

На правах рукописи



Ефимов Евгений Александрович

**Моделирование волновых движений в
структурно-неоднородных средах блочного строения в
пространственной постановке**

1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук» (ФИЦ КНЦ СО РАН).

Научный руководитель:

Садовский Владимир Михайлович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий отделом вычислительной механики деформируемых сред Института вычислительного моделирования – обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск.

Официальные оппоненты:

Лавриков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки **Институт горного дела им. Н. А. Чинакала** Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Хачкова Татьяна Станиславовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки **Институт математики им. С. Л. Соболева** Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Московский физико-технический институт** (национальный исследовательский университет)», г. Долгопрудный.

Защита состоится 2 марта 2026 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.055.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: info@hydro.nsc.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью учреждения, просим присыпать на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Автореферат разослан «18» декабря 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.055.02,
канд. физ.-мат. наук



Бойко
Светлана
Владимировна

Общая характеристика работы

Актуальность работы состоит в большом практическом интересе к изучению нестационарного деформирования неоднородных сред и конструкций. Ярким примером неоднородных сред с блочной внутренней структурой являются горные породы. Современные представления о горных породах позволяют говорить об их блочном иерархическом строении. Ряд исследований показывает, что прослойки, соединяющие блоки породного массива, обладают сложными реологическими свойствами и являются более податливыми, чем блоки. В силу податливости прослоек при деформировании блочного массива существенную роль играет деформация самих прослоек. Это обстоятельство играет важную роль в задачах сейсмики и геомеханики, поэтому распространены подходы, в которых используются математические модели блочных сред различного уровня сложности. Таким образом, разработка и совершенствование математических моделей блочных сред имеет важное значение в исследовании динамических процессов, происходящих в горных породах и других средах, которым присущее блочное строение.

Степень разработанности темы. Для описания динамических процессов в блочных средах используются различные математические модели. Если прослойки достаточно податливы, и процесс деформирования происходит преимущественно за счёт прослоек, то для описания блочных сред используются дискретно-периодические модели, в которых блоки рассматриваются как жёсткие тела (Н. И. Александрова, Е. Н. Шер). Для задач динамики дискретных сред хорошо развиты как аналитические, так и численные методы решения.

Если прослойки в блочной среде являются достаточно жёсткими, то необходимо учитывать деформирование блоков. Одним из очевидных вариантов к описанию такого блочного массива может выступать модель кусочно-однородной деформируемой среды. Поскольку прослойки являются, как правило, достаточно тонкими, можно рассматривать их в качестве внутренних граничных условий для блоков. Именно такие модели прослоек с учётом различных реологических свойств рассматривались в работах В. М. Садовского при решении задач в плоской постановке.

Для описания сред с внутренней структурой также применяются континуальные модели. И. С. Никитиным разработаны подходы к построению континуальных сред с блочной и слоистой структурой с учётом сложных реологических свойств таких, как упругопластичность и упруговязкопластичность, а также реализованы эффективные алгоритмы расчёта начально-краевых задач. Для описания деформирования блочных сред с учётом иерархического строения применяются модели на основе неархимедова анализа (А. Ф. Ревуженко). Для многоблочных сред применяются также модели обобщённых континуумов, учитывающие вращательные степени свободы представительного объёма сплошной среды.

Цель исследования состоит в построении пространственных математических моделей, описывающих динамическое поведение сред блочного строения с учётом сложной реологии, а также в численной и программной реализации пред-

ложенных моделей для решения прикладных задач на высокопроизводительных ЭВМ.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **научные задачи**:

1. на примере задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн выяснить, при каких условиях тонкий упругий слой может быть представлен в виде модели прослойки, описываемой в виде внутренних граничных условий;
2. построить пространственную модель упругой блочно-слоистой среды с тонкими прослойками, учесть вязкоупругие свойства блоков и прослоек, а также упругопластичность, разномодульность и пористость материала прослоек;
3. разработать численные алгоритмы решения задач динамики блочных сред и создать программный комплекс для высокопроизводительных вычислительных систем кластерной архитектуры;
4. выполнить расчёты задач динамики блочных сред, провести сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными, численно исследовать волновые поля, генерируемые импульсным сейсмоисточником, в однородных и блочных средах.

Основным **методом исследования** является вычислительный эксперимент, предполагающий постановку задачи, описание математической модели, численную реализацию модели с использованием конечно-разностных схем. Полученные математические модели допускают запись в виде симметрических t -гиперболических систем, поэтому к ним применимы хорошо разработанные численные методы. При рассмотрении необратимых деформаций в прослойках математические модели формируются в виде вариационных неравенств, для решения которых используются устойчивые алгоритмы корректировки. Важным этапом является верификация и валидация компьютерных программ.

Достоверность и обоснованность результатов основывается на построении термодинамически корректных моделей, для которых выполнен закон сохранения энергии, на верификации разработанного комплекса программ на тестовых решениях, на соответствии результатов вычислительного эксперимента лабораторным измерениям.

Научная новизна работы отражена в следующем:

1. Получено решение задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой упругой прослойкой, задаваемой в виде внутренних граничных условий. Проведено сравнение полученного решения с решением в среде с упругим слоем. Показано, что рассматриваемая модель применима для сред с достаточно тонкими и податливыми прослойками.
2. К решению задач динамики блочных сред применена пространственная модель с тонкими прослойками. Разработан комплекс параллельных программ, позволяющий учитывать иерархичность блочной среды.

3. Численно исследованы некоторые задачи распространения волн в блочных средах. В частности, рассмотрены задачи с заглубленным упругим и упруго-пластическим включением в блочном полупространстве. Также показано хорошее соответствие численного решения и результатов лабораторных измерений на примере задачи о распространении волн в сборке из блоков, закреплённой по контуру. Получены оригинальные результаты исследования волновых полей в грунтовых массивах от воздействия сейсмоисточника импульсного типа.

Теоретическая значимость. Прослойки, заданные в виде внутренних граничных условий для блоков, позволяют в более простом виде описывать процессы, происходящие между блоками. Одним из перспективных направлений развития работы состоит в исследовании волн разрушения, которые распространяются вдоль границ структурных элементов материала. Полученная модель трёхмерной упругой блочно-слоистой среды также может быть использована при проверке гипотез, связанных с решением проблемы об определении параметров модели континуума Коссера.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для анализа распространения волн в средах, для которых характерно блочное строение. В частности, это могут быть задачи геодинамики или сейсмики.

Положения выносимые на защиту:

1. Пространственная математическая модель блочной иерархической среды, учитывающая вязкоупругие свойства блоков и прослоек, а также упругопластичность, пористость и разномодульность прослоек.
2. Результаты решения задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой прослойкой.
3. Алгоритм и комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем и результаты численного решения задач распространения волн в блочных средах.
4. Результаты численного исследования волн напряжений и деформаций в грунтовых массивах, генерируемых импульсным сейсмоисточником.

Личный вклад автора состоит в решении задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой упругой прослойкой, в разработке, программировании и тестировании алгоритмов, а также в написании комплекса параллельных программ, в проведении расчётов и обработке полученных результатов, в подготовке научных статей и докладов по материалам диссертационной работы. Научному руководителю В. М. Садовскому принадлежит постановка задач, рассматриваемые уравнения прослоек в виде внутренних граничных условий, описание необратимых деформаций прослоек с использованием обобщённого реологического метода.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертация соответствует паспорту научной специальности: 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела» по следующим пунктам:

2. Теория определяющих соотношений деформируемых тел с простой и сложной структурой.
3. Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости.
8. Динамика деформируемого твёрдого тела. Теория волновых процессов в средах различной структуры.
12. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

Апробация работы.

Основные результаты научного исследования были представлены на конференциях:

1. 27-ая, 28-ая, 29-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Красноярск, 2021, 2023; Челябинск, 2025);
2. Перспективы математического моделирования физических процессов в много- масштабных геологических средах (Краснодарский край, ФТ «Сириус», 2023, 2024);
3. XXI, XXIII Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2020, 2022);
4. Открытая конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН (Красноярск, 2020, 2021, 2022, 2023, 2025);
5. XXIV, XXV Международные научно-практические конференции, посвященные памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика Михаила Федоровича Решетнева (Красноярск 2020, 2021);
6. XI, XII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова (Краснодарский край, пос. Кабардинка, 2022; Краснодарский край, пос. Джанхот, 2023);
7. Международные конференции Евро-Американского консорциума по продвижению приложений математики в технических и естественных науках AMiTaNS (Online, 2020, 2021);
8. Конференция международных математических центров мирового уровня. Математическое моделирование в геофизике (Краснодарский край, ФТ «Сириус», 2021).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 137 страниц, 49 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 188 наименований.

Содержание работы

Во **введении** дано обоснование актуальности диссертации, сформулированы цели и задачи работы, научная новизна, практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту.

В **обзоре литературы** приведены работы по теме исследования. Первый раздел посвящён средам блочного строения, к которым прежде всего относятся горные породы. В работах М. А. Садовского была разработана фундаментальная концепция о блочном иерархическом строении горных массивов, которые представляются в виде системы вложенных друг в друга блоков, разделённых тонкими прослойками. Вопросы деформирования блочных горных пород рассматривались в работах таких авторов, как М. В. Курлена, В. Н. Опарин, Г. Г. Кочарян. В статьях М. В. Курлени и В. Н. Опарина изучались различные динамические эффекты, наблюдаемые в блочных средах, например, маятниковые волны. Они возникают, когда прослойки намного податливее блоков, и деформирование блочного массива происходит преимущественно за счёт прослоек. Вопросами распространения маятниковых волн в блочных средах занимались Е. Н. Шер, А. Г. Черников, В. А. Сарайкин, Н. И. Александрова и др.

При математическом моделировании волновых процессов, происходящих в блочных средах, применяются различные подходы. Когда блоки намного жёстче прослоек, можно их представить как абсолютно твёрдые тела, а среду описывать в виде дискретно-периодической решётки масс с упругими связями. Модели такого типа были хорошо исследованы численно и аналитически Н. И. Александровой. Данные модели имеют различные модификации, учитывающие сложные реологические свойства и иерархичность. В работах Е. Н. Шера, В. А. Сарайкина и А. Г. Черникова были рассмотрены дискретные модели, учитывающие упругость блоков.

Модели сред с упругими деформируемыми блоками и прослойками, заданными в виде внутренних граничных условий, рассмотрены в работах В. М. Садовского и О. В. Садовской. Данные модели применимы для сред с тонкими прослойками. Уравнения получаются путём осреднения по толщине прослойки уравнений движения и определяющих соотношений. В плоской постановке уравнения для упругой прослойки, соединяющей прямоугольные блоки в направлении оси x_1 , примут вид:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta}. \end{aligned}$$

Параметры материалов прослоек обозначены штрихами, δ – толщина прослойки, а верхние индексы «+» и «-» обозначают скорости и напряжения, относящиеся к границам взаимодействующих блоков. В рамках данного подхода были реализованы математические модели прослоек, учитывающие различные реологические свойства.

В некоторых работах В. М. Садовского для моделирования распространения волн в многоблочных средах используется модель Коссера. Данная модель является обобщённым континуумом, в котором расширяется понятие о представительном объёме сплошной среды, и помимо поступательных степеней свободы учитываются ещё и вращательные. Модели обобщённых континуумов широко используются для материалов с внутренней структурой, например для композитов и метаматериалов (В. И. Ерофеев).

А. Ф. Ревуженко предложил оригинальный подход к построению математических моделей геоматериалов с внутренней структурой на основе неархимедова анализа. Данный метод позволяет описывать иерархические среды на микро- и макромасштабном уровне с учётом блочности. Указанный подход был развит в работах С. В. Лаврикова при изучении различных вопросов деформирования горных материалов.

Также уделяется внимание обзору работ, посвящённых моделированию эффекта затухания волн в горных породах. Проведён краткий обзор литературы по конечно-разностным методам решения задач динамики деформируемых сред.

Первая глава посвящена блочным средам с упругими блоками и прослойками. В **разделе 1.1** решается задача об определении коэффициентов отражения и прохождения волн при падении плоской продольной монохроматической волны на упругий слой и на прослойку, заданную в виде внутренних граничных условий. Для решения задачи использован классический подход, основанный на разложении вектора перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие:

$$\vec{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\psi}.$$

Здесь φ и $\vec{\psi}$ скалярный и векторный потенциал перемещений. Подстановка данного выражения в уравнения Ламе даёт две независимые подсистемы продольных и поперечных волн. Рассматривается плоская задача, в которой $\psi = \psi_3$, а компоненты \vec{u} равны:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Рассматривается решение в виде плоских монохроматических волн. На тонкий плоский слой, расположенный параллельно оси x_1 , под углом θ_p к оси x_2 падает продольная монохроматическая волна с частотой ω единичной амплитуды

$$\varphi_0 = e^{i\omega(t + \frac{\sin \theta_p}{c_p} x_1 - \frac{\cos \theta_p}{c_p} x_2)}.$$

При взаимодействии с границей в упругой среде возникает два типа волн: продольные и поперечные. Задача состоит в определении амплитуд прошедших и отражённых волн. На границах слоя $x_2 = 0$ и $x_2 = \delta$ ставятся условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$[u_1] = 0, \quad [u_2] = 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0. \quad (1)$$

Представление прослойки в виде внутренних граничных условий приводит к дифференциальнно-разностным соотношениям на границе раздела сред $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины с индексами «+» и «-» относятся к границам сред, расположенных выше и ниже оси x_1 , соответственно. После выражения скоростей перемещений и напряжений через потенциалы деформаций из условий (1) и (2) получаются системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ и $A\vec{y} = \vec{g}$. В качестве неизвестных выступают амплитуды продольных и поперечных волн, выраженные через потенциалы перемещений. Вектор неизвестных в задаче с упругим слоем содержит восемь компонент: $\vec{x} = (R_p, R_s, A_p, A_s, B_p, B_s, T_p, T_s)$. Среди них амплитуды продольных и поперечных волн внутри слоя: A_p, B_p, A_s, B_s . Интерес представляют коэффициенты отражения продольных и поперечных волн R_p и R_s , а также коэффициенты прохождения (преломления) T_p и T_s . В задаче с прослойкой в виде внутренних граничных условий вектор состоит из четырёх неизвестных: $\vec{y} = (\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s)$. Матрицы A и B для полученных линейных систем уравнений имеют достаточно громоздкий вид, не говоря о символьном решении этих систем. Поэтому для получения зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения и от толщины прослойки численно решались системы уравнений для каждого θ_p и δ . Искомые коэффициенты отражения и прохождения, вообще говоря, являются комплекснозначными, где модуль выражает амплитуду волны, а аргумент показывает сдвиг фазы при взаимодействии с границей. Сравниваются модули коэффициентов. Упругие параметры прослойки и среды связаны соотношениями: $\rho'/\rho = c'_p/c_p = c'_s/c_s = 0.7$.

На рисунке 1 показаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения продольных волн при фиксированных углах падения θ_p в зависимости от относительной толщины прослойки δ/l , где $l = 2\pi c_p/\omega$ – длина волны. Модель тонкой прослойки не учитывает интерференции, которая имеет место в упругом слое, поэтому толщина прослойки не должна превышать четверти длины волны.

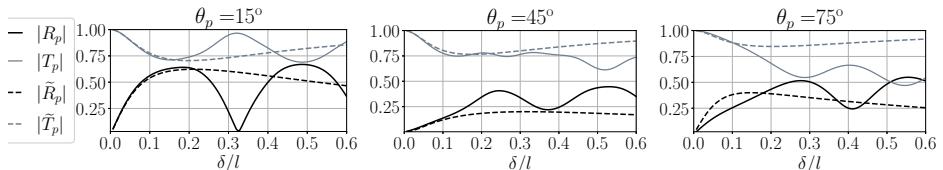


Рисунок 1 – Коэффициенты отражения и прохождения продольных волн в зависимости от толщины прослойки при падении плоской продольной волны под фиксированным углом при $\nu = \nu' = 0.25$

При численном решении задач распространения волн в блочных средах с тонкими прослойками, параметры которых $\rho' = \rho$, $c'_p = c_p$, $c'_s = c_s$, наблюдаются

нефизичные отражения от прослоек. Для оценки влияния податливости материала прослоек на границы применимости используемой модели предложено вычислить относительную погрешность

$$err = \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|}.$$

Здесь $\vec{x} = (|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, $\vec{y} = (|\tilde{R}_p|, |\tilde{R}_s|, |\tilde{T}_p|, |\tilde{T}_s|)$ – решения для сред со слоем и прослойкой, соответственно. Компоненты векторов представляют собой функции от θ_p , δ и коэффициента q , с помощью которого задаются упругие параметры прослоек: $\rho' = \sqrt{q}\rho$, $c'_p = \sqrt{q}c_p$, $c'_s = \sqrt{q}c_s$. Относительная погрешность вычислена в норме

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\int_0^{\pi/2} (|R_p|^2 + |R_s|^2 + |T_p|^2 + |T_s|^2) d\theta}.$$

На рисунке 2 построены зависимости относительной погрешности $err(\delta/l, q)$.

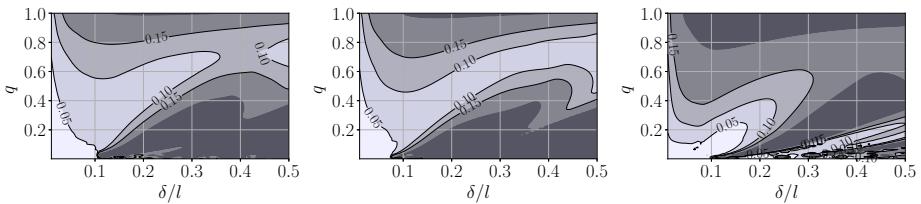


Рисунок 2 – Зависимость $err(\delta/l, q)$ для сред с $\nu = \nu' = 0.05$, $\nu = \nu' = 0.25$ и $\nu = \nu' = 0.45$

Если норма задаётся как $\|\vec{x}\| = \max_{\theta_p}(|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, то полученные распределения $err(\delta/l, q)$ практически не отличаются. Изменение способа задания ρ' , c'_p , c'_s приводит к более значительным изменениям, однако область с малой погрешностью будет находиться вблизи начала координат. Анализ решения в виде плоских монохроматических волн показал, что рассматриваемые уравнения упругих прослоек с приемлемой точностью могут моделировать волновые процессы в средах с достаточно тонкими и в то же время податливыми прослойками. Предложенная модель тонких прослоек также пригодна для описания длинноволновых процессов.

В разделе 1.2 описывается математическая модель трёхмерной блочной среды с упругими блоками и прослойками (рисунок 3). Однородные изотропные упругие блоки в форме параллелепипедов и описываются системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} = E_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь $E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ – тензор модулей упругости, δ_{ij} – символ Кронекера. Для описания упругих прослоек толщиной δ_1 , соединяющих блоки в

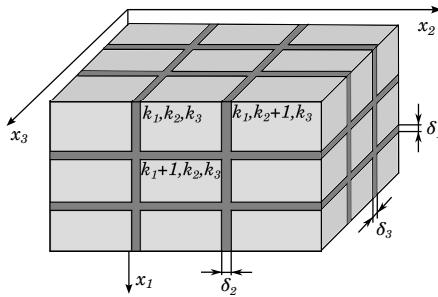


Рисунок 3 – Пространственная модель блочно-слоистой среды

направлении x_1 , используются уравнения:

$$\begin{aligned}
 \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \\
 \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} &= \mu' \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1}.
 \end{aligned}$$

Упругие параметры прослоек обозначаются штрихами, индексы «+» и «-» указывают на скорости и напряжения, относящиеся к границам взаимодействующих блоков. Аналогично записываются уравнения для прослоек в направлениях x_2 и x_3 . Для полученной математической модели блочной среды выполняется закон сохранения энергии. Для области блочного пространства он выражается в виде суммы кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек, равной потоку вектора Умова-Пойнтинга через границу области. Полученная модель допускает корректную постановку начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями.

Раздел 1.3 посвящён описанию численного алгоритма, который основан на методе двуциклического расщепления по пространственным координатам Г. И. Марчука. Для решения одномерных расщеплённых задач динамики упругих блочных сред предлагается два метода. В первом для вычисления решения в блоках использована схема распада разрыва С. К. Годунова с применением предельной реконструкции инвариантов, а для прослоек применён бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова. Второй алгоритм полностью строится на основе метода Г. В. Иванова с контролируемой диссипацией. Преимущества данной схемы заключаются в возможности регулировки схемной диссипации, а также в безусловной устойчивости, позволяющей выбирать произвольный шаг по времени при счёте. Однако выбор слишком крупных шагов по времени приводит к росту погрешности численного решения.

Был разработан авторский комплекс параллельных программ с использованием библиотеки MPI (Message Passing Interface). Программный комплекс позволя-

ет учитывать иерархическое строение блочной среды. То есть вычислительная область, состоящая из крупных блоков первого иерархического уровня, может быть раздроблена на более мелкие блоки, которые в свою очередь также могут состоять из некоторого числа ещё меньших блоков и так далее. Блоки в форме параллелепипедов могут иметь произвольные размеры. В коде программы реализована трёхмерная декомпозиция области, обеспечивающая оптимальный режим обмена данными. При распараллеливании схемы Годунова использовался стандартный подход, при котором обмены данными между процессами происходят на шаге «предиктор», на котором вычисляются значения на границах ячеек сетки путём решения задачи о распаде разрыва. Для схемы Иванова трудность распараллеливания заключается в том, что на шаге «предиктор» получается трёхдиагональная система, решаемая методом прогонки. Один из очевидных способов распараллеливания состоит в применении метода Коновалова и Яненко к алгоритму прогонки. Предложен более простой альтернативный подход, который предполагает использование схемы Годунова с дальнейшим итерационным пересчётом значений на границах областей, обрабатываемых разными MPI-процессами.

Для решения задач в блочном полупространстве использован простой способ моделирования слабоотражающих граничных условий, состоящий в приравнивании нулю инвариантов Римана, переносящих возмущения внутрь вычислительной области.

В разделе 1.4 численно решена задача Лэмба в пространственной постановке для упругой блочной среды. Рассмотрены среды с различной толщиной и податливостью прослоек. Показано, что увеличение толщины и податливости прослоек приводит к снижению скорости распространения волн, изменению формы волновых фронтов, а также к увеличению амплитуд и периода волн, возникающих за счёт деформирования прослоек.

Было проведено качественное сравнение с решением, полученным для дискретно-периодической модели блочной среды (Н. И. Александрова). Вычислительная область, в которой рассматривается блочное полупространство, состоит из $45 \times 45 \times 45$ кубических блоков размером H , на каждый из которых приходится 16^3 ячеек сетки. Коэффициент Пуассона равен 0.25. Блоки разделены прослойками толщиной $\delta = 0.0625H$. Рассматриваемая дискретная решётка состоит из жёстких блоков массой $M = \rho H^3$, длиной пружин $l = H + \delta$ и коэффициентами жёсткости пружин $K_1 = K_2 = \tilde{c}_p^2 M / (3l^2)$, где \tilde{c}_p – средняя скорость волн в блочной среде, K_1 – жёсткость пружин, соединяющих массы в направлениях осей координат, а пружины жёсткостью K_2 связывают массы в «диагональных» направлениях. Случай $K_1 = K_2$ соответствует изотропной среде с коэффициентом Пуассона 0.25. В дискретно-периодической среде жёсткие блоки представляются в виде сосредоточенных масс и деформирование происходит только за счёт прослоек. На рисунке 4 показаны осциллограммы поверхностных волн в однородной среде с осреднёнными параметрами, в упругой блочной среде с тонкими прослойками и в дискретно-

периодической среде при различной податливости прослоек. Волновые картины в средах становятся качественно схожими, когда блоки намного жёстче прослоек. При описании волновых процессов в средах с достаточно жёсткими блоками или податливыми прослойками с вычислительной точки зрения выгоднее применять модели дискретно-периодических сред, даже если в расчётах для каждого блока отводится одна ячейки разностной сетки.

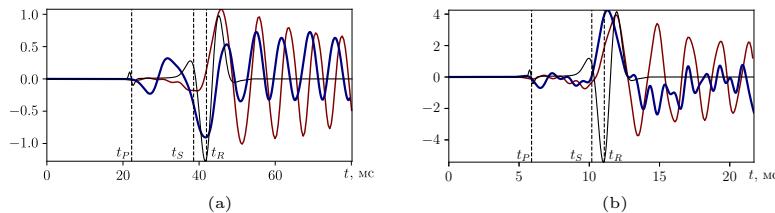


Рисунок 4 – Осциллограммы вертикальной компоненты скорости поверхностных волн $v_1(t)$ блока $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 23$ для среды с $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 625$ (а) и 80 (б). Красные линии показывают решение в дискретно-периодической решётке, синие в блочной среде с упругими блоками и прослойками, чёрные в однородной упругой среде с осреднёнными параметрами

Вторая глава посвящена блочным средам со сложными реологическими свойствами. В разделе 2.1 рассматривается модель стандартного линейного вязкоупругого тела (Standard Linear Solid, SLS) и её обобщённая версия (Generalized Standard Linear Solid, GSLS). Она представляет собой параллельное соединение нескольких SLS-механизмов. Для учёта вязкоупругости в блоках используется модель с упругим деформированием объёма. Уравнения для блоков, описываемых моделью GSLS, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{1}{3K} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \delta_{ij} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\mu_0 m} \frac{\partial \sigma'_{ij, m}}{\partial t} &= \frac{M}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \sum_{m=1}^M \frac{\sigma'_{ij, m} - s'_{ij, m}}{\eta_m}, \\ \frac{1}{2\mu_m} \frac{\partial s'_{ij, m}}{\partial t} &= \frac{\sigma'_{ij, m} - s'_{ij, m}}{\eta_m}. \end{aligned}$$

Здесь $m = 1, \dots, M$ – номер SLS-механизма, $s'_{ij, m}$ – тензор условных напряжений, относящийся к упругим элементам μ_m , δ_{ij} – символ Кронекера. Записанная в таком виде система принадлежит к классу симметрических t -гиперболических, что обеспечивает корректность математической модели и позволяет применять хорошо разработанные вычислительные методы. Данная модель имеет $3M$ степеней свободы, для их сокращения вводится допущение о равенстве между собой всех длительных модулей, выражаемых формулой $\mu_{\infty m} = \mu_0 m \mu_m / (\mu_0 m + \mu_m)$. В этом случае модель эквивалентна обобщённой модели Максвелла, так как имеет $2M + 1$ независимых коэффициентов.

Экспериментальные исследования показывают, что для горных пород характерна постоянная добротность (затухание) в сейсмическом частотном диапазоне. Особенность модели GSLS состоит в том, что она позволяет описывать среды с постоянной добротностью в заданном интервале частот. В работах Г. В. Решетовой, В. А. Чеверды, В. В. Лисицы данной модель используется при численном решении задач, связанных с особенностями распространения волновых полей в неоднородных многомасштабных геологических средах. Авторами были построены эффективные численные алгоритмы для решения широкого класса задач. В частности, было показано, что для моделирования постоянной добротности вполне достаточно использовать от 2 до 4 SLS-механизмов.

Вязкоупругие свойства прослоек учитываются только при сдвиговых движениях блоков. Уравнения для прослоек записываются в следующем виде:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right),$$

$$\frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2} = \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right),$$

где s относится к напряжению на элементе μ' . Модели сред с упругими (вязкоупругими) блоками и упругими (вязкоупругими) прослойками являются термодинамически согласованными и для них выполняется закон сохранения энергии.

Численный метод решения для вязкоупругих блочных сред описывается в **разделе 2.2**, он несущественно отличается от построенного алгоритма решения для упругих сред. Так же решаются одномерные задачи теории упругости, но добавляется дополнительный этап расщепления с системой уравнений, учитывающей вязкие процессы.

В **разделе 2.3** проведено сравнение с лабораторным экспериментом. Рассматривалась модель из упругих блоков, разделённых вязкоупругими прослойками, в плоской и пространственной постановке. В эксперименте, результаты которого были опубликованы в статье В. А. Сарайкина, А. Г. Черникова и Е. Н. Шера (2015, ПМТФ), рассматривалась закреплённая по контуру сборка 6×6 блоков из оргстекла, блоки разделялись тонкими резиновыми слоями. Блок с координатами (1, 2) подвергался ударному воздействию. В течение 5 мс после удара измерялись ускорения блоков. Зависимости ускорения от времени, измеренные в ходе эксперимента, обозначены синей пунктирной линией. Красные сплошные линии показывают результаты вычислений для модели динамического взаимодействия блоков, предложенной вышеупомянутыми авторами. Кривыми зелёного и фиолетового цвета показаны результаты численного эксперимента в двумерной и в трёхмерной постановке, соответственно. Результаты численного моделирования хорошо соотносятся с данными эксперимента. Вычисленные ускорения качественно воспроизводят экспериментальные зависимости, заметны некоторые расхождения в фазе и амплитуде. Существенные различия расчётов и эксперимента обнаруживаются для блока (2, 2)

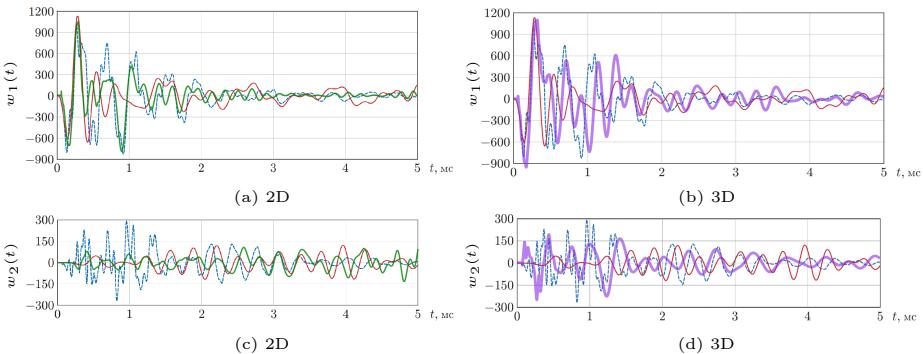


Рисунок 5 – Компонента ускорения $w_1(t)$ и $w_2(t)$ блока (2, 2) при решении задачи в плоской постановке и в пространственной постановке

в начальные моменты времени на графиках с ускорением w_2 (рисунок 5 с). В расчётах по двумерной модели не воспроизводятся высокочастотные колебания большой амплитуды. Это связано с тем, что ускорения в двумерной модели не вполне соответствуют реально измеренным, поскольку в эксперименте акселерометры располагались на боковых гранях. Трёхмерная модель блочной среды с расположением акселерометров на боковых гранях блоков даёт более точные результаты (рисунок 5 д). При использовании модели упругих прослоек характер кривых практически не изменится, отсутствие затухания в прослойках даст более высокие амплитуды при $t > 1$ мс.

В разделе 2.4 для описания уплотнения межблочного материала применяется модель пористых прослоек. Модель пористой среды является частным случаем модели разномодульной среды. На рисунке 6 представлены реологические схемы разномодульного и пористого материалов. Разномодульный материал при растяжении податлив и имеет модуль b_2 , а модуль при сжатии $b_1 + b_2$. Пористый материал податлив и при сжимающих нагрузках до момента полного смыкания контакта. В пористых прослойках задаётся изначальная пористость ψ_0 , при $\psi_0 = 0$ получается модель разномодульного материала. Пористость ψ_0 не имеет прямого отношения к объёмной доле пустоты в материале и задаётся как изначальная деформация контактного элемента. Уравнения движения и определяющие соотношения пористой



Рисунок 6 – Реологические схемы разномодульной и пористой среды

прослойки записываются следующим образом:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v^+ - v^-}{\delta},$$

$$\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = b_2\varepsilon + b_1\pi(\varepsilon + \psi_0), \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon - \pi(\psi_0 + \varepsilon).$$

Здесь ψ – текущая пористость, $\pi(\cdot)$ – оператор проекции на неположительную ось.

В разделе 2.5 рассматривается модель упругопластических прослоек для описания проскальзывания блоков. Предполагается, что нормальное напряжение между блоками не влияет на пластическую деформацию в прослойках, возникающую при сдвиге. Для прослойки, соединяющей блоки в направлении x_1 , уравнения имеют вид:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta}, \quad \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta},$$

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} = \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \mu' \left(\frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta} - e_{12}^p \right), \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} = \mu' \left(\frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta} - e_{13}^p \right).$$

Вариационное неравенство для прослойки записывается в следующем виде:

$$e_{12}^p(\delta\sigma_{12}^+ + \delta\sigma_{12}^-) + e_{13}^p(\delta\sigma_{13}^+ + \delta\sigma_{13}^-) \leq 0.$$

Здесь $e_{ij}^p = \partial\varepsilon_{ij}/\partial t$ – тензор скоростей пластической деформации, $\delta\sigma_{ij}^\pm = (\tilde{\sigma}_{ij}^\pm - \sigma_{ij}^\pm)$ – произвольная допустимая вариация напряжений. Рассматривается условие текучести вида с пределом текучести τ_s :

$$\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{13}^2 \leq 2\tau_s^2.$$

В разделе 2.6 рассматривается блочное полупространство с заглубленным упругопластическим включением с относительно низким пределом текучести σ_s^i . Упругопластический материал описывается моделью Прандтля-Рейсса с условием текучести Мизеса. Численно исследуется влияние параметров блочной среды на развитие пластической деформации во включении вследствие приложения ударной нагрузки на свободной поверхности. На площадку радиусом $r_0 = 0.02$ м приложено напряжение $\sigma_{11}(0, x_2, x_3) = p_0\delta(t)$ амплитудой $p_0 = 250\sigma_s^i$. В вычислительной области размером $1\text{м} \times 1\text{м} \times 1\text{м}$ рассматривается включение $0.25\text{м} \times 0.65\text{м} \times 0.45\text{м}$ на глубине 0.65 м. Упругие параметры блоков и включения заданы следующими:

$$\rho = 3000 \frac{\text{КГ}}{\text{м}^3}, c_p = 5000 \frac{\text{М}}{\text{с}}, c_s = 3000 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad \rho^i = 2500 \frac{\text{КГ}}{\text{м}^3}, c_p^i = 4000 \frac{\text{М}}{\text{с}}, c_s^i = 1800 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Податливые прослойки толщиной $\delta' = 1.25$ мм имеют параметры: $\rho' = 0.65\rho$, $c_p' = 0.65c_p$, $c_s' = 0.65c_s$. Вычислялись относительные глубины H_p/H и объёмы V_p/V пластически проформированной области, где V и H – объём и высота включения, а V_p и H_p – объём и глубина области. На рисунке 7 изображены снимки волнового

поля в упругих блочных средах с вклюением, где чёрным цветом показана область, в которой произошла пластическая деформация. Заметно, что размер этой области зависит от количества блоков, на которые раздроблена среда. Параметр n выражает количество блоков в направлении оси x_1 .

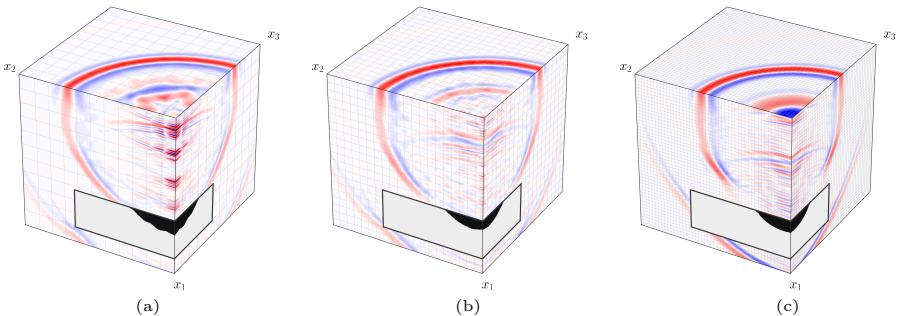


Рисунок 7 – Снимки волнового поля в среде из упругих кубических блоков с упругими прослойками ($\delta' = 1.25$ мм, $\rho'/\rho = c'_p/c_p = c'_s/c_s = 0.65$) и упругопластическим вклюением: (а) $n = 12$, (б) $n = 21$, (в) $n = 53$

На рисунке 8 показаны зависимости H_p/H и V_p/V от количества блоков или горизонтально уложенных слоёв для сред с упругими прослойками. Дробление среды на блоки или слои приводит к уменьшению размеров области пластической деформации в заглубленном вклюении, затем по мере увеличения n её размеры возрастают. Способ расположения блоков также играет важное значение, например, кирпичная кладка (кривая 4) лучше препятствует развитию пластической деформации во вклюении.

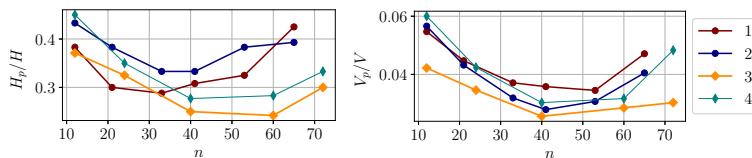


Рисунок 8 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества блоков (слоёв) в упругих средах с прослойками: 1 – среда с кубическими блоками одинаковых размеров; 2 – горизонтально-слоистая среда; 3 – кирпичная кладка из блоков с $\text{д:ш:в} = 4:2:1$; 4 – те же блоки, сложенные без смещений

На рисунках 9–11 показаны аналогичные зависимости H_p/H и V_p/V для сред из кубических блоков с учётом сложных реологических свойств. Для сред с вязкоупругими блоками или прослойками (рисунок 9) заметно, что изменение параметров вязкоупругих прослоек слабо влияет на зависимости V_p/V и H_p/H . Для блоков задаются добротности продольных и поперечных волн Q_p и Q_s . Учёт затухания в блоках оказывает более существенное влияние. В средах с упругопластическими прослойками, моделирующими проскальзывание блоков, во вклюении

развиваются большие пластические деформации, когда проскальзывание блоков начинается при меньших τ_s (рисунок 10). В средах с разномодульными прослойками пластически продеформированная область во включении крупнее, чем в средах с пористыми прослойками (рисунок 11). Зависимости H_p/H и V_p/V от n в среде с разномодульными прослойками сначала убывают, затем растут, а в средах с пористыми прослойками после определённого n достигают нуля. Стоит также отметить, что увеличение ψ_0 приводит меньшим значениям H_p/H и V_p/V .

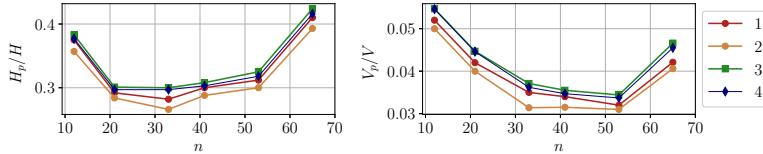


Рисунок 9 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах: 1 – с вязкоупругими блоками $Q_p = 30$, $Q_s = 15.5$; 2 – с вязкоупругими блоками $Q_p = 20$, $Q_s = 11$; 3 – с вязкоупругими прослойками $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.025$ с; 4 – с вязкоупругими прослойками $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.001$ с

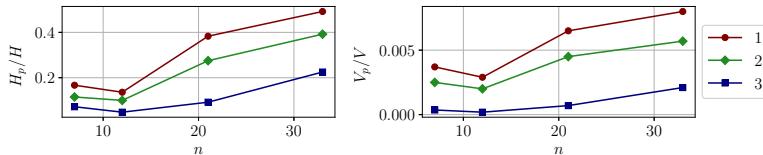


Рисунок 10 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах с упругими блоками и проскальзывающими прослойками, предел текучести τ_s у которых:

$$1 - \sigma_s^i/4; 2 - \sigma_s^i/2; 3 - \sigma_s^i$$

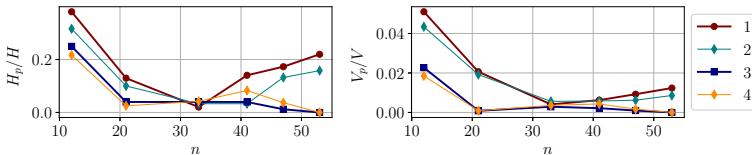


Рисунок 11 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах с упругими блоками и пористыми прослойками: 1 – $\psi_0 = 0$, $b_2 = 0.45b$; 2 – $\psi_0 = 0$, $b_2 = 0.25b$; 3 – $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.45b$; 4 – $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.25b$

Численному анализу волновых полей, возбуждаемых импульсным сейсмоисточником, посвящена **третья глава**. В разделе 3.1 рассматриваются однородные и плоскослоистые среды, описываемые в рамках осесимметричной постановки задачи. Сейсмоисточник генерирует импульс, при котором давление платформы на грунт сначала линейно возрастает на протяжении времени t_g , затем некоторое время t_g остаётся постоянным, после чего сбрасывается (рисунок 12). Прове-

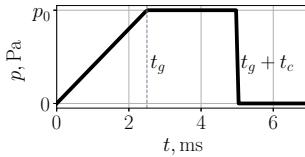


Рисунок 12 – Зависимость давления от времени сейсмоисточника

дено сравнение напряжённо-деформированного состояния приповерхностных грунтов при статическом нагружении и импульсном в момент перед разгрузкой. Оценено влияние параметров сейсмоисточника на характер амплитудно-частотных характеристик и сейсмического КПД. Проведённые расчёты при постоянной энергии сейсмоисточника показали, что увеличение радиуса жёсткой платформы немного увеличивает эффективность его работы, более заметный положительный эффект оказывает увеличение длительности импульса.

В разделе 3.2 представлены результаты моделирования волновых полей в блочных средах при фиксированных характеристиках сейсмоисточника. Было показано, что изменение параметров блочной среды практически не влияет на сейсмический КПД. Вид амплитудно-частотных характеристик в большей степени зависит от параметров блочной среды. В частности, увеличение податливости прослоек приводит к росту амплитуд низких частот и уменьшению амплитуд высокочастотного спектра (рисунок 13 а). При удалении точки измерения частотных характеристик от источника наблюдается уменьшение амплитуд высокой частоты, таким образом блочная среда выступает в роли фильтра низких частот (рисунок 13 б).

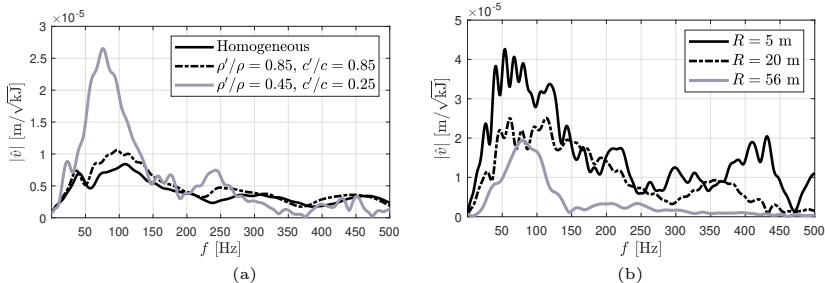


Рисунок 13 – Амплитудно-частотные характеристики источника с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс и радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м, измеренные на глубине $X = 30$ м в блочных средах: (а) с различной податливостью прослоек, (б) на различных расстояниях R от оси x_1

Также было изучено влияние реологии прослоек на амплитудно-частотные характеристики. Учёт вязкоупругости в прослойках не приводит к существенным изменениям, в то время как в среде с вязкоупругими блоками наблюдается снижение амплитуд. Снижение амплитуд и сдвиг спектра в сторону меньших частот наблюдается в средах с упругопластическими прослойками по мере уменьшения предела

текучести τ_s . В средах с пористыми прослойками многое зависит от модулей b_1 и b_2 (рисунок 6). Для сред, прослойки которых слишком податливы при растяжении, снижение пористости ψ_0 приводит к снижению амплитуд и сдвигу максимума в сторону меньших частот.

Рассмотрена задача об отражении сигнала от заглубленного упругого податливого включения в блочном полупространстве (рисунок 14 а). Блочная среда имеет два иерархических уровня прослоек. Вычислительная область представляет собой куб со сторонами 48 м и в каждом из направлений содержит $n' = 22$ прослойки первого иерархического уровня толщиной δ' и $n'' = 31$ прослойку второго уровня толщиной δ'' . Наиболее крупные блоки, по всем граням соединённые прослойками первого уровня, представляют собой кубы со стороной ≈ 2.09 м. Они содержат внутри себя блоки в форме параллелепипедов различных размеров, так как соотношение n''/n' количества прослоек на разных иерархических уровнях есть нецелое число, иначе бы получилась регулярная структура из кубических блоков. Все блоки упругие и описываются параметрами $\rho = 2400 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c_p = 4500 \text{ м}/\text{с}$, $c_s = 2700 \text{ м}/\text{с}$. Упругое включение, описываемое параметрами $\rho = 2200 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c_p = 1800 \text{ м}/\text{с}$, $c_s = 500 \text{ м}/\text{с}$, имеющее размеры $6\text{м} \times 27\text{м} \times 27\text{м}$, располагается на глубине 39 м. Исследовано влияние параметров прослоек блочной иерархической среды на отражённый от включения сигнал, зафиксированный на свободной поверхности. На поверхности блочного полупространства выбрана точка таким образом, что во всех экспериментах поверхностная волна Релея проходит быстрее, чем отражённая от включения продольная волна (рисунок 14 б). Координаты точки измерения равны $x_2 = 18$ м, $x_3 = 18$ м. Сравнивалось два сигнала: с включением и без него. Вычислялась относительная разница максимальных амплитуд с момента прихода отражённой от включения волны t_p^* :

$$d = \left(\max_{t > t_p^*} |v_1 - v_1^b| \right) / \left(\max_{t > t_p^*} |v_1| \right).$$

В таблице 1 показаны значения d в зависимости от толщины и податливости просло-

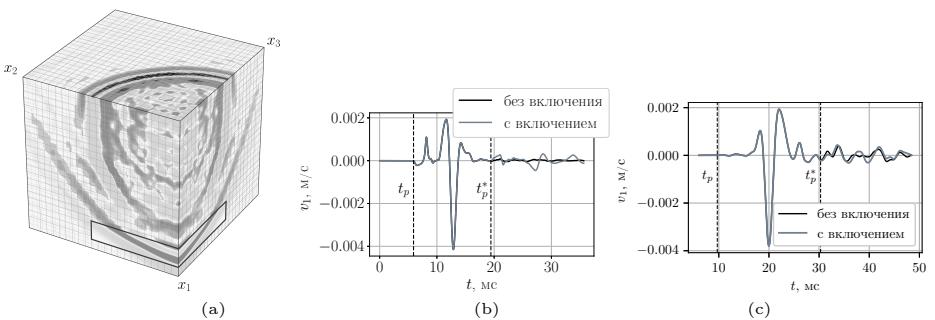


Рисунок 14 – Линии уровня v_1 в среде с упругим включением (а), осциллограммы поверхности волн $v_1(t)$ (б), (с)

ек. Качество отражённого от податливого включения сигнала существенным образом

Таблица 1 – Значения d в упругих блочных средах

№	ρ' кг/м ³	ρ'' кг/м ³	c'_p м/с	c''_p м/с	c'_s м/с	c''_s м/с	δ' мм	δ'' мм	d	
									$t_i = 5$ мс	$t_i = 2$ мс
I	1350	1800	2531	3375	1519	2025	22	15	2.976	2.844
II	1014	1560	1901	2925	1141	1755	22	15	1.913	1.182
III	1350	1800	2531	3375	1519	2025	66	45	2.176	1.244
IV	1014	1560	1901	2925	1141	1755	66	45	1.221	0.783

зом зависит от параметров блочной среды. Чем больше толщина упругих прослоек и их податливость, тем сложнее обнаружить включение. В среде со слишком тонкими прослойками волны распространяются почти как в однородной среде. Увеличение длительности импульса сейсмисточника t_i не приводит к значительным изменениям.

Вне зависимости от времени и формы импульса в среде с прослойками, обладающими достаточной податливостью и толщиной, возможна ситуация, когда включение практически невозможно обнаружить. На рисунке 14 (с) показаны поверхностные волны в точке, удалённой на $x_2 = 18$ м, $x_3 = 18$ м. Пунктирной линией показано время t_p^* прихода отражённого от включения сигнала. Параметры прослоек ρ', c'_p, c'_s соответствуют случаю II таблицы 1, но количество прослоек в рассматриваемой области $n' = 37$, $n'' = 53$, а толщина прослоек на соответствующих иерархических уровнях $\delta' = 114$ мм и $\delta'' = 80$ мм. Заметно, что рассеяние волн приводит к тому, что различия между волнами на поверхности сред с включением и без него практически не наблюдаются.

Заключение. Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Решена задача о распространении плоской монохроматической волны в среде с упругим слоем и с прослойкой, заданной в виде внутренних граничных условий. Было установлено, что рассматриваемая упрощённая модель прослойки применима для описания волн в среде с достаточно тонкими и податливыми прослойками, а также для описания длинноволновых процессов.
2. Разработана пространственная математическая модель упругой блочной среды с тонкими прослойками. В математической модели блочной среды могут быть учтены вязкоупругие свойства блоков и прослоек. Для описания эффекта проскальзывания блоков использована модель упругопластических прослоек. Также рассмотрены разномодульные и пористые прослойки.
3. Для решения задач динамики блочных сред разработан авторский программный комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем кластерной архитектуры с использованием библиотеки MPI. Алгоритм решения задач основан на методе расщепления по пространственным координатам. Для упругих и вязкоупругих блочных сред реализо-

- вано два конечно-разностных подхода к решению одномерных расщеплённых задач, в одном из которых применяется метод Годунова, во втором используется разностная схема Г. В. Иванова с контролируемой диссипацией. Для сред с пористыми и упругопластическими прослойками используются алгоритмы корректировки решения, которые достаточно просто реализованы за счёт представления прослоек в виде внутренних граничных условий для блоков.
4. Численно решены некоторые задачи распространения волн в блочных средах. Для модели с упругими блоками и вязкоупругими прослойками было проведено сравнение с экспериментом. Расчёты, проведённые в плоской и пространственной постановке, показали приемлемое соответствие данным лабораторных измерений. Рассмотрена задача с заглубленным упругопластическим включением в блочном полупространстве. Также был проведен численный анализ волновых полей, генерируемых импульсным сейсмическим источником, в однородных и блочных средах. Показано влияние параметров блочной среды на качество сигнала, зафиксированного на поверхности после отражения от заглубленного упругого включения.

Перспективы исследования состоят в использовании полученной трёхмерной модели упругой блочной среды для проверки гипотез, связанных с вычислением параметров моментного континуума Коссера через параметры блочной среды. Так же возможно развитие в направлении численного исследования волн разрушения, распространяющихся вдоль границ структурных элементов материалов. Данная задача предполагает рассмотрение особого вида контактных условий между блоками.

Список опубликованных работ по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных изданиях, среди которых 6 входят в список, рекомендованный ВАК, и 6 в журналы, цитируемые в базах данных Web of Science либо Scopus:

1. Ефимов, Е. А. Моделирование распространения волн в блочной среде с тонкими вязкоупругими прослойками в пространственной постановке / Е. А. Ефимов // Сибирский журнал индустриальной математики – 2025. – Т. 27. – №4 – С. 20–33.
2. Efimov, E. A. Wave Propagation in a Blocky-layered Medium with Thin Interlayers / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics – 2025. – Vol. 18. – №1. – P. 119–129.
3. Ефимов, Е. А. Численный анализ воздействия импульсного сейсмисточника на приповерхностные грунты / Е. А. Ефимов // Вестник Башкирского университета – 2022. – Т. 27. – №3. – С. 502–507.
4. Садовский, В. М. Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды / В. М. Садовский, О. В. Садовская, Е. А. Ефимов // Вычислительные методы и программирование – 2021. – Т. 22. – №1. – С. 47–66.
5. Sadovskii, V. M. Finite Difference Schemes for Modelling the Propagation of Axisymmetric Elastic Longitudinal Waves / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, E. A. Efimov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics – 2020. – Vol. 13. – №5. – P. 644–654.
6. Efimov, E. A. Numerical modeling of seismic wavefields in viscoelastic soils under pulse impact / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // AIP Conference Proceedings – 2021. – Vol. 2522. – 110003-1–110003-7.
7. Efimov, E. A. Mathematical Modeling of the Impact of a Pulse Seismic Source on Geological Media / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // AIP Conference Proceedings – 2020. – Vol. 2302. – 120002-1–120002-8.
8. Sadovskii, V. M. Analysis of seismic waves excited in near-surface soils by means of the electromagnetic pulse source "Yenisei" / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, E. A. Efimov // Materials Physics and Mechanics – 2019. – Vol. 42. – №5. – P. 544–557.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. Ефимов, Е. А. Программа расчёта задач динамики трёхмерных блочно-слоистых сред с упругими блоками и тонкими упругими прослойками (3D_blocky_elast_waves) / 07.03.2025 / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025615731.

Подписано в печать 15 декабря 2025.

Формат 60×84/16

Усл. печ. л. 1.5. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ИВМ СО РАН
660036, Красноярск, Академгородок, дом. 50, стр. 44