ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ЕВСЕЕВ ФЁДОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОМ И ЛИНЕАРИЗОВАННОМ СЛУЧАЕ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Пятков С.Г.

Ханты-Мансийск — 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть E – банахово пространство. Обозначим через $L_p(G;E)$ (G область в $\mathbb{R}^n$) пространство измеримых функций, определённых на G, со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ (см., например, [107, §1.18.4]). Пространства Лебега $L_p(G;E)$ и пространства Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ определены стандартным образом (см. [107, 109]). Стандартным образом определены ианизотропные пространства Соболева $W_p^{s,r}(Q) = L_p(G;W_p^s(0,T)) \cap L_p(0,T;W_p^r(G))$, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Принадлежность $u \in W_p^s(G)$ для заданной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^s(G)$. Аналогичное соглашение примем для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ ($a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i, j. Для заданного интервала $J = (0,T)$, положим

$$W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J;L_p(G)) \cap L_p(J;W_p^r(G))$$

и

$$W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma)).$$

Определения пространств Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{G};E)$, $C^{\alpha}(\overline{Q};E)$ ($\alpha \geq 0$), и т.д. могут быть найдены, например, в [3]. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то символ E не используем и обозначения упрощаются, пишем просто $W_p^s(G)$ и т.д. Выражение (u,v) есть скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$, т. е. $(u,v) = \int_G u(x)v(x)\,dx$. Используем то же обозначение (если не оговорено противное) в случае пространства $L_2(G)$ вектор-функций $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Также используем обозначение $\vec{u} \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, для векторов $\vec{u}, \vec{v}$ имеем $(\vec{u}, \vec{v}) = \int_G \vec{u} \cdot \vec{v}\,dx$. Положим также $Q_\gamma = (0,\gamma) \times G$, $S_\gamma = (0,\gamma) \times \Gamma$. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты мы считаем вещественными. Для сокращения записи, пространства вектор-функций и скалярных функций обозначаем одним и тем же символом и включение $\vec{v} \in W_p^s(G)$ в вектор-функции v означает, что каждая координата вектор-функции принадлежит $W_p^s(G)$. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат, если не оговорено противное. Определение включения $\Gamma \in C^s$ можно найти, например, в [3, глава 1].

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи.

Данная работа посвящена исследованию обобщенной и регулярной разрешимости в пространствах Соболева начально-краевых задач для систем уравнений квазигидродинамического типа.

Основное внимание уделено системам квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, в том числе эти системы рассмотрены в приближении мелкой воды и Обербека-Буссинеска. В качестве функциональных пространств использовались пространства Соболева и весовые пространства Соболева. Большое количество приложений таких систем и необходимая библиография имеются, например, в работах [1, 2].

Система квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости имеет вид (см. параграф 1.2 в [1]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho div\,\vec{u}\otimes\vec{u} + \nabla p = \rho\vec{f} + 2\eta div\,\sigma + \rho div\,((\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{w})), \tag{1}$$

где тензор скоростей деформации σ имеет форму:

$$\sigma(\vec{u}) = \frac{1}{2}((\vec{\nabla}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{\nabla})^T),\ \ \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}).$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле $\vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f})$. Плотность ρ, коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константам. Векторное поле $\vec{f} = \vec{f}(x,t)$ определяет массовую плотность внешних сил. Система (1) замкнута относительно неизвестных функций – вектора скорости $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$ и давления $p = p(x,t)$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Мы будем записывать систему (1) в следующем виде (см. параграф 1.2 в [1]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\;\; \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\;\; (t,x) \in Q = (0,T)\times G,\;\; G \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u}, \quad (2)$$

где G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$ (см. определения в [3, гл. 1]), $\mu = \eta/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Будем искать решение системы (2), удовлетворяющее начальным и граничным условиям, вида:

$$\vec{u}|_S = 0,\;\; \vec{u}|_{t=0} = u_0,\;\; \vec{w}\cdot\nu|_\Gamma = 0, \quad (3)$$

и условиям нормировки, вида:

$$\int_G p(t,x)\,dx = 0, \quad (4)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ.

Для стационарной системы (2)

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\;\; \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\;\; x \in G,\;\; G \subset \mathbb{R}^3,$$
$$(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u},\;\; \mu = \eta/\rho, \quad (5)$$

граничные условия и условиям нормировки имеют вид:

$$\vec{u}|_\Gamma = 0,\;\; \vec{w}\cdot\nu|_\Gamma = 0,\;\; \int_G p(x)dx = 0, \quad (6)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ.

Мы также исследуем систему (2) в приближении Обербека-Буссинеска (см. параграф 2.6 в [2]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\;\; \vec{w} = \tau[(\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \beta\vec{g}T],$$
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mu\nabla\vec{u} + \nabla(div\,\vec{u})\mu + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u} - \beta\vec{g}T + \vec{f},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)T = \chi\Delta T + f_0,\;\; (t,x) \in Q = (0,Z)\times G,\;\; G \subset \mathbb{R}^3, \quad (7)$$

где $\rho = const > 0$ - среднее значение плотности, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ - вектор скорости, $p = p(\vec{x}, t)$ - давление, $T = T(\vec{x}, t)$ - отклонение температуры от ее среднего значения $T_0 = const > 0$, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения. Температурный коэффициент расширения жидкости β, характерное время релаксации τ, теплопроводность ζ и температуропроводность $\chi = \zeta(\rho C_p)$ считаются заданными положительными константами.

Система (7) дополняется начальными и граничными условиями, и условиями нормировки:

$$\vec{u}|_S = 0,\;\; T|_{S_0} = 0,\;\; \frac{\partial T}{\partial \nu}|_{S_1} = 0,\;\; \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x),$$
$$T|_{t=0} = T_0(x), \int_G p(t,x)dx = 0,\;\; \frac{\partial p}{\partial \nu} + \vec{g}\nu T|_S = 0, \quad (8)$$

где ν внешняя единичная нормаль к $\Gamma \in C^2$, Γ_0 и Γ_1 некоторые открытые подмножества Γ, такие, что $\overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 = \Gamma$ и $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, положим $S_i = (0, Z) \times \Gamma_i$, $i = 0, 1$.

Линеаризуя систему (2) на известном решении $(\vec{v}, p_0)$, приходим к системе следующего вида:

$$div\, \vec{V} = div\, \vec{W},\;\;\; \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P =$$
$$\vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla div\, \vec{V} + (\vec{v}, \nabla)\vec{W} + (\vec{V}, \nabla)\vec{w}_0 + \vec{W} div\, \vec{v} + \vec{w}_0 div\, \vec{V}, \quad (9)$$

где $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \vec{f}_0)]$ и $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F}]$.

Начальные и граничные условия, а также условия нормировки для системы (9) имеют вид:

$$\vec{V}|_S = 0,\;\; \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x),\;\; \vec{W} \cdot \nu|_S = 0,\;\; \int_G P\, dx = 0, \quad (10)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ. Стационарная часть системы (10) (см. также системы (5), (7), (9)) не является равномерно эллиптической, и, соответственно, в нестационарном случае она не является равномерно параболической, причем как эллиптические, так и параболические уравнения содержат старшие производные неизвестных давления p, вектора скорости $\vec{u}$ и температуры T (для системы (7)).

Мы также будем рассматривать систему квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, которая имеет вид (см. параграф 3.1 в [1]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div\,(h\vec{u}) = div\,(h\vec{w}),\ \ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + g\nabla h),$$
$$\frac{\partial (h\vec{u})}{\partial t} + div\,(h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla(\frac{h^2}{2}) = 2div\,(\nu h\hat{\sigma}(\vec{u})) + div\,(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}),$$
$$(t,x)\in Q = (0,T)\times G,\ \ G\subset\mathbb{R}^2. \quad (11)$$

- где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T],\ \ \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Пусть $S = (0,T)\times\Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t,x_1,x_2), u_2(t,x_1,x_2))$ – усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t,x_1,x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости x_1ox_2, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9.8\ (m/c^2)$, равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Система (11) дополняется начальными и граничными условиями:

$$\vec{u}|_S = 0,\ \ (\vec{w}\cdot\vec{n})|_S = 0,\ \ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1,x_2),\ \ h|_{t=0} = h_0(x_1,x_2), \quad (12)$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали к Γ. Отметим, что второе условие в (12) влечет, что $\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}|_S = 0$.

Все коэффициенты рассматриваемых уравнений и систем, равно как и данные задач, мы считаем вещественными.

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Система (2) в более общем виде была выведена Елизаровой Т.Г. и Четверушкиным Б.Н. в 80-е годы в работах [4], [5] на основе известной кинетической модели. Первые варианты системы дифференциальных уравнений в частных производных называются системой квазигазодинамических (КГД) уравнений. Посвященную ей теорию и ее вывод можно найти в монографиях [2, 6–8]. Позднее, в 90-е годы на основе более общего уравнения состояния была предложена еще одна модель [9, 10], которая получила название квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений. В частности, вывод этой модели и некоторые результаты можно найти в монографиях [1], [2]. Здесь, в случае слабосжимаемой жидкости (т.е. для системы (2)) были доказаны теоремы о диссипации полной энергии, теоремы единственности для классических решений начально-краевой задачи, построены общие точные решения систем Эйлера, Навье-Стокса и КГиД уравнений для плоских установившихся течений, а также исследованы свойства решений КГиД системы в баротропном приближении. Для линеаризованных КГиД уравнений получены энергетические равенства и оценки, доказаны теорема о единственности классического решения начально–краевой задачи и теорема об асимптотической устойчивости равновесного решения. В работах [11–14] описаны точные решения, общие для систем Навье-Стокса и КГиД уравнений. Так, в статье [11] Шеретов Ю.В. построил интегрируемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой является частным случаем решения исходной стационарной КГиД системы уравнений, им же был сформулирован и доказан принцип суперпозиции решений для исходной нелинейной КГиД системы уравнений [15].

Сошлемся также на работы Злотника А.А. [16–21], в которых были получены результаты по части анализа некоторых неклассических задач для КГиД уравнений. В работе [18] (см. также [19]) была обобщена КГиД модель на случай произвольного уравнения состояния, удовлетворяющего условиям термодинамической устойчивости, наличия внешних сил и источников тепла. Для линеаризованной КГиД системы им же получены результаты о существовании и единственности обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач в случае реального и политропного газа на произвольном временном промежутке, выведены соответствующие энергетические неравенства. В [20], на основе линеаризованной КГД системы уравнений на постоянном решении строилась система с общей регуляризующей скоростью, а также устанавливалось вырождение свойства параболичности исходной системы. Позднее, Злотником А.А. была впервые получена регуляризация квазигазодинамического типа гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), для которой строилась реализующая ее явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема в 1D случае и приводятся численные результаты [21]. Данным направлением исследования также занимались такие математики и механики, как Зейтунян Р.Х. [22], Шелухин В.В. [23], Шильников Е.В. и Хайталиев И.Р. [24], Попов М.В. [25], Дородницын Л.В. [26].

Для описания конвективного течения жидкости и газа была выведена квазигидродинамическая система уравнений в приближении типа Обербека-Буссинеска (7). Вывод этой системы и некоторые результаты численного моделирования подробно изложены в работе [2] (см. также [27], [28]). Здесь, для случая слабосжимаемой жидкости в приближении Обербека-Буссинеска (т.е. для системы (7)), были построены явные однородные разностные схемы, позволяющие рассчитать реальные конвективные течения в плоском вертикальном и горизонтальном слоях на относительно грубых пространственных сетках и в широком диапазоне параметров. Такие системы возникают во многих приложениях. В частности, в статье [29] был описан приближенный способ построения системы (7) путем осреднения классической системы уравнений Навье-Стокса по малому интервалу времени. Предложенный подход поясняет физическую природу регуляризующих слагаемых. Авторами работы [30] с помощью метода численного решения квазигидродинамических уравнений в случае вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM приводится пример моделирования течения расплава в задаче о выращивании кристалла методом Чохральского. Данный подход обеспечивает устойчивое численное решение нестационарных трёхмерных задач гидродинамики для условий с доминирующим влиянием инерционных и тепловых сил.

Отметим, что система (2) (см. также системы (5), (7), (9)) при определенных условиях является эллиптико-параболической системой, причем как эллиптические, так и параболические уравнения содержат старшие производные неизвестных давления p, вектора скорости $\vec{u}$ и температуры T (для системы (7)). Опишем некоторые близкие модели. В статье [31], для решения задачи двухфазной неизотермической фильтрации, рассматривается система, состоящая из одного эллиптического и двух параболических уравнений, при известных краевых условиях. Авторами работы [32], используя технику множителей Фурье, была доказана априорная оценка для сильных решений эллиптико-параболических уравнений смешанного типа в пространстве Соболева. В [33] описано семейство моделей течения и переноса многомасштабной однофазной жидкости в неоднародных пористых средах, основанных на эллиптико-параболической системе, состоящей из эллиптического уравнения для установившегося течения и параболического уравнения для переходной адвекции-диффузии.

Эллиптико-параболические системы нередко возникают в прикладных задачах. Так, например, авторами работы [34] был использован новый подход для нелинейной системы, которая состояла из одного параболического уравнения для концентрации и двух эллиптических уравнений для потенциалов, используемой при моделировании литий-ионных аккумуляторов. В [35] проведено построение осредненных моделей для решения задачи двухфазной неизотермической фильтрации, представляющая собой систему, состоящая из одного эллиптического и двух параболических уравнений при известных краевых условиях. В статье [36] для эллиптико-параболической системы, представляющая собой обобщенные и регуляризованные уравнения Камассы-Холма, были получены оценки устойчивости решений. Также, можно выделить некоторые работы, посвященные моделям хемотаксиса [37–39], описывающие возникновение пространственных структур в популяциях примитивных бактерий. В зависимости от свойств хемоаттрактантов, которые в неоднородной среде направляют хемотаксис, система сводится к эллиптико-параболической системе [40, 41].

Уравнения в теории мелкой воды описывают процессы в природе, связанные с движением несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести и характеризующиеся пренебрежительно малым размером вертикального масштаба по сравнению с размером по горизонтали, например, моделирование длинных волн, цунами [42–44]. Система КГиД уравнений в теории мелкой воды (11) является аналогом уравнения Сен-Венана [1], представляющего собой систему нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, которые аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера [45], и аналогом которой в газовой динамике является КГД система уравнений, выведенная Елизаровой Т.Г. и Четверушкиным Б.Н. [6, 7]. Вывод уравнений Сен-Венана и их детальный анализ свойств представлены в [14, 46–48]. Отдельно уделим внимание работам [49–53], в которых исследуются вопросы разрешимости теоремы существования и единственности решений уравнений Сен-Венана. В статье [49] авторами исследована единственность классического решения системы одномерных уравнений Сен-Венана. Локальное по времени и глобальное существование классических решений для диссипативных уравнений мелкой воды рассматривается в [50] и [51], соответственно. В работе [52] изучается задача Коши для одномерных уравнений Сен-Венана с использованием топологического подхода, основанный на теории суммы двух операторов с фиксированной точкой в банаховых пространствах. В [53] двумя методами решается начально-краевая задача для системы уравнений Сен-Венана. Некоторые результаты численного решения задач в теории мелкой воды, в которых для моделирования течений сплошной среды использовался численный метод построения алгоритмов на основе разностных схем, представлены в [54–56].

Опишем некоторые результаты, посвященные численному и аналитическому решению задач в теории мелкой воды (уравнений Сен-Венана). В работах Ляпидевского В.Ю. и Чеснокова А.А. [44, 57–59] большое внимание уделяется построению и анализу нелинейных математических моделей, отражающие влияние неоднородностей полей скорости и плотности на структуру волн в стратифицированных и многофазных течениях, описываемые гиперболическими системами дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в теории мелкой воды. В работе [57] для описания стационарных и нестационарных волн используются модели второго приближения теории мелкой воды, а также их гиперболические аппроксимации. В [58] в приближении теории мелкой воды рассматривается горизонтально-сдвиговое движение однородной жидкости в открытом канале, построены стационарные решения уравнений движения и решена задача о структуре слоя смешения. Для многослойной стратифицированной мелкой воды исследованы стационарные решения уравнений движения, предложена неоднородная система одномерных законов сохранения [59]. В описанных выше работ выполнены верификация предложенных моделей на основе сравнения с известными экспериментальными данными и численными решениями уравнений в теории мелкой воды.

Следует отметить, что на развитие и разработку моделей движения слоистой жидкости существенное влияние оказала работа Овсянникова Л.В., посвященная исследованию моделей двухслойной мелкой воды [60]. Авторами работы [61] для уравнений мелкой воды построены решения начально-краевых задач в виде рядов, локально сходящихся в окрестности подвижной границы вода-суша для произвольного рельефа дна, получены результаты аналитических решений для аппроксимаций краевых условий на подвижной линии уреза. В [62] методом Роте получено доказательство однозначной разрешимости для одномерной системы нелинейных уравнений гиперболического типа - уравнений мелкой воды в дивергентной форме. Отметим также работы Тешукова В.М. [63–67].

В статьях [68, 69] рассматриваются подходы получения точных решений уравнений в приближении мелкой воды в пространственной постановке. Тестовые задачи, основанные на решениях [68, 69], неоднократно использовались для верификации численных алгоритмов [70–74].

Отметим некоторые результаты, посвященные методам построения разрывных решений уравнений в теории мелкой воды. В работе [24] рассматривается решение КГД системы уравнений локальным разрывным методом Галеркина (ЛРГ). Для обеспечения монотонности решения, полученного ЛРГ методом, введены так называемые ограничители наклона, которые представляют собой некоторый оператор, действующий на функцию приближенного решения на каждом интервале $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$. Проведена модификация оператора для сглаживания осцилляций на участках постоянства решения. Большой вклад в исследование уравнений в теории мелкой воды с использованием методов построения разрывных решений внесли работы Остапенко В.В. [75, 76]. В [75] рамках однослойной модели теории «мелкой воды» изучаются течения над разрывом отметки дна (уступом дна), выделены допустимые устойчивые течения на таком разрыве. В работе [76] изучается разрешимость задачи о течениях, возникающих при разрушении плотины на скачке ширины прямоугольного канала, показано, что в первом случае задача однозначно разрешима в предположении о сохранении полной энергии потока на скачке ширины канала, во втором случае решение задачи при некоторых начальных данных существует только при условии потери полной энергии потока на этом скачке. Некоторые результаты представлены также в [77–79].

В последнее время уравнения гидродинамики квазигидродинамического типа (см. системы (1), (2) и (11)) широко используются для построения численных методов решения прикладных задач [6, 80–82]. Так, значительные успехи были достигнуты Елизаровой Т.Г. [6], при моделировании турбулентных течений. В монографии [80] на основе КГД и КГиД уравнений были построены эффективные конечно-разностные алгоритмы расчета вязких нестационарных течений и приведены примеры численных расчетов. Результаты теоретического обоснования КГиД моделей в случае течения многокомпонентной жидкости представлены в работах [81, 82]. Было показано, что подход, основанный на КГиД уравнениях, не уступает аналогам. Некоторые последние результаты также представлены в [83–87].

Немалый вклад модели, основанные на системе КГиД уравнений (см. системы (1), (2) и (11)), внесли в решение задач, посвященные технологии «цифровой керн», суть которой заключается в прямом численном моделировании течений в масштабе порового пространства пород-коллекторов нефти и газа с разрешением структуры этого пространства и динамики межфазных границ [88]. Так, в [89] авторами рассматривается задача определения коэффициента проницаемости микрообразцов горных пород по данным их микротомограммы на основе прямого гидродинамического моделирования, где в качестве базовой математической модели течения многокомпонентной жидкости используется КГиД система уравнений с учётом поверхностных эффектов. В работе [90] для описания многофазных течений используется квазигидродинамическая регуляризация модели Навье–Стокса–Кана–Хилларда, состоящая в добавлении в уравнения системы специальных диссипативных слагаемых, пропорциональных малому параметру, имеющему размерность времени. Для моделей без учёта поверхностных эффектов этот подход представлен в монографиях [80, 91]. Отметим результаты работы [106], в которой для описания динамики жидкости используются уравнения Навье–Стокса (в однофазном случае) и Навье–Стокса–Кана–Хилларда (в двухфазном случае), регуляризованные согласно квазигидродинамическому подходу. На основе соответствующих уравнений рассматривается программный комплекс DiMP-Hydro, предназначенный для моделирования микротечений однофазных и двухфазных вязких сжимаемых жидкостей с различной реологией в пространственных областях, геометрия которых имеет воксельное представление, актуальное для применения методов рентгеновской компьютерной томографии.

В данной работе мы изучаем вопросы разрешимости краевых задач для систем (2), (5), (7), (9) и (11), в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений. Стоит отметить, что теоретических результатов, посвященных вопросам разрешимости начально-краевых задач, для таких систем очень мало. Тем не менее, в модельных случаях нетрудно получить условия разрешимости таких задач в пространствах Соболева. Прежде всего, мы можем сказать, что существуют априорные оценки для гладких решений задачи (2), (3). Это справедливо и в случае задач (5), (6), (7), (8), (9), (10) и (11), (12). Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Цели и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является доказательство локальных и глобальных теорем существования и единственности решений краевых задач для квазигидродинамических систем уравнений в случае слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также этим системам в приближении мелкой воды и Обербека-Буссинеска, изучение качественных свойств этих решений.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости, в классах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Исследовать вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
3. Исследовать вопросы существования обобщенных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае.

Методы исследования.

При исследовании краевых задач в работе использованы методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, используются классические результаты о разрешимости эллиптических и параболических задач, методы доказательства разрешимости краевых задач с использованием теоремы о неподвижной точке и метод Галёркина, основанный на использовании и получении априорных оценок решений. При этом используется теорема вложения, интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

Краткое содержание работы.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, приложения и заключения. Список литературы состоит из 137 наименования. Полный объём работы составляет 142 страницы. Опишем содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы работы, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также, в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов работы.

Первая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматриваются задачи (2)–(4), (5), (6) и (7), (8).

В первом параграфе главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

Во втором параграфе главы рассматривается вопросы об обобщенной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (2) с начально-краевыми условиями (3), (4) в пространствах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности. Опишем основные результаты. Пусть $\vec{u}, p$ – достаточно гладкое решение задачи (2), (3), (4). Первое и второе уравнение системы (2) умножим на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, такие, что $\varphi \in L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\vec{\psi}|_S = 0$ и интегрируем по области G. Получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi) = (\vec{w},\nabla\varphi), \quad (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}) = (\vec{f},\vec{\psi}), \quad (13)$$

справедливые при п.в. t. Равенство (13) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (2), (3), (4). Функции $\vec{u} \in L_2(0,T;W_2^1(G)) \cap L_\infty(0,T;L_2(G))$, $u_t \in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^{-1}(G))$, $p \in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^1(G))$, $p_1 = 5/4$, такие, что $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u} \in L_2(Q)$, удовлетворяющие (3), (4), называются обобщенным решением задачи (2), (3), (4), если

$$\int_0^T (\vec{u}, \nabla\varphi)\,dt = \int_0^T (\vec{w}, \nabla\varphi)\,dt, \quad \int_0^T \Big[(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) + \mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\Big]\,dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{\psi})\,dt, \quad (14)$$

для всех функций $\varphi \in L_2(0,T; W_2^1(G))$ с $\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0, \vec{\psi} \in L_5(0,T; W_5^1(G))$ и $\vec{\psi}|_S = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{f} \in L_2(Q)$, $\vec{u}_0 \in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (2), (3), (4) *такое, что* $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0,T; L_{p_0}(G))$ *для любого* $p_0 \in [1, 3/2]$, *где* $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$.

Для исследования обобщенной разрешимости задачи (2), (3), (4) в весовых пространствах Соболева в случае $T = \infty$ используем в качестве определения обобщенного решения интегральное тождество (14), для всех функций $\varphi \in L_2(0,\infty; W_2^1(G))$ с $\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0, \vec{\psi} \in L_5(0,\infty; W_5^1(G))$ и $\vec{\psi}|_S = 0$, имеющих ограниченный по t носитель. Вводятся весовые функции вида: $\beta(t) = e^{\gamma t}$ $(\gamma \neq 0, \gamma \leq \gamma_0 = \mu/2\delta_0)$, где δ_0 - постоянная из неравенства Пуанкаре:

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq \delta_0 \int_G |\nabla\vec{u}|^2 dx, \quad \vec{u}|_\Gamma = 0,$$

и $\beta(t) = (M+t)^{-\gamma}$ $(\gamma \neq 0)$, где $M > 0$ есть постоянная.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{f}\sqrt{\beta} \in L_2(Q)$, $\vec{u}_0 \in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (2), (3), (4) *такое, что* $\sqrt{\beta}u \in L_2(0,\infty; W_2^1(G))$, $\sqrt{\beta}\vec{u} \in L_\infty(0,\infty; L_2(G))$, $\sqrt{\beta}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \in L_2(Q)$, $\beta(\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0,\infty; L_{p_0}(G))$, $\nabla p\beta^\alpha \in L_{q_0}(0,\infty; L_{p_0}(G))$, $\vec{u}_t\beta^\alpha \in L_{q_0}(0,\infty; W_{p_0}^{-1}(G))$ *для любого* $p_0 \in [1, 3/2]$ *и* $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$, *где* $\alpha < 1/2$, *если* $\beta = e^{\gamma t}$ $(\gamma > 0)$ *и* $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$, *если* $\beta = (t+M)^{-\gamma}, \gamma < 0$; $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$ *и* $\alpha \geq 1$, *если* $\beta = (t+M)^{-\gamma}, \gamma > 0$; $\alpha \geq 1$, *если* $\beta = e^{\gamma t}$ $(\gamma < 0)$.

В третьем параграфе главы рассматривается вопрос об обобщенной разрешимости краевой задачи для стационарной квазигидродинамической системы уравнений (5) с начально-краевыми условиями (6) в пространствах Соболева. Приведем основной результат. Пусть $\vec{u}, p$ – достаточно гладкое решение задачи (5), (6). Первое и второе уравнение системы (5) умножим на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, такие, что $\varphi \in W_2^1(G)$, $\int_G \varphi(x)\,dx = 0$, $\vec{\psi} \in W_2^1(G)$, $\vec{\psi}|_S = 0$.

Получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi)=(\vec{w},\nabla\varphi),\quad \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})-((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})+$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})=(\vec{f},\vec{\psi}). \quad (15)$$

Равенство (15) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (5), (6). Функции $\vec{u}\in W_2^1(G)$, $p\in W_{3/2}^1(G)$, удовлетворяющие (6) и такие, что $\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_2(Q)$ называются обобщенным решением задачи (5), (6), если

$$(\vec{u},-\vec{w},\nabla\varphi)=0,$$
$$-((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+$$
$$((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})-(\vec{f},\vec{\psi})=0$$

для всех функций $\varphi\in W_2^1(G)$ с $\int_G\varphi(x)\,dx=0, \vec{\psi}\in W_3^1(G)$ и $\vec{\psi}|_S=0$.

Теорема 3. *Пусть* $\vec{f}\in L_2(G)$, $\vec{u}_0\in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (5), (6) *такое, что* $\vec{u}\in W_2^1(G)$, $\vec{w}\in L_2(G)$, $\nabla p,(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_{3/2}(G)$.

В четвертом параграфе главы рассматривается вопрос об обобщенной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений (7) с начально-краевыми условиями (8) в приближении Обербека-Буссинеска в пространствах Соболева. Опишем основные результаты. Также, как и выше, $\vec{u},p$ – достаточно гладкое решение задачи (7), (8). Первое, второе и третье уравнение системы (7) умножим на функции φ, $\vec{\psi}$ и ξ соответственно, такие, что $\varphi\in L_2(0,Z;W_2^1(G))$, $\int_G\varphi(t,x)\,dx=0$, $\vec{\psi}\in L_5(0,Z;W_5^1(G))$, $\vec{\psi}|_S=0$, $\xi\in L_5(0,Z;W_5^1(G))$ и $\xi|_{S_0}=0$. Получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi)=(\vec{w},\nabla\varphi),\quad (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi})-((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})+(\beta\vec{g}T,\vec{\psi})=(\vec{f},\vec{\psi}),$$
$$(\frac{\partial T}{\partial t},\xi)-((\vec{u}-\vec{w})T,\nabla\xi)+\chi(\nabla T,\nabla\xi)=(f_0,\xi), \quad (16)$$

справедливые при п.в. t. Равенство (16) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (7), (8). Пусть $p_0\in[1,3/2]$, $q_0=2p_0/(4p_0-3)$.

Функции $\vec{u} \in L_2(0,Z;W_2^1(G)) \cap L_\infty(0,Z;L_2(G))$, $\vec{u}_t \in L_{5/4}(0,Z;W_{5/4}^{-1}(G))$, $p \in L_{5/4}(0,Z;W_{5/4}^1(G))$, $T \in L_2(0,Z;W_2^1(G)) \cap L_\infty(0,Z;L_2(G))$ такие, что $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u} + \beta\vec{g}T \in L_2(Q)$, удовлетворяющие (8), называются обобщенным решением задачи (7), (8), если

$$\int_0^Z (\vec{u},\nabla\varphi)\,dt = \int_0^Z (\vec{w},\nabla\varphi)\,dt, \quad \int_0^Z \Big[(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) +$$

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}) + (\beta\vec{g}T,\vec{\psi})\Big]dt = \int_0^Z (\vec{f},\vec{\psi})\,dt,$$

$$\int_0^Z \Big[(\frac{\partial T}{\partial t},\xi) - ((\vec{u}-\vec{w})T,\nabla\xi) + \chi(\nabla T,\nabla\xi)\Big]dt = \int_0^Z (f_0,\xi)dt,$$

для всех функций $\varphi \in L_2(0,Z;W_2^1(G))$ с $\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_5(0,Z;W_5^1(G))$, $\vec{\psi}|_S = 0$, $\xi \in L_5(0,Z;W_5^1(G))$ и $\xi|_{S_0} = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\vec{f}, f_0 \in L_2(Q)$, $\vec{u}_0, T_0 \in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (7), (8), *такое, что* $\nabla p, (\vec{u},\nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))$ *для любого* $p_0 \in [1,3/2]$, *где* $q_0 = 2p_0/(4p_0-3)$.

Вторая глава состоит из пяти параграфов. В ней рассматриваются задачи (2)–(4), (9), (10) и (11), (12).

В первом параграфе главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов данной главы.

Во втором параграфе главы рассматриваются вопросы об обобщенной и регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в линеаризованном случае (9) с начально-краевыми условиями (10). Приведем основные результаты. Пусть $\vec{v}, p_0$ - известное решение задачи (2), (3) с данными $\vec{f}_0, \vec{v}_0$, вместо $\vec{f}, \vec{u}_0$, вектор $\vec{v}$ обращается в нуль на S и $\int_G p_0\,dx = 0$. Проводим линеаризацию системы на этом решении. Подставляем функции $\vec{u} = \vec{v} + \varepsilon\vec{V}$ (вектор $\vec{V}$ обращается в нуль на S), $p = p_0 + \varepsilon P$ ($\int_G P\,dx = 0$), $\vec{f} = \vec{f}_0 + \varepsilon\vec{F}$, $\vec{u}_0 = \vec{v}_0 + \varepsilon\vec{U}_0$ в систему вместо $\vec{u}$, p, $\vec{f}, \vec{u}_0$ и сокращаем слагаемые второго порядка относительно ε. Мы приходим к линеаризованной системе:

$$div\,\vec{V} = div\,\vec{W}, \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{v}-\vec{w}_0,\nabla)\vec{V} + (\vec{V}-\vec{W},\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P =$$

$$\vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla div\,\vec{V} + (\vec{v},\nabla)\vec{W} + (\vec{V},\nabla)\vec{w}_0 + \vec{W}div\,\vec{v} + \vec{w}_0 div\,\vec{V}. \quad (17)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$\vec{V}|_S = 0,\ \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x),\ \vec{W}\cdot\nu|_S = 0,\ \int_G P\,dx = 0. \tag{18}$$

Назовем обобщенным решением задачи (17), (18) функции $\vec{V}, P$, такие, что $\vec{V} \in L_\infty(0,T;L_2(G)) \cap L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\vec{V}_t \in L_2(0,T;W_2^{-1}(G))$, $P \in L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\int_G P(t,x)\,dx = 0$, и

$$\int_Q (\vec{V} - \vec{W})\nabla\varphi(t,x)\,dx = 0,\ \forall\varphi \in W_2^1(G),$$

$$\int_Q (-\vec{V}\cdot\vec{\psi}_t + (\vec{v} - \vec{w}_0,\nabla)\vec{V}\cdot\vec{\psi} + (\vec{V} - \vec{W},\nabla)\vec{v}\cdot\vec{\psi} + \frac{1}{\rho}\nabla P\cdot\vec{\psi} =$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\psi} - \mu\sum_{j=1}^{n}\nabla V_j\cdot\nabla\vec{\psi} - \mu div\,\vec{V} div\,\vec{\psi} - (\vec{v},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{W} - (\vec{V},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}_0 +$$

$$+\int_G \vec{U}_0(x)\cdot\vec{\psi}(0,x)\,dx,\quad \forall\vec{\psi} \in W_2^1(Q):\ \vec{\psi}|_S = 0, \vec{\psi}|_{t=T} = 0. \tag{19}$$

Здесь пространство $L_2(0,T;W_2^{-1}(G))$ двойственно пространству $L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(G))$. Как известно (см. гл. 3 в [3]), обобщенное решение $\vec{V}$ обладает свойствами $V \in C([0,T];L_2(G))$ и, соответственно, мы имеем, что $\vec{u}|_{t=0} = \vec{U}_0$.

Теорема 5. *Предположим, что $\vec{F} \in L_2(Q)$, $\vec{U}_0 \in L_2(G)$, $\vec{w}_0 \in L_\infty(Q)$ и $\vec{v} \in L_\infty(0,T;W_\infty^1(G))$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (17), (18).

Далее, мы приведем один результат о регулярной разрешимости задачи (17), (18). Как мы уже отмечали, общие эллиптическо-параболические системы, вероятно, ранее не изучались. Мы опишем только некоторые достаточные условия разрешимости. Вообще говоря, они не являются оптимальными. Но они позволяют изучить локальную разрешимость нелинейной системы (1) (см. также (2), (3)) и устойчивость ее решений.

Теорема 6. *Предположим, что $\vec{F} \in L_p(0,T;W_p^1(G))$, $\vec{U}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\vec{w}_0 \in L_p(0,T;W_p^1(G))$, $\vec{v} \in W_p^{1,2}(Q)$ и $p > 5$. Тогда существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что если $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W_\infty^1(G))} \le \varepsilon_0$, то существует единственное решение задачи* (17), (18) *такое, что $\vec{V} \in W_p^{1,2}(Q), P \in L_p(0,T;W_p^2(G))$.*

В третьем параграфе главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений (2) с начально-краевыми условиями (3) в пространствах Соболева. Приведем основные результаты. Положим $Q_\gamma = (0,\gamma)\times G$, $S_\gamma = (0,\gamma)\times \Gamma$. Начальные и граничные условия (3) мы заменяем условиями:

$$\vec{u}|_\Gamma = 0,\ \ \frac{\partial p}{\partial \nu}|_S = f_0(t,x),\ \ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x),\ \ \int_G p(t,x)dx = 0. \tag{20}$$

Запишем условия на данные.

$$\vec{u}_0 \in W_r^{2-2/r}(G),\ \ \vec{u}_0|_\Gamma = 0,\ \ \vec{f}\cdot\vec{\nu},\ \ f_0 \in L_r(0,T;W_r^{1-1/r}(\Gamma)), \tag{21}$$

$$\vec{f}, div\vec{f} \in L_r(Q),\ \ \int_\Gamma f_0(t,x) - \rho\vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\Gamma = 0,\ \ \int_G p(t,x)dx = 0. \tag{22}$$

Отметим, что функция p восстанавливается с точностью до произвольной функции, зависящей от времени. Введем обозначения

$$L_0\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \mu\Delta\vec{u} - \mu\nabla(div\,\vec{u}),\ \ A_0 p = \frac{\tau}{\rho}\Delta p. \tag{23}$$

Тогда система перепишится в виде

$$\begin{cases} A_0 p = div\,\vec{u} - \tau div(\vec{u},\nabla)\vec{u} + div\vec{f}\tau \\ L_0\vec{u} = -(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w} div\,\vec{u} + \vec{f}. \end{cases} \tag{24}$$

Мы будем искать решение нашей задачи в классе

$$H = \{(\vec{u},p):\ \vec{u}\in W_r^{1,2}(Q),\, p \in L_r(0,T;W_r^2(G)),\ r>5\}.$$

Из теорем вложения имеем, что $\vec{u}\in C^{1-5/2r,2-5/r}(\overline{Q})$, $\nabla\vec{u}\in C^{1/2-5/2r,1-5/r}(\overline{Q})$, т.е. неравенство $r>5$ гарантирует, что функции $\vec{u},\nabla\vec{u}$ принадлежат некоторому пространству Гельдера [111, §6.3]. Интегрируя первое уравнение в (24) по G, получим равенство

$$\int_\Gamma \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \nu}d\Gamma = \int_\Gamma \vec{u}\cdot\vec{\nu}\,d\Gamma - \tau\int_\Gamma (\vec{u},\nabla)\vec{u}\cdot\vec{\nu}\,d\Gamma + \tau\int_\Gamma \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\Gamma \tag{25}$$

Используя граничные условия (20), получим необходимое условие разрешимости системы

$$\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial \nu}d\Gamma = \int_\Gamma f_0\,d\Gamma = \int_\Gamma \rho\,\vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\Gamma, \tag{26}$$

т.е. второе условие в (22).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (21), (22) и $r > 5$. Тогда найдется постоянная q_0, не зависящая от данных задачи $\vec{u}_0, \vec{f}, f_0$, такая, что, если $\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)} \le q_0$, то на некотором промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ решение задачи (2), (20) существует и принадлежит классу $\vec{u} \in W_r^{1,2}(Q_\gamma)$, $p \in L_r(0, \gamma; W_r^2(G))$. Если $(\vec{u}_1, p_1)$, $(\vec{u}_2, p_2)$ два решения задачи (2), (20), то $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $p_1 = p_2$.*

В четвертом параграфе главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды (11) с начально-краевыми условиями (12) в пространствах Соболева. Приведем основные результаты.

Исходя из определений, получим равенства

$$div\,(h(\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) = h(\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + h\,div\,(\vec{u} - \vec{w})\vec{u} + \nabla h \cdot (\vec{u} - \vec{w})\vec{u}, \qquad (27)$$

$$div\,(h\vec{u} \otimes \vec{w}) = h(\vec{u}, \nabla)\vec{w} + h\,div\,\vec{u}\;\vec{w} + \nabla h \cdot \vec{u}\;\vec{w}. \qquad (28)$$

Далее, мы используем представления

$$div\,(\hat{\sigma}(\vec{u})) = \Delta\vec{u} + \nabla(div\,\vec{u}). \qquad (29)$$

$$div\,(h\hat{\sigma}(\vec{u})) = h\,div\,\hat{\sigma}(\vec{u}) + \vec{H},\ \vec{H} = (\sum_{i=1}^{2} h_{x_i}\sigma_{i1}, \sum_{i=1}^{2} h_{x_i}\sigma_{i2})^T. \qquad (30)$$

Мы предполагаем, что $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ $(p > 4)$. В этом случае теоремы о вложении [107] дают $h_0 \in C^{2-4/p}(\overline{G})$, положим $m_0 = \inf_{x \in G} h_0(x), M_0 = \sup_{x \in G} h_0(x)$.

Теорема 8. *Пусть $\vec{u}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\vec{u}_0|_\Gamma = 0$, $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ $(p > 4)$, $h_0(x) > 0$ в $\overline{Q}$, и $\frac{\partial h_0}{\partial n}|_\Gamma = 0$. Тогда найдется постоянная $q_0 > 0$, не зависящая от данных $\vec{u}_0, h_0$ такая, что, если*

$$\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}(M_0 + \frac{M_0}{m_0} + \frac{1}{m_0}) + \frac{M_0}{m_0}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)} \le q_0 \qquad (31)$$

в G, где постоянные M_0, m_0 таковы что $M_0 \ge h_0(x) \ge m_0 > 0$ при п.в. $x \in G$, то на некотором отрезке $[0, \gamma_0]$ существует решение задачи (11), (12) такое, что $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0})$ и $h(t,x) > 0$ в $\overline{Q^{\gamma_0}}$, где $Q^{\gamma_0} = (0, \gamma_0) \times G$. Если $(\vec{u}_1, h_1)$, $(\vec{u}_2, h_2)$ два решения задачи (11), (12) и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $h_i(t,x) \ge \delta_0$ $(i = 1, 2)$ в Q^{γ_0}, то $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $h_1 = h_2$.

В пятом параграфе главы рассматривается вопрос получения априорных оценок для регулярных решений начально-краевой задачи (11), (12), в некоторой степени характеризующих их поведение при $t \to \infty$. Приведем основной результат.

Теорема 9. *Пусть данные задачи $\vec{u}_0, h_0$ удовлетворяют условиям теоремы 8, предположим, что решение задачи* (11), (12) *существует глобально по времени и является регулярным, т.е. $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^T)$ при каждом $T > 0$. Если $h \geq 0$ в $Q = (0, \infty) \times G$, то справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g\, h^2}{2})\, dx + \frac{1}{\tau} \int_G h |\vec{w}|^2\, dx + \int_G \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}^2 h\, dx = 0, t \in (0, \infty),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{1x_j} + u_{jx_i})$$

и, соответственно, оценка

$$max_{t>0} \int_G |\vec{u}|^2 h + g\, h^2\, dx \leq \int_G |\vec{u_0}|^2 h_0 + g\, h_0^2\, dx = M.$$

Если найдутся постоянные $m_0 < M_0$ такие что $M_0 \geq h(t,x) \geq m_0 > 0$ п.в., то справедливы оценки

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0,\infty;W_2^1(G))} + \|g\nabla h + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M),$$

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} + \|h\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} \leq C_2(M), \tag{32}$$

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq C_3(M), \quad p_0 \in [1, 2),\ q_0 = 2p_0/(3p_0 - 2),$$

$$\|\nabla h\|_{L_2(0,\infty;L_1(G))} \leq C_4(M),$$

где постоянные C_i зависят только от величины M, меры Лебега $\mu(G)$ области G, τ и норм начальных данных.

В **приложении** анализируются полученные другими авторами результаты численного моделирования течений жидкости и газа в поровом пространстве образцов горных пород на основе квазигидродинамических уравнений. В качестве воксельного представления геометрии расчетной области исследуемого образца горной породы используется его трехмерный бинарный массив, полученный с помощью метода рентгеновской компьютерной томографии.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертационной работы, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в классах Соболева, а также вопросы существования обобщенных решений в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
3. Исследованы вопросы существования обобщенных решений в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае.

Научная новизна исследования состоит в том, что

1. Для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказаны существование и единственность обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач в классах Соболева, а также существование обобщенных решений в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказаны существование и единственность обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач в классах Соболева.

3. Для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказано существование обобщенных решений в классах Соболева начально-краевых задач в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности) в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае. Для обобщенной разрешимости выведены априорные оценки решения начально-краевой задачи.

Научная и практическая значимость работы.

В работе получен ряд новых теоретических результатов, представляющих интерес для специалистов в следующих областях: теория уравнений в частных производных, гидродинамика, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Практическая значимость научной работы определяется тем, что ее теоретические результаты могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов или при доказательстве сходимости существующих алгоритмов численного моделирования гидродинамических процессов, что, например, актуально в так называемой технологии «цифровой керн» («digital rock physics»), применяемой для исследования фильтрационно-емкостных свойств образцов горных пород (коэффициентов проницаемости и пористости) и особенностей процессов вытеснения на микроуровне методами вычислительного эксперимента.

Степень достоверности результатов проведённых исследований.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в работе, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы.

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на двадцати пяти научных и научно-практических конференциях и семинарах:

1. Шестой Международного молодежного научно-практического форума «Нефтяная столица» (Ханты-Мансийск, 22 – 23 марта 2023 года).

2. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 9 июня 2023 года).
3. X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) (Якутск, 16 - 20 июля 2023 года).
4. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2023» (Уфа, 4 - 8 октября 2023 года).
5. XXVII окружная научно-практическая конференция «Пути реализации нефтегазового потенциала Западной Сибири» (Ханты-Мансийск, 21 - 23 ноября 2023 года).
6. Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 23 – 25 ноября 2023 года).
7. Седьмой Международного молодежного научно-практического форума «Нефтяная столица» (Ханты-Мансийск, 3 – 4 апреля 2024 года).
8. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 29 мая 2024 года).
9. Международная конференция «Современные вычислительные технологии математического моделирования», посвященная 75-летию профессора СВФУ В.И. Васильева (Якутск, 4 – 9 июня 2024 года).
10. Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование (Самара, 15 - 17 июля 2024 года).
11. XVI международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 30 сентября – 2 октября 2024 года).
12. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2024» (Уфа, 2 - 5 октября 2024 года).
13. XXVIII окружная научно-практическая конференция «Пути реализации нефтегазового потенциала Западной Сибири» (Ханты-Мансийск, 20 - 21 ноября 2024 года).
14. Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 24 – 26 октября 2024 года).

15. Восьмой Международный молодёжный научно-практический форум «Нефтяная столица» (Сургут, 19 – 20 марта 2025 года).
16. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 5 июня 2025 года).
17. III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ – 25) (Улан-Удэ, 18 - 22 августа 2025 года).
18. Российско-Китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 31 октября - 6 ноября 2025 года).
19. Международная конференция «Конгресс пользователей ЦКП СКИФ: перспективные исследования с использованием синхротронного излучения» (Новосибирск, 17 - 21 ноября 2025 года).
20. Российская конференция «Рентгеновские методы исследования веществ и материалов» (Москва, 20–24 апреля 2026 года).
21. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 27 мая 2026 года).
22. Международная конференция «Математические идеи академика П.Л. Чебышёва, их приложения в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта», приуроченная к 205-й годовщине со дня его рождения» (Обнинск, 14 - 16 мая 2026 года).
23. Семинар «Краевые задачи механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (ИГиЛ) СО РАН (21 мая 2026 года).
24. Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики» (27 мая 2026 года).
25. XI Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного работника высшей школы РФ, заслуженного деятеля науки РС(Я), академика АН РС(Я), кавалера ордена «Полярная звезда» Ивана Егоровича Егорова (Якутск, 21 – 25 июля 2026 года).

Исследование поддержано стипендией Президента Российской Федерации для аспирантов и адъюнктов по приоритетному направлению стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и

глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников энергии, способов ее передачи и хранения. (Минобрнауки России, Протокол заседания Совета от 15 мая 2025 г. № 13-пр/23, 2025 год), стипендией Губернатора Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (Депобрнауки Югры, Приказ от 23.08.2024 №10-П-1722, 2024 год), стипендией Губернатора Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (Депобрнауки Югры, Приказ от 14.01.2025 №10-П-30, 2025 год).

Личный вклад.

Научные результаты, составляющие основное содержание работы, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Публикации. Основные результаты по теме диссертационной работы изложены в четырнадцати печатных изданиях [92–105], шесть из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [92, 97, 99, 101, 102, 105], три в журналах, индексированных в РИНЦ [93, 94, 98], 5 — в тезисах докладов [95, 96, 100, 103, 104].

Благодарности. Приношу свою искреннюю благодарность своему научному руководителю Пяткову Сергею Григорьевичу за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, чуткое руководство, ценные советы и консультации.

ГЛАВА 1

Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических систем уравнений

В этой главе мы рассматриваем вопросы существования глобального решения аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности (см. параграф 1.2 в [1]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\ \ (t,x) \in Q = (0,T)\times G,\ \ G \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w} div\,\vec{u}, \quad (1.1)$$

где G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$ (см. определения в [3, гл. 1]), $\mu = \eta/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости. Плотность ρ, коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константам. Векторное поле $\vec{f} = \vec{f}(x,t)$ определяет массовую плотность внешних сил. Система (1.1) замкнута относительно неизвестных функций – вектора скорости $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$ и давления $p = p(x,t)$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Будем искать решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным и граничным условиям, и условиям нормировки, вида:

$$\vec{u}|_S = 0,\ \ \vec{u}|_{t=0} = u_0,\ \ \vec{w}\cdot\nu|_\Gamma = 0,\ \ \int_G p(t,x)\,dx = 0, \quad (1.2)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ.

Для стационарной системы (1.1), вида:

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\ \ x \in G,\ \ G \subset \mathbb{R}^3,$$

$$(\vec{u} - \vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w} div\,\vec{u},\ \ \mu = \eta/\rho, \quad (1.3)$$

будем искать обобщенное решение краевой задачи, удовлетворяющее следующим граничным условиям и условиям нормировки:

$$\vec{u}|_\Gamma = 0,\ \ \vec{w}\cdot\nu|_\Gamma = 0,\ \ \int_G p(x)dx = 0, \quad (1.4)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ.

Мы также будем исследовать систему (1.1) в приближении Обербека-Буссинеска (см. параграф 2.6 в [2]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w}, \;\; \vec{w} = \tau[(\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \beta\vec{g}T],$$
$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mu\nabla\vec{u} + \nabla(div\,\vec{u})\mu + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u} - \beta\vec{g}T + \vec{f},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)T = \chi\Delta T + f_0, \;\; (t,x)\in Q=(0,Z)\times G, \; G\subset\mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

где $\rho = const > 0$ - среднее значение плотности, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$ - вектор скорости, $p = p(\vec{x},t)$ - давление, $T = T(\vec{x},t)$ - отклонение температуры от ее среднего значения $T_0 = const > 0$, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения. Температурный коэффициент расширения жидкости β, характерное время релаксации τ, теплопроводность ζ и температуропроводность $\chi = \zeta(\rho C_p)$ считаются заданными положительными константами.

Система (1.5) дополняется начальными и граничными условиями, и условиями нормировки:

$$\vec{u}|_S = 0, \;\; T|_{S_0} = 0, \;\; \frac{\partial T}{\partial\nu}|_{S_1} = 0, \;\; \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x),$$
$$T|_{t=0} = T_0(x), \int_G p(t,x)dx = 0, \;\; \frac{\partial p}{\partial\nu} + \vec{g}\nu T|_S = 0, \quad (1.6)$$

где ν внешняя единичная нормаль к $\Gamma\in C^2$, Γ_0 и Γ_1 некоторые открытые подмножества Γ, такие, что $\overline{\Gamma}_0\cup\overline{\Gamma}_1 = \Gamma$, положим $S_i = (0,Z)\times\Gamma_i$, $i = 0,1$.

Стационарная часть системы (1.1) (см. также системы (1.3), (1.5)) не является равномерно эллиптической, и, соответственно, в нестационарном случае она не является равномерно параболической, причем как эллиптические, так и параболические уравнения содержат старшие производные неизвестных давления p, вектора скорости $\vec{u}$ и температуры T (для системы (1.5)). Все коэффициенты рассматриваемых уравнений и систем, равно как и данные задач, мы считаем вещественными.

1.1 Определения и вспомогательные результаты.

Пусть E – банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G – область в $\mathbb{R}^n$), обозначается пространство измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [107]. Обозначения для пространств Лебега $L_p(G;E)$ и пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ стандартные (см. [107, 109]). Мы также используем анизотропные пространства Соболева $W_p^{s,r}(Q) = L_p(G;W_p^s(0,T)) \cap L_p(0,T;W_p^r(G))$, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Определения пространств Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{G};E)$, $C^{\alpha}(\overline{Q};E)$ ($\alpha \geq 0$), и т.д. могут быть найдены, например, в [3]. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то символ E не используем и обозначения упрощаются, пишем просто $W_p^s(G)$ и т.д. Как обычно, выражение (u,v) есть скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$, т. е. $(u,v) = \int_G u(x)v(x)\,dx$. Мы будем использовать то же обозначение (если не оговорено противное) в случае пространства $L_2(G)$ вектор-функций $\vec{u} = (u_1,u_2)$. Иногда мы также будем использовать обозначение $\vec{u}\cdot\vec{v}$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, для векторов $\vec{u},\vec{v}$ имеем $(\vec{u},\vec{v}) = \int_G \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx$. Положим также $Q_\gamma = (0,\gamma)\times G$, $S_\gamma = (0,\gamma)\times\Gamma$. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты мы считаем вещественными. Для сокращения записи, пространства вектор-функций и скалярных функций обозначаем одним и тем же символом и включение $\vec{v} \in W_p^s(G)$ в вектор-функции v означает, что каждая координата вектор-функции принадлежит $W_p^s(G)$. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат, если не оговорено противное. Определение включения $\Gamma \in C^s$ можно найти, например, в [3, глава 1].

Для исследования обобщенной разрешимости квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (1.1) в пространствах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности, получим определение обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). Пусть $\vec{u},p$ – достаточно гладкое решение задачи (1.1), (1.2). Первое и второе уравнение системы (1.1) умножим на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, такие, что $\varphi \in L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\int_G \varphi(x)\,dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_2(0,T;W_2^1(G))$, $\vec{\psi}|_S = 0$.

Интегрируя по G, придем к равенствам:

$$\int_G \vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_G \vec{w}\cdot\nabla\varphi dx = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla\varphi) + \ \frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla\varphi) - \tau(\vec{f},\nabla\varphi),$$

$$(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) + (((\vec{u}-\vec{w}),\nabla)\vec{u},\vec{\psi}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) = (f,\vec{\psi}) - \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) -$$
$$\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi}) + (\vec{w}\,div\,\vec{u},\vec{\psi}), \quad (1.7)$$

где точка $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ и $(u,v) = \int_G uv\,dx$ для скалярных функций и $(\vec{u},\vec{v}) = \int_G \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx$ для векторных. Интегрируя по частям, имеем

$$((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi}) = \int_G(\vec{u},\nabla)\vec{w}\cdot\vec{\psi}dG = -\int_G div\,\vec{u}\vec{w}\cdot\vec{\psi}\,dG - \int_G(\vec{u},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}dG. \quad (1.8)$$

Используя это равенство в (1.7), получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi) = (\vec{w},\nabla\varphi), \quad (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}) = (\vec{f},\vec{\psi}), \quad (1.9)$$

справедливые при п.в. t. Равенство (1.9) может служить основой для определения обобщенного решения задачи. Пусть $p_0\in[1,3/2]$, $q_0 = 2p_0/(4p_0-3)$, $p_1 = 5/4$. Функции $\vec{u}\in L_2(0,T;W_2^1(G))\cap L_\infty(0,T;L_2(G))$, $u_t\in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^{-1}(G))$, $p\in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^1(G))$ такие, что $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_2(Q)$, удовлетворяющие (1.2) называются обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если

$$\int_0^T(\vec{u},\nabla\varphi)\,dt = \int_0^T(\vec{w},\nabla\varphi)\,dt, \quad \int_0^T\Big[(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})\Big]\,dt = \int_0^T(\vec{f},\vec{\psi})\,dt, \quad (1.10)$$

для всех функций $\varphi\in L_2(0,T;W_2^1(G))$ с $\int_G\varphi(t,x)\,dx = 0, \vec{\psi}\in L_5(0,T;W_5^1(G))$ и $\vec{\psi}|_S = 0$. Пусть

$$a(\vec{u},\vec{\psi}) = (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}).$$

В случае $T=\infty$ определение обобщенного решения немного меняется. Под обобщенным решением понимаем функции $\vec{u},p$ такие, что $\vec{u}\in L_2(0,T;W_2^1(G))\cap$

$L_\infty(0,T;L_2(G))$, $\vec{u}_t\in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^{-1}(G))$, $p\in L_{p_1}(0,T;W_{p_1}^1(G))$, $p_1=5/4$, и $\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_2(0,T;L_2(G))$, для любого конечного T, удовлетворяющие (1.10) для всех функций $\varphi\in L_2(0,\infty;W_2^1(G))$ с $\int_G\varphi(t,x)\,dx=0,\vec{\psi}\in L_5(0,\infty;W_5^1(G))$ и $\vec{\psi}|_S=0$, имеющих ограниченный по t носитель.

Для исследования обобщенной разрешимости стационарной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (1.3), также получим определение обобщенного решения задачи (1.3), (1.4). Пусть $\vec{u},p$ – достаточно гладкое решение задачи (1.3), (1.4). Первое и второе уравнение системы (1.3) умножим на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, такие, что $\varphi\in W_2^1(G)$, $\int_G\varphi(x)\,dx=0$, $\vec{\psi}\in W_2^1(G)$, $\vec{\psi}|_S=0$. Интегрируя по G, придем к равенствам:

$$\int_G\vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_G\vec{w}\cdot\nabla\varphi dx=\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla\varphi)+\ \frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla\varphi)-\tau(\vec{f},\nabla\varphi),$$

$$(((\vec{u}-\vec{w}),\nabla)\vec{u},\vec{\psi})+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})=(f,\vec{\psi})-\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})-$$
$$\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi})+(\vec{w}\,div\,\vec{u},\vec{\psi}),\quad(1.11)$$

где точка $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ и $(u,v)=\int_G uv\,dx$ для скалярных функций и $(\vec{u},\vec{v})=\int_G\vec{u}\cdot\vec{v}\,dx$ для векторных. Интегрируя по частям, имеем

$$((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi})=\int_G(\vec{u},\nabla)\vec{w}\cdot\vec{\psi}dG=-\int_G div\,\vec{u}\vec{w}\cdot\vec{\psi}\,dG-\int_G(\vec{u},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}dG.\quad(1.12)$$

Используя это равенство в (1.11), получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi)=(\vec{w},\nabla\varphi),\quad\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})-((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})+$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})=(\vec{f},\vec{\psi}).\quad(1.13)$$

Равенство (1.13) может служить основой для определения обобщенного решения задачи. Функции $\vec{u}\in W_2^1(G)$, $p\in L_{3/2}(G)$ такие, что $\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_2(Q)$, удовлетворяющие (1.4) называются обобщенным решением задачи (1.3), (1.4), если

$$(\vec{u}-\vec{w},\nabla\varphi)=0,$$
$$-((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+$$
$$((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})-(\vec{f},\vec{\psi})=0$$

для всех функций $\varphi \in W_2^1(G)$ с $\int_G \varphi(x)\,dx = 0, \vec{\psi} \in W_3^1(G)$ и $\vec{\psi}|_S = 0$. Пусть

$$a(\vec{u},\vec{\psi}) = \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}).$$

Для исследования обобщенной разрешимости квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска в случае слабосжимаемой жидкости (1.5) получим определение обобщенного решения задачи (1.5), (1.6). Также, как и выше, $\vec{u}, p$ – достаточно гладкое решение задачи (1.5), (1.6). Первое, второе и третье уравнение системы (1.5) умножим на функции φ, $\vec{\psi}$ и ξ соответственно, такие, что $\varphi \in L_2(0,Z;W_2^1(G))$, $\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_5(0,Z;W_5^1(G))$, $\vec{\psi}|_S = 0$, $\xi \in L_5(0,Z;W_5^1(G))$ и $\xi|_{S_0} = 0$. Интегрируя по G, придем к равенствам:

$$\int_G \vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_G \vec{w}\cdot\nabla\varphi dx = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla\varphi) + \frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla\varphi) + \tau(\beta\vec{g}T,\nabla\varphi),$$
$$(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - (((\vec{u}-\vec{w}),\nabla)\vec{u},\vec{\psi}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) = (\vec{f},\vec{\psi}) - \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) -$$
$$\mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi}) + (\vec{w}\,div\,\vec{u},\vec{\psi}) - (\beta\vec{g}T,\vec{\psi}),$$
$$(\frac{\partial T}{\partial t},\xi) - ((\vec{u}-\vec{w})T,\nabla\xi) + \chi(\nabla T,\nabla\xi) = (f_0,\xi). \quad (1.14)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi}) = \int_G (\vec{u},\nabla)\vec{w}\cdot\vec{\psi}dG = -\int_G div\,\vec{u}\vec{w}\cdot\vec{\psi}\,dG - \int_G (\vec{u},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}dG. \quad (1.15)$$

Используя это равенство в (1.14), получаем равенства

$$(\vec{u},\nabla\varphi) = (\vec{w},\nabla\varphi), \quad (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}) + (\beta\vec{g}T,\vec{\psi}) = (\vec{f},\vec{\psi}),$$
$$(\frac{\partial T}{\partial t},\xi) - ((\vec{u}-\vec{w})T,\nabla\xi) + \chi(\nabla T,\nabla\xi) = (f_0,\xi), \quad (1.16)$$

справедливые при п.в. t. Равенство (1.16) может служить основой для определения обобщенного решения задачи. Пусть $p_0 \in [1,3/2]$, $q_0 = 2p_0/(4p_0-3)$. Функции $\vec{u} \in L_2(0,Z;W_2^1(G)) \cap L_\infty(0,Z;L_2(G))$, $\vec{u}_t \in L_{p_1}(0,Z;W_{5/4}^{-1}(G))$, $p \in L_{5/4}(0,Z;W_{5/4}^1(G))$, $T \in L_2(0,Z;W_2^1(G)) \cap L_\infty(0,Z;L_2(G))$ такие, что $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u} + \beta\vec{g}T \in L_2(Q)$, удовлетворяющие (1.6) называются обобщенным решением задачи (1.5), (1.6), если

$$\int_0^Z (\vec{u}, \nabla\varphi)\, dt = \int_0^Z (\vec{w}, \nabla\varphi)\, dt, \quad \int_0^Z \Big[(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) +$$

$$\mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\, \vec{u}, div\, \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) + (\beta\vec{g}T, \vec{\psi})\Big] dt = \int_0^Z (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt,$$

$$\int_0^Z \Big[(\frac{\partial T}{\partial t}, \xi) - ((\vec{u}-\vec{w})T, \nabla\xi) + \chi(\nabla T, \nabla\xi)\Big] dt = \int_0^Z (f_0, \xi) dt,$$

для всех функций $\varphi \in L_2(0, Z; W_2^1(G))$ с $\int_G \varphi(t, x)\, dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$, $\vec{\psi}|_S = 0$, $\xi \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$ и $\xi|_{S_0} = 0$. Пусть

$$a(\vec{u}, \vec{\psi}) = (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) + \mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\, \vec{u}, div\, \vec{\psi}) +$$

$$((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) + (\beta\vec{g}T, \vec{\psi}), \;\; a_1(T, \xi) = (\frac{\partial T}{\partial t}, \xi) - ((\vec{u}-\vec{w})T, \nabla\xi) + \chi(\nabla T, \nabla\xi).$$

1.2 Нестационарный случай.

Вначале рассмотрим вопрос обобщенной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева.

Теорема 1.1. *Пусть $\vec{f} \in L_2(Q)$, $\vec{u}_0 \in L_2(G)$. Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2), *такое, что* $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0, T; L_{p_0}(G))$ *для любого* $p_0 \in [1, 3/2]$, *где* $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$.

Доказательство. Вначале для гладких решений задачи (1.1), (1.2) получим первую априорную оценку. Пусть $\varphi = p$ и $\vec{\psi} = \vec{u}$ в (1.9), тогда:

$$\tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \nabla p) + \frac{\tau}{\rho}(\nabla p, \nabla p) - \tau(\vec{f}, \nabla p) - (\vec{u}, \nabla p) = 0,$$

$$(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{u}) - ((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{u}) + \mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{u}) + \mu(div\, \vec{u}, div\, \vec{u}) +$$

$$((\vec{u}, \nabla)\vec{u}, (\tau(\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{\tau}{\rho}\nabla p - \tau\vec{f})) = (\vec{f}, \vec{u}). \quad (1.17)$$

Разделив первое из равенств в (1.17) на ρ и сложив его со вторым равенством и используя равенство $((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{u}, \vec{u}) = 0$ в силу первого уравнения в (1.1) и интегрирования по частям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p) + \frac{\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p) -$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p) - \frac{1}{\rho}(\vec{u},\nabla p) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u}) + \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}) +$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\nabla p,(\vec{u},\nabla)\vec{u}) - \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f})) = (\vec{f},\vec{u}), \quad (1.18)$$

Приводя подобные, заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p) +$$
$$\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}) + \frac{2\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p) - \frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p) - \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f}) = (\vec{f},\vec{u}), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \tau(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}, \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}) =$$
$$\tau(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}) + (\vec{f},\vec{u}), \quad (1.20)$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, (\varepsilon > 0). \quad (1.21)$$

Имеем, что

$$\tau|(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})| \le \tau\int_G \frac{|\vec{f}|^2}{2}dx + \frac{\tau}{2}\int_G |\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}|^2dx, \quad (1.22)$$

$$|(\vec{f},\vec{u})| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_G |\vec{u}|^2dx + \int_G |\vec{f}|^2dx\frac{1}{2\varepsilon}, \quad (1.23)$$

Используя эти неравенства в (1.20), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{2}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}, \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}) \le$$
$$\frac{\tau}{2}\int_G |\vec{f}|^2dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_G |\vec{f}|^2dx + \frac{\varepsilon C_0}{2}\int_G |\nabla\vec{u}|^2dx, \quad (1.24)$$

где постоянная C_0 взята из неравенства Пуанкаре

$$\int_G |\vec{u}|^2dx \le C_0\int_G |\nabla\vec{u}|^2dx,$$

справедливого для всех $\vec{u} \in W_2^1(G)$, таких, что $\vec{u}|_\Gamma = 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{\mu}{C_0}$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2}dx + \frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{2}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \leq \int_G |\vec{f}|^2 dx(\frac{\tau}{2} + \frac{C_0}{2\mu}). \quad (1.25)$$

Пусть $J = \frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{2}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u})$. Интегрируем от 0 до t:

$$\int_G \frac{|\vec{u}|^2(t)}{2}dx + \int_0^t \int_G J dx dt \leq C_1 \int_0^t \int_G |\vec{f}|^2 dx dt + \int_G \frac{u_0^2}{2} dx = M. \quad (1.26)$$

Отсюда получим оценки

$$max_t \int_G |\vec{u}(t)|^2 dx \leq M, \quad (1.27)$$

$$\int_Q \frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u})^2 + \frac{\tau}{2}(\frac{\nabla\vec{P}}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \frac{\nabla\vec{P}}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \leq M. \quad (1.28)$$

Как следствие, имеем априорные оценки для решений:

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))} + \|div\ \vec{u}\|_{L_2(Q)} + \|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M). \quad (1.29)$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M, μ, τ,

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(0,T;L_2(G))} \leq C_1(M). \quad (1.30)$$

Оценим все слагаемые, входящие в определение обобщенного решения. Покажем, что

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))} \leq C, \quad p_0 \in [1, 3/2]. \quad (1.31)$$

Оцениваем по неравенству Гёльдера:

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{L_{p_0 q}(G)}, \quad (1.32)$$

где $q = \frac{2}{2-p_0}$. Далее, используем теорему вложения: $W_2^S(G) \subset L_r(G)$. Возьмем

$$p_0 q = r = \frac{6}{3-2S},$$

тогда

$$\frac{p_0}{2-p_0}=\frac{3}{3-2S}=>S=\frac{3(p_0-1)}{p_0}.$$

Необходимое неравенство $S\le 1$ эквивалентно неравенству $p_0\le 3/2$. Из (1.32) вытекает оценка

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)}\le C_1\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)}\cdot\|\vec{u}\|_{W_2^S(G)}. \tag{1.33}$$

Последний множитель оцениваем, используя интерполяционное неравенство:

$$\|\vec{u}\|_{W_2^S(G)}\le C\|\vec{u}\|^{\Theta}_{W_2^1(G)}\cdot\|\vec{u}\|^{1-\Theta}_{L_2(G)}, \tag{1.34}$$

где $S=\Theta$. Из (1.33) получаем оценку:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)}\le C\|\vec{u}\|^{1+S}_{W_2^1(G)}\cdot\|\vec{u}\|^{1-S}_{L_2(G)}. \tag{1.35}$$

Воспользовавшись (1.30), получим

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}\le C_1(M)(\int_0^T\|\vec{u}\|^{q_0(1+S)}_{W_2^1(G)}\,dt)^{1/q_0}\le C_2(M), \tag{1.36}$$

где выберем

$$q_0(1+S)=2,\quad \text{т.е., } q_0=2p_0/(4p_0-3). \tag{1.37}$$

Легко увидеть, в силу условий на параметр p_0, что $q_0\ge 1$. Имеем из оценки (1.29), что

$$\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)}\le C. \tag{1.38}$$

Отметим, что

$$\|\vec{u}\|_{L_2(Q)}\ge C\|\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}. \tag{1.39}$$

Действительно, используя неравенство Гельдера, получим

$$[\int_0^T(\int_G|\vec{u}|^p dx)^{\frac{q_0}{p_0}}dt]^{\frac{1}{q_0}}\le C_0[\int_0^T(\int_G|\vec{u}|^2 dx)^{\frac{q_0}{2}}dt]^{\frac{1}{q_0}}\le C_1\|\vec{u}\|_{L_2(Q)}. \tag{1.40}$$

Отсюда получим:

$$C(M)\ge\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)}\ge C\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}\ge$$
$$\|\frac{\nabla p}{\rho}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}-\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}\ge\|\frac{\nabla p}{\rho}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))}-C_3(M). \tag{1.41}$$

Получаем оценки:

$$\|\nabla p\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))} + \|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))} \le C_4(M), \tag{1.42}$$

Как следствие, при $p_0 = p_1 = 5/4$, поскольку $p_0 = q_0$, в этом случае, имеем:

$$\|\nabla p\|_{L_{p_1}(Q)} + \|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_1}(Q)} \le C_4(M), \tag{1.43}$$

Так как

$$\vec{w} = \tau(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u} - \vec{f}), \tag{1.44}$$

то отсюда имеем равенство для нормы $\vec{w}$:

$$\|\vec{w}\|_{L_2(Q)} \le \|(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})\|_{L_2(Q)} + \|\vec{f}\|_{L_2(Q)} \le C_5(M). \tag{1.45}$$

Оценим слагаемые из определения обобщенного решения. Имеем:

$$((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) = \int_G \sum_{i,j} (\vec{u}_i - \vec{w}_i)\vec{\psi}_{jx_i}\vec{u}_j\,dx. \tag{1.46}$$

Используем неравенство Гельдера:

$$I = \int_G \vec{w}_i\vec{\psi}_{jx_i}\vec{u}_j dx,\ |I| \le \|\vec{w}_i\vec{u}_j\|_{L_{p_0}(G)} \cdot \|\vec{\psi}_{jx_i}\|_{Lq(G)},\ 1/p_0 + 1/q = 1. \tag{1.47}$$

Показатель p_0 тот же. Далее, аналогично получаем (см. (1.30)):

$$I_1 = \Big[\int_G (\vec{w}_i)^{p_0}(\vec{u}_j)^{p_0} dx\Big]^{\frac{1}{p_0}} \le \|\vec{w}_i\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|_{L_{p_0 q}} \le C_6\|\vec{w}_i\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|_{W_2^S(G)} \le$$

$$\|\vec{w}_i\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|^S_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|^{1-S}_{L_2(G)} \le C_7\|\vec{w}_i\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|^S_{W_2^1(G)}. \tag{1.48}$$

Имеем оценку интеграла:

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,T)} \le \Big[\int_0^T \|\vec{w}_i\|^{q_0}_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u_j}\|^{Sq_0}_{W_2^1(G)} dt\Big]^{\frac{1}{q_0}}. \tag{1.49}$$

Применим неравенство Гёльдера с $q = \frac{2}{q_0}$:

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,T)} \le \|\vec{w}_i\|_{L_2(Q)} \cdot \Big[\int_0^T \|\vec{u_j}\|^{Sq_0\frac{2}{2-q_0}}_{W_2^1(G)} dt\Big]^{\frac{2-q_0}{2q_0}}. \tag{1.50}$$

Отметим, что $\frac{2Sq_0}{2-q_0} \le 2$. Тогда

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,T)} \le C_8(M). \tag{1.51}$$

Воспользовавшись неравенством (1.47), имеем

$$I \leq C_7 \|\vec{w}_i \vec{u}_j\|_{L_{p_0}(G)} \cdot \|\vec{\psi}\|_{W_q^1(G)}. \tag{1.52}$$

Выражение

$$l(\vec{\psi}) = \sum_{i,j} \int_G \vec{w}_i \vec{\psi}_{jx_i} \vec{u}_j dx = ((\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) \tag{1.53}$$

есть линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{W}{}^1_q(G)$. Из (1.48), (1.52) вытекает, что

$$\|l(\vec{\psi})\|_{W_{p_0}^{-1}(G)} = \sup_{\vec{\psi} \in \overset{\circ}{W}{}^1(G)} \frac{\|l(\vec{\psi})\|}{\|\vec{\psi}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_q(G)}} \leq C_9 \|\vec{w}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|^S_{W_2^1(G)},\ q = p_0/(p_0 - 1). \tag{1.54}$$

Используя (1.51), получим

$$\|l(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{10}(M). \tag{1.55}$$

Обозначим

$$(\nabla p, \vec{\psi}) = l_1(\vec{\psi}),\ \nabla p \in L_{q_0}(0, T; L_{p_0}(G)). \tag{1.56}$$

Выражение имеет смысл для $\forall \vec{\psi} \in L_{q_0'}(0, T; L_q(G))$. Тогда имеем

$$l_1(\vec{\psi}) \leq \|\nabla p\|_{L_{p_0}} \cdot \|\vec{\psi}\|_{L_q(G)}. \tag{1.57}$$

Значит, имеем оценку:

$$\|l_1(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{11}(M). \tag{1.58}$$

Для интегралов вида

$$l_2(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})\, dt = \int_0^T \sum_{i,j} \int_G \vec{u}_i \vec{\psi}_{jx_i} \vec{u}_j dx dt,\ l_3(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt$$

аналогично оценке (1.57) получим оценку

$$\|l_i(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{12}(M),\ i = 2, 3. \tag{1.59}$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в подпространстве пространства $W_2^1(G)$, состоящего из функций φ, удовлетворяющих условию $\int_G \varphi\, dx = 0$. В качестве вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}$ выбираем собственные функции задачи

$$-\Delta\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi},\ \vec{\psi}|_\Gamma = 0,\ \ \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(G). \tag{1.60}$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве $V = W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение $< \vec{u}, \vec{v} >_V = (\Delta\vec{u}, \Delta\vec{v})$. Пусть P_N – ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство $V_N = Lin\{\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots, \vec{\psi}_N\}$. Очевидно, что $P_N \in L(V, V)$ и в силу двойственности и самопряженности он допускает продолжение до ограниченного оператора класса $L(V', V')$, где V' – двойственное пространство, построенное по $L_2(G)$ и V как пополнение $L_2(G)$ относительно нормы $\|\vec{u}\|_{V'} = \sup_{\vec{v}\in V} |(\vec{u}, \vec{v})|/\|\vec{v}\|_V$. В частности, имеем, что $(\vec{u}, P_N\vec{v}) = (P_N\vec{u}, \vec{v})$ для всех $\vec{v} \in V, \vec{u} \in V'$. Отметим, что $W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ и вложение плотно. Это следствие теорем вложения. Поскольку $V \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$, имеем, что $W_{5/4}^{-1}(G) \subset V'$. Пусть λ_i – соответствующие собственные значения.

Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\vec{\psi}_i(x), \quad p_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\varphi_i(x).$$

где $c_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ есть решение системы:

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla\varphi_j) = 0, \;\; a(\vec{u}_N, \vec{\psi}_j) = (\vec{f}, \vec{\psi}_j), \;\; c_i(0) = (\vec{u}_0, \vec{\psi}_i), \quad j = 1, .., N. \quad (1.61)$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$(\vec{u}_N - \frac{\tau\nabla p_N}{\rho} - \tau(\vec{u}_N\nabla)\vec{u}_N + f\tau, \nabla\varphi_i) = 0. \quad (1.62)$$

Имеем, что

$$(\frac{\tau\nabla p_N}{\rho}, \nabla\varphi_i) = \frac{\tau}{\rho}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i), \;\; \det(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) \neq 0. \quad (1.63)$$

Последний определитель - определитель Грама и он отличен от нуля. Действительно, напомним, что имеет место оценка

$$\|\nabla p\|_{L_2(G)} \geq c_0\|p\|_{L_2(G)} \;\; \forall p \in W_2^1(G): \;\int_G p\,dx = 0.$$

Это неравенство гарантирует, что в искомом подпространстве функций φ можно ввести эквивалентное скалярное произведение $< \vec{u}, \vec{v} >= (\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})$, что и гарантирует утверждение. Пусть A – матрица с элементами $a_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$.

Тогда система (1.62) перепишется в виде

$$\vec{\alpha} = \frac{\rho}{\tau} A^{-1} \begin{pmatrix} (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N + \tau f, \varphi_1) \\ ... \\ (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N + \tau f, \varphi_N) \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

Подставляя $\vec{\alpha}$ во вторую систему, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $c_i(t)$. Априорная оценка ниже гарантирует, что задача Коши для этой системы имеет решение на всем промежутке $[0, T]$.

Далее, получим априорные оценки для приближенных решений. Умножим первое и второе уравнение системы (1.61) на α_i и на c_i, соответственно, и суммируем равенства по i. Тогда получим:

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla p_N) = 0, \quad a(\vec{u}_N, \vec{u}_N) = (f, \vec{u}_N). \tag{1.65}$$

Для решений мы имеем уже доказанную оценку (1.29), (1.30), и, таким образом,

$$\|\vec{u}_N\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))} + \|div\ \vec{u}_N\|_{L_2(Q)} + \|\frac{\nabla p_N}{\rho} + (\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M). \tag{1.66}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M, μ, τ,

$$\|\vec{u}_N\|_{L_\infty(0,T;L_2(G))} \leq C_1(M). \tag{1.67}$$

Оценка имеет тот же самый вид, поскольку $\|P_N f\|_{L_2(G)} \leq \|f\|_{L_2(G)}$, $\|P_N u_0\|_{L_2(G)} \leq \|u_0\|_{L_2(G)}$, $u_N(0, x) = P_N u_0$. Также имеем

$$\|\nabla p_N\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))} + \|(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N\|_{L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))} \leq C_4(M), \tag{1.68}$$

Как следствие из (1.36), (1.38), (1.43), (1.45) получим

$$\|w_N\|_{L_2(Q)} + \|\nabla p_N\|_{L_{5/4}(Q)} + \|(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N\|_{L_{5/4}(Q)} \leq C_4(M), \tag{1.69}$$

Получим оценку на производную по времени от решения. Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \vec{u}_N}{\partial t}, \vec{\psi}) = ((\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_N) - \frac{1}{\rho}(\nabla p_N, \vec{\psi}) + \\ \mu(\nabla \vec{u}_N, \nabla \vec{\psi}) - \mu(div\, \vec{u}_N, div\, \vec{\psi}) - ((\vec{u}_N, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_N) + (\vec{f}, \vec{\psi}) = L_0(\vec{\psi}), \end{aligned} \tag{1.70}$$

где $\vec{\psi} \in V_N$. Выражение $L_0(\vec{\psi})$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}^1_5(G)$ в силу оценок (1.57), (1.58), (1.59) (где вместо $\vec{u}$ используется вектор $\vec{u}_N$) и следовательно и над пространством V. Следовательно, найдется $g_N(t) \in V' \cap W^{-1}_{5/4}(G)$ такой, что $L_0(\vec{\psi}) = (g_N, \vec{\psi})$ для всех $\vec{\psi} \in V$. В силу оценок (1.57), (1.58), (1.59), (1.65)-(1.69) имеем, что

$$\|g_N\|_{L_{5/4}(0,T;V')} \leq \|g_N\|_{L_{5/4}(0,T;W^{-1}_{5/4}(G))} \leq C_{12}(M),$$

где C_{12} - некоторая постоянная, зависящая от величины M и не зависящая от N. Равенство (1.70) можно переписать в виде

$$\vec{u}_{Nt} = P_N g_N.$$

Тогда из предыдущей оценки и ограниченности оператора P_N в V' вытекает неравенство

$$\|\vec{u}_{Nt}\|_{L_{5/4}(0,T;V')} \leq C_{12}(M). \tag{1.71}$$

Далее мы воспользуемся теоремой о компактности (теорема 5.1 в [110]). Отметим, что вложение $\overset{\circ}{W}{}^1_2(G) \subset L_2(G)$ компактно (теоремы вложения). Последовательность $\vec{u}_N$ ограничено в пространстве с нормой

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(G))} + \|\vec{u}_t\|_{L_{5/4}(0,T;V')}$$

и, следовательно по теореме о компактности, существует подпоследовательность $\vec{u}_{N_k}$ и функция $\vec{u} \in L_2(Q)$ такие, что $\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}$ в $L_2(Q)$ и п. в. в Q. Выделяя еще подпоследовательности из этой подпоследовательности, если необходимо, без ограничения общности можем считать, что $\vec{u} \in L_2(0,T;W^1_2(G))$, $\vec{u}_{N_k x_i} \to \vec{u}_{x_i}$ слабо в $L_2(Q)$, $\vec{u}_{N_k t} \to \vec{u}_t$ слабо в $L_{5/4}(0,T;V')$, $div\,\vec{u}_{N_k} \to div\,\vec{u}$ слабо в $L_2(Q)$, $w_N \to w$, слабо в $L_2(Q)$, $p_N \to p$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\nabla p_N \to \nabla p$ и $(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N \to \vec{u}_1$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\vec{u}_N \to \vec{u}$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T;L_2(G))$. Покажем что

$$\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \vec{f}, \quad \vec{u}_1 = (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \tag{1.72}$$

Имеем, что $\nabla p_{N_k} \to \nabla p$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, покажем, что $(\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \to (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$ в некотором слабом смысле. Действительно, рассмотрим

$$\int_Q ((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} - (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \cdot \vec{\psi}\, dQ = \int_Q (((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}), \nabla)\vec{u}_{N_k} + (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k})) \cdot \vec{\psi}\, dQ$$

Для удобства считаем, что $\vec{\psi} \in L_\infty(Q)$. Для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_Q ((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \cdot \vec{\psi}\, dQ| \le C_{13} \|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(Q)} \|\nabla \vec{u}_{N_k}\|_{L_2(Q)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Для второго интеграла имеем

$$\int_Q (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k}) \cdot \vec{\psi}\, dQ \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

в силу слабой сходимости $\nabla \vec{u}_{N_k}$ в $L_2(Q)$.

Возьмем набор функций $\alpha_i(t) \in C([0,T])$, $c_i(t) \in C([0,T])$, умножим соответствующие равенства (1.61) с $N = N_k$ на эти функции, просуммируем результат по i от 1 до n ($n \le N_k$) и проинтегрируем полученные равенства по t. В результате имеем

$$\int_0^T (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \quad \int_0^T a(\vec{u}_{N_k}, \vec{\psi})\, dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt, \tag{1.73}$$

где $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ и $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$. Рассмотрим последовательно все слагаемые. По уже доказанному, мы можем перейти к пределу в первом равенстве и получим предельное равенство

$$\int_0^T (\vec{u} - \vec{w}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}). \tag{1.74}$$

Во втором равенстве, мы рассмотрим только нелинейные слагаемые, поскольку в линейной части переход осуществляется за счет слабой сходимости. Возьмем слагаемое

$$J_{N_k} = \int_0^T ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k})\, dt.$$

Покажем что $J_{N_k} \to J = \int_0^T ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})\, dt$. Составим разность

$$J_{N_k} - J = \int_0^T (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt + \int_0^T ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}), \vec{u})\, dt.$$

Второй интеграл стремится к нулю в силу слабой сходимости, а для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_0^T ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt| \le c\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(Q)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично показываем что $\int_0^T ((\vec{u}_{N_k},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}_{N_k})\,dt \to \int_0^T ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})\,dt$ при $k\to\infty$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, придем к тому, что выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) -$$

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})\,dt = \int_0^T (\vec{f},\vec{\psi})\,dt.$$

В силу базисности выбранных функций φ_i, $\vec{\psi}_i$ мы получим, что u есть обобщенное решение задачи. Доказательство последнего утверждения теоремы, т.е. включений $\nabla p, (\vec{u},\nabla\vec{u})\vec{u} \in L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(G))$ для любого $p_0\in[1,3/2]$, мы фактически уже провели в первой половине доказательства.

Далее, рассмотрим вопрос существования обобщенной разрешимости начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в некоторых весовых классах, характеризующие поведения решений при $t\to\infty$. Убывание (рост) при $t\to\infty$ используемых весовых функций может быть как экспоненциальным, так и степенным. Пусть $T=\infty$. Введем вспомогательную весовую функцию. Рассмотрим несколько различных случаев. В первом случае $\beta(t)=e^{\gamma t}$ ($\gamma\neq 0, \gamma\le\gamma_0=\mu/2\delta_0$), где δ_0 - постоянная из неравенства Пуанкаре:

$$\int_G |\vec{u}|^2dx \le \delta_0\int_G |\nabla\vec{u}|^2dx,\ \ \vec{u}|_\Gamma = 0.$$

Во втором случае $\beta(t)=(M+t)^{-\gamma}$ ($\gamma\neq 0$), где $M>0$ есть постоянная.

Теорема 1.2. *Пусть* $\vec{f}\sqrt{\beta}\in L_2(Q)$, $\vec{u}_0\in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2), *такое, что* $\sqrt{\beta}u\in L_2(0,\infty;W_2^1(G))$, $\sqrt{\beta}\vec{u}\in L_\infty(0,\infty;L_2(G))$, $\sqrt{\beta}(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})\in L_2(Q)$, $\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))$, $\nabla p\beta^\alpha\in L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))$, $\vec{u}_t\beta^\alpha\in L_{q_0}(0,\infty;W_{p_0}^{-1}(G))$ *для любого* $p_0\in[1,3/2]$ *и* $q_0=2p_0/(4p_0-3)$, *где* $\alpha<1/2$, *если* $\beta=e^{\gamma t}$ ($\gamma>0$) *и* $\alpha<\frac{1}{2}-\frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$, *если* $\beta=(t+M)^{-\gamma},\gamma<0$; $\alpha>\frac{1}{2}+\frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$ *и* $\alpha\ge 1$, *если* $\beta=(t+M)^{-\gamma},\gamma>0$; $\alpha\ge 1$, *если* $\beta=e^{\gamma t}$ ($\gamma<0$).

Доказательство. Вначале для гладких решений задачи получим первую априорную оценку с весом β. Используем интегральное тождество (1.10) в качестве определения обобщенного решения, где функции $\varphi\in L_2(0,\infty;W_2^1(G))$ с

$\int_G \varphi(t,x)\,dx = 0, \vec{\psi} \in L_5(0,\infty; W_5^1(G))$ и $\vec{\psi}|_S = 0$, имеют ограниченный носитель по t. Возьмем функции $\varphi = p\beta$ и $\vec{\psi} = \beta\vec{u}$. Получим равенства

$$\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\beta\nabla p) + \frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\beta\nabla p) - \tau(\vec{f},\beta\nabla p) - (\vec{u},\beta\nabla p) = 0,$$
$$(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{u}\beta) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}\beta) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u}\beta) + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\beta)+$$
$$((\vec{u},\nabla)\vec{u}\beta,(\tau(\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{\tau}{\rho}\nabla p - \tau\vec{f})) = (\vec{f},\vec{u}\beta). \quad (1.75)$$

Разделив первое из равенств в (1.75) на ρ и сложив его со вторым равенством и используя равенство $((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}) = 0$ в силу первого уравнения в (1) и интегрирования по частям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta}{2}dx - \int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta_t}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\beta) + \frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\beta\nabla p)+$$
$$\frac{\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\beta\nabla p) - \frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\beta\nabla p) - \frac{1}{\rho}(\vec{u},\beta\nabla p) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u}\beta) + \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}\beta)+$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\nabla p,(\vec{u},\nabla)\vec{u}\beta) - \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f}\beta) = (\vec{f},\vec{u}\beta). \quad (1.76)$$

Приводя подобные, заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{(|\vec{u}|^2\beta)}{2}dx - \int_G \frac{(|\vec{u}|^2\beta_t)}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\ \beta) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\ \beta)+$$
$$\frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p\beta) + \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}\ \beta) + \frac{2\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p\beta)-$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p\beta) - \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f}\beta) = (\vec{f},\vec{u}\ \beta), \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta}{2}dx - \int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta_t}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\beta)+$$
$$\tau(\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}),(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})) = \tau(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}\beta + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\ \beta) + (\vec{f},\vec{u}\beta), \quad (1.78)$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, (\varepsilon > 0). \quad (1.79)$$

Имеем, что

$$\tau|(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}\beta + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\beta)| \le \tau\int_G \frac{|\vec{f}|^2\beta}{2}dx + \frac{\tau}{2}\int_G |\frac{\nabla p}{\rho}\beta + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\beta|^2 dx, \quad (1.80)$$

$$|(\vec{f},\vec{u}\beta)| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_G |\vec{u}|^2\beta\ dx + \int_G |\vec{f}|^2\beta\ dx\frac{1}{2\varepsilon}, \tag{1.81}$$

Далее мы воспользуемся неравенством Пуанкаре:

$$\int_G |\nabla u|^2\, dx \ge \delta_0 \int_G |u|^2\, dx.$$

Используя его и вышеприведенные неравенства в (1.78), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta}{2}dx - \int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta_t}{2}dx + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}\beta) +$$
$$\frac{\tau}{2}(\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}), (\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})) \le$$
$$\frac{\tau}{2}\int_G |\vec{f}|^2\beta\ dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_G |\vec{f}|^2\beta\ dx + \frac{\varepsilon}{2\delta_0}\int_G |\nabla\vec{u}|^2\beta\ dx. \tag{1.82}$$

Возьмем $\varepsilon = \mu\delta_0$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta}{2}dx - \int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta_t}{2}dx + \frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}\beta) +$$
$$\frac{\tau}{2}(\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}), (\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})) \le \int_G |\vec{f}|^2\beta\ dx(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\mu}). \tag{1.83}$$

Рассмотрим два случая: a) $\beta_t < 0$, b) $\beta_t > 0$. Пусть $J = \frac{\mu}{4}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}\beta) + \frac{\tau}{2}(\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}), (\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}))$. Интегрируя (1.83) от 0 до t, в случае a) получим

$$\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta(t)}{2}dx + \int_0^t\int_G J dxdt \le C_1\int_0^t\int_G |\vec{f}|^2\beta\ dxdt + \int_G \frac{u_0^2}{2}\beta\ dx = M. \tag{1.84}$$

Рассмотрим случай b). Тогда неравенство (1.83) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2\beta}{2}dx + \int_G |\vec{u}|^2(\frac{\mu\delta_0\beta}{4} - \frac{\beta_t}{2}) + J\, dx \le \int_G |\vec{f}|^2\beta\ dx(\frac{\tau}{2} + \frac{\delta_0}{2\mu}). \tag{1.85}$$

Пусть $\beta = e^{\gamma t}$ ($\gamma > 0$). В случае, если $\gamma \le \gamma_0 = \mu/2\delta_0$, то (1.85) влечет оценку (1.84). Пусть $\beta = (t+M)^{-\gamma}$ ($\gamma < 0$). В этом случае, выбирая достаточно большое число M ($\frac{\mu}{2\delta_0} + \frac{\gamma}{M} > 0$) получим неравенство $\frac{\mu\beta}{4\delta_0} - \frac{\beta_t}{2} \ge 0$ и тогда мы снова придем к неравенству (1.84). Из неравенства (1.84) вытекают оценки

$$max_t \int_G |\vec{u}|^2\beta\ dx \le M,\ \int_G |\vec{u}|^2(t,x)dx \le \frac{M}{\beta(t)}, \tag{1.86}$$

$$\int_Q \frac{\mu}{4}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\beta) + \mu(div\,\vec{u})^2\beta + \frac{\tau}{2}(\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}), (\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u})) \le M. \tag{1.87}$$

Как следствие, имеем априорные оценки для решений:

$$\|\vec{u}\sqrt{\beta}\|_{L_2(0,\infty;W_2^1(G))} + \|div\ \vec{u}\sqrt{\beta}\|_{L_2(Q)} + \|\frac{\nabla p}{\rho}\sqrt{\beta} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\sqrt{\beta}\|_{L_2(Q)} \le C_1(M). \tag{1.88}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M, μ, τ,

$$\|\vec{u}\sqrt{\beta}\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} \le C_1(M). \tag{1.89}$$

Оценим все слагаемые, входящие в определение обобщенного решения. Покажем, что

$$\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \le C, \quad p_0 \in [1, 3/2], \tag{1.90}$$

где постоянная C обладает теми же свойствами, что и постоянная C_1. Оцениваем по неравенству Гёльдера:

$$\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \le C\|\nabla\vec{u}\beta^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\beta^{\frac{1}{2}}\|_{L_{p_0 q}(G)}, \tag{1.91}$$

где $q = \frac{2}{2-p_0}$. Далее, используем вложение $W_2^s(G) \subset L_{q_0 p}(G)$ при $p_0 q = r = \frac{6}{3-2s}$, в этом случае

$$\frac{p_0}{2-p_0} = \frac{3}{3-2s} => s = \frac{3(p_0-1)}{p_0}.$$

Необходимое неравенство $s \le 1$ эквивалентно неравенству $p_0 \le 3/2$. Из (1.91) вытекает оценка

$$\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \le C_1\|\nabla\vec{u}\beta^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\beta^{\frac{1}{2}}\|_{W_2^s(G)}. \tag{1.92}$$

Последний множитель оцениваем, используя интерполяционное неравенство [107]:

$$\|\vec{u}\sqrt{\beta}\|_{W_2^s(G)} \le C\|\vec{u}\sqrt{\beta}\|^{\theta}_{W_2^1(G)}\|\vec{u}\sqrt{\beta}\|^{1-\theta}_{L_2(G)}, \tag{1.93}$$

где $s = \theta$. Из (1.92) получаем оценку:

$$\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \le C\|\beta^{\frac{1}{2}}\vec{u}\|^{1+s}_{W_2^1(G)} \cdot \|\beta^{\frac{1}{2}}\vec{u}\|^{1-s}_{L_2(G)}. \tag{1.94}$$

Воспользовавшись (1.89), получим

$$\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \le C_1(M)(\int_0^\infty \|\beta^{\frac{1}{2}}\vec{u}\|^{q_0(1+s)}_{W_2^1(G)}\, dt)^{1/q_0} \le C_2(M), \tag{1.95}$$

где выберем

$$q_0(1+s) = 2, \quad \text{т.е.},\ q_0 = 2p_0/(4p_0-3). \tag{1.96}$$

Легко увидеть, в силу условий на параметр p_0, что $q_0 \geq 1$. Имеем из оценки (1.88), что

$$\|\frac{\nabla p}{\rho}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C(M). \tag{1.97}$$

Пусть $g = (\beta(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}), (\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u}))$. Тогда

$$\|\beta^\alpha \frac{\nabla p}{\rho}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq \|\beta^\alpha g\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} + \|\beta^\alpha(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))}. \tag{1.98}$$

Пусть $\beta_t > 0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$\|\beta^\alpha(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq \|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq C(M). \tag{1.99}$$

Если $\beta_t < 0$ и $\alpha \geq 1$, то аналогично имеем, что

$$\|\beta^\alpha(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq \|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq C(M). \tag{1.100}$$

Оценим

$$\|\beta^\alpha g\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq (\int_0^\infty (\int_G |g|^{p_0} dx)^{\frac{q_0}{p_0}} \beta^{\alpha q_0} dt)^{\frac{1}{q_0}} \tag{1.101}$$

Имеем

$$(\int_G |g|^{p_0} dx)^{\frac{q_0}{p_0}} \leq (\int_G |g|^2 dx)^{\frac{q_0}{2}} c_0, \ c_0 = \mu(G)^{q_0(1/p_0 - 1/2)},$$

где μ – мера Лебега. Тогда

$$\begin{aligned}\|\beta^\alpha g\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} &\leq c_1(\int_0^\infty (\int_G |g|^2 dx)^{\frac{q_0}{2}} \beta^{\frac{q_0}{2}} \beta^{\alpha q_0 - \frac{q_0}{2}} dt)^{\frac{1}{q_0}} \leq \\ &c_1(\int_0^\infty \beta \int_G |g|^2 dx dt)^{\frac{q_0}{2}} (\int_0^\infty \beta^{\frac{2q_0}{2-q_0}(\alpha - \frac{1}{2})} dt)^{(2-q_0)/2},\end{aligned} \tag{1.102}$$

Пусть $\beta = e^{\gamma t}, \gamma > 0$, тогда для сходимости последнего интеграла необходимо $\alpha < 1/2$. Если $\beta = (t+M)^{-\gamma}, \gamma < 0$, то необходимо

$$\alpha < \frac{1}{2} - \frac{(2-q_0)}{2|\gamma| q_0}. \tag{1.103}$$

Отметим, что неравенство $\alpha \geq 0$ выполнено, если потребуем, чтобы $\frac{2}{1+|\gamma|} \leq q_0 \leq 2$. Пусть $\beta = e^{\gamma t}, \gamma < 0$, тогда для сходимости интеграла необходимо $\alpha > 1/2$. Если $\beta = (t+M)^{-\gamma}, \gamma > 0$, то необходимо

$$\alpha > \frac{(2-q_0)}{2|\gamma| q_0} + \frac{1}{2}. \tag{1.104}$$

Отметим, что неравенство $\frac{(2-q_0)}{2|\gamma|q_0}+\frac{1}{2}\geq 1$ выполнено, если $\frac{2}{1+|\gamma|}\geq q_0$. Если $\beta_t>0$, то из неравенств (1.98), (1.99) вытекает оценка

$$\|\nabla p\beta^{\alpha}\|_{L_{p_0}(0,\infty;L_{q_0}(G))}\leq C(M), \tag{1.105}$$

где $\alpha<1/2$ если $\beta=e^{\gamma t}$ $(\gamma>0)$ и $\alpha<\frac{1}{2}-\frac{2-q_0}{2|\gamma|q_0}$ если $\beta=(t+M)^{-\gamma},\gamma>0$. Случай $\alpha=\frac{1}{2}$ возможен при $q_0=2$. Если $\beta_t<0$, то из неравенств (1.98), (1.100) вытекает оценка

$$\|\nabla p\beta^{\alpha}\|_{L_{p_0}(0,\infty;L_{q_0}(G))}\leq C(M), \tag{1.106}$$

где $\alpha>\frac{1}{2}+\frac{2-q_0}{2|\gamma|q_0}$ и $\alpha\geq 1$. Отметим, что при $\frac{2}{1+|\gamma|}\geq q_0$ выполнено неравенство $\frac{1}{2}+\frac{2-q_0}{2|\gamma|q_0}\geq 1$. Получаем оценки:

$$\|\beta^{\alpha}\nabla p\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))}+\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))}\leq C_4(M), \tag{1.107}$$

Как следствие, при $p_0=p_1=5/4$, поскольку $p_0=q_0$, в этом случае, имеем:

$$\|\beta^{\alpha}\nabla p\|_{L_{p_1}(Q)}+\|\beta(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_1}(Q)}\leq C_4(M), \tag{1.108}$$

Так как

$$\vec{w}=\tau(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}-\vec{f}), \tag{1.109}$$

то отсюда имеем неравенство для нормы $\vec{w}$:

$$\|\sqrt{\beta}\vec{w}\|_{L_2(Q)}\leq\|\sqrt{\beta}(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})\|_{L_2(Q)}+\|\sqrt{\beta}\vec{f}\|_{L_2(Q)}\leq C_5(M). \tag{1.110}$$

Оценим слагаемые из определения обобщенного решения. Имеем:

$$((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})=\int_G\sum_{i,j}(u_i-w_i)\psi_{jx_i}u_j\,dx. \tag{1.111}$$

Рассмотрим функцию $l(\vec{\psi})$. Возьмем $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0-1}$ и $\beta=\frac{1}{p_0-1}$, используя неравенство Гельдера, получим

$$I=\int_G w_i\psi_{jx_i}u_jdx,\ |I|\leq\|w_iu_j\|_{L_{p_0}(G)}\cdot\|\psi_{jx_i}\|_{L_{p_0'}(G)},\ 1/p_0+1/q=1. \tag{1.112}$$

Показатель p_0 тот же. Далее, аналогично получаем (см. (1.89)):

$$\Big[\int_G|w_i|^{p_0}(u_j)^{p_0}dx\Big]^{\frac{1}{p_0}}\leq\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|_{L_{\frac{2p_0}{2-p_0}}(0,\infty;L_{q_0}(G))}$$
$$\leq C_6\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|_{W_2^s(G)}\leq\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|^s_{W_2^1(G)}\cdot\|u_j\|^{1-s}_{L_2(G)}=I_1, \tag{1.113}$$

где $s = \frac{3(p_0-1)}{p_0}$. Имеем оценку интеграла:

$$\|I_1\beta\|^{q_0}_{L_{q_0}(0,\infty)} \le \int_0^\infty \beta^{q_0}\|w_i\|^{q_0}_{L_2(G)}\|u_j\|^{sq_0}_{W^1_2(G)}\|u_j\|^{(1-s)q_0}_{L_2(G)}dt \le$$
$$C\int_0^\infty \|\sqrt{\beta}w_i\|^{q_0}_{L_2(G)}\|\sqrt{\beta}u_j\|^{sq_0}_{W^1_2(G)}dt, \quad (1.114)$$

где $C = \|\sqrt{\beta}u_j\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))}$. Применим неравенство Гёльдера с $q = \frac{2}{q_0}$:

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,\infty)} \le \|w_i\sqrt{\beta}\|^{q_0}_{L_2(Q)} \cdot \big[\int_0^\infty \|u_j\sqrt{\beta}\|^{sq_0\frac{2}{2-q_0}}_{W^1_2(G)}dt\big]^{\frac{2-q_0}{2q_0}}. \quad (1.115)$$

Отметим, что $\frac{2sq_0}{2-q_0} = 2$. Тогда

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,\infty)} \le C_8(M). \quad (1.116)$$

Выражение

$$l(\vec{\psi}) = \sum_{i,j}\int_G w_i\psi_{jx_i}u_j dx = ((\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) \quad (1.117)$$

есть линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0'}(G)$. Из (1.112), (1.115) вытекает, что

$$\|l(\vec{\psi})\|_{W^{-1}_{p_0}(G)} = \sup_{\vec{\psi}\in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0'}(G)} \frac{|l(\vec{\psi})|}{\|\vec{\psi}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0'}(G)}} \le C_9\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|^s_{W^1_2(G)}\cdot\|u_j\|^{1-s}_{L_2(G)}. \quad (1.118)$$

где $p_0' = p_0/(p_0-1)$. Используя (1.112), получим

$$\|l(\vec{\psi})\beta\|_{L_{q_0}(0,\infty;W^{-1}_{p_0}(G))} \le C_{10}(M). \quad (1.119)$$

Обозначим

$$(\nabla p, \vec{\psi}) = l_1(\vec{\psi}),\ \nabla p \in L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G)). \quad (1.120)$$

Выражение имеет смысл для $\forall\vec{\psi} \in L_{q_0'}(0,\infty;L_{p_0'}(G))$. Тогда имеем

$$l_1(\vec{\psi}) \le \|\nabla p\|_{L_{p_0}(G)}\cdot\|\vec{\psi}\|_{L_{p_0'}(G)}. \quad (1.121)$$

В силу оценок (1.105), (1.106) имеем

$$\|l_1(\vec{\psi})\beta^\alpha\|_{L_{q_0}(0,\infty;W^{-1}_{p_0}(G))} \le \|\beta^\alpha\nabla p\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \le C_{11}(M). \quad (1.122)$$

Для интегралов вида

$$l_2(\vec{\psi}) = \int_0^\infty ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})\,dt = \int_0^\infty \sum_{i,j}\int_G \vec{u}_i\vec{\psi}_{jx_i}\vec{u}_j dxdt,\ l_3(\vec{\psi}) = \int_0^\infty ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})\,dt$$

аналогично оценке (1.121) получим оценку

$$\|l_i(\vec{\psi})\beta\|_{L_{q_0}(0,\infty;W_{p_0}^{-1}(G))} \le C_{12}(M),\ i=2,3. \tag{1.123}$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в подпространстве пространства $W_2^1(G)$, состоящего из функций φ, удовлетворяющих условию $\int_G \varphi\,dx = 0$. В качестве вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}$ выбираем собственные функции задачи

$$-\Delta\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi},\ \vec{\psi}|_\Gamma = 0,\quad \vec{\psi} = (\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G). \tag{1.124}$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве $V = W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение $<\vec{u},\vec{v}>_V = (\Delta\vec{u},\Delta\vec{v})$. Пусть P_N – ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство $V_N = Lin\{\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_2,\ldots,\vec{\psi}_N\}$. Очевидно, что $P_N \in L(V,V)$ и в силу двойственности и самопряженности он допускает продолжение до ограниченного оператора класса $L(V',V')$, где V' – двойственное пространство, построенное по $L_2(G)$ и V как пополнение $L_2(G)$ относительно нормы $\|\vec{u}\|_{V'} = \sup_{\vec{v}\in V}|(\vec{u},\vec{v})|/\|\vec{v}\|_V$. В частности, имеем, что $(\vec{u},P_N\vec{v}) = (P_N\vec{u},\vec{v})$ для всех $\vec{v}\in V,\vec{u}\in V'$. Отметим, что $W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ и вложение плотно. Это следствие теорем вложения. Поскольку $V \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$, имеем, что $W_{5/4}^{-1}(G) \subset V'$. Пусть λ_i – соответствующие собственные значения.

Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$u_N = \sum_{i=1}^N c_i(t)\vec{\psi}_i(x),\quad p_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\varphi_i(x).$$

где $c_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ есть решение системы:

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N,\nabla\varphi_j) = 0,\ \ a(\vec{u}_N,\vec{\psi}_j) = (\vec{f},\vec{\psi}_j),\ c_i(0) = (\vec{u}_0,\vec{\psi}_i),\quad j=1,..,N. \tag{1.125}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$(\vec{u}_N - \frac{\tau\nabla p_N}{\rho} - \tau(\vec{u}_N\nabla)\vec{u}_N + \vec{f}\tau,\nabla\varphi_i) = 0. \tag{1.126}$$

Имеем, что

$$(\frac{\tau\nabla p_N}{\rho}, \nabla\varphi_i) = \frac{\tau}{\rho}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i),\ \det(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) \neq 0. \tag{1.127}$$

Последний определитель - определитель Грама и он отличен от нуля. Действительно, напомним, что имеет место оценка

$$\|\nabla p\|_{L_2(G)} \geq c_0\|p\|_{L_2(G)}, \quad \forall p \in W_2^1(G): \int_G p\,dx = 0.$$

Это неравенство гарантирует, что в искомом подпространстве функций φ можно ввести эквивалентное скалярное произведение $< \vec{u}, \vec{v} >= (\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})$, что и гарантирует утверждение. Пусть A – матрица с элементами $a_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$. Тогда система (1.126) перепишется в виде

$$\vec{\alpha} = \frac{\rho}{\tau}A^{-1}\begin{pmatrix} (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N + \tau\vec{f}, \varphi_1) \\ ... \\ (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N + \tau\vec{f}, \varphi_N) \end{pmatrix}. \tag{1.128}$$

Подставляя $\vec{\alpha}$ во вторую систему, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $c_i(t)$. Априорная оценка ниже гарантирует, что задача Коши для этой системы имеет решение на всем промежутке $[0, \infty]$.

Далее, получим априорные оценки для приближенных решений. Умножим первое и второе уравнение системы (1.125) на α_i и на c_i, соответственно, и суммируем равенства по i. Тогда получим:

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla p_N) = 0, \quad a(\vec{u}_N, \vec{u}_N) = (\vec{f}, \vec{u}_N). \tag{1.129}$$

Для решений мы имеем уже доказанную оценку (1.88), (1.89), и таким образом,

$$\|\vec{u}_N\sqrt{\beta}\|_{L_2(0,\infty;W_2^1(G))} + \|div\ \vec{u}_N\sqrt{\beta}\|_{L_2(Q)} + \|(\frac{\nabla p_N}{\rho} + (\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N)\sqrt{\beta}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M). \tag{1.130}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M, μ, τ,

$$\|\vec{u}_N\sqrt{\beta}\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} \leq C_1(M). \tag{1.131}$$

Оценка имеет тот же самый вид, поскольку $\|P_N\vec{f}\|_{L_2(G)} \leq \|\vec{f}\|_{L_2(G)}$, $\|P_N\vec{u}_0\|_{L_2(G)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L_2(G)}$, $\vec{u}_N(0,x) = P_N\vec{u}_0$. Возьмем $p_0 = q_0 = 5/4$. Зафиксируем параметр $\alpha = \alpha_0$, удовлетворяющий условиям из формулировки теоремы. Как следствие из (1.95), (1.97), (1.108), (1.110) имеем

$$\|w_N\sqrt{\beta}\|_{L_2(Q)} + \|\nabla p_N\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(Q)} + \|(\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\beta\|_{L_{5/4}(Q)} \leq C_4(M), \qquad (1.132)$$

Получим оценку на производную по времени от решения. Перепишем второе уравнение системы в виде

$$(\frac{\partial\vec{u}_N}{\partial t},\vec{\psi}) = ((\vec{u}_N - \vec{w}_N,\nabla)\vec{\psi},\vec{u}_N) - \frac{1}{\rho}(\nabla p_N,\vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{u}_N,\nabla\vec{\psi}) - \mu(div\,\vec{u}_N, div\,\vec{\psi}) - ((\vec{u}_N,\nabla)\vec{\psi},\vec{w}_N) + (\vec{f},\vec{\psi}) = L_0(\vec{\psi}), \quad (1.133)$$

где $\vec{\psi} \in V_N$. Легко увидеть, что выражение $L_0(\vec{\psi})$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}^1_5(G)$ в силу оценок (1.121), (1.122), (1.123) (где вместо $\vec{u}$ используется вектор $\vec{u}_N$) и следовательно и над пространством V. Следовательно, найдется $g_N(t) \in V' \cap W^{-1}_{5/4}(G)$ такой, что $L_0(\vec{\psi}) = (g_N,\vec{\psi})$ для всех $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_5(G)$ или $\psi \in V$. В силу оценок (1.102), (1.121), (1.122), (1.123), (1.129)-(1.132) имеем, что

$$\|g_N\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(0,\infty;V')} \leq \|g_N\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(0,\infty;W^{-1}_{5/4}(G))} \leq C_{12}(M), \qquad (1.134)$$

где C_{12} - некоторая постоянная, зависящая от величины M и не зависящая от N. Равенство (1.133) можно переписать в виде

$$\vec{u}_{Nt} = P_N g_N.$$

Тогда из предыдущей оценки и ограниченности оператора P_N в V' вытекает неравенство

$$\|\vec{u}_{Nt}\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(0,\infty;V')} \leq C_{12}(M), \qquad (1.135)$$

Последовательность $\vec{u}_N$ ограничено в пространстве с нормой

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\beta^{\alpha_0}\|_{L_2(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}^1_2(G))} + \|\vec{u}_t\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(0,\infty;V')} \qquad (1.136)$$

и, справедливы оценки (1.130)-(1.132). Следовательно, существует подпоследовательность $\vec{u}_{N_k}$ и функция $\vec{u} \in L_{2,\sqrt{\beta}}(0,\infty;W^1_2(G))$ такая, что $\vec{u}_{N_k}\sqrt{\beta} \to \vec{u}\sqrt{\beta}$

в $L_2(0,\infty;W_2^1(G))$ слабо, $\vec{u}_{N_k x_i}\sqrt{\beta} \to \vec{u}_{x_i}\sqrt{\beta}$ слабо в $L_2(Q)$, $\vec{u}_{N_k t} \to \vec{u}_t$ слабо в $L_{5/4}(0,\infty;V')$, $div\,\vec{u}_{N_k}\sqrt{\beta} \to div\,\vec{u}\sqrt{\beta}$ слабо в $L_2(Q)$, $\vec{w}_{N_k}\sqrt{\beta} \to \vec{u}\sqrt{\beta}$ слабо в $L_2(Q)$, $p_{N_k}\beta^{\alpha_0} \to p\beta^{\alpha_0}$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\beta^{\alpha_0}\nabla p_{N_k} \to \beta^{\alpha_0}\nabla p$ и $\beta(\vec{u}_{N_k},\nabla)\vec{u}_{N_k} \to \beta\vec{u}_1$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\sqrt{\beta}\vec{u}_{N_k} \to \sqrt{\beta}\vec{u}$ $*$-слабо в $L_\infty(0,\infty;L_2(G))$. Покажем что

$$\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u},\nabla)\vec{u} - \vec{f}, \quad \vec{u}_1 = (\vec{u},\nabla)\vec{u}, \tag{1.137}$$

Построим возрастающую последовательность $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$. В силу оценки (1.136) подпоследовательность $\vec{u}_{N_k}$ ограничена в пространстве с нормой

$$\|\vec{u}\|_n = \|\vec{u}\|_{L_2(0,T_n;\overset{\circ}{W}{}_2^1(G))} + \|\vec{u}_t\beta^{\alpha_0}\|_{L_{5/4}(0,T_n;V')}. \tag{1.138}$$

Далее мы воспользуемся теоремой о компактности (теорема 5.1 гл. 1 в [110]). Отметим, что вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset L_2(G)$ компактно (теоремы вложения). В силу теоремы о компактности, построим последовательность $\vec{u}^1_{N_k}$ такую, что $\vec{u}^1_{N_k} \to \vec{u}$ сильно в $L_2(Q_{T_1})$ ($Q_{T_1} = (0,T_1)\times G$ и п.в. в Q_{T_1}. Опять используя теорему о компактности, из подпоследовательности $\vec{u}^1_{N_k}$ выделим подпоследовательность $\vec{u}_{N_k}$ такую что $\vec{u}^2_{N_k} \to \vec{u}$ сильно $L_2(Q_{T_2})$ и п.в. в Q_{T_2}. Повторяя рассуждения построим семейство подпоследовательностей $\vec{u}^i_{N_k}$ такую, что $\vec{u}^i_{N_k} \to \vec{u}$ сильно $L_2(Q_{T_i})$ и п.в. в Q_{T_i}. Определим подпоследовательность $\vec{v}_k = \vec{u}^k_{N_k}$, которая будет сходиться в $L_2(Q_{T_i})$ к $\vec{u}$ для всех i и п.в. в Q. Фиксируем i и возьмем функцию $\vec{\psi} \in L_\infty(Q)$ такую, что $\sup\vec{\psi} \subset Q_{T_i}$. Имеем

$$\int_Q \beta((\vec{v}_k,\nabla)\vec{v}_{N_k} - (\vec{u},\nabla)\vec{u})\cdot\vec{\psi}\,dQ = \int_Q \beta(((\vec{v}_k-\vec{u}),\nabla)\vec{v}_k + (\vec{u},\nabla)(\vec{u}-\vec{v}_k))\cdot\vec{\psi}\,dQ$$

Для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_Q \beta((\vec{v}_k-\vec{u},\nabla)\vec{v}_k\cdot\vec{\psi}\,dQ| \le C_{13}\|\vec{v}_k-\vec{u}\|_{L_2(Q_{T_i})}\|\sqrt{\beta}\nabla\vec{v}_k\|_{L_2(Q_{T_i})} \to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Для второго интеграла имеем

$$\int_Q (\vec{u},\nabla)(\vec{u}-\vec{v}_k)\cdot\vec{\psi}\,dQ \to 0 \text{ при } k\to\infty,$$

в силу слабой сходимости $\beta\nabla\vec{v}_k$ к $\beta\nabla\vec{u}$ в $L_2(Q)$. Поскольку сходимости имеют место для всех i и множество функций с ограниченным носителем класса $L_\infty(Q)$ плотно в $L_{2,\beta}(0,\infty;L_2(G))$ можем заключить, что $u_1 = (\vec{u},\nabla)\vec{u}$ и тогда

$\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \vec{f}$. Подпоследовательность $\vec{v}_k$ совпадает с некоторой подпоследовательностью u_{N_k} при подходящем выборе последовательности номеров N_k. Фиксируем $T > 0$ и возьмем набор функций $\alpha_i(t), c_i(t) \in C([0, \infty))$, таких, что $supp\, \alpha_i, supp\, c_i \subset [0, T]$, умножим соответствующие равенства (1.125) с $N = N_k$ на эти функции, просуммируем результат по i от 1 до n ($n \leq N_k$) и проинтегрируем полученные равенства по t. В результате имеем

$$\int_0^\infty (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \quad \int_0^\infty a(\vec{u}_{N_k}, \vec{\psi})\, dt = \int_0^\infty (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt, \tag{1.139}$$

где $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ и $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$. Рассмотрим последовательно все слагаемые. По уже доказанному, мы можем перейти к пределу в первом равенстве и получим предельное равенство

$$\int_0^\infty (\vec{u} - \vec{w}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}). \tag{1.140}$$

Во втором равенстве, мы рассмотрим только нелинейные слагаемые, поскольку в линейной части переход осуществляется за счет слабой сходимости. Возьмем слагаемое

$$J_{N_k} = \int_0^\infty ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k})\, dt.$$

Покажем что $J_{N_k} \to J = \int_0^\infty ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})\, dt$. Составим разность

$$J_{N_k} - J = \int_0^\infty (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt + \int_0^\infty ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}), \vec{u})\, dt.$$

Второй интеграл стремится к нулю в силу слабой сходимости, а для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_0^\infty ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt| \leq c\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(Q_T)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично показываем что $\int_0^\infty ((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_{N_k})\, dt \ \to \ \int_0^\infty ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, придем к тому, что выполнено интегральное тождество

$$\int_0^\infty (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) -$$
$$\mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\, \vec{u}, div\, \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt = \int_0^\infty (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt.$$

В силу базисности выбранных функций φ, $\vec{\psi}$ мы получим, что $\vec{u}$ есть обобщенное решение задачи. Доказательство последнего утверждения теоремы, т.е. включений $\nabla p, (\vec{u}, \nabla\vec{u})\vec{u} \in L_{q_0}(0,\infty; L_{p_0}(G))$, $\vec{u}_t\beta^{\alpha} \in L_{q_0}(0,\infty; W^{-1}_{p_0}(G))$ для любого $p_0 \in [1, 3/2]$ и соответствующих параметров α мы фактически уже провели в первой половине доказательства.

1.3 Стационарный случай.

Рассмотрим вопрос существования обобщенной разрешимости краевой задачи для стационарной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева.

Теорема 1.3. *Пусть* $\vec{f} \in L_2(G)$, $\vec{u}_0 \in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.3), (1.4), *такое, что* $\vec{u} \in W^1_2(G)$, $\vec{w} \in L_2(G)$, $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{3/2}(G)$.

Доказательство. Вначале для гладких решений задачи получим первую априорную оценку. Пусть $\varphi = p$ и $\vec{\psi} = \vec{u}$ в (1.13), тогда:

$$\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p) + \frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla p) - \tau(\vec{f},\nabla p) - (\vec{u},\nabla p) = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u}) - ((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}) + \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) +$$
$$((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\tau(\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{\tau}{\rho}\nabla p - \tau\vec{f})) = (\vec{f},\vec{u}). \quad (1.141)$$

Разделив первое из равенств в (1.141) на ρ и сложив его со вторым равенством и используя равенство $((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}) = 0$ в силу первого уравнения в (1.3) и интегрирования по частям, получим

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{u}) + \frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p) + \frac{\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p) -$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p) - \frac{1}{\rho}(\vec{u},\nabla p) + \frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u}) + \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}) +$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\nabla p,(\vec{u},\nabla)\vec{u}) - \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f})) = (\vec{f},\vec{u}), \quad (1.142)$$

Приводя подобные, заключаем, что

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p)+$$
$$\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u})+\frac{2\tau}{\rho}((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p)-\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p)-\tau((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f})=(\vec{f},\vec{u}),\tag{1.143}$$

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\tau(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})=$$
$$\tau(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})+(\vec{f},\vec{u}),\tag{1.144}$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши

$$|ab|\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,(\varepsilon>0).\tag{1.145}$$

Имеем, что

$$\tau|(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})|\leq\tau\int_G\frac{|\vec{f}|^2}{2}dx+\frac{\tau}{2}\int_G|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}|^2dx,\tag{1.146}$$

$$|(\vec{f},\vec{u})|\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_G|\vec{u}|^2dx+\int_G|\vec{f}|^2dx\frac{1}{2\varepsilon},\tag{1.147}$$

Используя эти неравенства в (1.144), получим

$$\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\frac{\tau}{2}(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})\leq$$
$$\frac{\tau}{2}\int_G|\vec{f}|^2dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_G|\vec{f}|^2dx+\frac{\varepsilon C_0}{2}\int_G|\nabla\vec{u}|^2dx,\tag{1.148}$$

где постоянная C_0 взята из неравенства Пуанкаре

$$\int_G|\vec{u}|^2dx\leq C_0\int_G|\nabla\vec{u}|^2dx,$$

справедливого для всех $\vec{u}\in W_2^1(G)$, таких, что $\vec{u}|_\Gamma=0$. Возьмем $\varepsilon=\frac{\mu}{C_0}$, тогда получим

$$\frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\frac{\tau}{2}(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})\leq\int_G|\vec{f}|^2dx(\frac{\tau}{2}+\frac{C_0}{2\mu}).\tag{1.149}$$

Как следствие, имеем априорные оценки для решений:

$$\|\vec{u}\|_{W_2^1(G)} + \|div\ \vec{u}\|_{L_2(G)} + \|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(G)} \le C_1(M). \tag{1.150}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от $M = \|f\|_{L_2(G)}, \mu, \tau$. Оценим все слагаемые, входящие в определение обобщенного решения. Покажем, что

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \le C_2(M). \tag{1.151}$$

Оцениваем по неравенству Гёльдера:

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \le C\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{L_6(G)}. \tag{1.152}$$

Далее, используем теорему вложения: $W_2^1(G) \subset L_6(G)$. Из (1.150), (1.152) вытекает оценка

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \le C_1\|\vec{u}\|^2_{W_2^1(G)} \le C_2(M). \tag{1.153}$$

Имеем из оценки (1.150), что

$$\|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(G)} \le C_1(M). \tag{1.154}$$

Отметим, что

$$\|\vec{u}\|_{L_2(G)} \ge C\|\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)}. \tag{1.155}$$

Тогда имеем неравенство

$$\begin{gathered} C_1(M) \ge \|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(G)} \ge C\|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \ge \\ C\|\frac{\nabla p}{\rho}\|_{L_{3/2}(G)} - C\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \ge C\|\frac{\nabla p}{\rho}\|_{L_{3/2}(G)} - C_3(M), \end{gathered} \tag{1.156}$$

и, как следствие, оценку

$$\|\nabla p\|_{L_{3/2}(G)} \le C_4(M).$$

Получили оценки:

$$\|\nabla p\|_{L_{3/2}(G)} + \|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{3/2}(G)} \le C_5(M). \tag{1.157}$$

Так как

$$\vec{w} = \tau(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \vec{f}), \tag{1.158}$$

то отсюда имеем равенство для нормы $\vec{w}$:

$$\|\vec{w}\|_{L_2(G)} \leq \tau \|\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(G)} + \tau \|\vec{f}\|_{L_2(G)} \leq C_6(M). \tag{1.159}$$

Оценим слагаемые из определения обобщенного решения. Имеем:

$$((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) = \int_G \sum_{i,j} (u_i - w_i)\psi_{jx_i} u_j \, dx. \tag{1.160}$$

Используем неравенство Гельдера:

$$I = \int_G w_i \psi_{jx_i} u_j dx, \ \ |I| \leq \|w_i u_j\|_{L_{3/2}(G)} \cdot \|\psi_{jx_i}\|_{L_3(G)}. \tag{1.161}$$

Далее, аналогично получаем:

$$I_1 = \Big[\int_G |w_i|^{3/2} |u_j|^{3/2} dx\Big]^{2/3} \leq \|w_i\|_{L_2(G)} \cdot \|u_j\|_{L_6(G)} \leq C_6 \|w_i\|_{L_2(G)} \|u_j\|_{W_2^1(G)} \leq$$

$$\|w_i\|_{L_2(G)} \|u_j\|_{W_2^1(G)} \|u_j\|_{L_2(G)} \leq C_7 \|w_i\|_{L_2(G)} \|u_j\|_{W_2^1(G)}. \tag{1.162}$$

Воспользуемся неравенством (1.161). Выражение

$$l(\vec{\psi}) = \sum_{i,j} \int_G w_i \psi_{jx_i} u_j dx = ((\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) \tag{1.163}$$

есть линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{W}{}_3^1(G)$. Действительно, из (1.161), (1.162) вытекает, что

$$\|l(\vec{\psi})\|_{W_{3/2}^{-1}(G)} = \sup_{\vec{\psi} \in \overset{\circ}{W}{}^1(G)} \frac{\|l(\vec{\psi})\|}{\|\vec{\psi}\|_{\overset{\circ}{W}{}_3^1(G)}} \leq C_9 \|\vec{w}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{W_2^1(G)} < \infty. \tag{1.164}$$

Обозначим

$$(\nabla p, \vec{\psi}) = l_1(\vec{\psi}), \ \ \nabla p \in L_{3/2}(G). \tag{1.165}$$

Выражение имеет смысл для $\forall \vec{\psi} \in L_3(G)$ и имеем

$$l_1(\vec{\psi}) \leq \|\nabla p\|_{L_{3/2}} \cdot \|\vec{\psi}\|_{L_3(G)}. \tag{1.166}$$

Значит, имеем оценку:

$$\|l_1(\vec{\psi})\|_{W_{3/2}^{-1}(G)} \leq C_{11}(M). \tag{1.167}$$

Аналогичные аргументы, как и в доказательстве оценки (1.166), позволяют оценить интегралы

$$l_2(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{u})\,dt = \int_0^T \sum_{i,j}\int_G u_i\psi_{jx_i}u_j dxdt,\ \ l_3(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w})\,dt,$$

оценка имеет следующий вид:

$$\|l_i(\vec{\psi})\|_{W^{-1}_{3/2}(G)} \le C_{12}(M),\ \ i = 2,3. \tag{1.168}$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в подпространстве пространства $W^1_2(G)$, состоящего из функций φ, удовлетворяющих условию $\int_G \varphi\,dx = 0$. В качестве вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}$ выбираем собственные функции задачи

$$-\Delta\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi},\ \ \vec{\psi}|_\Gamma = 0,\quad \vec{\psi} = (\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in W^2_2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(G). \tag{1.169}$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве $V = W^2_2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(G)$, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение $<\vec{u},\vec{v}>_V = (\Delta\vec{u},\Delta\vec{v})$. Пусть λ_i – соответствующие собственные значения.

Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$\vec{u}_N = \sum_{i=1}^N c_i\vec{\psi}_i(x),\quad p_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i\varphi_i(x).$$

где c_i и α_i есть постоянные, являющиеся решением системы

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N,\nabla\varphi_j) = 0,\ \ a(\vec{u}_N,\vec{\psi}_j) = (\vec{f},\vec{\psi}_j),\ \ j = 1,..,N. \tag{1.170}$$

Пусть A_0 и A_1 представляют собой отображения $A_0, A_1 : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^N$ соответственно с координатами

$$(A_0(\vec{\alpha},\vec{c}))_j = \frac{(-\vec{u}_N + \vec{w}_N,\nabla\varphi_j)}{\rho},\quad j = 1,..,N, \tag{1.171}$$

$$(A_1(\vec{\alpha},\vec{c}))_j = a(\vec{u}_N,\vec{\psi}_j) - (\vec{f},\vec{\psi}_j),\quad j = 1,..,N. \tag{1.172}$$

Как вытекает из неравенства (1.149), имеем

$$\begin{aligned}\langle A_0(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{\alpha}\rangle + \langle A_1(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{c}\rangle &\ge (\frac{-\vec{u}_N + \vec{w}_N,\nabla p_N}{\rho}) + a(\vec{u}_N,\vec{u}_N) - (\vec{f},\vec{u}_N)\\ &\ge \delta_0\|\vec{u}_N\|^2_{W^1_2(G)} + \delta_0\|\frac{\nabla p_N}{\rho} + (\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|^2_{L_2(G)} - C_2(M),\end{aligned} \tag{1.173}$$

где $C_2(M) = \int_G |\vec{f}|^2 dx(\frac{\tau}{2} + \frac{C_0}{2\mu})$, δ_0 - некоторая положительная постоянная, и скобки $\langle\,\rangle$ означают скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Далее, используя неравенство треугольника, имеем

$$\|\frac{\nabla p_N}{\rho} + (\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|^2_{L_2(G)} \geq \|\frac{\nabla p_N}{\rho} + (\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|^2_{L_{3/2}(G)}$$
$$\geq \frac{1}{2}\|\frac{\nabla p_N}{\rho}\|^2_{L_{3/2}(G)} - 2\|(\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|^2_{L_{3/2}(G)}, \quad (1.174)$$

Из неравенства (1.153) вытекает

$$\|(\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|_{L_{3/2}(G)} \leq C_1\|\vec{u}_N\|^2_{W_2^1(G)}. \quad (1.175)$$

Найдутся постоянные C_2 и C_3 такие, что

$$C_2\|\vec{c}\|^2 \leq \|\vec{u}_N\|^2_{W_2^1(G)} \leq C_3\|\vec{c}\|^2, \quad (1.176)$$

в силу линейной независимости $\vec{\psi}_i$. Аналогично найдутся постоянные C_4 и C_5 такие, что

$$C_4\|\vec{\alpha}\|^2 \leq \|\frac{\nabla p_N}{\rho}\|^2_{L_{3/2}(G)} \leq C_5\|\vec{\alpha}\|^2. \quad (1.177)$$

Таким образом

$$\langle A_0(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{\alpha}\rangle + \langle A_1(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{c}\rangle \geq \delta_0\|\vec{u}_N\|^2_{W_2^1(G)} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta_0\|\frac{\nabla p_N}{\rho}\|^2_{L_{3/2}} -$$
$$2\varepsilon\delta_0\|\vec{u}_N\|^4_{W_2^1(G)} - C_2(M) \geq \|\vec{c}\|^2(\frac{\delta_0 C_2}{2} - 2\varepsilon\delta_0 C_3^2\|\vec{c}\|^2) + \delta_0\varepsilon C_4\|\vec{\alpha}\|^2 - C_2(M), \quad (1.178)$$

где $\varepsilon \in (0,1]$ произвольная постоянная. Выбираем его следующим образом $\varepsilon = \min(\frac{C_2}{8C_3^2}, 1)/\max(\|\vec{c}\|^2, 1)$. Тогда имеем

$$\langle A_0(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{\alpha}\rangle + \langle A_1(\vec{\alpha},\vec{c}),\vec{c}\rangle \geq \frac{\delta_0 C_2}{4}\|\vec{c}\|^2 + \delta_0\varepsilon C_4\|\vec{\alpha}\|^2 - C_2(M) = J. \quad (1.179)$$

При $\|\vec{c}\| \leq 1$ имеем

$$J \geq \delta_0 C_4 \min(\frac{C_2}{8C_3^2}, 1)\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{c}\|^2\frac{\delta_0 C_2}{4} \geq \delta_1(\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{c}\|^2) - C_2(M),$$

а при $\|\vec{c}\| \geq 1$ получим

$$J \geq C_4 \min(\frac{C_2}{8C_3^2}, 1)\frac{\|\vec{\alpha}\|^2}{\|\vec{c}\|^2} + \|\vec{c}\|^2\frac{\delta_0 C_2}{4} - C_2(M) \geq \delta_2(\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{c}\|^2)^{1/2},$$

где δ_1, δ_2 – положительные постоянные. Тогда при $R = (\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{c}\|^2)^{1/2} \geq 1$ имеем неравенство

$$\langle A_0(\vec{\alpha}, \vec{c}), \vec{\alpha}\rangle + \langle A_1(\vec{\alpha}, \vec{c}), \vec{c}\rangle \geq \min(\delta_1, \delta_2)R - C_2(M) \tag{1.180}$$

При $R = (\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{c}\|^2)^{1/2} > R_0 = C_2(M)/\min(\delta_1, \delta_2)$ правая часть неравенства (1.180) положительна. По лемме 4.3. (см. параграф 4.3. в [110]), система (1.170) имеет решение.

Как следствие из (1.153), (1.154), (1.157), (1.159) имеем

$$\|\vec{u}_N\|_{W_2^1(G)} + \|\vec{w}_N\|_{L_2(G)} + \|\nabla p_N\|_{L_{3/2}(G)} + \|(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N\|_{L_{3/2}(G)} \leq C_4(M). \tag{1.181}$$

Отметим, что вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset L_2(G)$ компактно (теорема вложения). Последовательность $\vec{u}_N$ ограничена в $W_2^1(G)$, и, следовательно по теореме о компактности (см. теорему 5.1. в [110]), существует подпоследовательность $\vec{u}_{N_k}$ и функция $\vec{u} \in L_2(G)$ такие, что $\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}$ в $L_2(G)$ по норме и п. в. в G, а также что $\vec{u} \in W_2^1(G)$, $\vec{u}_{N_k x_i} \to \vec{u}_{x_i}$ слабо в $L_2(G)$, $div\, \vec{u}_{N_k} \to div\, \vec{u}$ слабо в $L_2(G)$. Выделяя еще подпоследовательности из этой подпоследовательности, если необходимо, без ограничения общности можем считать, что $\vec{w}_N \to \vec{w}$ слабо в $L_2(G)$, $p_N \to p$ в $L_{3/2}(G)$, $\nabla p_N \to \nabla p$ и $(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N \to \vec{u}_1$ слабо в $L_{3/2}(G)$. Таким образом $\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{u}_1 - \vec{f}$. Покажем, что $(\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \to (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$ в некотором слабом смысле, т.е. $\vec{u}_1 = (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$. Действительно, рассмотрим

$$\int_G ((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} - (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \cdot \vec{\psi}\, dG = \int_G (((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}), \nabla)\vec{u}_{N_k} + (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k})) \cdot \vec{\psi}\, dG$$

Для удобства считаем, что $\vec{\psi} \in L_\infty(G)$. Для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_G ((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \cdot \vec{\psi}\, dG| \leq C_{13}\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(G)}\|\nabla\vec{u}_{N_k}\|_{L_2(G)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Для второго интеграла имеем

$$\int_G (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k}) \cdot \vec{\psi}\, dG \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

в силу слабой сходимости $\nabla\vec{u}_{N_k}$ в $L_2(G)$. Из определения функции $\vec{u}_1$ вытекает, что $\vec{u}_1 = (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$, т.е., $\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \vec{f}$.

Возьмем набор постоянных α_i, c_i, умножим соответствующие равенства (1.170) с $N = N_k$ на эти функции, просуммируем результат по i от 1 до n

$(n \le N_k)$. В результате имеем

$$(\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla\varphi) = 0, \;\; a(\vec{u}_{N_k}, \vec{\psi}) = (\vec{f}, \vec{\psi}), \tag{1.182}$$

где $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i$ и $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. Рассмотрим последовательно все слагаемые. По уже доказанному, мы можем перейти к пределу в первом равенстве и получим предельное равенство

$$(\vec{u} - \vec{w}, \nabla\varphi), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}). \tag{1.183}$$

Во втором равенстве, мы рассмотрим только нелинейные слагаемые, поскольку в линейной части переход осуществляется за счет слабой сходимости. Возьмем слагаемое

$$J_{N_k} = ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k}).$$

Покажем что $J_{N_k} \to J = ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})$. Составим разность

$$J_{N_k} - J = (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u}) + ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}), \vec{u}).$$

Второе слагаемое стремится к нулю в силу слабой сходимости, а первое имеет оценку

$$|((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})| \le c\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(G)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично показываем что $((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_{N_k}) \to ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, придем к тому, что выполнено тождество

$$-((\vec{u}-\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) - \mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) = (\vec{f}, \vec{\psi}).$$

В силу базисности выбранных функций $\varphi_i, \vec{\psi}_i$ мы получим, что $\vec{u}$ есть обобщенное решение задачи.

1.4 Приближение Обербека-Буссинеска.

Рассмотрим вопрос существования обобщенной разрешимости начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в приближении Обербека-Буссинеска в пространствах Соболева.

Теорема 1.4. *Пусть* $\vec{f}, f_0 \in L_2(Q)$, $\vec{u}_0, T_0 \in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.5), (1.6), *такое, что* $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0, Z; L_{p_0}(G))$ *для любого* $p_0 \in [1, 3/2]$, *где* $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$.

Доказательство. Вначале для гладких решений задачи получим первую априорную оценку. Первое уравнение в (1.5) умножим на $\frac{\nabla p}{\rho}$ и интегрируем по G, получим равенство

$$(\vec{w}, \frac{\nabla p}{\rho}) - (\vec{u}, \frac{\nabla p}{\rho}) = 0, \tag{1.184}$$

второе уравнение в (1.5) умножим на $\vec{u}$ и интегрируем результат по G:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx + \int_G \mu(|\nabla \vec{u}|^2 + (div\, \vec{u})^2) dx + (\frac{\nabla p}{\rho}, \vec{u}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \vec{w}) - (\beta \vec{g} T, \vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u}), \tag{1.185}$$

и третье уравнение в (1.5) умножим на T и интегрируем по частям, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|T|^2}{2} dx + \int_G \chi |\nabla T|^2 dx = (f_0, T). \tag{1.186}$$

Складывая равенства (1.184)-(1.186), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G (|\vec{u}|^2 + |T|^2) dx + \int_G (\mu(|\nabla \vec{u}|^2 + (div\, \vec{u})^2) + \chi |\nabla T|^2) dx + \\ (\frac{\nabla p}{\rho}, \vec{w}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \vec{w}) - (\beta \vec{g} T, \vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u}) + (f_0, T), \tag{1.187}$$

так как $\vec{w} = \tau[(\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \beta \vec{g} T]$, то

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G (|\vec{u}|^2 + |T|^2) dx + \int_G (\mu(|\nabla \vec{u}|^2 + (div\, \vec{u})^2) + \chi |\nabla T|^2) dx + \\ (\vec{w}, \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \beta \vec{g} T, \vec{u}) - (\beta \vec{g} T, \vec{w}) - (\beta \vec{g} T, \vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u}) + (f_0, T), \tag{1.188}$$

отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{|T|^2}{2}) dx + \int_G (\mu(|\nabla \vec{u}|^2 + (div\, \vec{u})^2) + \chi |\nabla T|^2) dx + \\ \frac{1}{\tau}\int_G |\vec{w}|^2 dx - (\beta \vec{g} T, \vec{w}) - (\beta \vec{g} T, \vec{u}) = (\vec{f}, \vec{u}) + (f_0, T). \tag{1.189}$$

Переносим выражение $(\beta \vec{g} T, \vec{w}) + (\beta \vec{g} T, \vec{u})$ в правую часть и оцениваем ее сверху через

$$\int_G \frac{|\vec{w}|^2}{2\tau} dx + C\int_G (|T|^2 dx + |\vec{u}|^2)\, dx + ||\vec{f}||^2_{L_2(G)} + ||f_0||^2_{L_2(G)}. \tag{1.190}$$

Интегрируя полученное неравенство от 0 до t, придем к оценке

$$\int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{|T|^2}{2})dx + \int_0^t \int_G (\mu(|\nabla\vec{u}|^2 + (div\,\vec{u})^2) + \chi|\nabla T|^2 + \frac{1}{2\tau}|\vec{w}|^2)(r,x)dxdr$$
$$\leq ||\vec{f}||^2_{L_2(Q)} + ||f_0||^2_{L_2(Q)} + C\int\limits_0^t \int\limits_G (|T|^2 + |\vec{u}|^2)(r,x)\,dxdr + \int\limits_G \frac{T_0^2 + |\vec{u}_0|^2}{2}dx. \tag{1.191}$$

Отбрасывая второе слагаемое в левой части неравенства (1.191), можем переписать неравенство в виде

$$\int_G \frac{|T|^2 + |\vec{u}|^2}{2}dx \leq M + C\int_0^t \int_G (|T|^2 + |\vec{u}|^2)dxdr. \tag{1.192}$$

По лемме Гронуолла

$$\|T\|_{L_\infty(0,Z;L_2(G))} + \|\vec{u}\|_{L_\infty(0,Z;L_2(G))} \leq C(M), \tag{1.193}$$

где постоянная $C(M)$ зависит только от величин M, C, T. Возвращаемся к неравенству (1.191). Возьмем там $t = T$ и используем (1.193), тогда получим неравенство

$$\int_0^Z \int_G (\mu(|\nabla\vec{u}|^2 + (div\,\vec{u})^2) + \chi|\nabla T|^2 + \frac{1}{2\tau}|\vec{w}|^2)dxdr \leq M + C(M)T = C_1(M). \tag{1.194}$$

Из (1.193), (1.194) вытекает оценка

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0,Z;W_2^1(G))} + \|T\|_{L_2(0,Z;W_2^1(G))} + \|\vec{w}\|_{L_2(Q)} \leq C_2(M). \tag{1.195}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные, зависящие от M, T, μ и τ. Оценим все слагаемые, входящие в определение обобщенного решения. Покажем, что

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{s_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} \leq C, \quad p_0 \in [1, 3/2]. \tag{1.196}$$

Оцениваем по неравенству Гёльдера:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{L_{p_0 q}(G)}, \tag{1.197}$$

где $q = \frac{2}{2-p_0}$. Далее, используем теорему вложения: $W_2^S(G) \subset L_r(G)$. Возьмем

$$p_0 q = r = \frac{6}{3-2S},$$

тогда

$$\frac{p_0}{2-p_0} = \frac{3}{3-2S} => S = \frac{3(p_0-1)}{p_0}.$$

Необходимое неравенство $S \leq 1$ эквивалентно неравенству $p_0 \leq 3/2$. Отметим, что при $p_0 = 1$ вложение $W_2^S(G) \subset L_{p_0 q}(G)$ выполнено при любом $s \geq 0$. Из (1.197) вытекает оценка

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C_4 \|\nabla \vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{W_2^S(G)}. \tag{1.198}$$

Последний множитель оцениваем, используя интерполяционное неравенство:

$$\|\vec{u}\|_{W_2^S(G)} \leq C_5 \|\vec{u}\|^{\Theta}_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-\Theta}_{L_2(G)}, \tag{1.199}$$

где $S = \Theta$. Из (1.198) получаем оценку:

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C_6 \|\vec{u}\|^{1+S}_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-S}_{L_2(G)}. \tag{1.200}$$

Воспользовавшись (1.193), получим

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} \leq C_7(M)(\int_0^T \|\vec{u}\|^{q_0(1+S)}_{W_2^1(G)}\, dt)^{1/q_0} \leq C_8(M), \tag{1.201}$$

где выберем

$$q_0(1+S) = 2, \quad \text{т.е., } q_0 = 2p_0/(4p_0-3). \tag{1.202}$$

Легко увидеть, в силу условий на параметр p_0, что $q_0 \geq 1$. Отсюда получаем, что

$$\|\vec{w}\|_{L_2(Q)} \geq C_9 \|\vec{w}\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} \geq C_{10} \|\nabla p\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} - \\ C_{11} \|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} - C_{12} \|T\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))}. \tag{1.203}$$

Используя неравенства (1.195), (1.201), получаем оценку

$$\|\nabla p\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))} \leq C_{13}(M), \tag{1.204}$$

где C_{13} – некоторая постоянная, зависящая от M, μ и τ. Как следствие, при $p_0 = p_1 = 5/4$, поскольку $p_0 = q_0$, в этом случае, имеем:

$$\|\nabla p\|_{L_{5/4}(Q)} + \|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{5/4}(Q)} \leq C_{14}(M). \tag{1.205}$$

Оценим слагаемые из определения обобщенного решения. Имеем:

$$((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) = \int_G \sum_{i,j}(u_i-w_i)\psi_{jx_i}u_j\,dx. \tag{1.206}$$

Используем неравенство Гельдера:

$$I = \int_G w_i\psi_{jx_i}u_j dx,\ |I| \le \|w_i u_j\|_{L_{p_0}(G)} \cdot \|\psi_{jx_i}\|_{Lq(G)},\ 1/p_0 + 1/q = 1. \tag{1.207}$$

Показатель p_0 тот же, что и ранее. Далее, аналогично получаем с $q = \frac{2}{2-p_0}$ (см. (1.196)):

$$I_1 = \Big[\int_G |w_i|^{p_0}|u_j|^{p_0}dx\Big]^{\frac{1}{p_0}} \le \|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|_{L_{p_0q}} \le C_{16}\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|_{W_2^S(G)} \le$$
$$\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|^S_{W_2^1(G)}\cdot\|u_j\|^{1-S}_{L_2(G)} \le C_{17}\|w_i\|_{L_2(G)}\cdot\|u_j\|^S_{W_2^1(G)}. \tag{1.208}$$

Имеем оценку интеграла:

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,Z)} \le \Big[\int_0^T \|\vec{w_i}\|^{q_0}_{L_2(G)}\cdot\|\vec{u_j}\|^{Sq_0}_{W_2^1(G)}dt\Big]^{\frac{1}{q_0}}, \tag{1.209}$$

где $q_0 = \frac{2p_0}{4p_0-3}$. Применим неравенство Гёльдера с $q = \frac{2}{q_0}$:

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,Z)} \le \|\vec{w_i}\|_{L_2(Q)}\cdot\Big[\int_0^T \|\vec{u_j}\|^{\frac{2Sq_0}{2-q_0}}_{W_2^1(G)}dt\Big]^{\frac{2-q_0}{2q_0}}. \tag{1.210}$$

Отметим, что $\frac{2Sq_0}{2-q_0} = 2$. Тогда

$$\|I_1\|_{L_{q_0}(0,Z)} \le C_{18}(M). \tag{1.211}$$

Воспользуемся неравенством (см. (1.207)):

$$I \le C_7\|\vec{w_i}\vec{u_j}\|_{L_{p_0}(G)}\cdot\|\vec{\psi}\|_{W_q^1(G)}. \tag{1.212}$$

Выражение

$$l(\vec{\psi}) = \sum_{i,j}\int_G w_i\psi_{jx_i}u_j dx = ((\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}) \tag{1.213}$$

есть лин. неп. функционал над $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0'}(G)$, $p_0' = p_0/(p_0-1)$. Из (1.208), (1.212) вытекает, что

$$\|l(\vec{\psi})\|_{W^{-1}_{p_0}(G)} = \sup_{\vec{\psi}\in\overset{\circ}{W}{}^1(G)} \frac{\|l(\vec{\psi})\|}{\|\vec{\psi}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0'}(G)}} \le C_{19}\|\vec{w}\|_{L_2(G)}\cdot\|\vec{u}\|^S_{W_2^1(G)},\ . \tag{1.214}$$

Используя (1.211), получим

$$\|l(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,Z;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{20}(M). \tag{1.215}$$

Обозначим

$$(\nabla p, \vec{\psi}) = l_1(\vec{\psi}),\ \nabla p \in L_{q_0}(0, Z; L_{p_0}(G)). \tag{1.216}$$

Выражение имеет смысл для $\forall\vec{\psi} \in L_{q_0'}(0, Z; L_{p_0'}(G))$. Тогда имеем

$$l_1(\vec{\psi}) \leq \|\nabla p\|_{L_{p_0}} \cdot \|\vec{\psi}\|_{L_{p_0'}(G)}. \tag{1.217}$$

Значит, имеем оценку:

$$\|l_1(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,Z;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{21}(M). \tag{1.218}$$

Для интегралов вида

$$l_2(\vec{\psi}) = \int_0^Z ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})\, dt = \int_0^Z \sum_{i,j} \int_G u_i \psi_{jx_i} u_j dxdt,\ l_3(\vec{\psi}) = \int_0^Z ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt$$

аналогично оценке (1.215) получим оценку

$$\|l_i(\vec{\psi})\|_{L_{q_0}(0,Z;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{22}(M),\ i = 2, 3, \tag{1.219}$$

где C_{22} – некоторая постоянная, зависящая от M, μ и τ. Далее, оценим слагаемое из определения обобщенного решения

$$l_3(\xi) = ((u_i - w_i)T, \xi_{x_i}) \leq \|\xi_{x_i}\|_{L_{p_0'}(G)} \cdot \|(u_i - w_i)T\|_{L_{p_0}(G)}, \tag{1.220}$$

где сопряженный показатель $p_0' = \frac{p_0}{p_0 - 1}$. Используем неравенство Гёльдера:

$$\Big(\int_G (u_i - w_i)^{p_0} |T|^{p_0} dx\Big)^{\frac{1}{p_0}} \leq \Big(\int_G |T|^{\frac{2p_0}{2-p_0}} dx\Big)^{\frac{2-p_0}{2p_0}} \cdot \Big(\int_0^Z (\vec{u} - \vec{w})^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.221}$$

Имеем

$$\|T\|_{L_{\frac{2p_0}{2-p_0}}(G)} \leq C_{23}\|T\|_{W_2^S(G)} \leq C_{24}\|T\|^S_{W_2^1(G)} \cdot \|T\|^{1-S}_{L_2(G)} \leq C_{25}(M)\|T\|^S_{W_2^1(G)}, \tag{1.222}$$

где C_{23}, C_{24}, C_{25} – некоторые постоянные, зависящие от M, μ и τ. Таким образом, имеем

$$\|l_3(\xi)\|_{W_{p_0}^{-1}(G)} \leq\ C_{25}\|T\|^S_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u} - \vec{w}\|_{L_2(G)}. \tag{1.223}$$

Далее, имеем

$$\|l_3(\xi)\|_{L_{q_0}(0,Z;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{26}(\int_0^Z \|T\|_{W_2^1(G)}^{Sq_0} \cdot \|\vec{u}-\vec{w}\|_{L_2(G)}^{q_0} dt)^{\frac{1}{q_0}} \leq$$

$$C_{26}\|\vec{u}-\vec{w}\|_{L_2(Q)} \cdot (\int_0^Z \|T\|_{W_2^1(G)}^{\frac{S2q_0}{2-q_0}} dt)^{\frac{2-q_0}{2q_0}} \leq C_{27}(M). \quad (1.224)$$

Таким образом, имеем оценку

$$\|l_3(\xi)\|_{L_{q_0}(0,Z;W_{p_0}^{-1}(G))} \leq C_{27}(M). \quad (1.225)$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в подпространстве пространства $W_2^1(G)$, состоящего из функций φ, удовлетворяющих условию $\int_G \varphi\, dx = 0$ и $\{\xi_i\}$ – собственные функции задачи

$$\Delta\xi = \lambda\xi,\ \ \xi|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \frac{\partial\xi}{\partial\vec{\nu}}|_{\Gamma_1} = 0. \quad (1.226)$$

В качестве вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}$ выбираем собственные функции задачи

$$-\Delta\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi},\ \ \vec{\psi}|_{\Gamma} = 0,\ \ \ \vec{\psi} = (\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G). \quad (1.227)$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве $V = W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение $<\vec{u},\vec{v}>_V = (\Delta\vec{u},\Delta\vec{v})$. Пусть P_N – ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство $V_N = Lin\{\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_2,\dots,\vec{\psi}_N\}$. Очевидно, что $P_N \in L(V,V)$ и в силу двойственности и самопряженности он допускает продолжение до ограниченного оператора класса $L(V',V')$, где V' – двойственное пространство, построенное по $L_2(G)$ и V как пополнение $L_2(G)$ относительно нормы $\|\vec{u}\|_{V'} = \sup_{\vec{v}\in V}|(\vec{u},\vec{v})|/\|\vec{v}\|_V$. В частности, имеем, что $(\vec{u},P_N\vec{v}) = (P_N\vec{u},\vec{v})$ для всех $\vec{v}\in V,\vec{u}\in V'$. Отметим, что $W_2^2(G)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ и вложение плотно. Это следствие теорем вложения. Поскольку $V\subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$, имеем, что $W_{5/4}^{-1}(G)\subset V'$. Пусть λ_i – соответствующие собственные значения. Обозначим $W = \{\vec{u}\in W_2^2(G) : \vec{u}|_{S_0} = 0,\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{n}}|_{S_1} = 0\}$. Оператор Δ с областью определения W симметричен в $L_2(G)$ и результаты из параграфа 7 в [118] влекут, что он самосопряженный. В таком случае, собственные функции задачи (1.226), образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве функций W, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение $<\vec{u},\vec{v}>_W = (-\Delta\vec{u}+\vec{u}),(-\Delta\vec{v}+\vec{v})$.

Пусть R_N - ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство $W_N = Lin\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$. Имеем $R_N \in L(W, W) \cap L(W', W')$, и что $(-\vec{u}, R_N\vec{v}) = (-\vec{u}, R_N\vec{v})$, для всех $\vec{v} \in W, \vec{u} \in W'$. Точно также имеем $W \subset W^1_{0,5}(G)$, $W^1_{0,5}(G) = \{\vec{u} \in W^1_5(G) : \vec{u}|_{S_0} = 0\}$ и $W^{-1}_{0,\,5/4}(G) \subset W'$, где $W^{-1}_{0,\,5/4}(G)$ есть двойственное к $W^1_{0,5}(G)$. Пусть γ_i – соответствующие собственные значения. Отметим, что каждая из функций $\vec{\psi}_i$, ξ_i принадлежит пространству $W^2_p(G)$ [3], [118] для всех p, и в силу теорем вложения [107] пространству $C^{1+\beta}(\overline{G})$.

Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$\vec{u}_N = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\vec{\psi}_i(x), \quad p_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\varphi_i(x), \quad T_N = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\xi_i(x),$$

где $c_i(t)$, $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ есть решение системы:

$$(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla\varphi_j) = 0, \;\; a(\vec{u}_N, \vec{\psi}_j) = (\vec{f}, \vec{\psi}_j), \;\; a_1(T_N, \xi_j) = (\vec{f}_0, \xi_j), \;\; j = 1, .., N, \tag{1.228}$$

$$c_i(0) = (\vec{u}_0, \vec{\psi}_i), \;\; \beta_i(0) = (T_0, \xi_i). \tag{1.229}$$

Первое уравнение системы (1.228), (1.229) можно переписать в виде

$$(\vec{u}_N - \frac{\tau\nabla p_N}{\rho} - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N - \tau\beta\vec{g}T, \nabla\varphi_i) = 0. \tag{1.230}$$

Имеем, что

$$(\frac{\tau\nabla p_N}{\rho}, \nabla\varphi_i) = \frac{\tau}{\rho}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i), \; \det(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) \neq 0. \tag{1.231}$$

Последний определитель - определитель Грама и он отличен от нуля. Действительно, напомним, что имеет место оценка

$$\|\nabla p\|_{L_2(G)} \geq C_0\|p\|_{L_2(G)} \;\; \forall p \in W^1_2(G) : \int_G p\, dx = 0.$$

Это неравенство гарантирует, что в искомом подпространстве функций можно ввести эквивалентное скалярное произведение $< \vec{u}, \vec{v} >= (\nabla\vec{u}, \nabla\vec{v})$, что и гарантирует утверждение. Пусть A – матрица с элементами $a_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$. Тогда система (1.230) перепишется в виде

$$\vec{\alpha} = \frac{\rho}{\tau}A^{-1}\begin{pmatrix} (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N - \tau\beta\vec{g}T, \varphi_1) \\ ... \\ (\vec{u}_N - \tau(\vec{u}_N, \nabla)\vec{u}_N - \tau\beta\vec{g}T, \varphi_N) \end{pmatrix}. \tag{1.232}$$

Подставляя $\vec{\alpha}$ во второе и третье уравнение системы, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $c_i(t)$ и $\beta_i(t)$. Априорная оценка ниже гарантирует, что задача Коши для этой системы имеет решение на всем промежутке $[0,T]$.

Далее, получим априорные оценки для приближенных решений. Умножим первое, второе и третье уравнение системы (1.228), (1.229) на α_i, на c_i и на β_i, соответственно, и суммируем равенства по i. Тогда получим:

$$(\vec{u}_N-\vec{w}_N,\nabla p_N)=0,\quad a(\vec{u}_N,\vec{u}_N)=(\vec{f},\vec{u}_N),\quad a_1(T_N,T_N)=(f_0,T_N). \tag{1.233}$$

Для решений мы имеем уже доказанные оценки (1.195), (1.196), и, таким образом,

$$\|\vec{u}_N\|_{L_2(0,Z;W_2^1(G))}+\|T_N\|_{L_2(0,Z;W_2^1(G))}+\|\vec{w}_N\|_{L_2(Q)}\le C_1(M). \tag{1.234}$$

$$\|\vec{u}_N\|_{L_\infty(0,Z;L_2(G))}+\|T_N\|_{L_\infty(0,Z;L_2(G))}\le C_2(M), \tag{1.235}$$

где $C_1(M)$ и $C_2(M)$ – некоторые постоянные, зависящие от M,μ,τ.

Оценка имеет тот же самый вид, поскольку $\|P_N\vec{f}\|_{L_2(G)}\le\|\vec{f}\|_{L_2(G)}$, $\|R_Nf_0\|_{L_2(G)}\le\|f_0\|_{L_2(G)}$, $\|P_N\vec{u}_0\|_{L_2(G)}\le\|\vec{u}_0\|_{L_2(G)}$, $\|R_NT_0\|_{L_2(G)}\le\|T_0\|_{L_2(G)}$. Кроме того, имеем оценку

$$\|\nabla p_N\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))}+\|(\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|_{L_{q_0}(0,Z;L_{p_0}(G))}\le C_3(M), \tag{1.236}$$

Как следствие из (1.195), (1.205) имеем

$$\|\vec{w}_N\|_{L_2(Q)}+\|\nabla p_N\|_{L_{5/4}(Q)}+\|(\vec{u}_N,\nabla)\vec{u}_N\|_{L_{5/4}(Q)}\le C_4(M), \tag{1.237}$$

Получим оценку на производную по времени от решения. Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\begin{gathered}(\frac{\partial\vec{u}_N}{\partial t},\vec{\psi})=L_0(\vec{\psi})=((\vec{u}_N-\vec{w}_N,\nabla)\vec{\psi},\vec{u}_N)-\frac{1}{\rho}(\nabla p_N,\vec{\psi})-\\ \mu(\nabla\vec{u}_N,\nabla\vec{\psi})-\mu(div\,\vec{u}_N,div\,\vec{\psi})-((\vec{u}_N,\nabla)\vec{\psi},\vec{w}_N)-(\beta\vec{g}T_N,\vec{\psi})+(\vec{f},\vec{\psi}),\end{gathered} \tag{1.238}$$

где $\vec{\psi}\in V_N$. Выражение $L_0(\vec{\psi})$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ (если его продолжить с подпространства V_N на все пространство $\overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ с помощью того же самого равенства) в силу оценок (1.217), (1.218), (1.219) (где вместо $\vec{u}$ используется вектор $\vec{u}_N$) и, следовательно, и над пространством V. Следовательно, найдется $g_N(t) \in W^{-1}_{5/4}(G) \subset V'$ такой, что $L_0(\vec{\psi}) = (g_N, \vec{\psi})$ для всех $\psi \in V$. В силу оценок (1.218), (1.219), (1.233)-(1.237) имеем, что

$$\|g_N\|_{L_{5/4}(0,Z;V')} \leq \|g_N\|_{L_{5/4}(0,Z;W^{-1}_{5/4}(G))} \leq C_5(M),$$

где C_5 - некоторая постоянная, зависящая от величины M и не зависящая от N. Равенство (1.238) можно переписать в виде

$$\vec{u}_{Nt} = P_N g_N.$$

Тогда из предыдущей оценки и ограниченности оператора P_N в V' вытекает неравенство

$$\|\vec{u}_{Nt}\|_{L_{5/4}(0,Z;V')} \leq C_5(M). \tag{1.239}$$

Аналогично, перепишем третье уравнение системы в виде

$$(\frac{\partial T_N}{\partial t}, \xi) = L_1(\xi) = ((\vec{u}_N - \vec{w}_N)T_N, \nabla\xi) - \chi(\nabla T_N, \nabla\xi) + (f_0, \xi), \tag{1.240}$$

где $\xi \in W_N$. Выражение $L_1(\xi)$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}^1_{0,5}(G)$ в силу оценки (1.225) и, следовательно, и над пространством W. Следовательно, найдется $g_{0N}(t) \in W^{-1}_{0,5/4}(G) \subset W'$ такой, что $L_1(\xi) = (g_{0N}, \xi)$ для всех $\xi \in W$. В силу оценок (1.223), (1.233)-(1.237) имеем, что

$$\|g_{0N}\|_{L_{5/4}(0,Z;W')} \leq \|g_{0N}\|_{L_{5/4}(0,Z;W^{-1}_{5/4}(G))} \leq C_6(M),$$

где C_6 - некоторая постоянная, зависящая от величины M и не зависящая от N. Равенство (1.240) можно переписать в виде

$$T_{Nt} = R_N g_{0N}.$$

Тогда из предыдущей оценки и ограниченности оператора R_N в W' вытекает неравенство

$$\|T_{Nt}\|_{L_{5/4}(0,Z;W')} \leq C_6(M). \tag{1.241}$$

Далее мы воспользуемся теоремой о компактности (теорема 5.1 гл. 1 в [110]). Отметим, что вложение $\overset{\circ}{W}{}^1_2(G) \subset L_2(G)$ компактно (теоремы вложения). Последовательности $\vec{u}_N$, T_N ограничены в пространстве с нормами

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|_{L_2(0,Z;\overset{\circ}{W}{}_2^1(G))} + \|\vec{u}_t\|_{L_{5/4}(0,Z;V')},$$
$$\|T\| = \|T\|_{L_2(0,Z;W_2^1(G))} + \|T_t\|_{L_{5/4}(0,Z;W')} \quad (1.242)$$

и, следовательно по теореме о компактности, существуют подпоследовательности $\vec{u}_{N_k}, T_{N_k}$ и функции $\vec{u}, T \in L_2(Q)$ такие, что $\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}$, $T_{N_k} \to T$ в $L_2(Q)$ и п. в. в Q. Выделяя еще подпоследовательности из этой подпоследовательности, если необходимо, без ограничения общности можем считать, что $\vec{u}_{N_k x_i} \to \vec{u}_{x_i}$ слабо в $L_2(Q)$, $\vec{u}_{N_k t} \to \vec{u}_t$ слабо в $L_{5/4}(0,Z;V')$, $div\,\vec{u}_{N_k} \to div\,\vec{u}$ слабо в $L_2(Q)$, $\vec{w}_{N_k} \to \vec{w}$ слабо в $L_2(Q)$, $p_{N_k} \to p$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\nabla p_{N_k} \to \nabla p$ и $(\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}_1$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, $\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}$, $T_{N_k} \to T$ слабо в $L_2(0,Z;W_2^1(G))$ и $*$-слабо в $L_\infty(0,Z;L_2(G))$. Вначале, покажем, что

$$\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \beta\vec{g}T, \quad \vec{u}_1 = (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \quad (1.243)$$

Имеем, что $\nabla p_{N_k} \to \nabla p$, $T_{N_k} \to T$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, покажем, что $(\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \to (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$ в некотором слабом смысле. Действительно, рассмотрим

$$\int_Q ((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} - (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \cdot \vec{\psi}\, dQ = \int_Q ((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}), \nabla)\vec{u}_{N_k} + (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k})) \cdot \vec{\psi}\, dQ$$

Для удобства считаем, что $\vec{\psi} \in L_\infty(Q)$. Для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_Q (\vec{u}_{N_k} - \vec{u}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \cdot \vec{\psi}\, dQ| \le C_{13}\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(Q)}\|\nabla\vec{u}_{N_k}\|_{L_2(Q)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Для второго интеграла имеем

$$\int_Q (\vec{u}, \nabla)(\vec{u} - \vec{u}_{N_k}) \cdot \vec{\psi}\, dQ \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

в силу слабой сходимости $\nabla\vec{u}_{N_k}$ в $L_2(Q)$. Из доказанного, в силу произвольности функции ψ, вытекает, что выполнено (1.243).

Возьмем набор функций $\alpha_i(t) \in C([0,Z])$, $c_i(t) \in C([0,Z])$, $\beta_i(t) \in C([0,Z])$ умножим соответствующие равенства в (1.228) с $N = N_k$ на эти функции, просуммируем результат по i от 1 до n ($n \le N_k$) и проинтегрируем полученные равенства по t. В результате имеем

$$\int_0^Z (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \ \int_0^Z a(\vec{u}_{N_k}, \vec{\psi})\, dt = \int_0^Z (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt,$$
$$\int_0^Z a_1(T_{N_k}, \xi)\, dt = \int_0^Z (f_0, \xi)\, dt, \quad (1.244)$$

где $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i\psi_i$, $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i$ и $\xi = \sum_{i=1}^n \beta_i\xi_i$. Рассмотрим последовательно все слагаемые. По уже доказанному, мы можем перейти к пределу в первом равенстве и получим предельное равенство

$$\int_0^Z (\vec{u} - \vec{w}, \nabla\varphi)\, dt = 0, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \beta\vec{g}T). \quad (1.245)$$

Во втором равенстве, мы рассмотрим только нелинейные слагаемые, поскольку в линейной части переход осуществляется за счет слабой сходимости. Возьмем слагаемое

$$J_{N_k} = \int_0^Z ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k})\, dt.$$

Покажем что $J_{N_k} \to J = \int_0^Z ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u})\, dt$. Составим разность

$$J_{N_k} - J = \int_0^Z (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt + \int_0^Z ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k} - u + w), \nabla)\vec{\psi}), \vec{u})\, dt.$$

Второй интеграл стремится к нулю в силу слабой сходимости, а для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_0^Z ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_{N_k} - \vec{u})\, dt| \le c\|\vec{u}_{N_k} - \vec{u}\|_{L_2(Q)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично, показываем, что $\int_0^Z ((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_{N_k})\, dt \ \to \ \int_0^Z ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, придем к тому, что выполнено интегральное тождество

$$\int_0^Z (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) -$$
$$\mu(\nabla\vec{u}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{u}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w})\, dt = \int_0^Z (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt.$$

Аналогично, рассмотрим нелинейное слагаемое из третьего уравнения. Возьмем слагаемое

$$H_{N_k} = \int_0^Z ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k})T_{N_k}, \nabla\xi) dt.$$

$T_{N_k} \to T$ сильно в $L_2(Q)$ и п.в. в Q, $\vec{w}_{N_k} \to \vec{w}$, $\vec{u}_{N_k} \to \vec{u}$ слабо в $L_2(Q)$. Отметим, что $\vec{w}_{N_k} - \vec{u}_{N_k} \to \vec{w} - \vec{u}$ слабо в $L_2(Q)$, $T_N \to T$ сильно в $L_2(Q)$ и п.в. в Q. Отсюда вытекает, что

$$\int_0^Z ((\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k})T_N, \nabla\xi)dt \to \int_0^Z ((\vec{u} - \vec{w})T, \nabla\xi)dt,$$

где в силу базисности выбранных функций φ_i, $\vec{\psi}_i$, ξ_i мы получим, что $(\vec{u}, p, T)$ есть обобщенное решение задачи. Доказательство последнего утверждения теоремы, т.е. включений $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0, Z; L_{p_0}(G))$ для любого $p_0 \in [1, 3/2]$, мы фактически уже провели в первой половине доказательства.

Замечание. Условия на функции $\vec{f}, f_0$ можно ослабить. Утверждение теоремы сохраняет свою силу при условиях $\vec{f} \in L_2(0, Z; W_2^{-1}(G))$, $f_0 \in L_2(0, Z; W_{0,2}^{-1}(G))$, где $W_{0,2}^{-1}(G) = (W_{0,2}^1(G))'$, $W_{0,2}^1(G) = \{u \in W_2^1(G) :\ u|_{S_0} = 0\}$.

ГЛАВА 2

Регулярная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических систем уравнений

Первый вопрос, который мы рассмотрим в этой главе, - вопрос существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в линеаризованном случае:

$$div\,\vec{V} = div\,\vec{W},\ \ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P =$$
$$\vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla div\,\vec{V} + (\vec{v}, \nabla)\vec{W} + (\vec{V}, \nabla)\vec{w}_0 + \vec{W}div\,v + \vec{w}_0 div\,\vec{V}, \quad (2.1)$$

где $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \vec{f}_0)]$ и $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F}]$.

Начальные и граничные условия, а также условия нормировки для системы (2.1) имеют вид:

$$\vec{V}|_S = 0,\ \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x),\ \vec{W}\cdot\nu|_S = 0,\ \int_G P\,dx = 0, \quad (2.2)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Г.

Далее мы также рассмотрим вопрос существования и единственности регулярного решения аналога первой начально-краевой задачи для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева (см. также (1.1)):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\ (t, x) \in Q = (0, T)\times G,\ G \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u}, \nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u}, \quad (2.3)$$

с начальными и граничными условиями, и условиями нормировки, вида:

$$\vec{u}|_S = 0,\ \ \vec{u}|_{t=0} = u_0,\ \frac{\partial p}{\partial \nu}|_S = f_0(t, x),\ \int_G p(t, x)\,dx = 0, \quad (2.4)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Г.

Кроме того, мы также будем рассматривать вопросы существования и единственности регулярного решения аналога первой начально-краевой задачи для системы квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, которая имеет вид (см. параграф 3.1 в [1]):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + div\,(h\vec{u}) = div\,(h\vec{w}),\ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + g\nabla h),\\
&\frac{\partial (h\vec{u})}{\partial t} + div\,(h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla(\frac{h^2}{2}) = 2div\,(\nu h\hat{\sigma}(\vec{u})) + div\,(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}),\\
&\qquad (t,x)\in Q = (0,T)\times G,\ G\subset\mathbb{R}^2.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

- где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$
\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T],\ \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),
$$

G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Пусть $S = (0,T)\times\Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t,x_1,x_2), u_2(t,x_1,x_2))$ – усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t,x_1,x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости x_1ox_2, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9.8$ (m/c^2), равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Система (2.5) дополняется начальными и граничными условиями:

$$
\vec{u}|_S = 0,\ (\vec{w}\cdot\vec{n})|_S = 0,\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1,x_2),\ h|_{t=0} = h_0(x_1,x_2). \tag{2.6}
$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали к Γ. Отметим, что второе условие в (2.6) влечет, что $\frac{\partial h}{\partial\vec{n}}|_S = 0$.

Для регулярных решений задачи (2.5), (2.6) мы также рассмотрим вопрос получения глобальных по времени априорных оценок.

2.1 Определения и вспомогательные результаты.

Рассмотрим параболическую систему

$$
L\vec{u} = \vec{u}_t + A(t,x,D)\vec{u} = \vec{f}(t,x),\quad x\in G, t\in(0,T) \tag{2.7}
$$

где G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ (ниже $n=3$) с границей $\Gamma\in C^2$,

$$
A(t,x,D)\vec{u} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\vec{u}_{x_jx_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\vec{u}_{x_i} + a_0(t,x)\vec{u},
$$

a_{ij}, a_i – матрицы размерности $h \times h$ такие, что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j и $\vec{u}$ вектор длины h. Начально-краевые условия для системы (2.7) имеют вид

$$\vec{u}|_S = \vec{g},\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x),\ S = (0,T) \times \Gamma. \tag{2.8}$$

Мы предполагаем, что

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}),\ a_k \in L_p(Q), i,j = 1,\ldots,n,\ k = 0,1,\ldots,n. \tag{2.9}$$

Оператор L считается параболическим и выполнено условие Лопатинского. Оба этих условия можно заменить на сильное условие Лежандра (см. пункт 2.5, пар. 6.2, гл. 6 в [114]).

Сильное условие Лежандра. Существует постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что

$$Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(t,x)\xi_i, \xi_j \rangle \geq \delta_2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{C}^h,\ \forall (t,x) \in Q, \tag{2.10}$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{C}^h$.

Условия согласования и гладкости данных имеют вид:

$$\vec{u}_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G),\ \vec{g} \in W_p^{k_0,2k_0}(S),\ \vec{u}_0(x) = \vec{g}(x,0)\ \forall x \in \Gamma, \tag{2.11}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$. Для удобства ниже рассмотрим случай $p > n + 2$.

Теорема 2.1. *Предположим, что условия* (2.9)–(2.11) *выполняются. Тогда существует единственное решение* $\vec{u} \in W_p^{1,2}(Q)$ *задачи* (2.7), (2.8), *удовлетворяющее оценке*

$$\|\vec{u}\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c\big[\|\vec{f}\|_{L_p(Q)} + \|\vec{u}_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q)} + \|\vec{g}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)}\big], \tag{2.12}$$

где постоянная c *не зависит от* $\vec{f}, \vec{u}_0, \vec{g}$.

Утверждение вытекает из теоремы 2.1 в [113] или теоремы 10.4 в гл. 8 [3]. Эту теорему также можно сформулировать в виде.

Теорема 2.2. *Предположим, что условия* (2.9)–(2.11) *выполняются и* $\vec{u}_0 = 0, \vec{g} = 0$. *Тогда существует единственное решение* $\vec{u} \in W_p^{1,2}(Q)$ *задачи* (2.7), (2.8), *удовлетворяющее оценке*

$$\|e^{-\lambda t}\vec{u}\|_{W_p^{1,2}(Q)} + |\lambda| \|e^{-\lambda t}\vec{u}\|_{L_p(Q)} \leq c\|e^{-\lambda t}\vec{f}\|_{L_p(Q)}, \tag{2.13}$$

где постоянная c *не зависит от* $\vec{f}, \lambda \geq 0$.

Утверждение следует из теоремы 3.1 в [115] и замены переменной $\vec{u} = e^{\lambda t}\vec{v}$ (см. также теорему 2.1 в [113]).

Все коэффициенты рассматриваемых уравнений и систем, равно как и данные задач, мы считаем вещественными.

2.2 Обобщенная и регулярная разрешимость начально-краевой задачи для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений.

Рассмотрим вопросы существования и единственности обобщенной и регулярной разрешимости начально-краевой задачи для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева. Проведем линеаризацию системы (2.3). Пусть $\vec{v}, p_0$ - известное решение системы (2.3) с данными $\vec{f}_0, \vec{v}_0$, вместо $\vec{f}, \vec{u}_0$, вектор $\vec{v}$ обращается в нуль на S и $\int_G p_0\, dx = 0$. Проводим линеаризацию системы на этом решении. Подставляем функции $\vec{u} = \vec{v} + \varepsilon\vec{V}$ (вектор $\vec{V}$ обращается в нуль на S), $p = p_0 + \varepsilon P$ ($\int_G P\, dx = 0$), $\vec{f} = \vec{f}_0 + \varepsilon\vec{F}$, $\vec{u}_0 = \vec{v}_0 + \varepsilon\vec{U}_0$ в систему вместо $\vec{u}$, p, $\vec{f}, \vec{u}_0$ и сокращаем слагаемые второго порядка относительно ε. Положим $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \vec{f}_0)]$ и $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F}]$. Мы приходим к системе

$$
\begin{aligned}
div\, \vec{V} = div\, \vec{W}, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \\
\vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla div\, \vec{V} + (\vec{v}, \nabla)\vec{W} + (\vec{V}, \nabla)\vec{w}_0 + \vec{W} div\, \vec{v} + \vec{w}_0 div\, \vec{V}. \quad (2.14)
\end{aligned}
$$

Начальные и граничные условия, и условия нормировки, имеют вид:

$$
\vec{V}|_S = 0,\ \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x),\ \vec{W}\cdot\nu|_S = 0,\ \int_G P\, dx = 0. \quad (2.15)
$$

В следующей лемме для простоты мы предполагаем, что данные достаточно гладкие.

Лемма 2.1. *Пусть* $\vec{V} \in W_p^{1,2}(Q)$ *и* $P \in L_p(0, T; W_p^2(G))$ $(p > 5)$ *есть решение задачи* (2.14), (2.15). *Предположим также, что* $\vec{v} \in W_p^{1,2}(Q)$, $p_0 \in L_p(0, T; W_p^2(G))$, $\vec{F} \in L_p(0, T; W_p^1(G))$, $\vec{U}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, *и* $\vec{U}_0|_\Gamma = 0$. *Тогда спра-*

ведлива следующая оценка:

$$\|\vec{V}\|_{L_\infty(0,T;L_2(G))} + \|\vec{V}\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))} + \|P\|_{W_2^1(G)} \leq c(\|\vec{F}\|_{L_2(Q)} + \|\vec{U}_0\|_{L_2(G)}). \quad (2.16)$$

Постоянная c зависит от норм $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W_\infty^1(G))}, \|\vec{w}_0\|_{L_\infty(Q)}$.

Доказательство Умножим первое уравнение из (2.1) на P/ρ и второе уравнение на $\vec{V}$ скалярно и проинтегрируем по G. Суммируя результаты и интегрируя по частям, получаем тождество

$$\frac{\tau}{\rho^2}\int_G |\nabla P|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G |\vec{V}|^2\,dx +$$
$$\mu\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2 + \mu(div\,\vec{V})^2\,dx + ((v-w_0,\nabla)\vec{V},\vec{V}) + ((\vec{V}-\vec{W},\nabla)\vec{v},\vec{V}) + \frac{1}{\rho}(\nabla P,\vec{V}) =$$
$$(\vec{F},\vec{V}) + ((\vec{v},\nabla)\vec{W},\vec{V}) + ((\vec{V},\nabla)\vec{w}_0,\vec{V}) + (\vec{W}div\,\vec{v},\vec{V}) + (\vec{w}_0 div\,\vec{V},\vec{V}) +$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{F},\nabla P) - \frac{\tau}{\rho}((\vec{V},\nabla)\vec{v},\nabla P) - \frac{\tau}{\rho}((\vec{v},\nabla)\vec{V},\nabla P) + \frac{1}{\rho}(\vec{V},\nabla P). \quad (2.17)$$

Так как $div\,(\vec{v}-\vec{w}_0) = 0$, интегрируя по частям, получаем

$$((\vec{v}-\vec{w}_0,\nabla)\vec{V},\vec{V}) = 0. \quad (2.18)$$

Более того,

$$((\vec{v},\nabla)\vec{W},\vec{V}) = -((\vec{v},\nabla)\vec{V},\vec{W}) - (div\,v\vec{W},\vec{V}) = -(div\,v\vec{W},\vec{V}) -$$
$$\tau\int_G (|(\vec{v},\nabla)\vec{V}|^2\,dx - \tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},(\vec{V},\nabla)\vec{v}) - \frac{\tau}{\rho}((\vec{v},\nabla)\vec{V},\nabla P) + \tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},\vec{F}), \quad (2.19)$$

$$((\vec{V},\nabla)\vec{w}_0,\vec{V}) = -((\vec{V},\nabla)\vec{V},\vec{w}_0) - (div\,V\vec{w}_0,\vec{V}). \quad (2.20)$$

Вставляя (2.18), (2.19), (2.20) в (2.17) и преобразуя равенство, получаем, что

$$\frac{\tau}{\rho^2}\int_G |\nabla P|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G |\vec{V}|^2\,dx + \mu\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2 + (div\,\vec{V})^2\,dx +$$
$$\tau\int_G (|(\vec{v},\nabla)\vec{V}|^2\,dx + \frac{2\tau}{\rho}((\vec{v},\nabla)\vec{V},\nabla P) = -((\vec{V}-\vec{W},\nabla)\vec{v},\vec{V}) - \frac{1}{\rho}(\nabla P,\vec{V}) -$$
$$\tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},(\vec{V},\nabla)\vec{v}) + \tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},\vec{F})$$
$$+ (\vec{F},\vec{V}) - ((\vec{V},\nabla)\vec{V},\vec{w}_0) + \frac{\tau}{\rho}(\vec{F},\nabla P) - \frac{\tau}{\rho}((\vec{V},\nabla)\vec{v},\nabla P) - \frac{1}{\rho}(\vec{V},\nabla P). \quad (2.21)$$

Далее, мы оцениваем левую часть снизу. Неравенство Гёльдера и неравенство

$$2|ab| \le \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon,\ \varepsilon > 0, \tag{2.22}$$

влекут, что

$$\frac{2\tau}{\rho}|((\vec{v},\nabla)\vec{V},\nabla P)| \le \frac{2\tau}{\rho}\||(\vec{v},\nabla)\vec{V}|\|_{L_2(G)}\||\nabla P|\,\|_{L_2(G)} \le$$
$$\frac{\tau}{1-\delta}\||(\vec{v},\nabla)\vec{V}|\|^2_{L_2(G)} + \frac{\tau(1-\delta)}{\rho^2}\||\nabla P|\,\|^2_{L_2(G)},\ \delta \in (0,1). \tag{2.23}$$

Отметим, что

$$\||(\vec{v},\nabla)\vec{V}|\|^2_{L_2(G)} = \int_G \sum_{i,j,k} v_i V_{jx_i} v_k V_{jx_k}\,dx \le$$
$$\int_G \sum_{i,k}(\sum_j V^2_{jx_i}v_k^2)^{1/2}(\sum_j V^2_{jx_k}v_i^2)^{1/2}\,dx \le \int_G \sum_{i,k}\frac{1}{2}(\sum_j V^2_{jx_i}v_k^2 + \sum_j V^2_{jx_k}v_i^2)\,dx \le$$
$$M_0^2\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2\,dx,\ M_0 = \||\vec{v}|\|_{L_\infty(Q)}. \tag{2.24}$$

Оценим первый интеграл в правой части (2.23) с использованием (2.24) следующим образом:

$$I = \frac{\tau}{1-\delta}\||(\vec{v},\nabla)\vec{V}|\|^2_{L_2(G)} \le \gamma I + (1-\gamma)I \le \frac{\gamma M}{1-\delta}\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2\,dx + (1-\gamma)I,$$

где $M = \max(1, \tau M_0^2)$. Возьмем $\delta = 1/(1+4M)$, $\gamma = 2\delta$. В этом случае $\frac{\gamma M}{1-\delta} = 1/2$, оценки (2.23), (2.24) означают, что

$$\frac{2\tau}{\rho}|((\vec{v},\nabla)\vec{V},\nabla P)| \le \frac{\tau(1-\delta)}{\rho^2}\||\nabla P|\,\|^2_{L_2(G)}+$$
$$\frac{1}{2}\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2\,dx + \frac{(1-2\delta)\tau}{1-\delta}\||(\vec{v},\nabla)\vec{V}|\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.25}$$

Используя эту оценку в (2.21), мы приходим к выводу, что

$$\frac{\tau\delta}{\rho^2}\int_G |\nabla P|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G |\vec{V}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2 + (div\,\vec{V})^2\,dx+$$
$$\frac{\tau}{4M}\int_G (|(\vec{v},\nabla)\vec{V}|^2\,dx \le -((\vec{V}-\vec{W},\nabla)\vec{v},\vec{V}) - \frac{1}{\rho}(\nabla P,\vec{V})-$$
$$\tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},(\vec{V},\nabla)\vec{v}) + \tau((\vec{v},\nabla)\vec{V},\vec{F}) + (\vec{F},\vec{V}) - ((\vec{V},\nabla)\vec{V},\vec{w}_0)+$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{F},\nabla P) - \frac{\tau}{\rho}((\vec{V},\nabla)\vec{v},\nabla P) - \frac{1}{\rho}(\vec{V},\nabla P). \tag{2.26}$$

Остается оценить правую часть этого неравенства. Интегрируя по частям, если необходимо, мы можем легко установить с помощью (2.22), что правая часть этого неравенства оценивается величиной

$$\varepsilon(\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2 + \int_G (|(\vec{v},\nabla)\vec{V}|^2 + |\nabla P|^2\,dx) + c(\varepsilon)\|\vec{V}\|^2_{L_2(G)} + \|F\|^2_{L_2(Q)}.$$

Константа $c(\varepsilon)$ может быть оценена через $c_0(1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))}+\|\vec{w}_0\|^2_{L_\infty(Q)})$, где c_0 – постоянная, не зависящая от данных задачи. Далее, используя эту оценку в (2.26) и выбрав достаточно малое ε, мы можем переписать эту оценку в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_G |\vec{V}|^2\,dx + \delta_1\int_G |\nabla P|^2\,dx + \delta_2\int_G \sum_j |\nabla V_j|^2 + (div\,\vec{V})^2+$$
$$|(\vec{v},\nabla)\vec{V}|^2\,dx \le c_1\|\vec{V}\|^2_{L_2(G)} + c_2\|F\|^2_{L_2(G)}, \quad (2.27)$$

где δ_1, δ_2, c_i - некоторые положительные постоянные. Далее, интегрирование по t и лемма Гронуолла доказывают наше утверждение.

Стоит отметить, что справедлива оценка $\int_G |P|^2\,dx \le c\int_G |\nabla P|^2\,dx$ для всех $P \in W^1_2(G)$ таких что $\int_G P\,dx = 0$ (см. теорему 2.2 и замечание 2.1 гл. 2 в [3]), где $c > 0$ – постоянная.

Назовем обобщенным решением задачи (2.14), (2.15) функции $\vec{V}, P$ такие, что $\vec{V} \in L_\infty(0,T;L_2(G)) \cap L_2(0,T;W^1_2(G))$, $\vec{V}_t \in L_2(0,T;W^{-1}_2(G))$, $P \in L_2(0,T;W^1_2(G))$, $\int_G P(t,x)\,dx = 0$, и

$$\int_Q (\vec{V}-\vec{W})\nabla\varphi(t,x)\,dx = 0,\ \forall\varphi \in W^1_2(G),$$
$$\int_Q (-\vec{V}\cdot\vec{\psi}_t + (\vec{v}-\vec{w}_0,\nabla)\vec{V}\cdot\vec{\psi} + (\vec{V}-\vec{W},\nabla)\vec{v}\cdot\vec{\psi} + \frac{1}{\rho}\nabla P\cdot\vec{\psi} =$$
$$\vec{F}\cdot\vec{\psi} - \mu\sum_{j=1}^n \nabla V_j\cdot\nabla\vec{\psi} - \mu div\,\vec{V} div\,\vec{\psi} - (\vec{v},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{W} - (\vec{V},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}_0 +$$
$$\int_G \vec{U}_0(x)\cdot\vec{\psi}(0,x)\,dx, \quad \forall\vec{\psi} \in W^1_2(Q):\ \vec{\psi}|_S = 0, \vec{\psi}|_{t=T} = 0. \quad (2.28)$$

Здесь пространство $L_2(0,T;W^{-1}_2(G))$ двойственно пространству $L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(G))$. Как известно (см. гл. 3 в [3]), обобщенное решение $\vec{V}$ обладает свойствами $V \in C([0,T];L_2(G))$ и, соответственно, мы имеем, что

$u|_{t=0} = \vec{U}_0$. Введем формы

$$a_1(\vec{V}, P, \varphi) = \int_G (\vec{V} - \vec{W})\nabla\varphi(t,x)\,dx,$$

$$a_2(\vec{V}, P, \vec{\psi}) = (\vec{V}_t, \vec{\psi}) + ((\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V}, \vec{\psi}) + ((\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v}, \vec{\psi}) + \frac{1}{\rho}(\nabla P, \vec{\psi}) -$$
$$(\vec{F}, \vec{\psi}) + \mu(\nabla\vec{V}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{V}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{v}, \nabla)\vec{\psi}, W) + ((\vec{v}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_0).$$

Используем определение обобщенного решения (2.28). Как прямое следствие леммы 2.1, мы имеем следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Предположим, что* $\vec{F} \in L_2(Q)$, $\vec{U}_0 \in L_2(G)$, $\vec{w}_0 \in L_\infty(Q)$, *и* $\vec{v} \in L_\infty(0, T; W^1_\infty(G))$. *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство С учетом леммы 2.1, доказательство является более или менее стандартным (см., например, гл. 3, пар. 4 в [3]). Мы опишем схему рассуждений. Пусть система $\{\beta_i(x)\}$ является достаточно гладким базисом для подпространства $L_2(G)$, состоящего из функций $\vec{u} \in L_2(G)$ таких, что $\int_G u(x)\,dx = 0$. Возьмем также полную систему (или базис) $\{\vec{\psi}_j\}$ для пространства вектор-функций $\overset{\circ}{W}{}^1_2(G)$. Чтобы построить этот базис, мы можем использовать, например, собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле. Ищем приближенное решение в виде

$$P_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m(t)\varphi_i(x), \quad \vec{V}_m = \sum_{i=1}^m C_i^m(t)\vec{\psi}_i(x)$$

где функции α_i^m, C_i^m определяются как решение системы

$$a_1(\vec{V}_m, P_m, \varphi_j) = 0, \quad a_2(\vec{V}_m, P_m, \vec{\psi}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.29}$$

Существует последовательность $\vec{u}_{0m} = \sum_{i=1} c_i^m \vec{\psi}_i(x)$ такая, что $\|\vec{u}_{0m} - \vec{U}_0\|_{L_2(G)} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, мы можем записать начальное условие в виде

$$\vec{C}^m(0) = \vec{c}^m, \quad \vec{c}^m = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_m^m). \tag{2.30}$$

Первое равенство в (2.29) является алгебраической системой, а второе - системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгебраическую систему можем записать в матричном виде

$$B\vec{\alpha} = \vec{G},\ G_j = \tau(\vec{F}, \nabla\varphi_j) + (\vec{V}_m, \nabla\varphi_j) - \tau((\vec{v}, \nabla)\vec{V}_m, \nabla\varphi_j) - \tau((\vec{V}_m, \nabla)\vec{v}, \nabla\varphi_j), \tag{2.31}$$

где элементы матрицы B имеют вид $b_{ij} = \frac{\tau}{\rho}(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i)$ и $det\, B \neq 0$. Равенство (2.31) также можно записать в виде $\vec{\alpha} = B^{-1}\vec{G}+A\vec{C}$, с некоторой матрицей A. С учетом наших условий на данные, легко увидеть, что элементы A принадлежат $L_\infty(0,T)$. Мы ищем решение системы (2.29) в классе $\vec{\alpha}^m \in L_2(0,T)$, $\vec{C}^m \in W_2^1(0,T)$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $\vec{C}^m \in C([0,T])$ и правая часть от (2.31) принадлежит к $L_2(0,T)$, равно как и вектор-функции $B^{-1}\vec{G} + A\vec{C}$. Вторую систему в (2.29) можно переписать в виде

$$B_0\vec{C}_t + B_1\vec{C} = \vec{F}_1 \tag{2.32}$$

если мы заменим вектор $\vec{\alpha}$ его представлением $B^{-1}\vec{G}+A\vec{C}$, где элементы матрицы B_0 имеет форму $r_{ij} = (\vec{\psi}_j, \vec{\psi}_i)$ и очевидно $det\, B_0 \neq 0$, поскольку B_0 - матрица Грама линейной независимой системы. Нам не нужен явный вид матрицы B_1 и вектора $\vec{F}_1 \in L_2(0,T)$. Из условий теоремы можно заключить, что элементы B_1 принадлежат классу $L_\infty(0,T)$. Система (2.32) дополнена данными Коши (2.30). Задача (2.30), (2.32) имеет единственное решение в классе $W_2^1(0,T)$. Вектор-функция $\vec{\alpha}^m$ восстанавливается из равенства (2.31). Далее, получим априорные оценки для приближенного решения. Умножая первое равенство в (2.29) на $\alpha_j^m(t)$, а второе на C_j^m и суммируя результаты, получаем равенства

$$a_1(\vec{V}_m, P_m, P_m) = 0, \quad a_2(\vec{V}_m, P_m, \vec{V}_m) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.33}$$

Умножая первое равенство на $1/\rho$ и суммируя два полученных равенства, мы получаем (2.17) с $P_m, \vec{V}_m$ вместо P, $\vec{V}$. Таким образом, можно сказать, что оценка (2.16) выполняется. Эта оценка позволяет перейти к пределу при $m \to \infty$ по крайней мере на некоторых подпоследовательностях последовательностей P_m, $\vec{V}_m$. Рассуждения совпадают с теми, что используются в параграфе 4 главы 3 в [3] и мы их опускаем.

Далее, мы приведем один результат о регулярной разрешимости задачи (2.1), (2.2). Как мы уже отмечали, регулярная разрешимость общих эллиптическо-параболические систем, вероятно, ранее не изучалась. Мы опишем только некоторые достаточные условия разрешимости. Вообще говоря, они не являются оптимальными.

Теорема 2.4. *Предположим, что* $\vec{F} \in L_p(0,T; W_p^1(G))$, $\vec{U}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\vec{w}_0 \in L_p(0,T; W_p^1(G))$, $\vec{v} \in W_p^{1,2}(Q)$, *и* $p > 5$. *Тогда существует постоянная*

$\varepsilon_0 > 0$ *такая, что если* $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))} \le \varepsilon_0$, *то существует единственное решение задачи* (2.1), (2.2) *такое, что* $\vec{V} \in W^{1,2}_p(Q), P \in L_p(0,T;W^2_p(G))$.

Доказательство Пусть $\vec{W}_0 = \tau(\frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F})$, $\vec{W}_1 = \tau[(\vec{v},\nabla)\vec{V} + (\vec{V},\nabla)\vec{v}]$. Перепишем второе уравнение из (2.1) в виде

$$L\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}_1, \nabla)\vec{v} - \mu\Delta\vec{V} - \mu\nabla div\,\vec{V} - (\vec{V},\nabla)\vec{w}_0 -$$
$$\vec{W}_1 div\,\vec{v} - \vec{w}_0 div\,\vec{V} = \vec{F} + (\vec{W}_0,\nabla)\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{W}_0 div\,\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{W}_1 + (\vec{v},\nabla)\vec{W}_0. \tag{2.34}$$

Можно проверить, что сильное условие Лежандра выполняется для оператора L в левой части, поэтому он обратим по теореме 2.4. Соответствующие матрицы a_{ij} могут быть записаны в виде

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Проверка этого условия осуществляется с использованием неравенства (2.22) и не такая сложная. Далее, мы для начала, мы построим вспомогательную вектор-функцию $\vec{V}_0$, которая является решением задачи

$$L\vec{V}_0 = 0, \quad \vec{V}_0(0,x) = \vec{U}_0, \quad \vec{V}_0|_S = 0.$$

Решение этой задачи существует и $\vec{V}_0 \in W^{1,2}_p(Q)$. В этом случае функция $\vec{V}_1 = \vec{V} - \vec{V}_0$ является решением системы

$$L\vec{V}_1 = \vec{F} + \tau(\frac{1}{\rho}\nabla P, \nabla)\vec{v} - \tau(\vec{F},\nabla)\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla P +$$
$$\frac{\tau}{\rho}\nabla P div\, v - \tau\vec{F} div\, v + \tau(\vec{v},\nabla)[(\vec{v},\nabla)\vec{V} + (\vec{V},\nabla)\vec{v}] + \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P - \tau(\vec{v},\nabla)\vec{F} = g. \tag{2.36}$$

Теоремы вложения гарантируют, что $W^{1,2}_p(Q) \subset C^{1/2-5/2p,2-5/p}(\overline{Q})$ (см. раздел 6.3 и теорему 1 (раздел Примечания) в [111]). В частности, без ограничения общности можно считать, что $\vec{V}_0, \nabla\vec{V}_0 \in C(\overline{Q})$. Запишем первое уравнение в (2.1) в виде

$$\frac{\tau}{\rho}\Delta P = div\,\vec{V} - \tau div\,((\vec{v},\nabla)\vec{V} + (\vec{V},\nabla)\vec{v}) + \tau div\,\vec{F}. \tag{2.37}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta P_0 = \rho div\,\vec{F} + \frac{\rho}{\tau} div\,\vec{V}_0 - \rho(div\,((\vec{v},\nabla)\vec{V}_0 + (\vec{V}_0,\nabla)\vec{v}),\ \ \frac{\partial P_0}{\partial\nu}|_\Gamma = \rho\vec{F}\cdot\nu,\ \int_G P_0\,dx = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение $P_0 \in W_p^2(G)$ для п.в. (почти всех) t. Здесь правая часть принадлежит $L_p(Q)$ и мы можем легко обосновать, что $P_0 \in L_p(0,T;W_p^2(G))$. Уравнение (2.37) можно записать в виде

$$\Delta P_1 = \frac{\rho}{\tau} div\,\vec{V}_1 - \rho div\,((\vec{v},\nabla)\vec{V}_1 + (\vec{V}_1,\nabla)\vec{v}) = J,\ \ \frac{\partial P_1}{\partial\nu}|_\Gamma = 0,\ \ P_1 = P - P_0. \tag{2.38}$$

Заметим, что выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости $\int_G J(t,x)\,dx = 0$ этой задачи.

Решение задачи (2.38) существует и найдется постоянная c_0 такая, что при п.в. t

$$\|P_1\|_{W_p^2(G)} \le c_0\|J\|_{L_p(G)} \le c_1(\|\vec{V}_1\|_{W_p^1(G)} + \|\vec{v}\|_{W_\infty^1(G)}\|\vec{V}_1\|_{W_p^1(G)} + \|\vec{v}\|_{L_\infty(G)}\|\vec{V}_1\|_{W_p^2(G)}). \tag{2.39}$$

Здесь c_0 - это на самом деле соответствующая норма оператора $\|\Delta^{-1}\|$ и c_1 - это постоянная c_0, умноженная на константу, зависящую от p,τ,ρ. Зафиксируем $\lambda > 0$. Неравенство (2.39) влечет оценку

$$\begin{aligned}\|e^{-\lambda t}P_1\|_{L_p(0,T;W_p^2(G))} \le c_1(\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{L_p(0,T;W_p^1(G))}(1 + \|\vec{v}\|_{W_\infty^1(Q)}) +\\ \|\vec{v}\|_{L_\infty(Q)}\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{W_p^2(G)}).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Перепишем правую часть (2.36) в виде

$$\vec{g}_0 - \frac{1}{\rho}\nabla P_1 + \frac{\tau}{\rho}\nabla P_1 div\,v + \tau(\vec{v},\nabla)[(\vec{v},\nabla)\vec{V}_1 + (\vec{V}_1,\nabla)\vec{v}] + \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P_1,$$

$$\begin{aligned}\vec{g}_0 = \vec{F} - \tau(\vec{F},\nabla)\vec{v} - \tau\vec{F}div\,v - \tau(\vec{v},\nabla)\vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla P_0 + \frac{\tau}{\rho}\nabla P_0 div\,v +\\ \tau(\vec{v},\nabla)[(\vec{v},\nabla)\vec{V}_0 + (\vec{V}_0,\nabla)\vec{v}] + \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P_0.\end{aligned}$$

Функция $\vec{g}_0$ не зависит от $\vec{V}_1$ и принадлежит $L_p(Q)$. Это следует из наших условий на данные и теорем вложения. С учетом теоремы 2.2, уравнение (2.36) может быть переписано в виде

$$\vec{V}_1 = L^{-1}\vec{g}_0 + L^{-1}(-\frac{1}{\rho}\nabla P_1 + \frac{\tau}{\rho}\nabla P_1 div\, v + \tau(\vec{v},\nabla)[(\vec{v},\nabla)\vec{V}_1 + (\vec{V}_1,\nabla)\vec{v}] + \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P_1). \tag{2.41}$$

Второе слагаемое здесь на самом деле представляет собой некоторый линейный оператор, действующий на функцию $\vec{V}_1$. Функция P_1 выражается через вектор-функцию V_1 как решение задачи (2.38). Уравнение (2.41) также можно записать в операторном виде

$$\vec{V}_1 = L^{-1}\vec{g}_0 + A(\vec{V}_1), \tag{2.42}$$

где A - линейный оператор. Теперь покажем, что A является сжатием. Введем в подпространстве вектор-функций из $W_p^{1,2}(Q)$), удовлетворяющих однородному условию Дирихле на S и однородному начальному условию при $t = 0$ норму $\|\vec{V}\|_H = \|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{W_p^{1,2}(Q)} + |\lambda|\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{L_p(Q)}$. Обозначим это подпространство через H. Очевидно, это банахово пространство. Оценим выражение $A(\vec{V}_1)$. По теореме 2.2 (см. (2.13)), мы выводим

$$\|A(\vec{V}_1)\|_H \le c\|e^{-\lambda t}(-\frac{1}{\rho}\nabla P_1 + \frac{\tau}{\rho}\nabla P_1 div\,\vec{v} + \tau(\vec{v},\nabla)[(\vec{v},\nabla)\vec{V}_1 + (\vec{V}_1,\nabla)\vec{v}] + \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P_1)\|_{L_p(Q)}. \tag{2.43}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части

$$J_1 = \frac{\tau}{\rho}(\vec{v},\nabla)\nabla P_1) = \frac{\tau}{\rho}\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla P_1. \tag{2.44}$$

Равенство (2.40) гарантирует, что

$$\|e^{-\lambda t}J_1\|_{L_p(Q)} \le c_1(\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(Q)}\|\vec{V}_1\|_H + \|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{L_p(0,T;W_p^1(G))}(1 + \|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W_\infty^1(G))}). \tag{2.45}$$

Интерполяционное неравенство (см. [107])

$$\|\vec{V}\|_{W_p^1(G)} \le c_2\|\vec{V}\|^{1/2}_{W_p^2(G)}\|\vec{V}\|^{1/2}_{L_p(G)}$$

и неравенство

$$\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{L_p(Q)} \le \frac{1}{\lambda}\|e^{-\lambda t}\vec{V}_t\|_{L_p(Q)},$$

вытекающее из формулы Ньютона-Лейбница, гарантируют, что

$$\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|_{L_p(0,T;W^1_p(G))} \le \frac{c_3}{\lambda^{1/2}}\|e^{-\lambda t}\vec{V}\|^{1/2}_{L_p(0,T;W^2_p(G))}\|e^{-\lambda t}\vec{V}_t\|^{1/2}_{L_p(Q)}. \tag{2.46}$$

Подставляя это неравенство в (2.45), получаем

$$\|e^{-\lambda t}J_1\|_{L_p(Q)} \le c_4\|\vec{V}_1\|_H(\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(Q)} + (1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))})/\lambda^{1/2}). \tag{2.47}$$

Здесь константа c_4 не зависит от λ. Рассмотрим слагаемое в (2.43)

$$J_2 = \tau(\vec{v},\nabla)(\vec{v},\nabla)\vec{V}_1 = \tau\sum_{i,k} v_i v_k \vec{V}_{1x_ix_k} + \tau\sum_{i,k} v_i v_{kx_i}\vec{V}_{1x_k}.$$

Легко видеть, что оценка этого слагаемого такая же, как и для J_1, т. е.

$$\|e^{-\lambda t}J_2\|_{L_p(Q)} \le c_5\|\vec{V}_1\|_H(\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(Q)} + (1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))})/\lambda^{1/2}). \tag{2.48}$$

Слагаемое $J_3 = \frac{\tau}{\rho}\nabla P_1 div\,\vec{v}$ оценивается аналогично и мы имеем

$$\|e^{-\lambda t}J_3\|_{L_p(Q)} \le c_5\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q)}\|\nabla P_1\|_{L_p(0,T;W^1_p(G))} \le$$
$$c_6\|\vec{V}_1\|_H(\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(Q))} + (1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))})/\lambda^{1/2}). \tag{2.49}$$

Остальные слагаемые оцениваются по аналогии. Используя (2.45)-(2.49), получаем оценку

$$\|A(\vec{V}_1)\|_H \le c_7(\|\vec{V}_1\|_H((\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(Q))} + \|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(Q))})+$$
$$(1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;L_\infty(G))})/\lambda^{1/2}). \tag{2.50}$$

Константа c_7 зависит от $T,\rho,\tau,$ и норм операторов L^{-1}, Δ^{-1}. Она не зависит от $\lambda > 0$. Как следует из теоремы 2.2, норма оператора $L^{-1} : L_p(Q) \to H$ зависит от оценки R сверху величины $\|\vec{v}\|_{L_p(0,T;W^1_p(G)} + \|\vec{w}_0\|_{L_p(0,T;W^1_p(G)}$. Фиксируя R, получаем соответствующую оценку для $\|L^{-1}\|$. Очевидно, что эта константа не стремится к бесконечности при $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))} \to 0$. Предположим, что величина R фиксирована. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы

$$c_7(\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))} + \|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))}) \le 1/4,$$

для $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))} \le \varepsilon_0$. Далее, мы выбераем $\lambda_0 > 0$ такую, что для $\lambda \ge \lambda_0$

$$c_7(1+\|\vec{v}\|^2_{L_\infty(0,T;L_\infty(G))})/\lambda^{1/2} \le 1/4$$

для $\lambda \geq \lambda_0$. В этом случае оператор A является сжатием, и теорема о неподвижной точке гарантирует утверждение.

Замечание. Вообще говоря, нормы $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(Q))}$ в (2.50) можно заменить нормами $\|\vec{v}\|_{L_p(0,T;W^1_p(G))}$ Доказательство несколько усложняется, но схема та же.

2.3 Квазигидродинамическая система уравнений в нелинейном случае.

Рассмотрим вопросы существования и единственности регулярной разрешимости начально-краевой задачи для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в пространствах Соболева. Положим $Q_\gamma = (0,\gamma) \times G$, $S_\gamma = (0,\gamma) \times \Gamma$. Запишем условия на данные.

$$\vec{u}_0 \in W_r^{2-2/r}(G), \;\; \vec{u}_0|_\Gamma = 0, \;\; \vec{f} \cdot \vec{\nu}, \;\; f_0 \in L_r(0,T;W_r^{1-1/r}(\Gamma)), \tag{2.51}$$

$$\vec{f}, div\vec{f} \in L_r(Q), \;\; \int_\Gamma f_0(t,x) - \rho\vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\Gamma = 0, \;\; \int_G p(t,x)dx = 0. \tag{2.52}$$

Отметим, что функция p восстанавливается с точностью до произвольной функции, зависящей от времени, для удобства мы зададим условие нормировки

$$\int_G p(t,x)\, dx = 0. \tag{2.53}$$

Введем обозначения

$$L_0\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \mu\Delta\vec{u} - \mu\nabla(div\,\vec{u}), \;\; A_0 p = \frac{\tau}{\rho}\Delta p. \tag{2.54}$$

Тогда система перепишется в виде

$$\begin{cases} A_0 p = div\,\vec{u} - \tau div(\vec{u},\nabla)\vec{u} + div\vec{f}\tau \\ L_0\vec{u} = -(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u} + \vec{f}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Мы будем искать решение нашей задачи в классе

$$H = \{(\vec{u},p) : \vec{u} \in W_r^{1,2}(Q_\gamma), \;\; p \in L_r(0,\gamma;W_r^2(G)), \;\; r > 5\}.$$

Из теорем вложения имеем, что $\vec{u} \in C^{1-5/2r,2-5/r}(\overline{Q_\gamma})$, $\nabla\vec{u} \in C^{1/2-5/2r,1-5/r}(\overline{Q_\gamma})$, т.е. неравенство $r > 5$ гарантирует, что функции $\vec{u}, \nabla\vec{u}$ принадлежат некоторому пространству Гельдера [111, §6.3]. Интегрируя первое уравнение в (2.55) по G, получим равенство

$$\int_\Gamma \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Gamma \vec{u}\cdot\vec{\nu}\, d\Gamma - \tau \int_\Gamma (\vec{u},\nabla)\vec{u}\cdot\vec{\nu}\, d\Gamma + \tau \int_\Gamma \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\Gamma \qquad (2.56)$$

Используя граничные условия (2.4), получим необходимое условие разрешимости системы

$$\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Gamma f_0\, d\Gamma = \int_\Gamma \rho\, \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\Gamma, \qquad (2.57)$$

т.е. второе условие в (2.52).

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (2.51), (2.52) *и* $r > 5$. *Тогда найдется постоянная* q_0, *не зависящая от данных задачи* $\vec{u}_0, \vec{f}, f_0$, *такая, что, если* $\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)} \le q_0$, *то на некотором промежутке* $t \in [0,\gamma_0]$ *решение задачи* (2.3), (2.4) *существует и принадлежит классу* $\vec{u} \in W_r^{1,2}(Q_\gamma)$, $p \in L_r(0,\gamma; W_r^2(G))$. *Если* $(\vec{u}_1, p_1)$, $(\vec{u}_2, p_2)$ *два решения задачи* (2.3), (2.4), *то* $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $p_1 = p_2$.

Доказательство. Построим функцию p_0 как решение задачи

$$\Delta p_0 = \rho\cdot div\vec{f},\ \ \frac{\partial p_0}{\partial \nu}|_\Gamma = f_0.$$

Решение задачи существует при п.в. t и $p_0(t,x) \in W_r^2(G)$, однако, оно не единственно. Ищем функцию p_0 удовлетворяющую условию (2.53). Тогда функция p_0 определяется единственным образом и справедлива оценка

$$\|p_0\|_{W_r^2(G)} \le c(\|div\vec{f}\|_{L_r(G)} + \|f_0\|_{W_r^{1-1/r}(G)}). \qquad (2.58)$$

Утверждение вытекает из фредгольмовости эллиптических задач и известных результатов о их разрешимости (см., например, [112]). Возводя обе части неравенства в степень r и интегрируя полученное неравенство по t, получим оценку

$$\|p_0\|_{L_r(0,\gamma;W_r^2(G))} \le c_1(\|div\vec{f}\|_{L_r(Q_\gamma)} + \|f_0\|_{L_r(0,\gamma;W_r^{1-1/r}(G))}), \qquad (2.59)$$

где постоянная c_1 не зависит от γ. Построим функцию $\vec{w}_0$ как решение задачи

$$L_0\vec{w}_0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p_0 + \vec{f} = \vec{f}_1,\ \vec{w}_0|_\Gamma = 0,\ \vec{w}_0|_{t=0} = \vec{u}_0. \qquad (2.60)$$

Опять ссылаясь на известные результаты ([112, теорема 8.2]), можем сказать, что решение этой задачи существует, единственно и справедлива оценка:

$$\|\vec{w}_0\|_{W_r^{1,2}(Q)} \le c_2(\|\vec{f}_1\|_{L_r(Q)} + \|u_0\|_{W_r^{2-2/r}(G)}), \tag{2.61}$$

Покажем, что мы можем записать эту же оценку в области Q_γ, причем постоянная не будет зависеть от γ. Действительно, построим функцию $\tilde{f} = \vec{f}_1$ при $(t,x) \in Q_\gamma$, $\tilde{f} = 0$ при $(t,x) \in Q \setminus Q_\gamma$ и решим задачу

$$L_0\vec{w}_1 = \tilde{f},\ \ \vec{w}_1|_\Gamma = 0,\ \ \vec{w}_1|_{t=0} = u_0.$$

Решение этой задачи существует, единственно и удовлетворяет оценке (2.61), причем в промежутке $t \in [0,\gamma]$ оно совпадает с $\vec{w}_0$. Оценка запишется в виде

$$\|\vec{w}_1\|_{W_r^{1,2}(Q)} \le c_2(\|\tilde{f}_1\|_{L_r(Q)} + \|\vec{u}_0\|_{W_r^{2-2/r}(G)}).$$

Используя тот факт, что $\vec{w}_1 = \vec{w}_0$ на $[0,\gamma]$ и определение функции $\tilde{f}$, получим неравенство

$$\|\vec{w}_0\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)} \le c_2(\|\vec{f}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} + \|\vec{u}_0\|_{W_r^{2-2/r}(G)}), \tag{2.62}$$

где постоянная c_2 не зависит от $\gamma \in (0,T]$. Проведем замену $p = q + p_0$ в первом из равенств в (2.55). Получим задачу

$$\frac{\tau\Delta q}{\rho} = div(\vec{u} - \tau(\vec{u},\nabla)\vec{u}),\ \ \frac{\partial q}{\partial\nu}|_\Gamma = 0,\ \int_G q\,dx = 0. \tag{2.63}$$

Сделав замену $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}_0$ во втором уравнении в (2.55), получим задачу

$$L_0\vec{v} = -(\vec{u} - \vec{w},\nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla q + (\vec{w},\nabla)\vec{w} + \vec{w}div\,\vec{u},\ \vec{v}|_S = 0,\ \ \vec{v}|_{t=0} = 0,\ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}_0. \tag{2.64}$$

Обращая операторы A_0L_0, придем к системе

$$\vec{v} = L_0^{-1}(-(\vec{u} - \vec{w},\nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla q + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}\cdot div\,\vec{u}), \tag{2.65}$$

$$q = \Delta^{-1}(\frac{\rho}{\tau}div(\vec{u} - \tau(\vec{u},\nabla)\vec{u})),\ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}_0. \tag{2.66}$$

Подставляя q в уравнение (2.65), мы получим операторное уравнение вида

$$\vec{v} = B(\vec{v}), \tag{2.67}$$

где B – некоторый оператор. Функция q вычисляется через $\vec{v}$ с помощью равенств (2.66), обозначим через $q = R(\vec{v})$ правую часть в (2.66). Пусть H_γ - пространство функций $\vec{v} \in W_r^{1,2}(Q_\gamma)$ таких, что $\vec{v}(0,x) = 0$, $\vec{v}|_S = 0$. Положим $\|\vec{v}\|_{H_\gamma} = \|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}$. Ищем решение (2.67) в шаре $B_{R_0} = \{\vec{v} \in H_\gamma : \|\vec{v}\|_{H_\gamma} \le R_0\}$, где $R_0 = 2\|B(0)\|_{W_r^{1,2}(Q)}$. Найдем $B(0)$. Имеем, что

$$q = R(\vec{v}) = \frac{\rho}{\tau}\Delta^{-1}(div(\vec{v}+\vec{w}_0) - \tau(\vec{v}+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}+\vec{w}_0)), \tag{2.68}$$

$$R(0) = \frac{\rho}{\tau}\Delta^{-1}(div\,\vec{w}_0 - \tau(\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}_0). \tag{2.69}$$

Также, мы можем задать величину

$$w(\vec{v})|_{\vec{v}=0} = \tau(\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}_0 + \frac{1}{\rho}\nabla(R(0)+p_0) - \vec{f}, \tag{2.70}$$

Следовательно, мы получаем равенство

$$B(0) = L_0^{-1}[-(\vec{w}_0 - \vec{w}(0),\nabla)\vec{w}_0 - \frac{\nabla R(0)}{\rho} + (\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}(0) + \vec{w}(0)\cdot div\,\vec{w}_0]. \tag{2.71}$$

Таким образом, вектор-функция $B(0)$ определяется при помощи равенств (2.69)-(2.71). Оценим $\|B(\vec{v}_1) - B(\vec{v}_2)\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}$, считая, что $\|v_i\|_{H_\gamma} \le R_0$ $(i = 1,2)$. Запишем определения

$$B(\vec{v}_i) = L_0^{-1}[-(\vec{v}_i + \vec{w}_0 - \vec{w}(\vec{v}_i),\nabla)(\vec{v}_i+\vec{w}_0)$$
$$- \frac{1}{\rho}\nabla q_i + (\vec{v}_i+\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}(\vec{v}_i) + \vec{w}(\vec{v}_i) div\,(\vec{v}_i+\vec{w}_0)] = L_0^{-1}g_i.$$

$$\begin{aligned}\vec{w}(\vec{v}_i) &= \tau((\vec{v}_i+\vec{w}_0),\nabla)(\vec{v}_i+\vec{w}_0) + \frac{1}{\rho}\nabla(q_i+p_0) - \vec{f}),\\ q_i &= \Delta^{-1}\frac{\rho}{\tau}(div[\vec{v}_i+\vec{w}_0 - \tau(\vec{v}_i+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_i+\vec{w}_0)]).\end{aligned} \tag{2.72}$$

Имеем равенство $B(\vec{v}_1) - B(\vec{v}_2) = L_0^{-1}(g_1 - g_2)$. Справедлива оценка $\|L_0^{-1}g\|_{H_\gamma} \le c_2\|g\|_{L_r(Q_\gamma)}$ (как следствие оценки (2.61), записанной для наших данных). Тогда можно записать, что

$$\|B(\vec{v}_1) - B(\vec{v}_2)\|_{H_\gamma} \le c_2\|g_1 - g_2\|_{L_r(Q_\gamma)}. \tag{2.73}$$

Мы можем переписать разность $g_1 - g_2$ в следующем виде

$$\begin{aligned} g_1 - g_2 = {} & [-(\vec{v}_1+\vec{w}_0-\vec{w}(\vec{v}_1),\nabla)(\vec{v}_1+\vec{w}_0) + (\vec{v}_2+\vec{w}_0-\vec{w}(\vec{v}_2),\nabla)(\vec{v}_2+\vec{w}_0)]\\ & - [\frac{1}{\rho}\nabla(q_1-q_2)] + [(\vec{v}_1+\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}(\vec{v}_1) - (\vec{v}_2+\vec{w}_0,\nabla)\vec{w}(\vec{v}_2)]\\ & + [\vec{w}(\vec{v}_1)\,div(\vec{v}_1+\vec{w}_0) - \vec{w}(\vec{v}_2)\,div(\vec{v}_2+\vec{w}_0)] = I_1+I_2+I_3+I_4. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Оценим каждое слагаемое, входящее в эту сумму. Сначала мы приведем несколько полезных неравенств. Мы используем интерполяционное неравенство [107]

$$\|v\|_{W^s_p(G)} \le c\|v\|^{\theta}_{W^{s_1}_p(G)}\|v\|^{1-\theta}_{W^{s_2}_p(G)},\ s_1\theta + s_2(1-\theta) = s,\ s_1 < s < s_2 \tag{2.75}$$

и неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \gamma\|\vec{v}_t\|_{L_r(Q_\gamma)} \tag{2.76}$$

вытекающее из формулы Ньютона-Лейбница. Пусть $\vec{v} \in H_\gamma$. Теоремы вложения [107] обеспечивают оценку

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \le c\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W^s_r(G))},\quad 2 - 2/p > s > 3/r.$$

Неравенство (2.75) дает

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \le c_1\|\vec{v}\|^{\theta}_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))}\|\vec{v}\|^{1-\theta}_{L_\infty(0,\gamma;W^{2-2/r}_r(G))},\ 1-\theta = \frac{s}{2-\frac{2}{r}}. \tag{2.77}$$

Согласно формуле Ньютона-Лейбница, мы имеем, что

$$\vec{v}(t,x) = \int_0^t \vec{v}_\eta(\eta,x)\,d\eta.$$

Принимая во внимание неравенство Минковского и неравенства Гёльдера, мы получаем

$$\|\vec{v}(t,x)\|_{L_r(G)} \le \int_0^t \|\vec{v}_\eta(\eta,x)\|_{L_r(G)}\,d\eta \le \int_0^\gamma \|\vec{v}_\eta(\eta,x)\|^r_{L_r(G)}\,d\eta\gamma^{(r-1)/r} \tag{2.78}$$

Таким образом,

$$\|\vec{v}(t,x)\|_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))} \le \|\vec{v}_t\|^p_{L_r(Q_\gamma)}\,d\eta\gamma^{(r-1)/r}. \tag{2.79}$$

Следовательно

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))} \le \|\vec{v}\|_{H_\gamma}\gamma^{(r-1)/r}. \tag{2.80}$$

Мы имеем неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W^{2-2/r}_r(G))} \le c\|\vec{v}\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)}, \tag{2.81}$$

где постоянная c не зависит от γ. Действительно, рассмотрим функцию $\vec{v}_0(t,x) = \vec{v}(t,x)$ при $t \le \gamma$, $\vec{v}_0(t,x) = \vec{v}(2\gamma - t, x)$ при $2\gamma \le t \le \gamma$ и $\vec{v}_0(t,x) = 0$

при $t \geq 2\gamma$. Эта функция принадлежит $W_r^{1,2}(Q)$. Теоремы вложения (см., например, [108, Теорема III 4.10.2]) гарантируют оценку

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_r^{2-2/r}(G))} \leq c\|\vec{v}_0\|_{L_\infty(0,T;W_r^{2-2/r}(G))} \leq c_1\|\vec{v}_0\|_{W_r^{1,2}(Q)} \leq c_2\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \quad (2.82)$$

где, как и прежде, постоянные c_1 и c_2 не зависят от γ. Оценки (2.77), (2.80), (2.82) обеспечивают неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq c_3\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}\gamma^{\theta(r-1)/r}. \quad (2.83)$$

Мы доказали, что оценка (2.83) справедлива для всех $\vec{v} \in H_\gamma$, где постоянная в правой части не зависит от γ. Аналогичным образом, можно доказать, что

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq c\gamma^\beta\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \ \forall v \in H_\gamma, \ \beta > 0, \quad (2.84)$$

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))} \leq c\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \ \forall v \in H_\gamma, \ \beta_1 > 0, \quad (2.85)$$

где постоянная c не зависит $\gamma \in (0,T]$. Эти оценки понадобятся нам в дальнейшем. Обозначим постоянные β и β_1. В первом случае мы имеем

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq c\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_r^{s_0}(G))}, \ \forall v \in H_\gamma, \ s_0 > 1 + 3/r, \quad (2.86)$$

Очевидно, что постоянная c здесь не зависит от γ. Выберем параметр $s_0 > 1+3/r$ такой, что $s_0 < 2-2/r$. Это возможно ввиду условия $r > (n+2)$. Далее, мы повторяем рассуждения доказательства (2.83). Параметр β равен $\theta_0(r-1)/r$, с $1-\theta_0 = \frac{s_0}{2-2/r}$. Рассмотрим неравенство (2.85). Мы имеем (см. (2.75), (2.80), (2.81))

$$\begin{gathered}\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))} \leq c\|\vec{v}\|^{\theta_2}_{L_\infty(0,\gamma;W_r^{2-2/r}(G))}\|\vec{v}\|^{1-\theta_2}_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))} \leq c_1\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \\ \forall v \in H_\gamma, \ \beta_1 = (1-\theta_2)(r-1)/r, \ \theta_2 = 1/(2-2/r).\end{gathered} \quad (2.87)$$

Далее мы опишем некоторые свойства оператора Лапласа. Общая теория эллиптических задач гласит, что задача

$$\Delta p = g, \ \frac{\partial p}{\partial\nu}|_\Gamma = 0$$

имеет решение $p \in W_r^2(G)$, такое, что

$$\int_G p\,dx = 0 \ \ \forall g \in X_r = \{g \in L_r(G) : \int_G p\,dx = 0\}.$$

Таким образом, оператор $\Delta : X_r \to X_r$ является изоморфизмом

$$X_r^2 = \{p \in W_r^2(G) \cap X : \ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0\}$$

в X_r. Очевидно, что оператор Δ допускает расширение до изоморфизма X_r в $(X_{r'}^2)'$, где $1/r + 1/r' = 1$ и $(X_{r'}^2)'$ является двойственным пространством к $X_{r'}^2$ относительно отношения двойственности, определяемого скалярным произведением в $L_2(G)$. Ввиду интерполяционных свойств операторов [107], Δ является изоморфизмом $X_r^1 = [X_r^2, X_r]_{1/2}$ в $[X_r, (X_{r'}^2)']_{1/2} = ([X_{r'}, (X_{r'}^2)]_{1/2})' = (X_{r'}^1)'$. Последнее равенство вытекает из теоремы двойственности для метода комплексной интерполяции [107, Раздел 1.13.3]. Далее, мы имеем проекцию

$$Pv = v - \frac{1}{\mu(G)} \int_G v(x),$$

где символ μ обозначает меру Лебега. Пространства X_r^2, X_r можно охарактеризовать как диапазоны $R(P)$ операторов $P : \tilde{W}_r^2(G) \to \tilde{W}_r^2(G)$ и $P : L_r(G) \to L_r(G)$, соответственно, где

$$\tilde{W}_r^2(G) = \{u \in W_r^2(G) : \ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = 0\}.$$

Один из этих операторов является расширением другого. По [107, Теорема 1.17.1], $X_r^1 = \{u \in [\tilde{W}_r^2(G), L_r(G)]_{1/2} : \ Pu = u\}$. Однако, $\tilde{W}_r^2(G) \subset W_r^2(G)$. Непосредственно из определения интерполяционного пространства (см. [107, Раздел 1.9.2]) отсюда следует, что

$$[\tilde{W}_r^2(G), L_r(G)]_{1/2} \subset [W_r^2(G), L_r(G)]_{1/2} = W_r^1(G).$$

Таким образом, $X_r^1 \subset \{u \in W_p^1(G) : Pu = u\}$. Следовательно, мы имеем неравенство ($u \in X_r^2$)

$$\|u\|_{W_r^1(G)} \le c\|u\|_{X_r^1(G)} \le c_1 \|\Delta u\|_{(X_{r'}^1)'} = c_1 \sup_{v \in X_{r'}^1} \frac{|(\Delta u, v)|}{\|v\|_{X_{r'}^1}} \le c_2 \sup_{v \in X_{r'}^1} \frac{|(\Delta u, v)|}{\|v\|_{W_{r'}^1(G)}}. \tag{2.88}$$

Далее, запишем уравнение для разности $q_1 - q_2$. Имеем

$$\Delta(q_1 - q_2) = \frac{\rho}{\tau}(div[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \tau(\vec{v}_1 + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 + \vec{w}_0) + \tau(\vec{v}_2 + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_2 + \vec{w}_0)]) \tag{2.89}$$

Принимая во внимание (2.88), мы приходим к выводу, что

$$\|q_1-q_2\|_{W^1_r(G)} \leq c_3\|(\vec{v}_1-\vec{v}_2-\tau(\vec{v}_1+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1+\vec{w}_0)+\tau(\vec{v}_2+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_2+\vec{w}_0)]\|_{L_r(G)}. \tag{2.90}$$

Рассмотрим второе слагаемое из уравнения (2.74)

$$I_2 = \frac{1}{\rho}\nabla(q_1-q_2) = \frac{1}{\rho}\nabla(R(\vec{v}_1)-R(\vec{v}_2)). \tag{2.91}$$

В силу оценки (2.90), имеем

$$\|\nabla(q_1-q_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C\|(\vec{v}_1-\vec{v}_2)-\tau((\vec{v}_1+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1+\vec{w}_0) \\ -(\vec{v}_2+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_2+\vec{w}_0))\|_{L_r(Q_\gamma)}, \tag{2.92}$$

Имеем равенство

$$(\vec{v}_1+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1+\vec{w}_0)-(\vec{v}_2+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_2+\vec{w}_0) \\ =(\vec{v}_1-\vec{v}_2,\nabla)(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0)+(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1-\vec{v}_2). \tag{2.93}$$

Следовательно,

$$\|\nabla(q_1-q_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C(\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{L_r(Q_\gamma)}+\tau\|(\vec{v}_1-\vec{v}_2,\nabla)(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ +\tau\|(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1-\vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)}) = J_1+J_2+J_3. \tag{2.94}$$

Оценка (2.76) гарантирует неравенство

$$J_1 \leq C\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C\gamma\|\vec{v}_{1t}-\vec{v}_{2t}\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq \gamma C\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{H_\gamma}, \tag{2.95}$$

где постоянная C_2 не зависит от $\gamma\in(0,T]$. Величина J_2 оценивается как

$$J_2 = \|(\vec{v}_1-\vec{v}_2,\nabla)(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq c_1\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0\|_{L_r(0,\gamma;W^1_r(G))}.$$

Второй множитель оценивается с помощью $R_0+\|w_0\|_{W^{1,2}_r(Q)}$. С учетом оценки (2.83), делаем вывод

$$J_2 \leq c_2(R_0)\gamma^{\beta_0}\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{H_\gamma},\ \beta_0=\theta(r-1)/r. \tag{2.96}$$

Аналогично, имеем оценку

$$J_3 = \|(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0,\nabla)(\vec{v}_1-\vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq c_3\|\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}+\vec{w}_0\|_{L_r(Q_\gamma)}\|\nabla\vec{v}_1-\vec{v}_2)\|_{L_\infty(Q_\gamma)}$$

Оценка (2.84) влечет, что

$$J_3 \le c_4(R_0)\gamma^{\beta}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}. \qquad (2.97)$$

Наконец, мы приходим к неравенству (см. (2.95), (2.96), (2.97))

$$\rho\|I_2\|_{L_r(Q_\gamma)} = \|\nabla(q_1 - q_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \le c_5(R_0)\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}. \qquad (2.98)$$

где $\beta_1 > 0$ и постоянная c_5 не зависит от γ и зависит от R_0 линейно. Первое слагаемое в (2.74) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_1 = -[(\vec{v}_1 + \vec{w}_0 - \vec{w}(\vec{v}_1), \nabla)(\vec{v}_1 + \vec{w}_0)] + [(\vec{v}_2 + \vec{w}_0 - \vec{w}(\vec{v}_2), \nabla)(\vec{v}_2 + \vec{w}_0)] \\ = [(\vec{v}_2 - \vec{v}_1 - \vec{w}(\vec{v}_2) + \vec{w}(\vec{v}_1), \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)] \\ + [(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0 - \frac{\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2)}{2}, \nabla)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)] = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \end{aligned}$$

где

$$\vec{w}(\vec{v}_i) = \tau((\vec{v}_i + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_i + \vec{w}_0) + \frac{1}{\rho}\nabla(q_i + p_0) - \vec{f})\ (i = 1, 2). \qquad (2.99)$$

Величина $\tilde{I}_1$ оценивается следующим образом:

$$\|\tilde{I}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1 - \vec{w}(\vec{v}_2) + \vec{w}(\vec{v}_1)\|_{L_r(Q_\gamma)}\|\nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_\infty(Q_\gamma)}. \qquad (2.100)$$

Учитывая (2.84), мы можем заключить, что

$$\|\nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \le (\|\nabla\vec{w}_0\|_{L_\infty(Q)} + c_6R_0) = C(R_0). \qquad (2.101)$$

Следовательно, первое слагаемое $\tilde{I}_1$ оценивается следующим образом:

$$\|\tilde{I}_1\| \le C_1(R_0)(\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} + \|\vec{w}(\vec{v}_2) - \vec{w}(\vec{v}_1)\|_{L_r(Q_\gamma)}), \qquad (2.102)$$

где первое выражение с использованием (2.76) допускает оценку

$$\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \gamma\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}. \qquad (2.103)$$

Кроме того, у нас есть

$$\begin{aligned} \vec{w}(\vec{v}_2) - \vec{w}(\vec{v}_1) = \tau(\frac{1}{\rho}\nabla(q_2 - q_1) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1, \nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)) + \\ (\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)). \end{aligned}$$

Оценка (2.98) дает

$$\|\frac{\tau}{\rho}\nabla(q_2 - q_1)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C_1\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma}. \tag{2.104}$$

Неравенства (2.96) и (2.97) гарантируют, что

$$\|(\vec{v}_2 - \vec{v}_1, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} + \|(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\|_{L_r} \leq C_2\gamma^{\beta_2}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma},$$

где постоянная C_2 не зависит от γ и $\beta_2 > 0$. Наконец, мы получаем оценку

$$\|\vec{w}(\vec{v}_2) - \vec{w}(\vec{v}_1)\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C_3\gamma^{\beta_3}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma}, \tag{2.105}$$

где постоянная C_3 не зависит γ и $\beta_3 > 0$. В этом случае мы получаем

$$\|\tilde{I}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C_4(R_0)\gamma^{\beta_3}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma}. \tag{2.106}$$

Аналогичным образом, мы получаем, что

$$\|\tilde{I}_2\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C_5(R_0)\gamma^{1/2}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma}. \tag{2.107}$$

В результате (2.106) и (2.107) мы можем записать оценку

$$\|I_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C_6(R_0)\gamma^{\beta_3}\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|_{H_\gamma}, \tag{2.108}$$

где постоянная C_6 не зависит от γ. Рассмотрим третье слагаемое в (2.74).

$$\begin{aligned} I_3 &= (\vec{v}_1 + \vec{w}_0, \nabla)\vec{w}(\vec{v}_1) - (\vec{v}_2 + \vec{w}_0, \nabla)\vec{w}(\vec{v}_2) \\ &= [(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2)}{2})] + [(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2))] = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2, \end{aligned} \tag{2.109}$$

Оценим слагаемое $\tilde{J}_1$ сверху следующим образом:

$$\|(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2)}{2})\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq M\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{L_\infty(Q_\gamma)},$$

где

$$M = \|\frac{\nabla(\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2))}{2}\|_{L_r(Q_\gamma)}.$$

Нетрудно показать, что постоянная M ограничена некоторой постоянной, зависящей от R_0 и не зависящей от γ. Оценка (2.83) дает

$$\|\tilde{J}_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq C\gamma^{\beta_0}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}. \tag{2.110}$$

Слагаемое $\tilde{J}_2$ можно записать в виде

$$\tilde{J}_2 = [(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2))] = (\vec{g}, \nabla)(\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2)), \tag{2.111}$$

где $\vec{g} = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0$. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2) &= \frac{\tau}{\rho}\nabla(q_1 - q_2) + \tau(\vec{v}_1 + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 + \vec{w}_0) - \tau(\vec{v}_2 + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_2 + \vec{w}_0)\\ &= \frac{\tau}{\rho}\nabla(q_1 - q_2) + \tau(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0) + (\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\nabla(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).\end{aligned} \tag{2.112}$$

Далее, мы рассмотрим выражение $\tilde{J}_2$. Ввиду (2.112), Его можно представить как сумму трех слагаемых. Первое из них, это величина

$$K_1 = \frac{\tau}{\rho}(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)\nabla(q_1 - q_2).$$

Она допускает оценку

$$\|K_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq c\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|q_1 - q_2\|_{L_r(0,\gamma;W_r^2(Q_\gamma))}. \tag{2.113}$$

Неравенство (2.83) гарантирует оценку

$$\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq C(R_0\gamma^{\beta_0} + \|\vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)}), \tag{2.114}$$

где постоянная C не зависит от R_0 и γ. Кроме того, мы можем записать $\vec{w}_0 = \vec{w}_0 - \vec{u}_0 + \vec{u}_0$ и, таким образом,

$$\|\vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq \|\vec{w}_0 - \vec{u}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)} + \|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}.$$

Для оценки первого слагаемого в правой части мы воспользуемся оценками (2.77) и (2.79), записанными для наших функций. В этом случае мы получаем

$$\begin{aligned}\|\vec{w}_0 - \vec{u}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)} &\leq c_1\|\vec{w}_0 - \vec{u}_0\|^{\theta_1}_{L_\infty(0,\gamma;L_r(G))}\|\vec{w}_0 - \vec{u}_0\|^{1-\theta_1}_{L_\infty(0,\gamma;W_r^{2-2/r}(G))}\\ &\leq c_2\gamma^{\theta_1(r-1)/r}\|\vec{w}_{0t}\|^{\theta}_{L_r(Q)}\|\vec{w}_0 - \vec{u}_0\|^{1-\theta}_{L_\infty(0,T;W_r^{2-2/r}(G))} = c_9\gamma^{\theta_1(r-1)/r},\end{aligned} \tag{2.115}$$

где $1-\theta_1 = \frac{s}{2-\frac{2}{r}}$. Таким образом, можем переписать (2.114) следующим образомs:

$$\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \leq C_1\gamma^{\beta_2} + C_2\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}, \tag{2.116}$$

где постоянная C_2 зависит от констант в интерполяционных неравенствах и теоремах вложения и не зависит от γ. По аналогии с (2.94), второй множитель в (2.113) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\|q_1 - q_2\|_{L_r(0,\gamma;W_r^2(Q_\gamma))} \leq C(\|div\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ + \tau\|div\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ + \tau\|div\,(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)}) = L_1 + L_2 + L_3.\end{aligned} \tag{2.117}$$

Ввиду неравенств (2.75) и (2.76) мы можем сделать вывод, что

$$L_1 \leq C\gamma^{1/2}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}. \tag{2.118}$$

Рассмотрим слагаемое L_2. Имеем оценку

$$\begin{aligned}L_2 \leq \|\nabla(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ \leq c_3\|\nabla(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_r(0,\gamma;W_r^1(G))} \\ + c_4\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_r(0,\gamma;W_r^2(G))},\end{aligned} \tag{2.119}$$

Вторые множители оцениваются с помощью $R_0 + \|w_0\|_{W_r^{1,2}(Q)}$. В силу оценок (2.80), (2.83), (2.84), (2.85), получаем

$$L_2 \leq c_5\gamma^{\beta_3}\|\vec{v}\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \tag{2.120}$$

где постоянная $c_5 = c_5(R_0)$ не зависит γ и $\beta_3 > 0$ (наименьшая из постоянных β_i в (2.80), (2.83), (2.84), (2.85)). Аналогично, имеем оценку

$$\begin{aligned}L_3 \leq \|\nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ \leq c_6\|\nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{L_r(0,\gamma;W_r^1(G))} \\ + c_7\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{L_r(0,\gamma;W_r^2(G))},\end{aligned} \tag{2.121}$$

В силу оценок (2.80), (2.83), (2.84), (2.85), первое слагаемое I_{01} в правой части оценивается следующим образом:

$$I_{01} \leq c_8(R_0)\gamma^{\beta_4}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \tag{2.122}$$

где β_4 – положительная постоянная. В силу (2.116), последнее слагаемое I_{02} оценивается следующим образом.:

$$I_{02} \leq c_9(R_0\gamma^{\beta_5} + \|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}, \tag{2.123}$$

где β_5 – положительная постоянная. Легко заметить, что постоянная c_9 не зависит от данных задачи. Она зависит от постоянных в теоремах вложения и интерполяционных неравенствах. Оценки (2.121)-(2.123) подразумевают, что

$$L_3 \leq (c_{10}(R_0)\gamma^{\beta 5} + c_{11}\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}))\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}, \tag{2.124}$$

где $\beta 5 > 0$, постоянные c_{10} и c_{11} не зависят от γ и c_{11} также не зависит от данных, рассматриваемых в задаче. Наконец, оценки (2.113), (2.116), (2.117), (2.118), (2.120), (2.124) гарантируют неравенство

$$\|K_1\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq (c_{12}(R_0)\gamma^{\beta_6} + c_{13}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}. \tag{2.125}$$

Оценим второе слагаемое в выражении $\tilde{J}_2$ вида $K_2 = \tau(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)$. Имеем

$$\|K_2\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq c_1\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\nabla(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)}. \tag{2.126}$$

Неравенства (2.119) и (2.120) дают оценку

$$\begin{aligned}\|\nabla(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \nabla)(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_r(Q_\gamma)} &\leq c_2(R_0)\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{L_\infty(0,\gamma;W^1_\infty(G))} \\ &\leq c_3(R_0)\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}\gamma^{\beta_7}.\end{aligned} \tag{2.127}$$

Следовательно, мы получаем, что

$$K_2 \leq c_4(R_0)\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_r^{1,2}(Q_\gamma)}\gamma^{\beta_8}. \tag{2.128}$$

Рассмотрим выражение $K_3 = (\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ встречающийся в $\tilde{J}_2$. Как и прежде, мы приходим к выводу, что

$$\|K_3\|_{L_r(Q_\gamma)} \leq c_5\|\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0\|_{L_\infty(Q_\gamma)}\|\nabla(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0, \nabla)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)}. \tag{2.129}$$

Используя неравенства (2.116), (2.121) и (2.124), мы делаем вывод

$$\|K_3\|_{L_r(Q_\gamma)} \le (c_6(R_0)\gamma^{\beta_2} + c_7\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}, \tag{2.130}$$

где, как и прежде, постоянные c_6 и c_7 не зависят от данных задачи, и обе постоянные не зависят от γ. Окончательная оценка выражения $\tilde{J}_2$ выглядит следующим образом:

$$\|\tilde{J}_2\|_{L_r(Q_\gamma)} \le (c_8(R_0)\gamma^{\beta_7} + c_9\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}, \tag{2.131}$$

Таким образом, величина I_3 допускает оценку

$$\|I_3\|_{L_r(Q_\gamma)} \le (c_{10}(R_0)\gamma^{\beta_8} + c_{11}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{H_\gamma}, \tag{2.132}$$

где постоянная c_{11} не зависит от данных задачи, $\beta_8 > 0$, и обе постоянные c_{10} и c_{11} не зависят от γ. Последнее слагаемое I_4 в (2.74) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \vec{w}(\vec{v}_1)div(\vec{v}_1 + \vec{w}_0) - \vec{w}(\vec{v}_2)div(\vec{v}_2 + \vec{w}_0) = [\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2)]div(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0) \\ + (\frac{\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2)}{2})div(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Здесь второе слагаемое оценивается как (см (2.95))

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_4\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \|\frac{\vec{w}(\vec{v}_1) + \vec{w}(\vec{v}_2)}{2}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \cdot \|div(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)} \\ \le c(R_0)\gamma^{1/2}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)}. \end{aligned} \tag{2.134}$$

В силу оценки (2.105), первое слагаемое допускает оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_3\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \|\vec{w}(\vec{v}_1) - \vec{w}(\vec{v}_2)\|_{L_r(Q_\gamma)}\|div(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} + \vec{w}_0)\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \\ \le c_1\gamma^{\beta_3}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)}. \end{aligned} \tag{2.135}$$

Теперь мы получаем, что

$$\|I_4\|_{L_r(Q_\gamma)} \le \|\vec{w}(\vec{v}_1)div(\vec{v}_1 + \vec{w}_0) - \vec{w}(\vec{v}_2)div(\vec{v}_2 + \vec{w}_0)\| \le c_2\gamma^{\beta_4}\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)}, \tag{2.136}$$

где $\beta_4 = \min(\beta_3, 1/2)$. Вышеуказанные неравенства (2.73), (2.98), (2.108), (2.129), (2.136) подразумевают, что

$$\|B(\vec{v}_1) - B(\vec{v}_2)\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)} \le (c_3(R_0)\gamma^{\beta} + c_4\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W^{1,2}_r(Q_\gamma)}, \tag{2.137}$$

где постоянная c_3, в общем случае, зависит от норм данных, а постоянная c_4 от них не зависит. Постоянная β — это наименьшая степень γ из тех, которые возникают в приведенных выше оценках. Выберем $q_0 = 1/4C_2$ и γ, такие, что $C_4(R_0)\gamma^\beta = 1/4$. В этом случае оператор B является сжимающим оператором в шаре B_{R_0} и переводит его в себя. Теорема о неподвижной точке гарантирует существование единственного решения уравнения (2.67) в шаре B_{R_0}. Единственность решения легко следует из рассуждений, использованных в доказательстве теоремы.

Докажем единственность. Предположим, что существует два решения $(\vec{u}_1, p_1)$, $(\vec{u}_2, p_2)$ задачи (2.3), (2.4). Пусть $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\tilde{p} = p_1 - p_2$ и $w = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$. Вычтем соответствующие уравнения для $(\vec{u}_1, p_1)$, $(\vec{u}_2, p_2)$ друг из друга и умножим первое уравнение системы (2.3) на $\tilde{p}$, второе уравнение на $\vec{v}$, и интегрируем по G. Далее, интегрируя по частям, получим равенство

$$-(\vec{v}, \nabla\tilde{p}) + \tau((\vec{v}, \nabla)(\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}), \nabla\tilde{p}) + \tau((\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}, \nabla)\vec{v}, \nabla\tilde{p}) + \frac{\tau}{\rho}(\nabla\tilde{p}, \nabla\tilde{p}) = 0. \tag{2.138}$$

Используем определение обобщенного решения

$$\int_G (\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}, \vec{\psi})dx - ((\vec{u}_1 - \vec{w}_1, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_1) + ((\vec{u}_2 - \vec{w}_2, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}_2) + (\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{p}, \vec{\psi}) +$$
$$\mu(\nabla\vec{v}, \nabla\vec{\psi}) + \mu(div\,\vec{v}, div\,\vec{\psi}) + ((\vec{u}_1, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_1) - ((\vec{u}_2, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}_2) = 0. \tag{2.139}$$

Возьмем $\vec{\psi} = \vec{v}$. Получим

$$\int_G \frac{\partial}{\partial t}|\vec{v}|^2 dx - ((\vec{v} - \vec{w}, \nabla)\vec{v}, \frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}) - (((\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}) - (\frac{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}{2}), \nabla)\vec{v}, \vec{v}) +$$
$$\frac{1}{\rho}(\nabla\tilde{p}, \vec{v}) + \mu|\nabla\vec{v}|^2 + \mu|div\,\vec{v}|^2 + ((\vec{v}, \nabla)\vec{v}, \frac{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}{2}) + ((\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}, \nabla)\vec{v}, \vec{w}_1 - \vec{w}_2) = 0. \tag{2.140}$$

Делим уравнение (2.138) на ρ

$$-(\frac{\vec{v}, \nabla\tilde{p}}{\rho}) + \frac{\tau}{\rho}((\vec{v}, \nabla)(\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}), \nabla\tilde{p}) + \frac{\tau}{\rho}((\frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}, \nabla)\vec{v}, \nabla\tilde{p}) + \frac{\tau}{\rho^2}(|\nabla\tilde{p}|^2) = 0. \tag{2.141}$$

После сложения со вторым уравнением, получим

$$\int_G (\frac{\partial}{\partial t}|\vec{v}|^2+\mu|\nabla\vec{v}|^2+\mu|div\,\vec{v}|^2)dx-((\vec{v}-\vec{w},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})+((\vec{v},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2})+ ((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\vec{w}_1-\vec{w}_2)+(\frac{\tau}{\rho^2},|\nabla\tilde{p}|^2)+\frac{\tau}{\rho}((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\nabla\tilde{p})=0. \quad (2.142)$$

Имеем $\vec{w}=\vec{w}_1-\vec{w}_2=\tau((\vec{v},\nabla)(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}))+\tau((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v}+\frac{\tau}{\rho^2}\nabla\tilde{p}$. Тогда слагаемые, начиная со второго, перепишутся в виде

$$-((\vec{v}-\vec{w},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})+((\vec{v},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2})+((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\tau(\vec{v},\nabla)(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}))+ ((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\tau(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v})+((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\frac{\tau}{\rho}\nabla\tilde{p})+(\frac{\tau}{\rho^2},|\nabla\tilde{p}|^2)+ \frac{\tau}{\rho}((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\nabla\tilde{p})=-((\vec{v}-\vec{w},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})+((\vec{v},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2})+ ((\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v},\tau(\vec{v},\nabla)(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}))+\tau(1,|\frac{\nabla\tilde{p}}{\rho}+(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2},\nabla)\vec{v}|^2)=I. \quad (2.143)$$

Первое слагаемое, интегрируя по частям, можно записать в виде

$$I_1=((\vec{v}-\vec{w},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})=\sum_{i,j}((v_i-w_i)v_{jx_i},(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})_j)= \sum_{i,j}((v_i-w_i)v_j,(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2})_{jx_i}). \quad (2.144)$$

Тогда имеем оценку

$$|I_1|\le C_1(\epsilon)\|\vec{v}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(G))}+\epsilon\|\vec{w}\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(G))}, \quad (2.145)$$

где $\epsilon > 0$ и C_1 зависит от $\|v_i\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(G))}$. Вторые слагаемые $I_2 = ((\vec{v},\nabla)\vec{v},\frac{\vec{w}_1+\vec{w}_2}{2})$ оценим через

$$|I_2|\le C_2\|\vec{v}\|^2_{L_2(G)}+\epsilon\|\vec{v}\|^2_{W_2^1(G)}, \quad (2.146)$$

где C зависит от ϵ и $\|w_i\|_{L_\infty(Q)}$. Третье слагаемое оценивается точно также. Наконец, четвертое слагаемое оценивается снизу через

$$|I_3|=\tau(\frac{|\vec{w}|^2}{2}-((\vec{v},\nabla)(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}),(\vec{v},\nabla)(\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}))), \quad (2.147)$$

где последнее слагаемое оценивается через $C_3\|\vec{v}\|^2_{L_2(G)}$. Используя полученные неравенства в (2.142) и выбирая достаточно малое ε, придем к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{L_2(G)}+\frac{\mu}{2}\|\nabla\vec{v}\|^2_{L_2(G)}+\tau\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2_{L_2(G)}\le C_4\|\vec{v}\|^2_{L_2(G)}. \quad (2.148)$$

Из леммы Гронуолла получим, что $\vec{v} = 0$ и $\vec{w} = 0$. Отсюда вытекает, что $\tilde{p} = 0$.

2.4 Приближение мелкой воды.

Рассмотрим вопросы регулярной разрешимости одной начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в пространствах Соболева. Проведем некоторые дополнительные построения. Исходя из определений, легко получить равенства

$$div\,(h(\vec{u}-\vec{w})\otimes\vec{u}) = h(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + h\,div\,(\vec{u}-\vec{w})\vec{u} + \nabla h\cdot(\vec{u}-\vec{w})\vec{u}, \quad (2.149)$$

$$div\,(h\vec{u}\otimes\vec{w}) = h(\vec{u},\nabla)\vec{w} + h\,div\,\vec{u}\;\vec{w} + \nabla h\cdot\vec{u}\;\vec{w}. \quad (2.150)$$

Далее, мы используем представления

$$div\,(\hat{\sigma}(\vec{u})) = \Delta\vec{u} + \nabla(div\,\vec{u}). \quad (2.151)$$

$$div\,(h\hat{\sigma}(\vec{u})) = h\,div\,\hat{\sigma}(\vec{u}) + \vec{H},\ \vec{H} = (\sum_{i=1}^{2} h_{x_i}\sigma_{i1}, \sum_{i=1}^{2} h_{x_i}\sigma_{i2})^T. \quad (2.152)$$

Ниже мы предположим, что $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ $(p > 4)$. В этом случае теоремы вложения [107] дают $h_0 \in C^{2-4/p}(\overline{G})$, положим $m_0 = \inf_{x\in G} h_0(x), M_0 = \sup_{x\in G} h_0(x)$.

Теорема 2.6. *Пусть $\vec{u}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\vec{u}_0|_\Gamma = 0$, $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ $(p > 4)$, $h_0(x) > 0$ в $\overline{Q}$, и $\frac{\partial h_0}{\partial n}|_\Gamma = 0$. Тогда найдется постоянная $q_0 > 0$, не зависящая от данных $\vec{u}_0, h_0$ такая, что, если*

$$\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}(M_0 + \frac{M_0}{m_0} + \frac{1}{m_0}) + \frac{M_0}{m_0}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)} \le q_0 \quad (2.153)$$

в G, где постоянные M_0, m_0 таковы что $M_0 \ge h_0(x) \ge m_0 > 0$ при п.в. $x \in G$, то на некотором отрезке $[0,\gamma_0]$ существует решение задачи (2.5), (2.6) такое, что $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0})$ и $h(t,x) > 0$ в $\overline{Q^{\gamma_0}}$, где $Q^{\gamma_0} = (0,\gamma_0)\times G$. Если $(\vec{u}_1, h_1)$, $(\vec{u}_2, h_2)$ два решения задачи (2.5), (2.6) и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $h_i(t,x) \ge \delta_0$ $(i = 1,2)$, то $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $h_1 = h_2$.

Доказательство. Мы определяем функцию $N(h) \in C^2(\mathbb{R})$ такую, что $N(h) = h$ при $h \in [m_0/2, 2M_0]$, $N(h) = 3M_0$ при $h > 3M_0$, $N(h) = m_0/3$

при $h < m_0/3$, $m_0/3 \leq N(h) \leq 3M_0$ при всех $h \in \mathbb{R}$ и $0 \leq N'(h) \leq 1$. Для доказательства разрешимости мы используем теорему о неподвижной точке. Для этого рассмотрим семейство задач

$$\frac{\partial h}{\partial t} = div\,(N(h)(\vec{w} - u)),\ \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + g\nabla h),\ \frac{\partial (N(h)\vec{u})}{\partial t} +$$
$$div\,(N(h)(\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) + g\nabla(\frac{N^2(h)}{2}) = 2div\,(\nu N(h)\hat{\sigma}(\vec{u})) + div\,(N(h)\vec{u} \otimes \vec{w}), \tag{2.154}$$

Сделаем одно замечание. Вообще говоря, условие параболичности по Петровскому для системы (2.5) не выполнено. Поделим главную часть второго уравнения в (2.5) на функцию $h(t, x)$, которая считается положительной, и, для удобства, умножим первое уравнение системы на g. Взяв полученный оператор $A(t, x, D)$ главной части системы, заменив производные ∂_{x_k} числами $i\xi_k$, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ и обозначив $\delta = \sum_i u_i(t, x)\xi_i$, получим матрицу $A(t, x, i\vec{\xi})$ (характеризует эллиптическую часть системы)

$$A(t, x, i\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} g^2\tau|\xi|^2 & \tau g\delta\xi_1 & g\delta\tau\xi_2 \\ \tau g\delta\xi_1 & |\xi|^2 + \xi_1^2 + \delta^2\tau & \xi_1\xi_2 \\ g\delta\tau\xi_2 & \xi_1\xi_2 & |\xi|^2 + \xi_2^2 + \delta^2\tau \end{pmatrix}.$$

Составляя скалярное произведение $< A\vec{\eta}, \vec{\eta} >$, $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, легко убедиться, что выполнено точное неравенство $< A\vec{\eta}, \vec{\eta} \geq |\xi|^2(\eta_2^2 + \eta_3^2)$ т.е. матрица A неотрицательна, но вообще говоря положительно определенной не является. Это легко увидеть из равенства $< A\vec{\eta}, \vec{\eta} >= 0$ при $\eta_3 = \eta_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0$. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial h}{\partial t} - g\tau N(h_0)\Delta h = f_0,\ h(0, x) = h_0,\ \frac{\partial h}{\partial n}|_S = 0. \tag{2.155}$$

Утверждение 2.1. *Пусть* $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\frac{\partial h_0}{\partial n}|_\Gamma = 0$, $f_0 \in L_p(Q)$, $p > 4$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.155) *такое, что* $h \in W_p^{1,2}(Q)$ *и справедливы следующие оценки:*

$$\|h\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q)} + \|h_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}), \tag{2.156}$$

$$\|h\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c(\|f_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|h_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}), \forall\gamma \in (0, T], \tag{2.157}$$

где постоянная c не зависит от γ.

Вторая оценка вытекает из первой (надо применить первую оценку к решению задачи с правой частью, равной f_0 на $(0,\tau)$ и равной нулю вне $(0,\tau)$). Утверждение, например, вытекает из теоремы 7.35 в [116] (см. также [3]).

Рассмотрим систему

$$L_1 u = \vec{u}_t - \Delta \vec{u} - \nabla div\, \vec{u} = g_0, \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0,\ \vec{u}|_S = 0. \tag{2.158}$$

Система является параболической и легко проверить, что условие параболичности по Петровскому (см. [3]) здесь выполнено. Т.е. можно утверждать, что

Утверждение 2.2. *Пусть* $\vec{u}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$, $\vec{u}_0|_\Gamma = 0$, $g_0 \in L_p(Q)$, $p > 4$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.158) *такое, что* $\vec{u} \in W_p^{1,2}(Q)$ *и справедливы следующие оценки:*

$$\|h\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|g_0\|_{L_p(Q)} + \|\vec{u}_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}), \tag{2.159}$$

$$\|h\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c(\|g_0\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\vec{u}_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}), \forall \gamma \in (0,T], \tag{2.160}$$

где постоянная с не зависит от τ.

Используя равенства (2.149)-(2.152), перепишем систему (2.154) в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} - g\tau div\,(N(h)\nabla h) = div(N(h)(\tau(\vec{u},\nabla)\vec{u} - \vec{u})), \quad \vec{u}_t - \Delta\vec{u} - \nabla div\,\vec{u} =$$
$$\frac{1}{N(h)}[-h_t\vec{u} + h(\vec{w}-\vec{u},\nabla)\vec{u} + h\,div\,(\vec{w}-\vec{u})\vec{u} + \nabla h\cdot(\vec{w}-\vec{u})\vec{u}$$
$$+ h(\vec{u},\nabla)\vec{w} + h\,div\,\vec{u}\ \vec{w} + \nabla h\cdot\vec{u}\ \vec{w}] + \frac{1}{N(h)}\vec{H} - \frac{1}{N(h)}g\nabla(\frac{N^2(h)}{2}). \tag{2.161}$$

Построим функции φ_0 и $\vec{\varphi}_1$, $i = 0,1$, как решение задач (2.155), (2.158), где $f_0 = 0, g_0 = 0$ и сделаем замену $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\varphi}_1$, $h = r + \varphi_0$. В результате придем к системе:

$$\frac{\partial r}{\partial t} - g\tau div\,(N(h_0)\nabla r) = g\tau div\,((N(r+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r) +$$
$$g\tau div\,(N(r+\varphi_0) - N(h_0)\nabla\varphi_0) + div(N(h)(\tau(\vec{u},\nabla)\vec{u} - \vec{u}))) = R_0(r,\vec{v}),$$
$$\vec{v}_t - \Delta\vec{v} - \nabla div\,\vec{v} = \frac{1}{N(h)}[-h_t\vec{u} + h(\vec{w}-\vec{u},\nabla)\vec{u} + h\,div\,(\vec{w}-\vec{u})\vec{u} +$$
$$\nabla h\cdot(\vec{w}-\vec{u})\vec{u} + h(\vec{u},\nabla)\vec{w} + h\,div\,\vec{u}\ \vec{w} + \nabla h\cdot\vec{u}\ \vec{w}] +$$
$$\frac{1}{N(h)}\vec{H} - \frac{1}{N(h)}g\nabla(\frac{N^2(h)}{2}] = R(r,v),\ u = v + \varphi_1,\ h = r + \varphi_0. \tag{2.162}$$

Определим пространство

$$H_\gamma = \{(r, \vec{v}) \in W_p^{1,2}(Q) : \ \vec{v}|_S = 0, \ r(0,x) = \vec{v}(0,x) = 0, \ \frac{\partial h}{\partial n}|_S = 0\},$$

норма в котором совпадает с нормой в пространстве $W_p^{1,2}(Q)$ и оно состоит из вектор-функций длины 3. Используя утверждения 1,2, сведем задачу к системе

$$\begin{gathered} r = L_0^{-1}[g\tau div\,((N(r+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r) + \\ g\tau div\,((N(r+\varphi_0) - N(h_0))\nabla\varphi_0) + div(N(h)((\tau\vec{u},\nabla)\vec{u} - \vec{u}))] = L_0^{-1}R_0(\vec{v}, r), \\ \vec{v} = L_1^{-1}[\frac{1}{N(h)}[-h_t\vec{u} + h(\vec{w}-\vec{u},\nabla)\vec{u} + h\,div\,(\vec{w}-\vec{u})\vec{u} + \\ \nabla h\cdot(\vec{w}-\vec{u})\vec{u} + h(\vec{u},\nabla)\vec{w} + h\,div\,\vec{u}\ \vec{w} + \nabla h\cdot\vec{u}\ \vec{w} + \\ \frac{1}{N(h)}\vec{H} - \frac{1}{N(h)}g\nabla(\frac{N^2(h)}{2})]] = L_1^{-1}R(\vec{v}, r), \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{\varphi}_1, \ h = r + \varphi_0. \end{gathered} \quad (2.163)$$

Таким образом, мы можем записать систему

$$r = L_0^{-1}R_0(r,\vec{v}), \vec{v} = L_1^{-1}R(r,\vec{v}), \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{\varphi}_1, \ h = r + \varphi_0. \quad (2.164)$$

Обозначим через $\vec{\Psi}$ вектор-функцию $(L_0^{-1}R_0(r,\vec{v}), L_1^{-1}R(r,\vec{v}))|_{r=0,\vec{v}=0}$. Пусть $M_1 = \|\vec{\Psi}\|_{H_\gamma}$ и пусть $B_{M_1,\gamma} = \{(r,\vec{v}) \in H_\gamma : \|(r,\vec{v})\|_{H_\gamma} \leq M_1\}$. Покажем, что оператор $A : (r,\vec{v}) \to (L_0^{-1}R_0(r,\vec{v}), L_1^{-1}R(r,\vec{v}))$ является сжимающим и переводит шар $B_{M_1,\gamma}$ в себя, когда параметр γ достаточно мал. Перед доказательством приведем несколько полезных неравенств. Используем интерполяционное неравенство [107]

$$\|\vec{v}\|_{W_p^s(G)} \leq c\|\vec{v}\|^{\theta}_{W_p^{s_1}(G)}\|\vec{v}\|^{1-\theta}_{W_p^{s_2}(G)}, \ s_1\theta + s_2(1-\theta) = s, \ s_1 < s < s_2 \quad (2.165)$$

и неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq \gamma\|\vec{v}_t\|_{L_p(Q^\gamma)} \quad (2.166)$$

вытекает из формулы Ньютона-Лейбница и справедлива для функций таких, что $v(0,x) = 0$. В приведенных ниже неравенствах мы предполагаем, что эти условия выполняются. Из (2.165), (2.166) следует, что

$$\|\vec{v}\|_{L_p(0,\gamma;W_p^1(G))} \leq c\gamma^{1/2}\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}, \ v(0,x) = 0. \quad (2.167)$$

Пусть $\vec{v} \in H_\gamma$. Теоремы о вложении [107] дают оценку

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^s(G))}, \ \ 2 - 2/p > s > 2/p.$$

Неравенство (2.165) дает

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c_1 \|\vec{v}\|^{\theta}_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \|\vec{v}\|^{1-\theta}_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))},\ 1-\theta = \frac{s}{2-\frac{2}{p}}. \tag{2.168}$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что

$$\vec{v}(t,x) = \int_0^t \vec{v}_\eta(\eta,x)\,d\eta.$$

Учитывая неравенства Минковского и Гельдера, мы получаем

$$\|\vec{v}(t,x)\|_{L_p(G)} \le \int_0^t \|\vec{v}_\eta(\eta,x)\|_{L_p(G)}\,d\eta \le \int_0^\gamma \|\vec{v}_\eta(\eta,x)\|^p_{L_p(G)}\,d\eta\gamma^{(p-1)/p} \tag{2.169}$$

Таким образом,

$$\|\vec{v}(t,x)\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \le \|\vec{v}_t\|^p_{L_p(Q^\gamma)}\gamma^{(p-1)/p} \tag{2.170}$$

и, тем самым,

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \le \|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}\gamma^{(p-1)/p}. \tag{2.171}$$

Более того, из (2.168) следует, что

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c_1 \|\vec{v}_t\|^{\theta(p-1)/p}_{L_p(Q^\gamma)} \|\vec{v}\|^{1-\theta}_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))},\ 1-\theta = \frac{s}{2-\frac{2}{p}}. \tag{2.172}$$

Имеем неравенство

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))} \le c\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}, \tag{2.173}$$

где постоянная c не зависит от γ. Действительно, рассмотрим функцию $\vec{v}_0(t,x) = \vec{v}(t,x)$ для $t \le \gamma$, $\vec{v}_0(t,x) = \vec{v}(2\gamma - t, x)$ для $2\gamma \le t \le \gamma$, и $\vec{v}_0(t,x) = 0$ для $t \ge 2\gamma$. Эта функция принадлежит $W_p^{1,2}(Q)$. Теоремы о вложении (см, например, [119, Теорема III 4.10.2]) гарантируют оценку

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))} \le c\|\vec{v}_0\|_{L_\infty(0,T;W_p^{2-2/p}(G))} \le c_1\|\vec{v}_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c_2\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}, \tag{2.174}$$

где, как и ранее, постоянная c_2 не зависит от γ. Оценки (2.168), (2.171), (2.174) гарантируют, что

$$\|\vec{v}\|_{L_\infty(Q_\gamma)} \le c_3\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}\gamma^{\theta(p-1)/p}. \tag{2.175}$$

Мы доказали, что оценка (2.175) справедлива для всех $\vec{v} \in W_p^{1,2}(Q^\gamma)$ таких, что $v(0,x) = 0$, где постоянная в правой части не зависит от γ. Аналогично можно доказать, что

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c\gamma^\beta\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)},\ \forall v \in W_p^{1,2}(Q^\gamma),\ \beta > 0, \tag{2.176}$$

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \le c\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)},\ \forall v\in W_p^{1,2}(Q^\gamma),\ \beta_1>0, \tag{2.177}$$

где постоянная c не зависит от $\gamma\in(0,T]$ и $v(0,x)=0$. Эти оценки понадобятся нам в дальнейшем. Зададим постоянные β,β_1. В первом случае мы имеем, что

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c\|\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{s_0}(G))},\ \forall v\in H_\gamma,\ s_0>1+2/r, \tag{2.178}$$

Очевидно, что постоянная c здесь не зависит от γ. Выберем параметр $s_0 > 1+2/p$ такой, что $s_0<2-2/p$. Это возможно, учитывая условие $p>(n+2)=4$. Далее, мы повторим рассуждения из доказательства (2.175). Параметр β равен $\theta_0(p-1)/p$, с $1-\theta_0=\frac{s_0}{2-2/p}$. Рассмотрим неравенство (2.177). Имеем (см. (2.165), (2.171), (2.173))

$$\|\nabla\vec{v}\|_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \le c\|\vec{v}\|^{\theta_2}_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))}\|\vec{v}\|^{1-\theta_2}_{L_\infty(0,\gamma;L_p(G))} \le c_1\gamma^{\beta_1}\|\vec{v}\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)},$$
$$\forall\vec{v}\in H_\gamma,\ \beta_1=(1-\theta_2)(p-1)/p,\ \theta_2=1/(2-2/p). \tag{2.179}$$

Оценим норму $\|A(r_1,\vec{v}_1)-A(r_2,\vec{v}_2)\|_{H_\gamma}$ предполагая, что $(r_i,\vec{v}_i)\in B_{M_1,\gamma}$ $(i=1,2)$. Легко увидеть, что

$$\|A(r_1,\vec{v}_1)-A(r_2,\vec{v}_2)\|_{H_\gamma} \le c[\|R_0(r_1,\vec{v}_1)-R_0(r_2,\vec{v}_2)\|_{L_p(Q^\gamma)}+$$
$$\|R(r_1,\vec{v}_1)-R(r_2,\vec{v}_2)\|_{L_p(Q^\gamma)}]. \tag{2.180}$$

Следующая цель - оценить все слагаемые в правой части этого неравенства. Начнем со старших слагаемых. Рассмотрим слагаемое (см. первое уравнение системы)

$$J_1 = div(N(r_1+\varphi_0)(\vec{v}_1+\vec{\varphi}_1,\nabla)(\vec{v}_1+\vec{\varphi}_1)) - div(N(r_2+\varphi_0)(\vec{v}_2+\vec{\varphi}_1,\nabla)(\vec{v}_2+\vec{\varphi}_1)). \tag{2.181}$$

Его можно записать в виде

$$N(r_1+\varphi_0)(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j}) + (N(r_1+\varphi_0))_{x_j}(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i})+$$
$$N(r_1+\varphi_0)(v_{1ix_j}+\varphi_{1ix_j})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i}) - N(r_2+\varphi_0)(v_{2i}+\varphi_{1i})(v_{2jx_ix_j}-\varphi_{1jx_ix_j})-$$
$$(N(r_2+\varphi_0))_{x_j}(v_{2i}+\varphi_{1i})(v_{2jx_i}+\varphi_{1jx_i}) - N(r_2+\varphi_0)(v_{2ix_j}+\varphi_{2ix_j})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i}), \tag{2.182}$$

где v_{ij} - координаты вектора $\vec{v}_i$. Оценим каждое слагаемое. Имеем

$$N(r_1+\varphi_0)(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})-N(r_2+\varphi_0)(v_{2i}+\varphi_{1i})(v_{2jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})=$$
$$\frac{1}{2}((N(r_1+\varphi_0)+(N(r_2+\varphi_0))[(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})-(v_{2i}+\varphi_{1i})(v_{2jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})]$$
$$+\frac{1}{2}(N(r_1+\varphi_0)-N(r_2+\varphi_0))[(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})+$$
$$(v_{2i}+\varphi_{1i})(v_{2jx_ix_j}+\varphi_{1jx_ix_j})]=J_{11}+J_{12}, \quad (2.183)$$

Далее, первое слагаемое записывается в виде

$$J_{11}=\frac{1}{4}(N(r_1+\varphi_0)+N(r_2+\varphi_0))[(v_{1i}+v_{2i}+2\varphi_{1i})(v_{1jx_ix_j}-v_{2jx_ix_j})+$$
$$(v_{1i}-v_{2i})(v_{1jx_ix_j}+v_{2jx_ix_j}+2\varphi_{1jx_ix_j})]. \quad (2.184)$$

В связи с (2.172), (2.175), имеем неравенства

$$\|(v_{1i}+v_{2i}+2\varphi_{1i}\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le\gamma^{\beta_0}c_1(\|\vec{v}_1\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}+\|\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)})+$$
$$2\|\vec{\varphi}_1-\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)}+2\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}\le\gamma^{\beta_0}c_2(M_1)+2\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)},\ \beta_0>0, \quad (2.185)$$

$$\|(v_{1i}-v_{2i}\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le\gamma^{\beta_0}c_1\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}. \quad (2.186)$$

Из этих неравенств следует, что

$$\|J_{11}\|_{L_p(Q^\gamma)}\le(c_3\gamma^{\beta_0}+q_1M_0\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)})\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}, \quad (2.187)$$

где постоянная q_1 не зависит от данных задачи. Имеем неравенство

$$\|N(r_1+\varphi_0)-N(r_2+\varphi_0)\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le\|r_1-r_2\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le c_4\gamma^{\beta_0}\|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \quad (2.188)$$

В этом случае слагаемое J_{12} можно оценить следующим образом:

$$\|J_{12}\|_{L_p(Q^\gamma)}\le c_4\gamma^{\beta_0}\|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}. \quad (2.189)$$

Запишем второе слагаемое в (2.182) следующим образом:

$$J_2=(N(r_1+\varphi_0))_{x_j}(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i})-(N(r_2+\varphi_0))_{x_j}(v_{2i}+\varphi_{2i})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i})=$$
$$\frac{1}{2}((N(r_1+\varphi_0))_{x_j}-(N(r_2+\varphi_0))_{x_j})[(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i})+(v_{2i}+\varphi_{2i})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i})]+$$
$$\frac{1}{2}((N(r_1+\varphi_0))_{x_j}+N(r_2+\varphi_0))_{x_j})[(v_{1i}+\varphi_{1i})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i})-$$
$$(v_{2i}+\varphi_{2i})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i})]=J_{21}+J_{22}. \quad (2.190)$$

Далее, имеем

$$J_{22} = \frac{1}{4}((N(r_1+\varphi_0))_{x_j} + (N(r_1+\varphi_0))_{x_j})[(v_{1i}-v_{2i})(v_{1jx_i}+v_{2jx_i}+2\varphi_{1jx_i}) \\ + (v_{1i}+v_{2i}+2\varphi_{1i})(v_{1jx_i}-v_{2jx_i})] \quad (2.191)$$

Далее, принимая во внимание неравенства (2.167), (2.175), (2.176) и определения, приходим к выводу

$$\|J_{22}\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_5\gamma^\beta \|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)},\ \beta>0, \quad (2.192)$$

где постоянная c_5 зависит от M_1 и не зависит от γ. Принимая во внимание (2.175), (2.176) приходим к выводу, что

$$\|((N(r_1+\varphi_0))_{x_j} - N(r_1+\varphi_0))_{x_j})\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \leq c\gamma^\beta \|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}. \quad (2.193)$$

В этом случае слагаемое J_{21} оценивается следующим образом:

$$\|J_{21}\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_6\gamma^\beta \|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}. \quad (2.194)$$

Равенства (2.192), (2.194) обеспечивают оценку

$$\|J_2\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_7\gamma^\beta (\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}), \quad (2.195)$$

где β - положительная постоянная. Последнее слагаемое в (2.182) записывается как:

$$J_3 = N(r_1+\varphi_0)(v_{1ix_j}+\varphi_{1ix_j})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i}) - N(r_2+\varphi_0)(v_{2ix_j}+\varphi_{1ix_j})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i}) = \\ \frac{1}{2}(N(r_1+\varphi_0)-N(r_2+\varphi_0))[(v_{1ix_j}+\varphi_{1ix_j})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i}) + (v_{2ix_j}+\varphi_{2ix_j})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i})] \\ + \frac{1}{2}(N(r_1+\varphi_0)+N(r_2+\varphi_0))[(v_{1ix_j}+\varphi_{1ix_j})(v_{1jx_i}+\varphi_{1jx_i}) - \\ (v_{2ix_j}+\varphi_{2ix_j})(v_{2jx_i}+\varphi_{2jx_i})] = J_{31}+J_{32}. \quad (2.196)$$

Для оценки функции J_3 используем те же рассуждения, что и при оценке для J_2. Поэтому можем сказать, что

$$\|J_3\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_8\gamma^\beta (\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}), \quad (2.197)$$

Наконец, неравенство (2.181) и приведенные выше оценки (2.184), (2.189), (2.195), (2.197) гарантируют оценку

$$\|J_1\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq (c_9\gamma^\beta + q_1 M_0 \|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)})(\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}), \quad (2.198)$$

где постоянная c_9 не зависит от γ. На самом деле мы оценили одно слагаемое в выражении $R_0(r_1, \vec{v}_1) - R_0(r_2, \vec{v}_2)$. Два оставшихся слагаемых выглядят следующим образом:

$$J_4 = div\,((N(r_1+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r_1) - div\,((N(r_2+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r_2),$$
$$J_5 = div\,((N(r_1+\varphi_0) - N(r_2+\varphi_0))\nabla \varphi_0).$$

Их оценки совпадают с приведенными выше. В частности,

$$J_4 = div\,((N(r_1+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r_1) - div\,((N(r_2+\varphi_0) - N(h_0))\nabla r_2) =$$
$$\frac{1}{2}div\,((N(r_1+\varphi_0) + N(r_2+\varphi_0) - 2N(h_0))(\nabla r_1 - \nabla r_2))+$$
$$\frac{1}{2}div\,((N(r_1+\varphi_0) - N(r_2+\varphi_0))(\nabla r_1 + \nabla r_2)) \quad (2.199)$$

и, принимая во внимание (2.172), (2.175)

$$\|N(r_1+\varphi_0) + N(r_2+\varphi_0) - 2N(h_0)\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c\gamma^{\beta_0}, \quad (2.200)$$

$$\|N(r_1+\varphi_0) - N(r_2+\varphi_0)\|_{L_\infty(Q^\gamma)} \le c\gamma^{\beta_0}\|r_1 - r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}. \quad (2.201)$$

Из этих неравенств и (2.167) следует, что

$$\|J_4\|_{L_p(Q^\gamma)} \le c_{11}\gamma^\beta(\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|r_1 - r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}), \quad (2.202)$$

Аналогично

$$\|J_5\|_{L_p(Q^\gamma)} \le c_{12}\gamma^\beta(\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} + \|r_1 - r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}). \quad (2.203)$$

Наконец, из неравенств (2.198), (2.202), (2.203) следует, что

$$\|R_0(r_1, \vec{v}_1) - R_0(r_2, \vec{v}_2)\|_{L_p(Q^\gamma)} \le (c_{12}\gamma^\beta + q_2 M_0\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)})\|(r_1 - r_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2)\|_{H_\gamma}, \quad (2.204)$$

где q_2 - постоянная, не зависящая от h_0, $\vec{u}_0$, γ, и M_1, c_{12} постоянная величина, не зависящая от γ и β – некоторая положительная постоянная. Оценим разницу $J = R(r_1, \vec{v}_1) - R(r_2, \vec{v}_2)$. Оцениваем только первое слагаемое. Остальные слагаемые оцениваются по аналогии. Итак, возьмем слагаемое

$$I_1 = \frac{1}{N(r_1+\varphi_0)}(r_{1t} + \varphi_{0t})(\vec{v}_1 + \vec{\varphi}_1) - \frac{1}{N(r_2+\varphi_0)}(r_{2t} + \varphi_{0t})(\vec{v}_2 + \vec{\varphi}_1) =$$
$$\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{N(r_1+\varphi_0)} + \frac{1}{N(r_2+\varphi_0)}\Big)[(r_{1t} - r_{2t}))(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{\varphi}_1) + (r_{1t} + r_{2t} + 2\varphi_{0t})(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)] +$$
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{N(r_1+\varphi_0)} - \frac{1}{N(r_2+\varphi_0)}\Big)[(r_{1t} + \varphi_{0t})(\vec{v}_1 + \vec{\varphi}_1) + (r_{2t} + \varphi_{0t})(\vec{v}_2 + \vec{\varphi}_1)] = I_{11} + I_{12}.$$

Имеем (см. (2.172)) неравенство

$$\|\vec{\varphi}_1-\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le c_1\gamma^{\beta_1}\|\vec{\varphi}_{1t}\|^{\theta}_{L_p(Q^\gamma)}\|\vec{\varphi}_1-\vec{u}_0\|^{1-\theta}_{L_\infty(0,\gamma;W_p^{2-2/p}(G))}\le c_2\gamma^{\beta_1},\ \beta_1>0.$$

Используя эту оценку и (2.176), получаем

$$\|\frac{1}{4}\|I_{11}\|_{L_\infty(Q^\gamma)}\le (c_1\gamma^{\beta_0}(\|\vec{v}_1\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}+\|\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)})+\frac{1}{m_0}\|\vec{\varphi}_1-\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)}+$$
$$\frac{1}{m_0}\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)})\|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}\le (c(M_1)\gamma^{\beta}+\frac{1}{m_0}\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)})\|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}, \tag{2.205}$$

где $\beta=min(\beta_0,\beta_1)$. Оценка для слагаемого I_{12} проще. Таким образом, мы показали, что

$$\|I_1\|_{L_p(Q^\gamma)}\le (c\gamma^{\beta}+\frac{q_2}{m_0})\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(Q^\gamma)})(\|r_1-r_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}+\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)}). \tag{2.206}$$

Оценки остальных слагаемых в выражении $R(r_1,\vec{v}_1)-R(r_2,\vec{v}_2)$ используют ту же идею, и мы их опускаем. Суммируя рассуждения, можем заключить, что имеет место оценка:

$$\|A(r_1,\vec{v}_1)-A(r_2,\vec{v}_2)\|_{H_\gamma}\le [c\gamma^{\beta}+q_3[\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}(M_0+\frac{M_0}{m_0}+\frac{1}{m_0})+$$
$$\frac{M_0}{m_0}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)}]]\|(r_1-r_2,\vec{v}_1-\vec{v}_2)\|_{H_\gamma}, \tag{2.207}$$

где постоянная q_3 не зависит от $h_0,\vec{u}_0,M_1,\gamma$ а постоянная c зависит от норм данных (в частности, от параметра M_1). Поэтому при выборе параметра q_0 (предполагаем, что $\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)}(M_0+\frac{M_0}{m_0}+\frac{1}{m_0})+\frac{M_0}{m_0}\|\vec{u}_0\|^2_{L_\infty(G)}\le q_0$) так что $q_3q_0\le 1/4$ и γ_0 так что $c\gamma^{\beta}\le 1/4$ для $\gamma\le\gamma_0$ мы убеждаемся, что оператор A является сжимающим и переводит шар $B_{M_1,\gamma}$ в себя. Принцип сжимающих отображений гарантирует, что существует единственное (в шаре $B_{M_1,\gamma}$) решение $(r,\vec{v})\in H_\gamma$. Далее отметим, что функция $h(t,x)=r(t,x)+\varphi_0$ непрерывна и $h(0,x)=h_0(x)\in[m_0,M_0]$. Таким образом, существует постоянная $\gamma_1\le\gamma_0$ такая, что $N(h)=h$ для $t\in[0,\gamma_1]$. В этом случае система (2.154) превращается в систему (2.5). Доказательство единственности основано на идее, приведенной в доказательстве единственности решений в теореме 2.5 и мы его опустим.

2.5 Некоторые оценки регулярных решений начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды при $t \in (0, \infty)$.

Рассмотрим вопросы получения априорных оценок, которые в некоторой степени характеризуют поведение решения начально-краевой задачи при $t \to \infty$ для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды при условии, что функция $h > 0$. Мы предполагаем, что решение $(\vec{u}, h)$ задачи (2.5), (2.6) существует глобально по времени и является регулярным, т.е. $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^T)$ при каждом $T > 0$.

Теорема 2.7. *Пусть данные задачи $\vec{u}_0, h_0$ удовлетворяют условиям теоремы 2.6, решение задачи* (2.5), (2.6) *существует глобально по времени и является регулярным, т.е. $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^T)$ при каждом $T > 0$. Если $h \geq 0$ в $Q = (0, \infty) \times G$, то справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g\, h^2}{2}\right) dx + \frac{1}{\tau} \int_G h|\vec{w}|^2\, dx + \int_G \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}^2 h\, dx = 0, t \in (0, \infty),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{1x_j} + u_{jx_i})$$

и, соответственно, оценка

$$max_{t>0} \int_G |\vec{u}|^2 h + g\, h^2\, dx \leq \int_G |\vec{u_0}|^2 h_0 + g\, h_0^2\, dx = M.$$

Если найдутся постоянные $m_0 < M_0$ такие что $M_0 \geq h(t, x) \geq m_0 > 0$ п.в., то справедливы оценки

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0,\infty;W_2^1(G))} + \|g\nabla h + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M),$$

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} + \|h\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} \leq C_2(M), \tag{2.208}$$

$$\|(\vec{u}, \nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq C_3(M), \quad p_0 \in [1, 2),\ q_0 = 2p_0/(3p_0 - 2),$$

$$\|\nabla h\|_{L_2(0,\infty;L_1(G))} \leq C_4(M),$$

где постоянные C_i зависят только от величины M, меры Лебега $\mu(G)$ области G, τ и норм начальных данных.

Доказательство. Умножим уравнения в (2.5) на h, $\vec{u}$, соответственно и интегрируем результат по G. Из первого уравнения системы (2.5) имеем:

$$(gh_t, h) - (h\vec{u}, \nabla h)g + g(h\vec{w}, \nabla h) = 0. \qquad (2.209)$$

Далее

$$(h\vec{u}_t, \vec{u}) + (\frac{h_t\vec{u}}{2}, \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2} h\,dx. \qquad (2.210)$$

Тогда из второго уравнения системы вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2} hdx - (h(\vec{w}-\vec{u}), \frac{\nabla|\vec{u}|^2}{2})$$
$$+ (h(\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{w}) + g(\vec{u}, \frac{\nabla h^2}{2}) - (h(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}) + \int_G \sum \sigma_{ij}^2 h\,dx = 0. \qquad (2.211)$$

Отметим, что

$$(h(\vec{w}-\vec{u}), \frac{\nabla|\vec{u}|^2}{2}) = -(h(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}), \qquad (2.212)$$

тогда (2.211) перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{|\vec{u}|^2}{2} h\,dx + (h(\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{w}) + g(\vec{u}, \frac{\nabla h^2}{2}) + \int_G \sum \sigma_{ij}^2 hdx = 0. \qquad (2.213)$$

Складывая (2.213) с (2.209), умноженным на g, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g\,h^2}{2})dx + (h(\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{w}) + g(\vec{u}, \frac{\nabla h^2}{2}) - (h\vec{u},\nabla h)g + (h\vec{w},\nabla h)g$$
$$+ \int_G \sum \sigma_{ij}^2 h\,dx. \qquad (2.214)$$

Таким образом, имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g\,h^2}{2})\,dx + \frac{1}{\tau}\int_G h|\vec{w}|^2\,dx + \int_G \sum \sigma_{ij}^2 h\,dx = 0. \qquad (2.215)$$

Если найдутся постоянные $m_0 < M_0$ такие что $M_0 \geq h(t,x) \geq m_0 > 0$ п.в., то используя предложение 1.2 §1.1.3 в [120] получим неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G (\frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g\,h^2}{2})dx + \int_G (\frac{h}{\tau}|\vec{w}|^2 + m_0 c_0(|\nabla\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2))\nu dx \leq 0. \qquad (2.216)$$

Интегрируя это неравенство по t получим оценки

$$max_t \int_G |\vec{u}|^2 h + g\,h^2\,dx + \int_Q (\frac{h}{\tau}|\vec{w}|^2 + m_0 c_0(|\nabla\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2)dxdt \leq$$
$$2\int_G |\vec{u_0}|^2 h_0 + g\,h_0^2\,dx = M. \qquad (2.217)$$

Как следствие имеем оценки

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0,\infty;W_2^1(G))} + \|g\nabla h + (\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M), \tag{2.218}$$

$$\|\vec{u}\|\_L_\infty(0,\infty;L_2(G)) + \|h\|_{L_\infty(0,\infty;L_2(G))} \leq C_1(M). \tag{2.219}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M,τ. Получим оставшиеся оценки. Имеем, используя неравенство Гельдера, что

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq \|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{L_{p_0 q}(G)}, \tag{2.220}$$

где $q = \frac{2}{2-p_0}$. Считаем, что $p_0 \in [1,2)$. Если $p_0 > 1$, то используем теорему вложения [107]: $W_2^s(G) \subset L_r(G)$, $r = 2p_0/(2-p_0)$ с $s = 2(p_0-1)/p_0$. Необходимое неравенство $s \leq 1$ эквивалентно неравенству $p_0 < 2$. Из (2.220) вытекает оценка

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C_1\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{W_2^s(G)}. \tag{2.221}$$

Последний множитель оцениваем, используя интерполяционное неравенство:

$$\|\vec{u}\|_{W_2^s(G)} \leq C\|\vec{u}\|^s_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-s}_{L_2(G)}. \tag{2.222}$$

Из (2.221) получаем оценку:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p_0}(G)} \leq C\|\vec{u}\|^{1+s}_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-s}_{L_2(G)}. \tag{2.223}$$

В случае $p_0 = 1$ имеем неравенство (т.е. теорем вложения не используем)

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_1(G)} \leq C\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(G)} \cdot \|\vec{u}\|_{L_2(G)}, \tag{2.224}$$

Из оценок (2.219), (2.223), (2.224) вытекает неравенство

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq {}_2\Big(\int_0^\infty \|\vec{u}\|^{q_0(1+s)}_{W_2^1(G)}\,dt\Big)^{1/q_0} \tag{2.225}$$

где выбираем $q_0(1+s) = 2$, т.е. $q_0 = 2p_0/(3p_0-2)$, $p_0 \in [1,2)$. Таким образом, имеем

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q_0}(0,\infty;L_{p_0}(G))} \leq C_3(M), \quad p_0 \in [1,2),\ q_0 = 2p_0/(3p_0-2). \tag{2.226}$$

Далее используем оценку (2.218). Имеем неравенство

$$\|w\|_{L_2(G)} \geq (\mu(G))^{1/2}\|w\|_{L_1(G)} \geq c_0\|\nabla h\|_{L_1(G)} - c_1\|(u,\nabla)u\|_{L_1(G)},$$

где использовали неравенство треугольника и неравенство Гельдера, c_i - положительные постоянные. Отсюда получим неравенство

$$\|\nabla h\|_{L_1(G)} \leq c_2\|w\|_{L_2(G)} + c_3\|(u,\nabla)u\|_{L_1(G)},$$

которое влечет неравенство (см. (2.226), (2.218))

$$\|\nabla h\|_{L_2(0,\infty;L_1(G))} \leq c_2\|w\|_{L_2(0,\infty;L_2(G))} + c_3\|(u,\nabla)u\|_{L_2(0,\infty;L_1(G))} \leq C_3(M). \quad (2.227)$$

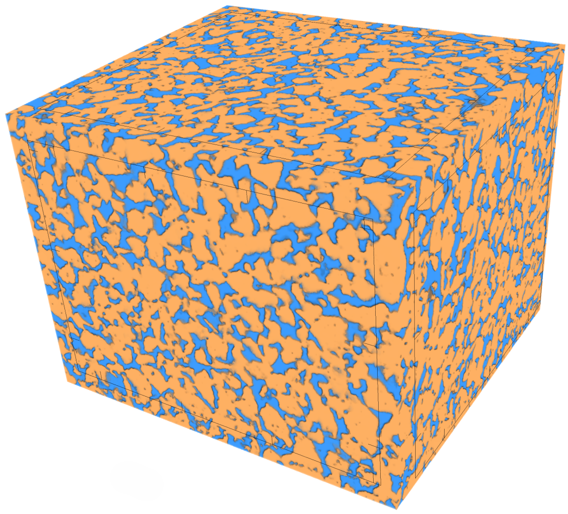
ПРИЛОЖЕНИЕ

В последние годы в целях обеспечения высокого уровня добычи углеводородов отечественной нефтегазовой отраслью особое внимание уделяется решению двух наиболее актуальных задач - это повышение эффективности технологий извлечения нетрадиционного сырья, в частности, трудноизвлекаемых запасов (ТрИЗ) нефти и газа, и увеличение нефте-, газоотдачи пластов на зрелых, в значительной мере выработанных классических месторождениях [121]. При этом физическая труднодоступность месторождений, высокая стоимость и сложность получения в достаточных количествах проб пластовых флюидов и кернового материала горных пород, специфика обработки последнего для дальнейшего хранения или изучения, невозможность проведения множественных практических экспериментов на одном образце и воссоздания полного спектра пластовых условий препятствуют решению указанных задач. Для их успешного разрешения необходимо внедрение новых технологий исследования пластовых систем нефтяных и газовых месторождений. Одним из доступных в настоящее время подходов, который может обеспечить приемлемое для нужд практики решение обозначенных проблем в рамках существующих экспериментальных методик, является использование новых средств математического моделирования течений в геометрии порового пространства пород-коллекторов нефти и газа, основанных на неклассических уравнениях математической физики [122, 123]. В качестве таких моделей все большую популярность приобретают численные алгоритмы, основанные на квазигидродинамических системах уравнений, являющиеся модификацией системы уравнений Навье-Стокса [124–126]. Модификация заключается в добавлении в классические уравнения малых физически обоснованных слагаемых диссипативного характера, пропорциональных некоторому малому вещественному параметру τ, имеющий размерность времени. Эти слагаемые, с одной стороны, позволяют использовать для расчета логически простые устойчивые разностные схемы, а с другой - показывают хорошее совпадение получаемых с их помощью результатов с экспериментальными данными для течений в микроканалах и вблизи шара [2, 80, 91, 127].

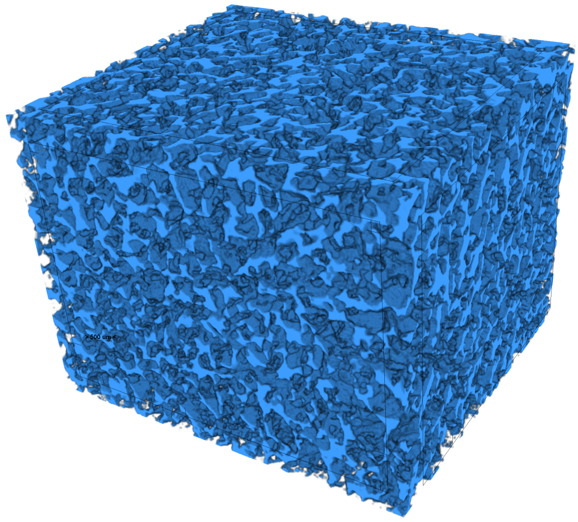
Одной из бурно развивающихся в последнее десятилетие технологий, позволяющая сократить количество лабораторных экспериментов и сроки исследований, получать более достоверную физическую информацию о многофазных потоках на поровом уровне для определения причин низкой нефтеотдачи, а также воссоздавать в вычислительном эксперименте полный спектр пластовых условий, является совокупность подходов, основанные на так называемой технологии «цифровой керн» (digital rock physics), суть которой заключается в прямом численном моделировании течений в масштабе порового пространства нефтегазовых коллекторов с разрешением структуры этого пространства и динамики межфазных границ [128, 129].

Для моделирования таких течений наиболее распространенным способом построения геометрии пористой среды служит его воксельное представление. Фактически, геометрия области задаётся трёхмерным массивом, каждый элемент которого имеет значение «1» или «0», при этом области течения соответствует значение «0», а непроницаемой матрице породы-коллектора значение «1». Иными словами, область течения задаётся в виде трехмерного изображения в градациях серого, где самый темный цвет соответствует матрице породы, а самый светлый - поровому пространству. Для построения геометрических моделей таких пористых сред используют метод рентгеновской компьютерной микротомографии, основанный на высокоразрешающей визуализации внутренней структуры объекта с помощью реконструкции его трехмерного представления в виде изображений в градациях серого из набора двумерных проекций, собранных под разными углами вращения [130]. На основе результатов микротомографии реконструируют трехмерное (воксельное) изображение исследуемого объекта (рис. 1).

Отметим, что детальная визуализация морфологии порового пространства в проницаемых средах и определение с высокой степенью достоверности фильтрационно-емкостных свойств низкопроницаемых пород-коллекторов предъявляют высокие требования к пространственному разрешению томографической съемке применительно к микроуровню: анализ сегментированного трехмерного изображения в градациях серого с высоким разрешением 1,0 мкм/воксель показывает неполный учет пористости на изображении в градациях серого. Это обусловлено тем, что при съемке в данных условиях может



а) синий цвет соответствует поровому пространству, оранжевый - матрице породы



б) поровое пространство, для наглядности порода не представлена

Рисунок 1 — Воксельное представление образца породы-коллектора.

учитываться только поры с размером более 1,5-2,0 мкм. Поры, размером около 1,0-2,0 мкм будут микронными, а менее 1,0 мкм - субмикронными при данном размере вокселя. Ограниченная разрешающая способность микротомографов нередко приводит к снижению точности реконструкции геометрии пористой структуры, что особенно актуально при анализе течений в поровом пространстве низкопроницаемых пород-коллекторов. Однако микронное и субмикронное поровое пространство пород-коллекторов, обладающих газопроницаемой структурой, поддаётся детектированию посредством микротомографии с использованием рентгеноконтрастного агента ксенона [131]. Ксенон является бесцветным инертным и высокоподвижным газом, его рентгеноконтрастные свойства обусловлены высоким сечением фотопоглощения в области энергии фотонов, превышающее аналогичный показатель для большинства газов. После просвечивания рентгеновскими лучами образца породы-коллектора, насыщенного ксеноном, на изображении в градациях серого наблюдается усиление контрастности вокселей с микронной и субмикронной пористостью, которые при съемке в нормальных условиях, в среде воздуха, не могут быть обнаружены, это позволяет проводить их классификацию с помощью алгоритмов сегментации и учесть при численном моделировании течений в поровом пространстве пород-коллекторов нефти и газа.

Рассмотрим полученные другими авторами результаты численного моделирования течений в геометрии порового пространства пород-коллекторов с использованием квазигидродинамических систем уравнений.

В работе [90] для описания изотермической двухфазной двухкомпонентной жидкости с учетом поверхностных эффектов в породах-коллекторах авторами используется квазигидродинамическая регуляризация модели Навье–Стокса–Кана–Хилларда:

$$\partial_t\rho_\alpha + div(\rho_\alpha u^m) = -div\, b_\alpha,\ \ w = \rho^{-1}\tau(\rho(u\cdot\nabla)u + \nabla p - div\Pi^\lambda - \rho\nabla\Phi),\ \ \alpha = 1,2;$$
$$\partial(\rho u) + div(\rho u^m \otimes u) + \nabla p = div\Pi + div\Pi^\lambda + \rho\nabla\Phi, \quad (2.228)$$

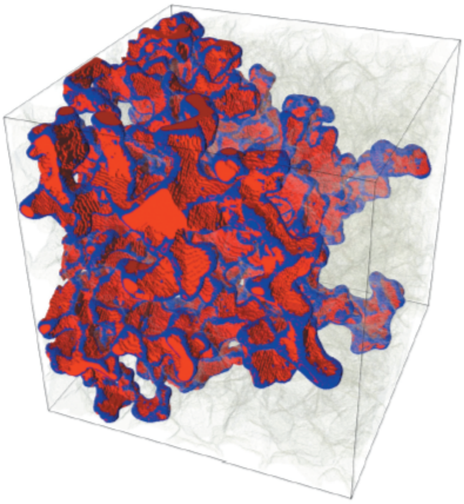
где $\rho_\alpha(x,t) > 0$ плотность компонента жидкости с номером $\alpha, \rho(x,t)$ - полная плотность жидкости, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $u(x,t)$ - скорость жидкости, w - регуляризующая скорость жидкости (связана с квазигидродинамической регуляризацией), $u^m = u - w$, $\Phi(x)$ - потенциал, описывающий массовую силу.

Модель (2.228) содержит в уравнениях системы специальные диссипативные слагаемые, пропорциональные малому параметру времени. Для моделей без учёта поверхностных эффектов этот подход представлен в монографии [91]. Наличие диссипативных слагаемых позволяет использовать для численной аппроксимации уравнений модели сравнительно простые и устойчивые симметричные по пространству разностные схемы.

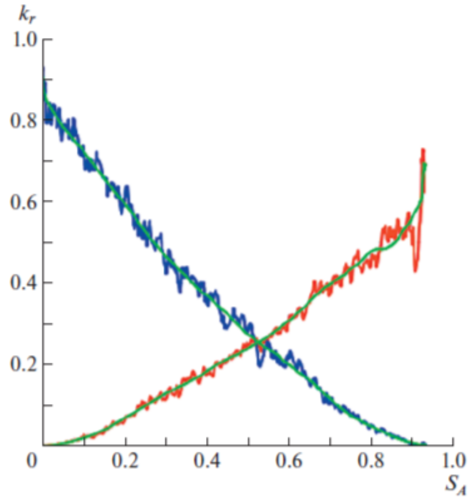
На рис. 2 представлены результаты, полученные авторами [90] при численном моделировании двухфазного течения в микроканалах пористой среды образца породы-коллектора с использованием модели на основе квазигидродинамической системы уравнений (2.228).

Для указанного образца получены распределение водной фазы при моделировании дренажного вытеснения в поровом пространстве (а) (для наглядности нефтяная фаза не показана, порода-коллектор выделена полупрозрачным серым цветом) и кривые относительной фазовой проницаемости (б) (красная и синяя кривые соответствуют нефтяной и водной фазе соответственно, а зелёные – сглаженным значениям проницаемостей).

Известны результаты численного моделирования двухфазных течений в образцах пород-коллекторов, полученные на основе квазигидродинамической системы уравнений, описывающая движение изотермической вязкой двухфазной



а) Двухфазное вытеснение флюида в образце породы-коллектора



б) Кривые относительных фазовых проницаемостей

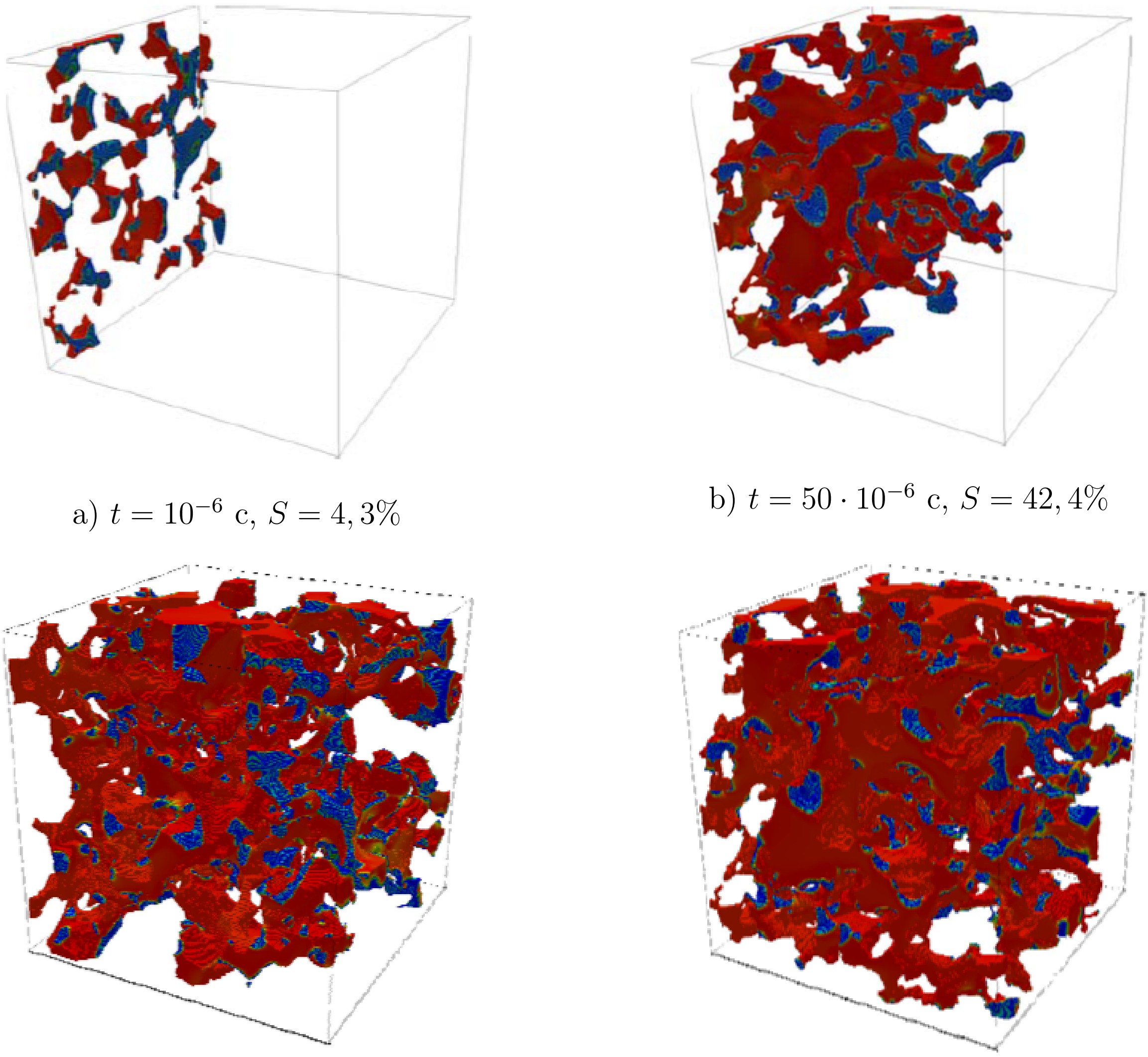
Рисунок 2 — Моделирование в образце породы-коллектора [90].

двухкомпонентной жидкости без учета внешних сил и включающая в себя уравнения баланса массы, импульса и массы компонента [106]:

$$\partial_t \rho + div\, j_m = 0,\ \ \partial_t(\rho u) + div(j_m \otimes u) + \nabla p = div\Pi,$$
$$\partial_t(\rho C) + div(j_m C) = div(M\nabla\mu).$$

В численных экспериментах по моделированию двухфазного течения в образце породы-коллектора через одну из граней в образец «втекала» вытесняющая жидкость (фаза) со скоростью $\vec{u}$, а через противоположную грань «вытекала» смесь вытесняющей и вытесняемой фаз. На остальных гранях расчетной области, а также на границах порового пространства фиксировались условия, соответствующие твердой стенке. Угол смачивания задавался нейтральным ($\theta = 90^o$). На рис. 3 представлены последовательные моменты вытеснения для случая $\vec{u}$ = 10 м/с, где S - насыщенность (объемной доли) образца вытесняющей жидкостью. Для наглядности представлена только вытесняющая фаза.

При моделировании течения вязкого теплопроводного сжимаемого газа в образцах пород-коллекторов авторами работы [132] использовалась квазигидродинамическая система уравнений следующего вида [2]:



a) $t = 10^{-6}$ с, $S = 4,3\%$ b) $t = 50 \cdot 10^{-6}$ с, $S = 42,4\%$

c) $t = 100 \cdot 10^{-6}$ с, $S = 73,7\%$ d) $t = 200 \cdot 10^{-6}$ с, $S = 82\%$

Рисунок 3 — Этапы вытеснения в образце породы-коллектора для случая $\vec{u} = 10$ м/с [106].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot\ j_m = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (j_m \otimes u) + \nabla p = \nabla \cdot \Pi,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\frac{u^2}{2} + \epsilon)] + \nabla \cdot [j_m(\frac{u^2}{2} + \epsilon + \frac{p}{\rho})] + \nabla \cdot q = \nabla \cdot (\Pi \cdot u). \quad (2.229)$$

В таблице 1 представлены полученные другими авторами [132] в результате численных расчетов коэффициенты проницаемости k^{qh} микрообразцов пород-коллекторов с использованием квазигидродинамической модели (2.229). Значения h^{plb} коэффициента проницаемости получены на основе метода решеточных уравнений Больцмана и значения k^{ic} из [133]. Все значения приведены в мДарси. Также, в таблице 1 представлены $\Delta^{ic,plb}$ относительные - отклонения значений

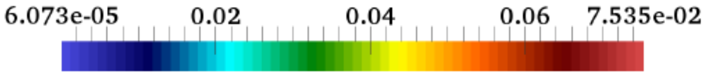
$k^{ic,plb}$ от значения k^{qh}. В названии микрообразцов представлена информация о значениях размерности цифрового образца (число ячеек), коэффициента пористости и пространственного разрешения соответственно. По мнению авторов, наблюдается хорошее совпадение представленных в данной работе результатов с опубликованными и полученными другим методом [134].

Таблица 1 — Результаты расчетов коэффициентов проницаемости [132]

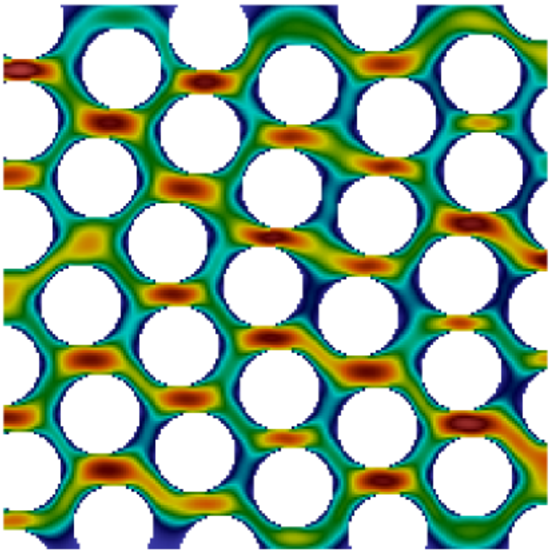
Образец	**Направление**	k^{qh}	h^{plb}	k^{ic}	k^{plb}	k^{ic}
sandstone_9 (300^3 / 22,2 % / 3,398 мкм)	x	3441	3413	2735	0,8 %	26 %
	y	2803	2784	2093	0,7 %	34 %
	z	2563	2533	1844	1,0 %	39 %
sandstone_5 (300^3 / 21,1 % / 3,997 мкм)	x	6330	6342	4638	0,2 %	36 %
	y	6590	6602	4784	0,2 %	35 %
	z	6556	6579	4440	0,4 %	47 %
sandstone_1 (400^3 / 23,3 % / 2,85 мкм)	x	1139	1155	785	1,4 %	45 %
	y	2107	2135	1469	1,3 %	43 %
	z	1363	1380	1053	1,2 %	29 %

Известны результаты численного решения задачи определения значения коэффициента проницаемости k образцов модельных пористых сред с учетом эффекта Клинкенберга [135]. В качестве течения рассматривался газ гелия. Исследуемая пористая среда состояла из параллельных цилиндров круглого сечения диаметра $D = 2,9 \cdot 10^{-6}$ м, оси которых перпендикулярны плоскости xOy. Высота и длина всех исследуемых образцов составляла $L_y = L_x = 20 \cdot 10^{-6}$ м, соответственно, а на каждое направление приходилось по 200 ячеек. Таким образом, шаг по пространству $h = L_y/200 = 10^{-7}$ м. Все параметры течения не зависели от координаты z. Результаты численного моделирования представлены на рис. 4.

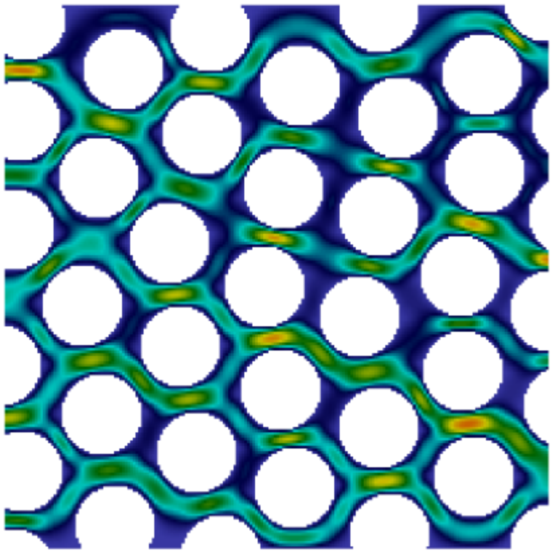
Рассмотрим задачу эволюции кубической капли. Для качественной проверки эффекта поверхностного натяжения в трехмерном случае в работе [136] были получены результаты численного моделирования задачи эволюции кубической капли с применением квазигидродинамической системы уравнений. На рис. 5 серым цветом обозначена изоповерхность капли. Величина параметра регуляризации $\tau = 10^{-5}$ с, шаг по времени $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-5}$ с. Процесс формирова-



а) Соответствие цвета значению модуля скорости.



б) С учетом проскальзывания.

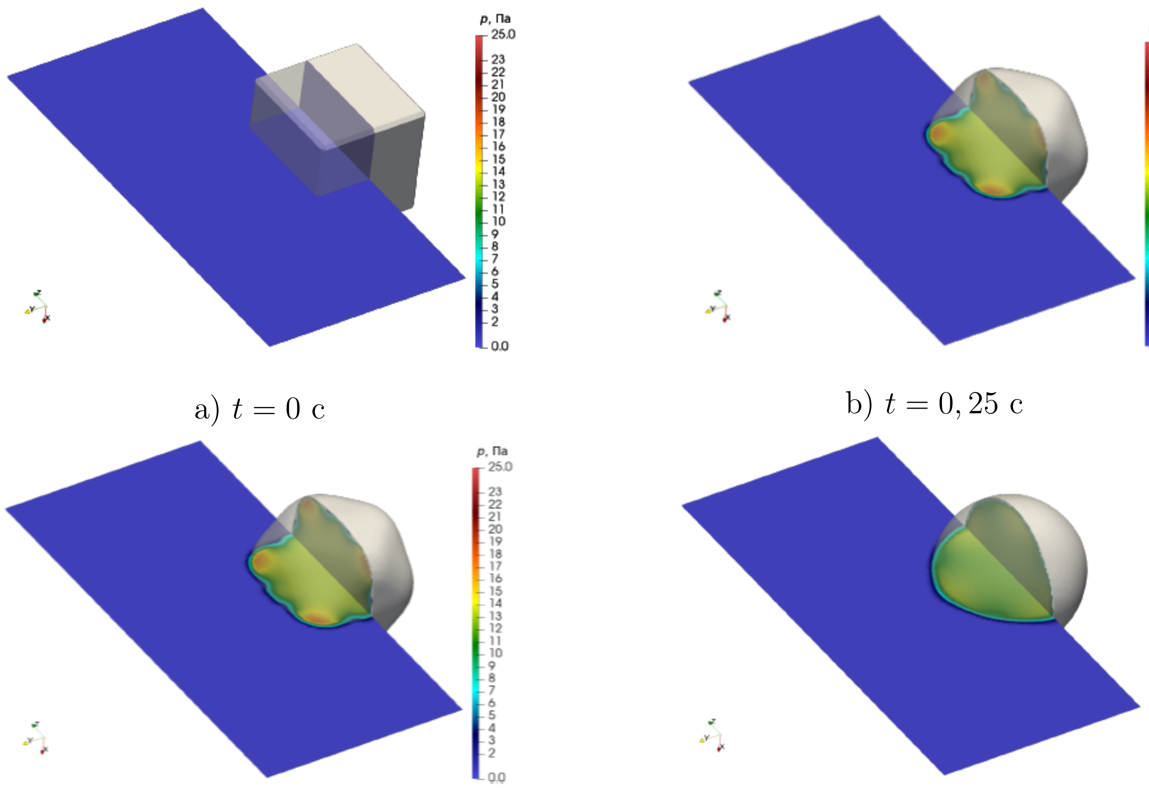


в) Без учета проскальзывания.

Рисунок 4 — Поля модуля скорости, полученные в расчетах течения гелия при $\Delta p = 100$ Па и $p' = 5 \cdot 10^4$ Па с учетом проскальзывания (б) и без (в) [135].

ния сферической капли сопровождался колебаниями. По мнению авторов [136] эволюция капли соответствует ожидаемым результатам. Результаты вычислений эволюции капли квадратной формы, а также процесса объединения двух капель, находящихся на достаточно малом расстоянии друг от друга, содержатся в [137]. Показано, что используемая квазигидродинамическая система уравнений качественно верно описывает эффекты, связанные с поверхностным натяжением и разделением фаз.

Таким образом, экспериментальные и расчётные данные, представленные в работах других авторов, демонстрируют корректность численных алгоритмов, базирующиеся на квазигидродинамических уравнениях. Эти алгоритмы успешно применяются для решения задач моделирования фильтрационных течений в поровом пространстве пород-коллекторов с использованием воксельной геометрии расчетной области.



a) $t = 0$ с

b) $t = 0,25$ с

c) $t = 0,5$ с

d) $t = 0,75$ с

Рисунок 5 — Распределение давления задачи эволюции кубической капли для различных моментов времени [136].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были исследованы вопросы обобщенной и регулярной разрешимости в пространствах Соболева краевых задач для квазигидродинамических систем уравнений в случае слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также для квазигидродинамической системы уравнений в приближениях мелкой воды и Обербека-Буссинеска, изучены качественные свойства этих решений.

Основные результаты можно описать следующим образом.

1. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для исходной нелинейной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости, в классах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
3. Исследованы вопросы существования обобщенных решений краевых задач для стационарной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
4. Исследованы вопросы существования обобщенных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска.
5. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае.

Результаты работы развивают теорию корректности нелинейных краевых задач для неклассических систем уравнений гидродинамики при различных упрощающих предположениях, и в общем случае для ряда сред. Результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении краевых задач для математических моделей, описываемых параболическими и эллиптическими уравнениями и системами, в частности, моделей фильтрации, что актуально в так называемой технологии «цифровой керн», применяемой для исследования фильтрационно-емкостных свойств образцов горных пород и особенностей процессов вытеснения на микроуровне. Предложенные подходы конструктивны и могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов или доказательстве сходимости существующих алгоритмов решения краевых задач гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. – Тверь: Тверской государственный университет, 2016. – 222 с.
2. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва-Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 400 с.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. Наука, 1967. – 736 с.
4. Elizarova T.G., Chetverushkin B.N. On a computational algorithm for the calculation of gas-dynamic flows // Soviet Physics. Doklady. – 1984. – Vol. 29. – P. 907-909.
5. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Математическое моделирование: процессы в нелинейных средах. – 1986. – С. 261-278.
6. Elizarova T.G. Quasi–Gas Dynamic Equations. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. – 286 p.
7. Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. – Москва: МГУ, 1999. - 232 с.
8. Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2010. – 124 с.
9. Шеретов Ю.В. Об одной новой математической модели в гидродинамике // В книге «Применение функционального анализа в теории приближений». Тверь: Тверской государственный университет. – 1996. – С. 124-134.
10. Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // В книге «Применение функционального анализа в теории приближений». Тверь: Тверской государственный университет. – 1997. С. – 127-155.
11. Шеретов Ю.В. О построении точных решений стационарной квазигидродинамической системы с помощью подстановки Линя // Вестник ТвГУ.

Серия: Прикладная математика. – 2023. – № 1. – С. 36–48.
12. Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2021. – № 1. – С. 5–20.
13. Chetverushkin B., Chung E., Efendiev Y. [et al.] Computational multiscale methods for quasi-gas dynamic equations // Journal of Computational Physics. – 2021. – Vol. 440. – P. 110352.
14. Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2017. – № 1. – С. 85-94.
15. Шеретов Ю.В. Принцип суперпозиции решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2022. – № 2. – С. 60–73.
16. Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. Заметки. – 2008. – Т. 83, № 5. – С. 667-682.
17. Злотник А.А., Гаврилин В.А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа // Вестник Московского энергетического института. – 2009. – № 6. – С. 116-126.
18. Злотник А.А. Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, № 6. – С. 599-603.
19. Злотник А.А. Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 51–64.
20. Zlotnik A.A., Fedchenko A.S. On properties of aggregated regularized systems of equations for a homogeneous multicomponent gas mixture // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, No. 15. – P. 8906-8927.
21. Zlotnik A.A., Lomonosov T.A. Regularized Equations for Dynamics of the Heterogeneous Binary Mixtures of the Noble-Abel Stiffened-Gases and Their Application // Dokl. Math. – 2023. – Vol. 108. – P. 443–449.
22. Зейтунян Р.Х., Корректность задач динамики жидкостей (гидродинамическая точка зрения) // УМН. – 1999. – Т. 54, № 3 (327). – С. 3–92; Russian

Math. Surveys. – 1999. T. 54, No. 3. – С. 479–564.

23. Shelukhin V.V., Krutko V.V. Trusov K.V. Filtration of highly miscible liquids based on two-scale homogenization of the navier–stokes and cahn–hilliard equations // J Appl Mech Tech Phy. – 2023. – Vol. 64. – P. 499–509.
24. Shilnikov E.V., Khaytaliev I.R. Application of the local discontinuous Galerkin method to the solution of the quasi-gas dynamic equation system // Mat. Model. – 2023. – Vol. 35, No. 8. – P. 51–66.
25. Popov M.V. Piecewise parabolic method on a local stencil in cylindrical coordinates for fluid dynamics simulations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 52, No. 8. – P. 1186-1201.
26. Dorodnicyn L.V. Nonreflecting boundary conditions and numerical simulation of external flows // Comput. Math. and Math. Phys. - 2011. - Vol. 51. - P. 143–159.
27. Феонычев А.М., Похилко В.И., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Елизарова Т.Г. Использование эффекта резонанса и осцилляционных режимов конвекции для идентификации собственных частот жидких объемов // Сборник докладов третьей международной конференции «Идентификация динамических систем и обратные задачи», - 1998. - С. 219-235.
28. Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Klyuchnikova A.V., Sheretov Y.V. Using quasihydrodynamic equations to model thermal convection at low Prandtl numbers // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 1998. - Vol. 38, No. 10. - P. 1732–1742.
29. Elizarova T.G. Time averaging as an approximate method for constructing quasigasdynamic and quasihydrodynamic equations // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2011. - Vol. 51, No. 11. - P. 2096–2105.
30. Kiryushina M.A., Elizarova T.G., Epikhin A.S. Modeling of melt flow using the Czochralski method within the open source OpenFOAM package using a quasihydrodynamic algorithm // Mathematical modeling. - 2023. Vol. 35, No. 8. - P. 79–96.
31. Плохотников С.П., Богомолова О.И., Богомолов В.А., Климова А.С., Белова Е.Н. Сравнительный анализ двумерных и трехмерных численных решений для двухвероятностных законов при двухфазной неизотермической

фильтрации в слоистых пластах // Вестник Казанского технологического университета. - 2015. - Т. 18, № 20. - С. 210-214.
32. Denk R., Seger T. Lp-estimates for a transmission problem of mixed elliptic-parabolic type // Bound Value Probl. - 2014. - Vol. 22.
33. Peszynska M., Showalter R. Multiscale elliptic-parabolic systems for flow and transport // Electronic Journal of Differential Equations. - 2007. - Vol. 147. - p. 1-30.
34. Lass O., Volkwein S. Parameter identification for nonlinear elliptic-parabolic systems with application in lithium-ion battery modeling // Comput Optim Appl. - 2015. - Vol. 62. - P. 217–239.
35. Плохотников С.П., Плохотников Д.С., Климова А.С. К вопросу о математическом осреднении физических коэффициентов системы эллиптических и параболических уравнений // Вестник Технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 20. – С. 222-226.
36. Coclite G.M., Holden H.,Karlsen K.H., Wellposedness for a parabolicelliptic system // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2005. - Vol. 13, No. 3. - P. 59-68.
37. Biler P. Global solutions to some parabolic-elliptic systems of chemotaxis // Adv. Math. Sci. Appl. - 1999. - Vol. 9, No. 1. - P. 347-359.
38. Senba T., Suzuki T. Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology // Adv. Differential Equations. - 2001. - Vol. - 6. - P. 21-50.
39. Winkler M. Renormalized radial large-data solutions to the higher-dimensional Keller–Segel system with singular sensitivity and signal absorption // Journal of Differential Equations. - 2018. - Vol. 264, No. 3. - P. 2310-2350.
40. Friedman A., Fontelos M.A., Hu B. Mathematical analysis of a model for the initiation of angiogenesis // SIAM J. Math. Anal. - 2002. - Vol. 33. - P. 1330-1355.
41. Kubo A., Tello J.I. Mathematical analysis of a model of chemotaxis with competition terms // Differential Integral Equations. - 2016. - Vol. 29, No 5/6. - P. 441-454.
42. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. - 2-е изд. — М.: Мир, 1981. - 408 с.

43. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1977. - 207 с.
44. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости: монография. - Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 2000. - 419 с.
45. Bresch D. Shallow–Water Equations and Related Topics // In Handbookon Differential Equations. Elsevier. - 2009. - Vol. 5. - P. 1–104.
46. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Никитина О.В. Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. - 2011. - № 33. - 36 с.
47. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Использование регуляризованных уравнений Сен–Венана для построения вычислительных алгоритмов решения двумерных нестационарных задач теории мелкой воды // Материалы Третьей российской школы-конференции «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» с международным участием для молодых ученых. Тверь, - 2013. - С. 129–134.
48. Li Y., Pan R., Zhu S. On Classical Solutions to 2D Shallow Water Equations with Degenerate Viscosities // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. - 2017. - Vol. 19, No. 1. - P. 151–190.
49. Lai H.V., Long L.M., Trung M.D. On Uniqueness of a Classical Solution of the System of NonLinear 1-D Saint Venant Equations // Vietnam Journal of Mechanics, NCST of Vietnam. - 1999. - Vol. 21, No. 4. - P. 231–238.
50. Ton B.A. Existence and Uniqueness of a Classical Solution of an Initial Boundary Value Problem of the Theory of Shallow Waters // SIAM Journal on Mathematical Analysis. - 1981. - Vol. 12, No. 2. - P. 229–241.
51. Kloeden P.E. Global Existence of Classical Solutions in the Dissipative Shallow Water Equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. - 1985. Vol. 16, No. 2. - P. 301–315.
52. Azib R., Georgiev S., Kheloufi A., Mebarki K. Existence of Global Classical Solutions for the Saint-Venant Equations // Vladikavkaz Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 24, No. 3. – P. 21-36.
53. Музаев И.Д., Туаева Ж.Д. Два метода решения начально-краевой задачи для системы уравнений Сен-Венана // Владикавк. матем. журн. - 1999. Vol.

1, No. 1. - P. 43–47.
54. Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2014. № 21. - 27 с.
55. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. Algorithm for Numerical Solution of the Optimal Control Problem for the Mathematical Model of Shallow Water Wave Propagation // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – Vol. 9, No. 2. – P. 73-80.
56. Bychkov E.V. Analytical Study of the Mathematical Model of Wave Propagation in Shallow Water by the Galerkin Method // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2021. – Vol. 14, No. 1. – P. 26-38.
57. Ляпидевский В.Ю., Гаврилова К.Н. Дисперсионные эффекты и блокировка потока при обтекании порога // Прикл. мех. техн. физ. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 45–58.
58. Чесноков А.А., Ляпидевский В.Ю. Эволюция горизонтального слоя смешения в мелкой воде // Прикл. мех. техн. физ. – 2019. – Т. 60, № 2. – С. 207–219.
59. Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А., Ермишина В.Е. Квазилинейные уравнения динамики уединенных внутренних волн в многослойной мелкой воде // Прикл. мех. техн. физ. - 2021. - Т. 62, № 4. - С. 34–45.
60. Овсянников Л.В. Модели двухслойной «мелкой воды» // Прикладная механика и техническая физика. – 1979. – Т. 20, № 2(114). – С. 3-14.
61. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Соммер А.Ф., Хакимзянов Г.С. Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 6. – С. 19-41.
62. Темиров Б.К., Тукембаева Г.Ч. Аналитическое решение уравнений мелкой воды методом Роте // Вестник Кыргызского Национального Университета имени Жусупа Баласагына. – 2020. – № 3(103). – С. 134-142.
63. Тешуков В.М., Хе А.К. Модель сильного разрыва для уравнений пространственных длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении со свободной границей // Прикл. мех. техн. физ. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 206–213.

64. Тешуков В.М. Пространственные простые волны на сдвиговом течении // Прикл. мех. техн. физ. – 2002. – Т. 43, № 5. – С. 28–40.
65. Тешуков В.М. Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // Прикл. мех. техн. физ. - 2007. - Т. 48, № 3. - С. 8–15.
66. Тешуков В.М. Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // Прикл. мех. техн. физ. - 1997. Т. 38, № 2. - С. 48–57.
67. Тешуков В.М. Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // Прикл. мех. техн. физ. - 2004. Т. 45, № 2. - С. 28–39.
68. Ball F.K. An exact theory of simple finite shallow water oscillations of a rotating Earth // Pergamon: Proc. of the First Australian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics, 1964. - P. 293–305.
69. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. - 1981. Vol. 107. – P. 499–508.
70. Bi S., Zhou J., Liu Y., Song L. A finite volume method for modeling shallow flows with wet-dry fronts on adaptive cartesian grids // Mathematical Problems in Engineering. – 2014. – Vol. – P. 1–20.
71. Kesserwani G., Liang O. Locally limited and fully conserved RKDG2 shallow water solutions with wetting and drying // J. of Scientific Computing. – 2012. – Vol. 50, No. 1. – P. 120–144.
72. Sielecki A., Wurtele M.G. The numerical integration of the nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries // J. of Computational Physics. – 1970. Vol. 6, No. 2. – P. 219–236.
73. Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1983.
74. Мацкевич Н.А., Чубаров Л.Б. Точные решения уравнений мелкой воды для задачи о колебании жидкости в модельной акватории и их применение в верификации численных алгоритмов // Сиб. журн. вычисл. матем. - 2019. - Т. 22, № 3. - С. 281–299.
75. Остапенко В.В. О разрывных решениях уравнений «мелкой воды» над уступом дна // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 6(256). – С. 62-74.

76. Ostapenko V.V. Dam-break flows at a jump in the width of a rectangular channel // J. Appl. Mech. Tech. Phy. - 2012. Vol. 53. - P. 679–689.
77. Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V. et al. On Increasing the Stability of the Combined Scheme of the Discontinuous Galerkin Method // Math Models Comput Simul. - 2021. Vol. 13. - P. 979–985.
78. Яушев И.К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. - 1967. - № 8, вып. 2. - С. 109–120.
79. Остапенко В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. - 2003. - Т. 44, № 4. - С. 51–63.
80. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений: лекции по математическим моделям и численным методам в газовой динамике – Москва: Науч. мир, 2007. – 351 с.
81. Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания системы «жидкость-твердое тело» с учетом химических реакций // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2021. – № 82. – С. 1-20.
82. Beletskaya A., Ivanov E., Stukan M., Safonov S., Dinariev O. Reactive Flow Modeling at Pore Scale // Paper presented at the SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October, - 2017.
83. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Tsigvintsev I.P. Numerical solution of high-temperature gas dynamics problems on high-performance computing systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 390. – P. 113374.
84. Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 124-135.
85. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. - 2022. - Vol. 271, № 1.
86. Elizarova T.G., Saburin D.S. Application of the regularized shallow water equations for numerical simulation of seiche level oscillations in the Sea of Azov // Math Models Comput Simul. - 2017. - Vol. 9. - P. 423–436.

87. Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. - 2017. - Vol. 32, № 6. - P. 347–358.
88. Berg C.F., Lopez O., Berland H. Industrial applications of digital rock technology // Journal of Petroleum Science and Engineering. - 2017. - Vol. 157. - P. 131–147.
89. Балашов В.А., Савенков Е.Б. Квазигидродинамическая модель для описания течений многофазной жидкости с учётом межфазного взаимодействия // Прикладная механика и техническая физика. - 2018. - № 3. - С. 57–68.
90. Балашов В.А., Савенков Е.Б., Четверушкин Б.Н. Технология «цифровой керн» и суперкомпьютерные вычисления // Вестник Российской академии наук. – 2023. – Т. 93, № 6. – С. 503-511.
91. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. - М.: МАКС Пресс, 2004. - 332 с.
92. Evseev F.A., Pyatkov S.G. On Some Properties of a Linearized Quasi-Hydrodynamical System of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – P. 3266–3276.
93. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. О некоторых свойствах линеаризованной квазигидродинамической системы уравнения // Сборник статей, посвященных 100-летию со дня рождения Киприянова Ивана Александровича, выдающегося подвижника математики. Крупного ученого, специалиста в области сингулярных дифференциальных уравнений и весовых функциональных пространств. – 2023. – С. 108-124.
94. Евсеев Ф.А. Система квазигидродинамических уравнений течения жидкости и ее линеаризованный вид // Бизнес-трансформация: управление улучшениями. – 2023. – № 3. – С. 68-72.
95. Евсеев Ф.А. Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2023»: Тезисы докладов, – 2023. – Т. 2. – С. 43-45.
96. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. О некоторых свойствах линеаризованной квазигидродинамической системы уравнения // X международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии на-

ук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(я), член-корреспондента РАН Филиппова Василия Васильевича: Тезисы докладов, – 2023. – С. 140.

97. Pyatkov S.G., Evseev F.A. Regular Solvability of the First Initial–Boundary Value Problem for the Quasihydrodynamic System of Equations in the Case of a Weakly Compressible Fluid // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 281, No. 6. – P. 909-924.

98. Евсеев Ф.А. Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости // Вестник Югорского государственного университета. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 97-106.

99. Evseev F.A., Pyatkov S.G. Solvability of the First Initial-boundary Value Problem for the Quasihydrodynamics Equations in the Shallow Water Approximation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 9. – P. 4490-4499.

100. Евсеев Ф.А. Регулярная разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнений квазигидродинамики в приближении мелкой воды // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2024»: Тезисы докладов, – 2024. – С. 234-235.

101. Евсеев Ф.А. Регулярная разрешимость первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды // Математические заметки СВФУ. – 2025. – Т. 32, № 1. – С. 111-112.

102. Evseev F.A. Generalized solvability of initial-boundary value problems for quasihydrodynamic system of equations in weighted Sobolev spaces // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2025. – Vol. 17, No. 3. – P. 13-27.

103. Евсеев Ф.А. Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических уравнений в весовых пространствах Соболева // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова, – 2025. – С. 47-48.

104. Евсеев Ф.А. О некоторых квазигидродинамических уравнениях // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, – 2025. – С. 80-85.

105. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска // Математические заметки СВФУ. – 2026. – Т. 33, № 2. – С. 38-53.
106. Балашов В.А., Савенков Е.Б., Четверушкин Б.Н., Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений // Матем. моделирование. - 2019. - Т. 31, № 7. - С. 21–44.
107. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. - Berlin: Deutscher Verlag des Wissenschaften, 1978.
108. Amann H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems. - I. Monographs in Mathematics, v. 89, Basel: Birkhauser Verlag, 1995.
109. Amann H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems. - Volume II: Function Spaces. Springer, 2019. — 476 p.
110. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. - 587 с.
111. Nikolsky S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. - Springer, Berlin, 1975. - 420 p.
112. Denk R., Hieber M., Pruss J. R-boundedness, Fourier multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type // Mem. Amer. Math. Soc. - 2003. - Vol. 166. - 114 p.
113. Denk R., Hieber M., Pruss J. Optimal $L_p - -L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. - 2007. - Vol. 257, No. 1. - P. 193-224.
114. Pruss V. Simonett G. Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations. - Birkhauser Publishing, Basel, - 2016. - 618 p.
115. Pyatkov S.G.,Tsybikov B.N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. - 2011. - Vol. 11, No. 1. - P. 155-186.
116. Lieberman G.M. Second Order Parabolic Differential Equations. - Singapure: World Scientific Publishing, 2005.
117. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. - Москва: Бином. Лаб. знаний, 2005. — 260 с.
118. Amann H. Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems // Israel Journal of Mathematics. - 1983. - Vol. 45, No. 2. - P. 225-

254.
119. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Matematicki. - 2000. - Vol. 35, No. 55. - P. 161–177.
120. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях — Москва: Физматлит, 2010. — 251 с
121. Савенок О.В., Жарикова Н.Х., Верисокин А.Е. [и др.] Повышение эффективности разработки трудноизвлекаемых запасов нефтегазоконденсатного месторождения путём строительства многозабойных горизонтальных скважин // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. – 2023. – № 4. – С. 50-64.
122. Markov S.I., Kutishcheva A.Y., Itkina N.B. Parallel Non-Conforming Finite Element Technique for Mathematical Simulation of Fluid Flow in Multiscale Porous Media // Communications in Computer and Information Science. - 2023. - P. 72-82.
123. Herrera-Hernández E.C., Aguilar-Madera C.G., Espinosa-Paredes G. et al. Modeling single-phase fluid flow in porous media through non-local fractal continuum equation // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — Vol. 174. — P. 876–887.
124. Галкин В.А., Об одном классе точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферическом слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2023. Т. 63, № 6. — С. 1000–1005.
125. Galkin V.A., On the structure of axisymmetric helical solutions to the incompressible Navier–Stokes system // Comput. Math. Math. Phys. — 2024. — Vol. 64, No. 5. — P. 1004–1014.
126. Бетелин В.Б., Галкин В.А., О построении искусственной нейронной сети для решения системы уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2024. — Т. 517. — С. 115–119.
127. Karniadakis G.E., Beskok A., Aluru N. Microflows and nanoflows. - fundamentals and simulation. NY Springer-Verlag, 2005. - 818 p.
128. Bangert P. Machine Learning and Data Science in the Oil and Gas Industry: Best Practices, Tools, and Case Studies. - 1st ed - Gulf Professional Publishing, 2021. - 306 с.

129. Wu Y., Wei X., Liu K., Li S. Digital core technology and its application in numerical modeling of rocks // Journal of Intelligent Construction. — 2025. — Vol. 3, No. 4. — P. 9180099.
130. Симонов Е.Н. Томографические измерительные информационные системы: рентгеновская компьютерная томография: учебное пособие. — Москва: НИЯУ МИФИ, 2011. — 440 с.
131. Евсеев Ф.А., Иванов И.А. Патент № 241049. Устройство для определения микронного и субмикронного порового пространства пород-коллекторов: заявл. 12.08.2025: опубл. 03.02.2026. - заявитель Автономное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа - Югры «Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В.И. Шпильмана».
132. Балашов В.А., Савенков Е.Б. Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2015. - № 084. - 20 с.
133. Dong H., Blunt M. Pore-network extraction from micro-computerized-tomography images // Physical Review E. - 2009. - Vol. 80, No. 3. - P. 036307.
134. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. - Clarendon Press, 2001. - 304 p.
135. Балашов В.А. Численное моделирование двумерных течений умеренно-разреженного газа в областях со сложной геометрией // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2016. - № 104. - 24 с.
136. Иванов А.В., Крапошин М.В., Елизарова Т.Г. О новом методе регуляризации уравнений двухфазной несжимаемой среды // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2021. - № 61. - 27 с.
137. Балашов В.А., Злотник А.А., Савенков Е.Б. Исследование баротропной квазигидродинамической модели двухфазной смеси с учетом поверхностных эффектов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2016. - № 89. - 25 с.