На правах рукописи

Горынин Арсений Глебович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

Специальность 1.1.8 – механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (НГУ)

Научный руководитель:
Голушко Сергей Кузьмич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования механико-математического факультета НГУ, главный научный сотрудник НГУ.

Официальные оппоненты:
Георгиевский Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Мищенко Андрей Викторович, доктор технических наук, заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин ФГКОУ ВО «Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище».

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 10 февраля 2025 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.055.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: info@hydro.nsc.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте:
https://www.hydro.nsc.ru/education/dissertations/gorinin.php

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью учреждения, просьба направлять на имя ученого секретаря диссертационного совета.
Автореферат разослан «___» декабря 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук С.В. Бойко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность данной работы. Тонкостенные слоистые стержни, пластины и оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций ответственного назначения. Широкое применение композитов в таких конструкциях выявило необходимость учета новых факторов и способствовало появлению новых задач в механике композитных материалов и конструкций. Математически обоснованные редуцированные модели конструкций из слоисто-волокнистых композитов позволяют отказаться от высокозатратного трехмерного конечно-элементного (КЭ) анализа. Актуальность исследования обусловлена необходимостью развития новых методов повышенной точности для решения задач прочности композитных тонкостенных элементов конструкций свободных от априорных гипотез, обладающих высокой степенью универсальности и широкими границами применимости.

Объектами исследования являются слоистые цилиндрические оболочки, композитные слоистые стержни произвольного поперечного сечения. **Предметами исследования** являются напряжённо-деформированное состояние (НДС) композитных тонкостенных элементов конструкций, разрешающие системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) деформирования, краевые задачи в поперечных сечениях слоистых стержней, краевые задачи по толщине стенки цилиндрических оболочек, краевые задачи пространственной линейной теории упругости.

Степень разработанности темы исследования. Задачам анализа однородных и неоднородных стержней, пластин и оболочек посвящена обширнейшая литература. В силу наличия малых параметров, большинство тонкостенных конструкций поддаётся асимптотическому анализу, что позволяет упростить исходную пространственную постановку задачи. Асимптотические методы выступают математически строгой альтернативой широко распространенному в механике тонкостенных конструкций методу гипотез, имеющему свои недостатки, связанные с предположениями о характере распределения перемещений и/или напряжений в конструкции.

Применению асимптотических методов в области механики твердого тела посвящены работы Л.И. Маневича, Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко, Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова, А.М. Ильина, С.М. Бауэр, А., И.И. Аргатова и др. Построению теории оболочек на основе асимптотических методов посвящены, в частности, работы А.Л. Гольденвейзера, П.Е. Товстика, М.Ф. Мехтиева, Ю. И. Димитриенко. Развитию асимптотических методов в теории стержней, в частности, посвящены работы Понятовского В.В., Образцова И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианова И.В., Колпакова А.Г., Агаловяна Л.А., Назарова С.А., Бердичевского В.Л., Ходжеса Д. и др.

В диссертационной работе для решения задач деформирования слоистых цилиндрических оболочек и анизотропных слоистых стержней используется перспективный асимптотический метод – метод асимптотического расщепления (АР), основы которого применительно к задачам деформирования слоистых балок и пластин даны в работах[1,2] Горынина Г.Л. и Немировского Ю.В. Главное отличие метода АР от метода формальных асимптотических разложений заключается в том, что в разложениях искомого решения по малому параметру присутствуют производные от функций макродеформирования, что позволяет свести исходную трёхмерную задачу к решению задач меньших размерностей. Ранее метод АР применялся для решения задач изгиба слоистых пластин и балок. Было показано, что метод позволяет восстанавливать полное НДС в конструкции за исключением зон вблизи крепления конструкций, где возникает характерный пограничный слой. Были получены оценки точности метода, а также показано, что уравнения равновесия в рамках используемого подхода выполняются точно, а обобщённый закон Гука приближенно. Ранее не исследованными вопросами, в частности, являются: применение метода к решению задач деформирования оболочек, применение метода АР для решения задач кручения слоистых анизотропных стержней с учётом стеснения депланации (стеснённого кручения), численное решение вспомогательных краевых задач в поперечных сечениях анизотропных слоистых стержней.

Цель работы состоит в развитии теории метода АР и разработке математических моделей деформирования композитных элементов конструкций в виде слоистых цилиндрических оболочек и слоистых анизотропных стержней произвольного поперечного сечения.

В рамках научного исследования ставятся четыре основные задачи:

Первая задача состоит в применении метода АР к новому для метода классу конструкций: композитных цилиндрических оболочек и разработке математической модели расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке.

Вторая задача заключается в усовершенствовании существующей теории деформирования композитных слоистых анизотропных стержней на основе метода АР за счет рассмотрения всех совместных видов

---

[1]Горынин, Г. Л., Немировский Ю.В., Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.

[2]Gorynin, G. L., Nemirovskii, Y. V. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 1. Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol. 45, № 3. – P. 257-280.

деформирования стержня: растяжение-сжатия, изгиба в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях и кручения (в том числе стеснённого).

Третья задача состоит в разработке численного алгоритма для решения методом конечных элементов (КЭ) краевых задач в поперечных сечениях композитных стержней произвольной геометрии, возникающих в методе АР.

Четвёртая задача заключается в разработке и валидации новых математических моделей для расчета НДС в слоистых стержнях с поперечной плоскостью симметрии анизотропии, а также в исследовании задач стеснённого кручения композитных стержней произвольного профиля (открытого, замкнутого и сплошного).

Научная новизна изложенных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

- Впервые применён метод АР для решения статических задач деформирования однородных изотропных и слоистых композитных цилиндрических оболочек.
- Разработан усовершенствованный вариант теории деформирования композитных слоистых стержней на основе метода АР с учётом деформаций кручения. Сформулированы новые условия разрешимости краевых задач в сечениях и представления для функции нагружения на внешнем контуре сечения.
- Разработан и верифицирован КЭ алгоритм численного решения краевых задач в сечении слоистых стержней произвольной.
- Разработано семейство математических моделей, позволяющее определять НДС в слоистых стержнях с различной степенью точности. Известные стержневые теории, такие как теория изгиба стержней на основе гипотез Бернулли-Эйлера и теория чистого кручения Сен-Венана, являются частными случаями разработанных моделей.
- Получена разрешающая система ОДУ деформирования слоистых стержней, позволяющая учитывать стеснённое кручение для произвольных типов поперечных сечений: открытых, замкнутых и сплошных.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых математических моделей для расчёта задач прочности композитных слоистых конструкций, свободных от априорных гипотез и обладающих высокой степенью универсальности и широкими границами применимости.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных математических моделей для расчёта, используемых на практике как композитных, так и однородных конструкций.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовались: 1) аналитические методы решения ОДУ; 2) метод АР; 3) метод КЭ; 4) метод сплайн коллокаций; 5) комплексы программ для КЭ моделирования.

Положения, выносимые на защиту, соответствуют пяти (2, 3, 4, 11, 12) направлениям исследования паспорта специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела» по физико-математическим наукам:

1. Применение метода АР к новому для метода классу композитных конструкций: осесимметричных композитных цилиндрических оболочек (направления исследования 2, 3, 4, 11);
2. Математическая модель расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке, позволяющая восстанавливать все компоненты тензора напряжений без использования априорных гипотез (направления исследования 4, 11, 12);
3. Модификация теории пространственного деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода АР с учётом деформаций кручения (направления исследования 2, 3, 4, 11);
4. Семейство математических моделей GN расчёта прочности слоистых стержней при трёхмерном нагружении: GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT. Сравнительный анализ, верификация и валидация семейства математических моделей GN (направления исследования 4, 11, 12);
5. Программа для ЭВМ BASA, позволяющая рассчитывать прочность композитных слоистых стержней произвольного поперечного сечения (направления исследования 11, 12);
6. Результаты математического и численного моделирования задач стеснённого кручения слоистых стержней произвольного профиля с помощью математической модели GN-RWBT (направления исследования 11, 12).

Обоснованность и достоверность результатов подтверждаются: 1) сравнением полученных результатов с известными аналитическими решениями; 2) сравнением с численными расчетами методом КЭ в двумерных и трёхмерных постановках на подробных сетках с использованием верифицированных комплексов программ; 3) сравнением с экспериментальными данными, опубликованными в литературе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 17 Всероссийских и Международных конференциях и семинарах: Российско-французском семинаре «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Ханты-Мансийск, 2019); Всероссийских конференциях молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск, 2017; Новосибирск, 2019, 2021, 2022; Красноярск, 2023); Всероссийских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Томск, 2019; Красноярск, 2023); X Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутск, 2023); Международной конференции «IX Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2020); Международной конференции «Марчуковские научные чтения 2021» (Новосибирск, 2021); Международных научных студенческих конференциях (Новосибирск, 2017, 2018, 2019, 2020); Международных научно-технических конференциях «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (Новосибирск, 2018, 2024).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 7 работах, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ, 2 публикации в трудах Международных и Всероссийских конференций, индексируемых в Web of Science и/или Scopus, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад в работу заключается в получении новых теоретических результатов, обсуждении и разработке алгоритмов численного решения краевых задач, написании программного кода, проведении вычислительных экспериментов, анализе полученных результатов и подготовке публикаций. Вклад соискателя был значимым по согласованию с соавторами во всех выносимых на защиту результатах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 166 наименований, одного приложения. Объём работы 150 страниц, включая 50 рисунков и 15 таблиц.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Голушко Сергею Кузьмичу за грамотное руководство и приобретённые фундаментальные навыки; д.ф.-м.н. Горынину Глебу Леонидовичу за многочисленные консультации по методу АР. Автор благодарен своим коллегам: к.ф.-м.н. Беляеву Василию Алексеевичу и Бryндину Луке Сергеевичу за ценные советы и всестороннюю поддержку.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены актуальность и степень разработанности темы исследования. Сформулированы цель и задачи работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена применению метода АР к задаче расчёта трёхмерного НДС однородных и композитных цилиндрических оболочек в осесимметричной постановке. В **разделе 1.1** рассмотрена осесимметричная постановка задачи деформирования слоистой цилиндрической оболочки под действием внутренней радиальной нагрузки интенсивности $p(z)$ в рамках линейной теории упругости. Ось z направлена вдоль оси цилиндра, ось r направлена вдоль радиуса, как показано на рисунке 1. Оболочка выполнена из произвольного числа слоёв постоянной по толщины. Отсчет слоёв ведется от внутренней поверхности $i = 1 \dots s$ где s – количество слоёв, i – индекс слоя. На границе между слоями выполнены условия непрерывности компонент вектора перемещений $(u_\alpha)_i$ и контактных напряжений. Во всей работе для операции взятия k-ой производной в направлении α используется обозначение ∂_α^k.

В каждом слое справедлив обобщённый закон Гука для орторопного материала, при этом оси ортотропии материала сонаправлены с осями главной цилиндрической системы координат (r, θ, z). После обезразмеривания уравнения равновесия примут вид

$$\begin{gathered} \partial_x^1(\sigma_{rr})_i + \varepsilon\,\partial_z^1(\sigma_{rz})_i + \varepsilon_1 \frac{(\sigma_{rr})_i - (\sigma_{\theta\theta})_i}{1+\varepsilon_1 x} = 0, \\ \partial_x^1(\sigma_{rz})_i + \varepsilon\,\partial_z^1(\sigma_{zz})_i + \varepsilon_1 \frac{(\sigma_{rz})_i}{1+\varepsilon_1 x} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $(\sigma_{\alpha\alpha})_i, (\sigma_{rz})_i$ – компоненты тензора напряжений в i-ом слое; безразмерные координаты $x, z \in [0{,}1]$, где $x = (r - R_{in})/h$, $z = z/L$; R_{in} – внутренний радиус оболочки; $\varepsilon = h/L$ – малый параметр, равный отношению толщины h оболочки к её длине L; $\varepsilon_1 = h/R_{in}$ – параметр, равный отношению толщины h оболочки к её внутреннему радиусу R_{in}.

В **разделе 1.2** приведена процедура асимптотического расщепления задачи. Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений искались в виде следующих конечных сумм дифференциальных операторов по продольной переменной z

$$\begin{gathered} \left(u_z^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(U_z^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(u_\alpha^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \\ \left(\sigma_{zz}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{rz}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\tau_{rz}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \\ \left(\sigma_{\alpha\alpha}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3} \left(\tau_{\alpha\alpha}^\eta\right)_i^{(k)} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\alpha \in \{r, \theta\}$; $\left(U_\alpha^\eta\right)_i^{(k)}, \left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}$ – жесткостные функции, зависящие только от координаты x и описывающие распределение по толщине оболочки перемещений и напряжений, соответственно; n – номер асимптотического приближения; $\eta(z)$ – функция, зависящая только от продольной координаты z и описывающая деформирование оболочки на макроуровне.

Подстановка выражений для аппроксимации (2) в исходную постановку задачи приводит к расщеплению исходной двумерной задачи на независимые одномерные краевые задачи по длине и толщине оболочки. Из граничных условий на внутренней поверхности оболочки следует дифференциальная связь между функцией макродеформирования $\eta(z)$ и нагрузкой $p(z)$

$$\sum_{k=0}^{n+3} A_{rr}^{\eta,k}\, \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = p(z), \qquad \sum_{k=0}^{n+2} B_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k = 0, \tag{3}$$

где $A_{rr}^{\eta,k}, B_z^{\eta,k}$ – некоторые константы, определяющиеся как интегралы по толщине оболочки от жесткостных функций $\left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(k)}$.

После подстановки выражений (2) в уравнения равновесия (1) и из равенства нулю выражений при одинаковых степенях малого параметра ε следует ряд вспомогательных краевых задач по толщине оболочки, которые для каждого порядкового номера k представляют из себя систему ОДУ на две неизвестные функции $\left(U_r^{\eta}\right)_i^{(k)}, \left(U_z^{\eta}\right)_i^{(k)}$. Здесь несмотря на индекс слоя i, функции трактуются как заданные на всей области по толщине оболочки. Краевые задачи в частных случаях допускают аналитическое решение, в частности, в работе приведены решения при $k = 0$. В общем случае краевые задачи решались численно с помощью метода КЭ, реализованного в пакете с открытым исходным кодом Fenics Project. Исследование краевой задачи по толщине оболочки при $k = 0$ показало, что существует ровно два линейно независимых решения, которые являются первичными и определяют физический смысл функции макродеформирования $\eta(z)$. Каждое из двух решений нулевой краевой задачи задаёт свой допустимый способ аппроксимации, при этом для первого способа функция $\eta(z) = v_r$ – среднее перемещение оболочки в радиальном направлении (прогиб), для второго способа функция $\eta(z) = v_z$ – среднее перемещение оболочки в продольном направлении. Общее решение задачи находится путём суммирования выражений для двух способов аппроксимации

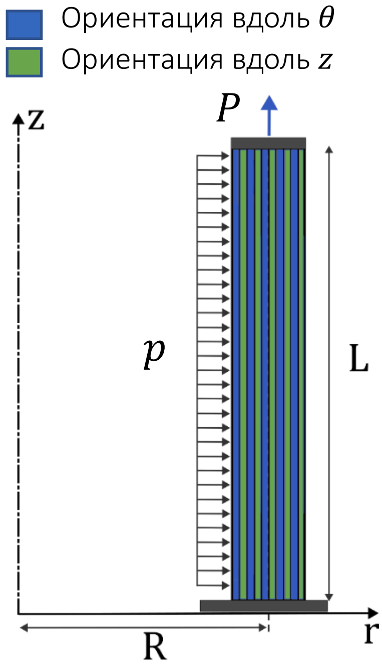


Рисунок 1. Схема нагружения 10-слойной оболочки

$$(u_\alpha)_i^{(\bar{n})} = \left(u_\alpha^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(u_\alpha^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})}, \qquad (\sigma_{\beta\beta})_i^{(\bar{n})} = \left(\sigma_{\beta\beta}^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(\sigma_{\beta\beta}^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})},$$
$$(\sigma_{rz})_i^{(\bar{n})} = \left(\sigma_{rz}^{v_z}\right)_i^{(n_{v_z})} + \left(\sigma_{rz}^{v_r}\right)_i^{(n_{v_r})}, \tag{4}$$

где $\alpha \in (r,z)$, $\beta \in (r,\theta,z)$, $\bar{n} = \left(n_{v_r}, n_{v_z}\right)$ – векторный номер асимптотического приближения, состоящий из номеров асимптотических приближений для двух способов аппроксимации.

В **разделе 1.3** получена разрешающая система ОДУ вдоль оси z оболочки, которая следует из дифференциальной связи (3) для двух способов аппроксимации

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} A_{rr}^{v_z,2k+1}\,\partial_z^{2k+1} v_z^{(n_{v_z})}\varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+3)]} A_{rr}^{v_r,2k}\,\partial_z^{2k} v_r^{(n_{v_r})}\varepsilon^{2k} = p(z),\\ \sum_{k=1}^{[0.5(n_{v_z}+2)]} B_z^{v_z,2k}\partial_z^{2k} v_z^{(n_{v_z})}\varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{[0.5(n_{v_r}+1)]} B_z^{v_r,2k+1}\partial_z^{2k+1} v_r^{(n_{v_r})}\varepsilon^{2k+1} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

где $[\dots]$ обозначает целую часть. Система (5) задаёт связь между нагрузкой $p(z)$ и макрофункциями перемещений v_r, v_z оболочки, тем самым исходная задача сводится к решению задачи меньшей размерности по длине оболочки. В работе получены выражения через функции v_r, v_z для продольного N_z и окружного N_θ усилий, перерезывающей силы Q_r, изгибающего момента M_r, а также для угла наклона нормали φ_r оболочки.

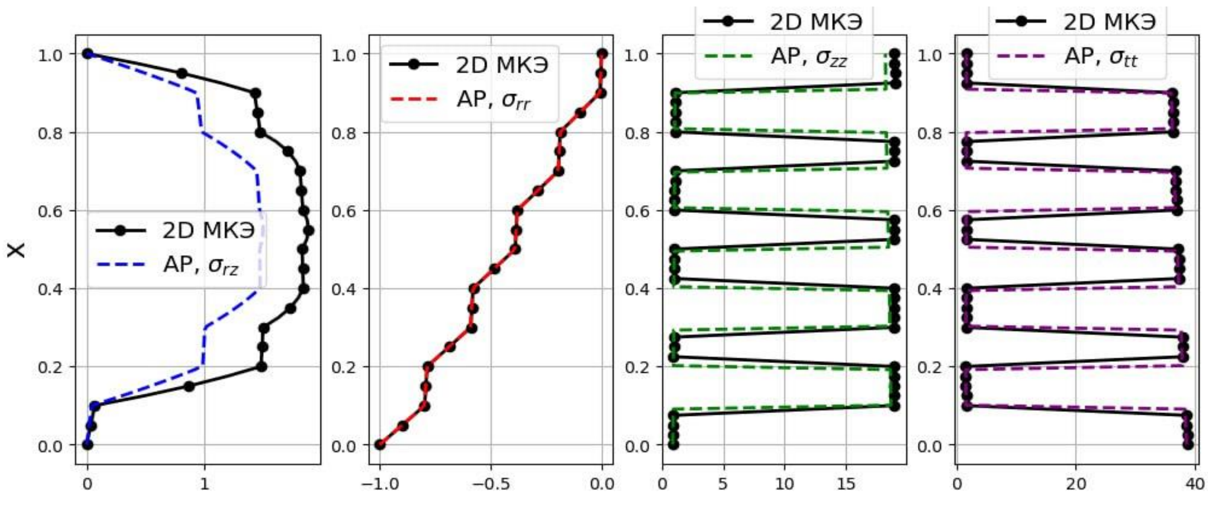
В **разделе 1.4** рассмотрена математическая модель на основе первого приближения метода АР, когда $n_{v_r} = 1$, $n_{v_z} = 0$ в уравнениях (5)

$$\begin{gathered}A_{rr}^{v_z,1}\,\partial_z^1 v_z\varepsilon + A_{rr}^{v_z,3}\,\partial_z^3 v_z\varepsilon^3 + A_{rr}^{v_r,0}\,v_r + A_{rr}^{v_r,2}\,\partial_z^2 v_r\varepsilon^2 + A_{rr}^{v_r,4}\,\partial_z^4 v_r\varepsilon^4 = p(z),\\ B_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z\varepsilon^2 + B_z^{v_r,1}\partial_z^1 v_r\varepsilon + B_z^{v_r,3}\partial_z^3 v_r\varepsilon^3 = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Полученная разрешающая система уравнений (6) имеет шестой порядок и поэтому для неё достаточно шести краевых условий из принципа Сен-Венана. Краевые условия на торцах для системы (6) задаются через величины N_z, N_θ, Q_r, M_r и v_r, v_z, φ_r по принципу Сен-Венана в зависимости от типа крепления. Отметим, что порядок системы (6) совпадает с порядком разрешающей системы ОДУ в рамках классической теории Киргхофа-Лява. Полученные соотношения для математической модели позволяют определять все компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, в том числе поперечные и сдвиговые компоненты.

В **разделе 1.5** проведён ряд численных расчётов в безразмерном виде для композитных и однородных цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления интенсивности p. Разрешающая система ОДУ (6) решалась с помощью метода сплайн-коллокаций, реализованного в библиотеке Scipy на языке Python. Для проверки точности расчётов приведены результаты КЭ моделирования исходной двумерной осесимметричной задачи. В частности, рассмотрена задача деформирования однородной цилиндрической оболочки с жестким защемлением торцов при различных значениях параметров $\varepsilon, \varepsilon_1$. Показано, что метод АР позволяет восстанавливать НДС с достаточной для прикладных задач точностью для коротких $\varepsilon = 0.2$, длинных $\varepsilon = 0.01$, тонкостенных $\varepsilon_1 = 0.2$ и толстостенных $\varepsilon_1 = 0.05$ оболочек.

Рассмотрена задача деформирования 10-слойной ортотропной цилиндрической оболочки с жесткими днищами, слои которой выполнены из ортотропного композитного материала, ориентированного как показано на рисунке 1. На рисунке 2 приведены графики для компонент тензора напряжений по толщине 10-слойной оболочки. Радиальные, продольные и окружные напряжения при безразмерной координате $z = 0.5$ хорошо совпадают с двумерным КЭ расчетом. Для сдвиговых напряжений вблизи торцов при $z = \varepsilon$ наблюдается расхождение с двумерным расчетом порядка 20%, связанное с наличием вблизи торцов пограничных слоёв от задания краевых условий в двумерной модели. Расхождение может быть связано и с ограничением модели на приближенное выполнение условия жесткой заделки на торце. При этом качественно распределение сдвиговых напряжений соответствует двумерному численному расчёту и соблюдается непрерывность распределения сдвиговых и радиальных напряжений по толщине оболочки.



а) б) в) г)

Рисунок 2. Распределение компонент напряжений по толщине 10-слойной оболочки а) σ_{rz}, $z = \varepsilon$, б) σ_{rr}, $z = 0.5$, в) σ_{zz}, $z = 0.5$, г) $\sigma_{\theta\theta}$, $z = 0.5$

Глава 2 посвящена усовершенствованию общей теории пространственного деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода АР. Усовершенствование состоит в расширении теории на решение задач деформирования анизотропных стержней с учётом взаимосвязанности процессов изгиба, кручения и растяжения-сжатия. Научные предпосылки развития теории деформирования анизотропных слоистых стержней описаны в **разделе 2.1**. В **разделе 2.2.** дана постановка задачи деформирования слоистого анизотропного стержня постоянного по длине поперечного сечения произвольной формы в рамках линейной теории упругости. Ось z направлена вдоль стержня и проходит через геометрический центр тяжести (ГЦТ) поперечного сечения стержня (рисунок 3), параллельного плоскости xOy. Для всех слоёв вводится нумерация, i – номер текущего слоя, s – число слоёв. На боковой поверхности стержня действуют распределённые поперечные нагрузки q_x, q_y в направлении осей x и y соответственно и распределённая продольная нагрузка q_z. После обезразмеривания уравнения равновесия и краевые условия на боковой поверхности примут вид

$$\partial_x^1(\sigma_{\alpha x})_i + \partial_y^1\left(\sigma_{\alpha y}\right)_i + \varepsilon\partial_z^1(\sigma_{\alpha z})_i = 0, \tag{7}$$

$$(\sigma_{\alpha x})_i n_x + \left(\sigma_{\alpha y}\right)_i n_y = q_\alpha, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \tag{8}$$

где $\varepsilon = h/L$ – малый параметр, описывающий отношение высоты поперечного сечения стержня h к его длине L; n_x, n_y – компоненты вектора единичной нормали к поверхности стержня либо к границе раздела слоёв. На границе между слоями компоненты вектора перемещений и контактных напряжений непрерывны. Обобщённый закон Гука для анизотропного материала в i-ом слое содержит 21 упругую постоянную $\left(E_{\alpha\beta\varphi\psi}\right)_i$.

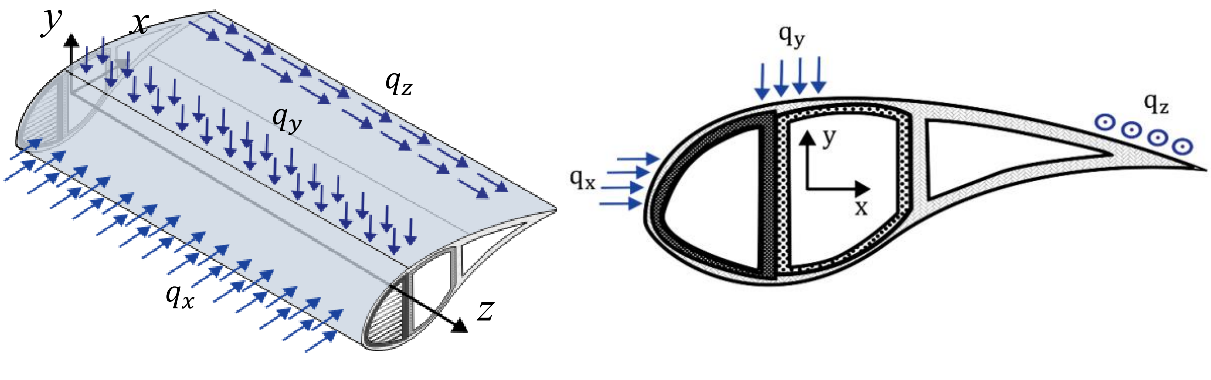


Рисунок 3. Стержень сложного поперечного сечения под действием распределённых нагрузок q_x, q_y, q_z

В **разделе 2.3** приводится процедура расщепления исходной трехмерной задачи на двумерные вспомогательные краевые задачи в сечении стержня и одномерную задачу по его длине. Перемещения точек стержня и компоненты тензора напряжений искались в виде

$$(u_z^\eta)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2}(U_z^\eta)_i^{(k)}\partial_z^k\eta^{(n)}\varepsilon^k, \qquad (u_\alpha^\eta)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3}(U_\alpha^\eta)_i^{(k)}\partial_z^k\eta^{(n)}\varepsilon^k,$$

$$\left(\sigma_{zz}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\tau_{zz}^\eta\right)_i^{(k)}\partial_z^k\eta^{(n)}\varepsilon^k, \qquad \left(\sigma_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+2}\left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(k)}\partial_z^k\eta^{(n)}\varepsilon^k, \tag{9}$$

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+3}\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}\partial_z^k\eta^{(n)}\varepsilon^k, \qquad \alpha, \beta \in \{x, y\},$$

где $\eta^{(n)}(z)$ – функция, описывающая деформирование стержня на макроуровне; $(U_\alpha^\eta)_i^{(k)}, \left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}$ – жесткостные функции вектора перемещений и тензора напряжений, зависящие только от переменных в сечении x, y; n – номер асимптотического приближения.

Для распределённых нагрузок на поверхности стержня предложен новый расщеплённый вид

$$\begin{gathered} q_\alpha(\Gamma, z) = p_\alpha(z) f_\alpha(\Gamma) + m_0(z) g_\alpha(\Gamma), \qquad g_z(\Gamma) = 0, \\ \oint \left(-g_x(\Gamma) y + g_y(\Gamma) x\right) d\Gamma = 1, \qquad \oint f_\alpha(\Gamma) d\Gamma = 1, \qquad \oint g_\alpha(\Gamma) d\Gamma = 0\,, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\alpha \in \{x, y, z\}$, Γ – множество граничных точек поперечного сечения стержня; $f_\alpha(\Gamma), g_\alpha(\Gamma)$ – функции распределения нагрузки по периметру сечения; $p_\alpha(z)$ – суммарные нагрузки в направлении α; $m_0(z)$ – распределённый закручивающий момент относительно ГЦТ сечения.

Из аппроксимации (9), условий на боковой поверхности стержня (8) и соотношений (10) следует дифференциальная связь между функцией макродеформирования $\eta^{(n)}(z)$ и функциями нагрузки $p_\alpha(z), m_0(z)$

$$p_\alpha = \sum_{k=0}^{n+3} B_\alpha^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k\,, \quad p_z = \sum_{k=0}^{n+2} B_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k\,, \quad m_0(z) = \sum_{k=0}^{n+3} R_z^{\eta,k} \partial_z^k \eta^{(n)} \varepsilon^k, \tag{11}$$

где $\alpha \in \{x, y\}$; . $B_\alpha^{\eta,k}, B_z^{\eta,k}, R_0^{\eta,k}$ – жесткостные коэффициенты, определяющиеся как интегралы от функций $\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)_i^{(k)}$.

Из подстановки выражений (9) в уравнения (7), (8) и соотношений (10) следуют вспомогательные краевые задачи в поперечном сечении для порядкового номера k, которые имеют вид

$$\begin{gathered} \partial_x^1 \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_i^{(k)} + \partial_y^1 \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_i^{(k)} + \left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(k-1)} = 0, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}, \\ \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)_i^{(k)} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)_i^{(k)} n_y = B_\alpha^{\eta,k} f_\alpha(\Gamma) + R_z^{\eta,k} g_\alpha(\Gamma), \end{gathered} \tag{12}$$

и образуют при каждом k систему из трех уравнений на три неизвестные функции $(U_\alpha^\eta)_i^{(k)}$. В работе сформулированы необходимые условия разрешимости краевых задач (11), которые имеют следующий вид

$$B_\alpha^{\eta,k} = -\left\langle \left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)_i^{(k-1)} \right\rangle, \quad R_z^{\eta,k} = -\left\langle -\left(\tau_{xz}^\eta\right)_i^{(k-1)} \left(y - A_y\right) + \left(\tau_{yz}^\eta\right)_i^{(k-1)} (x - A_x) \right\rangle, \tag{13}$$

где $\langle \ldots \rangle$ – обозначает операцию интегрирования какой-либо функции по всему поперечному сечению стержня; A_x, A_y – координаты точки сечения стержня, лежащей на пересечении линии действия равнодействующих нагрузок q_x и q_y.

В **разделе 2.4** исследована вспомогательная краевая задача при $k = 0$. Показано, что задача содержит четыре линейно-независимых решения, каждое из которых задаёт свой допустимый способ аппроксимации (9), при этом: для первого способа функция $\eta(z) = v_x$ – среднее перемещение стержня в направлении x; для второго способа $\eta(z) = v_y$ – среднее перемещение стержня в направлении y; для третьего способа $\eta(z) = v_z$ – среднее перемещение стержня вдоль z; для четвёртого способа $\eta(z) = \theta$ – угол закручивания сечения вокруг оси z. Общее решение задачи находится как сумма компонент для четырёх способов аппроксимации

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_i^{(\bar{n})} = \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^{(n_\eta)}, \qquad (u_\alpha)_i^{(\bar{n})} = \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \left(u_\alpha^{\eta}\right)_i^{(n_\eta)}, \tag{14}$$

где $\alpha,\beta \in \{x,y,z\}$, $\bar{n} = \left(n_{v_x}, n_{v_y}, n_{v_z}, n_\theta\right)$ – векторный номер асимптотического приближения, состоящий из номеров для четырёх способов аппроксимации.

В **разделе 2.5** выводится итоговая разрешающая система дифференциальных уравнений для произвольного векторного номера асимптотического приближения $\bar{n}$, которая следует из объединения выражений (11) для четырёх способов аппроксимации

$$\begin{gathered}
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} B_\alpha^{\eta,3}\partial_z^3\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^3 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=4}^{n_\eta+3} B_\alpha^{\eta,k}\partial_z^k\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^k = p_\alpha, \qquad \alpha \in \{x,y\},\\
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} B_z^{\eta,2}\partial_z^2\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^2 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=3}^{n_\eta+2} B_z^{\eta,k}\partial_z^k\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^k = p_z,\\
\sum_{\eta\in\{v_z,\theta\}} R_z^{\eta,2}\partial_z^2\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^2 + \sum_{\eta\in\{v_x,v_y,v_z,\theta\}} \sum_{k=3}^{n_\eta+3} R_z^{\eta,k}\partial_z^k\eta^{(\bar{n})}\varepsilon^k = m_0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) содержит четыре дифференциальных уравнения на четыре неизвестные функции макродеформирования. В разделе получены выражения через функции макродеформирования для внутренних усилий в стержне, а также для углов наклона поперечного сечения, которые используются для постановки краевых условий на торце стержня по принципу Сен-Венана. В **разделе 2.6** рассмотрен частный случай деформирования слоистых стержней с поперечной плоскостью симметрии анизотропии. Показано, что в этом случае общий вид аппроксимации (9) и определяющие уравнения значительно упрощаются.

Глава 3 посвящена численному решению краевых задач в сечениях слоистых стержней и разработке семейства математических моделей GN (Gorynin-Nemirovsky), описывающих деформирование слоистых стержней с разной степенью точности. Название семейства математических моделей GN связано с первыми буквами в фамилиях авторов метода АР. В главе полагается, что материалы в слоях обладают поперечной плоскостью симметрии анизотропии, тем самым рассматривается частный случай общей анизотропии.

В **разделе 3.1** сформулирована модель GN-FOBT (First Order Beam Theory), являющаяся первым приближением при $n_{v_x} = n_{v_y} = 1,\ n_\theta = n_{v_z} = 0$ в разрешающей системе (15). Разрешающая система дифференциальных уравнений для модели GN-FOBT имеет вид

$$\begin{aligned}
&B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_z,3}\partial_z^3 v_z \varepsilon^3 = p_\alpha(z), \qquad \alpha \in \{x,y\},\\
&B_z^{v_x,3}\partial_z^3 v_x \varepsilon^3 + B_z^{v_y,3}\partial_z^3 v_y \varepsilon^3 + B_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z \varepsilon^2 = p_z(z),\\
&R_z^{v_x,4}\partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + R_z^{v_y,4}\partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + R_z^{v_z,3}\partial_z^3 v_z \varepsilon^3 - G_z^{\theta,2}\partial_z^2 \theta \varepsilon^2 = m_0(z).
\end{aligned} \tag{16}$$

Система (16) имеет 12-й порядок. Краевые условия на торцах стержня ставятся через внутренние усилия и/или функции макроперемещений по принципу Сен-Венана. Отметим, что модель GN-FOBT позволяет восстановить все компоненты тензора напряжений и сечение стержня не остаётся плоским в процессе деформирования. В случае кручения однородных стержней полученная модель совпадает с теорией чистого кручения Сен-Венана и обобщает её на случай композитных слоистых стержней.

В **разделе 3.2** сформулирована модель GN-BESVBT (Bernoulli Euler Saint-Venant Beam Theory), которая является упрощением модели GN-FOBT. Показано, что разрешающая система модели GN-BESVBT совпадает с разрешающей системой для ортотропных стержней, полученной на основе гипотез Бернулли-Эйлера и теории чистого кручения Сен-Венана.

В **разделе 3.3** сформулирована модель GN-RWBT (Restrained Warping Beam Theory), которая является следующим асимптотическим приближением при $n_{v_x} = n_{v_y} = n_\theta = n_{v_z} = 1$ в разрешающей системе (15). Разрешающая система ОДУ для модели GN-RWBT имеет вид

$$\begin{aligned}
&B_\alpha^{v_x,4}\partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_y,4}\partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + B_\alpha^{v_z,3}\partial_z^3 v_z \varepsilon^3 + B_\alpha^{\theta,4}\partial_z^4 \theta \varepsilon^4 = p_\alpha(z), \qquad \alpha \in \{x,y\},\\
&B_z^{v_x,3}\partial_z^3 v_x \varepsilon^3 + B_z^{v_y,3}\partial_z^3 v_y \varepsilon^3 + B_z^{v_z,2}\partial_z^2 v_z \varepsilon^2 + B_z^{\theta,3}\partial_z^3 \theta \varepsilon^3 = p_z(z),\\
&R_z^{v_x,4}\partial_z^4 v_x \varepsilon^4 + R_z^{v_y,4}\partial_z^4 v_y \varepsilon^4 + R_z^{v_z,3}\partial_z^3 v_z \varepsilon^3 + R_z^{\theta,4}\partial_z^4 \theta \varepsilon^4 - G_z^{\theta,2}\partial_z^2 \theta \varepsilon^2 = m_0(z).
\end{aligned} \tag{17}$$

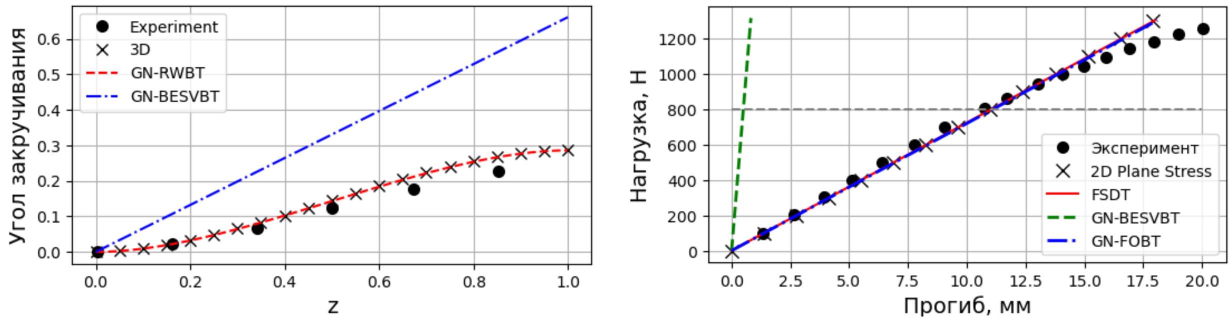
Модель GN-RWBT является обобщением модели GN-FOBT и содержит компоненты, отвечающие за стеснение депланации при кручении. Порядок разрешающей системы ОДУ (17) равен 14 и для постановки двух дополнительных краевых условий на стеснение депланации на торцах стержня вводятся следующие величины

$$\begin{aligned}
&S_z = S_z^{\theta,2}\partial_z^2 \theta \varepsilon^2, \qquad S_z^{\theta,2} = \langle \left(\tau_{zz}^\theta\right)_i^{(2)} \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} \rangle,\\
&D_z = D_z^{\theta,1}\partial_z^1 \theta \varepsilon^1 + D_z^{\theta,3}\partial_z^3 \theta \varepsilon^3, \qquad D_z^{\theta,k} = \langle \left(U_z^\theta\right)_i^{(k)} \left(U_z^\theta\right)_i^{(1)} \rangle,
\end{aligned} \tag{18}$$

где D_z – мера депланации, равная нулю, если депланация на торце стержня стеснена; S_z – величина, характеризующая распределение продольных напряжений в сечении, равная нулю на торце стержня, если депланация свободна. Величина S_z является естественным обобщением понятия бимомента, которое широко используется в механике тонкостенных стержней.

В **разделе 3.4** описывается алгоритм решения краевых задач в поперечных сечениях стержней методом КЭ. Выписаны слабые постановки для краевых задач. Для решения задач методом КЭ в работе используется библиотека конечно-элементного анализа с открытым исходным кодом FEniCS Project. Разработана и зарегистрирована в Роспатенте программа для ЭВМ BASA (Beam Asymptotic Splitting Analysis). Верификация алгоритма расчёта проведена на задачах с известными аналитическими решениями. Краевые задачи для разных способов аппроксимации независимы друг от друга, поэтому с целью сокращения времени вычислений реализована процедура распараллеливания краевых задач, которая позволила уменьшить время расчёта более чем в два раза.

В **разделе 3.5** проведена валидация математических моделей GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT на экспериментальных данных из открытых источников. Рассмотрены следующие задачи: кручение и изгиб композитного коробчатого стержня; кручение и изгиб композитного двутавра, четырёхточечный изгиб сэндвич-панели с мягким заполнителем.



а) б)

Рисунок 4. а) Эпюра угла закручивания по длине композитного двутавра; б) Зависимость нагрузки от прогиба в середине пролета сэндвич панели.

Показано, что в случае кручения и изгиба композитных ортотропных стержней коробчатого сечения модели GN-FOBT, GN-BESVBT, GN-RWBT дают хорошее совпадение с экспериментальными данными. В случае коробчатых сечений и достаточно длинных стержней эффект стеснённого кручения практически незаметен. В свою очередь для задачи изгиба и кручения композитного слоистого двутавра эффект стеснённого кручения оказывает значительное влияние на крутильную жёсткость стержня. На рисунке 4а приведена эпюра угла закручивания по длине композитного двутавра. Стержень заделан с одного конца и нагружен перерезывающей нагрузкой и закручивающим моментом на другом конце. Расчётные значения модели GN-RWBT показали хорошее совпадение с экспериментальными данными и трёхмерным КЭ расчётом (3D), в то время как модель чистого кручения Сен-Венана (GN-BESVBT) в несколько раз занижает жёсткость композитного двутавра при кручении. На рисунке 4б приведен график зависимости нагрузки от величины прогиба в середине пролёта для задачи четырёхточечного изгиба сэндвич-панели с мягким заполнителем. Расчётные значения модели GN-FOBT дают хорошее совпадение с экспериментом, в то время как модель GN-BESVBT на основе гипотез Бернулли-Эйлера завышает жёсткость конструкции на два порядка и более в силу пренебрежения сдвиговыми компонентами деформации.

Глава 4 посвящена моделированию стеснённого кручения композитных слоистых стержней различных типов поперечных сечений на основе математической модели GN-RWBT. В качестве тестовой рассмотрена задача о кручении консольного стержня концевым закручивающим моментом, депланация которого стеснена в заделке. Если при кручении стержень не изгибается, то разрешающая система ОДУ (17) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению кручения

$$R_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + R_z^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 = 0. \tag{19}$$

Уравнение кручения (19) совпадает по своей форме с уравнением кручения в рамках теории тонкостенных стержней Власова. Решение уравнения (19) содержит экспоненциальные слагаемые, которые отвечают за стеснение депланации при кручении и имеют ярко выраженный характер пограничных слоёв, затухающих по мере удаления от торцов стержня. В главе проведёно исследование влияния физико-механических и геометрических параметров поперечных сечений различных типов на величины углов закручивания и характер НДС слоистых стержней в условиях стеснения депланации. Рассмотрено три варианта задания краевых условий на стеснение депланации. Упрощённый вариант RWBT 1, когда мера депланации определяется первой производной от угла закручивания. Вариант RWBT 2, когда мера депланации пропорциональна комбинации первой и третьих производных от угла закручивания стержня. Вариант RWBT avg, который является усреднённой комбинацией первых двух вариантов.

В **разделе 4.1** исследована задача стеснённого кручения однородных и композитных стержней сплошного прямоугольного сечения. Проведено сравнение результатов расчётов по модели GN-RWBT с трёхмерными численными КЭ расчётами (3D) и выявлено, что для относительно коротких композитных прямоугольных стержней продольные напряжения становятся определяющими в общей картине НДС при стеснённом кручении. Показано, что модель GN-RWBT позволяет с удовлетворительной (<10 %) для прикладных задач точностью оценить НДС в основной зоне стержня в удалении от его торцов, что показано на рисунке 5, где приведена эпюра продольных напряжений по длине трёхслойного стержня. Волокна уложены под углом $\alpha = 0$ во внешних слоях и $\alpha = 90$ градусов во внутреннем слое относительно оси z. Характеристики ортотропного материала равны

$$E_1 = 25, E_i = 1,\ G_{1i}0.5, G_{23} = 0.2,\ \ \nu_{1i}\nu_{23} = 0.25,\ \ i = 1,2, \tag{20}$$

где индекс 1 направлен вдоль волокон. По мере удаления от стеснённого торца, продольные напряжения стремятся к нулевому решению Сен-Венана (SV).

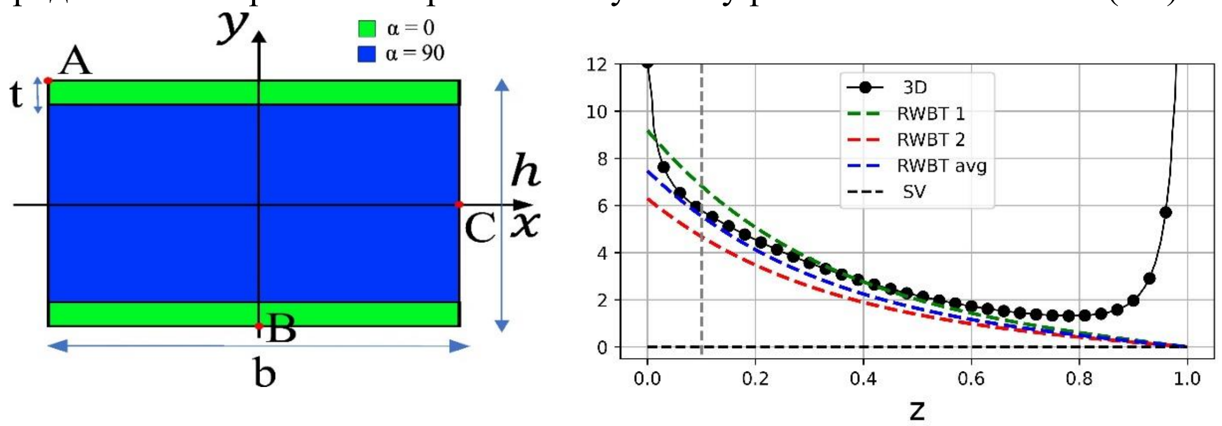


Рисунок 5. а) Структура и ориентация слоёв прямоугольного сечения;
б) Эпюра продольных напряжений в т. А при $\varepsilon = 0.1, t = 0.1, h = 1, b = 5$.

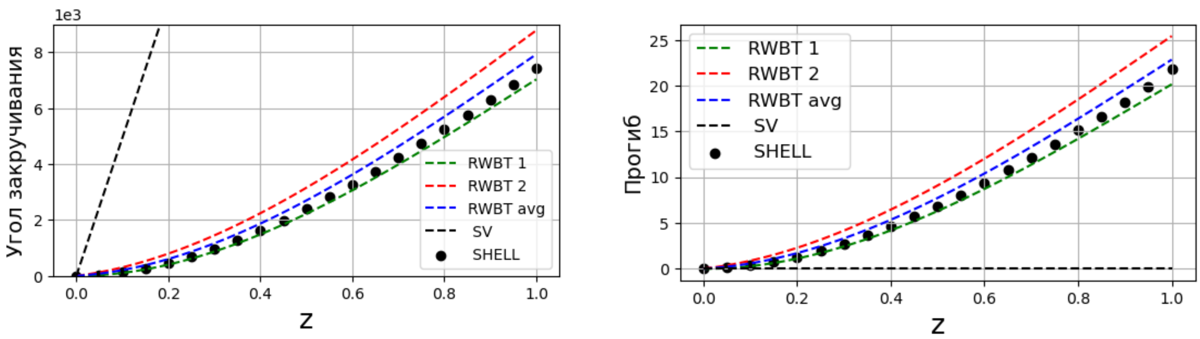
В **разделе 4.2** рассмотрено стеснённое кручение композитных слоистых стержней замкнутого коробчатого сечения. Для коробчатых стержней различной структуры проведены расчеты в рамках моделей GN-RWBT и GN-BESVBT и проведено их сравнение с результатами трехмерного КЭ моделирования. С целью экономии вычислительных ресурсов для трехмерного моделирования тонкостенных слоистых стержней использовалась оболочечная КЭ модель. Показано, что решение на основе чистого кручения (GN-BESVBT) может значительно переоценивать углы закручивания (более 10%), даже для изотропных стержней. Модель GN-RWBT позволяет намного точнее определять угол закручивания и учесть влияние стеснённого кручения для слоистых коробчатых стержней.

Для стержней сплошного и замкнутого профилей сделан вывод о том, что с увеличением ширины сечения b растёт влияние стеснённого кручения на НДС в конструкции. Показано, что для ортотропных и ортотропных слоистых стержней влияние стеснённой депланации значительно выше, чем для изотропных. Усреднённый вариант задания краевых условий RWBT avg даёт более точные значения (в пределах 10%), промежуточные между вариантами RWBT 1 и RWBT 2. Использование варианта RWBT 1, аналогичного краевым условиям в теории Власова, может приводить к значительным погрешностям (до 60% и более).

В **разделе 4.3** исследована задача стеснённого кручения композитных слоистых стержней открытых поперечных сечений, для которых влияние стеснённого кручения проявляется значительно сильнее, по сравнению со сплошными и замкнутыми сечениями. Рассмотрены двутавровое, корытное и уголковые сечения. При кручении корытных или уголковых сечений, показано, что несмотря на отсутствие в системе перерезывающих сил кручение стержня сопровождается его изгибом. Разрешающая система ОДУ (17) может быть сведена к системе из двух уравнений

$$\begin{gathered} B_y^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 + B_y^{v_y,4}\partial_z^4 v_y{}^{(1)}\varepsilon^4 = 0, \\ R_z^{\theta,2}\partial_z^2\theta^{(1)}\varepsilon^2 + R_z^{\theta,4}\partial_z^4\theta^{(1)}\varepsilon^4 + R_z^{v_y,4}\partial_z^4 v_y{}^{(1)}\varepsilon^4 = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

На рисунке 6 приведены эпюры угла закручивания и прогиба для композитного швеллера, полки и стенки которого выполнены из четырех слоёв одинаковой толщины t. Высота сечения $h = 1$, ширина $b = 0.5$. Волокна материала со свойствами (20) уложены попеременно под углом $\alpha = 0$ и $\alpha = 90$ градусов относительно оси z. Видно, что влияние пограничного слоя от стеснения депланации на левом торце захватывает всю длину стержня. Решение на основе чистого кручения Сен-Венана (SV) завышает в несколько раз значения угла закручивания. Модель GN-RWBT дает хорошее совпадение относительно КЭ оболочечной модели (SHELL) как по углу закручивания, так и по прогибу. Из трех типов задания краевых условий лучше всего работают варианты RWBT 1 и RWBT avg, в то время как вариант RWBT 2 завышает значения углов закручивания и прогибов на правом торце в пределах 20%.



а) б)

Рисунок 6. Эпюры а) угла закручивания $\theta^{(1)} \times \varepsilon$ и б) прогиба $v_y{}^{(1)} \times \varepsilon^3$ для ортотропного слоистого швеллера при $\varepsilon = 0.1, t = 0.01$.

Показано, что по сравнению с теорией Власова модель GN-RWBT позволяет учесть пограничный слой вблизи заделки, возникающий при стеснённом кручении уголковых сечений и вносящий существенный вклад в картину НДС вблизи заделки.

Заключение

Основные выводы и научные результаты, полученные в рамках диссертационной работы.

1. На основе первого приближения метода АР разработана математическая модель деформирования многослойной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления. Проведено сравнение полученных в рамках модели решений с КЭ расчётами исходной двумерной задачи. Показано, что математическая модель позволяет с хорошей точностью восстанавливать все компоненты тензора напряжений, в том числе сдвиговые и радиальные компоненты, влиянием которых в классических подходах пренебрегают. При этом порядок разрешающей системы ОДУ остаётся таким же, как и в случае классической теории оболочек Кирхгофа-Лява.
2. Модифицирована теория деформирования слоистых анизотропных стержней на основе метода АР с учётом четвертого способа аппроксимации, описывающего кручение стержня. Получена общая разрешающая система ОДУ, описывающая деформирование анизотропного слоистого стержня и зависящая от малого параметра и количества удерживаемых членов в аппроксимации решения.
3. Разработан алгоритм решения краевых задач в сечении слоистых анизотропных стержней произвольной формы методом КЭ, который положен в основу программы для ЭВМ BASA.
4. Разработано семейство математических моделей GN, позволяющее определять НДС в слоистых стержнях с различной степенью точности. Математическая модель GN-FOBT является первым приближением метода АР. Модель GN-BESVBT является частным случаем модели GN-FOBT и основана на принятии классических гипотез Бернулли-Эйлера при изгибе и на теории чистого кручения Сен-Венана. Показано, что уравнение кручения в математической модели GN-RWBT в частных случаях совпадает с уравнением кручения теории тонкостенных стержней Власова.
5. Проведён сравнительный анализ разработанных моделей и выявлены области их применимости. Для моделей GN-BESVBT, GN-FOBT, GN-RWBT проведено сравнение с экспериментальными данными из открытых литературных источников и показано хорошее совпадение с экспериментами для задач изгиба и кручения слоистых стержней различных типов.
6. В рамках модели GN-RWBT проведено численное моделирование задач стеснённого кручения для различных видов слоистых стержней. Показано, что модель позволяет учитывать эффект стеснённого кручения и восстанавливать НДС для различных типов композитных сечений: открытых, замкнутых и сплошных.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при МОиН РФ:

1. **Горынин, А. Г.** Исследование стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля методом асимптотического расщепления / **А. Г. Горынин**, Г. Л. Горынин, С. К. Голушко // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 3(385). – С. 123-141. –DOI 10.15372/PMTF202315388.
2. **Gorynin, A. G.** Mathematical Modeling of Three-dimensional Stress-strain State of Homogeneous and Composite Cylindrical Axisymmetric Shells / **A. G. Gorynin**, G. L. Gorynin, S. K. Golushko // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – P. 27-37.
3. **Горынин А.Г.**, Горынин Г.Л., Голушко С.К. / Моделирование стесненного кручения композитных стержней сплошных и замкнутых поперечных сечений // Известия вузов. Строительство. – 2024. – № 10. – С. 5-25. – DOI: 10.32683/0536-1052-2024-790-10-5-25

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций, индексируемых в Web of Science и/или Scopus:

4. **Gorynin A.** Analytic solutions for free vibration analysis of laminated beams in three-dimensional statement / S. Golushko, G. Gorynin, **A. Gorynin** //EPJ Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019. – V. 221. – P. 01012.
5. Golushko, S. A new beam element for the analysis of laminated composites based on the asymptotic splitting method / S. Golushko, **A. Gorynin**, G. Gorynin // Journal of Physics: Conference Series : 9, Novosibirsk, 2020. – P. 012066. – DOI 10.1088/1742-6596/1666/1/012066.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

6. **Горынин, А. Г.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665182 Российская Федерация. Программа BASA для расчёта прочности слоистых композитных стержней сложного поперечного сечения : № 2024660781 : заявл. 06.05.2024 : опубл. 27.06.2024

Публикации в других печатных изданиях:

7. Голушко, С. К. Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости / С. К. Голушко, Г. Л. Горынин, **А. Г. Горынин** // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2020. – Т. 188. – С. 43-53. – DOI 10.36535/0233-6723-2020-188-43-53.

Подписано в печать 02.12.2024. Заказ № 323
Формат 60× 84/16. Объём 1 п.л. Тираж 75 экз.
Отпечатано в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15.