

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Ермишиной В.Е. **«Математические модели распространения нелинейных внутренних волн в слоистой стратифицированной жидкости»**, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.9 – «механика жидкости, газа и плазмы».

Рассмотрение жидких сред с плотностной стратификацией оправдано по причине того, что подобная стратификация может приводить к возникновению процессов, которые отсутствуют в потоках однородной по плотности жидкости. Так, например, наличие стратификации может приводить к значительным изменениям параметров течения над препятствиями и возникновению вихревых зон в области потенциального течения жидкости. Волновые процессы в такого рода неоднородных жидкостях до сих пор изучались в рамках слоистых моделей мелкой воды первого и второго приближения. Наиболее изученными являются модели двухслойного приближения. Для того, чтобы описать динамику волн, возникающих на границе больших градиентов плотности (внутренних волн) необходимо модифицировать существующие модели и учесть тонкую структуру стратификации, наличие неоднородного по глубине течения, неровность дна и ряд других факторов, возникающих при распространении внутренних волн и существенно влияющих на их динамику. Построению новых негидростатических моделей распространения нелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости с несколькими слоями и посвящена данная диссертация. В рамках разработанных моделей описано распространение уединенных внутренних волн. Численно исследована эволюция нелинейных внутренних волн, в том числе, приводящая к их обрушению. Сравнение теоретических результатов с имеющимися экспериментальными данными и натурными наблюдениями по данному вопросу показало сравнительно высокую эффективность построенных моделей.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В **введении** подчеркивается актуальности темы исследования, проводится краткий обзор существующих исследований по данному вопросу, сформулированы основные положения, выносимые на защиту

и их связь с целью диссертации, а также приведена апробация результатов, полученных автором диссертации.

В **первой главе** обсуждается система законов сохранения первого порядка, которая описывает распространение внутренних уединенных волн в слоистой жидкости, представляющих собой быстроубывающие бегущие волны. Предполагается, что слой жидкости ограничен сверху и снизу непроницаемыми поверхностями. Негидростатические эффекты учитываются только в верхнем и нижнем слоях. Предполагается также, что промежуточные слои являются тонкими и по их толщине производится усреднение. Описаны формы внутренних уединенных волн (двоякоасимптотических к постоянному потоку) первой и второй моды для фиксированных параметров потока, близких к параметрам, отвечающим натурным наблюдениям в прибрежной зоне Японского моря. Проведены сравнения полученных уединенных волн с соответствующими волнами, зарегистрированными в шельфовой зоне Японского моря. Продemonстрировано хорошее совпадение теоретических результатов и измерений. Представлены также нестационарные расчеты эволюционной модельной системы уравнений, записанной в виде законов сохранения на примере пятислойной жидкости с фиксированными толщинами слоев. В частности, рассмотрена трансформация уединенной волны в сужающемся канале. Показано хорошее совпадение форм эволюции расчетной и экспериментальной уединенной волны в разные моменты времени. Продemonстрировано хорошее совпадение численного моделирования обрушения волны над придонным препятствием в рамках уравнений Навье-Стокса и модельных уравнений, полученных в диссертации на основе законов сохранения.

Во **второй главе** сформулированы условия существования уединенных волн в двухслойном стратифицированном сдвиговом течении. Приведено выведенное в 1999 году уравнение движения двухслойной жидкости (применимое также для описания движения трехслойной жидкости при выполнении ряда условий на параметры системы) между параллельными пластинами в приближении длинных волн и с учетом негидростатического давления в приближении Буссинеска. Основное внимание в данной главе уделяется построению решений, описывающих уединенные волны при наличии сдвига скорости (при покоящейся на бесконечности или равномерно движущейся как единое целое жидкости подобные решения известны).

Выведено уравнение, описывающее волны малой (но конечной!) амплитуды с достаточно тонким верхним слоем (по сравнению с нижним). Решение этого уравнения (ответвляющиеся от однородного потока) описывается квадратурой, которая не вычисляется в явном виде, поэтому для ее вычисления применяется численное интегрирование. Используется также другой способ построения решения на основе численного интегрирования полученного ОДУ для бегущих волн методом Рунге-Кутты 4 порядка (известная процедура в среде MATLAB). Вычисляются формы уединенных волн с одним и двумя негидростатическими слоями. Определена область параметров однородного потока на бесконечности, от которого ответвляется уединенная волна. Приведены характерные сравнительные профили уединенных волн возвышения и понижения уровня для модельных уравнений и уравнений большой амплитуды с разным количеством гидростатических слоев.

В третьей главе получено и исследуется приближение к известным уравнениям, описывающим распространение нелинейных длинных волн в двухслойной жидкости со свободной границей и плавно меняющимся рельефом дна с учетом завихренности по параметру, являющимся произведением длины перемешивания и квадрата длинноволнового параметра. Разыскиваются стационарные решения этой системы при условии физической природы (избыточному притоку более легкой жидкости в верхнем слое по отношению к постоянному потоку). Полученные решения имеют осциллирующую структуру фронта на нижней границе (для гидростатической модели). Амплитуды и длины волн для существенно негидростатической модели, для исходной и аппроксимирующей систем близки, однако расположение вершин этих волн заметно отличается. Проведено сравнение солитоноподобных решений исходной и приближенной систем. Показано, что форма этих решений практически не отличается. Получено численное решение двух указанных систем уравнений типа боры, описывающее эволюцию волны при обтекании локализованного препятствия и проведено их сравнение, показывающее, что эти решения практически не отличаются.

В заключении описываются основные результаты работы.

Специального упоминания, на мой взгляд, заслуживают следующие результаты, полученные в диссертации.

1. Разработана модель динамики внутренних длинных нелинейных волн в многослойной жидкости с тонкими промежуточными слоями и негидростатическим распределением давления в верхнем и нижнем слоях. Построены решения, описывающие уединенные внутренние волны, ответвляющиеся от постоянного сдвигового потока. Решения данной модели сопоставлены с данными натурных наблюдений в шельфовой зоне Японского моря, Боденском озере и лабораторными экспериментами для волн в сужающихся каналах. Проведено сравнение численных решений уравнений Навье-Стокса и выведенной модельной системы, описывающих эволюцию волны над широким препятствием и продемонстрировано хорошее совпадение этих решений.

2. Предложена аппроксимация известных дисперсионных уравнений двухслойной идеальной неоднородной жидкости со свободной границей и с учетом эффектов перемешивания и топографии дна. Получены стационарные решения этой модели в гидростатическом и негидростатическом случаях. Получены решения типа уединенных волн, двоякоасимптотических к заданному постоянному потоку и нестационарных решений типа бора, описывающих обтекание локализованного препятствия на дне. Продemonстрировано очень хорошее соответствие подобным решениям полной двухслойной модели.

Результаты диссертации являются достоверными и полностью обоснованными, так как при их получении использовались точные теоретические методы математической физики, проверенные численные методы и апробированные методы гидромеханики. Все декларируемые в диссертации результаты являются новыми и представляющими значительный интерес. Стоит особо подчеркнуть, что полученные результаты, кроме чисто теоретического интереса, могут иметь также и практическое значение, будучи востребованными для решения задач мониторинга и моделирования течений и распространения волн в шельфовой зоне морей и океанов.

Диссертация написана ясным и доступным языком, результаты изложены понятно. К возможным недостаткам работы можно отнести следующие.

1. В первой главе построены решения типа уединенных волн. При этом мне не удалось найти описание того, как они строятся. Можно только

догадываться, что эти решения получены численно решением соответствующей стационарной задачи.

2. Мне также не удалось найти предметное определение, что такое волны первой и второй моды. Правильно ли я понял, что эти названия связаны с учетом негидростатического давления в крайних слоях?

3. Действительно ли нумерация (3.1) отвечает тому уравнению, которое обсуждается на стр.30 и 40 диссертации. А может, уравнению (1.32)?

4. Что можно сказать о динамической устойчивости полученных стационарных уравнений. Планируется ли предпринять соответствующий анализ?

Последнее из указанных замечаний носит рекомендательный характер о том, как продолжить исследования, приведенные в диссертации. Остальные замечания, ни в коей мере, не меняют результатов и никак не влияют на высокую оценку диссертации в целом.

Диссертация В.Е. Ермишиной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук представляет собой законченное научное исследование, является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, которые можно квалифицировать как научное достижение. В диссертации получен целый ряд новых результатов. Результаты интересны и представляются важными, в первую очередь для теоретических и практических вопросов, связанных с исследованием особенностей распространения нелинейных волн в неоднородных жидких средах с неровным дном.

Результаты диссертации могут найти применение в работе, например, следующих организаций: МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН.

Из диссертационной работы, автореферата и опубликованных научных работ В.Е. Ермишиной (4 из них вышли в ведущих рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК РФ для публикаций кандидатских диссертаций) следует, что диссертация *«Математические модели распространения нелинейных*

внутренних волн в слоистой стратифицированной жидкости» соответствует требованиям ВАК России, предъявляемым к кандидатским диссертациям, установленным в главе II Положения о порядке присуждения учёных степеней, утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Название работы соответствует проведенному исследованию. Публикации по теме работы содержат описание примененной методики исследования и отражают основные полученные результаты, а В.Е. Ермишина, безусловно, заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы».

10 октября 2024 г.

Официальный оппонент, ведущий научный сотрудник

Математического института имени В.А. Стеклова РАН

(119991, Москва, ул. Губкина, д. 8, тел. +7(495) 984 81 41,

web-сайт www.mi.ras.ru)

доктор физико-математических наук, профессор

(тел. +7 (495) 984 81 41 * 37 36, e-mail: ilichev@mi.ras.ru)

А. Т. Ильичев

Подпись А.Т. Ильичева заверяю:

Ученый секретарь Математического ин-та им.В.А. Стеклова РАН,

к.ф-м.н.



С.А.Поликарпов