

На правах рукописи



Евсеев Фёдор Александрович

Разрешимость начально-краевых задач для  
квазигидродинамической системы уравнений в нелинейном и  
линеаризованном случае

Специальность 1.1.2 —  
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Ханты-Мансийск — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Югорский государственный университет»

Научный руководитель:

**Пятков Сергей Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»

Официальные оппоненты:

**Галкин Валерий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор БУ ВО «Сургутский государственный университет»

**Фурцев Алексей Игоревич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Защита состоится 13 октября 2026 г. в 15:00 часов на заседании Диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: igil@hydro.nsc.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте <http://www.hydro.nsc.ru> Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 24 июня 2026 года.

Учёный секретарь

диссертационного совета

24.1.055.01



Прокудин Дмитрий Алексеевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Данная работа посвящена исследованию обобщенной и регулярной разрешимости в пространствах Соболева начально-краевых задач для систем уравнений квазигидродинамического типа.

Основное внимание уделено системам квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, в том числе эти системы рассмотрены в приближении мелкой воды и Обербека-Буссинеска. В качестве функциональных пространств использовались пространства Соболева и весовые пространства Соболева.

Система квазигидродинамических уравнений представляет собой модифицированную версию системы уравнений Навье-Стокса (см. работы Галкина В.А.). Её суть сводится к введению в классические уравнения дополнительных малых диссипативных членов, обоснованных физически и пропорциональных малому вещественному параметру  $\tau$ . Благодаря таким слагаемым, с одной стороны, появляется возможность применять логически простые и устойчивые разностные схемы для расчётов, а с другой - достигается высокая точность при сопоставлении расчётных данных с экспериментами, в частности, для течений в микроканалах и вблизи шара.

Исследуемая система квазигидродинамических уравнений в более общем виде была выведена Елизаровой Т.Г. и Четверушкиным Б.Н. в 80-е годы на основе известной кинетической модели. Первые варианты системы называются системой квазигазодинамических (КГД) уравнений. Посвященную ей теорию и ее вывод можно найти в работах Елизаровой Т.Г., Четверушкина Б.Н., Жерикова А.В. и Шеретова Ю.В. Позднее, в 90-е годы Шеретовым Ю.В. на основе более общего уравнения состояния была предложена еще одна модель, которая получила название квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений. В частности, вывод этой модели и некоторые результаты можно найти в монографиях Шеретова Ю.В.

Результаты по части анализа некоторых неклассических задач для КГиД уравнений были получены Злотником А.А. Им была обобщена КГиД модель на случай произвольного уравнения состояния, удовлетворяющего условиям термодинамической устойчивости, наличия внешних сил и источников тепла. Для линеаризованной КГиД системы им же получены результаты о существовании и единственности обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач в случае реального и политропного газа на произвольном временном промежутке. Данным направлением исследования также занимались

такие математики и механики, как Зейтунян Р.Х., Шелухин В.В., Шильников Е.В., Хайталиев И. Р., Попов М.В. и Дородницын Л.В. и др. авторы.

Отметим, что рассматриваемая КГид система уравнений при определенных условиях является эллиптико-параболической системой, причем как эллиптические, так и параболические уравнения содержат старшие производные неизвестных давления  $p$ , вектора скорости  $\vec{u}$  и температуры  $T$  (в приближении Обербека-Буссинеска). Стационарная часть системы не является равномерно эллиптической, что усложняет получение априорных оценок и доказательство существования решения.

Опишем некоторые близкие модели. В работе Плохотникова С.П., Богомолова О.И. и других авторов для решения задачи фильтрации, рассматривалась система, состоящая из одного эллиптического и двух параболических уравнений. Авторами работы Denk R., Seger T., была доказана априорная оценка для сильных решений эллиптико-параболических уравнений смешанного типа в пространстве Соболева. Сошлемся также на работу Peszynska M., Showalter R., в которой описано семейство моделей течения и переноса многомасштабной однофазной жидкости в неоднородных пористых средах.

Эллиптико-параболические системы возникают и в приложениях. Так, например, авторами работы Lass O., Volkwein S. использовалась эллиптико-параболическая система для моделирования литий-ионных аккумуляторов. В работе Coclite G.M., Holden H., Karlsen K.H. для эллиптико-параболической системы, представляющая собой обобщенные и регуляризованные уравнения Камассы-Холма, были получены явные оценки устойчивости решений. Также, можно выделить некоторые работы, посвященные моделям хемотаксиса (Biler P., Senba T., Suzuki T. Friedman A., Fontelos M.A. и Hu B.), описывающие возникновение пространственных структур в популяциях примитивных бактерий.

Уравнения гидродинамики квазигидродинамического типа широко используются для построения численных методов решения прикладных задач (см. работы Елизаровой Т.Г., Четверушкина Б.Н., Балашова В.А. и Савенкова Е.Б.). Так, значительные успехи были достигнуты Елизаровой Т.Г., при моделировании турбулентных течений. Результаты теоретического обоснования КГид моделей в случае течения многокомпонентной жидкости представлены в работах Балашова В.А., Савенкова Е.Б., Белецкой А, Иванова Е., и др. авторов. Некоторые последние результаты также представлены в работах Четверушкина Б.Н., Ольховской О.Г., Цигвинцева И.П., Шильникова Е.В., Крапошина М.В., Рязанова Д.А., Злотника А.А.

Немалый вклад модели, основанные на системе КГид уравнений, внесли в решение задач, посвященные так называемой технологии «цифровой керн»,

суть которой заключается в прямом численном моделировании течений в масштабе порового пространства пород-коллекторов нефти и газа с воксельным разрешением структуры этого пространства (Bangert P., Berg C.F., Lopez O., Berland H.). Последние результаты в этом направлении были получены в работах Балашова В.А., Савенкова Е.Б., Четверушкина Б.Н., Елизаровой Т.Г. Wu Y., Wei X., Liu K. и Li S.

Исследуемые в работе системы КГиД уравнений возникают в самых различных задачах математической физики: задачи фильтрации жидкостей и газов, моделирование волн на мелкой воде, задачи акустики и магнитогидродинамики в пористых и биологических сред, моделирование течений с фазовыми переходами, задачи экологии (например, задачи описания динамики грунтовых вод и проблем загрязнения).

Однако теоретических результатов, посвященных вопросам разрешимости начально-краевых задач, для таких систем очень мало. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

**Целью** диссертационной работы является доказательство локальных и глобальных теорем существования и единственности решений краевых задач для квазигидродинамических систем уравнений в случае слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также для квазигидродинамической системы уравнений в приближениях мелкой воды и Обербека-Буссинеска, изучение качественных свойств этих решений.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости, в классах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Исследовать вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
3. Исследовать вопросы существования обобщенных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае.

**Научная новизна:**

1. Для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказаны существование и единственность обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач в классах Соболева, а также существование обобщенных решений в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказаны существование и единственность обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач в классах Соболева.
3. Для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости при некоторых условиях на данные доказано существование обобщенных решений в классах Соболева начально-краевых задач в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности) в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае. Для обобщенной разрешимости выведены априорные оценки решения начально-краевой задачи.

**Научная и практическая значимость работы.** В работе получен ряд новых теоретических результатов, представляющих интерес для специалистов в следующих областях: теория уравнений в частных производных, гидродинамика, математическое моделирование процессов диффузии и фильтрации. Практическая значимость научной работы определяется тем, что ее теоретические результаты могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов или при доказательстве сходимости существующих алгоритмов численного моделирования гидродинамических процессов, что, например, актуально в так называемой технологии «цифровой керн» («digital rock physics»), применяемой для исследования фильтрационно-емкостных свойств образцов горных пород (коэффициентов проницаемости и пористости) и особенностей процессов вытеснения на микроуровне методами вычислительного эксперимента.

**Методология и методы исследования.** При исследовании краевых задач в работе использованы методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, используются классические результаты о разрешимости эллиптических и параболических задач, методы доказательства разрешимости краевых задач с использованием теоремы о неподвижной точке и метод Галёркина, основанный на использовании и получении априорных оценок решений. При этом используется теорема вложения,

интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости в классах Соболева, а также вопросы существования обобщенных решений в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности.
2. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и регулярных решений начально-краевых задач для линеаризованной квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.
3. Исследованы вопросы существования обобщенных решений в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска.
4. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений в классах Соболева начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды в двумерном случае.

**Достоверность** результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех приведенных утверждений, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

**Апробация работы.** Основные положения работы докладывались и получили одобрение на двадцати пяти российских и международных научных конференциях и семинарах в виде устных докладов:

1. Шестой Международного молодежного научно-практического форума «Нефтяная столица» (Ханты-Мансийск, 22 – 23 марта 2023 года).
2. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 9 июня 2023 года).
3. X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) (Якутск, 16 - 20 июля 2023 года).
4. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2023» (Уфа, 4 - 8 октября 2023 года).
5. XXVII окружная научно-практическая конференция «Пути реализации нефтегазового потенциала Западной Сибири» (Ханты-Мансийск, 21 - 23 ноября 2023 года).

6. Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 23 – 25 ноября 2023 года).
7. Седьмой Международного молодежного научно-практического форума «Нефтяная столица» (Ханты-Мансийск, 3 – 4 апреля 2024 года).
8. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 29 мая 2024 года).
9. Международная конференция «Современные вычислительные технологии математического моделирования», посвященная 75-летию профессора СВФУ В.И. Васильева (Якутск, 4 – 9 июня 2024 года).
10. Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование (Самара, 15 - 17 июля 2024 года).
11. XVI международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 30 сентября – 2 октября 2024 года).
12. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2024» (Уфа, 2 - 5 октября 2024 года).
13. XXVIII окружная научно-практическая конференция «Пути реализации нефтегазового потенциала Западной Сибири» (Ханты-Мансийск, 20 - 21 ноября 2024 года).
14. Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 24 – 26 октября 2024 года).
15. Восьмой Международный молодёжный научно-практический форум «Нефтяная столица» (Сургут, 19 – 20 марта 2025 года).
16. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 5 июня 2025 года).
17. III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ – 25) (Улан-Удэ, 18 - 22 августа 2025 года).
18. Российско-Китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 31 октября - 6 ноября 2025 года).
19. Международная конференция «Конгресс пользователей ЦКП СКИФ: перспективные исследования с использованием синхротронного излучения» (Новосибирск, 17 - 21 ноября 2025 года).
20. Российская конференция «Рентгеновские методы исследования веществ и материалов» (Москва, 20–24 апреля 2026 года).
21. Семинар Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета «ЮГУ» (Ханты-Мансийск, 27 мая 2026 года).

22. Международная конференция «Математические идеи академика П.Л. Чебышёва, их приложения в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта», приуроченная к 205-й годовщине со дня его рождения» (Обнинск, 14 - 16 мая 2026 года).
23. Семинар «Краевые задачи механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (ИГиЛ) СО РАН (21 мая 2026 года).
24. Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики» (27 мая 2026 года).
25. XI Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного работника высшей школы РФ, заслуженного деятеля науки РС(Я), академика АН РС(Я), кавалера ордена «Полярная звезда» Ивана Егоровича Егорова (Якутск, 21 – 25 июля 2026 года).

Исследование поддержано стипендией Президента Российской Федерации для аспирантов и адъюнктов по приоритетному направлению стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников энергии, способов ее передачи и хранения (Минобрнауки России, Протокол заседания Совета от 15 мая 2025 г. № 13-пр/23, 2025 год), стипендией Губернатора Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (Депобрнауки Югры, Приказ от 23.08.2024 №10-П-1722, 2024 год), стипендией Губернатора Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (Депобрнауки Югры, Приказ от 14.01.2025 №10-П-30, 2025 год).

**Личный вклад.** Все основные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации, получены автором самостоятельно, о чем свидетельствуют публикации по материалам исследований. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора, отражающий полученные в диссертационной работе результаты, составляет более 75 %.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертационной работы изложены в четырнадцати печатных изданиях [1–14], шесть из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–6], три в журналах, индексированных в РИНЦ [7–9], пять — в тезисах докладов [10–14].

## Содержание работы

Во **введении** приведена постановка задачи, обоснована актуальность темы данной диссертационной работы, проведен анализ существующих работ

других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

В самом общем случае рассматриваемая система квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} \otimes \vec{u} + \nabla p = \rho \vec{f} + 2\eta \operatorname{div} \sigma + \rho \operatorname{div} ((\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})), \quad (1)$$

где тензор скоростей деформации  $\sigma$  имеет форму:

$$\sigma(\vec{u}) = \frac{1}{2}((\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{\nabla})^T), \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}).$$

Вектор  $\vec{w}$  определяется по формуле  $\vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f})$ . Плотность  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\eta$  и характерное время релаксации  $\tau$  считаются заданными положительными константами. Векторное поле  $\vec{f} = \vec{f}(x, t)$  определяет массовую плотность внешних сил. Система (1) замкнута относительно неизвестных функций – вектора скорости  $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$  и давления  $p = p(x, t)$ . Символы  $\operatorname{div}$  и  $\nabla$  определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Мы будем записывать систему (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + \mu \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u}, \nabla)\vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $G$  – ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ ,  $\mu = \eta/\rho$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Будем искать решение системы (2), удовлетворяющее начальным и граничным условиям, вида:

$$\vec{u}|_S = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = u_0, \quad \vec{w} \cdot \nu|_\Gamma = 0, \quad (3)$$

и условиям нормировки, вида:

$$\int_G p(t, x) dx = 0, \quad (4)$$

где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

Для стационарной системы (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}), \quad x \in G, \quad G \subset \mathbb{R}^3, \\ (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u}, \nabla)\vec{w} + \vec{w}\operatorname{div} \vec{u}, \quad \mu = \eta/\rho, \end{aligned} \quad (5)$$

граничные условия и условиям нормировки имеют вид:

$$\vec{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \vec{w} \cdot \nu|_{\Gamma} = 0, \quad \int_G p(x)dx = 0, \quad (6)$$

где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

Мы также исследуем систему (2) в приближении Обербека-Буссинеска:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau[(\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \beta\vec{g}T], \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \mu\nabla\vec{u} + \nabla(\operatorname{div} \vec{u})\mu + (\vec{u}, \nabla)\vec{w} + \vec{w}\operatorname{div} \vec{u} - \beta\vec{g}T + \vec{f}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla)T &= \chi\Delta T + f_0, \quad (t, x) \in Q = (0, Z) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho = \operatorname{const} > 0$  – среднее значение плотности,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  – вектор скорости,  $p = p(\vec{x}, t)$  – давление,  $T = T(\vec{x}, t)$  – отклонение температуры от ее среднего значения  $T_0 = \operatorname{const} > 0$ ,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения. Температурный коэффициент расширения жидкости  $\beta$ , характерное время релаксации  $\tau$ , теплопроводность  $\zeta$  и температуропроводность  $\chi = \zeta(\rho C_p)$  считаются заданными положительными константами.

Система (7) дополняется начальными и граничными условиями, и условиями нормировки:

$$\begin{aligned} \vec{u}|_S = 0, \quad T|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \nu}|_{S_1} = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x), \\ T|_{t=0} = T_0(x), \quad \int_G p(t, x)dx = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} + \vec{g}\nu T|_S = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\nu$  внешняя единичная нормаль к  $\Gamma \in C^2$ ,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  некоторые открытые подмножества  $\Gamma$ , такие, что  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \Gamma$  и  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ , положим  $S_i = (0, Z) \times \Gamma_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Линеаризуя систему (2) на известном решении  $(\vec{v}, p_0)$ , приходим к системе следующего вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div} \vec{W}, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \\ \vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla\operatorname{div} \vec{V} + (\vec{v}, \nabla)\vec{W} + (\vec{V}, \nabla)\vec{w}_0 + \vec{W}\operatorname{div} \vec{v} + \vec{w}_0\operatorname{div} \vec{V}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \vec{f}_0]$  и  $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F}]$ .

Начальные и граничные условия, а также условия нормировки для системы (9) имеют вид:

$$\vec{V}|_S = 0, \quad \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x), \quad \vec{W} \cdot \nu|_S = 0, \quad \int_G P dx = 0, \quad (10)$$

где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ . Стационарная часть системы (10) (см. также системы (5), (7), (9)) не является равномерно эллиптической, и, соответственно, в нестационарном случае она не является равномерно параболической, причем как эллиптические, так и параболические уравнения содержат старшие производные неизвестных давления  $p$ , вектора скорости  $\vec{u}$  и температуры  $T$  (для системы (7)).

Мы также будем рассматривать систему квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) &= \operatorname{div}(h\vec{w}), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + g\nabla h), \\ \frac{\partial(h\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + g\nabla\left(\frac{h^2}{2}\right) &= 2\operatorname{div}(\nu h \hat{\sigma}(\vec{u})) + \operatorname{div}(h\vec{w} \otimes \vec{u} + h\vec{u} \otimes \vec{w}), \\ (t, x) \in Q &= (0, T) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

- где тензор скоростей деформации  $\hat{\sigma}$  имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T], \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

$G$  – ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ , коэффициент кинематической вязкости жидкости  $\nu$  и характерное время релаксации  $\tau$  считаются заданными положительными константами. Пусть  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Вектор  $\vec{u} = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$  – усредненная по высоте скорость течения. Величина  $h = h(t, x_1, x_2)$  интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости  $x_1ox_2$ , до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея  $g = 9.8 (m/c^2)$ , равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Система (11) дополняется начально-краевыми условиями:

$$\vec{u}|_S = 0, \quad (\vec{w} \cdot \vec{n})|_S = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1, x_2), \quad h|_{t=0} = h_0(x_1, x_2). \quad (12)$$

где  $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали к  $\Gamma$ . Отметим, что второе условие в (12) влечет, что  $\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}|_S = 0$ .

**Первая глава** состоит из четырех параграфов. В ней рассматриваются задачи (2)–(4), (5), (6) и (7), (8).

**В первом параграфе** главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

**Во втором параграфе** главы рассматриваются вопросы об обобщенной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (2) с начально-краевыми условиями (3), (4) в пространствах Соболева, а также в некоторых весовых классах, характеризующие поведение решений на бесконечности. Опишем основные результаты. Пусть  $\vec{u}, p$  – достаточно гладкое решение задачи (2), (3), (4). Первое и второе уравнение системы (2) умножим на функции  $\varphi$  и  $\vec{\psi}$  соответственно, такие, что  $\varphi \in L_2(0, T; W_2^1(G))$ ,  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_2(0, T; W_2^1(G))$ ,  $\vec{\psi}|_S = 0$  и интегрируем по области  $G$ . Получаем равенства

$$(\vec{u}, \nabla \varphi) = (\vec{w}, \nabla \varphi), \quad \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi} \right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \mu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{w}) = (\vec{f}, \vec{\psi}), \quad (13)$$

справедливые при п.в.  $t$ . Равенство (13) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (2), (3), (4). Функции  $\vec{u} \in L_2(0, T; W_2^1(G)) \cap L_\infty(0, T; L_2(G))$ ,  $u_t \in L_{p_1}(0, T; W_{p_1}^{-1}(G))$ ,  $p \in L_{p_1}(0, T; W_{p_1}^1(G))$ ,  $p_1 = 5/4$ , такие, что  $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} \in L_2(Q)$ , удовлетворяющие (3), (4), называются обобщенным решением задачи (2), (3), (4), если

$$\int_0^T (\vec{u}, \nabla \varphi) dt = \int_0^T (\vec{w}, \nabla \varphi) dt, \quad \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi} \right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \mu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{w}) \right] dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{\psi}) dt, \quad (14)$$

для всех функций  $\varphi \in L_2(0, T; W_2^1(G))$  с  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_5(0, T; W_5^1(G))$  и  $\vec{\psi}|_S = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{f} \in L_2(Q)$ ,  $\vec{u}_0 \in L_2(G)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (2), (3), (4) такое, что  $\nabla p, (\vec{u}, \nabla) \vec{u} \in L_{q_0}(0, T; L_{p_0}(G))$  для любого  $p_0 \in [1, 3/2]$ , где  $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$ .

Для исследования обобщенной разрешимости задачи (2), (3), (4) в весовых пространствах Соболева в случае  $T = \infty$  используем в качестве определения обобщенного решения интегральное тождество (14), для всех функций  $\varphi \in L_2(0, \infty; W_2^1(G))$  с  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_5(0, \infty; W_5^1(G))$  и  $\vec{\psi}|_S = 0$ , имеющих ограниченный по  $t$  носитель. Вводятся весовые функции вида:  $\beta(t) = e^{\gamma t}$  ( $\gamma \neq 0, \gamma \leq \gamma_0 = \mu/2\delta_0$ ), где  $\delta_0$  - постоянная из неравенства Пуанкаре:

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq \delta_0 \int_{G_{13}} |\nabla \vec{u}|^2 dx, \quad \vec{u}|_\Gamma = 0,$$

и  $\beta(t) = (M + t)^{-\gamma}$  ( $\gamma \neq 0$ ), где  $M > 0$  есть постоянная.

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{f}\sqrt{\beta} \in L_2(Q)$ ,  $\vec{u}_0 \in L_2(G)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (2), (3), (4) такое, что  $\sqrt{\beta}u \in L_2(0, \infty; W_2^1(G))$ ,  $\sqrt{\beta}\vec{u} \in L_\infty(0, \infty; L_2(G))$ ,  $\sqrt{\beta}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \in L_2(Q)$ ,  $\beta(\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{q_0}(0, \infty; L_{p_0}(G))$ ,  $\nabla p \beta^\alpha \in L_{q_0}(0, \infty; L_{p_0}(G))$ ,  $\vec{u}_t \beta^\alpha \in L_{q_0}(0, \infty; W_{p_0}^{-1}(G))$  для любого  $p_0 \in [1, 3/2]$  и  $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$ , где  $\alpha < 1/2$ , если  $\beta = e^{\gamma t}$  ( $\gamma > 0$ ) и  $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2-q_0}{2|\beta|^{q_0}}$ , если  $\beta = (t + M)^{-\gamma}$ ,  $\gamma < 0$ ;  $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2-q_0}{2|\beta|^{q_0}}$  и  $\alpha \geq 1$ , если  $\beta = (t + M)^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ ;  $\alpha \geq 1$ , если  $\beta = e^{\gamma t}$  ( $\gamma < 0$ ).

**В третьем параграфе** главы рассматривается вопрос об обобщенной разрешимости краевой задачи для стационарной квазигидродинамической системы уравнений (5) с начально-краевыми условиями (6) в пространствах Соболева. Приведем основной результат. Пусть  $\vec{u}, p$  – достаточно гладкое решение задачи (5), (6). Первое и второе уравнение системы (5) умножим на функции  $\varphi$  и  $\vec{\psi}$  соответственно, такие, что  $\varphi \in W_2^1(G)$ ,  $\int_G \varphi(x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in W_2^1(G)$ ,  $\vec{\psi}|_S = 0$ . Получаем равенства

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \nabla \varphi) &= (\vec{w}, \nabla \varphi), \quad \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \\ &\mu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) = (\vec{f}, \vec{\psi}). \end{aligned} \quad (15)$$

Равенство (15) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (5), (6). Функции  $\vec{u} \in W_2^1(G)$ ,  $p \in W_{3/2}^1(G)$ , удовлетворяющие (6) и такие, что  $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_2(Q)$  называются обобщенным решением задачи (5), (6), если

$$\begin{aligned} (\vec{u}, -\vec{w}, \nabla \varphi) &= 0, \\ -((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) &+ \frac{1}{\rho}(\nabla p, \vec{\psi}) + \mu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + \\ &((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) - (\vec{f}, \vec{\psi}) = 0 \end{aligned}$$

для всех функций  $\varphi \in W_2^1(G)$  с  $\int_G \varphi(x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in W_3^1(G)$  и  $\vec{\psi}|_S = 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\vec{f} \in L_2(G)$ ,  $\vec{u}_0 \in L_2(G)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (5), (6) такое, что  $\vec{u} \in W_2^1(G)$ ,  $\vec{w} \in L_2(G)$ ,  $\nabla p, (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{3/2}(G)$ .

**В четвертом параграфе** главы рассматривается вопрос об обобщенной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений (7) с начально-краевыми условиями (8) в приближении Обербека-Буссинеска в пространствах Соболева. Опишем основные результаты. Также, как и выше,  $\vec{u}, p$  – достаточно гладкое решение задачи (7), (8). Первое, второе и третье уравнение системы (7) умножим на функции

$\varphi$ ,  $\vec{\psi}$  и  $\xi$  соответственно, такие, что  $\varphi \in L_2(0, Z; W_2^1(G))$ ,  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$ ,  $\vec{\psi}|_S = 0$ ,  $\xi \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$  и  $\xi|_{S_0} = 0$ . Получаем равенства

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \nabla \varphi) &= (\vec{w}, \nabla \varphi), \quad \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}\right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \\ &\mu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{w}) + (\beta \vec{g} T, \vec{\psi}) = (\vec{f}, \vec{\psi}), \\ &\left(\frac{\partial T}{\partial t}, \xi\right) - ((\vec{u} - \vec{w}) T, \nabla \xi) + \chi(\nabla T, \nabla \xi) = (f_0, \xi), \end{aligned} \quad (16)$$

справедливые при п.в.  $t$ . Равенство (16) может служить основой для определения обобщенного решения задачи (7), (8). Пусть  $p_0 \in [1, 3/2]$ ,  $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$ . Функции  $\vec{u} \in L_2(0, Z; W_2^1(G)) \cap L_\infty(0, Z; L_2(G))$ ,  $\vec{u}_t \in L_{5/4}(0, Z; W_{5/4}^{-1}(G))$ ,  $p \in L_{5/4}(0, Z; W_{5/4}^1(G))$ ,  $T \in L_2(0, Z; W_2^1(G)) \cap L_\infty(0, Z; L_2(G))$  такие, что  $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} + \beta \vec{g} T \in L_2(Q)$ , удовлетворяющие (8), называются обобщенным решением задачи (7), (8), если

$$\begin{aligned} \int_0^Z (\vec{u}, \nabla \varphi) dt &= \int_0^Z (\vec{w}, \nabla \varphi) dt, \quad \int_0^Z \left[ \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi}\right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \right. \\ &\mu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla) \vec{\psi}, \vec{w}) + (\beta \vec{g} T, \vec{\psi}) \left. \right] dt = \int_0^Z (\vec{f}, \vec{\psi}) dt, \\ &\int_0^Z \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial t}, \xi\right) - ((\vec{u} - \vec{w}) T, \nabla \xi) + \chi(\nabla T, \nabla \xi) \right] dt = \int_0^Z (f_0, \xi) dt, \end{aligned}$$

для всех функций  $\varphi \in L_2(0, Z; W_2^1(G))$  с  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$ ,  $\vec{\psi}|_S = 0$ ,  $\xi \in L_5(0, Z; W_5^1(G))$  и  $\xi|_{S_0} = 0$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\vec{f}, f_0 \in L_2(Q)$ ,  $\vec{u}_0, T_0 \in L_2(G)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (7), (8), такое, что  $\nabla p, (\vec{u}, \nabla) \vec{u} \in L_{q_0}(0, T; L_{p_0}(G))$  для любого  $p_0 \in [1, 3/2]$ , где  $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$ .

**Вторая глава** состоит из пяти параграфов. В ней рассматриваются задачи (2)–(4), (9), (10) и (11), (12).

**В первом параграфе** главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов данной главы.

**Во втором параграфе** главы рассматриваются вопросы об обобщенной и регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в линеаризованном случае (9) с начально-краевыми условиями (10). Приведем основные результаты. Пусть  $\vec{v}, p_0$  - известное решение задачи (2), (3) с данными  $\vec{f}_0, \vec{v}_0$ , вместо  $\vec{f}, \vec{u}_0$ , вектор  $\vec{v}$  обращается в нуль на  $S$  и  $\int_G p_0 dx = 0$ . Проводим линеаризацию системы на этом решении. Подставляем функции  $\vec{u} = \vec{v} + \varepsilon \vec{V}$  (вектор  $\vec{V}$  обращается в

нуль на  $S$ ),  $p = p_0 + \varepsilon P$  ( $\int_G P dx = 0$ ),  $\vec{f} = \vec{f}_0 + \varepsilon \vec{F}$ ,  $\vec{u}_0 = \vec{v}_0 + \varepsilon \vec{U}_0$  в систему вместо  $\vec{u}$ ,  $p$ ,  $\vec{f}$ ,  $\vec{u}_0$  и сокращаем слагаемые второго порядка относительно  $\varepsilon$ . Мы приходим к линеаризованной системе:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \vec{W}, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla) \vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \\ \vec{F} + \mu \Delta \vec{V} + \mu \nabla \operatorname{div} \vec{V} + (\vec{v}, \nabla) \vec{W} + (\vec{V}, \nabla) \vec{w}_0 + \vec{W} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{w}_0 \operatorname{div} \vec{V}. \end{aligned} \quad (17)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$\vec{V}|_S = 0, \quad \vec{V}|_{t=0} = \vec{U}_0(x), \quad \vec{W} \cdot \nu|_S = 0, \quad \int_G P dx = 0. \quad (18)$$

Назовем обобщенным решением задачи (17), (18) функции  $\vec{V}, P$ , такие, что  $\vec{V} \in L_\infty(0, T; L_2(G)) \cap L_2(0, T; W_2^1(G))$ ,  $\vec{V}_t \in L_2(0, T; W_2^{-1}(G))$ ,  $P \in L_2(0, T; W_2^1(G))$ ,  $\int_G P(t, x) dx = 0$ , и

$$\begin{aligned} \int_Q (\vec{V} - \vec{W}) \nabla \varphi(t, x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_2^1(G), \\ \int_Q (-\vec{V} \cdot \vec{\psi}_t + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla) \vec{V} \cdot \vec{\psi} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla) \vec{v} \cdot \vec{\psi} + \frac{1}{\rho} \nabla P \cdot \vec{\psi} = \\ \vec{F} \cdot \vec{\psi} - \mu \sum_{j=1}^n \nabla V_j \cdot \nabla \vec{\psi} - \mu \operatorname{div} \vec{V} \operatorname{div} \vec{\psi} - (\vec{v}, \nabla) \vec{\psi} \cdot \vec{W} - (\vec{V}, \nabla) \vec{\psi} \cdot \vec{w}_0 + \\ + \int_G \vec{U}_0(x) \cdot \vec{\psi}(0, x) dx, \quad \forall \vec{\psi} \in W_2^1(Q) : \vec{\psi}|_S = 0, \quad \vec{\psi}|_{t=T} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь пространство  $L_2(0, T; W_2^{-1}(G))$  двойственно пространству  $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(G))$ . Как известно, обобщенное решение  $\vec{V}$  обладает свойствами  $V \in C([0, T]; L_2(G))$  и, соответственно, мы имеем, что  $\vec{u}|_{t=0} = \vec{U}_0$ .

**Теорема 5.** *Предположим, что  $\vec{F} \in L_2(Q)$ ,  $\vec{U}_0 \in L_2(G)$ ,  $\vec{w}_0 \in L_\infty(Q)$  и  $\vec{v} \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G))$ . Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (17), (18).*

Далее, мы приведем один результат о регулярной разрешимости задачи (17), (18). Как мы уже отмечали, общие эллиптическо-параболические системы, вероятно, ранее не изучались. Мы опишем только некоторые достаточные условия разрешимости. Вообще говоря, они не являются оптимальными. Но они позволяют изучить локальную разрешимость нелинейной системы (1) (см. также (2), (3)) и устойчивость ее решений.

**Теорема 6.** *Предположим, что  $\vec{F} \in L_p(0, T; W_p^1(G))$ ,  $\vec{U}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ ,  $\vec{w}_0 \in L_p(0, T; W_p^1(G))$ ,  $\vec{v} \in W_p^{1,2}(Q)$  и  $p > 5$ . Тогда существует постоянная  $\varepsilon_0 > 0$  такая, что если  $\|\vec{v}\|_{L_\infty(0, T; W_\infty^1(G))} \leq \varepsilon_0$ , то существует единственное решение задачи (17), (18) такое, что  $\vec{V} \in W_p^{1,2}(Q)$ ,  $P \in L_p(0, T; W_p^2(G))$ .*

**В третьем параграфе** главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений (2) с начально-краевыми условиями (3) в пространствах Соболева. Приведем основные результаты. Положим  $Q_\gamma = (0, \gamma) \times G$ ,  $S_\gamma = (0, \gamma) \times \Gamma$ . Начальные и граничные условия (3), (4) мы заменяем условиями:

$$\vec{u}|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu}|_S = f_0(t, x), \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x), \quad \int_G p(t, x) dx = 0. \quad (20)$$

Запишем условия на данные.

$$\vec{u}_0 \in W_r^{2-2/r}(G), \quad \vec{u}_0|_\Gamma = 0, \quad \vec{f} \cdot \vec{\nu}, \quad f_0 \in L_r(0, T; W_r^{1-1/r}(\Gamma)), \quad (21)$$

$$\vec{f}, \operatorname{div} \vec{f} \in L_r(Q), \quad \int_\Gamma f_0(t, x) - \rho \vec{f} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0. \quad (22)$$

Отметим, что функция  $p$  восстанавливается с точностью до произвольной функции, зависящей от времени. Введем обозначения

$$L_0 \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{u} - \mu \nabla(\operatorname{div} \vec{u}), \quad A_0 p = \frac{\tau}{\rho} \Delta p. \quad (23)$$

Тогда система переписится в виде

$$\begin{cases} A_0 p = \operatorname{div} \vec{u} - \tau \operatorname{div}(\vec{u}, \nabla) \vec{u} + \operatorname{div} \vec{f} \tau \\ L_0 \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + (\vec{u}, \nabla) \vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{f}. \end{cases} \quad (24)$$

Мы будем искать решение нашей задачи в классе

$$H = \{(\vec{u}, p) : \vec{u} \in W_r^{1,2}(Q), p \in L_r(0, T; W_r^2(G)), r > 5\}.$$

Из теорем вложения имеем, что  $\vec{u} \in C^{1-5/2r, 2-5/r}(\overline{Q})$ ,  $\nabla \vec{u} \in C^{1/2-5/2r, 1-5/r}(\overline{Q})$ , т.е. неравенство Интегрируя первое уравнение в (24) по  $G$ , получим равенство

$$\int_\Gamma \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{\nu} d\Gamma - \tau \int_\Gamma (\vec{u}, \nabla) \vec{u} \cdot \vec{\nu} d\Gamma + \tau \int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{\nu} d\Gamma \quad (25)$$

Используя граничные условия (20), получим необходимое условие разрешимости системы

$$\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Gamma f_0 d\Gamma = \int_\Gamma \rho \vec{f} \cdot \vec{\nu} d\Gamma, \quad (26)$$

т.е. второе условие в (22).

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия (21), (22) и  $r > 5$ . Тогда найдется постоянная  $q_0$ , не зависящая от данных задачи  $\vec{u}_0, \vec{f}, f_0$ , такая, что, если  $\|\vec{u}_0\|_{L_\infty(G)} \leq q_0$ , то на некотором промежутке  $t \in [0, \gamma_0]$  решение задачи (2),

(20) существует и принадлежит классу  $\vec{u} \in W_r^{1,2}(Q_\gamma)$ ,  $p \in L_r(0, \gamma; W_r^2(G))$ . Если  $(\vec{u}_1, p_1)$ ,  $(\vec{u}_2, p_2)$  два решения задачи (2), (20), то  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ ,  $p_1 = p_2$ .

**В четвертом параграфе** главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды (11) с начально-краевыми условиями (12) в пространствах Соболева. Приведем основные результаты.

Исходя из определений, получим равенства

$$\operatorname{div}(h(\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) = h(\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{u} + h \operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w})\vec{u} + \nabla h \cdot (\vec{u} - \vec{w})\vec{u}, \quad (27)$$

$$\operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{w}) = h(\vec{u}, \nabla)\vec{w} + h \operatorname{div} \vec{u} \vec{w} + \nabla h \cdot \vec{u} \vec{w}. \quad (28)$$

Далее, мы используем представления

$$\operatorname{div}(\hat{\sigma}(\vec{u})) = \Delta \vec{u} + \nabla(\operatorname{div} \vec{u}). \quad (29)$$

$$\operatorname{div}(h\hat{\sigma}(\vec{u})) = h \operatorname{div} \hat{\sigma}(\vec{u}) + \vec{H}, \quad \vec{H} = \left( \sum_{i=1}^2 h_{x_i} \sigma_{i1}, \sum_{i=1}^2 h_{x_i} \sigma_{i2} \right)^T. \quad (30)$$

Мы предполагаем, что  $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$  ( $p > 4$ ). В этом случае теоремы о вложении дают  $h_0 \in C^{2-4/p}(\overline{G})$ , положим  $m_0 = \inf_{x \in G} h_0(x)$ ,  $M_0 = \sup_{x \in G} h_0(x)$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\vec{u}_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$ ,  $\vec{u}_0|_\Gamma = 0$ ,  $h_0 \in W_p^{2-2/p}(G)$  ( $p > 4$ ),  $h_0(x) > 0$  в  $\overline{Q}$ , и  $\frac{\partial h_0}{\partial n}|_\Gamma = 0$ . Тогда найдется постоянная  $q_0 > 0$ , не зависящая от данных  $\vec{u}_0, h_0$  такая, что, если

$$\|\vec{u}_0\|_{L^\infty(G)} \left( M_0 + \frac{M_0}{m_0} + \frac{1}{m_0} \right) + \frac{M_0}{m_0} \|\vec{u}_0\|_{L^\infty(G)}^2 \leq q_0 \quad (31)$$

в  $G$ , где постоянные  $M_0, m_0$  таковы что  $M_0 \geq h_0(x) \geq m_0 > 0$  при п.в.  $x \in G$ , то на некотором отрезке  $[0, \gamma_0]$  существует решение задачи (11), (12) такое, что  $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^{\gamma_0})$  и  $h(t, x) > 0$  в  $\overline{Q^{\gamma_0}}$ , где  $Q^{\gamma_0} = (0, \gamma_0) \times G$ . Если  $(\vec{u}_1, h_1)$ ,  $(\vec{u}_2, h_2)$  два решения задачи (11), (12) и найдется постоянная  $\delta_0 > 0$  такая, что  $h_i(t, x) \geq \delta_0$  ( $i = 1, 2$ ) в  $Q^{\gamma_0}$ , то  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ ,  $h_1 = h_2$ .

**В пятом параграфе** главы рассматривается вопрос получения априорных оценок для регулярных решений начально-краевой задачи (11), (12), в некоторой степени характеризующих их поведение при  $t \rightarrow \infty$ . Приведем основной результат.

**Теорема 9.** Пусть данные задачи  $\vec{u}_0, h_0$  удовлетворяют условиям теоремы, решение задачи (11), (12) существует глобально по времени и является регулярным, т.е.  $\vec{u}, h \in W_p^{1,2}(Q^T)$  при каждом  $T > 0$ . Если  $h \geq 0$  в

$Q = (0, \infty) \times G$ , то справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} h + \frac{g h^2}{2} \right) dx + \frac{1}{\tau} \int_G h |\vec{w}|^2 dx + \int_G \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}^2 h dx = 0, t \in (0, \infty),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{1x_j} + u_{jx_i})$$

и, соответственно, оценка

$$\max_{t>0} \int_G |\vec{u}|^2 h + g h^2 dx \leq \int_G |\vec{u}_0|^2 h_0 + g h_0^2 dx = M.$$

Если найдутся постоянные  $m_0 < M_0$  такие что  $M_0 \geq h(t, x) \geq m_0 > 0$  п.в., то справедливы оценки

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0, \infty; W_2^1(G))} + \|g \nabla h + (\vec{u}, \nabla) \vec{u}\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M),$$

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(0, \infty; L_2(G))} + \|h\|_{L_\infty(0, \infty; L_2(G))} \leq C_2(M), \quad (32)$$

$$\|(\vec{u}, \nabla) \vec{u}\|_{L_{q_0}(0, \infty; L_{p_0}(G))} \leq C_3(M), \quad p_0 \in [1, 2), \quad q_0 = 2p_0 / (3p_0 - 2),$$

$$\|\nabla h\|_{L_2(0, \infty; L_1(G))} \leq C_4(M),$$

где постоянные  $C_i$  зависят только от величины  $M$ , меры Лебега  $\mu(G)$  области  $G$ ,  $\tau$  и норм начальных данных.

В **приложении** анализируются полученные другими авторами результаты численного моделирования течений жидкости и газа в поровом пространстве образцов горных пород на основе квазигидродинамических уравнений. В качестве воксельного представления геометрии расчетной области исследуемого образца горной породы используется его трехмерный бинарный массив, полученный с помощью метода рентгеновской компьютерной томографии.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертационной работы, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Пяткову С.Г. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор также благодарит преподавателей инженерной школы цифровых технологий ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» за полезные советы и помощь в работе.

## Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, входящие в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus:

1. Evseev F.A., Pyatkov S.G. On Some Properties of a Linearized Quasi-Hydrodynamical System of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – P. 3266–3276.
2. Pyatkov S.G., Evseev F.A. Regular Solvability of the First Initial–Boundary Value Problem for the Quasihydrodynamic System of Equations in the Case of a Weakly Compressible Fluid // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 281, No. 6. – P. 909-924.
3. Evseev F.A., Pyatkov S.G. Solvability of the First Initial-boundary Value Problem for the Quasihydrodynamics Equations in the Shallow Water Approximation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 9. – P. 4490-4499.
4. Евсеев Ф.А. Регулярная разрешимость первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды // Математические заметки СВФУ. – 2025. – Т. 32, № 1. – С. 111-112.
5. Evseev F.A. Generalized solvability of initial-boundary value problems for quasihydrodynamic system of equations in weighted Sobolev spaces // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2025. – Vol. 17, No. 3. – P. 13-27.
6. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в приближении Обербека-Буссинеска // Математические заметки СВФУ. – 2026. – Т. 33, № 2. – С. 38-53.

**И другие издания:**

7. Евсеев Ф.А. Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости // Вестник Югорского государственного университета. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 97-106.
8. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. О некоторых свойствах линеаризованной квазигидродинамической системы уравнения // Сборник статей, посвященных 100-летию со дня рождения Киприянова Ивана Александровича, выдающегося подвижника математики. Крупного ученого, специалиста в области сингулярных дифференциальных уравнений и весовых функциональных пространств. – 2023. – С. 108-124.
9. Евсеев Ф.А. Система квазигидродинамических уравнений течения жидкости и ее линеаризованный вид // Бизнес-трансформация: управление улучшениями. – 2023. – № 3. – С. 68-72.
10. Евсеев Ф.А. Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости //

Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2023»: Тезисы докладов, – 2023. – Т. 2. – С. 43-45.

11. Евсеев Ф.А., Пятков С.Г. О некоторых свойствах линеаризованной квазигидродинамической системы уравнения // X международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН Филиппова Василия Васильевича: Тезисы докладов, – 2023. – С. 140.
12. Евсеев Ф.А. Регулярная разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнений квазигидродинамики в приближении мелкой воды // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2024»: Тезисы докладов, – 2024. – С. 234-235.
13. Евсеев Ф.А. Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических уравнений в весовых пространствах Соболева // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова, – 2025. – С. 47-48.
14. Евсеев Ф.А. О некоторых квазигидродинамических уравнениях // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, – 2025. – С. 80-85.

*Евсеев Фёдор Александрович*

Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в нелинейном и линеаризованном случае

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 22 июня 2026 года

Формат 60×84/16. Объем 1,3 п.л. Тираж 100 экз.

Югорский формат

628011, г. Ханты-Мансийск, ул. Лопарева, 15

Тел.: (346)791-20-19. E-mail: Uformat@mail.ru