Эйлера, дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами в каждом слое и с помощью замены $1 + \varepsilon_1 x = e^t$ они могут быть приведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered}
(E_{rr})_i \, \partial^2_t \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} - (E_{\theta\theta})_i \left(U^{\eta}_{r}\right)^{(0)}_{i} = 0, \\
(G_{rz})_i \partial^2_t \left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i} = 0.
\end{gathered} \tag{1.26}$$

Заметим, что коэффициенты $(G_{rz})_i$ во втором уравнении сокращаются и условия согласования (1.19) при $k = 0$ выполняются автоматически. Тогда второе уравнение (1.26) с учётом замены $1 + \varepsilon_1 x = e^t$ имеет общее решение

$$\left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i} = \left(A^{\eta}_{z}\right)^{(0)} + \left(C^{\eta}_{z}\right)^{(0)} \ln(1+\varepsilon_1 x). \tag{1.27}$$

Потребуем выполнения краевых условий (1.24) на правой границе при $x = 1$. Необходимое условие на левой границе (1.24) выполнится автоматически. Тогда решение (1.27) будет постоянным

$$\left(U^{\eta}_{z}\right)^{(0)}_{i} = \left(A^{\eta}_{z}\right)^{(0)}, \qquad \left(C^{\eta}_{z}\right)^{(0)} = 0. \tag{1.28}$$

Для первого уравнения (1.26) коэффициенты не сокращаются и в каждом слое необходимо решать характеристическое уравнение

$$(E_{rr})_i\,(\lambda)_i^2 - (E_{\theta\theta})_i = 0, \quad \left(\lambda_{1,2}\right)_i = \pm\sqrt{\frac{(E_{\theta\theta})_i}{(E_{rr})_i}}, \qquad i = (1,\dots,s), \tag{1.29}$$

Тогда первое уравнение (1.26) с учётом замены $1+\varepsilon_1 x = e^t$ и соотношений (1.29) имеет следующее решение

$$\left(U_r^\eta\right)_i^{(0)} = \left(A_r^\eta\right)_i^{(0)}(1+\varepsilon_1 x)^{(\lambda_1)_i} + \left(C_r^\eta\right)_i^{(0)}(1+\varepsilon_1 x)^{(\lambda_2)_i}, \qquad i = (1,\dots,s). \tag{1.30}$$

Таким образом всего решение (1.30) зависит от $2s$ констант $\left(A_r^\eta\right)_i^{(0)}, \left(C_r^\eta\right)_i^{(0)}$. При этом в силу того, что выполняются $2(s-1)$ условие согласования между слоями, то неопределёнными являются еще 2 константы. С учётом граничного условия (1.24) на правой границе, получим, что решение (1.30) определено с точностью до одной константы. Необходимые условия на левой границе (1.24) отрезка $x=[0,1]$ выполняются автоматически в силу необходимых условий разрешимости (1.20).

Таким образом решение (1.27), (1.30) нулевой краевой задачи $\left(U_r^\eta\right)_i^{(0)}, \left(U_z^\eta\right)_i^{(0)}$ определено с точностью до двух постоянных. Для их определения нужны еще дополнительные условия, называемые условиями нормировки, которые могут быть наложены произвольным образом. Потребуем, чтобы при $k \geq 1$ выполнялись следующие условия нормировки

$$\langle\left(U_r^\eta\right)_i^{(k)}\rangle = \langle\left(U_z^\eta\right)_i^{(k)}\rangle = 0, \qquad k \geq 1. \tag{1.31}$$

Следует отметить, что краевая задача (1.11), (1.16), (1.18), (1.19), (1.20) для любого номера k определена с точностью до решений, аналогичных выражениям (1.27), (1.30)

$$\begin{gathered}\left(U_r^\eta\right)_i^{(k)} = \left(A_r^\eta\right)_i^{(k)}(1+\varepsilon_1 x)^{(\lambda_1)_i} + \left(C_r^\eta\right)_i^{(k)}(1+\varepsilon_1 x)^{(\lambda_2)_i}, \qquad i = (1,\dots,s), \\ \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} = \left(A_z^\eta\right)^{(k)} + \left(C_z^\eta\right)^{(k)}\ln(1+\varepsilon_1 x).\end{gathered} \tag{1.32}$$

Всего в зависимости от выбора двух постоянных в решении нулевой краевой задачи существует два линейно независимых варианта способов аппроксимации, которые мы и рассмотрим далее.

Первый допустимый способ аппроксимации (изгиб в плоскости rOz).

Решение нулевой краевой задачи (1.27), (1.30) определено с точностью до двух неизвестных. Для того, чтобы зафиксировать решение потребуем, чтобы выполнялись следующие условия, при этом функцию η обозначим через символ v_r. Для конкретного асимптотического приближения с асимптотическим номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через ${v_r}^{(n)}$

$$\langle\big(U_r^{v_r}\big)_i^{(0)}\rangle = 1, \qquad \langle\big(U_z^{v_r}\big)_i^{(0)}\rangle = 0. \tag{1.33}$$

Формулы (1.33) с учётом условий нормировки (1.31) для следующих порядковых номеров k и выражений для функций перемещений (1.9) приводят к тому, что справедливы следующие выражения

$$v_r{}^{(n)} = \langle\big(u_r^{v_r}\big)_i\rangle, \qquad \langle\big(u_z^{v_r}\big)_i\rangle = 0. \tag{1.34}$$

Формулы (1.34) наделяют функцию $v_r^{(n)}(z)$ физическим содержанием. Она равняется среднему перемещению всех точек поперечного среза оболочки при заданной координате z в направлении оси r, средние перемещения в направлении z при этом равны нулю. В дальнейшем функцию $v_r^{(n)}$ будем называть функцией прогиба оболочки в направлении оси r, или, что тоже самое, макроперемещением в направлении оси r. Приставка «макро» показывает, что значения этой функции являются характеристиками всего пакета слоёв оболочки с данной координатой z. Первый способ аппроксимации для краткости будем называть v_r-аппроксимацией.

Краевая задача при $k = 1$. С учётом общего решения нулевой краевой задачи (1.28), (1.30) и условий (1.33) имеем

$$\begin{gathered}\big(U_r^{v_r}\big)_i^{(0)} \neq 0, \qquad \big(U_z^{v_r}\big)_i^{(0)} = 0,\\ \big(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\big)_i^{(0)} = \big(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\big)_i^{(0)} = \big(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\big)_i^{(0)} \neq 0, \qquad \big(\tau_{rz}^{v_r}\big)_i^{(0)} = 0,\\ A_{rr}^{v_r,1} = \langle\varepsilon_1\big(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\big)_i^{(1)}\rangle, \qquad B_z^{v_r,1} = -\langle(1+\varepsilon_1 x)\big(\tau_{zz}^{v_r}\big)_i^{(0)}\rangle.\end{gathered} \tag{1.35}$$

Уравнения (1.17) при $k = 1$ с учётом решений (1.35) имеют вид

$$\begin{cases} \partial_x^1\Big((1+\varepsilon_1 x)\big(\tau_{rr}^{v_r}\big)_i^{(1)}\Big) - \varepsilon_1\big(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\big)_i^{(1)} = 0,\\ \partial_x^1\Big((1+\varepsilon_1 x)\big(\tau_{rz}^{v_r}\big)_i^{(1)}\Big) + (1+\varepsilon_1 x)\,\big(\tau_{zz}^{v_r}\big)_i^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Граничные условия при $k = 1$

$$\begin{gathered}\big(\tau_{rr}^{v_r}\big)_i^{(1)}(0) = -A_{rr}^{v_r,1}, \qquad \big(\tau_{rr}^{v_r}\big)_i^{(1)}(1) = 0,\\ \big(\tau_{rz}^{v_r}\big)_i^{(1)}(0) = -B_z^{v_r,1}, \qquad \big(\tau_{rz}^{v_r}\big)_i^{(1)}(1) = 0.\end{gathered} \tag{1.37}$$

Связь между жесткостными функциями (1.11) при $k = 1$

$$\begin{gathered}\big(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\big)_i^{(1)} = (E_{\alpha r})_i\partial_x^1\big(U_r^{v_r}\big)_i^{(1)} + (E_{\alpha\theta})_i\,\varepsilon_1\frac{\big(U_r^{v_r}\big)_i^{(1)}}{1+\varepsilon_1 x},\\ \big(\tau_{rz}^{v_r}\big)_i^{(1)} = (G_{rz})_i\Big(\partial_x^1\big(U_z^{v_r}\big)_i^{(1)} + 1\Big).\end{gathered} \tag{1.38}$$

Условия нормировки при $k = 1$

$$\langle \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(1)} \rangle = \langle \left(U_z^{v_r}\right)_i^{(1)} \rangle = 0. \tag{1.39}$$

Нетрудно заметить, что решение краевой задачи (1.36) – (1.39) при $k = 1$ имеет вид

$$\begin{gathered}
\langle \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(1)} \rangle = 0, \qquad \langle \left(U_z^{v_r}\right)_i^{(1)} \rangle \neq 0, \\
\left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} = A_{rr}^{v_r,1} = 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(1)} \neq 0, \\
A_{rr}^{v_r,2} = \langle \varepsilon_1 \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(2)} - (1 + \varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(1)} \rangle, \qquad B_z^{v_r,2} = 0.
\end{gathered} \tag{1.40}$$

Повторяя аналогичные рассуждения при следующих номерах $k \geq 1$ получим, что справедливы следующие соотношения

при четных k

$$\begin{gathered}
\left(U_r^{v_r}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(k)} \neq 0\,, \qquad A_{rr}^{v_r,k} \neq 0, \qquad \alpha \in (r, \theta, z), \\
\left(U_z^{v_r}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_z^{v_r,k} = 0.
\end{gathered} \tag{1.41}$$

при нечётных k

$$\begin{gathered}
\left(U_r^{v_r}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(k)} = 0\,, \qquad A_{rr}^{v_r,k} = 0, \qquad \alpha \in (r, \theta, z), \\
\left(U_z^{v_r}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad B_z^{v_r,k} \neq 0.
\end{gathered} \tag{1.42}$$

С учётом полученных решений (1.40) – (1.42), получим, что выражения для перемещений (1.9) упрощаются в силу того, что некоторые жесткостные функции тождественно равны нулю

$$\begin{gathered}
\left(u_z^{v_r}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{[0.5(n+1)]} \left(U_z^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_r}^{(n)} \varepsilon^{2k+1}, \\
\left(u_r^{v_r}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{[0.5(n+3)]} \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_r}^{(n)} \varepsilon^{2k},
\end{gathered} \tag{1.43}$$

где операция [...] обозначает взятие целой части. Выражения для напряжений (1.10) примут вид

$$\begin{gathered}
\left(\sigma_{zz}^{v_r}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{[0.5(n+1)]} \left(\tau_{zz}^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_r}^{(n)} \varepsilon^{2k}, \\
\left(\sigma_{rz}^{v_r}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{[0.5(n+1)]} \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_r}^{(n)} \varepsilon^{2k+1}, \\
\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{[0.5(n+3)]} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_r}^{(n)} \varepsilon^{2k}, \quad \alpha \in \{r, \theta\}.
\end{gathered} \tag{1.44}$$

С учётом структуры решения (1.41), (1.42) выражения (1.13) задают дифференциальные соотношения между функцией нагрузки $p(z)$ и функцией макродеформирования $v_r^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{[0.5(n+3)]} A_{rr}^{v_r,2k}\,\partial_z^{2k} v_r^{(n)} \varepsilon^{2k} = p(z), \qquad \sum_{k=0}^{[0.5(n+1)]} B_z^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} v_r^{(n)} \varepsilon^{2k+1} = 0. \tag{1.45}$$

Система (1.45) задаёт два дифференциальных уравнения на одну неизвестную функцию $v_r^{(n)}$ и поэтому переопределена. Для того, чтобы устранить переопределённость и получить разрешающую систему уравнений деформирования необходимо рассмотреть второй допустимый способ аппроксимации.

Второй допустимый способ аппроксимации (расстяжение-сжатие вдоль оси z). Решение нулевой краевой задачи (1.27), (1.30) определено с точностью до двух неизвестных. Для того, чтобы зафиксировать решение потребуем, чтобы выполнялись следующие условия, при этом функцию η обозначим через символ v_z. Для конкретного асимптотического приближения с асимптотическим номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через ${v_z}^{(n)}$

$$\langle \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(0)} \rangle = 0, \qquad \langle \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(0)} \rangle = 1. \tag{1.46}$$

Формулы (1.33) с учётом условий нормировки (1.31) для следующих порядковых номеров k и выражений для функций перемещений (1.9) приводят к тому, что справедливы следующие выражения

$${v_z}^{(n)} = \langle \left(u_z^{v_z}\right)_i \rangle, \qquad \langle \left(u_r^{v_z}\right)_i \rangle = 0. \tag{1.47}$$

Формулы (1.47) наделяют функцию $v_z^{(n)}$ физическим содержанием. Она равняется среднему перемещению всех точек поперечного среза оболочки при заданной координате z в направлении оси z, средние перемещения в направлении r при этом равны нулю. В дальнейшем функцию $v_z^{(n)}$ будем называть функцией растяжения-сжатия оболочки в направлении оси z, или, что тоже самое, макроперемещением в направлении оси z. Второй способ аппроксимации для краткости будем называть v_z-аппроксимацией.

Краевая задача при $\boldsymbol{k = 1}$. С учётом общего решения нулевой краевой задачи (1.28), (1.30) и условий (1.46) имеем

$$\begin{gathered}
\left(U_r^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(0)} = 1, \\
\left(\tau_{\theta\theta}^{v_z}\right)_i^{(0)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_z}\right)_i^{(0)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0, \\
A_{rr}^{v_z,1} = 0, \qquad B_z^{v_z,1} = 0.
\end{gathered} \tag{1.48}$$

Уравнения (1.17) при $k = 1$ с учётом решений (1.48) имеют вид

$$\begin{cases} \partial_x^1\left((1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{rr}^{v_z}\right)_i^{(1)}\right) - \varepsilon_1\left(\tau_{\theta\theta}^{v_z}\right)_i^{(1)} = 0, \\ \partial_x^1\left((1+\varepsilon_1 x)\left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(1)}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

Граничные условия при $k = 1$

$$\begin{aligned} &\left(\tau_{rr}^{v_z}\right)_i^{(1)}(0) = -A_{rr}^{v_z,1}, \qquad \left(\tau_{rr}^{v_z}\right)_i^{(1)}(1) = 0, \\ &\left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(1)}(0) = -B_{z}^{v_z,1}, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(1)}(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Связь между жесткостными функциями (1.11) при $k = 1$

$$\begin{gathered} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(1)} = (E_{\alpha r})_i \partial_x^1\left(U_r^{v_z}\right)_i^{(1)} + (E_{\alpha\theta})_i\, \varepsilon_1 \frac{\left(U_r^{v_z}\right)_i^{(1)}}{1+\varepsilon_1 x} + (E_{\alpha z})_i\,, \\ \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(1)} = (G_{rz})_i \partial_x^1\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(1)}. \end{gathered} \tag{1.51}$$

Условия нормировки при $k = 1$

$$\langle\left(U_r^{v_z}\right)_i^{(1)}\rangle = \langle\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(1)}\rangle = 0. \tag{1.52}$$

Нетрудно заметить, что решение краевой задачи (1.49) – (1.52) при $k = 1$ имеет вид

$$\begin{gathered} \langle\left(U_r^{v_z}\right)_i^{(1)}\rangle \neq 0, \qquad \langle\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(1)}\rangle = 0, \\ \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{\theta\theta}^{v_r}\right)_i^{(1)} \neq 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(1)} = 0. \\ A_{rr}^{v_z,2} = 0, \qquad B_z^{v_z,2} \neq 0. \end{gathered} \tag{1.53}$$

Повторяя аналогичные рассуждения при следующих номерах $k \geq 1$ получим, что справедливы следующие соотношения

при четных k

$$\begin{gathered} \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0\,, \qquad A_{rr}^{v_z,k} = 0, \qquad \alpha \in (r,\theta,z), \\ \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad B_z^{v_z,k} \neq 0. \end{gathered} \tag{1.54}$$

при нечётных k

$$\begin{gathered} \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(k)} \neq 0, \qquad \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(k)} \neq 0\,, \qquad A_{rr}^{v_z,k} \neq 0, \qquad \alpha \in (r,\theta,z), \\ \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_z^{v_z,k} = 0. \end{gathered} \tag{1.55}$$

С учётом полученных решений (1.48), (1.54), (1.55) получим, что выражения для перемещений (1.9) упрощаются в силу того, что некоторые жесткостные функции тождественно равны нулю

$$\begin{aligned} \left(u_z^{v_z}\right)_i^{(n)} &= \sum_{k=0}^{[0.5(n+2)]} \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_z}^{(n)} \varepsilon^{2k}, \\ \left(u_r^{v_z}\right)_i^{(n)} &= \sum_{k=0}^{[0.5(n+2)]} \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(n)} \varepsilon^{2k+1}. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Выражения для напряжений (1.10) примут вид

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{zz}^{v_z}\right)_i^{(n)} &= \sum_{k=0}^{[0.5(n)]} \left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(n)} \varepsilon^{2k+1}, \\ \left(\sigma_{rz}^{v_z}\right)_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^{[0.5(n+2)]} \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_z}^{(n)} \varepsilon^{2k}, \\ \left(\sigma_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(n)} &= \sum_{k=0}^{[0.5(n+2)]} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(n)} \varepsilon^{2k+1}, \quad \alpha \in \{r, \theta\}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

С учётом структуры решения (1.54), (1.55) выражения (1.13) задают дифференциальные соотношения между функцией нагрузки $p(z)$ и функцией макродеформирования $v_z^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{[0.5(n+2)]} A_{rr}^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} v_z^{(n)} \varepsilon^{2k+1} = p(z), \qquad \sum_{k=1}^{[0.5(n+2)]} B_z^{v_z,2k} \partial_z^{2k} v_z^{(n)} \varepsilon^{2k} = 0. \tag{1.58}$$

Система (1.58) задаёт два дифференциальных уравнения на одну неизвестную функцию $v_z^{(n)}$.

1.3 Разрешающая система уравнений деформирования цилиндрической оболочки

С учётом двух способов аппроксимации итоговые напряжения и перемещения находятся как сумма компонент по каждой из аппроксимаций по правилу суперпозиции. При этом номер асимптотического приближения n для каждого из способов аппроксимации не обязан совпадать. В связи с этим введём вектор асимптотического приближения $\bar{n} = \left(n_{v_r}, n_{v_z}\right)$, состоящий из номеров асимптотических приближений для каждого из двух способов аппроксимации

$$\begin{aligned} (u_\alpha)_i^{(\bar{n})} &= \left(u_\alpha^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(u_\alpha^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})}, \qquad \alpha \in (r, z), \\ \left(\sigma_{\beta\beta}\right)_i^{(\bar{n})} &= \left(\sigma_{\beta\beta}^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(\sigma_{\beta\beta}^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})}, \qquad \beta \in (r, \theta, z), \\ (\sigma_{rz})_i^{(\bar{n})} &= \left(\sigma_{rz}^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(\sigma_{rz}^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})}, \quad \bar{n} = \left(n_{v_r}, n_{v_z}\right). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Аналогичным образом, объединяя системы дифференциальных уравнений (1.45) и (1.58), получим общую систему из двух дифференциальных уравнений на две неизвестные, связывающую внешнюю нагрузку $p(z)$ с функциями макродеформирования оболочки $v_r^{(n_{v_r})}$, $v_z^{(n_{v_z})}$

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} A_{rr}^{v_z,2k+1}\,\partial_z^{2k+1} v_z^{(n_{v_z})}\varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+3)]} A_{rr}^{v_r,2k}\,\partial_z^{2k} v_r^{(n_{v_r})}\varepsilon^{2k} = p(z),\\
\sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_z^{v_z,2k}\partial_z^{2k} v_z^{(n_{v_z})}\varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} B_z^{v_r,2k+1}\partial_z^{2k+1} v_r^{(n_{v_r})}\varepsilon^{2k+1} = 0.
\end{gathered} \tag{1.60}$$

Порядок системы разрешающих дифференциальных уравнений (1.60) растёт в зависимости от номеров асимптотических приближений n_{v_r}, n_{v_z} для двух способов аппроксимации решения. В дальнейшем для краткости записи будем опускать верхний индекс в функциях $v_r^{(n_{v_r})}, v_z^{(n_{v_z})}$.

Система (1.60) задаёт связь между нагрузкой и макрофункциями перемещений оболочки, тем самым исходная задача сводится к решению задачи меньшей размерности по длине оболочки. Решив систему (1.60) и определив неизвестные функции v_r, v_z можно восстановить перемещения и напряжения по формулам (1.59), которые для перемещений примут вид

$$\begin{gathered}
(u_z)_i^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_z \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} \left(U_z^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1},\\
(u_r)_i^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+3)]} \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k}.
\end{gathered} \tag{1.61}$$

В свою очередь для напряжений получим следующие выражения

$$\begin{gathered}
(\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} \left(\tau_{zz}^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z})]} \left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1},\\
(\sigma_{rz})_i^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_z \varepsilon^{2k},\\
(\sigma_{\alpha\alpha})_i^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+3)]} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1},\\
\alpha \in \{r, \theta\}.
\end{gathered} \tag{1.62}$$

Для решения системы (1.60) необходимо поставить краевые условия на торцах оболочки через интегральные характеристики сечения по принципу Сен-Венана. Для этого используем величины внутренних усилий: продольного усилия ${N_z}^{(\bar{n})}$ вдоль оси z, окружного усилия ${N_\theta}^{(\bar{n})}$ вдоль оси θ , перерезывающей силы ${Q_r}^{(\bar{n})}$ вдоль оси r, изгибающего момента ${M_r}^{(\bar{n})}$ в плоскости rOz. С учётом главных кривизн цилиндрической оболочки и безразмерных переменных, по определению внутренние усилия равны

$$
\begin{gathered}
{N_z}^{(\bar{n})} = \langle (1+\varepsilon_1 x)\, (\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} \rangle, \qquad {N_\theta}^{(\bar{n})} = \langle\, (\sigma_{\theta\theta})_i^{(\bar{n})} \rangle, \\
{Q_r}^{(\bar{n})} = \langle (1+\varepsilon_1 x)\, (\sigma_{rz})_i^{(\bar{n})} \rangle, \qquad {M_r}^{(\bar{n})} = \langle (x-0.5)\, (1+\varepsilon_1 x)\, (\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} \rangle\,.
\end{gathered} \tag{1.63}
$$

Подставляя выражения для компонент напряжений (1.62) в формулы для внутренних усилий (1.63) получим связь между внутренними усилиями ${N_z}^{(\bar{n})}$, ${Q_r}^{(\bar{n})}$ и функциями макроперемещений v_r, v_z

$$
\begin{aligned}
{N_z}^{(\bar{n})} &= -\sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} B_z^{v_r,2k+1} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} - \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z})]} B_z^{v_z,2k+2} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1}, \\
{N_\theta}^{(\bar{n})} &= -\sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+3)]} B_\theta^{v_r,2k+1} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} - \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_\theta^{v_z,2k+2} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1}, \\
{Q_r}^{(\bar{n})} &= -\sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} B_r^{v_r,2k+2} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1} - \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_r^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k} v_z \varepsilon^{2k}.
\end{aligned} \tag{1.64}
$$

Если подставить выражения для напряжений (1.62) в формулу для изгибающего момента (1.63), то получим следующие соотношения

$$
\begin{gathered}
{M_r}^{(\bar{n})} = \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} I_r^{v_r,2k} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z})]} I_r^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1}\,, \\
I_r^{\eta,k} = \langle (x-0.5)\, (1+\varepsilon_1 x)\, \left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \rangle,
\end{gathered} \tag{1.65}
$$

где вводится новая величина $I_r^{\eta,k}$. Заметим, что если умножить второе уравнение (1.17) на x, внести x под знак производной и проинтегрировать с учётом краевых условий на границе (1.18), то получим, что постоянная $I_r^{\eta,k}$ выражается через продольные и сдвиговые жёсткости следующим образом

$$
I_r^{\eta,k} = -B_z^{\eta,k+1} - B_r^{\eta,k+2}. \tag{1.66}
$$

Можно заметить, что выполняются уравнения равновесия в терминах внутренних усилий

$$
\varepsilon \frac{d}{dz} {N_z}^{(\bar{n})} = 0, \qquad \varepsilon \frac{d}{dz} {M_r}^{(\bar{n})} = {Q_r}^{(\bar{n})}, \qquad \varepsilon \frac{d}{dz} {Q_r}^{(\bar{n})} - \varepsilon_1 {N_\theta}^{(\bar{n})} = p(z). \tag{1.67}
$$

Действительно, если подставить выражения для внутренних усилий (1.64), (1.65) в уравнения (1.67), то снова получим систему уравнений (1.60).

Угол наклона нормали оболочки. Угол наклона нормали определяется по методу наименьших квадратов, минимизируя среднеквадратичное отклонение прямой, задаваемой углом поворота φ_r, от продольных перемещений

$$\varphi_r{}^{(\bar{n})} = \frac{1}{J_r}\langle(x-0.5)\,(u_z)_i\rangle, \qquad J_r = \langle(x-0.5)^2\rangle. \tag{1.68}$$

Действительно, функционал среднеквадратичного отклонения достигает своего минимума на функции $\varphi_r{}^{(\bar{n})}$

$$\langle\left((u_z)_i-(x-0.5)\,\varphi_r{}^{(\bar{n})}\right)^2\rangle \to min. \tag{1.69}$$

Подставляя выражения для перемещений (1.61) в формулу для угла наклона (1.68) получим связь угла наклона с функциями макроперемещений

$$\varphi_r{}^{(\bar{n})} = \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \Phi_r^{v_z,2k}\partial_z^{2k}v_z\varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} \Phi_r^{v_r,2k+1}\partial_z^{2k+1}v_r\varepsilon^{2k+1}, \tag{1.70}$$

где коэффициенты $\Phi_r^{\eta,k}$ могут быть найдены по формулам

$$\Phi_r^{\eta,k} = \frac{1}{J_r}\langle(x-0.5)\,\left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)}\rangle. \tag{1.71}$$

Краевые условия на торцах оболочки. Теперь, когда определены величины внутренних усилий и угол наклона нормали можно перейти к заданию краевых условий на торцах для разрешающей системы дифференциальных уравнений (1.60), описывающей деформирование оболочки на макроуровне. Краевые условия ставятся аналогично тому, как это принято в механике тонкостенных конструкций. Так, если оболочка защемлена на конце, то макроперемещения и угол наклона равны нулю

$$v_z = v_r = \varphi_r{}^{(\bar{n})} = 0. \tag{1.72}$$

Если же торец оболочки свободно опёрт, то макроперемещения и изгибающий момент равны нулю

$$v_z = v_r = M_r{}^{(\bar{n})} = 0. \tag{1.73}$$

В случае, если конец оболочки свободен, то равны нулю продольное усилие, перерезывающая сила и изгибающий момент

$$N_z{}^{(\bar{n})} = Q_r{}^{(\bar{n})} = M_r{}^{(\bar{n})} = 0. \tag{1.74}$$

Отметим, что всего в таком виде по принципу Сен-Венана может быть задано шесть краевых условий, по три с каждого торца оболочки. При этом система уравнений растёт в зависимости от номеров асимптотических приближений, поэтому начиная с какого-то момента шести краевых условий недостаточно для решения разрешающей системы дифференциальных уравнений и необходимы дополнительные краевые условия. Далее рассмотрим случай, когда шести краевых условий хватает для решения системы (1.60). Для этого рассмотрим полученные соотношения при $n_{v_r} = 1, n_{v_z} = 0$.

1.4 Математическая модель на основе первого приближения

Рассмотрим случай, когда $n_{v_r} = 1$, $n_{v_z} = 0$. Для лаконичности записи будем опускать верхний индекс векторного номера асимптотического приближения $\bar{n} = (1{,}0)$.

Выражения для перемещений (1.61) примут вид

$$\begin{gathered}(u_z)_i = v_z + \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(2)} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + \sum_{k=0}^{1} \left(U_z^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1},\\ (u_r)_i = \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(0)} v_r + \sum_{k=0}^{1} \left(U_r^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=1}^{2} \left(U_r^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k}.\end{gathered} \tag{1.75}$$

Выражения для напряжений (1.62) при $\bar{n} = (1{,}0)$

$$\begin{gathered}(\sigma_{zz})_i = \left(\tau_{zz}^{v_r}\right)_i^{(0)} v_r + \left(\tau_{zz}^{v_r}\right)_i^{(2)} \partial_z^2 v_r \varepsilon^2 + \left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(1)} \partial_z^1 v_z \varepsilon^1,\\ (\sigma_{rz})_i = \sum_{k=0}^{1} \left(\tau_{rz}^{v_r}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1} + \left(\tau_{rz}^{v_z}\right)_i^{(2)} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2,\\ (\sigma_{\alpha\alpha})_i = \sum_{k=0}^{2} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_r}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} v_r \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{1} \left(\tau_{\alpha\alpha}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} v_z \varepsilon^{2k+1}, \qquad \alpha \in \{r, \theta\}.\end{gathered} \tag{1.76}$$

Разрешающая система уравнений (1.60) примет вид

$$\begin{gathered}A_{rr}^{v_z,1}\, \partial_z^1 v_z \varepsilon + A_{rr}^{v_z,3}\, \partial_z^3 v_z \varepsilon^3 + A_{rr}^{v_r,0}\, v_r + A_{rr}^{v_r,2}\, \partial_z^2 v_r \varepsilon^2 + A_{rr}^{v_r,4}\, \partial_z^4 v_r \varepsilon^4 = p(z),\\ B_z^{v_z,2} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + B_z^{v_r,1} \partial_z^1 v_r \varepsilon + B_z^{v_r,3} \partial_z^3 v_r \varepsilon^3 = 0.\end{gathered} \tag{1.77}$$

Выражения для внутренних усилий (1.64) при $\bar{n} = (1{,}0)$

$$
\begin{aligned}
N_z &= -B_z^{v_r,1} v_r - B_z^{v_r,3} \partial_z^2 v_r \varepsilon^2 - B_z^{v_z,2} \partial_z^1 v_z \varepsilon, \\
Q_r &= -\sum_{k=0}^{1} B_r^{v_r,2k+2} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1} - B_r^{v_z,3} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2, \\
M_r &= I_z^{v_r,0} v_r + I_z^{v_r,2} \partial_z^2 v_r \varepsilon^2 + I_z^{v_z,1} \partial_z^1 v_z \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.78}
$$

Выражения для угла наклона (1.70)

$$
\varphi_r = \Phi_r^{v_z,2} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + \sum_{k=0}^{1} \Phi_r^{v_r,2k+1} \partial_z^{2k+1} v_r \varepsilon^{2k+1}. \tag{1.79}
$$

В уравнениях (1.77) присутствует третья производная $\partial_z^3 v_z$ от которой удобно избавиться. Для этого продифференцируем второе уравнение, выразим третью производную $\partial_z^3 v_z$ и подставим в первое уравнение. Тогда разрешающая система уравнений для первого приближения метода АР с поправкой для третьей производной примет следующий вид

$$
\begin{gathered}
A_{rr}^{v_z,1}\, \partial_z^1 v_z \varepsilon + A_{rr}^{v_r,0}\, v_r + \widetilde{A_{rr}^{v_r,2}}\, \partial_z^2 v_r \varepsilon^2 + \widetilde{A_{rr}^{v_r,4}}\, \partial_z^4 v_r \varepsilon^4 = p(z), \\
B_z^{v_z,2} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + B_z^{v_r,1} \partial_z^1 v_r \varepsilon + B_z^{v_r,3} \partial_z^3 v_r \varepsilon^3 = 0,
\end{gathered} \tag{1.80}
$$

где коэффициенты $\widetilde{A_{rr}^{v_r,2}}, \widetilde{A_{rr}^{v_r,4}}$ могут быть найдены по формулам

$$
\widetilde{A_{rr}^{v_r,2}} = A_{rr}^{v_r,2} - A_{rr}^{v_z,3} \frac{B_z^{v_r,1}}{B_z^{v_z,2}}, \qquad \widetilde{A_{rr}^{v_r,4}} = A_{rr}^{v_r,4} - A_{rr}^{v_z,3} \frac{B_z^{v_r,3}}{B_z^{v_z,2}}. \tag{1.81}
$$

Полученная разрешающая система уравнений имеет шестой порядок и поэтому для неё достаточно шести краевых условий из принципа Сен-Венана. Отметим, что при этом полученные соотношения позволяют определять все компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, в том числе поперечные компоненты, влиянием которых как правило пренебрегают. Вместе выражения (1.75)–(1.81) образуют математическую модель деформирования цилиндрических оболочек на основе первого приближения метода АР.

Замечание. Отметим, что полученная разрешающая система дифференциальных уравнений (1.80) имеет шестой порядок, точно так же как разрешающая система в классической теории Кирхгофа-Лява, которая имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
B_{21}\, \partial_z^1 v_z \varepsilon + B_{22}\, v_r + D_{11}\, \partial_z^4 v_r \varepsilon^4 = p(z), \\
B_{11}\, \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + B_{12}\, \partial_z^1 v_r \varepsilon = 0,
\end{gathered} \tag{1.82}
$$

где $B_{11}, B_{21}, B_{12}, B_{22}, D_{11}$ – жесткости слоистого композита, вычисляемые на основе гипотез Кирхгофа-Лява. Отметим, что в системе (1.80) присутствуют компоненты и производные, которые отсутствуют в классической системе (1.82). При этом решение системы (1.80) позволяет восстановить весь тензор напряжений по формулам (1.76), в отличие от классической теории, где влиянием сдвиговых σ_{rz} и радиальных σ_{rr} компонент тензора напряжений пренебрегают.

Численное решение краевых задач по толщине оболочки. Для того, чтобы решить краевые задачи по длине цилиндрической оболочки необходимо знать все жесткостные коэффициенты и функции на основе решения краевых задач по толщине оболочки, которые в частных случаях могут быть решены аналитически. В общем случае одномерные краевые задачи решались численно с помощью конечно-элементного пакета с открытым исходным кодом Fenics Project [137]. Для этого рассматривались слабые постановки краевых задач. Для аппроксимации использовались квадратичные Лагранжевы элементы второго порядка. Интегральные условия нормировки вводились с помощью множителей Лагранжа.

1.5 Верификация математической модели на основе первого приближения

В данном разделе приведены примеры численных расчетов в безразмерном виде для композитных и однородных цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления. Для проверки точности расчетов по методу АР приведены результаты конечно-элементного моделирования в открытом пакете конечно-элементного анализа CacluliX, с помощью которого решалась исходная двумерная задача в осесимметричной постановке с использованием 6-узловых конечных элементов CAX6 [138].

Также приведены результаты сравнения метода АР с расчетами по классической теории Кирхгофа-Лява. Разрешающая система дифференциальных уравнений (1.80) для метода АР решалась с помощью метода сплайн-коллокаций и процедуры bvp solve в Python библиотеке Scipy [139].

Деформирование однородной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления. Рассмотрим однородную изотропную цилиндрическую оболочку под действием внутреннего давления. На концах оболочки ставятся краевые условия жесткой заделки. Параметры задачи равны следующим величинам: $h = 1, p = 1, E = 1, \nu = 0.32$. Так как толщина оболочки фиксирована, варьирование параметров $\varepsilon = h/L$, $\varepsilon_1 = h/R_{in}$ обеспечивается путём изменения значений длины оболочки L и внутреннего радиуса R_{in}.

Краевые условия на торцах оболочки задаются выражениями

$$v_r(0) = v_z(0) = \varphi_r(0) = 0, \qquad v_r(1) = v_z(1) = \varphi_r(1) = 0. \tag{1.83}$$

На рисунке 1.2 приведены значения радиальных перемещений на срединной поверхности оболочки для четырех различных наборов параметров ε, ε_1:

- первый набор параметров (черный цвет) является экстремальным в том смысле, что в этом случае оболочка является очень короткой ($\varepsilon = 0.2$) и толстой ($\varepsilon_1 = 0.2$);
- для второго набора параметров (зеленый цвет) оболочка по-прежнему остаётся короткой ($\varepsilon = 0.2$), но при этом уже может считаться тонкостенной ($\varepsilon_1 = 0.05$);
- третий набор параметров (синий цвет) соответствует достаточно длинной оболочке ($\varepsilon = 0.01$), но при этом толстостенной ($\varepsilon_1 = 0.2$);
- четвертый набор параметров (фиолетовый цвет) описывает длинную ($\varepsilon = 0.01$) тонкостенную оболочку ($\varepsilon_1 = 0.05$).

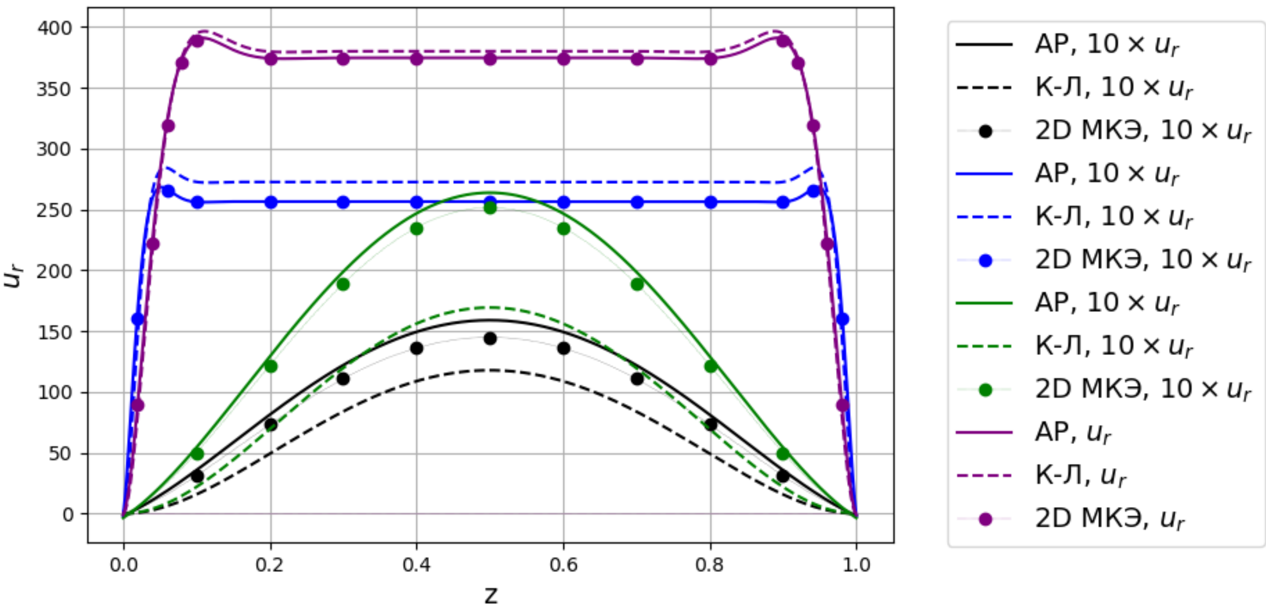


Рисунок 1.2. Радиальные перемещения срединной поверхности оболочки при различных значениях параметра ε, ε_1

Расчеты проведены с использованием первого приближения метода АР, по теории оболочек Кирхгова-Лява (К-Л) и с помощью двумерного конечно-элементного анализа в пакете CalculiX (2D МКЭ). На основе полученных результатов можно сделать вывод, что для коротких оболочек теория К-Л значительно недооценивает радиальные перемещения в оболочке (до 40%). В свою очередь для коротких оболочек метод АР значительно лучше оценивает радиальные перемещения (в пределах 10% процентов для толстых и 5% для тонких). Отличие в результатах с двумерным расчётом можно объяснить тем, что оболочка является очень короткой и на её торцах возникают пограничные слои. Отметим также, что выбранные значения параметров не являются малыми по величине по сравнению с единицей, тем самым асимптотический метод начинает давать расхождение с конечно-элементным решением задачи. Для длинных оболочек теория К-Л хорошо описывает радиальные перемещения и даёт расхождение в пределах 10% процентов. Отметим, что для толстостенных оболочек теория К-Л начинает завышать значения радиальных перемещений. В свою очередь при $\varepsilon = 0.01$ метод АР обеспечивает совпадение как для толстостенных, так и для тонкостенных оболочек (< 1%).

Важным достоинством метода АР является то, что он позволяет восстановить все компоненты тензора напряжений. На рисунке 1.3 приведены значения компонент тензора напряжений при $\varepsilon = 0.2,\ \varepsilon_1 = 0.05$. Значения продольных σ_{zz} и окружных $\sigma_{\theta\theta}$ компонент тензора напряжений построены на внешней поверхности оболочки. В свою очередь сдвиговые σ_{rz} и радиальные σ_{rr} напряжения приведены на срединной поверхности оболочки. Можно сделать вывод о том, что в коротких цилиндрических оболочках НДС является принципиально моментным в отличие от длинных оболочек. Продольные и окружные компоненты находятся с высокой точностью как в рамках теории К-Л (в пределах 5%), так и с применением метода АР (в пределах 1%) за исключением узкой области на торцах, где возникают концентраторы напряжений. Видно, что метод АР с высокой точностью восстанавливает сдвиговые и радиальные напряжения в основной части цилиндрической оболочки. В свою очередь теория К-Л не позволяет сразу восстановить сдвиговые и радиальные напряжения. Так как для коротких оболочек вклад сдвиговых напряжений соразмерен с вкладом от продольных и окружных напряжений, радиальные перемещения в теории К-Л значительно недооцениваются.

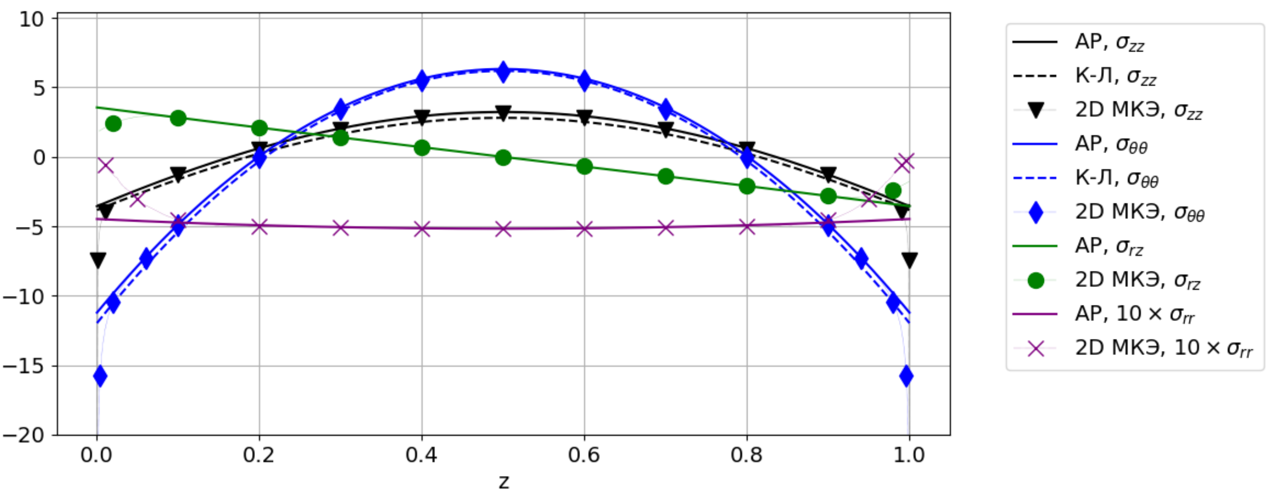


Рисунок 1.3. Компоненты тензора напряжений при $\varepsilon = 0.2,\ \ \varepsilon_1 = 0.05$

Анализ результатов решений двумерной осесимметричной задачи методом конечных элементов выявил, что вблизи торцов возникают пограничные слои, где значения полученных радиальных и сдвиговых напряжений начинают отличаться от решения методом АР. Для того, чтобы корректно показать, что на краях оболочки возникают концентраторы, конечно-элементная сетка вблизи торцов сгущалась на два порядка.

Деформирование трёхслойной оболочки под действием внутреннего давления. Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку (рисунок 1.4), состоящую из однородных изотропных слоев и нагруженную внутренним давлением интенсивности p. Параметры задачи соответствуют следующим величинам [27]

$$\frac{R}{L} = 1.5, \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2} = 10, \qquad \nu_i = 0.3, \ \ h_1 = h_3 = 0.1, \qquad h_2 = 0.8,$$
$$p = 1, \qquad h = 1, \qquad E_2 = 1, \tag{1.84}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки, E_i, ν_i – модули Юнга и коэффициенты Пуассона i-го слоя соответственно, h_i – толщина i-го слоя. Отметим, что в данном разделе, параметр ε_1 считался как отношение толщины оболочки к радиусу срединной поверхности оболочки $\varepsilon_1 = h/R$. В силу выбранных параметров задачи справедливо следующее соотношение $\varepsilon = 1.5 \times \varepsilon_1$. Краевые условия на торцах оболочки задаются выражениями

$$v_r(0) = v_z(0) = \varphi_r(0) = 0, \qquad v_r(1) = v_z(1) = 0, N_z(1) = P = p\frac{R}{2}, \tag{1.85}$$

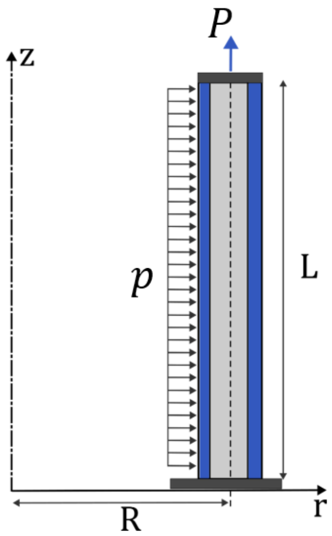


Рисунок 1.4. Схема нагружения трехслойной цилиндрической оболочки с жесткими днищами

Так как вблизи крепления торцов могут образовываться концентраторы напряжений, то анализ максимальных величин осуществлялся в области $[0,1] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, отступающей от торцов на величину малого параметра ε, что в размерных переменных означает отступ на величину толщины оболочки.

В таблице 1.1 представлены максимальные радиальные и продольные перемещения трехслойной цилиндрической оболочки с жесткими днищами при различных значениях параметров $\varepsilon, \varepsilon_1$. Видно, что метод АР позволяет точнее по сравнению с теорией К-Л восстанавливать радиальные перемещения для коротких оболочек, однако может недооценивать продольные перемещения (до 15%). Для длинных тонкостенных оболочек точность теории К-Л и метода АР сопоставима.

Таблица 1.1. Максимальные радиальные и продольные перемещения срединной поверхности для трехслойной цилиндрической оболочки с жесткими днищами

$1/\varepsilon_1$	$10^{-2} \times v_r$			$10^{-2} \times v_z$		
	2D	К-Л	АР	2D	К-Л	АР
10	**0.13**	0.072 (43%)	0.15 (13%)	**0.096**	0.100 (4%)	0.085 (15%)
20	**0.83**	0.74 (10%)	0.88(5%)	**0.34**	0.35 (3%)	0.32 (6%)
30	**2.39**	2.33 (3%)	2.47 (3%)	**0.71**	0.72 (1%)	0.68 (4%)
55	**9.70**	9.77 (<1%)	9.79 (<1%)	**2.13**	2.12 (<1%)	2.07 (3%)

В таблице 1.2 представлены максимальные напржения трехслойной цилиндрической оболочки с жесткими днищами в области $[0,1] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Можно сделать вывод, что метод АР показывает соизмеримую точность с теорией Кирхгофа-Лява при вычислении продольных и окружных компонент тензора напряжений. Сдвиговые напряжения в соответствии с таблицей 1.2, также определяются методом АР с хорошей точностью (в пределах 5%).

Таблица 1.2. Максимальные напряжения в области $[0,1] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ для трехслойной цилиндрической оболочки с жесткими днищами

$1/\varepsilon_1$	$10^{-2} \times \sigma_{zz}$			$10^{-2} \times \sigma_{\theta\theta}$			$10^{-1} \times \sigma_{rz}$	
	2D	К-Л	АР	2D	К-Л	АР	2D	АР
10	**0.29**	0.32 (10%)	0.34 (17%)	**0.20**	0.17 (15%)	0.23 (15%)	**0.146**	0.139 (5%)
20	**0.71**	0.79 (11%)	0.67 (6%)	**0.59**	0.58 (2%)	0.62 (5%)	**0.296**	0.280 (5%)
30	**1.24**	1.34 (8%)	1.13 (9%)	**1.04**	1.07 (3%)	1.08 (4%)	**0.390**	0.370 (5%)
55	**2.50**	2.60 (4%)	2.37 (5%)	**2.14**	2.19 (2%)	2.15 (<1%)	**0.557**	0.538 (3%)

Расчет напряжений в композитных слоистых оболочках с несимметричной укладкой слоёв. Рассмотрим задачу деформирования слоистой цилиндрической оболочки с жесткими днищами, слои которой выполнены из ортотропного композитного материала. Волокна композита в пределах одного слоя уложены вдоль окружной или продольной координаты, как показано на рисунке 1.5. Положим, что укладка слоёв по толщине оболочки является несимметричной относительно срединной поверхности, а толщина слоёв одинаковой. Параметры задачи в безразмерном виде соответствуют следующим величинам [140]

$$R = 20, \quad L = 40, \quad E_1 = 25, \quad E_2 = E_3 = 1,$$
$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \ G_{12} = G_{13} = 0.5, \quad G_{23} = 0.2, \quad p = 1, \quad h = 1, \tag{1.86}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки, E_i – модули упругости композитного ортотропного материала в системе координат материала (1 – вдоль волокон, 2 и 3 – в поперечных направлениях), G_{ij}, ν_{ij} - модули сдвига и коэффициенты Пуассона композитного ортотропного материала, соответственно. Краевые условия на торцах оболочки задаются выражениями (1.85).

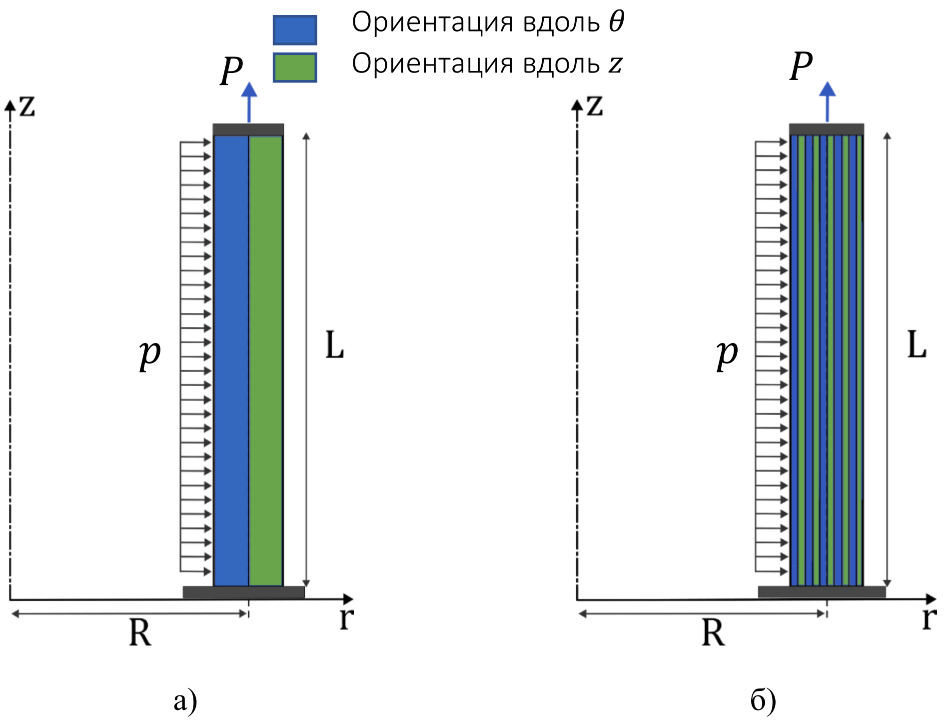
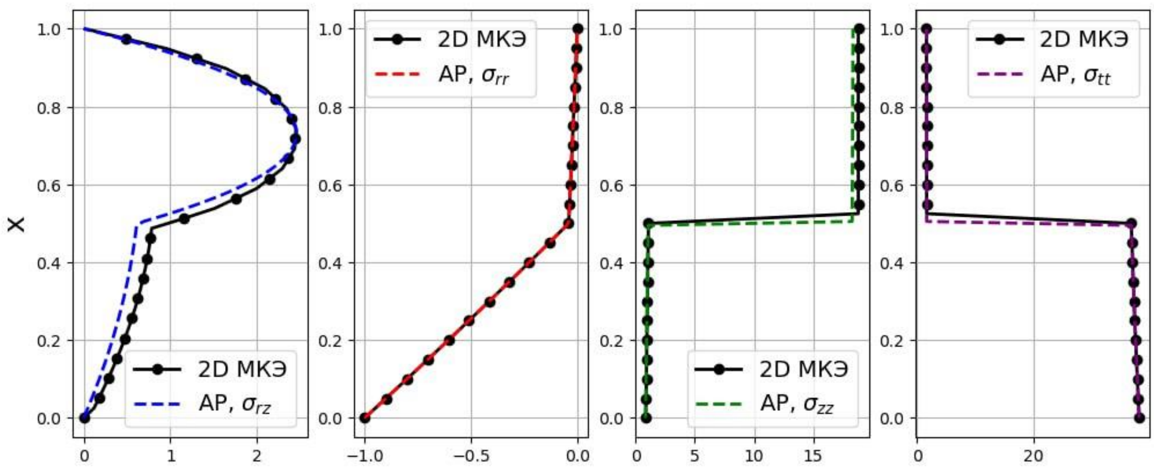


Рисунок 1.5. Схема нагружения слоистых цилиндрических оболочек с несимметричной укладкой слоёв а) двухслойная оболочка б) десятислойная оболочка

Рассмотрим случаи, когда оболочка состоит из двух и из десяти слоёв по толщине. На рисунке 1.6 представлены графики компонент тензора напряжений по толщине двухслойной оболочки. Радиальные, окружные и продольные компоненты тензора напряжений считались посередине оболочки при $z = 0.5$ в безразмерных переменных. Сдвиговые напряжения достигают своего максимума вблизи торцов, и по этой причине сдвиговые напряжения считались вблизи торца с отступом в $z = \varepsilon = 1/40$. На графике приведены результаты расчетов с использованием математической модели на основе первого приближения метода АР и результаты на основе решения исходной осесимметричной задачи методом конечных элементов (2D МКЭ). Можно заметить, что полученные продольные σ_{zz} и окружные $\sigma_{\theta\theta}$ напряжения хорошо согласуются с двумерным конечно-элементным расчетом. Аналогично, для радиальных напряжений σ_{rr} наблюдается идеальное совпадение с двумерным расчётом, при этом не нарушается их непрерывность. Для сдвиговых напряжений σ_{rz} присутствует небольшое расхождение с двумерным расчётом по причине наличия вблизи торцов пограничных слоёв, связанных с заданием краевых условий в двумерной модели. Абсолютно жесткое условие заделки в рамках текущей математической модели может быть выполнено только приближенно, так как на торце из равенства нулю макроперемещений не следует равенство нулю перемещений во всех точках оболочки по её толщине. Этот факт также вносит расхождение с расчётом вблизи торцов. При этом качественно распределение сдвиговых напряжений соответствует двумерному численному расчёту и соблюдается непрерывность распределения сдвиговых напряжений по толщине оболочки.

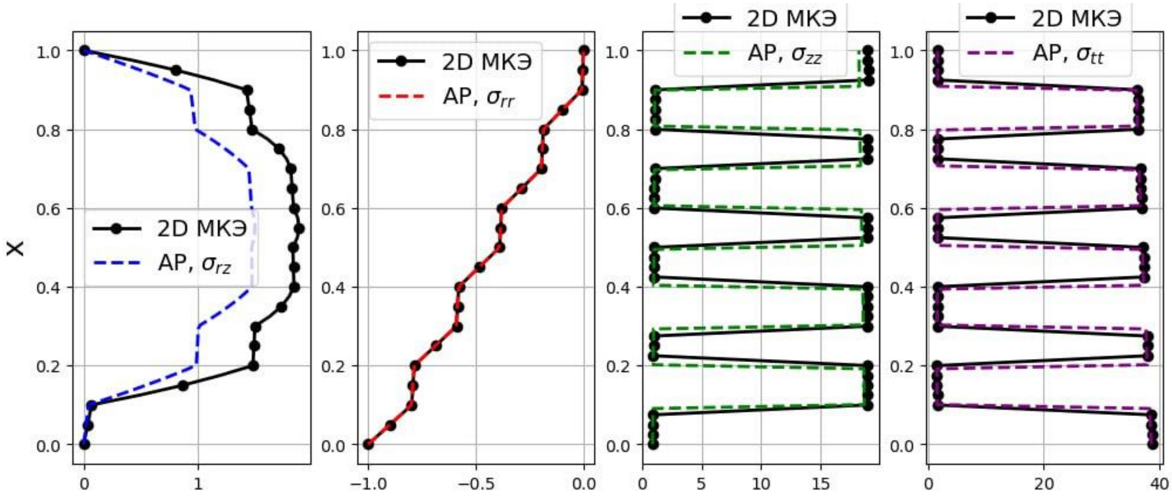


а) б) в) г)

Рисунок 1.6. Распределение компонент напряжений по толщине двуслойной оболочки

а) $\sigma_{rz}, z = \varepsilon$, б) $\sigma_{rr}, z = 0.5$, в) $\sigma_{zz}, z = 0.5$, г) $\sigma_{\theta\theta}, z = 0.5$

На рисунке 1.7 приведены графики для компонент тензора напряжений по толщине десятислойной оболочки. В этом случае наблюдаются схожие с двухслойной оболочкой результаты. Радиальные, продольные и окружные напряжения, посчитанные с помощью метода АР, при $z = 0.5$ хорошо совпадают с двумерным конечно-элементным расчетом. В случае же сдвиговых напряжений вблизи торцов при $z = \varepsilon$ наблюдается расхождение с двумерным расчетом порядка 20%. Как и в случае с двухслойной оболочкой, расхождение может быть связано как с наличием пограничных слоев вблизи торцов в двумерной постановке задачи, так и с ограничением модели на приближенное выполнение условия жесткой заделки на торце.



а) б) в) г)

Рисунок 1.7. Распределение компонент напряжений по толщине десятислойной оболочки

а) $\sigma_{rz}, z = \varepsilon$, б) $\sigma_{rr}, z = 0.5$, в) $\sigma_{zz}, z = 0.5$, г) $\sigma_{\theta\theta}, z = 0.5$

Выводы по главе 1

Разработана математическая модель на основе первого приближения метода асимптотического расщепления для расчета осесимметричных цилиндрических оболочек. Полученная разрешающая система имеет тот же порядок, что и разрешающая система в теории Кирхгофа-Лява, однако её решение позволяет восстанавливать все компоненты тензора напряжений и дает более точные значения для коротких цилиндрических оболочек. Отметим, что при таком подходе радиальные перемещения не постоянны по толщине оболочки, что позволяет учитывать деформации обжатия слоев и восстанавливать радиальные напряжения. Также отметим, что при таком подходе удается восстановить сдвиговые напряжения в каждом слое без нарушения условий согласования напряжений между слоями.

В случае толстостенных и коротких цилиндрических оболочек или же оболочек с большой разницей в модулях упругости первое приближение метода АР не может в точности удовлетворить краевому условию жесткой заделки на торце из-за чего возникают трудности с нахождением решений в пограничном слое вблизи торцов. Среднее значение от продольного перемещения на торце равно нулю, но отлично от нуля на внутренней и внешней поверхностях. Для более точного учета краевых условий в будущем целесообразно исследовать второе приближение метода АР. Ограничением разработанной модели на данном этапе является требование на совпадение осей ортотропии материалов в слоях с осями цилиндрической системы координат.

2. Теория деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода асимптотического расщепления

2.1 Научные предпосылки развития теории деформирования слоистых анизотропных стержней

Теоретические результаты, изложенные в этой главе, основаны на использовании метода АР, который изначально разрабатывался для моделирования деформирования стержней, был принципиально ориентирован на решении пространственной задачи теории упругости и был заявлен в таком виде в 2004 году в работе [64]. В монографии [63] метод был более детально проработан и распространен не только на стержни, но и на пластины. В 2009 году метод получил свое развитие для композитных стержней и было дано более подробное теоретическое обоснование исходных предпосылок его применения [141]. Однако, в работе [141] была обозначена и не получила своего разрешения важная теоретическая проблема. С одной стороны, было установлено, что существует четыре функции макродеформирования стержня: три макроперемещения вдоль координатных осей и угол закручивания. С другой стороны, была выведена система из трех взаимосвязанных дифференциальных уравнений, описывающих только три функции макроперемещений. При этом процессы изгиба в двух направлениях и процесс растяжения-сжатия оказываются взаимосвязанными. В то же время процесс кручения, который ранее рассматривался отдельно в работе [63], оказывается независимым от этих процессов, что вызывает сомнения. В 2015 году в работе Янковского А.П. [142] проведена конструктивная критика существующей проблемы, а также предпринята попытка ее решения. Тем не менее, в данной работе не был представлен детализированный вывод четвертого уравнения, касающегося кручения стержня, который отсутствует в работе [141]. Кроме того, не были полностью рассмотрены все необходимые условия для разрешимости вспомогательных краевых задач.

Вторая глава диссертационной работы посвящена завершению построения теории слоистых стержней, начатой в работах [63, 64, 141, 143]. Приведена постановка задачи для стержня с произвольной анизотропией слоев и изложен метод АР для решения поставленной задачи. Получена система уравнений макродеформирования стержня, состоящая из четырех линейно независимых дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями макродеформирования для произвольного асимптотического приближения. Отдельно рассмотрен частный случай стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии материала.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим стержень с постоянным по длине поперечным сечением, имеющим произвольное очертание и состоящим из произвольного числа упругих слоёв, выполненных из различных анизотропных материалов. Сечение стержня может быть как сплошным, так и тонкостенным. При этом тонкостенные композитные стержни могут быть как замкнутого, так и открытого профиля. Граница между слоями в сечении не обязательно прямолинейна, а может быть произвольной кривой, в том числе замкнутой. Для схематичности изображения на рисунке 2.1 примем, что стержень имеет комбинированное сечение типа лопасти. Такое сечение не имеет осей симметрии, состоит из произвольного количества слоёв, в том числе армированных, имеет полые области и имеет сложную криволинейную границу. Для краткости изложения упругие продольные стержни, посредством которых осуществлено армирование, также будем называть слоями.

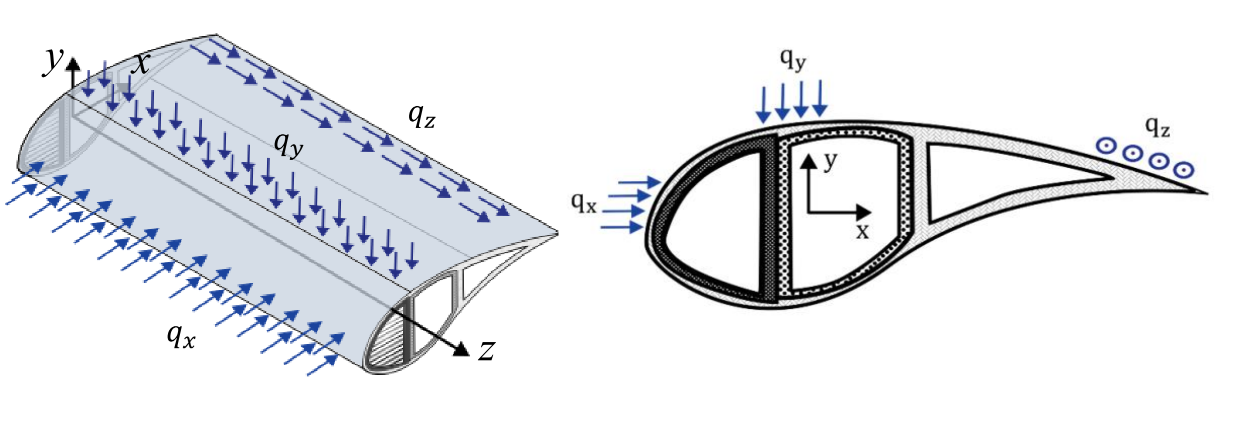


Рисунок 2.1. Стержень сложного поперечного сечения под действием распределённых нагрузок q_x, q_y, q_z

Система координат расположена таким образом, что ось z направлена вдоль стержня, а поперечные сечения лежат в плоскости xOy. Для удобства математических выкладок введём декартову систему координат так, чтобы ось z проходила через геометрический центр (ГЦ) поперечного сечения стержня.

Для всех слоёв вводится нумерация, i – номер текущего слоя, s – число слоёв. На боковой поверхности стержня действуют распределённые поперечные нагрузки q_x, q_y в направлении осей x и y соответственно и распределённая продольная нагрузка q_z.

Примем следующие обозначения. Пусть $(u_x)_i, (u_y)_i, (u_z)_i$ – перемещения точек стержня в направлении осей x, y, z соответственно; $(\sigma_{\alpha\beta})_i$ – компоненты тензора напряжений в i-ом слое; $[\sigma_{\alpha n}]_i^j$ – скачок контактных напряжений, действующих на границу раздела i-го и j-го слоёв в направлении $\alpha \in \{x, y, z\}$; n_x, n_y – компоненты вектора единичной нормали к поверхности стержня либо к границе раздела слоёв; $(E_{\alpha\beta\varphi\psi})_i$ – 21 упругая постоянная для анизотропного материала в i-ом слое, при этом внутри слоёв упругие постоянные могут непрерывно меняться;

$\tilde{u}$ – характерное значение для перемещений $(u_x)_i, (u_y)_i$; h, L – высота (линейный размер вдоль оси y) и длина (линейный размер вдоль оси z) стержня соответственно; $\tilde{E}$ – характерное значения для модулей Юнга анизотропного материала. Для операции взятия k-ой производной в направлении α используется обозначение ∂_α^k.

Перейдём к безразмерным переменным и функциям по следующим правилам, для простоты, не меняя их обозначения

$$\begin{gathered} x \leftrightarrow \frac{x}{h}, \qquad y \leftrightarrow \frac{y}{h}, \qquad z \leftrightarrow \frac{z}{L}, \qquad (u_\alpha)_i \leftrightarrow \frac{(u_\alpha)_i}{\tilde{u}}, \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{E}\tilde{u}}{h}, \\ \left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i \leftrightarrow \frac{\left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i}{\tilde{\sigma}}, \qquad \left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i \leftrightarrow \frac{\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i}{\tilde{\sigma}}, \qquad q_\alpha \leftrightarrow \frac{q_\alpha}{\tilde{\sigma}}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Далее всюду будем полагать, что характерное значение для перемещений $\tilde{u}$ равняется высоте стержня $\tilde{u} = h$. Тогда правила обезразмеривания примут более простой вид

$$\begin{gathered} x \leftrightarrow \frac{x}{h}, \qquad y \leftrightarrow \frac{y}{h}, \qquad z \leftrightarrow \frac{z}{L}, \qquad (u_\alpha)_i \leftrightarrow \frac{(u_\alpha)_i}{h}, \\ \left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i \leftrightarrow \frac{\left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i}{\tilde{E}}, \qquad \left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i \leftrightarrow \frac{\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i}{\tilde{E}}, \qquad q_\alpha \leftrightarrow \frac{q_\alpha}{\tilde{E}}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

С учётом выражений (2.2) потребуем выполнения уравнений равновесия внутри стержня и на его боковой поверхности всюду за исключением торцов

$$\partial_x^1(\sigma_{\alpha x})_i + \partial_y^1\left(\sigma_{\alpha y}\right)_i + \varepsilon\partial_z^1(\sigma_{\alpha z})_i = 0, \tag{2.3}$$

$$(\sigma_{\alpha x})_i n_x + \left(\sigma_{\alpha y}\right)_i n_y = q_\alpha, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon = h/L$ – малый параметр, описывающий отношение высоты стержня к его длине.

На границе между i-ым и j-ым смежными слоями стержня требуем непрерывности перемещений и контактных напряжений

$$\begin{gathered} (\sigma_{\alpha n})_i = (\sigma_{\alpha n})_j, \qquad (u_\alpha)_i = (u_\alpha)_j, \\ (\sigma_{\alpha n})_i = (\sigma_{\alpha x})_i n_x + \left(\sigma_{\alpha y}\right)_i n_y, \qquad i, j \in \{1, \cdots, s\}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для каждого слоя, компоненты тензора деформаций подчиняются соотношениям Коши

$$\begin{gathered} 2\left(e_{\alpha\beta}\right)_i = \partial_\alpha^1\left(u_\beta\right)_i + \partial_\beta^1(u_\alpha)_i, \qquad 2(e_{z\alpha})_i = \partial_\alpha^1(u_z)_i + \varepsilon\partial_z^1(u_\alpha)_i, \\ (e_{zz})_i = \varepsilon\partial_z^1(u_z)_i, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Считаем, что материал каждого i-го слоя является анизотропным упругим материалом. Обобщённый закон Гука в слое содержит 21 независимую константу и имеет вид

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i = \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}} \left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i \left(e_{\varphi\psi}\right)_i, \quad \alpha,\beta\in\{x,y,z\}. \tag{2.7}$$

Суммарно выражения (2.3) – (2.7) задают неполную краевую задачу, так как на торцах стержня краевые условия не заданы [63, 64, 141]. Если к уравнениям добавить условия на торцах стержня, заданные либо в перемещениях, либо в напряжениях, то получится пространственная краевая задача теории упругости. Существенного упрощения краевой задачи удаётся достигнуть путём замены полных краевых условий на торцах на краевые условия для их интегральных характеристик по сечению стержня (средний прогиб, изгибающий момент, поперечная сила и т.д.). Если для постановки краевых условий на торцах в качестве интегральных характеристик напряженного состояния использовать внутренние усилия и обобщённые перемещения для поперечного сечения, то такую задачу в отличие от краевой пространственной задачи теории упругости будем называть пространственной задачей теории упругости в постановке Сен-Венана [63].

Расщеплённый характер поверхностных нагрузок. В дополнение к постановке неполной краевой задачи (2.3) – (2.7) будем считать, что распределенные нагрузки, действующие на боковой поверхности стержня, могут быть представлены в следующем расщепленном виде

$$q_\alpha(\Gamma,z) = p_\alpha(z)f_\alpha(\Gamma) + m_0(z)g_\alpha(\Gamma), \tag{2.8}$$

где Γ – множество граничных точек поперечного сечения стержня; $f_\alpha(\Gamma), g_\alpha(\Gamma)$ – функции распределения нагрузки по периметру сечения и обладающие свойствами

$$\begin{gathered} \oint g_\alpha\, d\Gamma = 0, \qquad \oint f_\alpha\, d\Gamma = 1, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}, \\ g_z(\Gamma) = 0, \qquad \oint\left(-g_x\, y + g_y\, x\right)d\Gamma = 1; \end{gathered} \tag{2.9}$$

$p_\alpha(z), m_0(z)$ – функции суммарных нагрузок в поперечном сечении в направлении α, для которых справедливы равенства

$$\begin{gathered} p_\alpha(z) = \oint q_\alpha(\Gamma,z)\, d\Gamma, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}, \\ \oint\left(-q_x y + q_y x\right)d\Gamma = m_0(z) - p_x A_y + p_y A_x, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где A_x, A_y – координаты точки сечения стержня, лежащей на пересечении линии действия равнодействующих распределённых нагрузок q_x и q_y

$$A_x = \oint x\, f_y\, d\Gamma, \qquad A_y = \oint y\, f_x\, d\Gamma. \tag{2.11}$$

Функции $p_\alpha(z)$ имеют физический смысл и равняются суммарным внешним нагрузкам, действующим на стержень в направлении α. Функция $m_0(z)$ равняется суммарному закручивающему моменту от внешних распределённых нагрузок, действующих по периметру поперечного сечения с координатой z, но не входящих в суммарные нагрузки $p_x(z)$ и $p_y(z)$.

В дальнейшем, функции $p_\alpha(z)$и $m_0(z)$, т.к. они зависят только от продольной координаты z, будем называть погонной нагрузкой $p_\alpha(z)$ и погонным закручивающим моментом $m_0(z)$. Следует подчеркнуть, что вид нагрузок (2.8) с сопутствующими формулами (2.9) – (2.11) является неотъемлемым элементом постановки задачи, поэтому в дальнейшем речь идёт о решении неполной краевой задачи (2.3) – (2.8). Постановка задачи (2.3) – (2.8) принципиально отличается от соответствующей постановки в работе [141] за счёт появления дополнительного слагаемого $m_0(z)g_\alpha(\Gamma)$ в формуле (2.8) для поверхностных нагрузок.

2.3 Процедура асимптотического расщепления в общем виде

Общий вид аппроксимации. В соответствии с общей идеей метода АР, примем, что перемещения точек стержня являются линейной комбинацией дифференциальных операторов, действующих в продольном направлении

$$\left(u_z^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(u_\alpha^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \quad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.12}$$

где $\eta^{(n)}(z)$ – некоторая функция одной переменной, описывающая деформирование стержня на макроуровне и физический смысл которой будет выявлен позже; $\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}$ – жесткостные функции вектора перемещений, зависящие только от переменных поперечного сечения x, y; n – номер асимптотического приближения.

Примем, что компоненты тензора напряжений для n-го приближения также являются суммой дифференциальных операторов, действующих в продольном направлении

$$\left(\sigma_{zz}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k,$$

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}, \tag{2.13}$$

где $\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)}$ – жесткостные функции тензора напряжений.

Компоненты линейного тензора деформаций, вычисленные на основе выражений для перемещений (2.12) путём их формального дифференцирования по формулам (2.6) имеют вид

$$\left(e_{zz}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n+3} \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k,$$

$$2\left(e_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(\partial_y^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(k)} + \partial_x^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(k)}\right) \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}, \tag{2.14}$$

$$2\left(e_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\partial_\alpha^1 \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(U_\alpha^{\eta}\right)_i^{(k-1)}\right) \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k + \sum_{k=n+3}^{n+4} \left(U_\alpha^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k.$$

Если подставить выражения для перемещений (2.12) и напряжений (2.13) в обобщённый закон Гука и собрать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, то получим связь между жесткостными функциями тензора напряжений $\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)}$ и вектора перемещений $\left(U_\alpha^{\eta}\right)_i^{(k)}$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(E_{\alpha\beta xx}\right)_i \partial_x^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(E_{\alpha\beta yy}\right)_i \partial_y^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(E_{\alpha\beta zz}\right)_i \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k-1)} +$$

$$+ \sum_{\psi \in \{x,y\}} \left(\left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i \left(\partial_\psi^1 \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)} + \left(U_\psi^{\eta}\right)_i^{(k-1)}\right)\right) + \tag{2.15}$$

$$+ \left(E_{\alpha\beta xy}\right)_i \left(\partial_y^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(k)} + \partial_x^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(k)}\right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y, z\}.$$

Верхние индексы у жесткостных функций вектора перемещений и тензора напряжений в соответствии с формулами (2.12), (2.13) определяются порядком дифференцирования по соответствующей переменной, поэтому если какой-либо из нижних индексов у этих функций в формулах (2.15) или в дальнейшем становится отрицательным, это означает тождественное равенство нулю данной функции, так как функция с таким индексом существовать не может.

Подставим формулы (2.13), (2.14), (2.15) в обобщённый закон Гука для анизотропного материала (2.7) . Получим, что закон Гука для всех компонент выполняется приближенно

$$\left(\sigma^{\eta}_{\alpha\beta}\right)^{(n)}_i - \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}} \left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i \left(e^{\eta}_{\phi\psi}\right)^{(n)}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y\}} \left(E_{\alpha\beta z\psi}\right)_i \left(\partial^1_\psi \left(U^\eta_z\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+3}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+3} - \left(U^\eta_\psi\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+4}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+4}\right),$$

$$\left(\sigma^{\eta}_{zz}\right)^{(n)}_i - \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}} \left(E_{zz\varphi\psi}\right)_i \left(e^{\eta}_{\phi\psi}\right)^{(n)}_i = -\sum_{k=n+2}^{n+3} \left(\tau^\eta_{zz}\right)^{(k)}_i \partial^k_z \eta^{(n)} \varepsilon^k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y\}} \left(E_{zzz\psi}\right)_i \left(\partial^1_\psi \left(U^\eta_z\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+3}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+3} - \left(U^\eta_\psi\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+4}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+4}\right), \tag{2.16}$$

$$\left(\sigma^{\eta}_{\alpha z}\right)^{(n)}_i - \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y,z\}} \left(E_{zz\varphi\psi}\right)_i \left(e^{\eta}_{\phi\psi}\right)^{(n)}_i = -\left(\tau^\eta_{\alpha z}\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+3}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y\}} \left(E_{z\alpha z\psi}\right)_i \left(\partial^1_\psi \left(U^\eta_z\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+3}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+3} - \left(U^\eta_\psi\right)^{(n+3)}_i \partial^{n+4}_z \eta^{(n)} \varepsilon^{n+4}\right),$$

$$\alpha, \beta \in \{x, y\}.$$

Правые части этих равенств являются невязками выполнения закона Гука. При увеличении номера асимптотического приближения n возрастают степени малого параметра, которым пропорциональны невязки, т.е. закон Гука выполняется асимптотически.

Краевые задачи в сечении стержня. Подставим формулы (2.13) в уравнения равновесия (2.3) и условия на боковой поверхности (2.4), соберем слагаемые при одинаковых степенях малого параметра ε и приравняем нулю. Тогда получим уравнения на жесткостные функции и условия на них на границе поперечного сечения для порядкового номера k

$$\partial^1_x \left(\tau^\eta_{\alpha x}\right)^{(k)}_i + \partial^1_y \left(\tau^\eta_{\alpha y}\right)^{(k)}_i + \left(\tau^\eta_{\alpha z}\right)^{(k-1)}_i = 0, \tag{2.17}$$

$$\left(\tau^\eta_{\alpha x}\right)^{(k)}_i n_x + \left(\tau^\eta_{\alpha y}\right)^{(k)}_i n_y = B^{\eta,k}_\alpha f_\alpha(\Gamma) + R^{\eta,k}_z g_\alpha(\Gamma), \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.18}$$

где $B^{\eta,k}_\alpha, R^{\eta,k}_z$ – некоторые константы, способ определения и физический смысл которых будет дан позднее. Из подстановки формул (2.12), (2.13) в условия сопряжения слоёв (2.7) получим условия сопряжения жесткостных функций на границах между смежными i-ым и j-ым слоями стержня

$$\left(\tau^\eta_{\alpha x}\right)^{(k)}_i n_x + \left(\tau^\eta_{\alpha y}\right)^{(k)}_i n_y = \left(\tau^\eta_{\alpha x}\right)^{(k)}_j n_x + \left(\tau^\eta_{\alpha y}\right)^{(k)}_j n_y, \qquad \left(U^\eta_\alpha\right)^{(k)}_i = \left(U^\eta_\alpha\right)^{(k)}_j,$$
$$i, j \in \{1, \cdots, s\}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.17) совместно с условиями (2.18), (2.19) и формулами (2.15) образуют систему краевых задач для жесткостных функций в поперечном сечении стержня для заданного порядкового номера k. Исследуем вопрос о разрешимости краевых задач для каждого номера k, для этого каждое из уравнений (2.17) проинтегрируем по сечению стержня, при этом используем формулы (2.9) и формулу Гаусса-Остроградского. Получим первые три необходимых условия разрешимости для краевой задачи с порядковым номером k

$$B_\alpha^{\eta,k} = -\langle\left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(k-1)}\rangle \,, \qquad \langle\ldots\rangle = \sum_{i=1}^{s}\int_{F_i}(\ldots)\, dF\,, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}, \tag{2.20}$$

где $\langle\ldots\rangle$ – обозначает операцию интегрирования какой-либо функции по всему сечению стержня; F_i – площадь поперечного сечения i-го слоя. В дальнейшем величины $B_x^{\eta,k}, B_y^{\eta,k}$ будем называть поперечными жесткостями слоистого стержня с порядковым номером k при заданной функции η в направлениях x, y соответственно. Величину $B_z^{\eta,k}$ будем называть продольной жесткостью слоистого стержня с порядковым номером k при заданной функции η.

Умножим первое уравнение в системе (2.17) на $-y$, в второе – на x, и проинтегрируем их по сечению стержня используя теорему Гаусса-Остроградского и выражения (2.18), (2.19), затем сложим их

$$R_z^{\eta,k} = -G_z^{\eta,k} + \oint\left(B_y^{\eta,k} x f_y(\Gamma) - B_x^{\eta,k} y f_x(\Gamma)\right) d\Gamma, \tag{2.21}$$

где введено обозначение интеграла $G_z^{\eta,k}$, который мы будем называть крутильной жесткостью стержня с порядковым номером k при заданной функции η или коротко G-жесткостью

$$G_z^{\eta,k} = \langle-\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} y + \left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} x\rangle. \tag{2.22}$$

Преобразуем интеграл в правой части (2.21) и учтём равенства (2.11)

$$R_z^{\eta,k} = -\left(G_z^{\eta,k} + B_y^{\eta,k} A_x - B_x^{\eta,k} A_y\right). \tag{2.23}$$

Окончательно преобразуем равенство (2.23) с учётом формул (2.20)-(2.22), получим

$$R_z^{\eta,k} = -\langle-\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)}\left(y - A_y\right) + \left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)}(x - A_x)\rangle. \tag{2.24}$$

Из равенства (2.24) следует, что константа $R_z^{\eta,k}$ равняется моменту касательных жесткостных функций в поперечном сечении относительно точки с координатами (A_x, A_y) с обратным знаком, поэтому величину $R_z^{\eta,k}$ также будем называть крутильной жётскостью с добавлением «относительно точки с координатами (A_x, A_y)» или коротко R-жёсткостью.

Таким образом, для разрешимости краевой задачи (2.15), (2.17), (2.18), (2.19) с порядковым номером k должны выполняться необходимые условия разрешимости (2.20), (2.24), которые являются формулами вычисления жесткостей $B_\alpha^{\eta,k}, R_z^{\eta,k}$. Условие (2.24) может быть заменено на эквивалентное ему условие (2.23). Отметим, что в частном случае, когда изгибные жесткости при порядковом номере k равны нулю $B_x^{\eta,k} = B_y^{\eta,k} = 0$, необходимое условие разрешимости (2.23) упрощается

$$R_z^{\eta,k} = -G_z^{\eta,k}. \tag{2.25}$$

Выражение погонных нагрузок через суммы продольных дифференциальных операторов. Подставим формулы (2.8) и (2.13) в соотношения на поверхности (2.4) для компонент напряжений, получим

$$\sum_{k=0}^{n+3}\left(\left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y\right)\partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = p_\alpha(z) f_\alpha(\Gamma) + m_0(z) g_\alpha(\Gamma), \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{2.26}$$

Преобразуем левую часть равенства (2.26), используя краевые условия (2.18) и затем приравняем подобные при функциях распределения нагрузки $f_\alpha(\Gamma)$, $g_\alpha(\Gamma)$, тогда получим выражения для погонных нагрузок через функцию $\eta^{(n)}$

$$p_\alpha = \sum_{k=0}^{n+3} B_\alpha^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad m_0(z) = \sum_{k=0}^{n+3} R_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \quad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.27}$$

Действуя с условиями на поверхности при $\alpha = z$ аналогично вышеизложенному, получим равенство

$$p_z = \sum_{k=0}^{n+2} B_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k. \tag{2.28}$$

Жесткости $B_\alpha^{\eta,k}, R_z^{\eta,k}$в формулах (2.27)-(2.28) вычисляются как интегралы от решений краевых задач в сечении стержня и могут быть найдены по формулам (2.20)-(2.24).

Выполнимость уравнений пространственной неполной краевой задачи. Если перемещения и напряжения вычисляются по формулам (2.12) – (2.13) и выполняются равенства (2.27) – (2.28), а все жесткостные функции являются решениями краевых задач (2.15), (2.17) – (2.20), (2.23) в поперечном сечении стержня, то часть уравнений неполной краевой задачи (2.3) – (2.8) выполняется точно, а часть асимптотически. Уравнения равновесия (2.3), условия на боковой поверхности (2.4), условия сопряжения слоёв (2.5) и соотношения Коши выполняются точно. Обобщённый закон Гука (2.7) выполняется асимптотически в соответствии с формулами (2.16).

Макроперемещения поперечного сечения стержня. Введём некоторые обобщённые перемещения, описывающие поведение сечения стержня как единого целого на макроуровне. Средние перемещения сечения стержня v_α в трёх взаимно перпендикулярных направлениях (x, y, z), определяемые по формулам

$$v_\alpha = \frac{1}{F}\langle (u_\alpha)_i \rangle, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \tag{2.29}$$

где F – площадь поперечного сечения.

Средний поворот сечения θ вокруг оси z и проходящей через ГЦ сечения определяется по методу наименьших квадратов. Положим, что сечение стержня поворачивается вокруг оси z как абсолютно твёрдое тело на угол θ. Тогда перемещения сечения стержня могут быть представлены в виде $u_y = x\,\theta$, $u_x = -y\,\theta$. Запишем функционал среднеквадратичного отклонения действительных перемещений стержня от перемещений как абсолютно жесткого целого и определим минимум функционала по переменной θ

$$\left\langle \left(\left(u_y\right)_i - x\,\theta \right)^2 + ((u_x)_i + y\,\theta)^2 \right\rangle \;\to\; min. \tag{2.30}$$

Экстремум функционала по переменной θ в выражении (2.30) достигается при выполнении следующего равенства для угла закручивания

$$\theta = \frac{1}{J}\left\langle \left(u_y\right)_i x - (u_x)_i y \right\rangle, \qquad J = \langle x^2 + y^2 \rangle, \tag{2.31}$$

где J – центральный центробежный момент инерции сечения. Будем называть θ углом закручивания сечения стержня.

Средние углы наклона сечения стержня φ_x, φ_y в плоскостях xOz, yOz соответственно аналогично определяются по методу наименьших квадратов. Положим, что сечение стержня наклоняется как абсолютно твердое тело на угол φ_x в плоскости αOz. Тогда продольные перемещения сечения стержня могут быть представлены в виде $u_z = \alpha\,\varphi_\alpha$. Запишем функционал среднеквадратичного отклонения действительных перемещений стержня от перемещений как абсолютно жесткого целого и определим минимум функционала по переменной φ_α.

$$\langle ((u_z)_i - \alpha\,\varphi_\alpha)^2 \rangle \;\to\; min. \tag{2.32}$$

Экстремум функционала по переменной φ_α достигается при выполнении следующих равенств для углов наклона

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{J_\alpha}\langle \alpha (u_z)_i \rangle, \qquad J_\alpha = \langle \alpha^2 \rangle, \qquad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.33}$$

где J_α – момент инерции сечения в направлении оси α. Будем называть φ_α углом наклона сечения стержня в плоскости $\alpha O z$.

Таким образом деформирование стержня на макроуровне может быть описано через 6 функций макроперемещений для поперечного сечения стержня по аналогии с описанием кинематики абсолютно жесткого тела: три перемещения v_x, v_y, v_z сечения вдоль осей x, y, z соответственно, угол поворота сечения θ вокруг оси z и углы наклона φ_x, φ_y сечения вдоль осей x, y соответственно. Отметим, что поперечное сечение стержня деформируется и не является абсолютно жестким телом, однако для описания его поведения как единого целого удобно пользоваться функциями макроперемещений, которые выражаются как «средние величины» от перемещений в поперечном сечении по формулам (2.31) и (2.33).

2.4 Четыре способа аппроксимации перемещений и напряжений

Краевые задачи в сечении стержня при $k = 0$. Рассмотрим краевую задачу (2.15), (2.17) – (2.19) с порядковым номером $k = 0$. Для этого выпишем все уравнения системы (2.17) и учтём, что индекс k не может быть отрицательным, в результате получится однородная система уравнений

$$\partial_x^1 \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_i^{(0)} + \partial_y^1 \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.34}$$

Из формул (2.20) – (2.22) следует, что константы $B_\alpha^{\eta,0}, R_z^{\eta,0}$тождественно равны нулю. С учётом этого условия на границе (2.18) примут однородный вид

$$\left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_i^{(0)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_i^{(0)} n_y = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.35}$$

Условия сопряжения жесткостных функций между слоями при $k = 0$

$$\begin{gathered}\left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_i^{(0)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_i^{(0)} n_y = \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_j^{(0)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_j^{(0)} n_y, \qquad \left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(0)} = \left(U_\alpha^\eta\right)_j^{(0)}, \\ i, j \in \{1, \cdots, s\}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}.\end{gathered} \tag{2.36}$$

Связь между жесткостными функциями напряжений и перемещений при $k = 0$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(0)} = \left(E_{\alpha\beta xx}\right)_i \partial_x^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)} + \left(E_{\alpha\beta yy}\right)_i \partial_y^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)} + \sum_{\psi\in\{x,y\}} \left(\left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i \left(\partial_\psi^1 \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(0)}\right)\right)$$
$$+ \left(E_{\alpha\beta xy}\right)_i \left(\partial_y^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)} + \partial_x^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)}\right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y, z\}. \tag{2.37}$$

Из выражений (2.34) – (2.37) следует, что следующие жесткостные функции напряжений при $k = 0$ тождественно равны нулю

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.38}$$

Решения (2.38) с учётом выражений (2.37) образуют систему из пяти алгебраических уравнений на пять неизвестных величин (производные жесткостных функций). В силу своей однородности, а также невырожденности матрицы упругих коэффициентов, система равносильна равенству нулю каждой из неизвестных величин

$$\partial_x^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)} = \partial_y^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)} = \partial_x^1 \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(0)} = \partial_y^1 \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(0)} = \partial_y^1 \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)} + \partial_x^1 \left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)} = 0. \tag{2.39}$$

Из равенств (2.39) и условий сопряжений слоёв (2.36) следует, что функция $\left(U_z^{\eta}\right)_i^{(0)}$ является константой, одинаковой для всех слоёв; функция $\left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)}$ является линейной функцией, зависящей только от переменной y, а функция $\left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)}$ – линейной функцией, зависящей только от переменной x, причём коэффициенты при x и y равны по абсолютной величине и противоположны по знаку

$$\left(U_z^{\eta}\right)_i^{(0)} = \left(A_z^{\eta}\right)^{(0)}, \qquad \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(0)} = \left(A_x^{\eta}\right)^{(0)} - \left(C_{xy}^{\eta}\right)^{(0)} y,$$
$$\left(U_y^{\eta}\right)_i^{(0)} = \left(A_y^{\eta}\right)^{(0)} + \left(C_{xy}^{\eta}\right)^{(0)} x, \tag{2.40}$$

где решение содержит четыре константы $\left(A_\alpha^{\eta}\right)^{(0)}$, $\left(C_{xy}^{\eta}\right)^{(0)}$, которые могут быть заданы произвольным образом. Добавим, что с учётом полученного решения следует, что

$$\left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad R_z^{\eta,1} = -G_z^{\eta,1} = B_x^{\eta,1} = B_y^{\eta,1} = B_z^{\eta,1} = 0. \tag{2.41}$$

Следует отметить, что краевая задача (2.15), (2.17), (2.18), (2.19) для любого номера k определена с точностью до решений, аналогичных выражениям (2.40)

$$\left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(A_z^{\eta}\right)^{(k)}, \qquad \left(U_x^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(A_x^{\eta}\right)^{(k)} - \left(C_{xy}^{\eta}\right)^{(k)} y,$$
$$\left(U_y^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(A_y^{\eta}\right)^{(k)} + \left(C_{xy}^{\eta}\right)^{(k)} x, \tag{2.42}$$

где $\left(A_\alpha^\eta\right)^{(k)}$, $\left(C_{xy}^\eta\right)^{(k)}$ – константы, для определения которых необходимы дополнительные условия. Для определения констант $\left(A_\alpha^\eta\right)^{(k)}$ будем считать, что при $k \geq 1$ выполняются условия нормировки

$$\langle \left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)} \rangle = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\} \tag{2.43}$$

Для определения констант $\left(C_{xy}^\eta\right)^{(k)}$ используем другое условие нормировки

$$\langle \left(U_y^\eta\right)_i^{(k)} x - \left(U_x^\eta\right)_i^{(k)} y \rangle = 0, \qquad k \geq 1. \tag{2.44}$$

Заданные таким образом условия нормировки (2.43)-(2.44) позволяют придать физический смысл макрофункции деформирования стержня η, как станет видно позднее. Эти условия задают единственность решения краевой задачи при $k \geq 1$, поэтому в дальнейшем при $k \geq 1$ будем говорить о краевой задаче (2.15), (2.17)-(2.20), (2.23), (2.43)-(2.44).

В решении для нулевой краевой задачи (2.40) содержатся четыре константы $\left(A_\alpha^\eta\right)^{(0)}$, $\left(C_{xy}^\eta\right)^{(0)}$, которые по отношению ко всем остальным решениям являются первичными и могут быть заданы произвольным образом. Выбор констант $\left(A_\alpha^\eta\right)^{(0)}$, $\left(C_{xy}^\eta\right)^{(0)}$ для решения нулевой краевой задачи (2.40) определяет функцию $\eta(\mathrm{z})$, которая в свою очередь определяет характер деформирования стержня. Всего в зависимости от их выбора получается 4 линейно независимых варианта способов аппроксимации. В итоге функция $\eta(\mathrm{z})$ в зависимости от выбора констант $\left(A_\alpha^\eta\right)^{(0)}$, $\left(C_{xy}^\eta\right)^{(0)}$ принимает вид $\eta \in \left(v_x, v_y, v_z, \theta_0\right)$, где функции макроперемещений стержня v_α и угла закручивания θ_0 задаются формулами (2.29), (2.31). Далее рассмотрим подробнее все четыре линейно-независимых допустимых способа аппроксимации стержня.

Первый допустимый способ аппроксимации (изгиб в плоскости xOz)

Примем, что в формулах (2.40) константа $\left(\mathrm{A}_x^\eta\right)^{(0)} = 1$ и $\left(\mathrm{A}_y^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{A}_z^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{C}_{\mathrm{xy}}^\eta\right)^{(0)} = 0$. В этом случае величину η будем обозначать символом v_x. Для конкретного асимптотического приближения с номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через $v_x^{(n)}$. Получим, что

$$\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(U_x^{v_x}\right)_i^{(0)} = 1, \qquad \left(U_y^{v_x}\right)_i^{(0)} = 0. \tag{2.45}$$

Формулы (2.45) с учётом условий нормировки (2.43), (2.44) наделяют функцию $v_x^{(n)}$ физическим содержанием, аналогичным выражениям (2.29). Она равняется среднему перемещению всех точек поперечного сечения стержня в направлении оси x, средние перемещения в других направлениях при этом равны нулю

$$v_x^{(n)}(z) = \frac{1}{F}\langle\left(u_x^{v_x}\right)_i^{(n)}\rangle, \qquad \frac{1}{F}\langle\left(u_\alpha^{v_x}\right)_i^{(n)}\rangle = 0, \qquad \alpha \in \{y, z\}. \tag{2.46}$$

В дальнейшем функцию $v_x^{(n)}$ будем называть функцией прогиба в направлении оси x, или, что тоже самое, макроперемещением в направлении оси x. Приставка «макро» показывает, что значения этой функции являются характеристиками всего поперечного сечения с данной координатой z. Первый способ аппроксимации для краткости будем называть v_x-аппроксимацией.

Рассмотрим краевую задачу (2.15), (2.17) – (2.19) с порядковым номером $k = 1$ с учётом ранее полученных решений (2.21), (2.38), (2.41), (2.45) при $k = 0$. Система уравнений

$$\partial_x^1\left(\tau_{\alpha x}^{v_x}\right)_i^{(1)} + \partial_y^1\left(\tau_{\alpha y}^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0, \;\; \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.47}$$

Условия на боковой поверхности

$$\left(\tau_{\alpha x}^{v_x}\right)_i^{(1)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^{v_x}\right)_i^{(1)} n_y = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.48}$$

Условия сопряжения слоёв

$$\begin{gathered}\left(\tau_{\alpha x}^{v_x}\right)_i^{(1)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^{v_x}\right)_i^{(1)} n_y = \left(\tau_{\alpha x}^{v_x}\right)_j^{(1)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^{v_x}\right)_j^{(1)} n_y, \qquad \left(U_\alpha^{v_x}\right)_i^{(1)} = \left(U_\alpha^{v_x}\right)_j^{(1)}, \\ i, j \in \{1, \cdots, s\}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}.\end{gathered} \tag{2.49}$$

Связь между жесткостными функциями напряжений и перемещений

$$\begin{aligned}\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)_i^{(1)} = {} & \left(E_{\alpha\beta xx}\right)_i \partial_x^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} + \left(E_{\alpha\beta yy}\right)_i \partial_y^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)} + \left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i \left(\partial_x^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)} + 1\right) \\ & + \left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i \left(\partial_y^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)}\right) + \left(E_{\alpha\beta xy}\right)_i \left(\partial_y^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} + \partial_x^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)}\right), \\ & \alpha, \beta \in \{x, y, z\}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Из выражений (2.47) –(2.50) следует, что следующие жесткостные функции напряжений при $k = 1$ тождественно равны нулю

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \qquad \beta \in \{x, y\}. \tag{2.51}$$

Решения (2.51) с учётом выражений (2.50) образуют систему из пяти алгебраических уравнений на пять неизвестных величин. В силу своей однородности, а также невырожденности матрицы упругих коэффициентов, система равносильна равенству нулю каждой из неизвестных величин

$$\partial_x^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} = \partial_y^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)} = \partial_x^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)} + 1 = \partial_y^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0,$$
$$\partial_y^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} + \partial_x^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0. \tag{2.52}$$

Из равенств (2.39) следует, что решение первой краевой с учётом условий нормировки (2.43), (2.44) имеет следующий вид

$$\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)} = -x, \qquad \left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad \left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0, \tag{2.53}$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad R_z^{v_x,2} = -G_z^{v_x,2} = B_\alpha^{v_x,2} = 0, \;\; \alpha \in \{x,y,z\}, \qquad \beta \in \{x,y\}, \tag{2.54}$$

$$B_x^{v_x,3} = B_y^{v_x,3} = 0. \tag{2.55}$$

Решение следующей краевой задачи при $k = 2$ в общем случае даёт ненулевое решение.

Второй допустимый способ аппроксимации (изгиб в плоскости yOz)

Примем, что в формулах (2.40) константа $\left(\mathrm{A}_y^\eta\right)^{(0)} = 1$ и $\left(\mathrm{A}_x^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{A}_z^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{C}_{\mathrm{xy}}^\eta\right)^{(0)} = 0$. В этом случае величину η будем обозначать v_y. Для конкретного асимптотического приближения с номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через $v_y^{(n)}$. Получим

$$\left(U_z^{v_y}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(U_x^{v_y}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(U_y^{v_y}\right)_i^{(0)} = 1. \tag{2.56}$$

Формулы (2.56) с учётом условий нормировки (2.43), (2.44) наделяют функцию $v_y^{(n)}$ физическим содержанием, аналогичным выражениям (2.29). Она равняется среднему перемещению всех точек поперечного сечения стержня в направлении оси y, средние перемещения в других направлениях при этом равны нулю

$$v_y^{(n)}(z) = \frac{1}{F}\langle\left(u_y^{v_y}\right)_i^{(n)}\rangle, \qquad \frac{1}{F}\langle\left(u_\alpha^{v_y}\right)_i^{(n)}\rangle = 0, \qquad \alpha \in \{x,z\}. \tag{2.57}$$

В дальнейшем функцию $v_y^{(n)}$ будем называть функцией прогиба в направлении оси y, или, что тоже самое, макроперемещением в направлении оси y. Второй способ аппроксимации для краткости будем называть v_y-аппроксимацией.

Формально второе правило аппроксимации аналогично первому, только сечение стержня перемещается не вдоль оси x, а вдоль оси y. Поэтому для второго правила аппроксимации решение первой краевой задачи аналогично решению (2.53) – (2.55)

$$\left(U_z^{v_y}\right)_i^{(1)} = -y, \qquad \left(U_x^{v_y}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad \left(U_y^{v_y}\right)_i^{(1)} = 0, \tag{2.58}$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_y}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad R_z^{v_y,2} = -G_z^{v_y,2} = B_\alpha^{v_y,2} = 0, \ \ \alpha \in \{x,y,z\}, \qquad \beta \in \{x,y\}, \tag{2.59}$$

$$B_x^{v_y,3} = B_y^{v_y,3} = 0. \tag{2.60}$$

Выражения для перемещений и напряжений для v_x - и v_y - аппроксимаций. Формулы для перемещений и напряжений (2.12) – (2.13) с учётом полученных равенств (2.38), (2.41), (2.45), (2.53) – (2.56), (2.58) – (2.60) принимают вид

$$\begin{gathered}\left(u_z^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = -\gamma\, \partial_z^1 v_\gamma^{(n)} \varepsilon + \sum_{k=2}^{n+2} \left(U_z^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \\ \left(u_x^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = \delta_x^\gamma v_\gamma^{(n)} + \sum_{k=2}^{n+3} \left(U_x^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \quad \left(u_y^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = \delta_y^\gamma v_\gamma^{(n)} + \sum_{k=2}^{n+3} \left(U_y^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k,\end{gathered} \tag{2.61}$$

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{zz}^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\tau_{zz}^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{\alpha z}^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\tau_{\alpha z}^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \\ \left(\sigma_{\alpha\beta}^{v_\gamma}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=2}^{n+3} \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\gamma}\right)_i^{(k)} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \{x,y\}.\end{gathered} \tag{2.62}$$

Выражения для погонных нагрузок (2.27) с учётом равенств (2.54) – (2.55), (2.59) – (2.60) принимают вид

$$\begin{gathered}p_z = \sum_{k=3}^{n+2} B_z^{v_\gamma,k} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \qquad p_\alpha = \sum_{k=4}^{n+3} B_\alpha^{v_\gamma,k} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \\ m_0(z) = \sum_{k=3}^{n+3} R_z^{v_\gamma,k} \partial_z^k v_\gamma^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha,\gamma \in \{x,y\}.\end{gathered} \tag{2.63}$$

Равенства (2.63) для каждого γ являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, они связывают одну функцию прогиба с четырьмя заданными погонными нагрузками. В силу того, что система (2.63) для каждого γ переопределена, необходимо рассмотрение других способов аппроксимации.

Отметим, что первые слагаемые для продольных перемещений $\left(u_z^{v_\gamma}\right)_i^{(n)}$ в формулах (2.61) соответствует гипотезе плоских сечений Бернулли-Эйлера. Эти слагаемые содержат первые степени малого параметра ε и поэтому можно говорить, что на основе пространственной теории упругости получено обоснование гипотезы Бернулли-Эйлера для задачи изгиба многослойного анизотропного стержня в первом асимптотическом приближении. Первое слагаемое для поперечного перемещения $\left(u_\gamma^{v_\gamma}\right)_i^{(n)}$ соответствует перемещению поперечного сечения как единого целого (смещение сечения вдоль оси $\gamma \in \{x, y\}$).

Третий допустимый способ аппроксимации (растяжение-сжатие вдоль оси z)

Примем, что в формулах (2.40) константа $\left(\mathrm{A}_z^\eta\right)^{(0)} = 1$ и $\left(\mathrm{A}_x^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{A}_y^\eta\right)^{(0)} = \left(\mathrm{C}_{\mathrm{xy}}^\eta\right)^{(0)} = 0$. В этом случае величину η будем обозначать v_z. Для конкретного асимптотического приближения с номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через $v_z^{(n)}$. Получим

$$\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(0)} = 1, \qquad \left(U_x^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \left(U_y^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0. \tag{2.64}$$

Формулы (2.64) с учётом условий нормировки (2.43), (2.44) наделяют функцию $v_z^{(n)}$ физическим содержанием, аналогичным выражениям (2.29). Она равняется среднему перемещению всех точек поперечного сечения стержня в направлении оси z, средние перемещения в других направлениях при этом равны нулю

$$v_z^{(n)}(z) = \frac{1}{F}\left\langle\left(u_z^{v_z}\right)_i^{(n)}\right\rangle, \qquad \frac{1}{F}\left\langle\left(u_\alpha^{v_z}\right)_i^{(n)}\right\rangle = 0, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{2.65}$$

В дальнейшем функцию $v_z^{(n)}$ будем называть функцией продольного перемещения или макроперемещением стержня вдоль оси z. Третий способ аппроксимации для краткости будем называть v_z-аппроксимацией.

Из выражений (2.15), (2.64) следует, что следующие жесткостные функции напряжений при $k = 0$ тождественно равны нулю

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(0)} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y, z\}. \tag{2.66}$$

Выражения (2.15) при $k = 1$ с учётом равенств (2.64) имеют вид

$$\begin{gathered}\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)_i^{(1)} = \left(E_{\alpha\beta xx}\right)_i \partial_x^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)} + \left(E_{\alpha\beta yy}\right)_i \partial_y^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)} + \\ + \left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i\left(\partial_x^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)} + 1\right) + \left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i\left(\partial_y^1\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(1)}\right) +\end{gathered} \tag{2.67}$$

$$+\left(E_{\alpha\beta xy}\right)_i\left(\partial_y^1\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(1)}+\partial_x^1\left(U_y^{v_x}\right)_i^{(1)}\right)+\left(E_{\alpha\beta zz}\right)_i,\quad \alpha,\beta\in\{x,y,z\}.$$

Из-за наличия свободных членов в последнем слагаемом правой части все жесткостные функции не могут быть равными нулю одновременно, поэтому в общем случае

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(1)}\neq 0,\qquad B_z^{v_z,2}\neq 0,\qquad R_z^{v_z,2}\neq 0,\qquad \alpha,\beta\in\{x,y,z\},\tag{2.68}$$

$$B_x^{v_z,2}=B_y^{v_z,2}=0.\tag{2.69}$$

Формулы для перемещений и напряжений (2.12) – (2.13) с учётом полученных равенств (2.38), (2.41), (2.64), (2.66) принимают вид

$$\begin{gathered}\left(u_z^{v_z}\right)_i^{(n)}=v_z^{(n)}+\sum_{k=1}^{n+2}\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(k)}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\\ \left(u_\alpha^z\right)_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{n+2}\left(U_\alpha^{v_z}\right)_i^{(k)}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\quad \alpha\in\{x,y\},\end{gathered}\tag{2.70}$$

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{zz}^{v_z}\right)_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(k)}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\qquad \left(\sigma_{\alpha z}^{v_z}\right)_i^{(n)}=\sum_{k=2}^{n+2}\left(\tau_{\alpha z}^{v_z}\right)_i^{(k)}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\\ \left(\sigma_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{n+3}\left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(k)}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\qquad \alpha,\beta\in\{x,y\}.\end{gathered}\tag{2.71}$$

Выражения для погонных нагрузок (2.27) с учётом равенств (2.41), (2.68), (2.69) для v_z-аппроксимации принимают вид

$$\begin{gathered}p_z=\sum_{k=2}^{n+2}B_z^{v_z,k}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\qquad p_\alpha=\sum_{k=3}^{n+3}B_\alpha^{v_z,k}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k,\qquad \alpha\in\{x,y\},\\ m_0(z)=\sum_{k=2}^{n+3}R_z^{v_z,k}\partial_z^k v_z^{(n)}\varepsilon^k.\end{gathered}\tag{2.72}$$

Отметим, что первое слагаемое для продольных перемещений $\left(u_z^{v_z}\right)_i^{(n)}$ в формулах (2.70) соответствует гипотезе плоских сечений при растяжении-сжатии. Это слагаемое содержит нулевую степень малого параметра ε и поэтому можно говорить, что на основе пространственной теории упругости получено обоснование гипотезы плоских сечений для задачи растяжения-сжатия слоистого анизотропного стержня как нулевого асимптотического приближения.

Четвёртый допустимый способ аппроксимации (кручение в плоскости xOy)

Примем, что в формулах (2.40) константа $\left(\mathrm{C}_{\mathrm{xy}}^{\eta}\right)^{(0)}=1$ и $\left(\mathrm{A}_{x}^{\eta}\right)^{(0)}=\left(\mathrm{A}_{y}^{\eta}\right)^{(0)}=\left(\mathrm{A}_{z}^{\eta}\right)^{(0)}=0$. В этом случае величину η будем обозначать символом θ_0. Для конкретного асимптотического приближения с номером n будем обозначать $\eta^{(n)}$ через $\theta_0^{(n)}$. Получим

$$\left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(0)}=0, \qquad \left(U_x^{\theta_0}\right)_i^{(0)}=-y, \qquad \left(U_y^{\theta_0}\right)_i^{(0)}=x. \tag{2.73}$$

Формулы (2.73) с учётом условий нормировки (2.43), (2.44) наделяют функцию $\theta_0^{(n)}$ физическим содержанием. Она равняется среднему углу закручивания поперечного сечения стержня вокруг оси z, определяемого по формуле (2.31). При этом средние перемещения в направлении α равны нулю

$$\theta=\frac{1}{J}\langle x\left(u_y^{\theta_0}\right)_i^{(n)}-y\left(u_x^{\theta_0}\right)_i^{(n)}\rangle=\theta_0^{(n)}, \qquad \frac{1}{F}\langle\left(u_\alpha^{\theta_0}\right)_i^{(n)}\rangle=0, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{2.74}$$

Четвёртый допустимый способ аппроксимации для краткости будем называть θ_0-аппроксимацией.

Из выражений (2.15), (2.73) следует, что следующие жесткостные функции напряжений при $k=0$ тождественно равны нулю

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(0)}=0, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}, \qquad \beta\in\{x,y\}. \tag{2.75}$$

Выражения (2.15) при $k=1$ с учётом равенств (2.73) имеют вид

$$\begin{gathered}\left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(1)}=\left(E_{\alpha\beta xx}\right)_i\partial_x^1\left(U_x^{\theta_0}\right)_i^{(1)}+\left(E_{\alpha\beta yy}\right)_i\partial_y^1\left(U_y^{\theta_0}\right)_i^{(1)}+\\+\left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i\left(\partial_x^1\left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(1)}-y\right)+\left(E_{\alpha\beta\psi z}\right)_i\left(\partial_y^1\left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(1)}+x\right)+\\+\left(E_{\alpha\beta xy}\right)_i\left(\partial_y^1\left(U_x^{\theta_0}\right)_i^{(1)}+\partial_x^1\left(U_y^{\theta_0}\right)_i^{(1)}\right), \quad \alpha,\beta\in\{x,y,z\}.\end{gathered} \tag{2.76}$$

Из-за наличия свободных членов в выражениях (2.76) все жесткостные функции не могут быть равными нулю одновременно, поэтому в общем случае

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(1)}\neq 0, \qquad B_z^{\theta_0,2}\neq 0, \qquad R_z^{\theta_0,2}\neq 0, \qquad \alpha,\beta\in\{x,y,z\}, \tag{2.77}$$

$$B_x^{\theta_0,2}=B_y^{\theta_0,2}=0. \tag{2.78}$$

Формулы для перемещений и напряжений (2.12) – (2.13) с учётом полученных равенств (2.38), (2.41), (2.73), (2.75) принимают вид

$$\left(u_z^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n+2} \left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(u_x^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = -y\, \theta_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n+3} \left(U_x^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k,$$
$$\left(u_y^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = x\, \theta_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n+3} \left(U_y^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \tag{2.79}$$

$$\left(\sigma_{zz}^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\tau_{zz}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{\alpha z}^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n+2} \left(\tau_{\alpha z}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k,$$
$$\left(\sigma_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n+3} \left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.80}$$

Выражения для погонных нагрузок (2.27) с учётом равенств (2.41), (2.77), (2.78) для данного способа аппроксимации принимают вид

$$p_z = \sum_{k=3}^{n+2} B_z^{\theta_0,k} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \qquad p_\alpha = \sum_{k=3}^{n+3} B_\alpha^{\theta_0,k} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \alpha \in \{x, y\},$$
$$m_0(z) = \sum_{k=2}^{n+3} R_z^{\theta_0,k} \partial_z^k \theta_0^{(n)} \varepsilon^k. \tag{2.81}$$

Отметим, что первые слагаемые для поперечных перемещений $\left(u_x^{\theta_0}\right)_i^{(n)}, \left(u_y^{\theta_0}\right)_i^{(n)}$ в формулах (2.79) соответствует кручению сечения как единого целого. Эти слагаемые содержат нулевые степени малого параметра ε, поэтому можно говорить, что задача о кручении многослойного анизотропного стержня описывается представлением о кручении сечения стержня как абсолютно твёрдого тела в качестве нулевого асимптотического приближения.

2.5 Уравнения макродеформирования слоистого анизотропного стержня

Для того, чтобы устранить переопределённость, которая возникает в системах (2.63), (2.72), (2.81) по отдельности, будем считать, что перемещения и напряжения являются комбинацией всех четырёх допустимых способов аппроксимации, причем каждый способ имеет свой номер асимптотического приближения, и совокупность этих номеров образует вектор асимптотического приближения $\bar{n}$

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i^{(\bar{n})} = \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta_0\}} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(n_\eta)}, \qquad \left(u_\alpha\right)_i^{(\bar{n})} = \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta_0\}} \left(u_\alpha^{\eta}\right)_i^{(n_\eta)}, \quad \alpha, \beta \in \{x, y, z\},$$
$$\bar{n} = \left(n_{v_x}, n_{v_y}, n_{v_z}, n_{\theta_0}\right), \qquad i = 1, \dots, s. \tag{2.82}$$

Из выражений (2.46), (2.57), (2.65) следуют равенства, выражающие три макрофункции перемещений через перемещения (2.82)

$$v_\alpha^{(\bar n)} = \frac{1}{F}\langle (u_\alpha)_i^{(\bar n)}\rangle, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{2.83}$$

Таким образом функции макроперемещений $v_\alpha^{(\bar n)}$ обладают геометрическим смыслом, они равняются среднему перемещению стержня в направлении α при аппроксимации перемещений (2.82). Из формул (2.74) следует выражение для угла закручивания поперечного сечения $\theta^{(\bar n)}$ при заданном векторе асимптотического приближения $\bar n$

$$\theta^{(\bar n)} = \theta_0^{(\bar n)} = \frac{1}{J}\langle x\,(u_y)_i^{(\bar n)} - y\,(u_x)_i^{(\bar n)}\rangle. \tag{2.84}$$

Макрофункция $\theta_0^{(\bar n)}$ равняется углу закручивания поперечного сечения стержня при аппроксимации перемещений (2.82). В дальнейшем в связи с выполнением равенства (2.84) будем опускать нижний индекс 0 в обозначениях угла закручивания и писать $\theta^{(\bar n)}$.

Формулы для напряжений в (2.82) могут быть записаны в следующем виде с помощью равенств (2.62), (2.71), (2.80)

$$\begin{aligned}
(\sigma_{zz})_i^{(\bar n)} &= \sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} \left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(1)} \partial_z^1 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^1 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta+1} \left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k,\\
(\sigma_{\alpha z})_i^{(\bar n)} &= \sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} \left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(1)} \partial_z^1 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^1 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta+2} \left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k,\\
\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i^{(\bar n)} &= \sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} \left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(1)} \partial_z^1 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^1 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta+3} \left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k,
\end{aligned} \tag{2.85}$$

где $\alpha, \beta \in \{x, y\}$.

Объединяя между собой выражения для погонных усилий (2.63), (2.72), (2.81) получим систему из четырех дифференциальных уравнений макродеформирования слоистого анизотропного стержня

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} B_\alpha^{\eta,3} \partial_z^3 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^3 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=4}^{n_\eta+3} B_\alpha^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k &= p_\alpha, \qquad \alpha \in \{x, y\},\\
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} B_z^{\eta,2} \partial_z^2 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^2 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=3}^{n_\eta+2} B_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k &= p_{z,}\\
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} R_z^{\eta,2} \partial_z^2 \eta^{(\bar n)} \varepsilon^2 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=3}^{n_\eta+3} R_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(\bar n)} \varepsilon^k &= m_0.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Система (2.86) состоит из четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений на четыре неизвестных макрофункции $v_x^{(\bar{n})}, v_y^{(\bar{n})}, v_z^{(\bar{n})}, \theta^{(\bar{n})}$, три из которых являются макроперемещениями поперечных сечений, а четвёртая углом закручивания поперечного сечения. Порядок системы зависит от векторного номера асимптотического приближения $\bar{n}$.

Выражения для внутренних усилий слоистого стержня. Любая система сил статически эквивалентна трём сосредоточенным силам и трём моментам. Система напряжений, действующая на поперечное сечение стержня эквивалентна шести внутренним усилиям: двум перерезывающим усилиям Q_x, Q_y, продольному усилию N_z, двум изгибающим моментам M_x, M_y в направлениях x и y соответственно и закручивающему моменту M_z. Для асимптотического приближения с векторным номером $\bar{n}$ внутренние усилия по определению равны

$$\begin{gathered} Q_\alpha{}^{(\bar{n})} = \langle (\sigma_{\alpha z})_i^{(\bar{n})} \rangle, \qquad N_z{}^{(\bar{n})} = \langle (\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} \rangle, \qquad M_\alpha{}^{(\bar{n})} = \langle \alpha\, (\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} \rangle, \quad \alpha \in \{x, y\}, \\ M_z{}^{(\bar{n})} = \langle \left(\sigma_{yz}\right)_i^{(\bar{n})} x - (\sigma_{xz})_i^{(\bar{n})} y \rangle. \end{gathered} \tag{2.87}$$

Подставим формулы (2.82), (2.85) в (2.87) и выразим внутренние усилия для векторного номера асимптотического приближения $\bar{n}$ через функции макродеформирования стержня

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(\bar{n})} &= -\sum_{\eta \in \{v_z, \theta\}} B_\alpha^{\eta,3} \partial_z^2 \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^2 - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta\}} \sum_{k=3}^{n_\eta + 2} B_\alpha^{\eta,k+1} \partial_z^k \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^k, \\ N_z^{(\bar{n})} &= -\sum_{\eta \in \{v_z, \theta\}} B_z^{\eta,2} \partial_z^1 \eta^{(\bar{n})} \varepsilon - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta + 1} B_z^{\eta,k+1} \partial_z^k \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^k, \\ M_\alpha^{(\bar{n})} &= -\sum_{\eta \in \{v_z, \theta\}} I_\alpha^{\eta,1} \partial_z^1 \eta^{(\bar{n})} \varepsilon - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta + 1} I_\alpha^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^k, \\ M_z^{(\bar{n})} &= \sum_{\eta \in \{v_z, \theta\}} G_z^{\eta,2} \partial_z^1 \eta^{(\bar{n})} \varepsilon + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, v_z, \theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta + 2} G_z^{\eta,k+1} \partial_z^k \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^k, \end{aligned} \tag{2.88}$$

где величины $I_\alpha^{\eta,k}$ будем называть изгибными жесткостями стержня вдоль оси α и которые могут быть определены по формулам

$$I_\alpha^{\eta,k} = -\langle \alpha \left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k)} \rangle, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{2.89}$$

Если умножить уравнение при $\alpha = z$ на x и проинтегрировать по сечению, далее учесть краевые условия и выражения (2.89), то получим

$$I_\alpha^{\eta,k-1} = B_\alpha^{\eta,k+1} + B_z^{\eta,k} \oint \alpha\, f_z(\Gamma)\, d\Gamma, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{2.90}$$

На основе выражений (2.86) и (2.88) получим, что для величин $Q_\alpha^{(\bar{n})}, N_z^{(\bar{n})}, M_z^{(\bar{n})}$ справедливы следующие уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\partial_z^1 N_z^{(\bar{n})}\varepsilon = -p_z, \qquad \partial_z^1 Q_x^{(\bar{n})}\varepsilon = -p_x, \qquad \partial_z^1 Q_y^{(\bar{n})}\varepsilon = -p_y,\\ \partial_z^1 M_z^{(\bar{n})}\varepsilon = m_0(z) + p_x A_y - p_y A_x,\end{gathered} \tag{2.91}$$

$$\begin{gathered}\partial_z^1 M_x^{(\bar{n})}\varepsilon = Q_x^{(n)} - p_z \oint_\Gamma x\, f_z(\Gamma) d\Gamma,\\ \partial_z^1 M_y^{(\bar{n})}\varepsilon = Q_y^{(n)} - p_z \oint_\Gamma y\, f_z(\Gamma) d\Gamma.\end{gathered} \tag{2.92}$$

Разрешающая система (2.86) эквивалентна уравнениям равновесия (2.91) после подстановки в них выражений (2.88). В свою очередь уравнения (2.92), связывающие перерезывающие усилия и изгибающие моменты, выполняются автоматически.

Выражения для обобщённых перемещений слоистого стержня. Обобщённые перемещения для описания деформирования слоистого стержня также сводятся к шести величинам, четыре из которых уже определены в виде неизвестных функций макродеформирования $v_x^{(\bar{n})}, v_y^{(\bar{n})}, v_z^{(\bar{n})}, \theta^{(\bar{n})}$ для системы деформирования (2.86). Две оставшиеся величины описываются углами наклона поперечного сечения $\varphi_x^{(\bar{n})}, \varphi_y^{(\bar{n})}$, которые были введены ранее в разделе 2.3 и определяются по формуле (2.33). Если подставить выражения для перемещений (2.82) в формулу для углов наклона (2.33), то получим выражения для углов наклона $\varphi_x^{(\bar{n})}, \varphi_y^{(\bar{n})}$ через функции макродеформирования стержня $v_x^{(\bar{n})}, v_y^{(\bar{n})}, v_z^{(\bar{n})}, \theta^{(\bar{n})}$

$$\varphi_\alpha^{(\bar{n})} = \partial_z^1 v_\alpha{}^{(\bar{n})}\varepsilon + \sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} \Phi_\alpha^{\eta,1}\partial_z^1 \eta^{(\bar{n})}\varepsilon + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=2}^{n_\eta+2} \Phi_\alpha^{\eta,k}\partial_z^k \eta^{(\bar{n})}\varepsilon^k, \qquad \alpha \in \{x,y\}, \tag{2.93}$$

где введено обозначение

$$\Phi_\alpha^{\eta,k} = -\frac{1}{J}\langle \alpha \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)}\rangle, \qquad \alpha \in \{x,y\}. \tag{2.94}$$

Если проанализировать первые слагаемые в выражениях для углов наклона (2.93), то можно заметить, что они соответствуют гипотезе плоских сечений Бернулли-Эйлера.

Краевые условия для задачи деформирования слоистого стержня. Краевые условия для системы (2.86) задаются в виде ограничений на макровеличины на торце стержня: 6 функций внутренних усилий $Q_x{}^{(\bar{n})}, Q_y{}^{(\bar{n})}, N_z{}^{(\bar{n})}, M_x{}^{(\bar{n})}, M_y{}^{(\bar{n})}, M_z{}^{(\bar{n})}$ и 6 функций обобщённых перемещений

$v_x^{(\bar{n})}, v_y^{(\bar{n})}, v_z^{(\bar{n})}, \theta^{(\bar{n})}, \varphi_x^{(\bar{n})}, \varphi_y^{(\bar{n})}$. Таким образом в постановке Сен-Венана всего следует 12 краевых условий.

В качестве примера рассмотрим стержень заделку, у которого все перемещения ограничены на одном торце ($z = 0$), а на противоположном конце ($z = 1$) действуют единичные перерезывающие и растягивающее усилия, а также единичный закручивающий момент. Тогда получим следующие краевые условия на торцах

$$
\begin{gathered}
v_x^{(\bar{n})} = v_y^{(\bar{n})} = v_z^{(\bar{n})} = \theta^{(\bar{n})} = \varphi_x^{(\bar{n})} = \varphi_y^{(\bar{n})} = 0, \qquad \text{при } z = 0, \\
{Q_x}^{(\bar{n})} = {Q_y}^{(\bar{n})} = {N_z}^{(\bar{n})} = {M_z}^{(\bar{n})} = 1, \qquad {M_x}^{(\bar{n})} = {M_y}^{(\bar{n})} = 0, \qquad \text{при } z = 1.
\end{gathered}
\tag{2.95}
$$

Порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений (2.86) зависит от внутренней структуры поперечного сечения стержня, так как некоторые из коэффициентов системы (2.86) могут зануляться, что влечет исключение соответствующих степеней. В работе [63] показано, что в частных случаях, когда слои стержня составлены из изотропных материалов при асимптотическом приближении $n_{v_x} = n_{v_y} = 1, n_{v_z} = n_\theta = 0$ порядок системы (2.86) в точности равен 12. В этом случае краевых условий, поставленных в терминах внутренних усилий вполне достаточно, и в этом случае, представленный подход позволяет решить пространственную задачу теории упругости в постановке Сен-Венана.

Если порядок разрешающей системы превышает 12, то возможны два случая: либо дополнительно ставить на торцах добавочные краевые условия, либо рассматривать систему как возмущение системы уравнений 12-го порядка и искать в качестве решений только регулярные возмущения. Последний способ для изотропных материалов исследовался в работах [65, 66].

2.6 Слоистые стержни с поперечной плоскостью симметрии анизотропии

Рассмотрим частный случай, когда материал каждого слоя является анизотропным упругим материалом с плоскостью симметрии (англ. monoclinic material), перпендикулярной оси z. В этом случае обобщённый закон Гука (2.7) содержит тринадцать независимых констант $\left(E_{\alpha\beta\eta\gamma}\right)_i$ [115, 144]

$$
\begin{Bmatrix} (\sigma_{xx})_i \\ (\sigma_{yy})_i \\ (\sigma_{zz})_i \\ (\sigma_{yz})_i \\ (\sigma_{xz})_i \\ (\sigma_{xy})_i \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
(E_{xxxx})_i & (E_{xxyy})_i & (E_{xxzz})_i & 0 & 0 & (E_{xxxy})_i \\
(E_{xxyy})_i & (E_{yyyy})_i & (E_{yyzz})_i & 0 & 0 & (E_{yyxy})_i \\
(E_{xxzz})_i & (E_{yyzz})_i & (E_{zzzz})_i & 0 & 0 & (E_{zzxy})_i \\
0 & 0 & 0 & (E_{yzyz})_i & (E_{yzxz})_i & 0 \\
0 & 0 & 0 & (E_{yzxz})_i & (E_{xzxz})_i & 0 \\
(E_{xxxy})_i & (E_{yyxy})_i & (E_{zzxy})_i & 0 & 0 & (E_{xyxy})_i
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} (e_{xx})_i \\ (e_{yy})_i \\ (e_{zz})_i \\ 2(e_{yz})_i \\ 2(e_{xz})_i \\ 2(e_{xy})_i \end{Bmatrix}.
\tag{2.96}
$$

С учётом соотношения (2.96) формулы (2.15) связи жесткостных функций примут упрощённый вид

$$\left(\tau^{\eta}_{\alpha\beta}\right)^{(k)}_{i} = \left(E_{\alpha\beta zz}\right)_i\left(U^{\eta}_z\right)^{(k-1)}_i + \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y\}}\left(\left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i\left(\partial^1_\varphi\left(U^{\eta}_\psi\right)^{(k)}_i + \partial^1_\psi\left(U^{\eta}_\varphi\right)^{(k)}_i\right)\right),$$
$$\left(\tau^{\eta}_{zz}\right)^{(k)}_{i} = \left(E_{zzzz}\right)_i\left(U^{\eta}_z\right)^{(k-1)}_i + \sum_{\varphi,\psi\in\{x,y\}}\left(\left(E_{zz\varphi\psi}\right)_i\left(\partial^1_\varphi\left(U^{\eta}_\psi\right)^{(k)}_i + \partial^1_\psi\left(U^{\eta}_\varphi\right)^{(k)}_i\right)\right), \tag{2.97}$$
$$\left(\tau^{\eta}_{z\beta}\right)^{(k)}_{i} = \sum_{\psi\in\{x,y\}}\left(\left(E_{\beta z\psi z}\right)_i\left(\partial^1_\psi\left(U^{\eta}_z\right)^{(k)}_i + \left(U^{\eta}_\psi\right)^{(k-1)}_i\right)\right), \quad \alpha,\beta\in\{x,y\}.$$

В этом случае с учётом структуры выражений (2.97) краевые задачи для каждого порядкового номера k распадаются на две независимые краевые задачи. Рассмотрим их по отдельности.

Первая краевая задача. Уравнения имеют вид

$$\partial^1_x\left(\tau^{\eta}_{\alpha x}\right)^{(k)}_i + \partial^1_y\left(\tau^{\eta}_{\alpha y}\right)^{(k)}_i + \left(\tau^{\eta}_{\alpha z}\right)^{(k-1)}_i = 0, \quad \alpha\in\{x,y\}. \tag{2.98}$$

Краевые условия на границе поперечного сечения

$$\left(\tau^{\eta}_{\alpha x}\right)^{(k)}_i n_x + \left(\tau^{\eta}_{\alpha y}\right)^{(k)}_i n_y = B^{\eta,k}_\alpha f_\alpha(\Gamma) + R^{\eta,k}_z g_\alpha(\Gamma), \qquad \alpha\in\{x,y\}. \tag{2.99}$$

Условия согласования между слоями

$$\left(\tau^{\eta}_{\alpha x}\right)^{(k)}_i n_x + \left(\tau^{\eta}_{\alpha y}\right)^{(k)}_i n_y = \left(\tau^{\eta}_{\alpha x}\right)^{(k)}_j n_x + \left(\tau^{\eta}_{\alpha y}\right)^{(k)}_j n_y,$$
$$\left(U^{\eta}_\alpha\right)^{(k)}_i = \left(U^{\eta}_\alpha\right)^{(k)}_j, \qquad i,j = 1,\dots,s. \tag{2.100}$$

Условия нормировки

$$\langle\left(U^{\eta}_\alpha\right)^{(k)}_i\rangle = 0, \;\; \alpha\in\{x,y\}, \qquad \langle\left(U^{\eta}_y\right)^{(k)}_i x - \left(U^{\eta}_x\right)^{(k)}_i y\rangle = 0, \qquad k\geq 1. \tag{2.101}$$

Необходимые условия разрешимости

$$B^{\eta,k}_\alpha = -\langle\left(\tau^{\eta}_{\alpha z}\right)^{(k-1)}_i\rangle, \quad \alpha\in\{x,y\},$$
$$R^{\eta,k}_z = -\langle -\left(\tau^{\eta}_{xz}\right)^{(k-1)}_i\left(y - A_y\right) + \left(\tau^{\eta}_{yz}\right)^{(k-1)}_i\left(x - A_x\right)\rangle. \tag{2.102}$$

Вторая краевая задача. Уравнения имеют вид

$$\partial^1_x\left(\tau^{\eta}_{zx}\right)^{(k)}_i + \partial^1_y\left(\tau^{\eta}_{zy}\right)^{(k)}_i + \left(\tau^{\eta}_{zz}\right)^{(k-1)}_i = 0. \tag{2.103}$$

Краевые условия на границе поперечного сечения

$$\left(\tau_{zx}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x + \left(\tau_{zy}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y = B_z^{\eta,k} f_z(\Gamma). \tag{2.104}$$

Условия согласования между слоями

$$\begin{gathered}\left(\tau_{zx}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x + \left(\tau_{zy}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y = \left(\tau_{zx}^{\eta}\right)_j^{(k)} n_x + \left(\tau_{zy}^{\eta}\right)_j^{(k)} n_y, \\ \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)} = \left(U_z^{\eta}\right)_j^{(k)}, \qquad i,j = 1,\dots,s.\end{gathered} \tag{2.105}$$

Условие нормировки

$$\langle \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)} \rangle = 0. \tag{2.106}$$

Необходимое условие разрешимости

$$B_z^{\eta,k} = -\langle \left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} \rangle. \tag{2.107}$$

Рассмотрим решение первой (2.98) – (2.102) и второй (2.103) – (2.107) краевых задач для каждого из способов аппроксимации с учётом структуры выражений (2.97) для материалов с поперечной плоскостью симметрии анизотропии.

Первый допустимый способ аппроксимации. Рассмотрим решения краевых задач для первого допустимого способа аппроксимации. Решения краевых задач (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107) при $k = 0, 1$ остаются теми же, что и для общего анизотропного случая. Первая краевая задача (2.98) – (2.102) при $k = 2$ в общем случае имеет ненулевое решение. Рассмотрим вторую краевую задачу (2.103) – (2.107) при $k = 2$. Нетрудно заметить, что для задачи справедливо решение тождественное равное нулю

$$\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(2)} = \left(\tau_{zx}^{v_x}\right)_i^{(2)} = \left(\tau_{zy}^{v_x}\right)_i^{(2)} = 0, \qquad B_x^{v_x,3} = B_y^{v_x,3} = R_z^{v_x,k} = 0. \tag{2.108}$$

Продолжая рассматривать первую и вторую краевые задачи при больших значениях порядкового номера k, можно установить, что следующие жесткостные функции и коэффициенты тождественно равны нулю:

при чётных k

$$\left(U_z^{v_x}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{z\alpha}^{v_x}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_\alpha^{v_x,k+1} = R_z^{v_x,k+1} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.109}$$

при нечётных k

$$\left(U_\alpha^{v_x}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_x}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{zz}^{v_x}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_z^{v_x,k+1} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.110}$$

Второй допустимый способ аппроксимации. Так как второй способ аппроксимации абсолютно идентичен первому и действует в другом направлении, то для него справедливы аналогичные утверждения. Из чего следует, что следующие величины тождественно равны нулю:

при чётных k

$$\left(U_z^{v_y}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{z\alpha}^{v_y}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_\alpha^{v_y,k+1} = R_z^{v_y,k+1} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.111}$$

при нечётных k

$$\left(U_\alpha^{v_y}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_y}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{zz}^{v_y}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_z^{v_y,k+1} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.112}$$

Третий способ аппроксимации. Рассмотрим решения краевых задач (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107) для третьего допустимого способа аппроксимации. Решение краевых задач при $k = 0$, остаётся тем же, что и для общего анизотропного случая. Первая краевая задача (2.98) – (2.102) при $k = 1$ в общем случае имеет ненулевое решение. Рассмотрим вторую краевую задачу (2.103) – (2.107) при $k = 1$. Нетрудно заметить, что для задачи неё справедливо решение тождественное равное нулю

$$\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{zx}^{v_z}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{zy}^{v_z}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad B_x^{v_z,2} = B_y^{v_z,2} = R_z^{v_z,2} = 0. \tag{2.113}$$

Продолжая рассматривать первую и вторую краевые задачи при больших значениях порядкового номера k, можно установить, что следующие жесткостные функции и коэффициенты тождественно равны нулю:

при нечётных k

$$\left(U_z^{v_z}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{z\alpha}^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_\alpha^{v_z,k+1} = R_z^{v_z,k+1} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.114}$$

при чётных k

$$\left(U_\alpha^{v_z}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_z^{v_z,k+1} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.115}$$

Четвёртый допустимый способ аппроксимации. Рассмотрим решения краевых задач (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107) для четвертого допустимого способа аппроксимации. Решение краевых задач при $k = 0$, остаётся тем же, что и для общего анизотропного случая. Рассмотрим первую краевую задачу (2.98) – (2.102) при $k = 1$. Нетрудно заметить, что для нее справедливо решение тождественно равное нулю

$$\left(U_\alpha^{\theta}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta}\right)_i^{(1)} = \left(\tau_{zz}^{\theta}\right)_i^{(1)} = 0, \qquad B_z^{\theta,2} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.116}$$

Вторая краевая задача (2.103) – (2.107) при $k = 1$ в общем случае имеет ненулевое решение. Продолжая рассматривать первую и вторую краевые задачи при больших значениях порядкового номера k, можно установить, что следующие жесткостные функции и коэффициенты тождественно равны нулю:

при четных k

$$\left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{z\alpha}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} = 0, \qquad B_\alpha^{\theta,k+1} = R_z^{\theta,k+1} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y\}, \tag{2.117}$$

при нечётных k

$$\left(U_\alpha^{\theta_0}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} = \left(\tau_{zz}^{\theta_0}\right)_i^{(k)} = 0, \ \ B_z^{\theta,k+1} = 0, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{2.118}$$

Уравнения деформирования слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии. С учётом полученных решений краевых задач (2.108) – (2.118) для четырёх правил аппроксимации и разных степеней асимптотического приближения $n_{v_x}, n_{v_y}, n_{v_z}, n_\theta$, образующих векторный номер асимптотического приближения $\bar{n}$, выражения для перемещений в (2.82) примут вид

$$\begin{aligned}
(u_x)_i^{(\bar{n})} &= {v_x}^{(\bar{n})} - y\,\theta^{(\bar{n})} + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+3)]} \left(U_x^\eta\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(U_x^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}, \\
\left(u_y\right)_i^{(\bar{n})} &= {v_y}^{(\bar{n})} + x\,\theta^{(\bar{n})} + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+3)]} \left(U_y^\eta\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(U_y^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}, \\
(u_z)_i^{(\bar{n})} &= {v_z}^{(\bar{n})} + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=0}^{[0.5(n_\eta+1)]} \left(U_z^\eta\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(U_z^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k}.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Формулы для напряжений (2.85) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i^{(\bar{n})} &= \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+3)]} \left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1},
\end{aligned} \tag{2.120}$$

$$(\sigma_{\alpha z})_i^{(\bar{n})} = \left(\tau_{\alpha z}^{\theta}\right)_i^{(1)} \partial_z^1 \theta^{(\bar{n})} \varepsilon + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} \left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} \left(\tau_{\alpha z}^{v_z}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k}, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\},$$

$$(\sigma_{zz})_i^{(\bar{n})} = \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} \left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(2k)} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5 n_{v_z}]} \left(\tau_{zz}^{v_z}\right)_i^{(2k+1)} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}.$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (2.86) макродеформирования для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии примет упрощенный вид

$$\begin{gathered}
\sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=2}^{[0.5(n_\eta+3)]} B_\alpha^{\eta,2k} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_\alpha^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} = p_\alpha(z), \\
\sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} B_z^{\eta,2k+1} \partial_z^{2k+1} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_\alpha^{v_z,2k} \partial_z^{2k} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} = p_z(z), \\
G_z^{\theta,2} \partial_z^2 \theta^{(\bar{n})} \varepsilon^2 - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=2}^{[0.5(n_\eta+3)]} R_z^{\eta,2k} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} - \\
- \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} R_z^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} = m_0(z), \qquad \alpha \in \{x, y\}.
\end{gathered} \tag{2.121}$$

Выражения для внутренних усилий (2.88) примут следующий вид

$$\begin{gathered}
Q_\alpha^{(\bar{n})} = - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=2}^{[0.5(n_\eta+1)]} B_\alpha^{\eta,2k+2} \partial_z^{2k+1} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} - \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_\alpha^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k}, \\
N_z^{(\bar{n})} = - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} B_z^{\eta,2k+1} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} - \sum_{k=0}^{[0.5 n_{v_z}]} B_\alpha^{v_z,2k+2} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}, \\
M_\alpha^{(\bar{n})} = - \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} I_\alpha^{\eta,2k} \partial_z^{2k} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k} - \sum_{k=0}^{[0.5 n_{v_z}]} I_\alpha^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k+1} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1}, \\
M_z^{(\bar{n})} = G_z^{\theta,2} \partial_z^1 \theta^{(\bar{n})} \varepsilon + \sum_{\eta \in \{v_x, v_y, \theta\}} \sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]} G_z^{\eta,2k+2} \partial_z^{2k+1} \eta^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k+1} \\
+ \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} G_z^{v_z,2k+1} \partial_z^{2k} {v_z}^{(\bar{n})} \varepsilon^{2k}, \qquad \alpha \in \{x, y\}.
\end{gathered} \tag{2.122}$$

Для углов наклона $\varphi_x^{(\bar{n})}, \varphi_y^{(\bar{n})}$ выражения (2.93) упростятся следующим образом

$$
\varphi_\alpha^{(\bar n)} = \partial_z^1 v_\alpha^{(\bar n)}\varepsilon + \Phi_\alpha^{\theta,1}\partial_z^1\theta^{(\bar n)}\varepsilon + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,\theta\}}\sum_{k=1}^{[0.5(n_\eta+1)]}\Phi_\alpha^{\eta,2k+1}\partial_z^{2k+1}\eta^{(\bar n)}\varepsilon^{2k+1} + \\
+ \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]}\Phi_\alpha^{v_z,2k}\partial_z^{2k}{v_z}^{(\bar n)}\varepsilon^{2k}, \qquad \alpha\in\{x,y\}. \tag{2.123}
$$

Таким образом все необходимые соотношения для решения задачи о деформировании слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии получены.

Выводы по главе 2

В главе получены основные соотношения для теории пространственного деформирования композитных слоистых стержней на основе метода асимптотического расщепления. Рассмотрен новый четвертый способ аппроксимации решения, учитывающий крутильное поведение стержня. Сформулированы необходимые условия разрешимости краевых задач в поперечном сечении стержня. Получена общая разрешающая система дифференциальных уравнений для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии, зависящая от малого параметра и количества удерживаемых членов в аппроксимации решения. Получены аналитические решения некоторых краевых задач в сечениях стержня. Отдельно рассмотрен частный случай слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии. Показано, что для этого случая основные соотношения теории значительно упрощаются.

Главным отличием полученных результатов от работ предшественников заключается в устранении противоречий относительно четвертого способа аппроксимации решения и получении полной взаимосвязанной разрешающей системы дифференциальных уравнений макродеформирования стержня. Краевые условия на торцах стержня для разрешающей системы макродеформирования ставятся в виде интегральных характеристик поперечного сечения, таких как внутренние усилия и функции макродеформирования.

Изменяя степень асимптотического приближения $n_{v_x}, n_{v_y}, n_{v_z}, n_\theta$ для каждого из способов аппроксимации можно получить различные разрешающие системы дифференциальных уравнений, описывающие деформирование стержня. В следующей главе на различных примерах будет исследована эффективность конкретных асимптотических приближений и область применимости разработанной теории.

3. Математические модели пространственного деформирования слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии

Во второй главе с помощью метода АР были получены все определяющие соотношения для теории деформировании анизотропных слоистых стержней. Для того, чтобы проверить насколько полученные соотношения работают на практике необходимо выяснить какое количество слагаемых для каждого из четырёх способов аппроксимации целесообразно удерживать в решении, а какими слагаемыми можно пренебречь. Ограничимся случаем, когда стержень обладает поперечной плоскостью симметрии анизотропии. В этом случае вид асимптотических разложений существенно упрощается, как было показано в разделе 2.6. Исследование общего случая анизотропии выходит за рамки текущей работы.

Вид разрешающей системы (2.121) для стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии в общем виде позволяет удерживать различное количество членов для четырех различных способов аппроксимации. Тем самым на основе полученных выражений может быть построено множество математических моделей в зависимости от выбора степеней асимптотических приближений в векторном номере $\bar{n} = (n_{v_x}, n_{v_y}, n_{v_z}, n_\theta)$. Исследуем вопрос эффективности получаемых моделей и их область применимости. Здесь и далее для удобства будем опускать верхний индекс векторного номера асимптотического приближения $\bar{n}$ в функциях макроперемещений $v_x^{(\bar{n})}, v_y^{(\bar{n})}, v_z^{(\bar{n})}, \theta^{(\bar{n})} \rightarrow v_x, v_y, v_z, \theta$.

На практике было замечено, что нет смысла рассматривать высокие степени асимптотического приближения ($n_{v_z} > 1$) для v_z-аппроксимации, так как задача растяжения-сжатия стержня хорошо описывается решением, получаемым уже в нулевом приближении $n_{v_z} = 0$. Как было показано ранее, нулевое приближение в выражениях для перемещений (2.70) обосновывает использование гипотезы плоских сечений для задачи растяжения-сжатия. При этом можно заметить, что все соотношения для v_z-аппроксимации при $n_{v_z} = 0$ совпадают с соотношениями при $n_{v_z} = 1$. Таким образом далее ограничимся случаями, когда $n_{v_z} = 0{,}1$.

Для v_x- и v_y-аппроксимаций, отвечающих за изгибное поведение стержня, уравнения в разрешающей системе (2.121) начинают иметь смысл только с $n_{v_x} = n_{v_y} = 1$, поэтому не имеет смысла рассматривать нулевые степени $n_{v_x} = n_{v_y} = 0$. Для θ-аппроксимации имеет смысл рассмотреть n_θ начиная с нуля и выше.

Отметим, что с практической точки зрения затруднительно рассматривать асимптотические приближения высоких порядков (выше первого), так как для этого необходимо решать всё больше краевых задач в сечении. При этом растёт порядок разрешающей системы

(2.121) и возникает проблема с недостающими краевыми условиями для её решения. При $n_{v_x} = n_{v_y} = 1,\ n_\theta = n_{v_z} = 0$ разрешающая система имеет 12-ый порядок, при $n_{v_x} = n_{v_y} = 3,\ n_{v_z} = n_\theta = 0$ – 16-ый порядок, при $n_{v_x} = n_{v_y} = \ n_{v_z} = n_\theta = 1$ – 14-ый порядок и т.д.

По принципу Сен-Венана могут быть поставлены только 12 краевых условий в терминах внутренних усилий и обобщённых перемещений стержня, по 6 условий с каждого торца стержня. Таким образом при $n_{v_x} = n_{v_y} = \ 1, n_\theta = n_{v_z} = 0$ краевых условий в постановке Сен-Венана хватает для решения системы (2.121). В остальных же случаях необходимы дополнительные краевые условия, которые вводятся исходя из отдельных физических соображений. Иногда проблему недостающих краевых условий можно решить с помощью асимптотических разложений и сведения системы к 12-му порядку, аналогично тому, как это было сделано в работах [65, 66] для одномерной задачи изгиба.

Исходя из вышеописанных рассуждений остановимся на следующих трёх конфигурациях векторного номера $\bar{n}$. Каждая из трёх конфигураций приводит к соответствующей математической модели. Для каждой из получаемых математических моделей введем свое название и аббревиатуру (см. Таблица 3.1)

1. Математическая модель при $n_{v_x} = n_{v_y} = 1,\ n_{v_z} = n_\theta = 0$ для первого асимптотического приближения изгиба. Обозначим её как GN-FOBT (Gorynin-Nemirovsky – First Order Beam Theory);
2. Математическая модель при $n_{v_x} = n_{v_y} = 1,\ n_{v_z} = n_\theta = 0$ с дополнительным упрощением и отбрасыванием некоторых слагаемых в разложениях. Как будет показано далее, в этом случае получатся соотношения, идентичные теории композитных стержней на основе гипотез Бернулли-Эйлера и теории чистого кручения Сен-Венана. Обозначим её как GN-BESVBT (Gorynin-Nemirovsky – Bernoulli Euler Saint-Venant Beam Theory);
3. Математическая модель при $n_{v_x} = n_{v_y} = n_{v_z} = n_\theta = 1$ для первого асимптотического приближения кручения. Обозначим её как GN-RWBT (Gorynin-Nemirovsky – Restrained Warping Beam Theory). Термин Restrained Warping в названии свидетельствует о том, что эта модель позволяет учитывать стеснение депланации в сечении.

Таблица 3.1 Классификация математических моделей для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии

Название модели	Степень аппроксимации	Краткое описание
GN-FOBT $\bar{n}$ =(1,1,0,0) (First Order Beam Theory)	$n_{v_x} = n_{v_y} = 1$, $n_{v_z} = 0, n_\theta = 0$	Минимальная из возможных моделей в рамках метода АР;
GN-BESVBT $\bar{n}$ = (1,1,0,0) (Bernoulli Euler Saint-Venant Beam Theory)	$n_{v_x} = n_{v_y} = 1$, $n_{v_z} = 0, n_\theta = 0$	Модификация модели GN-FOBT с упрощением. В результате получаются соотношения, идентичные теории композитных стержней на основе гипотез Бернулли-Эйлера и теории чистого кручения Сен-Венана;
GN-RWBT $\bar{n}$ = (1,1,1,1) (Restrained Warping Beam Theory)	$n_{v_x} = n_{v_y} = 1$, $n_{v_z} = n_\theta = 1$	Обобщение модели GN-FOBT с учётом компонент, отвечающих за стеснение депланации при кручении.

3.1 Математическая модель GN-FOBT

Рассмотрим первое минимальное приближение метода АР. Положим, что $n_{v_x} = n_{v_y} = 1$, $n_\theta = n_{v_z} = 0$. В этом случае разрешающая система ОДУ (2.121) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4 + B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 + B_\alpha^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 = p_\alpha(z), \qquad \alpha \in \{x,y\},\\
&B_z^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 + B_z^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 + B_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 = p_z(z),\\
&R_z^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4 + R_z^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 + R_z^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 - G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2 = m_0(z).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Компоненты вектора перемещений в соответствии с (2.119) выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
(u_x)_i = {}&\mathrm{U}_x^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 + \mathrm{U}_x^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4 + \mathrm{U}_x^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \mathrm{U}_x^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 +\\
&+ \mathrm{U}_x^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon + \mathrm{U}_x^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 - y\,\theta,\\
(u_y)_i = {}&\mathrm{U}_y^{v_x,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \mathrm{U}_y^{v_x,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 + \mathrm{U}_y^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \mathrm{U}_y^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 +\\
&+ \mathrm{U}_y^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon + \mathrm{U}_y^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 + x\,\theta,\\
(u_z)_i = {}&-x\,\partial_z^1 v_x\varepsilon + \mathrm{U}_z^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 - y\,\partial_z^1 v_y\varepsilon + \mathrm{U}_z^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 +\\
&+ v_z + \mathrm{U}_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + \mathrm{U}_z^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Компоненты тензора напряжений в соответствии с (2.120) примут следующий вид

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{zz})_i = \tau_{zz}^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon,\\
&(\sigma_{\alpha\beta})_i = \tau_{\alpha\beta}^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 + \tau_{\alpha\beta}^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4 + \tau_{\alpha\beta}^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \tau_{\alpha\beta}^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 +
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$+\tau_{\alpha\beta}^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon+\tau_{\alpha\beta}^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3,\qquad \alpha,\beta\in\{x,y\},$$

$$(\sigma_{\alpha z})_i=\tau_{\alpha z}^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3+\tau_{\alpha z}^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3+\tau_{\alpha z}^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2+\tau_{\alpha z}^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon.$$

Выражения для внутренних усилий в соответствии с (2.122)

$$\begin{aligned}
Q_\alpha&=-B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3-B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3-B_\alpha^{v_z,3}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2,\qquad \alpha\in\{x,y\},\\
N_z&=-B_z^{v_x,3}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2-B_z^{v_y,3}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2-B_z^{v_z,2}\partial_z^1 v_z\varepsilon,\\
M_\alpha&=-I_\alpha^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2-I_\alpha^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2-I_\alpha^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon,\\
M_z&=G_z^{v_x,4}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3+G_z^{v_y,4}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3+G_z^{v_z,3}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2+G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta\varepsilon.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Выражения для углов наклона в соответствии с (2.123)

$$\begin{aligned}
\varphi_x&=\partial_z^1 v_x\varepsilon+\Phi_x^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3+\Phi_x^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3+\Phi_x^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2+\Phi_x^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon,\\
\varphi_y&=\partial_z^1 v_y\varepsilon+\Phi_y^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3+\Phi_y^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3+\Phi_y^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2+\Phi_y^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (3.1) имеет 12-ый порядок. Краевые условия на торцах стержня ставятся на основе принципа Сен-Венана через 12 функций $v_\alpha, v_z, \theta, \varphi_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha, N_z, M_z$ в зависимости от типа краевых условий на торцах. В совокупности выражения (3.1) – (3.5) образуют математическую модель деформирования GN-FOBT.

3.2 Математическая модель GN-BESVBT

Можно заметить, что при некотором упрощении разрешающая система дифференциальных уравнений (3.1) в математической модели GN-FOBT совпадает с разрешающей системой дифференциальных уравнений для ортотропных стержней, полученной на основе гипотез Бернулли-Эйлера и теории чистого кручения Сен-Венана [75].

$$\begin{aligned}
&B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4+B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4=p_\alpha(z),\qquad \alpha\in\{x,y\},\\
&B_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2=p_z(z),\qquad G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2=m_0(z).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Отличия системы (3.6) от (3.1) заключаются в том, что изгиб, растяжение и кручение стержня ведут себя независимо друг от друга и коэффициенты $B_\alpha^{v_z,3}=B_z^{v_\alpha,3}=R_z^{v_z,3}=R_z^{v_\alpha,4}=0$. Такое поведение справедливо только в случае, если стержень состоит из ортотропных материалов, оси ортотропии которых сонаправлены с главными осями стержня; сечение стержня симметрично относительно осей x, y; нагрузка, действующая на стержень приведена к равнодействующим относительно центра тяжести сечения стержня. Для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что полученная разрешающая система (3.6) эквивалентна принятию классических гипотез, математическая модель обозначается как GN-BESVBT (Bernoulli Euler Saint-Venant Beam Theory).

При этом выражения для компонент вектора перемещений примут упрощенный по сравнению с выражениями (3.2) вид

$$(u_x)_i = -y\,\theta, \qquad (u_y)_i = x\,\theta,$$
$$(u_z)_i = -x\,\partial_z^1 v_x \varepsilon - y\,\partial_z^1 v_y \varepsilon + v_z + \mathrm{U}_z^{\theta,1} \partial_z^1 \theta \varepsilon. \tag{3.7}$$

Выражения для компонент тензора напряжений

$$(\sigma_{zz})_i = \tau_{zz}^{v_x,2} \partial_z^2 v_x \varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_y,2} \partial_z^2 v_y \varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_z,1} \partial_z^1 v_z \varepsilon,$$
$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i = 0, \qquad (\sigma_{\alpha z})_i = \tau_{\alpha z}^{\theta,1} \partial_z^1 \theta \varepsilon, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \tag{3.8}$$

Выражения для внутренних усилий

$$Q_\alpha = 0, \qquad M_\alpha = -I_\alpha^{v_x,2} \partial_z^2 v_x \varepsilon^2 - I_\alpha^{v_y,2} \partial_z^2 v_y \varepsilon^2, \qquad \alpha \in \{x, y\},$$
$$N_z = -B_z^{v_z,2} \partial_z^1 v_z \varepsilon, \qquad M_z = G_z^{\theta,2} \partial_z^1 \theta \varepsilon. \tag{3.9}$$

Выражения для углов наклона

$$\varphi_x = \partial_z^1 v_x \varepsilon, \qquad \varphi_y = \partial_z^1 v_y \varepsilon. \tag{3.10}$$

Отметим, что в выражениях для угла наклона (3.10) отсутствуют третьи производные от макроперемещений v_x, v_y, что может значительно влиять на точность модели. Упрощенный вид углов наклона эквивалентен принятию гипотез Бернулли-Эйлера при изгибе стержня.

3.3 Математическая модель GN-RWBT

Рассмотрим асимптотическое приближение более высокого порядка. Положим, что $n_{v_x} = n_{v_y} = n_{v_z} = n_{\theta_0} = 1$. Тогда разрешающая система ОДУ (2.121) примет следующий вид

$$B_\alpha^{v_x,4} \partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_y,4} \partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_z,3} \partial_z^3 v_z \varepsilon^3 + B_\alpha^{\theta,4} \partial_z^4 \theta \varepsilon^4 = p_\alpha(z), \qquad \alpha \in \{x, y\},$$
$$B_z^{v_x,3} \partial_z^3 v_x \varepsilon^3 + B_z^{v_y,3} \partial_z^3 v_y \varepsilon^3 + B_z^{v_z,2} \partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + B_z^{\theta,3} \partial_z^3 \theta \varepsilon^3 = p_z(z), \tag{3.11}$$
$$R_z^{v_x,4} \partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + R_z^{v_y,4} \partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + R_z^{v_z,3} \partial_z^3 v_z \varepsilon^3 + R_z^{\theta,4} \partial_z^4 \theta \varepsilon^4 - G_z^{\theta,2} \partial_z^2 \theta \varepsilon^2 = m_0(z).$$

Формулы (2.119) для компонент вектора перемещений примут вид

$$(u_x)_i = \mathrm{U}_x^{v_x,2} \partial_z^2 v_x \varepsilon^2 + \mathrm{U}_x^{v_x,4} \partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + \mathrm{U}_x^{v_y,2} \partial_z^2 v_y \varepsilon^2 + \mathrm{U}_x^{v_y,4} \partial_z^4 v_y \varepsilon^4 +$$
$$+ \mathrm{U}_x^{v_z,1} \partial_z^1 v_z \varepsilon + \mathrm{U}_x^{v_z,3} \partial_z^3 v_z \varepsilon^3 - y\,\theta + \mathrm{U}_x^{\theta,2} \partial_z^2 \theta \varepsilon^2 + \mathrm{U}_x^{\theta,4} \partial_z^4 \theta \varepsilon^4, \tag{3.12}$$
$$\left(u_y\right)_i = \mathrm{U}_y^{v_x,2} \partial_z^2 v_y \varepsilon^2 + \mathrm{U}_y^{v_x,4} \partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + \mathrm{U}_y^{v_y,2} \partial_z^2 v_y \varepsilon^2 + \mathrm{U}_y^{v_y,4} \partial_z^4 v_y \varepsilon^4 +$$

$$+ \mathrm{U}_y^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon + \mathrm{U}_y^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 + x\,\theta + \mathrm{U}_y^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2 + \mathrm{U}_y^{\theta,4}\partial_z^4\theta\varepsilon^4,$$

$$(u_z)_i = -x\,\partial_z^1 v_x\varepsilon + \mathrm{U}_z^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 - y\,\partial_z^1 v_y\varepsilon + \mathrm{U}_z^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 +$$
$$+ v_z + \mathrm{U}_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + \mathrm{U}_z^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon + \mathrm{U}_z^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3.$$

Выражения (2.120) для компонент тензора напряжений

$$\begin{gathered}
(\sigma_{zz})_i = \tau_{zz}^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \tau_{zz}^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon + \tau_{zz}^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2, \quad \alpha,\beta \in \{x,y\},\\
\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i = \tau_{\alpha\beta}^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 + \tau_{\alpha\beta}^{v_x,4}\partial_z^4 v_x\varepsilon^4 + \tau_{\alpha\beta}^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 + \tau_{\alpha\beta}^{v_y,4}\partial_z^4 v_y\varepsilon^4 +\\
+ \tau_{\alpha\beta}^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon + \tau_{\alpha\beta}^{v_z,3}\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 + \tau_{\alpha\beta}^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2 + \tau_{\alpha\beta}^{\theta,4}\partial_z^4\theta\varepsilon^4,\\
(\sigma_{\alpha z})_i = \tau_{\alpha z}^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 + \tau_{\alpha z}^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 + \tau_{\alpha z}^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + \tau_{\alpha z}^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon + \tau_{\alpha z}^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3.
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Выражения для внутренних усилий (2.122)

$$\begin{gathered}
Q_\alpha = -B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 - B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 - B_\alpha^{v_z,3}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 - B_\alpha^{\theta,4}\partial_z^3\theta\varepsilon^3, \qquad \alpha \in \{x,y\},\\
N_z = -B_z^{v_x,3}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 - B_z^{v_y,3}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 - B_z^{v_z,2}\partial_z^1 v_z\varepsilon - B_z^{\theta,3}\partial_z^2\theta\varepsilon^2,\\
M_\alpha = -I_\alpha^{v_x,2}\partial_z^2 v_x\varepsilon^2 - I_\alpha^{v_y,2}\partial_z^2 v_y\varepsilon^2 - I_\alpha^{v_z,1}\partial_z^1 v_z\varepsilon - I_\alpha^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2,\\
M_z = G_z^{v_x,4}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 + G_z^{v_y,4}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 + G_z^{v_z,3}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta\varepsilon + G_z^{\theta,4}\partial_z^3\theta\varepsilon^3.
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Выражения для углов наклона (2.123)

$$\begin{gathered}
\varphi_x = \partial_z^1 v_x\varepsilon + \Phi_x^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 + \Phi_x^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 + \Phi_x^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + \Phi_x^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon + \Phi_x^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3,\\
\varphi_y = \partial_z^1 v_y\varepsilon + \Phi_y^{v_x,3}\partial_z^3 v_x\varepsilon^3 + \Phi_y^{v_y,3}\partial_z^3 v_y\varepsilon^3 + \Phi_y^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + \Phi_y^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon + \Phi_y^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (3.11) имеет 14-ый порядок. Четвертое уравнение системы является уравнением, подобным уравнению стеснённого кручения из теории Власова для тонкостенных стержней открытого профиля [117] и из первого варианта теории Уманского для тонкостенных стержней закрытого профиля [127], поэтому в дальнейшем будем называть его уравнением стеснённого кручения. Из-за наличия четвертых производных от угла закручивания θ и возможности учета стеснения депланации при деформировании стержня, математическая модель называется GN-RWBT (Gorynin-Nemirovsky – Restrained Warping Beam Theory). В совокупности выражения (3.11) – (3.15) образуют математическую модель GN-RWBT.

Как говорилось ранее, из принципа Сен-Венана на торцах стержня следует 12 краевых условий, по 6 с каждой стороны. Система (3.11) для модели GN-RWBT имеет 14-ый порядок и, следовательно, необходимы два дополнительных краевых условия на угол закручивания. Кроме того, эти условия должны следовать из тех краевых условий, которые должны были бы ставиться на торцах в полной пространственной задаче теории упругости.

На свободном торце продольные напряжения тождественно равны нулю, поэтому уместно в дополнении к условию равенства нулю продольного усилия потребовать равенство нулю следующей интегральной характеристики НДС в сечении

$$S_z = \langle \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} \left(\sigma_{zz}^\theta\right)_i \rangle. \tag{3.16}$$

Если подставить формулу для напряжений (2.80) для θ-аппроксимации в равенство (3.16), то получим

$$S_z = S_z^{\theta,2} \partial_z^2 \theta \varepsilon^2, \qquad S_z^{\theta,2} = \langle \left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)} \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} \rangle, \tag{3.17}$$

где функция $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$, полученная на основе решения краевой задачи (2.103)-(2.107) в сечении при $k = 1$ характеризует распределение продольных перемещений по сечению стержня и тем самым описывает главную форму депланации сечения при кручении. Функция депланации сечения $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ в определении (3.17) использована для того, чтобы коэффициент $S_z^{\theta,2}$ гарантированно не равнялся нулю. Следует заметить, что определение величины S_z является естественным обобщением понятия бимомента [117, 145], которое широко используется в механике тонкостенных стержней. В дальнейшем использование этой величины в качестве дополнительного краевого условия будем называть S_z-условием. Например, на свободном торце стержня S_z-условие имеет вид $S_z = 0$.

Для условия отсутствии депланации в сечении удобно использовать следующую макрохарактеристику продольных перемещений точек сечения – меру депланации

$$D_z = \langle \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} \left(u_z^\theta\right)_i \rangle. \tag{3.18}$$

Подставляя выражения для продольных перемещений (2.79) θ-аппроксимации в выражения (3.18) получим выражения

$$D_z = D_z^{\theta,1} \partial_z^1 \theta \varepsilon^1 + D_z^{\theta,3} \partial_z^3 \theta \varepsilon^3, \qquad D_z^{\theta,k} = \int \left(U_z^\theta\right)_i^{(k)} \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} dF. \tag{3.19}$$

В дальнейшем использование величины D_z в качестве дополнительного краевого условия будем называть D_z-условием. Если депланация на торце стеснена, то ставится условие равенства нулю величины $D_z = 0$. Величина D_z состоит из двух слагаемых (3.19), пропорциональных первой и третьей производным от угла закручивания. В данной работе в соответствии с таблицей 3.2 рассматривается три варианта описания краевых условий на депланацию сечения:

1) Упрощённый вариант RWBT 1, когда мера депланации определяется первой производной от угла закручивания. Тем самым обнуляется главный в асимптотическом смысле член в выражениях для продольных перемещений (3.12).
2) Вариант RWBT 2, когда мера депланации пропорциональна комбинации первой и третьих производных от угла закручивания стержня.
3) Вариант RWBT avg, который является усреднённой комбинацией первых двух вариантов.

Таблица 3.2. Способы задания краевых условий на депланацию сечения для модели GN-RWBT

RWBT 1	$D_z = D_z^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon^1, \qquad S_z = S_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2;$
RWBT 2	$D_z = D_z^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon^1 + D_z^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3, \qquad S_z = S_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2;$
RWBT avg	$D_z = \dfrac{1}{2}\left(2D_z^{\theta,1}\partial_z^1\theta\varepsilon^1 + D_z^{\theta,3}\partial_z^3\theta\varepsilon^3\right), \qquad S_z = S_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta\varepsilon^2.$

Суммарно выражения (3.11) – (3.19) для математической модели GN-RWBT дают асимптотическое решение пространственной задачи теории упругости в постановке Сен-Венана с двумя дополнительными условиями (S_z-условие и D_z-условие) на торцах.

3.4 Численная реализация математических моделей

Метод АР позволяет свести исходную трехмерную задачу теории упругости к решению задач меньших размерностей: краевых задач в поперечном сечении стержня и разрешающей системы дифференциальных уравнений макродеформирования по длине стержня. Разрешающие системы дифференциальных уравнений для семейства математических моделей GN были получены ранее в разделах 3.1 – 3.3 и прежде, чем переходить к их решению, необходимо определить все недостающие жесткостные функции напряжений и перемещений и жесткостные коэффициенты. Для этого необходимо решить, численно или аналитически, краевые задачи в сечении стержня. Алгоритм численного решения краевых задач будет подробно рассмотрен далее, пока же положим, что все необходимые жесткостные коэффициенты и функции определены. Тогда можно приступать к решению краевой задачи по длине стержня, которая описывается системой ОДУ, в зависимости от выбора математической модели.

В качестве примера, рассмотрим математическую модель GN-FOBT. Для начала на входе подаются все необходимые геометрические и физико-механические параметры стержня; задаются функции распределения нагрузки по сечению; определяются краевые условия на торцах стержня. После этого рассматривается постоянное поперечное сечение стержня. В общем случае пространственного деформирования стержня, когда изгиб и растяжение стержня сопровождается его кручением необходимо рассмотреть все четыре способа аппроксимации и для каждого из способов аппроксимации решить краевые задачи в сечении. После этого рассматривается разрешающая система ОДУ (3.1) и для нее ставятся краевые условия на торцах, в зависимости от того, как закреплен или нагружен стержень. После решения краевой задачи на функции макродеформирования стержня все компоненты тензора напряжений и вектора перемещений могут быть восстановлены по формулам (3.2), (3.3).

Несмотря на то, что краевая задача по длине стержня является одномерной и для нее зачастую можно построить аналитическое решение, на практике в рамках единого математического алгоритма для ее решения удобно применять численные методы. Для численного решения краевых задач для ОДУ в данной работе использовалась процедура bvp_solve [139] библиотеки scipy, основанная на методе сплайн коллокаций. Для этого разрешающие системы дифференциальных уравнений математических моделей GN-FOBT (3.1), GN-BESVBT (3.6), GN-RWBT (3.11) приводились к нормальному виду относительно вектора неизвестных $\overline{w}$. Так, например разрешающая система 12-го порядка (3.1) приводится к следующему виду

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{w}}{dz} = A\overline{w} + \overline{f_0},\\ \overline{w} = \left(v_x, \partial_z^1 v_x, \partial_z^2 v_x, \partial_z^3 v_x, v_y, \partial_z^1 v_y, \partial_z^2 v_y, \partial_z^3 v_y, v_z, \partial_z^1 v_z, \theta, \partial_z^1 \theta\right).\end{gathered} \tag{3.20}$$

Решение уравнений в нормальном виде позволяет получить весь вектор неизвестных вместе с производными, что очень удобно при вычислении компонент тензора перемещений и вектора перемещений, где необходимо знать не только сами неизвестные функции макродеформирования, но и их производные вплоть до 3-го порядка включительно. Для решения разрешающих систем могут быть использованы и другие численные методы, например метод конечных разностей или метод конечных элементов.

Решение краевых задач в поперечных сечениях методом конечных элементов. Рассмотрим вопрос получения решений краевых задач (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107) для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии. Помимо тривиальных решений (2.108), (2.113), (2.116) для первых номеров k краевые задачи в сечении не имеют очевидных аналитических решений. Однако они могут быть решены аналитически для некоторых типов сечений с использованием некоторых упрощений и допущений. Так, в работах [146–148] для решения краевых задач в сечении тонкостенных стержней использовалась операция усреднения решений по толщине стенки. Используя такой подход, были получены решения краевых задач в сечении для слоистых стержней прямоугольного и двутаврового профиля [136, 149–152]. В случае если применимо допущение о том, что стержень работает в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации, то двумерные краевые задачи в сечении могут быть сведены к одномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений по высоте стержня и решены аналитически [64].

В случае, если стержень сделан из материалов, коэффициенты Пуассона которых совпадают для всех слоёв, т.е. выполняется условие кромочной совместимости [65, 143], то краевая задача (2.98) – (2.102) при $k=2$ имеет аналитическое решение

$$
\begin{gathered}
\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(2)}=\frac{1}{2}\left(-\nu_{yz}\,y^2+\nu_{xz}\,x^2+C_2\right),\qquad \left(U_y^{v_x}\right)_i^{(2)}=\nu_{yz}\,xy,\qquad \left\langle\left(U_x^{v_x}\right)_i^{(2)}\right\rangle=0,\\
\left(U_x^{v_y}\right)_i^{(2)}=\nu_{xz}\,xy,\qquad \left(U_y^{v_y}\right)_i^{(2)}=\frac{1}{2}\left(-\nu_{yz}\,y^2+\nu_{xz}\,x^2+C_2\right),\qquad \left\langle\left(U_y^{v_y}\right)_i^{(2)}\right\rangle=0,\\
\left(\tau_{xx}^{v_\alpha}\right)_i^{(2)}=\left(\tau_{xy}^{v_\alpha}\right)_i^{(2)}=\left(\tau_{yy}^{v_\alpha}\right)_i^{(2)}=0,\qquad \left(\tau_{zz}^{v_\alpha}\right)_i^{(2)}=-(E_z)_i x,\ \ \alpha\in\{x,y\}.
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

В общем случае для того, чтобы определить все необходимые жесткостные функции и коэффициенты для сечения произвольной сложности необходимо уметь численно решать краевые задачи для произвольного номера k. Для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии краевая задача (2.15), (2.17) – (2.20), (2.24) распадается на две задачи (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107), как это было показано в разделе 2.6. Однако здесь и далее, для общности рассматриваемого подхода к численному решению краевых задач будем рассматривать общую задачу (2.15), (2.17) – (2.20), (2.24) без расщепления её на две подзадачи.

В силу того, что геометрия рассматриваемого сечения может быть произвольной, предпочтительно использование метода, который позволяет работать с криволинейными границами. В данной работе для решения краевых задач в сечении используется метод конечных элементов. Исследуемая задача (2.15), (2.17) – (2.20), (2.24) имеет эллиптический тип и представляет из себя задачу по типу Неймана на три неизвестных функции $\left(U_x^{\eta}\right)_i^{(k)},\left(U_y^{\eta}\right)_i^{(k)},\left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)}$, так как краевые условия по контуру сечения задаются только в жесткостных функциях напряжений. Как было показано ранее, решение задачи определено с точностью до четырёх постоянных, значения которых находятся из условий нормировки (2.43) – (2.44), которые представляют из себя четыре интегральных тождества. Кроме того, для разрешимости задачи должны быть выполнены необходимые условия разрешимости (2.20), (2.24).

Для начала выведем слабую постановку краевой задачи (2.15), (2.17) – (2.20), (2.24), для этого введём пространство Соболева в области определения поперечного сечения F

$$
H^1(F)=\{W(x,y)\epsilon L^2(F),\qquad DW\epsilon L^2(F)\},
\tag{3.22}
$$

где L^2 – пространство с квадратом интегрируемых функций, Dw – обобщённая производная функции $W(x,y)$. Введём три вспомогательных функции $W_x, W_y, W_z \in H^1(F)$ и домножим каждое из трёх уравнений (2.17) на соответствующие произвольные функции W_x, W_y, W_z. Проинтегрируем полученные выражения, используя формулу Гаусса-Остроградского

$$\begin{gathered}
\oint\left(\left(\tau_{xx}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x+\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y\right) W_x\ d\Gamma- \\
-\langle\left(\tau_{xx}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_x+\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_x-\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_x\rangle=0, \\
\oint\left(\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x+\left(\tau_{yy}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y\right) W_y\ d\Gamma- \\
-\langle\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_y+\left(\tau_{yy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_y-\left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_y\rangle=0, \\
\oint\left(\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_x+\left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k)} n_y\right) W_z\ d\Gamma- \\
-\langle\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_z+\left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_z-\left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_z\rangle=0,
\end{gathered} \tag{3.23}$$

при этом жесткостные функции при номере $k-1$ полагаются известными на основе решения предыдущей краевой задачи. Отметим, что в силу условий согласования (2.19), внутренние интегралы по границе раздела слоёв сократятся между собой. Интеграл по внешней границе в соотношениях (3.23) выражается через граничные условия краевой задачи (2.18), тем самым выражения (3.23) примут вид

$$\begin{gathered}
\oint\left(B_x^{\eta,k} f_x(\Gamma)+R_z^{\eta,k} g_x(\Gamma)\right) W_x\ d\Gamma- \\
-\langle\left(\tau_{xx}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_x+\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_x-\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_x\rangle=0, \\
\oint\left(B_y^{\eta,k} f_y(\Gamma)+R_z^{\eta,k} g_y(\Gamma)\right) W_y\ d\Gamma- \\
-\langle\left(\tau_{xy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_y+\left(\tau_{yy}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_y-\left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_y\rangle=0, \\
\oint B_z^{\eta,k} f_z(\Gamma) W_z\ d\Gamma-\langle\left(\tau_{xz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_x^1 W_z+\left(\tau_{yz}^{\eta}\right)_i^{(k)} \partial_y^1 W_z-\left(\tau_{zz}^{\eta}\right)_i^{(k-1)} W_z\rangle=0,
\end{gathered} \tag{3.24}$$

где константы $B_\alpha^{\eta,k}, R_z^{\eta,k}$ известны и находятся на основе решения предыдущей краевой задачи в соответствии с формулами (2.20), (2.21). Используя выражения для жесткостных функций напряжений (2.97), можно переформулировать выражения (3.24), выделив линейную и билинейную части

$$L\left(\left(U_\alpha^{\eta}\right)_i^{(k)}, W_\alpha\right)=b(W_\alpha), \tag{3.25}$$

где L – оператор, задающий билинейную форму на функциях $\left(U_\alpha^{\eta}\right)_i^{(k)}, W_\alpha$; b – оператор, задающий линейную форму правой части. Для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии в соответствии с выражениями (2.97) операторы L, b выражаются следующим образом

$$
\begin{gathered}
L\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_\alpha\right)= L_x\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_x\right) + L_y\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_y\right)+L_z\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_z\right), \\
b(W_\alpha)=b_x(W_x)+b_y\left(W_y\right)+b_z(W_z),
\end{gathered} \tag{3.26}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{L_x} = \sum_{\varphi,\,\psi\in\{x,y\}} \langle\left(\left(E_{xx\varphi\psi}\right)_i\left(\partial_\varphi^1\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k)}+\partial_\psi^1\left(U_\varphi^\eta\right)_i^{(k)}\right)\right)\partial_x^1 W_x \;+ \\
+\;\left(\left(E_{xy\varphi\psi}\right)_i\left(\partial_\varphi^1\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k)}+\partial_\psi^1\left(U_\varphi^\eta\right)_i^{(k)}\right)\right)\partial_y^1 W_x\rangle, \\
L_y = \sum_{\varphi,\,\psi\in\{x,y\}} \langle\left(\left(E_{xy\varphi\psi}\right)_i\left(\partial_\varphi^1\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k)}+\partial_\psi^1\left(U_\varphi^\eta\right)_i^{(k)}\right)\right)\partial_x^1 W_y \;+ \\
+\;\left(\left(E_{yy\varphi\psi}\right)_i\left(\partial_\varphi^1\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k)}+\partial_\psi^1\left(U_\varphi^\eta\right)_i^{(k)}\right)\right)\partial_y^1 W_y\rangle, \\
L_z = \sum_{\psi\in\{x,y\}} \langle\left(\left(E_{xz\psi z}\right)_i\partial_\psi^1\left(U_z^\eta\right)_i^{(k)}\right)\partial_x^1 W_z+\left(\left(E_{yz\psi z}\right)_i\partial_\psi^1\left(U_z^\eta\right)_i^{(k)}\right)\partial_y^1 W_z\rangle,
\end{gathered} \tag{3.27}
$$

$$
\begin{gathered}
b_x(W_x)=\oint\left(B_x^{\eta,k} f_x(\Gamma)+R_z^{\eta,k} g_x(\Gamma)\right)W_x\;d\Gamma+\langle\left(\tau_{xz}^\eta\right)_i^{(k-1)} W_x\rangle- \\
-\langle(E_{xxzz})_i\left(U_z^\eta\right)_i^{(k-1)}\partial_x^1 W_x+\left(E_{xyzz}\right)_i\left(U_z^\eta\right)_i^{(k-1)}\partial_y^1 W_x\rangle, \\
b_y\left(W_y\right)=\oint\left(B_y^{\eta,k} f_y(\Gamma)+R_z^{\eta,k} g_y(\Gamma)\right)W_y\;d\Gamma+\langle\left(\tau_{yz}^\eta\right)_i^{(k-1)} W_y\rangle- \\
-\langle\left(E_{xyzz}\right)_i\left(U_z^\eta\right)_i^{(k-1)}\partial_x^1 W_y+\left(E_{yyzz}\right)_i\left(U_z^\eta\right)_i^{(k-1)}\partial_y^1 W_y\rangle, \\
b_z(W_z)=\oint B_z^{\eta,k} f_z(\Gamma) W_z d\Gamma+\langle\left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k-1)} W_z\rangle- \\
-\sum_{\psi\in\{x,y\}}\langle\left(\left(E_{xz\psi z}\right)_i\left(\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k-1)}\right)\right)\partial_x^1 W_z+\left(\left(E_{yz\psi z}\right)_i\left(\left(U_\psi^\eta\right)_i^{(k-1)}\right)\right)\partial_y^1 W_z\rangle.
\end{gathered} \tag{3.28}
$$

Сформулируем слабую постановку краевой задачи (2.15), (2.17)-(2.20), (2.24) в сечении для асимптотического номера k без учёта условий нормировки.

$$
\begin{gathered}
\text{Найти } \left(U_x^\eta\right)_i^{(k)}, \left(U_y^\eta\right)_i^{(k)}, \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} \in H^1(F), \text{что} \\
L\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_\alpha\right)=b(W_\alpha), \qquad \forall\, W_x, W_y, W_z\in H^1(F).
\end{gathered} \tag{3.29}
$$

Отметим, что несмотря на наличие индекса слоёв i, функция $\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}$ представляет из себя одну обобщённую функцию (а не набор функций в слоях) непрерывно-дифференцируемую почти всюду. При этом в силу симметричности исследуемой задачи, слабая постановка (3.29) эквивалента задачи минимизации функционала вида

$$\Phi = \frac{1}{2} L\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_\alpha\right) - b(W_\alpha). \tag{3.30}$$

Для того, чтобы задача (3.29) имела единственное решение необходимо учесть четыре интегральных тождества (условия нормировки) (2.43) – (2.44). Для этого введём четыре дополнительных ограничения в функционал (3.30) с помощью четырёх множителей Лагранжа

$$\begin{gathered}\overline{\Phi} = \frac{1}{2} L - b + \lambda_x \cdot C_x + \lambda_y \cdot C_y + \lambda_z \cdot C_z + \lambda_\theta \cdot C_\theta, \\ C_\alpha = \langle \left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)} \rangle, \qquad C_\theta = \langle \left(U_y^\eta\right)_i^{(k)} x - \left(U_x^\eta\right)_i^{(k)} y \rangle, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Множители Лагранжа задаются как глобальные функции, постоянные во всей области решения задачи $\lambda_\beta \in P_0(F)$, где $P_0(F)$ – обозначает пространство постоянных функций во всей области определения F. Дополнительно введём следующие обозначения

$$\overline{C_\alpha} = \langle W_\alpha \rangle, \quad \overline{C_\theta} = \langle W_y\, x - W_x\, y \rangle, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{3.32}$$

В силу симметрии задача минимизации модифицированного функционала (3.31) эквивалентна следующей слабой постановке

$$\begin{gathered}\text{Найти } \left(U_x^\eta\right)_i^{(k)}, \left(U_y^\eta\right)_i^{(k)}, \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} \in H^1(F), \qquad \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_\theta \in P_0(F), \qquad \text{что} \\ L\left(\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, W_\alpha\right) + \sum_{\beta \in \{x,y,z,\theta\}} \left(\overline{\lambda_\beta} \cdot C_\beta + \lambda_\beta \cdot \overline{C_\beta}\right) = b(\{W_\alpha\}), \\ \forall\, W_x, W_y, W_z \in H^1(F), \qquad \forall\, \overline{\lambda_x}, \overline{\lambda_y}, \overline{\lambda_z}, \overline{\lambda_\theta} \in P_0(F).\end{gathered} \tag{3.33}$$

Будем искать решение задачи (3.33) с помощью 6-ти узловых Лагранжевых элементов 2-го порядка. Для этого в работе используется библиотека конечно-элементного анализа с открытым исходным кодом FEniCS Project [137], которая позволяет автоматизировать решение пользовательских систем уравнений в частных производных на основе слабых постановок задач. Аналогами Fenics Project могут выступить такие бесплатные программы, как NG Solve [153] и Freefem++ [154], имеющие схожий функционал. Для решения задачи (3.33) необходимо произвести дискретизацию расчётной области с учётом её внутренней структуры. Для этого использовался свободно распространяемый сеткопостроитель Gmsh [155] со встроенными алгоритмами триангуляции. Выбор треугольных элементов для решения задачи связан с тем, что они наиболее универсальны для разбиения сложных областей, а также тем, что функционал для работы с четырёхугольными сетками в FEniCS Project значительно ограничен. Отметим, что конечные элементы не могут принадлежать одновременно нескольким областям и узлы конечных элементов лежат строго на границе между слоями.

На рисунке 3.1 приведены примеры разбиений для слоистых стержней с относительно простой (прямоугольное сечение) и сложной (слоистый швеллер) геометрией. При этом области каждого слоя присваивается свой идентификационный номер в соответствии с введённой нумерацией (шкала справа на рисунке 3.1).

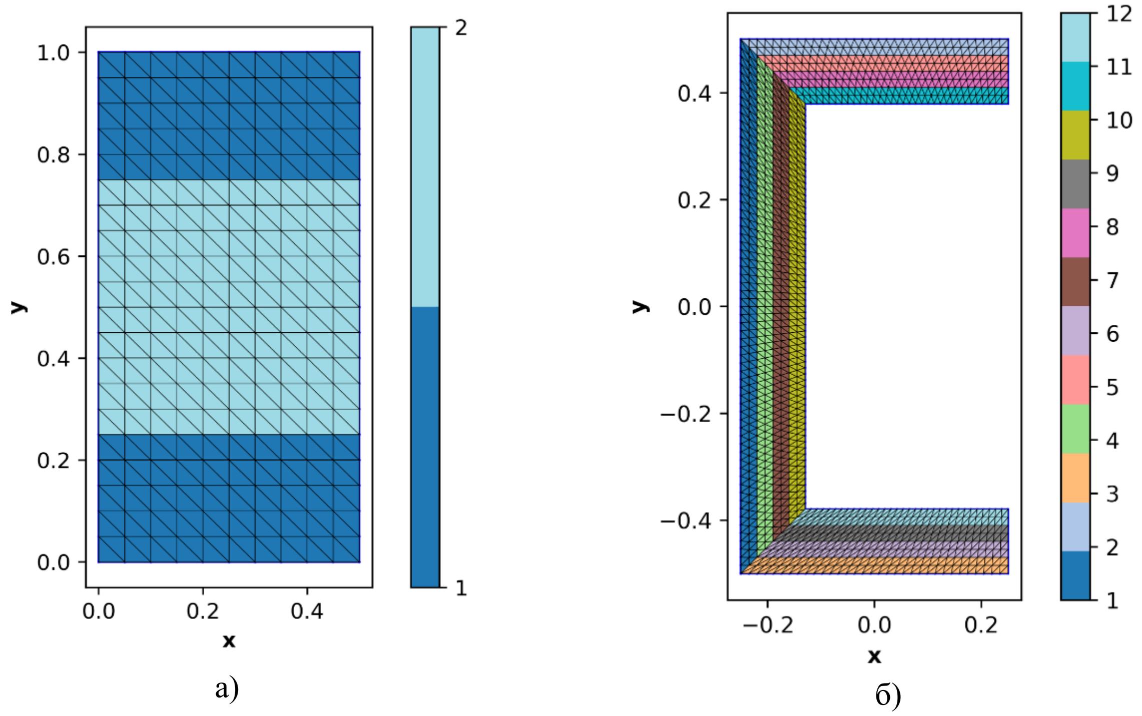


Рисунок 3.1. Примеры конечно-элементных сеток для поперечных сечений слоистых стержней в программе Gmsh; а) трехслойное прямоугольное сечение; б) слоистый швеллер (12 слоёв)

Сетки, построенные в Gmsh передаются на вход в Fenics Project. Процедура сборки матрицы жётскости и вектора правой части выполняется автоматически на основе корректно заданной слабой постановки. Для этого необходимо указать в каком пространстве ищется решение задачи и порядок используемых конечных элементов. В нашем случае используется пространство Лагранжевых 6-узловых элементов 2-го порядка. Для решения итоговой СЛАУ используются открытые решатели MUMPS, PETSc. Оба варианта поддерживают распараллеливание. Выбор MUMPS в качестве основного решателя обусловлен тем, что он имеет наименьшие требования по объёму оперативной памяти.

Распараллеливание решения краевых задач в сечении. Так как в общем случае в решении задачи присутствуют несколько способов аппроксимации, то возникает необходимость решать несколько краевых задач в сечениях для каждого из способов. В случае, если сечение обладает сложной микроструктурой, даже один такой расчёт может занимать значительное время.

Так, для модели GN-RWBT для первого и второго способов аппроксимации необходимо последовательно решить по 3 краевые задачи. Для третьего способа аппроксимации необходимо последовательно решить 2 краевые задачи. Для четвертого способа в общем случае необходимо последовательно решить 4 краевые задачи. Итого суммарно получается 12 краевых задач в сечении. Все краевые задачи для разных способов аппроксимации являются независимыми друг от друга, поэтому с целью сокращения времени вычислений целесообразно решать их независимо друг от друга в параллельном режиме. Для этого на языке python был реализован алгоритм с использованием библиотеки multiprocessing. Решение краевых задач для каждого из способов аппроксимации назначалось отдельному процессору как это показано на рисунке 3.2.

Рисунок 3.2. Алгоритм распараллеливания решения краевых задач в поперечном сечении

Еще одним способом ускорения решения краевых задач является предварительная сборка матрицы жёсткости. Для всех краевых задач и способов аппроксимации вид билинейного оператора L в левой части (3.33) одинаковый, меняется только линейный оператор в правой части. Поэтому в ходе реализованного алгоритма матрица жёсткости для всех краевых задач вычисляется ровно один раз в начале алгоритма и передаётся для решения всех краевых задач в сечениях.

На основе разработанного алгоритма [156] была написана и зарегистрирована программа для ЭВМ BASA. BASA (*Beam Asymptotic Splitting Analysis*) позволяет анализировать композитные слоистые стержни произвольного поперечного сечения. Геометрия поперечных сечений может быть отрисована с использованием любой CAD системы и передана в сеткопостроитель Gmsh. Поддерживаются стандартные форматы, такие как IGES и STP. В данной работе для построения геометрии сечений использовалась бесплатная CAD программа Freecad. Графический интерфейс и встроенный скриптовый язык Gmsh позволяют параметризовать и разбить на конечные элементы поперечные сечения практически любой сложности. Отображение результатов расчётов проводится с помощью vtk протокола и бесплатной утилиты Paraview. Структура программы представлена на рисунке 3.3. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ BASA в Роспатенте [157] (рисунок 1 в Приложении А).

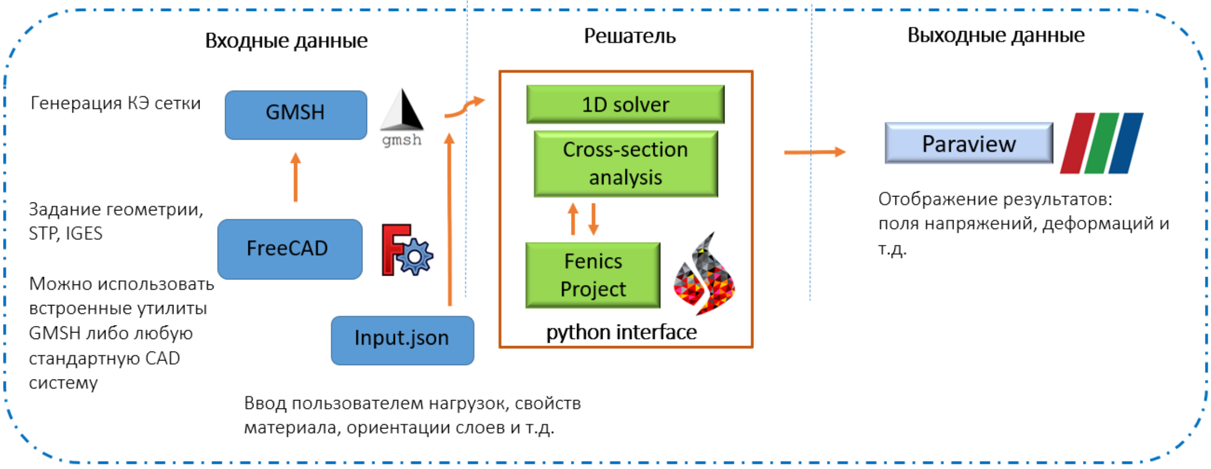


Рисунок 3.3 Структура программы для ЭВМ BASA

Верификация алгоритма решения краевых задач в сечении. Для верификации алгоритма решения краевых задач проведем сравнение численных расчетов с известным аналитическим решением (3.21) краевой задачи (2.98) – (2.102) при $k = 2$ для случая, когда слои выполнены из материалов с одинаковым коэффициентом Пуассона.

На рисунках 3.4 приведены примеры конечно-элементных сеток для двух типов поперечных сечений: слоистого коробчатого сечения (рисунок 3.4б)и трехслойного прямоугольного сечения (рисунок 3.4а). Конечно-элементная сетка строилась с помощью программы Gmsh; размер сетки задавался исходя из соображений, чтобы в одном слое по толщине находилось минимум два элемента.

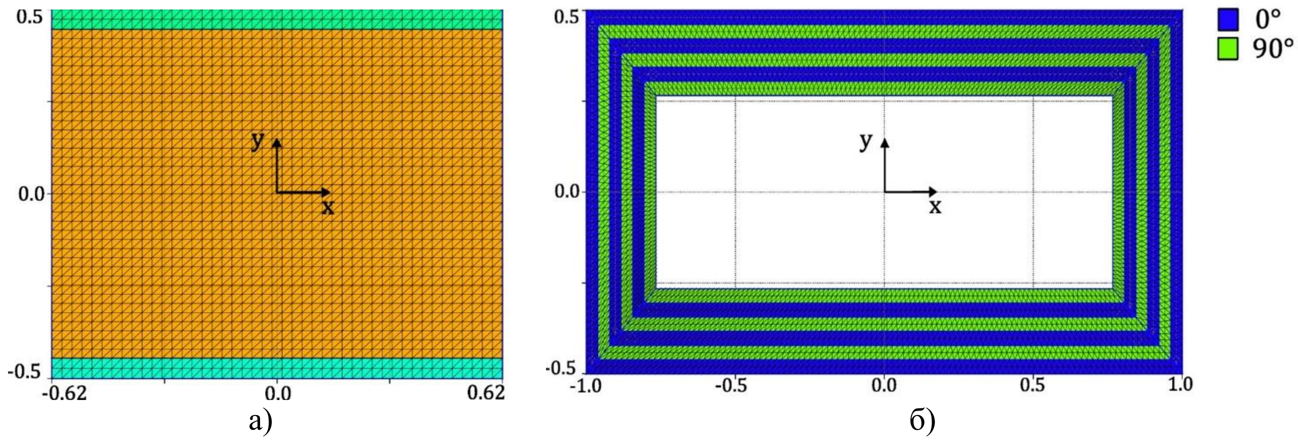


Рисунок 3.4. КЭ сетка для поперечного сечения а) трехслойного прямоугольно стержня; б) слоистого коробчатого стержня

Для проведения тестовых расчетов использовались безразмерные величины. Стенки коробчатого сечения состоят из 6 ортотропных слоёв $[0/90]_3$ одинаковой толщины, попеременно уложенных под 0 и 90 градусов относительно продольной оси z. Механические характеристики ортотропного слоя равны: $E_1 = 25$, $E_2 = 1$, $G_{12} = 10$, $\nu = 0.25$. Ориентация слоя под ноль градусов означает, что направление 1 совпадает с направлением оси z. Геометрические параметры коробчатого сечения полагались равными: ширина сечения $b = 2$, высота $h = 1$, толщина одного слоя $t = 0.039$.

Слои трехслойного прямоугольного сечения полагались выполненными из изотропных материалов со следующими свойствами: $E_{1,3} = 25$, $G_{1,3} = 10$, $\nu_{1,3} = 0.25$; $E_2 = 1$, $G_2 = 0.4$, $\nu_2 = 0.25$. Геометрические параметры: ширина сечения $b = 1.25$, высота $h = 1$, толщина внешних слоев $t = 0.055$.

В силу того, что точное решение (3.21) является полиномом второй степени по переменным x, y, решение задачи с использованием конечных элементов второго порядка приводит к машинной точности численного решения для функций $\left(U_x^{v_y}\right)_i^{(2)}, \left(U_y^{v_y}\right)_i^{(2)}, \left(\tau_{zz}^{v_y}\right)_i^{(2)}$, как это показано в таблице.

Таблица 3.3. Погрешность расчета краевой задачи относительно аналитического решения

Трехслойное прямоугольное сечение				Слоистое коробчатое сечение			
Кол-во неизвестных	Погрешность в L_2 норме			Кол-во неизвестных	Погрешность в L_2 норме		
	$\left(U_x^{v_y}\right)_i^{(2)}$	$\left(U_y^{v_y}\right)_i^{(2)}$	$\left(\tau_{zz}^{v_y}\right)_i^{(2)}$		$\left(U_x^{v_y}\right)_i^{(2)}$	$\left(U_y^{v_y}\right)_i^{(2)}$	$\left(\tau_{zz}^{v_y}\right)_i^{(2)}$
3772	7.35 e-13	3.98 e-13	5.09 e-14	2128	4.01e-12	8.63e-12	7.61e-14

В таблице 3.4 приведены времена расчетов краевых задач в сечении с использованием распараллеливания и без на последовательности сеток. В обоих случаях использовалась операция предварительной сборки матрицы жесткости и время, затрачиваемое на сборку матрицы приведено отдельно. Для получения всех необходимых в рамках модели GN-RWBT необходимо решить 12 краевых задач. Задачи решаются последовательно внутри одного способа аппроксимации и в параллельном режиме для различных способов аппроксимации (4 независимых процесса). Исходя из полученных результатов можно сделать вывод о том, что использование распараллеливания и операции предварительной сборки матрицы жесткости позволяет сократить время расчета более чем в два раза.

Таблица 3.4. Время расчета краевых задач в сечении с учетом распараллеливания и без

Трехслойное прямоугольное сечение				Слоистое коробчатое сечение			
Кол-во узлов сетки	Время сборки	Время без расп.	Время с расп.	Кол-во узлов сетки	Время сборки	Время без расп.	Время с расп.
483	0.10 с	1.71 с	0.86 с	1064	0.45 с	8.29 с	2.75 с
1886	0.31 с	6.10 с	2.61 с	4004	1.45 с	26.18 с	10.36 с
7371	1.33 с	46.84 с	10.88 с	15400	5.67 с	110.81 с	41.16 с

3.5 Валидация семейства математических моделей GN

В разделе приводится сравнение разработанных математических моделей с натурными экспериментами из открытых литературных источников [125, 126, 158]. Целью сравнения является оценка эффективности разработанных математических моделей применительно к расчёту композитных стержней различной внутренней структуры.

Рассмотрены задачи изгиба и кручения коробчатого композитного стержня и композитного двутавра. Для измерения отклика конструкции на статическую нагрузку авторы [125, 126] измеряли углы наклона и закручивания поперечных сечений в различных местах по длине стержня. Углы определялись путем измерения углов поворотов зеркал в двух ортогональных плоскостях, установленных на боковых поверхностях стержня вдоль его длины. Также рассмотрена задача четырехточечного изгиба сэндвич панели с мягким заполнителем, экспериментально исследованная в работе [158]. Таким образом все три экспериментальные работы исследуют деформирование стержней с принципиально различной внутренней структурой и характером реализуемого НДС.

Изгиб и кручение коробчатого композитного стержня

В качестве примера рассмотрим композитный коробчатый стержень, изученный в работе [126]. Стержень представляет из себя заделку со следующими геометрическими параметрами: $L = 762$ мм, $b = 52.3$ мм, $h = 26$ мм, $t = 0.76/6$ мм. Расчётная схема представлена на рисунке 3.5. Стенки коробчатого сечения состоят из 6 композитных слоёв одинаковой толщины $[0/90]_3$, попеременно уложенных под 0 и 90 градусов относительно продольной оси. Механические характеристики слоя равны $E_1 = 142$ Гпа, $E_2 = 9.8$ Гпа, $G_{12} = 6$ Гпа, $\nu_{12} = 0.029$.

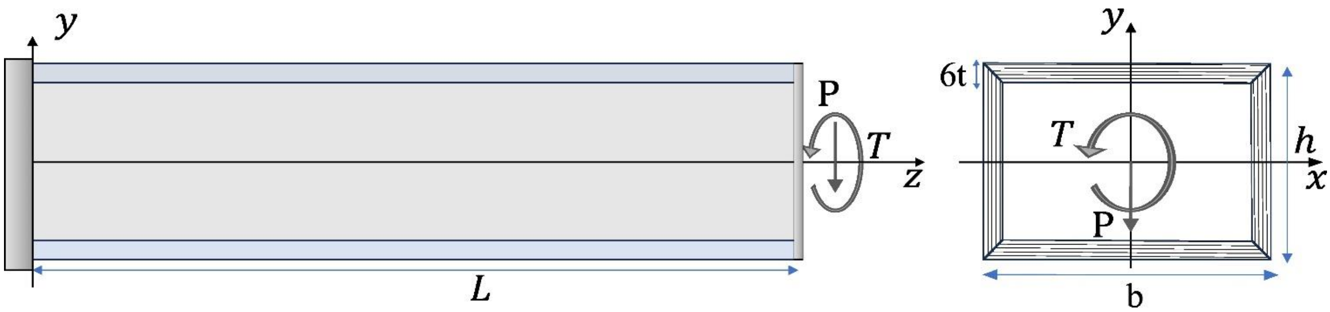


Рисунок 3.5. Схема кручения и изгиба коробчатого композитного стержня

Стержень нагружен на свободном конце перерезывающей нагрузкой $P = 4.448$ Н вдоль оси y и закручивающим моментом $T = 0.113$ Н $\times$ м. В силу структуры сечения и укладки слоёв кручение и изгиб стержня ведут себя независимо друг от друга. Отметим, что депланация стержня полагается стеснённой на обоих торцах в соответствии с экспериментом. На рисунке 3.6

приведена геометрия поперечного сечения и расчётная сетка для решения краевых задач в сечении.

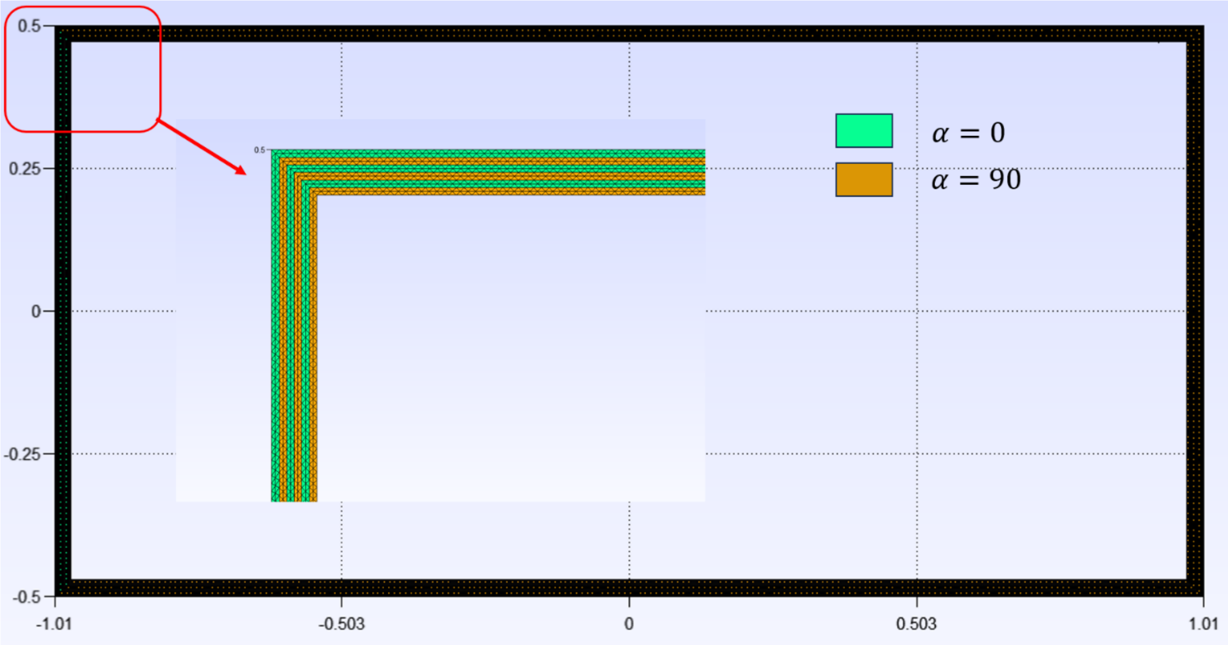


Рисунок 3.6. Геометрия и конечно-элементная сетка поперечного сечения для композитного коробчатого стержня

Рассмотрим три математические модели GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT. Отметим, что в случае, если рассматривается задача изгиба, то углы наклона в рамках моделей GN-RWBT и GN-FOBT совпадут в силу того, что уравнение изгиба в моделях одинаковое. Разница в моделях возникает при закручивании стержня. Поэтому для расчёта углов наклона поперечного сечения сравниваются только две математические модели GN-BESVBT и GN-FOBT.

Аналогично, если рассматривается задача кручения, то значения для углов закручивания в рамках моделей GN-BESVBT и GN-FOBT совпадут, так как уравнение кручения в моделях одинаковое. Поэтому, когда речь идёт о задаче кручения, сравниваются только две математические модели GN-RWBT и GN-BESVBT. Таким образом расчёт проводится по теории чистого кручения Сен-Венана (GN-BESVBT) и с учётом стеснённого кручения (GN-RWBT). При использовании модели GN-RWBT используем усредненное краевое условие на депланацию RWBT avg (см. таблицу 3.2). Дополнительно проведем расчет с помощью МКЭ для пространственной задачи. Для этого используем слоистые оболочечные конечные элементы.

На рисунке 3.7 приведена эпюра угла наклона по длине стержня. Видно, что обе модели GN-FOBT и GN-BESVBT с достаточно хорошей точностью описывают поведение конструкции относительно экспериментальных данных. При этом решение фактически совпадает с расчетом оболочечными конечными элементами для исходной постановки задачи (3D). Отметим, что в силу того, что стержень достаточно длинный и тонкостенный, решения на основе двух моделей практически не отличаются.

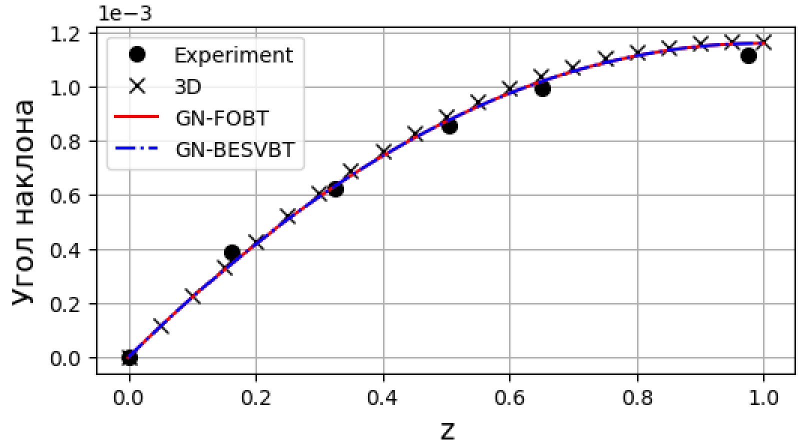


Рисунок 3.7. Эпюра угла наклона сечения по длине стержня

На рисунке 3.8 приведена эпюра угла закручивания по длине стержня. Видно, что обе модели GN-RWBT и GN-BESVBT с достаточно хорошей точностью описывают поведение конструкции относительно экспериментальных данных и конечно-элементного решения (3D). Отметим, что для данной конфигурации влияние стеснённого кручения не значительно и поведение конструкции хорошо описывается в рамках теории чистого кручения Сен-Венана.

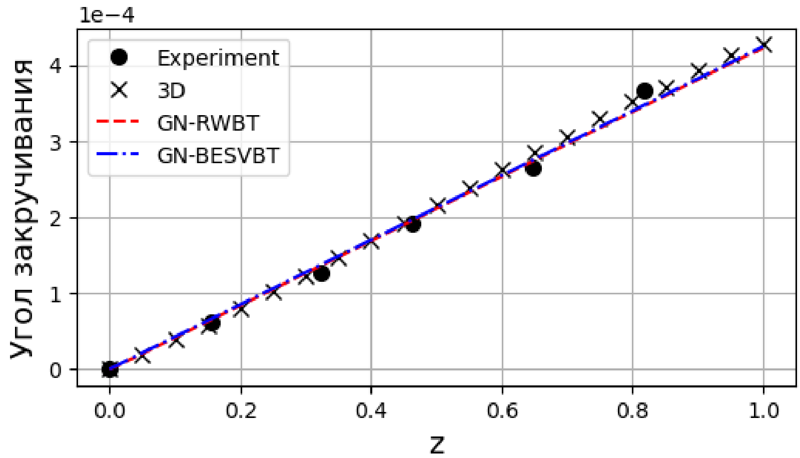


Рисунок 3.8. Эпюра угла закручивания по длине стержня

Изгиб и кручение композитного двутавра

В качестве примера рассмотрим композитный двутавр, изученный в работе [125]. Стержень представляет из себя заделку со следующими геометрическими параметрами: $L =$ 762 мм, $h = 12.7$ мм, $b = 25.4$ мм, $t = 1.016/8$ мм. Расчётная схема представлена на рисунке 3.9. Стенки коробчатого сечения состоят из 8 композитных слоёв одинаковой толщины $[0/90]_4$, попеременно уложенных под 0 и 90 градусов относительно продольной оси. Механические характеристики слоя равны $E_1 = 142$ Гпа, $E_2 = 9.8$ Гпа, $G_{12} = 6$ Гпа, $\nu_{12} = 0.029$.

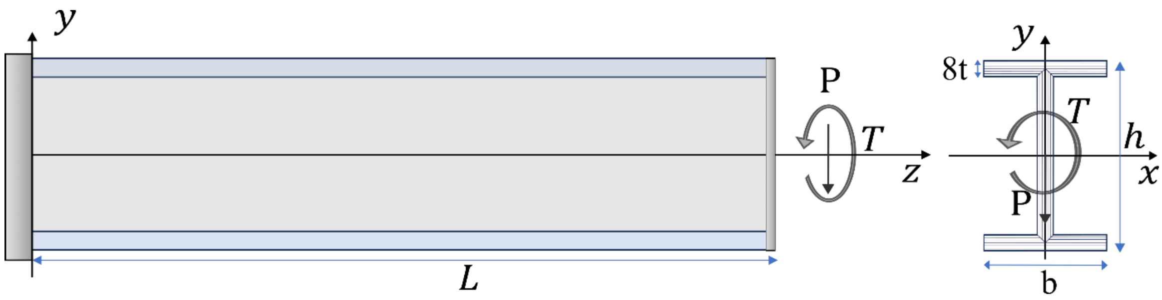


Рисунок 3.9. Схема кручения и изгиба композитного двутавра

Стержень нагружен на свободном конце перерезывающей нагрузкой $P = 4.448$ Н вдоль оси y и закручивающим моментом $T = 0.113$ Н × м. В силу структуры сечения и укладки слоёв кручение и изгиб стержня ведут себя практически независимо друг от друга. Небольшие связные эффекты могут проявляться в силу малой асимметрии укладок по толщине полок. Отметим, что депланация стержня полагается стеснённой на торцах. На рисунке 3.10 приведена геометрия поперечного сечения и расчётная сетка для решения краевых задач в сечении. Дополнительно проведем расчет с помощью МКЭ для пространственной задачи. Для этого используем слоистые оболочечные конечные элементы.

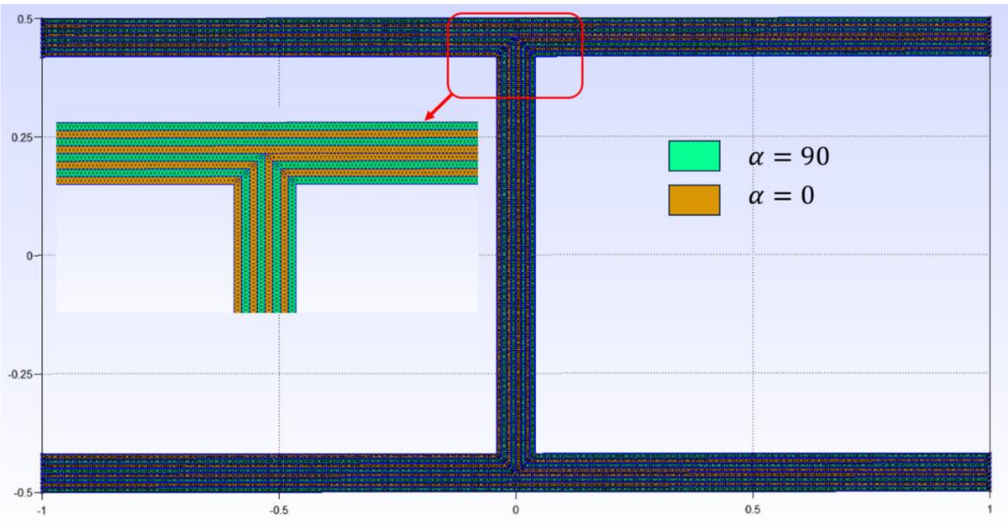


Рисунок 3.10. Геометрия и конечно-элементная сетка поперечного сечения для композитного двутавра

Для расчёта углов закручивания сравниваются две математические модели GN-BESVBT и GN-RWBT. Таким образом расчёт проводится по схеме чистого кручения Сен-Венана (BESVBT) и с учётом стеснённого кручения (GN-RWBT). Для расчёта углов наклона поперечного сечения сравниваются две математические модели GN-BESVBT и GN-FOBT. Таким образом расчёт проводится по классической схеме на основе гипотезы плоских сечений (GN-BESVBT) и без введения упрощений (GN-FOBT).

На рисунке 3.11 приведена эпюра угла наклона по длине композитного двутавра. Видно, что обе модели GN-FOBT и GN-BESVBT с приемлемой точностью описывают поведение конструкции. Отметим, что в силу того, что стержень достаточно длинный и тонкостенный, решения для изгиба на основе двух моделей практически не отличаются и в этом случае применима гипотеза плоских сечений.

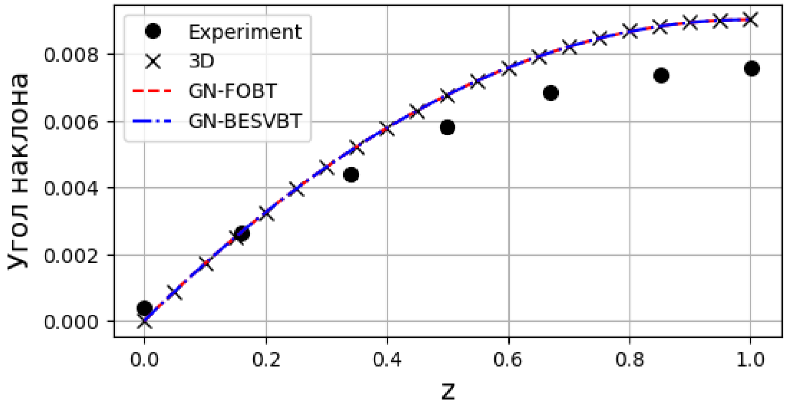


Рисунок 3.11. Эпюра угла наклона сечения по длине композитного двутавра

На рисунке 3.12 приведена эпюра угла закручивания по длине композитного двутавра. Видно, что модель GN-RWBT с достаточно хорошей точностью предсказывает распределение угла закручивания, при этом значения для угла закручивания практически совпадают с конечно-элементым расчетом пространственной задачи (3D). В свою очередь модель GN-BESVBT на основе теории чистого кручения Сен-Венана не позволяет сколько-нибудь адекватно оценить угол закручивания. Учёт стесненного кручения в данном случае является принципиально важным.

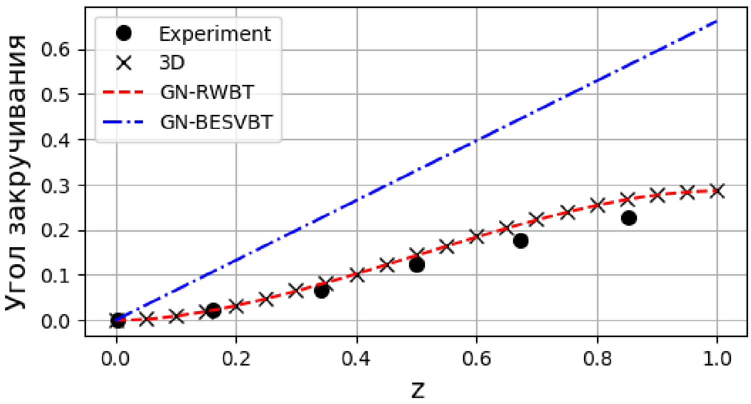


Рисунок 3.12. Эпюра угла закручивания по длине композитного двутавра

Четырехточечный изгиб сэндвич панели с мягким заполнителем

Рассмотрим четырёхточечный изгиб сэндвич панели, экспериментально изученный в работе [158]. Отличительной особенностью такой конструкции является наличие тонких и жестких внешних слоев в то время, как посередине присутствует заполнитель, жесткость которого на несколько порядков меньше по сравнению с внешними слоями. Геометрические параметры панели равны: $L = 1000$ мм, $a = 345$ мм, $b = 100$ мм, $h = 80$ мм; толщина внешних слоев $h_{1,3} = 0.44$ мм; толщина внутреннего слоя $h_2 = 79.12$ мм.

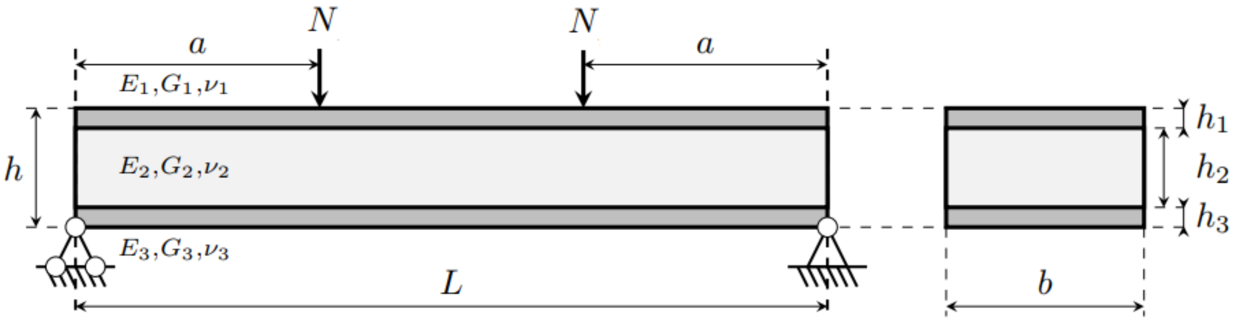


Рисунок 3.13. Схема четырехточечного изгиба сэндвич панели с мягким заполнителем

Внешние слои панели выполнены из стальных листов, со следующими свойствами: $E_{1,3} = 2.08\text{e}5$ МПа, $G_{1,3} = 80.3\text{e}3$ МПа, $\nu_{1,3} = 0.3$. Внутренний слой панели выполнен из пенополиуретана низкой плотности, со следующими свойствами: $E_2 = 8.9$ МПа, $G_2 = 1.66$ МПа, $\nu_2 = 0.3$. Схема четырёхточечного изгиба приведена на рисунке 3.13.

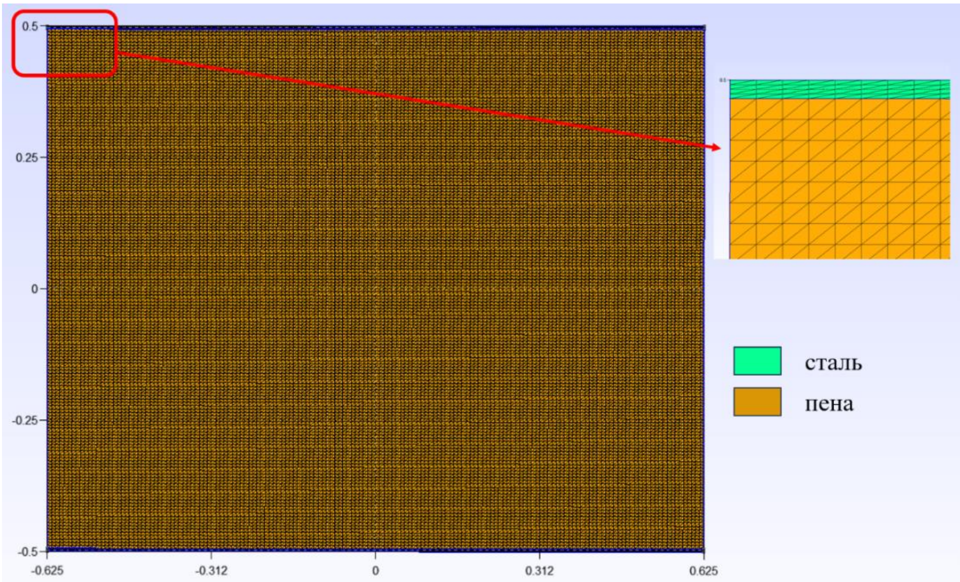


Рисунок 3.14. Геометрия и конечно-элементная сетка поперечного сечения для сэндвич панели с мягким заполнителем

Сетка в поперечном сечении сэндвич панели для решения краевых задач представлена на рисунке 3.14. Заметим, что в силу того, что решение слабо меняется по ширине сечения, решение краевых задач может быть получено аналитически с помощью операции усреднения по ширине сечения, как это было проделано в работах [148, 159]. Так как сэндвич панель изгибается без кручения, то имеет смысл рассмотреть только две математические модели GN-BESVBT и GN-FOBT. Дополнительно смоделируем задачу с помощью метода конечных элементов в двумерной постановке в пакете прикладных программ CalculiX. Положим, что конструкция находится в плоском напряженном состоянии. На рисунке 3.15 показано конечно-элементное решение двумерной задачи теории упругости для четырехточечного изгиба сэндвич панели в пакете прикладных программ CalculiX [138]. Нагрузка полагалась равной $N = 800$ Н.

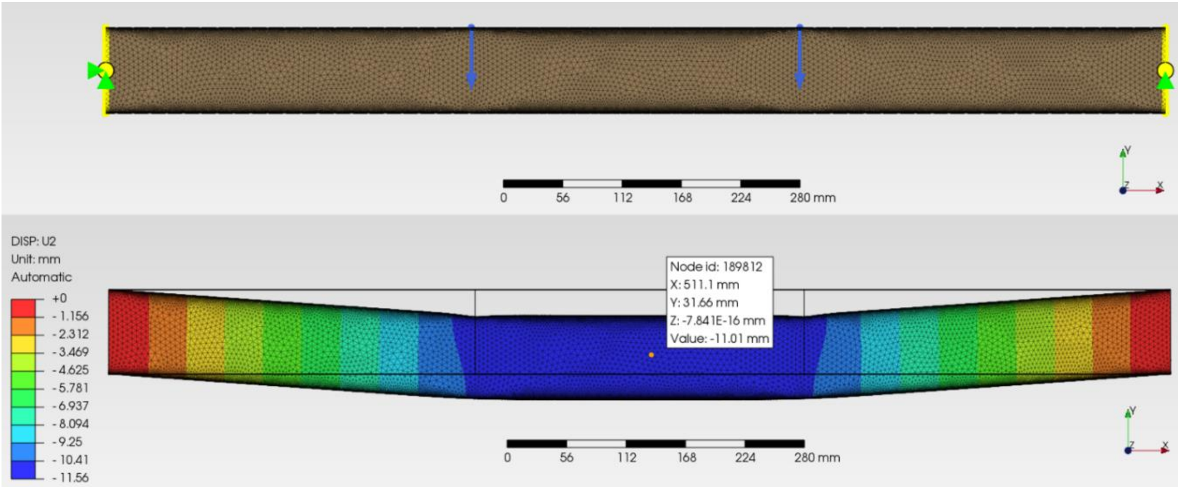


Рисунок 3.15. Конечно-элементное решение двумерной задачи теории упругости для четырехточечного изгиба сэндвич панели

На рисунке 3.16 приведён график зависимости нагрузки от величины прогиба в середине пролёта сэндвич панели. Видно, что в пределах линейного поведения конструкции, модель GN-FOBT даёт результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. В свою очередь модель GN-BESVBT не позволяет оценить прогиб панели и завышает жёсткость конструкции более чем в 10 раз по сравнению с экспериментом. Такая сильная разница в поведении моделей GN-BESVBT и GN-FOBT обусловлена тем, что в рамках GN-BESVBT не учитываются деформации сдвига, играющие ключевую роль в поведении такого типа конструкций. Можно сделать вывод, что в этом случае слабо применима гипотеза плоских сечений.

Для сравнения также приведены результаты на основе первой сдвиговой теории (FSDT) [160], которая активно применяется в механике композитных пластин и оболочек и заложена, как основной инструмент моделирования композитов во многих программных комплексах. В рамках FSDT сдвиговые напряжения и деформации вычисляются в среднем для всего пакета слоёв. Для того, чтобы корректно оценить их вклад в энергию деформации необходимо ввести сдвиговой коэффициент [160]. Для FSDT сдвиговой коэффициент находился в соответствии с методикой, описанной в [161]. Отметим, что эта методика имеет ряд недостатков. Так, она применима только для упорядоченных слоистых балок-пластин, то есть для относительно простой геометрии поперечных сечений. Модуль сдвига полагается зависящим только от координаты по высоте пакета слоёв (ось Oy), то есть не может менять вдоль координаты x. Делается предположение, что сдвиговые напряжения внутри слоя имеют параболическое распределение по толщине. В свою очередь использование метода AP позволяет отказаться от учета сдвиговых факторов вовсе, либо же метод может быть использован для точного определения сдвиговых коэффициентов для произвольных поперечных сечений и материалов, без нарушения непрерывности сдвиговых напряжений.

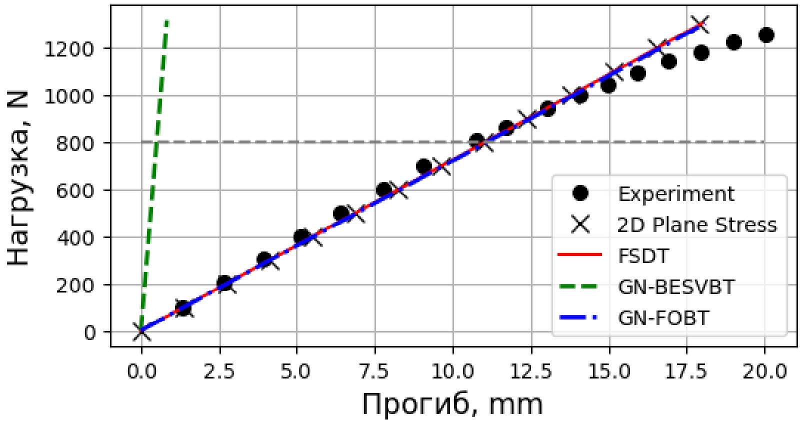


Рисунок 3.16. График зависимости нагрузки от величины прогиба в середине пролета сэндвич панели

В случае плоского изгиба разрешающая система уравнений для GN-FOBT (3.1) сведется к одному уравнению изгиба [159, 162]

$$B_{\alpha}^{v_y,4}\partial_z^4 v_y^{(1)}\varepsilon^4 = 0, \tag{3.34}$$

Углы наклона и внутренние усилия выразятся следующим образом

$$\varphi_y = \partial_z^1 v_y^{(1)}\varepsilon + \Phi_y^{v_y,3}\partial_z^3 v_y^{(1)}\varepsilon^3, \tag{3.35}$$

$$M_y = -B_y^{v_y,4}\partial_z^2 v_y^{(1)}\varepsilon^2, \qquad Q_y = -B_y^{v_y,4}\partial_z^3 v_y^{(1)}\varepsilon^3. \tag{3.36}$$

Легко заметить, что соотношения (3.34)-(3.36) могут быть переформулированы в терминах неизвестных $v_y^{(1)}$ и φ_y. Внутренние усилия могут быть записаны как

$$M_y = -B_y^{v_y,4}\partial_z^1\varphi_y\varepsilon, \qquad Q_y = \lambda[GF]\left(\partial_z^1 v_y^{(1)}\varepsilon - \varphi_y\right), \tag{3.37}$$

где вводится коэффициент λ, который является аналогом сдвигового коэффициента в теории FSDT (shear correction factor)

$$\lambda = \frac{1}{[GF]}\frac{B_y^{v_y,4}}{\Phi_y^{v_y,3}}, \qquad [GF] = \langle G_i \rangle. \tag{3.38}$$

С учетом выражений (3.37) система уравнений (3.34) может быть переформулирована в виде

$$\begin{cases} B_y^{v_y,4}\partial_z^2\varphi_y\varepsilon^2 = \lambda[GF]\left(\partial_z^1 v_y^{(1)}\varepsilon - \varphi_y\right), \\ \lambda[GF]\left(\partial_z^2 v_y^{(1)}\varepsilon^2 - \partial_z^1\varphi_y\varepsilon\right) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Таким образом показано, что в случае плоского изгиба при отсутствии распределенных нагрузок модель GN-FOBT может быть приведена к уравнениям (3.39), аналогичным теории FSDT. Действительно, выражения для внутренних усилий и разрешающая система уравнений совпадают с соотношениями теории FSDT. Разница состоит лишь в том, что величины прогиба $v_y^{(1)}$ и угла наклона сечений φ_y вводятся как средние величины без привязки к срединной поверхности стержня. Формула (3.38) позволяет определять сдвиговой коэффициент для теории FSDT без введения дополнительных предположений. При этом сечение стержня может иметь произвольный вид и внутреннюю структуру. Для задачи четырехточечного изгиба сэндвич панели с мягким заполнителем сдвиговой коэффициент по формуле (3.38) равен $\lambda = 4.00$e-3. Для FSDT сдвиговой коэффициент по методике [161] равен $\lambda = 3.88$e-3. Как итог получаем очень близкие друг другу значения.

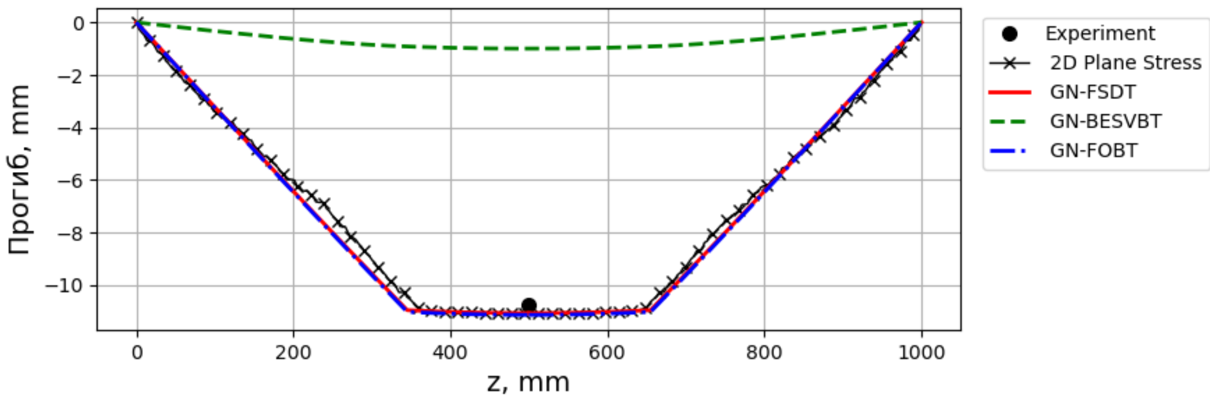


Рисунок 3.17. Эпюра прогиба по длине сэндвич панели при $N = 800$ Н

На рисунке 3.17 представлены эпюры прогибов по длине панели. Видно, что модель на основе гипотезы плоских сечений GN-BESVBT значительно (в 10 раз) недооценивает прогибы. Модель GN-FOBT показывает хорошее соответствие с экспериментальными данными, двумерным расчетом (2D Plane Stress) и даёт близкие значения с теорией FSDT.

Выводы по главе 3

На основе теории деформирования слоистых анизотропных стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии, описанной во второй главе, предложено семейство математических моделей GN для расчёта НДС композитных слоистых стержней. Модель GN-

FOBT основана на первом приближении метода АР. Модель GN-BESVBT является упрощением модели GN-FOBT. Разрешающая система уравнений и краевые условия для модели GN-BESVBT совпадают с выражениями для теории композитных стержней, основанной на классических гипотезах Бернулли-Эйлера и теории чистого кручения Сен-Венана. Модель GN-RWBT является более общей чем GN-FOBT и позволяет учитывать эффекты стеснения депланации при кручении стержня. При этом растёт и порядок разрешающей системы (на 2 порядка).

Разработан и верифицирован алгоритм решения краевых задач в поперечных сечениях методом конечных элементов с учётом распараллеливания. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ BASA [157]. Проведена валидация математических моделей GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT на экспериментальных данных из открытых источников [68, 125, 126, 158]. Рассмотрены следующие задачи: кручение и изгиб композитного коробчатого стержня [68, 126]; кручение и изгиб композитного двутавра [125], четырёхточечный изгиб сэндвич панели с мягким заполнителем [158]. Показано, что в случае кручения и изгиба композитных ортотропных стержней коробчатого сечения модели GN-FOBT, GN-BESVBT, GN-RWBT дают хорошее совпадение с экспериментальными данными. В случае коробчатых сечений и достаточно длинных стержней эффект стеснённого кручения практически незаметен. В свою очередь для задачи изгиба и кручения композитного слоистого двутавра эффект стеснённого кручения оказывает значительное влияние на крутильную жёсткость стержня. Для задачи четырехточечного изгиба сэндвич панели расчётные значения модели GN-FOBT дают хорошее совпадение с экспериментом [158] и конечно-элементным решением двумерной задачи теории упругости, в то время как модель GN-BESVBT завышает жёсткость конструкции более чем в 10 раз в силу пренебрежения сдвиговыми компонентами деформации. Показано, что в случае плоского изгиба модель GN-FOBT может быть сведена к первой сдвиговой теории FSDT, широко применяемой для анализа композитных конструкций. Получена формула определения сдвигового коэффициента для теории FSDT для стержней произвольных поперечных сечений и без введения априорных гипотез.

4. Исследование стеснённого кручения композитных стержней на основе математической модели GN-RWBT

В главе последовательно рассматриваются задачи о стеснённом кручении композитных стержней замкнутого и открытого профилей, а также рассматриваются слоистые стержни сплошного прямоугольного сечения [163–166]. Основная задача состоит в исследовании стеснённого кручения и оценке применимости разработанной математической модели GN-RWBT. В качестве тестовой задачи выбрана задача о кручении стержня концевым закручивающим моментом. Отметим, что несмотря на то, что изгибные нагрузки в модельной задаче отсутствуют, для несимметричных сечений кручение стержня будет сопровождаться его изгибом, несмотря на равенство нулю изгибающих моментов.

4.1 Стеснённое кручение однородных и композитных стержней сплошного сечения

Известно, что влияние депланации сечения при кручении может проявляться для стержней сплошного сечения [23, 115, 131]. В качестве примера рассмотрим стеснённое кручение стержня прямоугольного сечения, для которого известна форма депланации сечения при кручении [63]. Схема нагружения стержня представлена на рисунке 4.1.

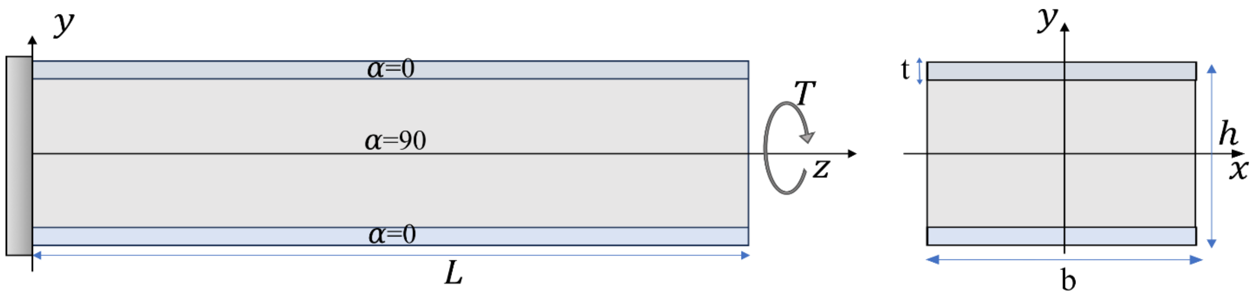


Рисунок 4.1. Схема кручения и геометрические характеристики прямоугольного трёхслойного стержня

Для исследования задачи кручения рассмотрим две модели GN-BESVBT (чистое кручение Сен-Венана) и GN-RWBT (модель с учётом стесненного кручения).

Математическая модель GN-BESVBT. Так как при кручении прямоугольный стержень не изгибается, то разрешающая система дифференциальных уравнений (3.6) для модели GN-BESVBT может быть сведена к одному дифференциальному уравнению кручения

$$G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(0)}\varepsilon^2 = 0. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) полностью совпадает с уравнением Сен-Венана, причем крутильная жёсткость $G_z^{\theta,2}$ вычисляется ровно также, как и у Сен-Венана. Крутящий момент M_z выражается через угол закручивания $\theta^{(0)}$ следующим образом

$$M_z = G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon. \tag{4.2}$$

Компоненты вектора перемещений могут быть найдены по формулам

$$\begin{gathered}(u_x)_i^{(0)} = -y\,\theta^{(0)}, \qquad \left(u_y\right)_i^{(0)} = x\,\theta^{(0)},\\ (u_z)_i^{(0)} = \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Сдвиговые компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом

$$(\sigma_{\alpha z})_i^{(1)} = \left(\tau_{\alpha z}^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{4.4}$$

Нормальные компоненты тензора напряжений в поперечном сечении тождественно равны нулю.

Математическая модель GN-RWBT. Так как при кручении прямоугольный стержень не изгибается, то разрешающая система дифференциальных уравнений (3.11) для модели GN-RWBT может быть сведена к одному дифференциальному уравнению кручения

$$G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + G_z^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 = 0. \tag{4.5}$$

Крутящий момент M_z выражается через угол закручивания $\theta^{(1)}$ следующим образом

$$M_z = G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + G_z^{\theta,4}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3. \tag{4.6}$$

Компоненты вектора перемещений определяются следующим образом

$$\begin{gathered}(u_x)_i^{(1)} = -y\,\theta^{(1)}, \qquad \left(u_y\right)_i^{(1)} = x\,\theta^{(1)},\\ (u_z)_i^{(1)} = \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + \left(U_z^\theta\right)_i^{(3)}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Нормальные и сдвиговые компоненты тензора напряжений могут быть найдены по формулам

$$\begin{gathered}(\sigma_{zz})_i^{(1)} = \left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2,\\ (\sigma_{\alpha z})_i^{(1)} = \left(\tau_{\alpha z}^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + \left(\tau_{\alpha z}^\theta\right)_i^{(3)}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3, \qquad \alpha \in \{x, y\}.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Для решения уравнения четвертого порядка (4.5) требуется четыре краевых условия на торцах. Из принципа Сен-Венана следует, что на торцах стержня могут быть поставлены два краевых условия, по одному с каждого конца (либо на закручивающий момент, либо на угол закручивания). В соответствии с разделом 3.3 два дополнительных краевых условия вводятся через величины S_z , D_z по формулам (3.16), (3.18). В данной работе в соответствии с таблицей 3.2 рассматривается три варианта задания краевых условий на депланацию сечения: RWBT 1, RWBT 2, RWBT avg.

Замечание 1. Величина S_z, определяемая по формуле (3.16), является аналогом бимомента из теории тонкостенных стержней Власова. Однако в рамках данной работы она не трактуется как новое внутреннее усилие и может быть найдена для произвольных типов поперечных сечений, не обязательно тонкостенных. Похожее обобщение бимомента для сплошных поперечных сечений даётся в работе [121] в рамках постановки Тимошенко-Вагнера-Каппуса-Власова.

Замечание 2. Использование варианта краевых условий RWBT 1 аналогично по своей структуре краевым условиям в рамках теории тонкостенных стержней Власова. Кроме того, дифференциальное уравнение кручения (4.5) совпадает по своей структуре с уравнениями кручения теорий Власова и Уманского [13]. Как будет показано далее, использование вариантов задания краевых условий RWBT 2 и RWBT avg, отличных по типу от используемых в теории Власова, может существенно влиять на итоговый результат решения задачи о кручении.

Физико-механические и геометрические параметры для прямоугольных стержней. Рассмотрим прямоугольные сечения со следующими параметрами (см. рисунок 4.2): $h = 1$ – высота и b –ширина сечения соответственно, t – толщина внешних слоёв. При этом рассмотрим несколько вариантов, когда сечение однородное изотропное, однородное ортотропное и трехслойное ортотропное. Для трёхслойного прямоугольного сечения положим, что волокна внешних слоёв ориентированы вдоль продольной координаты z (угол ориентации $\alpha = 0$), а внутренние вдоль оси x (угол ориентации $\alpha = 90$). Рассмотрим случаи, когда толщина внешних слоёв относительно небольшая $t = 0.01$ и более существенная $t = 0.1$.

Характеристики ортотропного материала с учётом обезразмеривания положим равными следующим значениям [140]: $E_1 = 25,\ E_2 = E_3 = 1,\ G_{12} = G_{13} = 0.5,\ G_{23} = 0.2,\ \ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. Для изотропного случая характеристики материалов положим равными: $E_1 = E_2 = E_3 = 25$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$.

Введем обозначения для различных поперечных сечений (П – прямоугольное): П1 – однородное изотропное сечение; П2 – однородное ортотропное; П3 – трехслойное ортотропное $t = 0.01$, П4 – трехслойное ортотропное $t = 0.1$.

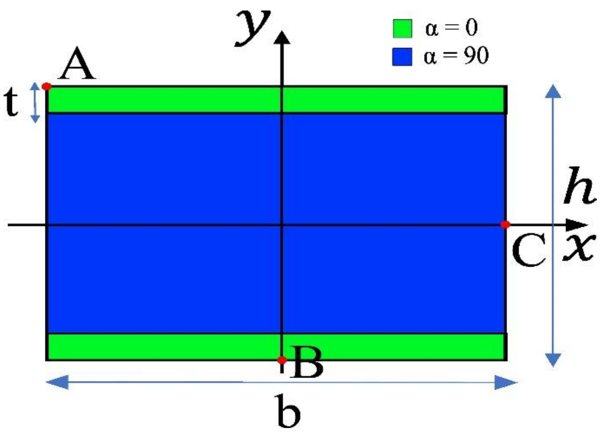


Рисунок 4.2. Структура и ориентация слоев прямоугольного композитного сечения

Про решение краевых задач в поперечном сечении стержня. Для получения всех необходимых жёсткостей и жесткостных функций необходимо решить первые три краевые задачи в сечении для θ-аппроксимации (2.98) – (2.102), (2.103) – (2.107). Краевые задачи решались численно методом конечных элементов. На рисунке 4.3 приведена КЭ сетка при $b = 5,\ t = 0.1$, использованная для решения, цветом показаны слои.

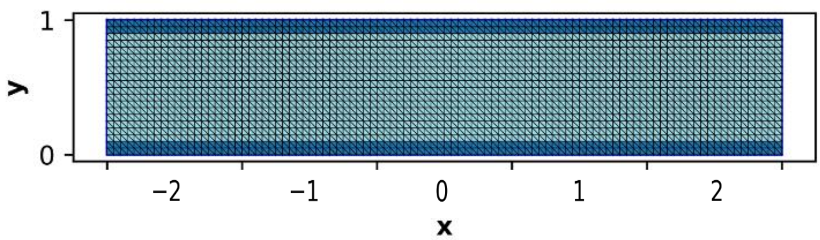


Рисунок 4.3. КЭ сетка для слоистого ортотропного сечения, b=5

Вторая краевая задача при k=1 является задачей на определение формы депланации сечения $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ и крутильной жесткости $G_z^{\theta,2}$

$$\begin{gathered}\partial_x^1\left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(1)} + \partial_y^1\left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(1)} = 0, \qquad x, y \in F, \\ \left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(1)} n_x + \left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(1)} n_y = 0, \qquad x, y \in \Gamma, \end{gathered} \tag{4.9}$$

$$G_z^{\theta,2} = \langle -\left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(1)} y + \left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(1)} x \rangle.$$

Для модели чистого кручения GN-BESVBT решения задачи (4.9) достаточно для определения всех неизвестных. Для учёта стеснённого кручения (модель GN-RWBT) необходимо решить следующие краевые задачи в сечении. На рисунке 4.4 приведено численное решение для функции $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ для слоистого ортотропного сечения П3 при $b = 5,\ t = 0.1$. Напомним, что функция $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ характеризует форму депланации в сечении при кручении. Видно, что полученное решение для функции депланации качественно согласуется с выражением для депланации предложенной Власовым [68, 117] $u_z = W_z\, x\, y$, где $W_z(z)$ – функция, отвечающая за амплитуду депланации по длине стержня. На рисунке 4.5 приведена жесткостная функция $\left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)}$ для сечения П3, которая характеризует распределение продольных напряжений по сечению стержня при его кручении.

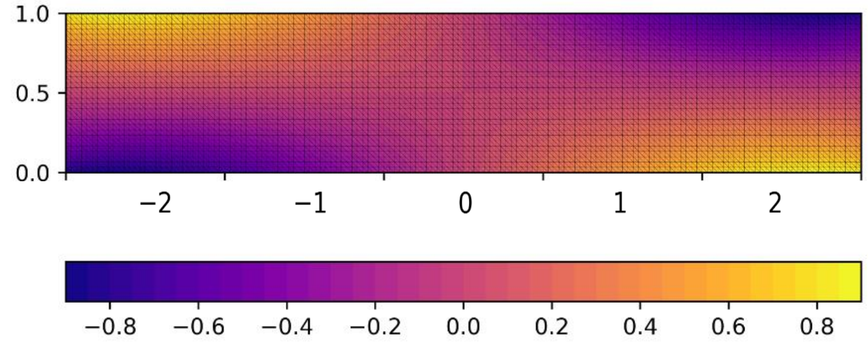


Рисунок 4.4.Жетскостная функция продольных перемещений $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ для сечения П3

Решение первой краевой задачи при k=2 позволяет учесть деформирование контура, для этого необходимо задать функцию распределения закручивающей нагрузки по сечению стержня $g_\alpha(\Gamma)$. Решение краевых задач на функции $\left(U_x^\theta\right)_i^{(2)}, \left(U_y^\theta\right)_i^{(2)}, \left(U_x^\theta\right)_i^{(4)}, \left(U_y^\theta\right)_i^{(4)}$ в поперечном сечении в общем случае может приводить к неустойчивости решения, что может сильно влиять на итоговый результат. Этот вопрос требует дополнительного изучения и выходит за рамки данной работы. Поэтому в данной главе мы пренебрегаем компонентами деформации контура в своей плоскости и полагаем, что $\left(U_x^\theta\right)_i^{(2)} = \left(U_y^\theta\right)_i^{(2)} = \left(U_x^\theta\right)_i^{(4)} = \left(U_y^\theta\right)_i^{(4)} = 0.$

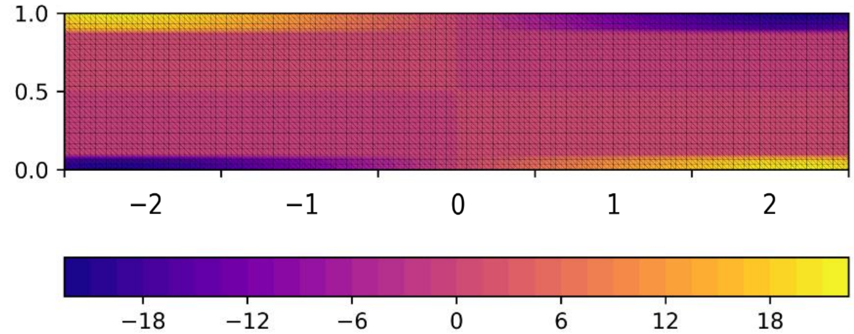


Рисунок 4.5. Жесткостная функция продольных напряжений $\left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)}$ для сечения П3

Вторая краевая задача при k=3 является задачей на определение формы депланации сечения $\left(U_z^\theta\right)_i^{(3)}$ и второй крутильной жесткости $G_z^{\theta,4}$, которая очень важна для описания стеснённого кручения

$$
\begin{gathered}
\partial_x^1\left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(3)}+\partial_y^1\left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(3)}+\left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)}=0, \qquad x,y\in F,\\
\left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(3)}n_x+\left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(3)}n_y=0, \qquad x,y\in\Gamma\,,\\
G_0^{\theta_0,4}=\langle-\left(\tau_{zx}^\theta\right)_i^{(3)}y+\left(\tau_{zy}^\theta\right)_i^{(3)}x\rangle.
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

Анализ влияния стеснённого кручения. Используя математические модели на основе нулевого (теория Сен-Венана) и первого (модель GN-RWBT) асимптотического приближений, исследуем степень влияния стеснённого кручения на общее НДС для прямоугольных сечений с различной внутренней структурой. Рассмотрим подробнее дифференциальное уравнение кручения (4.5). Приведём уравнение (4.5) к виду

$$
\partial_z^2\theta^{(1)}-\lambda_{rw}^2\varepsilon^2\partial_z^4\theta^{(1)}=0, \qquad \lambda_{rw}=\pm\sqrt{-\frac{G_z^{\theta,4}}{G_z^{\theta,2}}}. \tag{4.11}
$$

Общее решение уравнения (4.5) будет иметь вид

$$
\theta^{(1)}=\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1z+\mathrm{C}_3e^{-z/\lambda_{rw}\varepsilon}+\mathrm{C}_2e^{(z-1)/\lambda_{rw}\varepsilon}\,, \qquad z\in[0,1]. \tag{4.12}
$$

Первые два слагаемых общего решения (4.12) для уравнения (4.11) являются одновременно общим решением уравнения (4.1), его два последних слагаемых являются двумя пограничными слоями на левом и правом торцах соответственно. Таким образом неучет пограничных слоев в формуле (4.12) равносилен замене уравнения (4.5) на уравнение (4.1), или, иными словами, замене теории GN-RWBT на упрощенную теорию чистого кручения Сен-Венана. Коэффициент λ_{rw} является коэффициентом, характеризующим влияние стесненности на процесс кручения, поэтому его можно называть коэффициентом стесненного кручения. Отличие этого коэффициента от нуля в общем случае порождает пограничные слои вблизи торцов стержня, поэтому можно сказать, что стесненная депланация порождает пограничные слои вблизи торцов стержня. Исследуем влияние этих пограничных слоев на величину угла закручивания.

Будем считать, что влиянием пограничного слоя на основное решение можно пренебречь, если при удалении от торца на расстояние, равное максимальному поперечному размеру стержня, учет пограничного слоя в решении составляет менее пяти процентов по сравнению с неучетом такового, это равносильно неравенству

$$e^{-z/\lambda_{rw}\varepsilon}\Big|_{z=\,b\varepsilon} \le 0.05$$

что в свою очередь равносильно неравенству

$$\lambda_{rw}/b \le 0.333. \tag{4.13}$$

При выполнении неравенства (4.13) размер пограничного слоя не превышает $(b\varepsilon)$ и его влияние на основное решение составляет менее пяти процентов. При нарушении неравенства (4.13) размер пограничного слоя выходит за величину $(b\varepsilon)$ и влиянием пограничного слоя на основное решение пренебрегать в общем случае нельзя. Таким образом, при нарушении неравенства (4.13) параметры $(b\varepsilon)$ и (λ_{rw}/b) одновременно отвечают за размер пограничного слоя и его влияние на основное решение.

В таблице 4.1 представлены коэффициенты (λ_{rw}/b) при различной структуре сечений и при различной ширине b. Цветом выделены случаи, где нарушается оценочное неравенство (4.13), т.е. нарушается принцип Сен-Венана. Можно сделать общий вывод, что для квадратных сечений ($b = 1$) влияние депланации невелико, однако с увеличением параметра b наблюдается значительный рост значений λ_{rw}, а вместе с ним и размера погранслоя при одновременном нарушении неравенства (18). Также можно заметить, что для ортотропных стержней, жесткость которых в поперечных направлениях ослаблена по сравнению с продольным направлением, влияние депланации значительно выше, чем для изотропных. Для слоистых композитных стержней видно, что влияние депланации в этом случае больше, чем для однородных изотропных стержней. Отметим, что увеличение толщины внешних слоёв для трёхслойного прямоугольного сечения (П4) значительно увеличивает влияние депланации по сравнению со случаем тонких внешних слоев (П3).

Таблица 4.1. Коэффициент λ_{rw}/b для различных типов прямоугольных сечений

Структура сечения	$b = 1$	$b = 2$	$b = 5$
	λ_{rw}/b		
П1	2.4e-2	0.141	0.219
П2	0.212	0.731	0.998
П3	0.212	0.122	0.290
П4	0.464	0.319	0.676

Анализ углов закручивания. Будем считать, что стержень нагружен единичным закручивающим моментом $T = 1$ на правом торце. Исследуем поведение величины углов закручивания стержня по его длине для различных типов сечений со стеснением депланации сечения правого торца и без, и проведём сравнение относительно конечно-элементного решения исходной пространственной задачи теории упругости. Трёхмерный конечно-элементный анализ проводился с использованием бесплатного решателя CalculiX [138]. В качестве примера на рисунке 4.6 приведено распределение продольных напряжений в однородном изотропном стержне (П1) при стеснённом кручении на основе трехмерного КЭ расчёта.

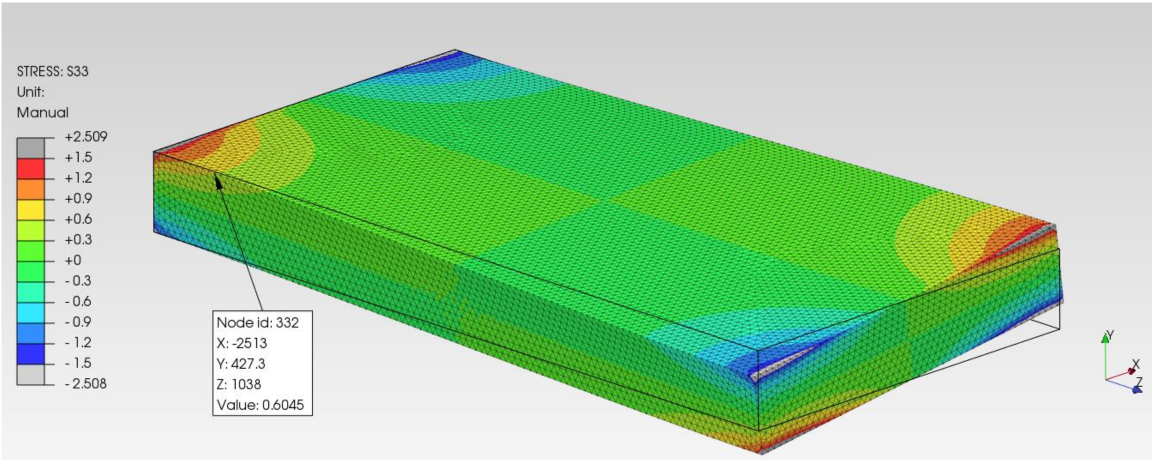
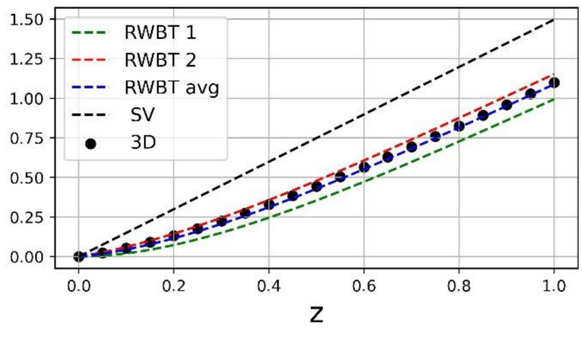
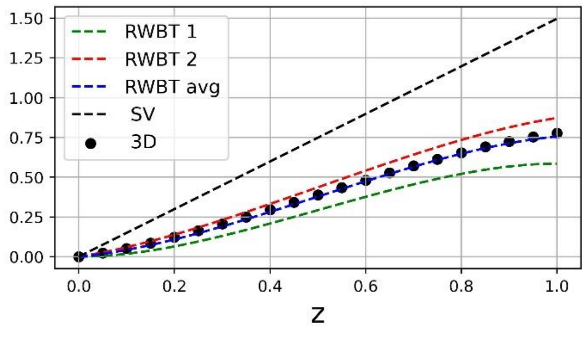


Рисунок 4.6. Распределение продольных напряжений в однородном изотропном стержне (П1) при стеснённом кручении на основе трехмерного КЭ расчёта, $\varepsilon = 0.1, b = 5$

На рисунке 4.7, а также в таблице 4.2 величины углов закручивания приведены с множителем $\theta^{(1)} \times \varepsilon$. На рисунке 4.7 представлены эпюры углов закручивания, рассчитанные для модели GN-RWBT тремя способами задания краевых условий (таблица 3.2), по теории чистого кручения Сен-Венана в рамках модели GN-BESVBT (SV) и для конечно-элементного решения трехмерной задачи (3D). На всех эпюрах на этих рисунках имеет место почти идеальное совпадение конечно-элементного решения с решением для модели GN-RWBT с краевым условием RWBT avg.



а)



б)

Рисунок 4.7.Эпюры углов закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для стержня П4, $\varepsilon = 1/10$

а) депланация стеснена в заделке; б) депланация стеснена с обоих концов

На рисунке 4.7а представлены эпюры для стержня П4 при $\varepsilon = 1/10$ и b=5. Из таблицы 2 следует, что для этого стержня неравенство (18) нарушается, т.е. влияние стеснения депланации является значительным. Действительно, из эпюры видно, что размер пограничного слоя равен примерно 0.9, при $0.9 < z < 1$ эпюра становится параллельной решению Сен-Венана.

На рисунке 4.7б представлен тот же стержень, но со стеснением депланации на правом торце. Вследствие этого вблизи правого торца возникает другой пограничный слой такого же размера 0.9. В этом случае влияние пограничных слоёв с каждого торца полностью перекрывает основное решение, т.е. участок параллельный решению уравнения Сен-Венана отсутствует. Отклонение угла закручивания на правом торце стержня от решения уравнения Сен-Венана, составляет 45% вследствие действия обоих пограничных слоев, как это следует из таблицы 3.

Таблица 4.2. Величины углов закручивания на конце $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для прямоугольных сечений, $b = 5$

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	3D КЭ
П1 *(однородное изотропное)*					
$^1/_{20}$	0.061 (<1%)	0.062 (<1%)	0.062 (<1%)	0.069 (12%)	**0.062**
$^1/_{10}$	0.054 (<1%)	0.056 (<1%)	0.055 (<1%)	0.069 (27%)	**0.054**
$^1/_5$	0.039 (5%)	0.044 (7%)	0.042 (2%)	0.069 (68%)	**0.041**
П2 *(однородное ортотропное сечение)*					
$^1/_{20}$	0.712 (8 %)	0.818 (6 %)	0.770 (<1%)	1.37 (77 %)	**0.773**
$^1/_{10}$	0.328 (28 %)	0.495 (7 %)	0.419 (9 %)	1.37 (199 %)	**0.458**
$^1/_5$	0.105 (63 %)	0.307 (7 %)	0.215 (25 %)	1.37 (377 %)	**0.287**
П4 *(трехслойное ортотропное $t = 0.1$)*					
$^1/_{20}$	0.993 (8 %)	1.152 (7 %)	1.088 (<1%)	1.49 (39 %)	**1.077**
$^1/_{10}$	0.585 (25 %)	0.872 (12 %)	0.755 (3 %)	1.49 (92 %)	**0.777**
$^1/_5$	0.224 (60 %)	0.625 (12 %)	0.462 (17 %)	1.49 (169 %)	**0.556**

В таблице 4.2 представлены результаты расчётов угла закручивания на правом торце стержня при различных значениях малого параметра ε и вариантах структуры поперечных сечений. Углы закручивания считались на правом торце стержня, там, где был приложен закручивающий момент. Депланация стержня полагалась стеснённой с обоих торцов стержня. Краевые условия на торцах стержня задавались через жёсткую вставку, тем самым поперечные сечения на торцах рассматривались как абсолютно жёсткие тела. Углы закручивания для модели GN-RWBT посчитаны тремя способами задания краевых условий. Так же проведён расчет по теории чистого кручения Сен-Венана в рамках модели GN-BESVBT (SV). Ошибка в процентах высчитывалась относительно конечно-элементного решения трехмерной задачи (3D). Величины углов закручивания приведены с множителем $\theta^{(1)} \times \varepsilon$, таким образом для кручения по Сен-Венану при всех значениях малого параметра ε значения в таблице не меняются. Цветом выделены результаты, отличающиеся от референтного конечно-элементного решения более чем на 10%. Видно, что решение на основе чистого кручения (SV) может значительно переоценивать углы закручивания (более 10%), даже для изотропных стержней. При этом погрешность увеличивается с увеличением параметра ε. Погрешность увеличивается для ортотропных однородных (до 377%) и ортотропных слоистых (до 169%) сечений. В свою очередь математическая модель GN-RWBT позволяет намного точнее определить угол закручивания и учесть влияние стеснённого кручения. Разница между вариантами задания краевых условий RWBT 1, RWBT 2, RWBT avg увеличивается с ростом величины малого параметра ε. Однако при этом падает и общая точность математической модели, хотя и в значительно меньшей степени.

В целом можно сказать, что усреднённый вариант задания краевых условий RWBT avg даёт более точные и промежуточные значения (точность в пределах 10%) между вариантами RWBT 1 и RWBT 2. Использование упрощенного варианта задания краевых условий RWBT 1 может приводить к значительным погрешностям (до 60% и более). Напомним, что использование краевых условий типа RWBT 1 аналогично краевым условиям в теории тонкостенных стержней Власова.

Анализ напряжений. Исследуем характер поведения напряжений в рамках теории Сен-Венана (SV) и модели GN-RWBT для рассмотренных выше стержней со стесненной депланацией только в заделке. Полученные значения напряжений сравнивались с трехмерным конечно-элементным расчётом, полученным на сетке высокой степени подробности.

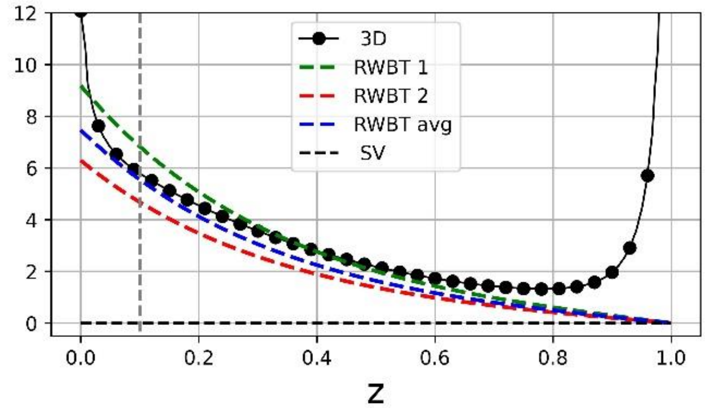
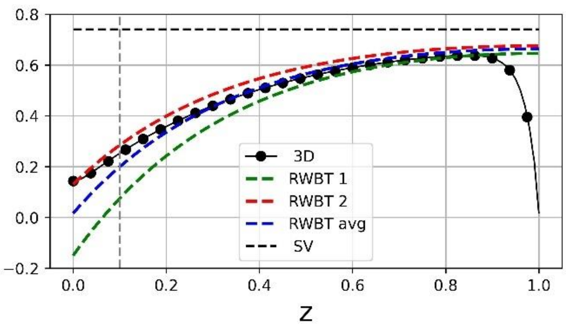
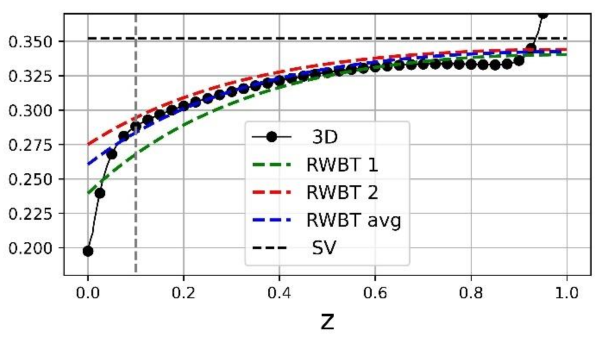


Рисунок 4.8. Эпюра продольных напряжений σ_{zz} в точке А для стержня П4, $\varepsilon = 1/10$; Депланация стеснена в заделке

На рисунке 4.8 представлена эпюра напряжений в т. А (см. рисунок 4.2) для стержня с сечением П4. Вблизи заделки имеется тонкий слой с глубиной равной примерно 0.05, где значения, получаемые по модели GN-RWBT, существенно отличаются от значений, полученных из трехмерного конечно-элементного расчёта. Точно также, вблизи правого торца имеется слой с глубиной примерно равной 0.2, где эти два расчета также существенно отличаются. Это говорит о том, реальное трехмерное напряженное состояние стержня не аппроксимируется моделью GN-RWBT только в пределах малых пограничных зон вблизи торцов. Наличие малых пограничных зон вблизи торцов обусловлено характером задания краевых условий в трехмерной конечно-элементной модели. Отметим, что существует бесконечно много статически эквивалентных способов постановки краевых условий в трехмерной задаче и степень их влияния на решение подчиняется принципу Сен-Венана.



а)



б)

Рисунок 4.9. Эпюры сдвиговых напряжений для прямоугольного стержня (П4), $\varepsilon = 1/10$ для а) σ_{xz} в точке B; б) σ_{yz} в точке C. Депланация стеснена в заделке

На рисунке 4.9 представлены эпюры касательных напряжений в т. B и т. C (см. рисунок 4.2) для стержня с сечением П4. Для касательных напряжений вблизи обоих торцов для обоих стержней, также как и для продольных нормальных напряжений, имеют место быть зоны, в которых поведение напряжений, вычисленных по модели GN-RWBT и с помощью трёхмерного конечно-элементного расчёта, существенно расходятся. Глубина этих зон, очевидно, уменьшается при уменьшении параметра (bε).

Исследуем точность вычисления напряжений в рамках теории Сен-Венана (SV) и модели GN-RWBT. Для этого зафиксируем сечение, находящееся вблизи торца на расстоянии одной десятой от всей длины стержня. Параметр ε положим равным 0.1, что соответствует достаточно короткому стержню. Ширину сечения положим равной $b = 5$, тем самым эффекты от стеснённого кручения не будут пренебрежимо малы. Сдвиговые и продольные напряжения считались в критических точках сечения A, B, C в соответствии с рисунком 4.2. Полученные значения напряжений сравнивались с трехмерным конечно-элементным расчётом, полученным на сетке высокой степени подробности.

На основе значений напряжений в таблице 4.3 для прямоугольных сечений можно сделать вывод, что для изотропного сечения (П1), величины продольных напряжений соразмерны по своим значениям величинам сдвиговых напряжений. Однако для ортотропного (П2) и композитного слоистого (П4) сечений, величины продольных напряжений становятся на порядок выше сдвиговых. Таким образом продольные напряжения становятся определяющими в общей картине НДС и их необходимо уметь учитывать. Даже для изотропных сечений модель чистого кручения (SV) значительно недооценивает сдвиговые напряжения (до 420%). Вариант задания краевых условий RWBT 1 приводит к переоценке продольных напряжений и некорректной оценке сдвиговых напряжений (>70%) вблизи торцов. В свою очередь варианты RWBT 2, RWBT avg позволяют точнее определять как продольные (в пределах 20%), так и сдвиговые (в пределах 25%) напряжения.

Таблица 4.3. Напряжения в характерных точках прямоугольных сечений при $\varepsilon = 1/10, b = 5$ в сечении $z = \varepsilon$

Тип сечения	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	3D КЭ
	σ_{zz} в точке A				
П1	0.615 (2%)	0.517 (14%)	0.562 (7%)	-	**0.604**
П2	3.874 (10%)	3.254 (8%)	3.537 (<1%)	-	**3.524**
П4	5.921 (29%)	4.054 (12%)	4.813 (4%)	-	**4.607**
	σ_{xz} в точке B				
П1	0.382 (2%)	0.431 (11%)	0.409 (5%)	0.686 (76%)	**0.389**
П2	0.042 (68%)	0.145 (10%)	0.098 (25%)	0.686 (420%)	**0.132**
П4	0.048 (79%)	0.266 (16%)	0.178 (22%)	0.74 (223%)	**0.229**
	σ_{yz} в точке C				
П1	0.425 (5%)	0.439 (2%)	0.432 (4%)	0.510 (14%)	**0.448**
П2	0.336 (2%)	0.364 (7%)	0.351 (3%)	0.510 (50%)	**0.341**
П4	0.262 (8%)	0.291 (2%)	0.279 (2%)	0.35 (23%)	**0.285**

4.2 Стеснённое кручение однородных и композитных стержней замкнутого сечения

Для исследования стесненного кручения стержней замкнутого поперечного сечения рассмотрим в качестве типовой конструкции слоистый стержень коробчатого сечения, Схема нагружения стержня представлена на рисунке 4.10.

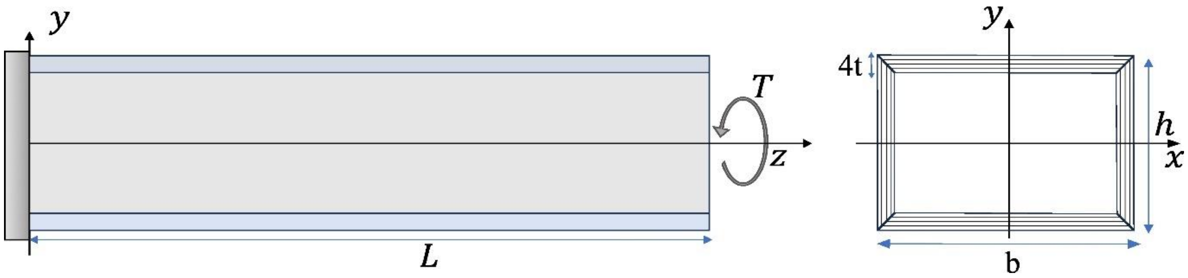


Рисунок 4.10. Схема кручения и геометрические характеристики коробчатого слоистого стержня

Для исследования задачи кручения рассмотрим две модели GN-BESVBT (чистое кручение Сен-Венана) и GN-RWBT (с учётом стесненного кручения). Так как поперечное сечение обладает осями симметрии и кручение стержня не сопровождается его изгибом, то для стержней коробчатого сечения будут справедливы все те же соотношения (4.1)-(4.8), что и для стержней прямоугольного сечения.

Физико-механические и геометрические параметры для прямоугольных стержней. Рассмотрим коробчатые сечения со следующими параметрами (см. рисунок 4.11): $h = 1$ – высота и b – ширина сечения соответственно. Слоистое сечение состоит из четырех слоев одинаковой толщины, где t – толщина одного слоя. Для слоистого ортотропного сечения положим, что волокна слоёв уложены попеременно под углом $\alpha = 0$ и $\alpha = 90$ градусов относительно оси z. В случае, если угол $\alpha = 0$, волокна материала уложены вдоль оси z и материал является изотропным в плоскости сечения $x0y$. В случае, если угол $\alpha = 90$, волокна материала уложены вдоль контура. Рассмотрим случаи, когда толщина слоёв относительно небольшая $t = 0.01$ и более существенная $t = 0.04$. При этом рассмотрим несколько вариантов, когда сечение однородное изотропное, однородное ортотропное и слоистое ортотропное.

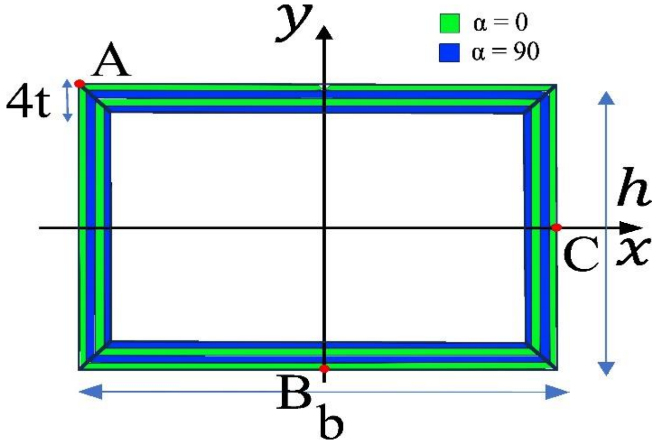


Рисунок 4.11. Структура и ориентация слоев композитного коробчатого сечения

Характеристики ортотропного материала с учётом обезразмеривания положим равными следующим значениям [140]: $E_1 = 25,\ E_2 = E_3 = 1,\ G_{12} = G_{13} = 0.5,\ G_{23} = 0.2,\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. Для изотропного случая характеристики материалов положим равными: $E_1 = E_2 = E_3 = 25, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$.

Введем обозначения для различных поперечных сечений (К – коробчатое): К1 – однородное изотропное $t = 0.01$; К2 – однородное изотропное $t = 0.04$; К3 – однородное ортотропное $t = 0.01$; К4 – однородное ортотропное $t = 0.04$; К5 – слоистое ортотропное $t = 0.01$; К6 – слоистое ортотропное $t = 0.04$.

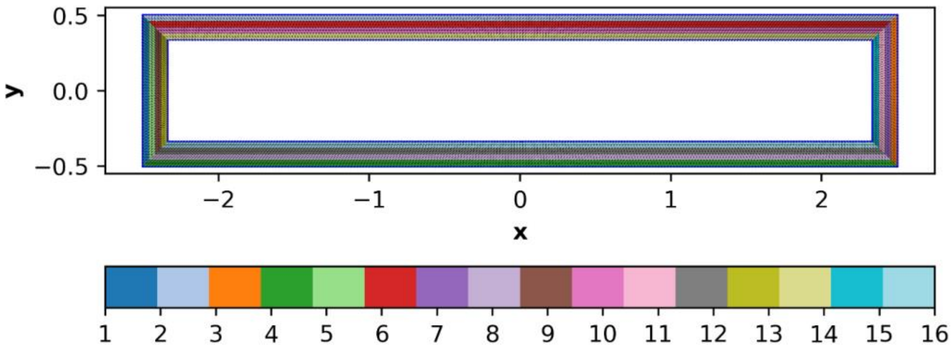


Рисунок 4.12. КЭ сетка для слоистого ортотропного коробчатого сечения К6, $b = 5,\ t = 0.04$

Про решение краевых задач в поперечном сечении стержня. Для получения всех необходимых жёсткостей и жесткостных функций необходимо решить первые три краевые задачи в сечении для θ-аппроксимации (2.98)-(2.102), (2.103)-(2.107). Краевые задачи решались численно методом конечных элементов. На рисунке 4.12 приведена КЭ сетка при $b = 5,\ t = 0.04$, использованная для решения, цветом показаны слои.

На рисунке 4.13 приведено численное решение для функции $\left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}$ для слоистого ортотропного коробчатого сечения при $b = 5,\ t = 0.04$, которая описывает депланацию поперечного сечения при кручении. На рисунке 4.14 показано решение для характеристической функции $\left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)}$, которая описывает распределение продольных напряжений по сечению стержня.

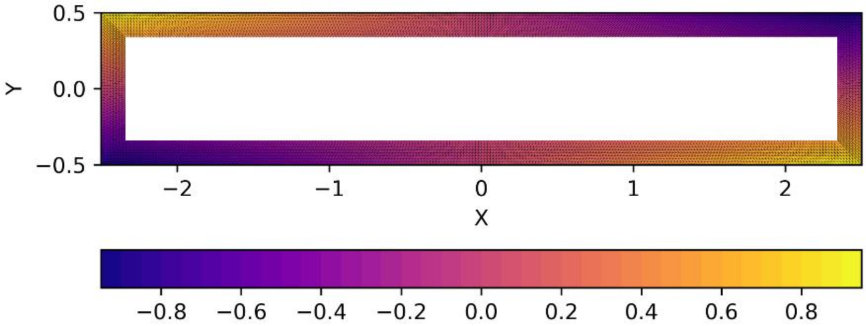


Рисунок 4.13.Жетскостная функция продольных перемещений $\left(U_z^{\theta_0}\right)_i^{(1)}$ для сечения К6

Анализ влияния стесненного кручения. Используя математические модели на основе нулевого (теория Сен-Венана) и первого (модель GN-RWBT) асимптотического приближений, исследуем степень влияния стеснённого кручения на общее НДС для коробчатых сечений с различной внутренней структурой. Для оценки влияния стесненного кручения в коробчатых стержнях справедливо неравенство (4.13).

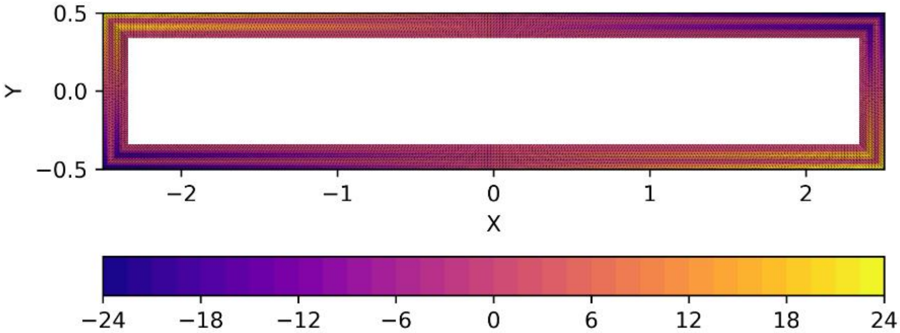


Рисунок 4.14. Характеристическая функция продольных напряжений $\left(\tau_{zz}^{\theta_0}\right)_i^{(2)}$ для сечения К6

В таблице 4.4 представлены коэффициенты (λ_{rw}/b) при различной структуре сечений и при различной ширине b. Цветом выделены случаи, где нарушается оценочное неравенство (4.13), т.е. нарушается принцип Сен-Венана. Аналогично стержням прямоугольного сечения можно сделать общий вывод, что для квадратных сечений ($b = 1$) влияние депланации невелико, однако с увеличением параметра b наблюдается значительный рост значений λ_{rw}, а вместе с ним и размера погранслоя при одновременном нарушении неравенства (4.13). Также можно заметить, что для ортотропных стержней, жесткость которых в поперечных направлениях ослаблена по сравнению с продольным направлением, влияние депланации значительно выше, чем для изотропных. Для слоистых композитных стержней видно, что влияние депланации в этом случае больше, чем для однородных изотропных стержней. Для коробчатых сечений варьирование толщины слоёв (К3, К4 и К5, К6) не привело к сильному изменению значений величин λ_{rw}.

Таблица 4.4. Коэффициент λ_{rw}/b для различных типов коробчатых сечений

Структура сечения	$b = 1$	$b = 2$	$b = 5$
	λ_{rw}/b		
К1	1.36e-2	0.126	0.202
К2	4.23e-2	0.138	0.210
К3	5.59e-2	0.522	0.827
К4	0.173	0.570	0.857
К5	4.35e-2	0.385	0.606
К6	0.130	0.442	0.654

Анализ углов закручивания. Исследуем точность разработанной модели GN-RWBT для стержней замкнутого профиля путём сравнения величин напряжений и углов закручивания сечения с трёхмерным КЭ расчётом. Разбиение тонкостенного слоистого коробчатого стержня на равномерные трехмерные КЭ приводит к резкому росту числа неизвестных и проведение качественного трёхмерного расчёта в этом случае было затруднено. Поэтому в случае тонкостенных коробчатых сечений с целью экономии вычислительных ресурсов сравнение было проведено с оболочечной КЭ моделью (SHELL).

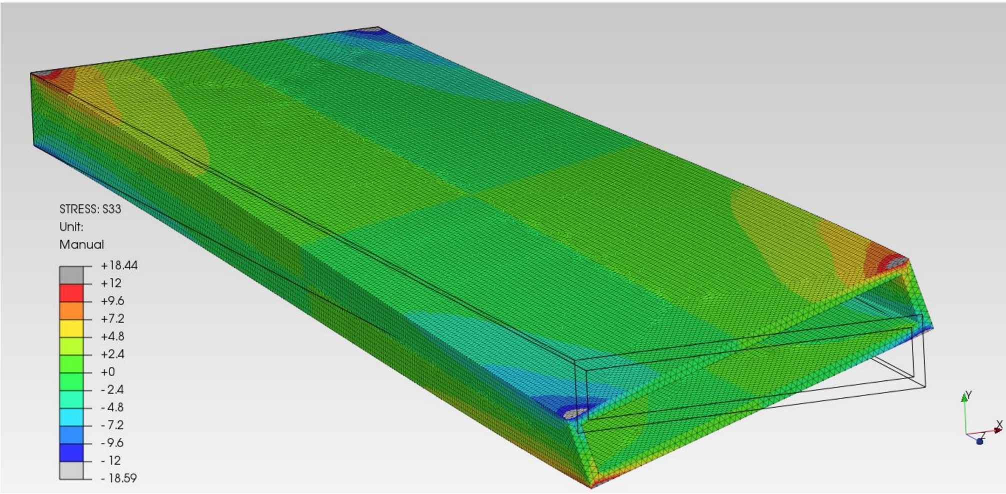


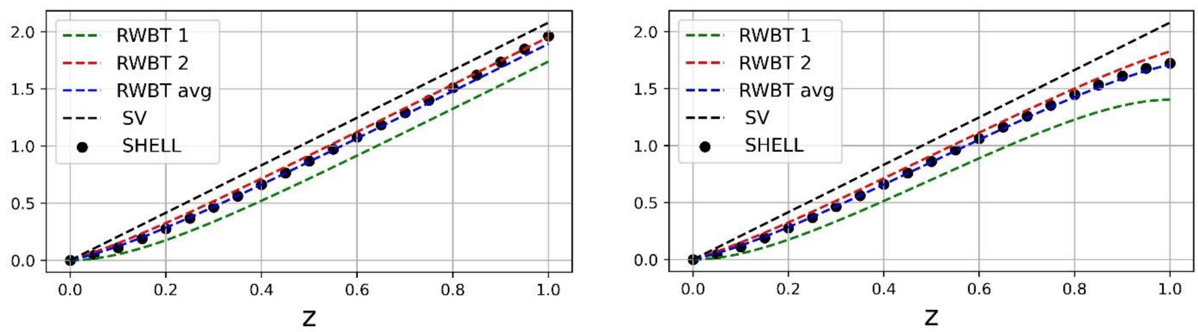
Рисунок 4.15. Распределение продольных напряжений в ортотропном коробчатом стержне при стеснённом кручении на основе трехмерного КЭ расчёта, $\varepsilon = 1/20, b = 5$

Углы закручивания считались на конце стержня, где был приложен закручивающий момент. Депланация стержня полагалась стеснённой с обеих сторон стержня. Краевые условия на торцах стержня задавались через жёсткую вставку, тем самым поперечные сечения на торцах рассматривались как абсолютно жёсткие тела. На рисунке 4.15 приведено распределение продольных напряжений в ортотропном коробчатом стержне, полученное с помощью трёхмерного КЭ расчёта в пакете CalculiX.

На рисунке 4.16 представлены эпюры углов закручивания, расчитанные для модели GN-RWBT тремя способами задания краевых условий (таблица 3.2), по теории чистого кручения Сен-Венана (SV) и для конечно-элементного решения трехмерной задачи (3D/Shell КЭ). На всех эпюрах на этих рисунках имеет место почти идеальное совпадение конечно-элементного решения с решением для модели GN-RWBT с краевым условием RWBT avg.

На рисунке 4.16а представлены эпюры для стержня К6 при $\varepsilon = 1/20$ и b=5. Для этого стержня видно, что размер пограничного слоя примерно равен 0.3, при $z > 0.3$ эпюра становится параллельной решению Сен-Венана. Таким образом основное решение – это решение уравнения Сен-Венана, для которого поменялись краевые условия в заделке, их изменение вызвано влиянием пограничного слоя. Вблизи правого торца пограничный слой отсутствует.

На рисунке 4.16б представлены результаты для того же стержня, но правый торец которого испытывает стесненную депланацию, вследствие этого вблизи него возникает другой пограничный слой такого же размера 0.3. Таким образом, основное (внутреннее) решение, которое параллельно решению уравнения Сен-Венана теперь располагается при $0.3 < z < 0.7$. Отклонение угла закручивания на правом торце стержня от решения Сен-Венана увеличилось вдвое вследствие действия второго пограничного слоя.



а) б)

Рисунок 4.16. Эпюры углов закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для а) стержня К6, $\varepsilon = 1/20$; б) стержня П4, $\varepsilon = 1/10$. Депланация стеснена только в заделке, b=5

В таблице 4.5 представлены результаты расчётов угла закручивания на правом торце стержня для коробчатых сечений при различных значениях малого параметра ε и вариантах структуры поперечных сечений. Углы закручивания считались на правом торце стержня, там, где был приложен закручивающий момент. Депланация стержня полагалась стеснённой с обоих торцов стержня. Краевые условия на торцах стержня задавались через жёсткую вставку, тем самым поперечные сечения на торцах рассматривались как абсолютно жёсткие тела. Углы закручивания для модели GN-RWBT посчитаны тремя способами задания краевых условий

RWBT 1, RWBT 2 и RWBT avg. Так же проведён расчет по теории чистого кручения Сен-Венана (SV). Ошибка в процентах высчитывалась относительно конечно-элементного решения трехмерной задачи (3D/Shell КЭ). Отметим еще раз, что для коробчатых сечений с тонкой стенкой с целью снижения вычислительных затрат для моделирования использовались оболочечные элементы (Shell). Величины углов закручивания приведены с множителем $\theta^{(1)} \times \varepsilon$, таким образом для кручения по Сен-Венану при всех значениях малого параметра ε значения в таблице не меняются. Цветом выделены результаты, отличающиеся от референтного конечно-элементного решения более чем на 10%.

Таблица 4.5. Величины углов закручивания на конце $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для коробчатых сечений, $b = 5$

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	3D/Shell КЭ
		К1 *(однородное изотропное* $t = 0.01$*)*			
1/20	0.292 (12%)	0.314 (5%)	0.309 (7%)	0.324 (2%)	**0.331** (Shell)
1/10	0.259 (17%)	0.304 (2%)	0.293 (6%)	0.324 (4%)	**0.312** (Shell)
1/5	0.195 (29%)	0.283 (3%)	0.262 (4%)	0.324 (18%)	**0.274** (Shell)
		К2 *(однородное изотропное* $t = 0.04$*)*			
1/20	0.093 (6%)	0.099 (<1%)	0.098 (<1%)	0.104 (5%)	**0.099** (3D)
1/10	0.082 (12%)	0.096 (2%)	0.092 (2%)	0.104 (10%)	**0.094** (3D)
1/5	0.061 (25%)	0.088 (9%)	0.081 (<1%)	0.104 (28%)	**0.081** (3D)
		К3 *(однородное ортотропное* $t = 0.01$*)*			
1/20	3.845 (25%)	5.650 (9%)	5.217 (<1%)	6.485 (25%)	**5.186** (Shell)
1/10	1.999 (55%)	5.066 (14%)	4.330 (2%)	6.485 (46%)	**4.446** (Shell)
1/5	0.689 (83%)	4.652 (18%)	3.700 (6%)	6.485 (64%)	**3.953** (Shell)
		К4 *(однородное ортотропное* $t = 0.04$*)*			
1/20	1.200 (24%)	1.751 (11%)	1.603 (2%)	2.071 (32%)	**1.572** (3D)
1/10	0.610 (52%)	1.534 (16%)	1.286 (<1%)	2.071 (62%)	**1.279** (3D)
1/5	0.207 (80%)	1.386 (33%)	1.069 (2%)	2.071 (98%)	**1.045** (3D)
		К5 *(слоистое ортотропное* $t = 0.01$*)*			
1/20	4.532 (18%)	5.869 (6%)	5.546 (<1%)	6.492 (17%)	**5.533** (Shell)
1/10	2.840 (40%)	5.330 (12%)	4.729 (<1%)	6.492 (37%)	**4.744** (Shell)
1/5	1.160 (72%)	4.796 (16%)	3.919 (5%)	6.492 (57%)	**4.127** (Shell)
		К6 *(слоистое ортотропное* $t = 0.04$*)*			
1/20	1.403 (19%)	1.826 (6%)	1.711 (<1%)	2.080 (20%)	**1.724** (Shell)
1/10	0.842 (42%)	1.616 (11%)	1.405 (3%)	2.080 (43%)	**1.452** (Shell)
1/5	0.329 (73%)	1.424 (18%)	1.126 (6%)	2.080 (73%)	**1.205** (Shell)

На основе полученных результатов можно сделать промежуточное заключение, что поведение стержней сплошного и коробчатых стержней при стесненном кручении имеет во многом схожий характер. Видно, что решение на основе чистого кручения (SV) может значительно переоценивать углы закручивания (более 10%), даже для изотропных стержней. При этом погрешность увеличивается с увеличением параметра ε. В свою очередь математическая модель GN-RWBT позволяет намного точнее определить угол закручивания и учесть влияние стеснённого кручения. В целом можно сказать, что усреднённый вариант задания краевых условий RWBT avg даёт более точные и промежуточные значения (точность в пределах 10%) между вариантами RWBT 1 и RWBT 2.

Анализ напряжений. Исследуем характер поведения напряжений в рамках теории Сен-Венана (SV) и модели GN-RWBT для рассмотренных выше стержней со стесненной депланацией только в заделке. Полученные значения напряжений сравнивались с трехмерным конечно-элементным расчётом, полученным на сетке высокой степени подробности.

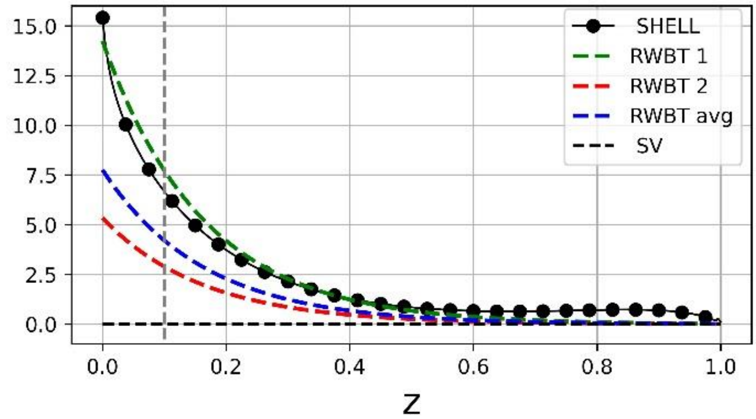
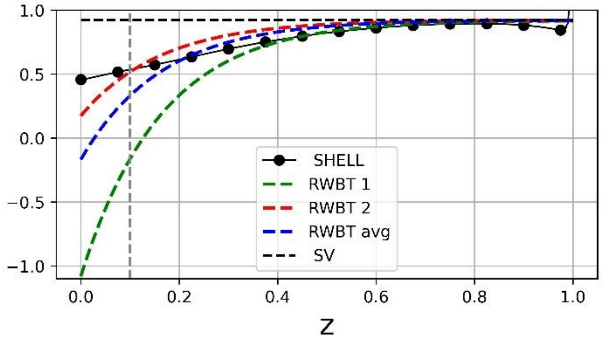


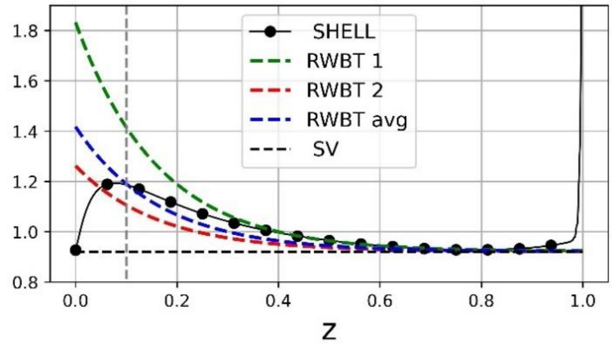
Рисунок 4.17. Эпюра продольных напряжений σ_{zz} в точке А для стержня К6, $\varepsilon = 1/20$; Депланация стеснена в заделке

На рисунке 4.17 представлена эпюра напряжений в т. А (см. рисунок 4.11) для стержня с сечением К6. Видно, что для нахождения продольных напряжений лучше всего работает вариант задания краевых условий RWBT 1. Вдали от заделки величины напряжений для всех вариантов модели GN-RWBT дают хорошее совпадение с конечно-элементным решением (SHELL).

На рисунке 4.18 представлены эпюры касательных напряжений в т. В и т. С (см. рисунок 4.11) для коробчатого стержня с сечением К6. Для касательных напряжений вблизи обоих торцов для обоих стержней, также как и для продольных нормальных напряжений, имеют место быть зоны, в которых поведение напряжений, вычисленных по модели GN-RWBT и с помощью трёхмерного конечно-элементного расчёта, существенно расходятся.



а)



б)

Рисунок 4.18. Эпюра сдвиговых напряжений для коробчатого стержня (К6), $\varepsilon = 1/20$ для а) σ_{xz} в точке B; б) σ_{yz} в точке C. Депланация стеснена в заделке

Таблица 4.6. Напряжения в характерных точках коробчатых сечений при $\varepsilon = 1/20, b = 5$ в сечении $z = 2\varepsilon$

Тип сечения	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	Shell КЭ
	σ_{zz} в точке A (-b/2, h/2)				
К1	1.129 (34%)	0.357 (79%)	0.542 (68%)	-	**1.708**
К2	0.392 (40%)	0.144 (78%)	0.210 (67%)	-	**0.649**
К3	20.073 (25%)	6.347 (60%)	9.644 (40%)	-	**16.01**
К4	6.585 (4%)	2.418 (62%)	3.537 (44%)	-	**6.326**
К5	23.498 (5%)	7.474 (67%)	11.340 (50%)	-	**22.489**
К6	7.650 (3%)	2.863 (61%)	4.167 (44%)	-	**7.389**
	σ_{xz} в точке B (0, -h/2)				
К1	1.762 (30%)	2.440 (2%)	2.277 (9%)	2.753 (10%)	**2.504**
К2	0.621 (19%)	0.812 (6%)	0.761 (<1%)	0.924 (20%)	**0.767**
К3	-1.733 (-)	1.335 (19%)	0.597 (64%)	2.753 (67%)	**1.65**
К4	-0.382 (-)	0.444 (15%)	0.222 (58%)	0.924 (76%)	**0.523**
К5	-0.944 (-)	1.577 (15%)	0.969 (47%)	2.753 (49%)	**1.845**
К6	-0.169 (-)	0.515 (3%)	0.329 (38%)	0.924 (75%)	**0.529**
	σ_{yz} в точке C (b/2, 0)				
К1	3.348 (14%)	2.941 (<1%)	3.039 (4%)	2.753 (6%)	**2.933**
К2	1.068 (2%)	0.976 (7%)	1.000 (4%)	0.923 (11%)	**1.044**
К3	5.447 (44%)	3.605 (5%)	4.048 (7%)	2.753 (27%)	**3.79**
К4	1.549 (32%)	1.153 (5%)	1.259 (3%)	0.923 (24%)	**1.216**
К5	4.950 (40%)	3.452 (3%)	3.813 (8%)	2.753 (22%)	**3.546**
К6	1.418 (17%)	1.107 (8%)	1.192 (1%)	0.921 (24%)	**1.208**

Исследуем точность вычисления напряжений в рамках теории Сен-Венана (SV) и модели GN-RWBT. Для этого зафиксируем сечение, находящееся вблизи торца на расстоянии одной десятой от всей длины стержня. Параметр ε положим равным $1/20$. Ширину сечения положим равной $b = 5$, тем самым эффекты от стеснённого кручения не будут пренебрежимо малы. Сдвиговые и продольные напряжения считались в критических точках сечения A, B, C в соответствии с рисунком 4.11. Полученные значения напряжений сравнивались с трехмерным конечно-элементным расчётом, полученным на сетке высокой степени подробности.

В таблице 4.6 приведены значения напряжений для коробчатых сечений в критических точках A, B, C в сечении $z = 2\varepsilon$. Для ортотропных и ортотропных слоистых сечений определяющими напряжениями являются продольные напряжения σ_{zz}. Точность получаемых результатов колеблется в зависимости от структуры сечения и величины малого параметра. Вариант задания краевых условий RWBT 1 позволяет точнее определять продольные напряжения, однако приводит к нефизичным результатам по сдвиговым напряжениям, так как для сечений К3-К6 величины сдвиговых напряжений меняют знак относительно численного конечно-элементного решения (прочерк в таблице). В свою очередь варианты RWBT 2 и RWBT avg занижают значения продольных напряжений, но при этом точнее восстанавливают сдвиговые компоненты. При этом вариант RWBT avg даёт промежуточные значения между вариантами RWBT 1 и RWBT 2.

4.3 Стеснённое кручение однородных и композитных стержней открытого сечения

Для исследования стесненного кручения стержней открытого профиля рассмотрим в качестве типовых конструкций слоистые стержни двутавровых, корытных и уголковых поперечных сечений. Схема нагружения на примере двутаврового стержня представлена на рисунке 4.19. Для исследования задачи кручения рассмотрим две модели GN-BESVBT (чистое кручение Сен-Венана) и GN-RWBT (с учётом стесненного кручения).

Математическая модель GN-BESVBT. При кручении стержней открытого профиля в рамках классической теории Сен-Венана кручение стержня не будет сопровождаться его изгибом, поэтому справедливы все те же соотношения, что и для сплошных и замкнутых сечений. Разрешающая система дифференциальных уравнений (3.6) для модели GN-BESVBT может быть сведена к одному дифференциальному уравнению кручения

$$G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(0)}\varepsilon^2 = 0. \tag{4.14}$$

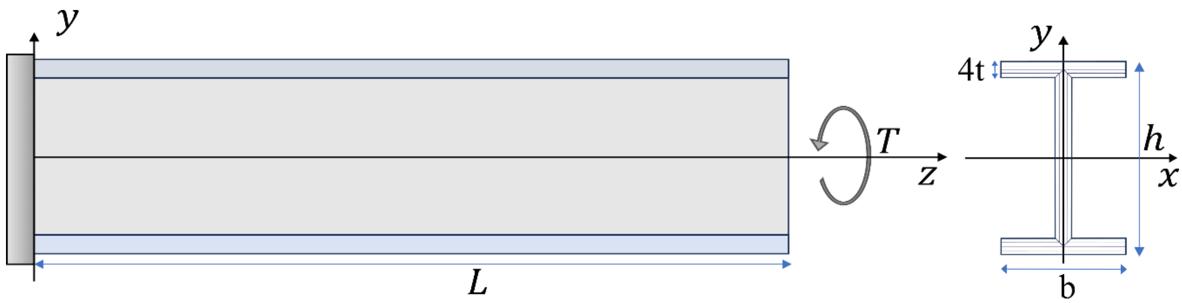


Рисунок 4.19. Схема кручения и геометрические характеристики двутаврового слоистого стержня

Уравнение (4.1) полностью совпадает с уравнением Сен-Венана, причем крутильная жёсткость $G_z^{\theta,2}$ вычисляется ровно также как и у Сен-Венана. Крутящий момент M_z выражается через угол закручивания $\theta^{(0)}$ следующим образом

$$M_z = G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon. \tag{4.15}$$

Компоненты вектора перемещений могут быть найдены по формулам

$$\begin{gathered}(u_x)_i^{(0)} = -y\,\theta^{(0)}, \qquad (u_y)_i^{(0)} = x\,\theta^{(0)},\\ (u_z)_i^{(0)} = \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon.\end{gathered} \tag{4.16}$$

Сдвиговые компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом

$$(\sigma_{\alpha z})_i^{(1)} = \left(\tau_{\alpha z}^\theta\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(0)}\varepsilon, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{4.17}$$

Нормальные компоненты тензора напряжений в поперечном сечении тождественно равны нулю.

Математическая модель GN-RWBT. При кручении двутаврового стержня концевым закручивающим моментом, стержень не будет испытывать изгибных деформаций и поэтому при его описании в рамках математической модели GN-RWBT справедливы те же соотношения, что и в разделах 4.1, 4.2. В случае несимметричных поперечных сечений, таких как корытное и уголковое и ориентированных так как показано на рисунке 4.20, кручение стержня будет приводить к его изгибу вдоль оси y. Следовательно, разрешающая система будет состоять из двух уравнений изгиба и кручения и основные соотношения изменятся.

Деформирование двутаврового стержня. Так как при кручении двутавровый стержень не изгибается, то разрешающая система дифференциальных уравнений (3.11) для модели GN-RWBT может быть сведена к одному дифференциальному уравнению кручения

$$G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + G_z^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 = 0. \tag{4.18}$$

При этом справедливы выражения для крутящего момента M_z (4.6), компонент вектора перемещений (4.7) и тензора напряжений (4.8). В соответствии с разделом 3.3 два дополнительных краевых условия вводятся через величины S_z , D_z по формулам (3.16), (3.18).

Деформирование корытного и уголкового стержней. В случае кручения стержней корытного и уголкового сечений, кручение стержня будет сопровождаться его изгибом вдоль оси y независимо от того, приложена ли к стержню какая-либо поперечная нагрузка. Общая система уравнений (3.11) сведётся к системе из двух уравнений (изгиба вдоль оси y и кручения вокруг оси z)

$$\begin{gathered} B_y^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 + B_y^{v_y,4}\partial_z^4 {v_y}^{(1)}\varepsilon^4 = 0, \\ G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + G_z^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 + G_z^{v_y,4}\partial_z^4 {v_y}^{(1)}\varepsilon^4 = 0. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Крутящий момент M_z, изгибающий момент M_y и поперечное усилие Q_y выражаются через угол закручивания $\theta^{(1)}$ и функцию макроперемещения-прогиба ${v_y}^{(1)}$ следующим образом

$$\begin{gathered} M_z = {M_z}^{\theta} + {M_z}^{v_y} = G_z^{\theta,2}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + G_z^{\theta,4}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3 + G_z^{v_y,4}\partial_z^3 {v_y}^{(1)}\varepsilon^3, \\ M_y = {M_y}^{\theta} + {M_y}^{v_y} = -I_y^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 - I_y^{v_y,2}\partial_z^2 {v_y}^{(1)}\varepsilon^2, \\ Q_y = {Q_y}^{\theta} + {Q_y}^{v_y} = -B_y^{\theta,4}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3 - B_y^{v_y,4}\partial_z^3 {v_y}^{(1)}\varepsilon^3. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Отметим важный факт, что все выражения для внутренних усилий в этом случае состоят из двух компонент: от v_y-аппрокисмации и от θ-аппроксимации. Таким образом равенство нулю суммарного изгибающего момента не означает равенство нулю его составляющих, что в итоге приводит к изгибу стержня.

Угол наклона сечения φ_y выражается по формуле

$$\varphi_y = \Phi_y^{\theta,1}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + \Phi_y^{\theta,3}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3 - \partial_z^1 {v_y}^{(1)}\varepsilon + \Phi_y^{v_y,1}\partial_z^3 {v_y}^{(1)}\varepsilon^3. \tag{4.21}$$

Компоненты вектора перемещений определяются следующим образом

$$\begin{gathered} (u_x)_i^{(1)} = -y\,\theta^{(1)}, \qquad (u_y)_i^{(1)} = {v_y}^{(1)} + x\theta^{(1)}, \\ (u_z)_i^{(1)} = \left(U_z^{\theta}\right)_i^{(1)}\partial_z^1\theta^{(1)}\varepsilon + \left(U_z^{\theta}\right)_i^{(3)}\partial_z^3\theta^{(1)}\varepsilon^3 - y\,\partial_z^1 {v_y}^{(1)}\varepsilon + \left(U_z^{v_y}\right)_i^{(3)}\partial_z^3 {v_y}^{(1)}\varepsilon^3. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Нормальные и сдвиговые компоненты тензора напряжений могут быть найдены по формулам

$$
\begin{gathered}
(\sigma_{zz})_i^{(1)} = \left(\tau_{zz}^{\theta}\right)_i^{(2)} \partial_z^2 \theta^{(1)} \varepsilon^2 + \left(\tau_{zz}^{v_y}\right)_i^{(2)} \partial_z^2 v_y{}^{(1)} \varepsilon^2, \\
(\sigma_{\alpha z})_i^{(1)} = \left(\tau_{\alpha z}^{\theta}\right)_i^{(1)} \partial_z^1 \theta^{(1)} \varepsilon + \left(\tau_{\alpha z}^{\theta}\right)_i^{(3)} \partial_z^3 \theta^{(1)} \varepsilon^3 + \left(\tau_{\alpha z}^{v_y}\right)_i^{(3)} \partial_z^3 v_y{}^{(1)} \varepsilon^3, \qquad \alpha \in \{x, y\}.
\end{gathered}
\tag{4.23}
$$

Для решения системы уравнений восьмого порядка (4.5) требуется восемь краевых условий на торцах. Из принципа Сен-Венана следует, что на торцах стержня могут быть поставлены шесть краевых условия, по три с каждого торца через функции внутренних усилий M_z, M_y, Q_y, либо через функции макродеформирования $\theta^{(1)}, v_y{}^{(1)}, \varphi_y$. В соответствии с разделом 3.3 два дополнительных краевых условия вводятся через величины S_z , D_z по формулам (3.16), (3.18).

Физико-механические и геометрические параметры для стержней открытого профиля. Рассмотрим композитные сечения двутаврового, швеллерного и уголкового типов, поперечные сечения которых схематично показаны на рисунке 4.20. Положим следующие величины равными

$$
h = 1, \qquad b = 0.5, \qquad t = (0.005, 0.01, 0.04),
$$

где t – толщина одного слоя, варьируемая в пределах от 0.005 до 0.01, h – высота сечения, b – ширина сечения. Рассмотрим случаи, когда сечения однородное изотропное, однородное ортотропное или слоистое ортотропное со схемой расположения и ориентации слоёв, показанной на рисунке 4.20.

Слоистые ортотропные сечения состоят из четырех слоев одинаковой толщины, где t – толщина одного слоя. Для слоистого ортотропного сечения положим, что волокна слоёв уложены попеременно под углом $\alpha = 0$ и $\alpha = 90$ градусов относительно оси z. В случае, если угол $\alpha = 0$, волокна материала уложены вдоль оси z и материал является изотропным в плоскости сечения $x0y$. В случае, если угол $\alpha = 90$, волокна материала уложены вдоль контура.

Характеристики ортотропного материала с учётом обезразмеривания положим равными следующим значениям [140]: $E_1 = 25$, $E_2 = E_3 = 1$, $G_{12} = G_{13} = 0.5$, $G_{23} = 0.2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. Для изотропного случая характеристики материалов положим равными: $E_1 = E_2 = E_3 = 25$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$.

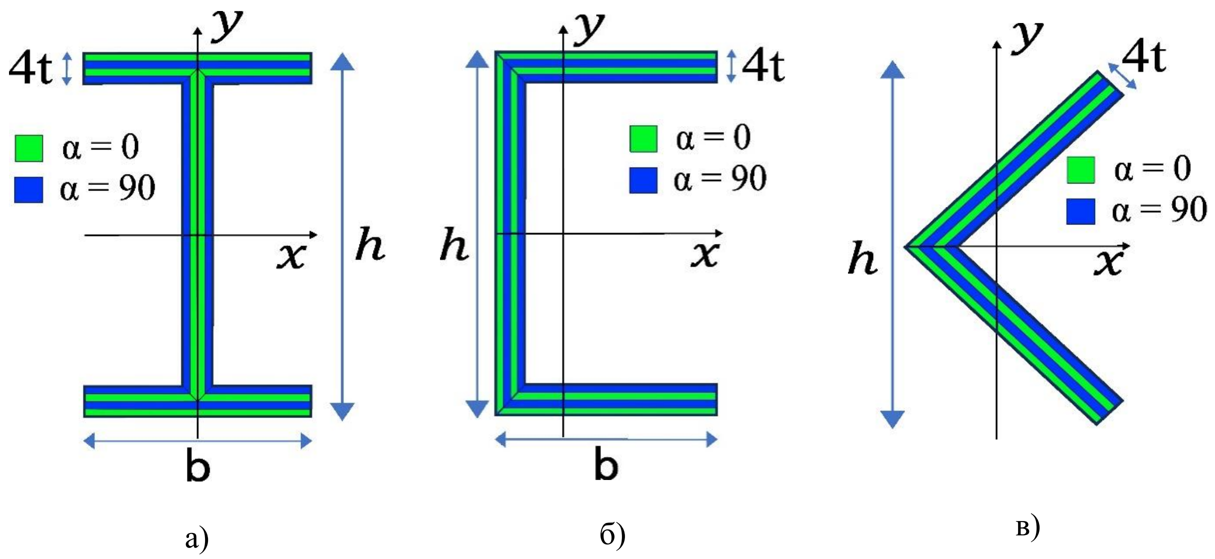


Рисунок 4.20. Структура и ориентация слоев двутаврового (а), корытного (б) и уголкового (в) слоистых сечений

Введем обозначения для различных типов поперечных сечений (I – двутавровое, C – корытное, L - уголковое): однородный изотропный (I1), однородный ортотропный (I2) и слоистый ортотропный (I3) двутавры; однородный изотропный (C1), однородный ортотропный (C2) и слоистый ортотропный (C3) швеллеры; однородный изотропный (L1), однородный ортотропный (L2) и слоистый ортотропный (L3) уголки.

Анализ влияния стеснённого кручения. Используя математические модели на основе нулевого (теория Сен-Венана) и первого (модель GN-RWBT) асимптотического приближений, исследуем степень влияния стеснённого кручения на общее НДС для открытых сечений с различной внутренней структурой.

Для корытных и уголковых сечений, заметим, что система (4.19) из двух уравнений может быть также сведена к одному уравнению кручения, для этого выразим четвертую производную от прогиба из первого уравнения и подставим во второе

$$G_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + \widehat{G_z^{\theta,4}}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 = 0, \qquad \widehat{G_z^{\theta,4}} = G_z^{\theta,4} - G_z^{v_y,4}\frac{B_y^{\theta,4}}{B_y^{v_y,4}}. \tag{4.24}$$

Рассмотрим подробнее дифференциальные уравнения кручения (4.18) и (4.24). Для этого приведём их к общему виду

$$\partial_z^2\theta^{(1)} - \lambda_{rw}^2\varepsilon^2\partial_z^4\theta^{(1)} = 0, \qquad \lambda_{rw} = \pm\sqrt{-\frac{\widehat{G_z^{\theta,4}}}{G_z^{\theta,2}}}. \tag{4.25}$$

Отметим, что для двутавровых сечений $\widehat{G_z^{\theta,4}} = G_z^{\theta,4}$.Общее решение уравнения (4.25) будет иметь вид

$$\theta^{(1)} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 z + \mathrm{C}_3 e^{-z/\lambda_{rw}\varepsilon} + \mathrm{C}_2 e^{(z-1)/\lambda_{rw}\varepsilon}, \qquad z \in [0,1]. \tag{4.26}$$

Первые два слагаемых общего решения (4.26) для уравнения (4.25) являются одновременно общим решением уравнения (4.18), его два последних слагаемых являются двумя пограничными слоями на левом и правом торцах соответственно. Повторяя рассуждения из раздела 4.1, будем считать, что влиянием пограничного слоя на основное решение можно пренебречь, если выполнено неравенство

$$\lambda_{rw} \leq 0.333. \tag{4.27}$$

В таблице 4.7 представлены коэффициенты λ_{rw} при различной структуре сечений и при различной толщине слоя t. Цветом выделены случаи, где нарушается оценочное неравенство (4.27), т.е. влияние стеснения депланации на торцах на общее решение не является пренебрежимо малым. Для двутавровых и корытных сечений коэффициенты λ_{rw} на порядок выше, чем для стержней прямоугольных и коробчатых сечений. Этот наблюдение хорошо согласуется с общеизвестным фактом, что стесненное кручение наиболее сильно проявляется для стержней открытого профиля. При этом коэффициенты λ_{rw} уменьшаются с ростом толщины стенок. Для стержней уголковых сечений величины коэффициентов λ_{rw} на порядок меньше, таким образом для уголковых сечений эффекты от стесненного кручения будут значительно меньше и для изотропных сечений могут считаться пренебрежимо малыми. При этом для уголковых сечений практически не наблюдается зависимость коэффициента λ_{rw} от толщины стенки. Однако для ортотропных и слоистых уголковых сечений наблюдется существенный рост коэффициентов λ_{rw}. Аналогичный вывод можно сделать и для корытного и двутавровых сечений, для ортотропных и слоистых сечений величины пограничных слоев от стеснения депланации значительно увеличиваются.

Анализ углов закручивания. Исследуем точность разработанной модели GN-RWBT для стержней открытого профиля путём сравнения величин углов закручивания сечения с трёхмерным КЭ расчётом. С целью экономии вычислительных ресурсов сравнение было проведено с оболочечной КЭ моделью (SHELL). Углы закручивания считались на конце стержня, где был приложен закручивающий момент. Депланация стержня полагалась стеснённой в заделке стержня.

Таблица 4.7. Коэффициент λ_{rw} для различных типов открытых сечений

Структура сечения	$t = 0.005$	$t = 0.01$	$t = 0.04$
	λ_{rw}		
I1	6.896	3.40	0.76
I2	30.84	15.21	3.40
I3	22.21	10.93	2.45
C1	8.89	4.29	0.88
C2	39.78	19.17	3.95
C3	28.79	13.92	2.92
L1	0.32	0.31	0.28
L2	1.43	1.41	1.24

На рисунке 4.21 приведена эпюра угла закручивания для композитного двутаврового стержня I3 при $\varepsilon = 1/10$, $t = 0.01$. Видно, что для такого типа сечений влияние стесненного кручения становится очень большим и решение на основе теории чистого кручения Сен-Венана в несколько раз завышает угол закручивания на торце. В свою очередь модель GN-RWBT дает хорошее совпадение с конечно-элементным расчетом пространственной задачи (SHELL) для всех вариантов краевых условий.

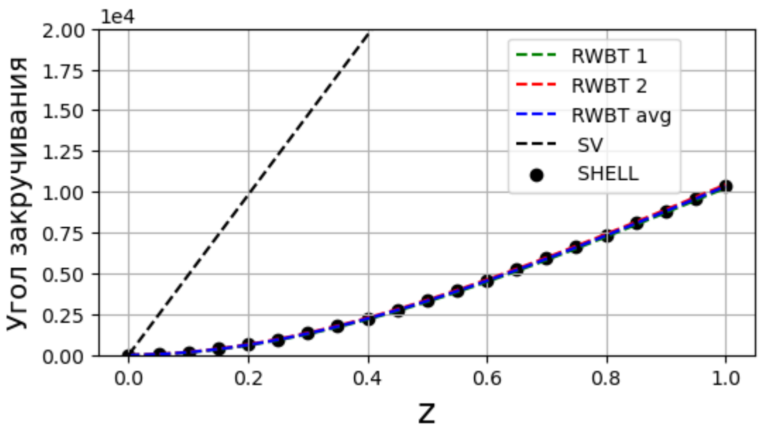
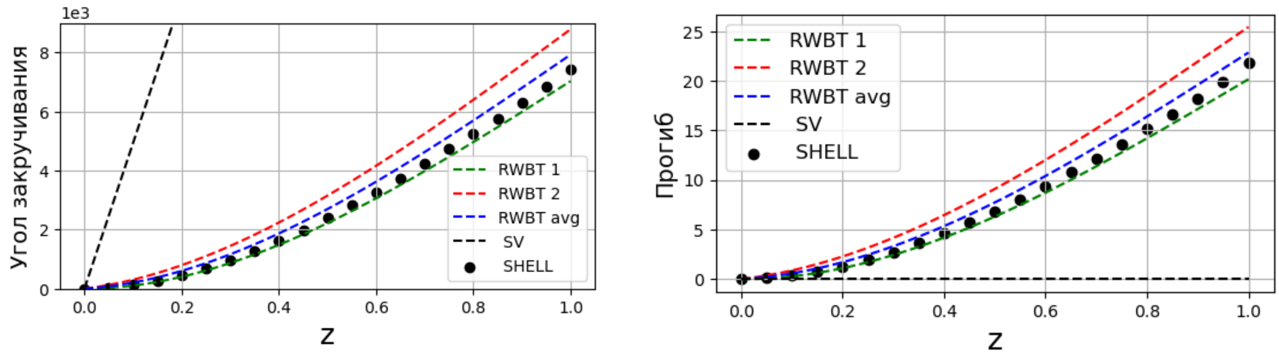


Рисунок 4.21. Эпюра угла закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для композитного стержня I3, $\varepsilon = 1/10$. Депланация стеснена в заделке; $t = 0.01$

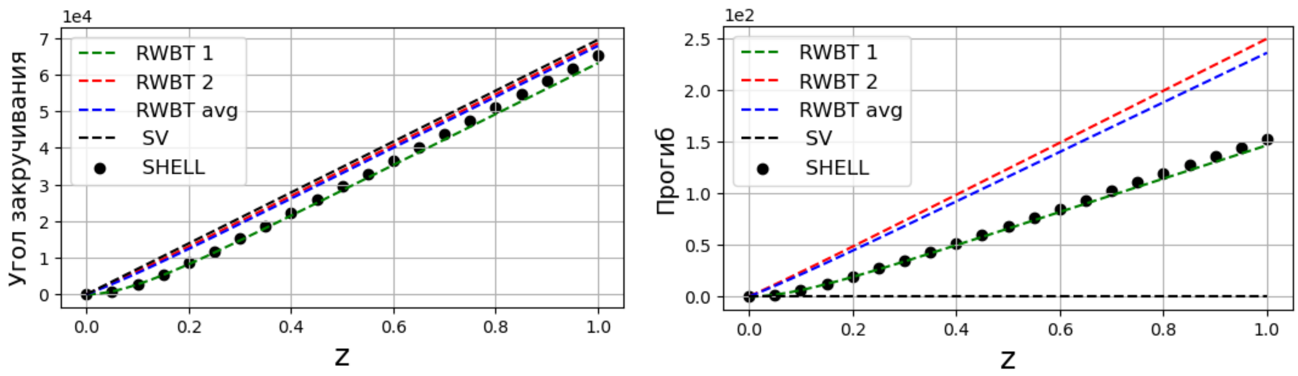
На рисунке 4.22 приведены эпюры угла закручивания и прогиба для композитного швеллера C3 при $\varepsilon = 1/10$, $t = 0.01$. Видно, что для такого типа сечений влияние стесненного кручения велико, при этом кручение стержня сопровождается его изгибом. Решение на основе чистого кручения Сен-Венана (SV) завышает в несколько раз значения угла закручивания и не учитывает изгиб стержня. Модель GN-RWBT дает хорошее совпадение относительно конечно-элементного расчета (SHELL) как по углу закручивания, так и по прогибу. Из трех типов задания краевых условий лучше всего работают варианты RWBT 1 и RWBT avg, в то время как вариант RWBT 2 завышает значения углов закручивания и прогибов на торце в пределах 20%.



а) б)

Рисунок 4.22. Эпюры а) угла закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ и б) прогиба ${v_y}^{(1)} \times \varepsilon^3$ для композитного стержня C3, $\varepsilon = 1/10$; Депланация стеснена только в заделке, $t = 0.01$

На рисунке 4.23 приведены эпюры угла закручивания и прогиба для композитного уголка L3 при $\varepsilon = 1/10\,, t = 0.01$. Видно, что для такого типа сечений влияние стесненного кручения намного меньше, чем для двутавра и швеллера. Однако при этом кручение стержня все равно сопровождается его изгибом. Решение на основе чистого кручения Сен-Венана (SV) дает близкие значения угла закручивания, но не учитывает изгиб стержня. Модель GN-RWBT дает хорошее совпадение относительно конечно-элементного расчета (SHELL) как по углу закручивания, так и по прогибу. Из трех типов задания краевых условий лучше всего работает вариант RWBT, в то время как варианты RWBT avg и RWBT 2 завышают значения угла закручивания на торце в пределах 5% и значительно завышают значения прогиба (до 50%) на торце.



а) б)

Рисунок 4.23. Эпюры а) угла закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ и б) прогиба ${v_y}^{(1)} \times \varepsilon^3$ для композитного стержня L3, $\varepsilon = 1/10$; Депланация стеснена только в заделке, $t = 0.01$

Таблица 4.8. Величины углов закручивания на конце $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ для $t = 0.01$

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	Shell КЭ
I1 *однородное изотропное сечение*					
$^1/_{20}$	2005.04 (5%)	2007.19 (5%)	2006.12 (5%)	2415.73 (14%)	**2115.4**
$^1/_{10}$	1598.63 (4%)	1602.92 (4%)	1600.78 (4%)	2415.73 (45%)	**1666.3**
$^1/_5$	937.53 (<1%)	945.28 (<1%)	941.42 (<1%)	2415.73 (156%)	**943.52**
I2 *однородное ортотропное сечение*					
$^1/_{20}$	16513.92 (<1%)	16680.52 (<1%)	16597.43 (<1%)	48279.76 (190%)	**16599**
$^1/_{10}$	5933.76 (1%)	6155.62 (2%)	6044.98 (<1%)	48279.76 (700%)	**6023.2**
$^1/_5$	1668.34 (12%)	1912.69 (<1%)	1790.84 (6%)	48279.76 (2400%)	**1914.2**
I3 *слоистое ортотропное сечение*					
$^1/_{20}$	23542.32 (1%)	23676.22 (<1%)	23609.45 (<1%)	48984.57 (105%)	**23785**
$^1/_{10}$	10234.25 (1%)	10438.14 (<1%)	10336.46 (<1%)	48984.57 (370%)	**10349**
$^1/_5$	3149.58 (6%)	3390.86 (1%)	3270.54 (2%)	48984.57 (1300%)	**3346.4**
C1 *однородное изотропное сечение*					
$^1/_{20}$	1925.91 (6%)	1947.97 (5%)	1937.18 (6%)	2451.01 (19%)	**2053.8**
$^1/_{10}$	1420.05 (5%)	1463.35 (2%)	1442.16 (3%)	2451.01 (64%)	**1490.3**
$^1/_5$	721.64 (2%)	794.28 (8%)	758.74 (3%)	2451.01 (230%)	**736.89**
C2 *однородное ортотропное сечение*					
$^1/_{20}$	12413.45 (2%)	13951.18 (10%)	13198.81 (4%)	48984.57 (285%)	**12722**
$^1/_{10}$	4009.95 (8%)	5899.52 (35%)	4975.01 (14%)	48984.57 (1000%)	**4371.0**
$^1/_5$	1082.68 (37%)	3096.34 (81%)	2111.13 (23%)	48984.57 (2700%)	**1714.5**
C3 *слоистое ортотропное сечение*					
$^1/_{20}$	18669.30 (4%)	19942.59 (3%)	19319.43 (<1%)	49344.75 (150%)	**19385**
$^1/_{10}$	7032.97 (5%)	8788.34 (18%)	7929.26 (7%)	49344.75 (560%)	**7433.1**
$^1/_5$	2017.57 (16%)	3982.22 (66%)	3020.77 (26%)	49344.75 (1950%)	**2401.2**
L1 *однородное изотропное сечение*					
$^1/_{20}$	3397.62 (3%)	3442.29 (2%)	3435.57 (2%)	3452.10 (1%)	**3496.0**
$^1/_{10}$	3343.33 (3%)	3432.67 (<1%)	3419.23 (<1%)	3452.10 (<1%)	**3436.6**
$^1/_5$	3234.74 (3%)	3413.44 (3%)	3386.55 (3%)	3452.10 (4%)	**3318.0**
L2 *однородное ортотропное сечение*					
$^1/_{20}$	64182.20 (3%)	68178.06 (3%)	67576.81 (3%)	69037.84 (5%)	**66012**

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	Shell КЭ
$1/_{10}$	59326.26 (3%)	67317.98 (11%)	66115.47 (9%)	69037.84 (13%)	**60914**
$1/_{5}$	49627.09 (2%)	65574.26 (30%)	63174.83 (25%)	69037.84 (36%)	**50730**
L3 *слоистое ортотропное сечение*					
$1/_{20}$	66356.89 (1%)	69076.40 (3%)	68716.14 (3%)	69564.87 (4%)	**66801**
$1/_{10}$	63147.27 (3%)	68586.28 (5%)	67865.76 (4%)	69564.87 (7%)	**65386**
$1/_{5}$	56728.53 (3%)	67606.12 (15%)	66165.13 (13%)	69564.87 (19%)	**58559**

В таблицах Таблица 4.8 и 4.9 приведены величины углов закручивания и прогибов на конце для стержней двутавровых, корытных и уголковых профилей при различных значениях малого параметра ε. Цветом выделены результаты, отличающиеся от референтного конечно-элементного решения более чем на 10%. Согласно таблице Таблица 4.8 можно сделать вывод, что влияние стесненного кручения в процентном отношении увеличивается для коротких стержней. При этом первый вариант задания краевых условий RWBT 1 может приводить к занижению углов закручивания. Разница в результатах для различных вариантов задания краевых условий уменьшается вместе с уменьшением величины малого параметра ε, то есть становится незначительной для длинных стержней. В случае коротких стержней варианты задания краевых условий RWBT 2 и RWBT avg в среднем приводят к более точной оценке углов закручивания и прогибов, чем классический вариант RWBT 1 для стержней двутаврового и корытного сечений. В случае уголкового поперечного сечения, вариант задания краевых условий RWBT 1 демонстрирует более точные результаты по сравнению с вариантами RWBT 2, RWBT avg.

Таблица 4.9. Величины прогибов на конце $v_y{}^{(1)} \times \varepsilon^3$ для $t = 0.01$

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	Shell КЭ
C1 *однородное изотропное сечение*					
$1/_{20}$	1.43 (6%)	1.45 (5%)	1.44 (6%)	-	**1.53**
$1/_{10}$	4.22 (5%)	4.35 (2%)	4.29 (4%)	-	**4.45**
$1/_{5}$	8.54 (6%)	9.41 (4%)	8.98 (1%)	-	**9.09**
C2 *однородное ортотропное сечение*					
$1/_{20}$	9.16 (4%)	10.32 (9%)	9.75 (3%)	-	**9.51**
$1/_{10}$	11.57 (17%)	17.23 (24%)	14.46 (4%)	-	**13.93**
$1/_{5}$	11.34 (62%)	35.45 (18%)	23.65 (22%)	-	**30.14**
C3 *слоистое ортотропное сечение*					
$1/_{20}$	13.55 (5%)	14.52 (2%)	14.04 (1%)	-	**14.21**
$1/_{10}$	20.17 (7%)	25.45 (17%)	22.87 (5%)	-	**21.80**
$1/_{5}$	22.02 (25%)	45.57 (55%)	34.05 (16%)	-	**29.41**

ε	RWBT 1	RWBT 2	RWBT avg	SV	Shell КЭ
L1 *однородное изотропное сечение*					
$1/_{20}$	2.04 (2%)	2.08 (<1%)	2.07 (1%)	-	**2.09**
$1/_{10}$	8.02 (3%)	8.29 (1%)	8.25 (<1%)	-	**8.23**
$1/_{5}$	31.03 (2%)	32.97 (4%)	32.68 (3%)	-	**31.80**
L2 *однородное ортотропное сечение*					
$1/_{20}$	38.48 (3%)	41.16 (4%)	40.75 (3%)	-	**39.52**
$1/_{10}$	142.19 (2%)	162.54 (11%)	159.48 (9%)	-	**145.80**
$1/_{5}$	474.95 (2%)	633.31 (31%)	609.48 (26%)	-	**484.79**
L3 *слоистое ортотропное сечение*					
$1/_{20}$	38.56 (4%)	62.82 (56%)	59.61 (49%)	-	**40.114**
$1/_{10}$	146.69 (4%)	250.13 (64%)	167.18 (10%)	-	**152.46**
$1/_{5}$	526.31 (4%)	991.29 (82%)	929.69 (70%)	-	**545.70**

Выводы по главе 4

В главе 4 исследована математическая модель GN-RWBT для задач кручения однородных и композитных стержней различных поперечных сечений концевым закручивающим моментом. На основе проведённого исследования можно сделать вывод, что эффекты от стеснённого кручения стержней сплошных и замкнутых поперечных сечений во многих случаях не являются пренебрежимо малыми, а степень их влияния зависит от геометрических и структурных параметров стержня. Так было замечено, что с увеличением ширины поперечного сечения относительно его высоты, влияние стеснения депланации на общее НДС в стержне значительно возрастает, при этом максимальными становятся продольные напряжения. Для однородных ортотропных стержней, жесткость которых в поперечных направлениях ослаблена по сравнению с продольным направлением, и композитных слоистых стержней влияние депланации значительно выше, чем для изотропных. Влияние стеснения депланации на углы закручивания проявляется путем возникновения пограничного слоя вблизи стесненного торца. При отсутствии стеснения пограничные слои не появляются и углы закручивания подчиняются уравнению чистого кручения Сен-Венана. Для достаточно коротких стержней и для слоистых стержней с сильно неоднородными слоями поперечного сечения размер пограничного слоя, вызванного стесненной депланацией сечения, существенно возрастает и может захватывать всю длину стержня. Для задачи стесненного кручения стержней открытого профиля на примере двутавровых, корытных и уголковых сечений с различной внутренней структурой показано, что модель GN-RWBT с хорошей точностью оценивает углы закручивания. При этом показано, что модель GN-RWBT позволяет учитывать изгиб стержней корытных и уголковых сечений, при том, что поперечные нагрузки в системе отсутствуют.

Предложенная математическая модель GN-RWBT позволяет моделировать влияние стеснения депланации на торцах стержня на углы закручивания стержня по всей его длине с хорошей степенью точности. При расчёте НДС стержней в зависимости от различных параметров модель показала хорошее совпадение с результатами трехмерных конечно-элементных расчётов линейной задачи теории упругости всюду за исключением малых зон вблизи торцов. Расхождение в результатах связано с локальными эффектами от задания нагрузок и граничных условий в трёхмерной конечно-элементной модели.

Заключение

В рамках проведенного исследования решены следующие задачи:

1. На основе метода асимптотического расщепления разработана математическая модель деформирования многослойной цилиндрической оболочки. Показано, что полученная математическая модель позволяет восстанавливать все компоненты тензора напряжений как для толстостенных, так и для тонких цилиндрических оболочек. При этом порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений остаётся таким же, как и в случае классической теории оболочек Кирхгофа-Лява.
2. Произведено сравнение полученных аналитических и численных решений для задач деформирования цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления с конечно-элементным решением исходной осесимметричной задачи. Показано, что математическая модель на основе первого приближения метода асимптотического расщепления позволяет с хорошей точностью восстанавливать все компоненты тензора напряжений, в том числе сдвиговые и радиальные компоненты, влиянием которых в классических подходах пренебрегают.
3. Построена усовершенствованная теория деформирования композитных слоистых стержней на основе метода асимптотического расщепления с учётом четвертого способа аппроксимации, описывающего кручение стержня. Получена общая разрешающая система дифференциальных уравнений для слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии, зависящая от малого параметра и количества удерживаемых членов в аппроксимации решения.
4. Разработан алгоритм решения краевых задач в сечении слоистых стержней произвольной формы методом конечных элементов. Разработана программа для ЭВМ BASA (Beam Asymptotic Splitting Analysis), позволяющая определять все необходимые жесткостные характеристики стержня. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Для ускорения расчётов реализованы процедуры распараллеливания решения независимых краевых задач в поперечных сечениях и предварительной сборки матрицы жёсткости.
5. Разработано семейство математических моделей GN (Gorynin-Nemirovsky), позволяющее описывать НДС в слоистых стержнях с различной степенью точности: математическая модель GN-BESVBT (Bernoulli-Euler Saint-Venant Beam Theory), математическая модель GN-FOBT (First Order Beam Theory); математическая модель GN-RWBT (Restrained Warping Beam Theory).

6. Проведён сравнительный анализ разработанных моделей и выявлены их области применимости. Для моделей GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT проведено сравнение с экспериментальными данными из открытых литературных источников и показано хорошее совпадение с экспериментами для задач изгиба и кручения слоистых стержней различных типов.
7. В рамках модели GN-RWBT проведено численное моделирование задач стеснённого кручения для слоистых стержней различных типов поперечных сечений. Показано, что разработанная модель позволяет учитывать эффект стеснённого кручения для различных типов композитных сечений: открытых, замкнутых и сплошных.

К текущим ограничениям разработанной математической модели для ортотропных цилиндрических оболочек следует отнести требование на совпадение осей ортотропии материалов и осей цилиндрической системы координат. Перспективными направлениями для исследований в этом направлении являются: рассмотрение случая полной анизотропии материала, исследование асимптотических приближений более высоких порядков, расширение математической модели с учётом задач термоупругости, геометрической и физической нелинейности.

Для семейства математических моделей GN перспективным направлением является рассмотрение случая полной анизотропии материала. Для полученных разрешающих систем дифференциальных уравнений актуальным является построение и разработка эффективных конечно-элементных схем. Актуальной задачей для будущих исследований представляется распространение и адаптация метода асимптотического расщепления к стержням переменного сечения, закрученным стержням, стержням со сложной периодической структурой.

Список цитируемой литературы

1. Лурье, А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А. И. Лурье. – М., Л.: Гостехиздат., 1947. – 252 с.

2. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

3. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз., 1951. – 344 с.

4. Новожилов, В. В. Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. – Л.: Нолитехника, 1991. – 656 с.

5. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. А. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз., 1963. – 636 с.

6. Чернина, В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения / В. С. Чернина; ред. А. И. Лурье. – Москва: Наука, 1968. – 456 с.

7. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

8. Гольденвейзер, А. Л. О приближенных методах расчета тонких упругих пластин и оболочек / А. Л. Гольденвейзер // Изв. РАН. МТТ. – 1997. – Т. 3. – С. 134-149.

9. Бидерман, В. Л. Механика тонкостенных конструкций / В. Л. Бидерман. – М: Машиностроение, 1977. – 488 с.

10. Доннелл, Л. Г. Балки, пластины, оболочки / Л. Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 567 с.

11. Королев, В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В. И. Королев. – М.: Машиностроение, 1965. – 272 с.

12. Огибалов, П. М. Оболочки и пластины / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. – 696 с.

13. Бажанов, В. Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат. – М.: Высшая школа, 1970. – 408 с.

14. Елпатьевский, А. Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов / А. Н. Елпатьевский, В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.

15. Образцов, И. Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов / И. Ф. Образцов, В. В. Васильев, В. А. Бунаков. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.

16. Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига, Зинатне., 1980. – 571 с.

17. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

18. Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.

19. Немировский, Ю. В. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение., 1986. – 165 с.

20. Рассказов, А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.

21. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – Наука, 1974. – 446 с.

22. Григолюк, Э. И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 287 с.

23. Васильев, В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.

24. Галимов, Ш. К. Уточненные теории пластин и оболочек / Ш. К. Галимов. – Саратов: Изд-во ун-та, 1990. – 136 с.

25. Григоренко, Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – М.: Наука, 1992. – 321 с.

26. Агаловян, Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек / Л. А. Агаловян. – М.: Наука, 1997. – 414 с.

27. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.

28. Altenbach, H. Mechanics of composite structural elements / H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing. – Springer Singapore, 2018. – 503 p.

29. Shell-like structures: Non-classical theories and applications / eds. H. Altenbach, V. Eremeyev. – Springer Berlin, Heidelberg, 2011. – 750 p.

30. Голушко, С. К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.

31. Carrera, E. Plates and shells for smart structures: Classical and advanced theories for modeling and analysis / E. Carrera, S. Brischetto, P. Nali. – Wiley, 2011. – 328 p.

32. Маслов, В. П. Теория возмущений и асимптотические методы / В. П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 549 с.

33. Вазов, В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – Мир, 1968. – 464 с.

34. Коул, Д. Методы возмущений в прикладной механике / Д. Коул. – М.: Мир, 1972. – 274 с.

35. Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

36. Найфэ, А. Методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

37. Ломов, С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 398 с.

38. Bender, C. M. Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory / C. M. Bender, S. A. Orszag. – Springer New York, NY, 1999. – 593 p.

39. Зино, П. Е. Асимптотические методы в задачах теплопроводности и термоупругости / П. Е. Зино, Э. А. Тропп. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 224 с.

40. Маневич, Л. И. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. – Киев-Донецк: Вища школа, 1982. – 152 с.

41. Бердичевский, В. Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек и стержней / В. Л. Бердичевский. – Москва, 1981. – 300 с.

42. Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – Москва: Наука, 1983. – 448 с.

43. Бахвалов, Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

44. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.

45. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений решения краевых задач / А. М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

46. Асимптотические методы в механике твердого тела / С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов, П. Е. Товстик, С. Б. Филиппов. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 360 с.

47. Bensousson, A. Asymptotic analysis for periodic structures / A. Bensousson, J. L. Lions, G. Papanicolaou. – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 700 p.

48. Kolpakov, A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses / A. G. Kolpakov. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.

49. Аргатов, И. И. Асимптотические модели упругого контакта / И. И. Аргатов. – СПб: Наука, 2005. – 448 с.

50. Георгиевский, Д. В. Асимптотики решений трехмерных уравнений теории упругости для сжимаемых и несжимаемых тел / Д. В. Георгиевский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 122-135.

51. Бердичевский, В. Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек / В. Л. Бердичевский // ПММ. – 1979. – Т. 43, № 4. – С. 664-687.

52. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П. Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

53. Mekhtiev, M. F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity / M. F. Mekhtiev. – Singapore: Springer, 2019. – 241 p.

54. Levinski, T. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization / T. Levinski, J. J. Telega. – Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. – 739 p.

55. Fettahlioglu, O. A. Asymptotic solutions for orthotropic nonhomogeneous shells of revolution / O. A. Fettahlioglu, C. R. Steele // J. Appl. Mech. – 1974. – Vol. 41, № 3. – P. 753-758.

56. Wu, C. P. Asymptotic solutions of axisymmetric laminated conical shells / C. P. Wu, Y. F. Pu, Y. H. Tsai // Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43, № 10. – P. 1589-1614.

57. Wu, C. P. Asymptotic theory of laminated circular conical shells / C. P. Wu, Y. C. Hung // International Journal of Engineering Science. – 1999. – Vol. 37, № 8. – P. 977-1005.

58. Wu, C. P. A refined asymptotic theory of laminated circular conical shells / C. P. Wu, Y. C. Hung, J. Y. Lo // European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2002. – Vol. 21, № 2. – P. 281-300.

59. Niordson, F. I. An asymptotic theory for spherical shells / F. I. Niordson // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38, № 46-47. – P. 8375-8388.

60. Димитриенко, Ю. И. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, А. Е. Пичугина // Математическое моделирование и численные методы. – 2020. – Т. 4, № 28. – С. 84-110.

61. Димитриенко, Ю. И. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, А. Е. Пичугина // Математическое моделирование и численные методы. – 2018. – Т. 3, № 19. – С. 109-126.

62. Akhmedov, N. K. Axisymmetric problem of the elasticity theory for the radially inhomogeneous cylinder with a fixed lateral surface / N. K. Akhmedov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7, № 2. – P. 598-610.

63. Горынин, Г. Л. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / Г. Л. Горынин, Немировский Ю.В. – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.

64. Горынин, Г. Л. Продольно-поперечный изгиб слоитых балок в трехмерной постановке / Г. Л. Горынин, Немировский Ю.В. // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 133-143.

65. Горынин, Г. Л. GN-теория расчета композитной балки при изгибе. Сообщение 1. Общая теория / Г. Л. Горынин, Немировский Ю.В. // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2012. – Т. 6, № 642. – С. 3-12.

66. Горынин, Г. Л. GN-теория расчета композитной балки при изгибе. Сообщение 2. Размерная теория и пример / Г. Л. Горынин, Немировский Ю.В. // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2012. – Т. 7-8, № 643-644. – С. 3-11.

67. Ржаницын, А. Р. Составные стержни и пластинки / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 130 с.

68. Vasiliev, V. V. Advanced mechanics of composite materials and structural elements / V. V. Vasiliev, E. V. Morozov. – Elsevier, 2013. – 818 p.

69. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 1993. – 253 с.

70. Аннин, Б. Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел / Б. Д. Аннин. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. – 203 с.

71. Reddy, J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells / J. N. Reddy. – CRC press, 2006. – 568 p.

72. Wang, C. M. Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions / C. M. Wang, J. N. Reddy, K. H. Lee. – Elsevier Science, 2000. – 296 p.

73. Reddy, J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells / J. N. Reddy. – CRC Press, 2003. – 858 p.

74. Pilkey, W. D. Analysis and design of elastic beams: Computational methods / W. D. Pilkey. – John Wiley & Sons, 2002. – 461 p.

75. Kollar, L. P. Mechanics of composite structures / L. P. Kollar, G. S. Springer. – Cambridge University Press, 2003. – 480 p.

76. Librescu, L. Thin-walled composite beams: theory and application / L. Librescu, O. Song. – Dordrecht: Springer, 2006. – 607 p.

77. Hodges, D. H. Nonlinear composite beam theory / D. H. Hodges. – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. – 317 p.

78. Жилин, П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней / П. А. Жилин. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического ун-та, 2007. – 100 с.

79. Carrera, E. Beam structures: classical and advanced theories / E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo. – John Wiley & Sons, 2011. – 208 p.

80. Luongo, A. Mathematical models of beams and cables / A. Luongo, D. Zulli. – John Wiley & Sons, 2013. – 349 p.

81. Мищенко, А. В. Структурно-неоднородные профилированные стержневые системы: Методы рационального и оптимального проектирования / А. В. Мищенко, Ю. В. Немировский. – Palmarium Academic Publishing, 2016. – 332 с.

82. Альтенбах, Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор / Х. Альтенбах // Механика композит, материалов. – 1998. – Т. 34, № 3. – С. 333-348.

83. Аннин, Б. Д. Неклассические модели теории пластин и оболочек / Б. Д. Аннин, Ю. М. Волчков // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 5-14.

84. Reddy, J. N. A review of refined theories of laminated composite plates / J. N. Reddy // Snock. Vibr. Dig. – 1990. – Vol. 22. – P. 3-17.

85. Kapania, R. K. A review on the analysis of laminated shells / R. K. Kapania // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. – 1989. – Vol. 111, № 2. – P. 88-96.

86. Carrera, E. Who needs refined structural theories? / E. Carrera, I. Elishakoff, M. Petrolo // Composite Structures. – 2021. – Vol. 264. – P. 113671.

87. Khdeir, A. A. An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams / A. A. Khdeir, J. N. Reddy // Composite Structures. – 1997. – Vol. 37, № 2. – P. 195-203.

88. Reddy, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates / J. N. Reddy // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. – 1984. – Vol. 51, № 4. – P. 745-752.

89. Phan, N. D. Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory / N. D. Phan, J. N. Reddy // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1985. – Vol. 21, № 12. – P. 2201-2219.

90. A refined higher order finite element for asymmetric composite beams / M. V. V. S. Murthy, D. Roy Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan // Composite Structures. – 2005. – Vol. 67, № 1. – P. 27-35.

91. Ferreira, A. J. M. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics / A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge // Computers and Structures. – 2005. – Vol. 83, № 27. – P. 2225-2237.

92. Sciuva, M. Di. Refinement of Timoshenko beam theory for composite and sandwich beams using zigzag kinematics / M. Di Sciuva, A. Tessler. – 2007. – 45 p.

93. Sciuva, M. Di. A robust and consistent first-order zigzag theory for multilayered beams / M. Di Sciuva, M. Gherlone, A. Tessler // Solid Mechanics and its Applications. – 2010. – Vol. 168. – P. 255-268.

94. Kapuria, S. An efficient higher order zigzag theory for composite and sandwich beams subjected to thermal loading / S. Kapuria, P. C. Dumir, A. Ahmed // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, № 24. – P. 6613-6631.

95. Tahani, M. Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories / M. Tahani // Composite Structures. – 2007. – Vol. 79, № 4. – P. 535-547.

96. Григолюк, Э. И. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Механика композитных материалов. – 1988. – Т. 2. – С. 287-298.

97. Понятовский, В. В. Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней / В. В. Понятовский // Проблемы механики твердого деформируемого тела: Сб. статей. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 341-351.

98. Понятовский, В. В. Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования / В. В. Понятовский // Исслед. по упругости и пластичности. – Л.: ЛГУ, 1980. – С. 40-48.

99. Образцов, И. Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, И. В. Андрианов. – М.: Машиностроение, 1991. – 415 с.

100. Колпаков, А. Г. Асимптотическая задача термоупругости балок / А. Г. Колпаков // Прикл. механика и техн.физика. – 1995. – Т. 36, № 5. – С. 135-144.

101. Aghalovyan, L. A. On asymptotic theory of beams, plates and shells / L. A. Aghalovyan, M. L. Aghalovyan // Curved and Layered Structures. – 2016. – Vol. 3, № 1. – P. 74-81.

102. Buannic, N. Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method / N. Buannic, P. Cartraud // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38, № 40-41. – P. 7139-7161.

103. Buannic, N. Higher-order asymptotic model for a heterogeneous beam, including corrections due to end effects / N. Buannic, P. Cartraud // 41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit. – 2000. – P. 1495.

104. Назаров, С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Том I. Понижение размерности и интегральные оценки / С. А. Назаров. – Новосибирск. Научная книга (ИДМИ), 2002. – 408 с.

105. A cross-sectional analysis of composite beams based on asymptotic framework / J. Jeong, J. S. Kim, Y. J. Kang, M. Cho // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2012. – Vol. 26, № 1. – P. 161-172.

106. Kim, J. S. An asymptotic analysis of composite beams with kinematically corrected end effects / J. S. Kim, M. Cho, E. C. Smith //International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45. – №. 7-8. – P. 1954-1977.

107. Andrianov, I. V. Asymptotical mechanics of thin-walled structures / I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, L. I. Manevitch. – Springer Berlin, Heidelberg, 2003. – 515 p.

108. Андрианов, И. В. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин / И. В. Андрианов, В. В. Данишевский, А. О. Иванков. – Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. – 216 с.

109. Vetyukov, Y. Nonlinear mechanics of thin-walled structures: asymptotics, direct approach and numerical analysis / Y. Vetyukov. – Springer Vienna, 2014. – 272 p.

110. Vetyukov, Y. M. The theory of thin-walled rods of open profile as a result of asymptotic splitting in the problem of deformation of a noncircular cylindrical shell / Y. M. Vetyukov // Journal of Elasticity. – 2010. – Vol. 98. – P. 141-158.

111. Бутенко, Ю. И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических методов расчета стержней и пластин / Ю. И. Бутенко. – Казань: ЗАО «Новое знание», 2001. – 320 с.

112. Yu, W. Generalized Timoshenko theory of the variational asymptotic beam sectional analysis / W. Yu, D. H. Hodges // Journal of the American Helicopter Society. – 2005. – Vol. 50, № 1. – P. 46-55.

113. Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis / W. Yu, V. V. Volovoi, D. H. Hodges, X. Hong // AIAA Journal. – 2002. – Vol. 40, № 10. – P. 2105-2112.

114. Сен-Венан, Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм / Б. Сен-Венан; ред. Г. Ю. Джанелидзе. – М.: Физматгиз, 1961. – 518 с.

115. Лехницкий, С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1971. – 240 с.

116. Арутюнян, Н. Х. Кручение упругих тел / Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. – М.: Наука, 1963. – 686 с.

117. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.

118. Cambronero-Barrientos, F. Beam element for thin-walled beams with torsion, distortion, and shear lag / F. Cambronero-Barrientos, J. Díaz-del-Valle, J. A. Martínez-Martínez // Engineering Structures. – 2017. – Vol. 143. – P. 571-588.

119. Pavazza, R. A theory of torsion of thin-walled beams of arbitrary open sections with influence of shear / R. Pavazza, A. Matoković, M. Vukasović // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2022. – Vol. 50, № 1. – P. 206-241.

120. Дьяков, С. Ф. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении / С. Ф. Дьяков, В. В. Лалин // Вестник Пермского государственного технического университета. – 2011. – Т. 2. – С. 130-140.

121. Armero, F. On the modeling of restrained torsional warping: an analysis of two formulations / F. Armero // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. – 2022. – Vol. 73, № 2. – P. 30.

122. Armero, F. A new structural model of warping torsion. I: Formulation for prismatic elastic shafts / F. Armero // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 248. – P. 11.

123. Armero, F. A new structural model of warping torsion. II: Evaluation for a model problem / F. Armero // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 248. – P. 17.

124. A generalized Vlasov theory for composite beams / W. Yu, D. H. Hodges, V. V. Volovoi, E. D. Fuchs // Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43, № 9. – P. 1493-1511.

125. Chandra, R. Experimental and theoretical analysis of composite I-beams with elastic couplings / R. Chandra, I. Chopra // AIAA Journal. – 1991. – Vol. 29, № 12. – P. 2197-2206.

126. Chandra, R. Thin-walled composite beams under bending, torsional, and extensional loads / R. Chandra, A. D. Stemple, I. Chopra // Journal of Aircraft. – 1990. – Vol. 27, № 7. – P. 619-626.

127. Уманский, А. А. Изгиб и кручение тонкостенных авиационных конструкций / А. А. Уманский. – М.: Оборониздат, 1939. – 112 с.

128. Johnson, E. R. Anisotropic thin-walled beams with closed cross-sectional contours / E. R. Johnson, V. V. Vasiliev, D. V. Vasiliev // Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. – 1998. – Vol. 1. – P. 500-508.

129. Сливкер, В. И. Строительная механика. Вариационные основы / В. И. Сливкер. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.

130. Присекин, В. Л. Изгиб и стеснённое кручение тонкостенных стержней / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2019. – Т. 5. – С. 45-58.

131. Reagan, S. W. Constrained torsion of prismatic bars / S. W. Reagan, W. D. Pilkey // Finite Elements in Analysis and Design. – 2002. – Vol. 38, № 10. – P. 909-919.

132. Asymptotic theory for static behavior of elastic anisotropic I-beams / V. V. Volovoi, D. H. Hodges, V. L. Berdichevsky, V. G. Sutyrin // International Journal of Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36, № 7. – P. 1017-1043.

133. Gorynin, A. G. Mathematical modeling of three-dimensional stress-strain state of homogeneous and composite cylindrical axisymmetric shells / A. G. Gorynin, G. L. Gorynin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2024. – Vol. 17, № 1. – P. 27-37.

134. Горынин, А. Г. Асимптотическое расщепление задачи деформирования композитных цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления / А. Г. Горынин // Тезисы XXIII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Новосибирск, 24–28 октября 2022 года. – С. 17.

135. Горынин, А. Г. Метод асимптотического расщепления в задачах расчета однородных и композитных цилиндрических оболочек / А. Г. Горынин, С. К. Голушко, Г. Л. Горынин // Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности : тезисы докладов, Красноярск, 10–15 июля 2023 года. – С. 27-28.

136. Горынин, А. Г. Численно-аналитическое моделирование задач прочности элементов композитных конструкций с помощью метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин, С. К. Голушко, Г. Л. Горынин // X международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия): Тезисы докладов, Якутск, 17–20 июля 2023 года. – С. 135-136.

137. The FEniCS Project Version 1.5 / M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake [et al.] // Archive of Numerical Software. – 2015. – Vol. 3, № 100. – P. 9-23.

138. Dhondt, G. The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications / G. Dhondt. – Wiley, 2004. – 340 p.

139. Kierzenka, J. A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE / J. Kierzenka, L. F. Shampine // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2001. – Vol. 27, № 3. – P. 299-316.

140. Pagano, N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending / N. J. Pagano // Journal of Composite Materials. – 1969. – Vol. 3, № 3. – P. 398-411.

141. Gorynin, G. L. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 1. Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition / G. L. Gorynin, Y. V. Nemirovskii // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol. 45, № 3. – P. 257-280.

142. Янковский, А. П. Уточнение асимптотических разложений при решении пространственной задачи изгиба и кручения слоистых стержней / А. П. Янковский // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, № 5. – С. 674-698.

143. Gorynin, G. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 2. effect of edge boundary layers on the stress-strain properties of the composite / G. Gorynin, Y. Nemirovskii // Mechanics of Composite Materials. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 1-14.

144. Barbero, E. J. Finite element analysis of composite materials using abaqusTM / E. J. Barbero. – CRC Press, 2013. – 444 p.

145. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д. В. Бычков. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.

146. Горынин, Г. Л. Исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойного двутавра в пространственной постановке / Г. Л. Горынин, О. Г. Горынина // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2012. – Т. 5, № 27. – С. 49-54.

147. Голушко, С. К. Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости / С. К. Голушко, Г. Л. Горынин, А. Г. Горынин // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2020. – Т. 188. – С. 43-53.

148. Golushko, S. Analytic solutions for free vibration analysis of laminated beams in three-dimensional statement / S. Golushko, G. Gorynin, A. Gorynin // EPJ Web of Conferences. – 2019. – Vol. 221. – P. 01012.

149. Горынин, А. Г. Применение метода асимптотического расщепления в задачах статики и динамики композитных слоистых балок / А. Г. Горынин // МНСК-2017: Математика: Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 17–20 апреля 2017 года. – С. 60.

150. Горынин, А. Г. Численно-аналитическое исследование собственных колебаний слоистых композитных балок на основе метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // МНСК-2018: Математика: Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 22–27 апреля 2018 года. – С. 167.

151. Горынин, А. Г. Численно-аналитическое моделирование собственных колебаний слоистых балок в пространственной постановке / А. Г. Горынин // Тезисы XX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 28 октября – 01 ноября 2019 года. – С. 14-15.

152. Горынин, А. Г. Численный анализ собственных колебаний слоистых балок на основе метода асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // МНСК-2019. Математика: Материалы 57-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 14–19 апреля 2019 года. – С. 142.

153. Schöberl, J. NGSolve finite element library / J. Schöberl, others // URL: http://sourceforge. net/projects/ngsolve. – 2019.

154. Hecht, F. New development in freefem+ / F. Hecht // Journal of Numerical Mathematics. – 2012. – Vol. 20, № 3-4. – P. 251-265.

155. Geuzaine, C. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with buil-in pre- and post-processing facilities / C. Geuzaine, J.-F. Remacle // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2009 – Vol. 7. – № 11. – P. 1309-1331.

156. Горынин, А. Г. Программная реализация метода асимптотического расщепления для анализа композитных стержней сложного профиля / А. Г. Горынин // Тезисы XXII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Новосибирск, 25–29 октября 2021 года. – С. 10-11.

157. Горынин, А. Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665182 Российская Федерация. Программа BASA для расчёта прочности слоистых композитных стержней сложного поперечного сечения: № 2024660781: заявл. 06.05.2024: опубл. 27.06.2024 / А. Г. Горынин.

158. Piovar, S. Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models / S. Piovar, E. Kormanikova // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 969. – P. 316-319.

159. Golushko, S. A new beam element for the analysis of laminated composites based on the asymptotic splitting method / S. Golushko, G. Gorynin, A. Gorynin // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1666, № 1.

160. Hutchinson, J. R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory / J. R. Hutchinson // Journal of Applied Mechanics. – 2001. – Vol. 6. – № 1. – P. 87-92.

161. COMSOL documentation / https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.sme/sme_ug_shell_plate.08.09.html#1001440.

162. Горынин, А. Г. Теория балки Тимошенко в рамках пространственной теории упругости / А. Г. Горынин // МНСК-2020: Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 10–13 апреля 2020 года. – С. 116.

163. Горынин, А. Г. Исследование стеснённого кручения тонкостенных стержней открытого профиля методом асимптотического расщепления / А. Г. Горынин, Г. Л. Горынин, С. К. Голушко // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 3. – С. 123-141.

164. Горынин, А. Г. Моделирование стесненного кручения композитных стержней сплошных и замкнутых поперечных сечений / А. Г. Горынин, Г. Л. Горынин, С. К. Голушко // Известия вузов. Строительство. – 2024. – Т. 10. – С. 5-25.

165. Горынин, А. Г. Математическое моделирование стесненного кручения композитных тонкостенных стержней методом асимптотического расщепления / А. Г. Горынин // Тезисы XXIV Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тезисы докладов, Красноярск, 23–27 октября 2023 года. – С. 18-19.

166. Горынин, Г. Л. Метод асимптотического расщепления в задачах расчета тонкостенных стержней произвольной формы / Г. Л. Горынин, С. К. Голушко, А. Г. Горынин // Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности: Тезисы докладов, Красноярск, 10–15 июля 2023 года. – С. 22-23.

Приложение А. Свидетельство и описание программы для ЭВМ BASA

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024665182

Программа BASA для расчёта прочности слоистых композитных стержней сложного поперечного сечения.

Правообладатель: ***Горынин Арсений Глебович (RU)***

Автор(ы): ***Горынин Арсений Глебович (RU)***

Заявка № **2024660781**

Дата поступления **06 мая 2024 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***27 июня 2024 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**

Ю.С. Зубов

Рисунок 1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ BASA

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU2024665182

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): **2024665182** Дата регистрации: **27.06.2024** Номер и дата поступления заявки: **2024660781 06.05.2024** Дата публикации и номер бюллетеня: **27.06.2024 Бюл. № 7** Контактные реквизиты: **arsgorynin@yandex.ru**	Автор(ы): **Горынин Арсений Глебович (RU)** Правообладатель(и): **Горынин Арсений Глебович (RU)**

Название программы для ЭВМ:
Программа BASA для расчёта прочности слоистых композитных стержней сложного поперечного сечения.

Реферат:
Программа BASA (Beam Asymptotic Splitting Analysis) предназначена для расчёта прочности слоистых композитных стержней из ортотропных материалов постоянного по длине поперечного сечения. В основу программы заложен метод асимптотического расщепления, который позволяет определять все компоненты тензора напряжений без введения гипотез и тем самым избежать высокозатратного трехмерного конечно-элементного анализа. Используемый программой алгоритм решения задачи реализован на языке Python с использованием Jupyter notebooks и библиотек numpy, scipy. Для численного решения краевых задач в поперечном сечении стержня использован метод конечных элементов, реализованный средствами пакета с открытым исходным кодом FEniCS Project. ОС: Windows 10, Ubuntu 22.04.

Язык программирования:	Python
Объем программы для ЭВМ:	343 КБ

Рисунок 2. Описание программы для ЭВМ BASA