

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
«Красноярский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»
(ФИЦ КНЦ СО РАН, КНЦ СО РАН)

На правах рукописи



Ефимов Евгений Александрович

**Моделирование волновых движений в
структурно-неоднородных
средах блочного строения в пространственной постановке**

Специальность: 1.1.8 - «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Садовский В. М.

Красноярск 2025

Оглавление

Введение	3
Обзор литературы	11
1 Блочная среда с упругими блоками и прослойками	24
1.1 Отражающие свойства тонких прослоек при распространении плоских монохроматических волн	24
1.1.1 Отражение и прохождение волн в упругой среде с плоским слоем	25
1.1.2 Отражение и прохождение волн в упругой среде с тонкой прослойкой	29
1.2 Трёхмерная модель блочной среды с тонкими упругими прослойками	35
1.3 Численный метод решения	38
1.3.1 Алгоритм решения одномерных задач, основанный на методе распада разрыва Годунова	40
1.3.2 Схема Иванова Г. В. с контролируемой диссипацией для одномерных задач	44
1.3.3 Тестовые расчёты одномерной задачи	49
1.3.4 Тестовые расчёты двумерной задачи	51
1.3.5 Слабоотражающие граничные условия	53
1.4 Задача Лэмба для упругой блочной среды	55
1.4.1 Сравнение с дискретно-периодической моделью	59
2 Блочная среда со сложными реологическими свойствами	63
2.1 Модель стандартного линейного вязкоупругого тела	63
2.1.1 Определяющие уравнения стандартного линейного вязкоупругого тела в одномерном случае	65
2.1.2 Система уравнений динамики вязкоупругой среды	67
2.1.3 Вязкоупругие прослойки	69

2.1.4	Добротность вязкоупругой среды	71
2.1.5	Взаимосвязь добротностей плоских продольных и поперечных волн	76
2.2	Численный метод решения уравнений для вязкоупругих блочных сред	79
2.3	Сравнение с экспериментом	84
2.4	Пористые прослойки	87
2.5	Упругопластические прослойки	91
2.6	Упругопластическое включение в блочной среде	93
3	Исследование волновых полей импульсного сейсмоисточника в однородных и блочных средах	99
3.1	Волновые поля импульсного сейсмоисточника в однородных и плоскостойких средах	100
3.2	Волновые поля импульсного сейсмоисточника в блочных средах . .	107
	Заключение	114
	Приложение	116
	Список литературы	117

Введение

Актуальность работы состоит в большом практическом интересе к изучению нестационарного деформирования неоднородных сред и конструкций. Ярким примером неоднородных сред с блочной внутренней структурой являются горные породы. Современные представления о горных породах позволяют говорить об их блочном иерархическом строении. Ряд исследований показывает, что прослойки, соединяющие блоки породного массива, обладают сложными реологическими свойствами и являются более податливыми, чем блоки. В силу податливости прослоек при деформировании блочного массива существенную роль играет деформация самих прослоек. Это обстоятельство играет важную роль в задачах сейсмологии и геомеханики, поэтому распространены подходы, в которых используются математические модели блочных сред различного уровня сложности. Таким образом, разработка и совершенствование математических моделей блочных сред имеет важное значение в исследовании динамических процессов, происходящих в горных породах и других средах, которым присуще блочное строение.

Степень разработанности темы. Для описания динамических процессов в блочных средах используются различные математические модели. Если прослойки достаточно податливы, и процесс деформирования происходит преимущественно за счёт прослоек, то для описания блочных сред используются дискретно-периодические модели, в которых блоки рассматриваются как жёсткие тела. Для задач динамики дискретных сред хорошо развиты как аналитические, так и численные методы решения.

Если прослойки в блочной среде являются достаточно жёсткими, то необходимо учитывать деформирование блоков. Одним из очевидных вариантов к описанию такого блочного массива может выступать модель кусочно-однородной деформируемой среды. Поскольку прослойки являются, как правило, достаточно тонкими, можно рассматривать их в качестве внутренних граничных условий для блоков. Именно такие модели прослоек с учётом различных реологических свойств рассматривались в работах В. М. Садовского. Данный подход ранее применялся для задач в плоской постановке.

Цель исследования состоит в построении пространственных математи-

ческих моделей, описывающих динамическое поведение сред блочного строения с учётом сложной реологии, а также в численной и программной реализации предложенных моделей для решения прикладных задач на высокопроизводительных ЭВМ.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **научные задачи**:

1. на примере задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн выяснить, при каких условиях тонкий упругий слой может быть представлен в виде модели прослойки, описываемой в виде внутренних граничных условий;
2. построить пространственную модель упругой блочно-слоистой среды с тонкими прослойками, учесть вязкоупругие свойства блоков и прослоек, а также упругопластичность, разномодульность и пористость материала прослоек;
3. разработать численные алгоритмы решения задач динамики блочных сред и создать программный комплекс для высокопроизводительных вычислительных систем кластерной архитектуры;
4. выполнить расчёты задач динамики блочных сред, провести сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными, численно исследовать волновые поля, генерируемые импульсным сейсмоисточником, в однородных и блочных средах.

Основным **методом исследования** является вычислительный эксперимент, предполагающий постановку задачи, описание математической модели, численную реализацию модели с использованием конечно-разностных схем. Полученные математические модели допускают запись в виде симметрических t -гиперболических систем, поэтому к ним применимы хорошо разработанные численные методы. При рассмотрении необратимых деформаций в прослойках математические модели формулируются в виде вариационных неравенств, для решения которых используются устойчивые алгоритмы корректировки. Важным этапом является верификация и валидация компьютерных программ.

Достоверность и обоснованность результатов основывается на построении термодинамически корректных моделей, для которых выполнен закон

сохранения энергии, на верификации разработанного комплекса программ на тестовых решениях, на соответствии результатов вычислительного эксперимента лабораторным измерениям.

Научная новизна работы отражена в следующем:

1. Получено решение задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой упругой прослойкой, задаваемой в виде внутренних граничных условий. Проведено сравнение полученного решения с решением в среде с упругим слоем. Показано, что рассматриваемая модель применима для сред с достаточно тонкими и податливыми прослойками.
2. К решению задач динамики блочных сред применена пространственная модель с тонкими прослойками. Разработан комплекс параллельных программ, позволяющий учитывать иерархичность блочной среды.
3. Численно исследованы некоторые задачи распространения волн в блочных средах. В частности, рассмотрены задачи с заглубленным упругим и упругопластическим включением в блочном полупространстве. Также показано хорошее соответствие численного решения и результатов лабораторных измерений на примере задачи о распространении волн в сборке из блоков, закреплённой по контуру. Получены оригинальные результаты исследования волновых полей в грунтовых массивах от воздействия сейсмоисточника импульсного типа.

Теоретическая значимость. Прослойки, заданные в виде внутренних граничных условий для блоков, позволяют в более простом виде описывать процессы, происходящие между блоками. Одним из перспективных направлений развития работы состоит в исследовании волн разрушения, которые распространяются вдоль границ структурных элементов материала. Полученная модель трёхмерной упругой блочно-слоистой среды также может быть использована при проверке гипотез, связанных с решением проблемы об определении параметров модели континуума Коссера.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для анализа распространения волн в средах, для которых характерно блочное строение. В частности, это могут быть задачи геодинамики или сейсмики.

Положения выносимые на защиту:

1. Пространственная математическая модель блочной иерархической среды, учитывающая вязкоупругие свойства блоков и прослоек, а также упруго-пластичность, пористость и разномодульность прослоек.
2. Результаты решения задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой прослойкой.
3. Алгоритм и комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем и результаты численного решения задач распространения волн в блочных средах.
4. Результаты численного исследования волн напряжений и деформаций в грунтовых массивах, генерируемых импульсным сейсмоисточником.

Личный вклад автора состоит в решении задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн в среде с тонкой упругой прослойкой, в разработке, программировании и тестировании алгоритмов, а также в написании комплекса параллельных программ, в проведении расчётов и обработке полученных результатов, в подготовке научных статей и докладов по материалам диссертационной работы. Научному руководителю В. М. Садовскому принадлежит постановка задач, рассматриваемые уравнения прослоек в виде внутренних граничных условий, описание необратимых деформаций прослоек с использованием обобщённого реологического метода.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Диссертация соответствует паспорту научной специальности: 1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела» по следующим пунктам:

2. Теория определяющих соотношений деформируемых тел с простой и сложной структурой.
3. Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости.
8. Динамика деформируемого твёрдого тела. Теория волновых процессов в средах различной структуры.
12. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

Апробация работы.

Основные результаты научного исследования были представлены на конференциях:

1. 27-ая, 28-ая, 29-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Красноярск, 2021, 2023; Челябинск, 2025);
2. Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах (Краснодарский край, ФТ «Сириус», 2023, 2024)
3. XXI, XXIII Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2020, 2022);
4. Открытая конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН (Красноярск, 2020, 2021, 2022, 2023, 2025);
5. XXIV, XXV Международные научно-практические конференции, посвященные памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика Михаила Федоровича Решетнева (Красноярск 2020, 2021);
6. XI, XII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова (Краснодарский край, пос. Кабардинка, 2022; Краснодарский край, пос. Джанхот, 2023);
7. Международные конференции Евро-Американского консорциума по продвижению приложений математики в технических и естественных науках АМиТаНС (Online, 2020, 2021);
8. Конференция международных математических центров мирового уровня. Математическое моделирование в геофизике (Краснодарский край, ФТ «Сириус», 2021).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в статьях, среди которых 6 в журналах из списка, рекомендованного ВАК, и 6 в журналах, цитируемых в базах данных Web of Science либо Scopus.

1. Ефимов, Е. А. Моделирование распространения волн в блочной среде с тонкими вязкоупругими прослойками в пространственной постановке / Е.

- А. Ефимов // Сибирский журнал индустриальной математики – 2025. – Т. 27. – №4 – С. 20–33.
2. Efimov, E. A. Wave Propagation in a Blocky-layered Medium with Thin Interlayers / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics – 2025. – Vol. 18. – №1. – P. 119–129.
 3. Ефимов, Е. А. Численный анализ воздействия импульсного сейсмоисточника на приповерхностные грунты / Е. А. Ефимов // Вестник Башкирского университета – 2022. – Т. 27. – №3. – С. 502–507.
 4. Садовский, В. М. Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды / В. М. Садовский, О. В. Садовская, Е. А. Ефимов // Вычислительные методы и программирование – 2021. – Т. 22. – №1. – С. 47–66.
 5. Sadovskii, V. M. Finite Difference Schemes for Modelling the Propagation of Axisymmetric Elastic Longitudinal Waves / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, E. A. Efimov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics – 2020. – Vol. 13. – №5. – P. 644–654.
 6. Efimov, E. A. Numerical modeling of seismic wavefields in viscoelastic soils under pulse impact / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // AIP Conference Proceedings – 2021. – Vol. 2522. – 110003-1–110003-7.
 7. Efimov, E. A. Mathematical Modeling of the Impact of a Pulse Seismic Source on Geological Media / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // AIP Conference Proceedings – 2020. – Vol. 2302. – 120002-1–120002-8.
 8. Sadovskii, V. M. Analysis of seismic waves excited in near-surface soils by means of the electromagnetic pulse source “Yenisei” / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, E. A. Efimov // Materials Physics and Mechanics – 2019. – Vol. 42. – №5. – P. 544–557.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. Ефимов, Е. А. Программа расчёта задач динамики трёхмерных блочно-слоистых сред с упругими блоками и тонкими упругими прослойками (3D_blocky_elast_waves) / 07.03.2025 / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025615731.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 137 страниц, 49 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 188 наименований.

В **обзоре литературы** кратко представлены работы по теме исследования. Указываются работы, в которых изучались особенности блочного строения горных пород, а также динамические эффекты, характерные для блочных сред. Также проведён краткий анализ литературных источников, посвящённых математическому моделированию динамики блочных сред, моделям материалов горных пород с затуханием, а также конечно-разностным методам решения задач динамики деформируемых сред.

В **первой главе** представлена математическая модель блочной среды с упругими блоками и упругими прослойками. В **разделе 1.1** решается задача об определении коэффициентов отражения и преломления волн при падении плоской продольной монохроматической волны на прослойку, задаваемую в виде упругого слоя и в виде предлагаемой модели тонкой прослойки. В **разделе 1.2** представлена математическая модель трёхмерной блочной среды. **Раздел 1.3** посвящён описанию численного алгоритма, который основан на методе расщепления. Для решения одномерных расщеплённых задач динамики упругих блочных сред предлагается два метода: в первом для решения в блоках использована схема распада разрыва С. К. Годунова, а для решения в прослойках бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова; второй метод полностью строится на основе схемы Г. В. Иванова. В **разделе 1.4** численно решена задача Лэмба в пространственной постановке для упругой блочной среды. Рассмотрены различные параметры блочной среды. Проведено качественное сравнение с решением, полученным для дискретно-периодической модели блочной среды.

Вторая глава посвящена блочным средам с неупругими реологическими свойствами. В **разделе 2.1** рассматривается модель стандартного линейного вязкоупругого тела. Для учёта вязкоупругости в блоках используется модель с упругим деформированием объёма. Вязкоупругие свойства прослоек учитываются только при сдвиговых движениях блоков. Численный метод решения для вязкоупругих блочных сред описывается в **разделе 2.2**, он несущественно отличается от построенного алгоритма решения для упругих сред. В **разделе 2.3** проводится сравнение с лабораторным экспериментом. В численном эксперименте рассматривается модель из упругих блоков, разделённых вязкоупругими

прослойками, в плоской и пространственной постановке. Результаты численного моделирования удовлетворительно соотносятся с данными эксперимента. В **разделе 2.4** рассматривается модель для пористых и разномодульных прослоек, а в **разделе 2.5** предложена модель упругопластических прослоек для описания проскальзывания блоков.

Численному анализу волновых полей, возбуждаемых импульсным сейсмоисточником, посвящена **третья глава**. В **разделе 3.1** рассматриваются однородные и плоскостойкие среды, описываемые в рамках осесимметричной постановки задачи. Оценено влияние параметров сейсмоисточника на характер амплитудно-частотных характеристик и сейсмического КПД. В **разделе 3.2** представлены результаты моделирования волновых полей сейсмоисточника в блочных средах.

В **заключении** представлены результаты диссертационной работы.

Обзор литературы

Структурно-неоднородные среды блочного строения

Характерным примером сред с внутренней структурой блочного типа являются горные породы. Концепция блочного иерархического строения горных пород была разработана в работах М. А. Садовского [1, 2, 3]. В рамках данной концепции структура пород понимается как система вложенных друг в друга блоков разного масштаба, соединённых между собой тонкими прослойками. Характерные размеры блоков могут варьироваться от нескольких сантиметров до десятков километров [4]. Зачастую прослойки более податливы по сравнению с блоками и обладают сложной реологией.

Исследования последних 30 лет указывают на необходимость учёта блочного строения горных пород. Вопросы деформирования блочных горных пород рассматривались в работах таких авторов, как М. В. Курленя, В. Н. Опарин, Г. Г. Кочарян [5, 6, 7, 8, 9, 10, 12]. В работе [7] проанализирован размер блоков в иерархическом массиве в масштабах от кристаллов до геоблоков земной коры. В частности, было показано, что в породах рудников Норильска прослойки между блоками достаточно тонкие: отношение толщины прослойки к характерному размеру блока лежит в диапазоне $0.5 \div 2 \cdot 10^{-2}$. Анализ размеров фракций в горных породах показал, что отношение размеров блоков, соответствующих соседним иерархическим уровням, практически не изменяется от уровня к уровню и приблизительно составляет $\sqrt{2} \approx 1.41$ [7]. В работе [8] разработана классификация размеров блоков и отдельностей в горных породах на основе шкалы структурно-иерархических представлений [10]. В работе В. Н. Костюченко, Г. Г. Кочаряна и Д. В. Павлова [13] измерения нормальной жёсткости межблоковых промежутков показали, что нормальная жёсткость прослоек между геоблоками размерами от 10 до 100000 м уменьшается при увеличении размера блока в иерархической системе.

За счёт деформирования податливых прослоек в блочных средах возникают различные динамические эффекты, не свойственные однородным средам [7, 14]. В частности, в блочных средах наблюдаются волны маятникового типа [5, 6]. Особенности маятниковых волн заключаются в их низкой скорости распространения, слабым затуханием и большой длиной при кратковре-

менном импульсном воздействии. Исследованию маятниковых волн посвящено множество теоретических и экспериментальных работ В. Н. Опарина [6, 7, 9], В. А. Сарайкина [15, 16], Е. Н. Шера, А. Г. Черникова и Н. И. Александровой [17, 18, 19, 20, 21]. Среди экспериментальных исследований можно выделить те, которые выполнялись в полевых условиях, и те, которые проводились на лабораторных установках. Ряд натурных испытаний позволил заключить о качественном соответствии кинематическому выражению В. Н. Опарина для нелинейных упругих волн маятникового типа [7, 9]. В рамках лабораторных экспериментов на физических моделях блочных сред было показано, что высокочастотные волны быстро затухают, и основное сейсмическое воздействие оказывают низкочастотные волны. Было также обнаружено существенное влияние внешнего давления, приложенного к блочному массиву, на скорость волн и их спектральный состав [19]. В работе [20] были проведены эксперименты на блочной сборке в виде кирпичной стены, а также предложена методика обработки сейсмических данных, позволяющая определять характерный размер блоков массива по данным сейсмического зондирования.

Математическое моделирование блочных сред

Для моделирования структурно-неоднородных материалов используются различные подходы [22]. Один из них состоит в построении обобщённых континуальных моделей, в которых расширяется понятие о представительном объёме сплошной среды. Помимо поступательных степеней свободы бесконечно малого объёма среды учитываются ещё и вращательные (полярность материала). Разработкой моделей обобщённых континуумов занимались такие исследователи, как братья Эжен и Франсуа Коссера [23], К. Трусдел и Р. Тупин [24, 25], Л. И. Седов [26, 27], В. И. Ерофеев [28, 29] и другие. Изучению волн и их дисперсионных свойств в микрополярных средах посвящено множество работ [28, 30, 31, 31]. Микрополярные теории, в том числе теория Коссера, широко используются при моделировании процессов, происходящих в таких средах с микроструктурой как композиционные и поликристаллические материалы [32, 33, 34, 35], а также грунты с неоднородностями [36, 37].

Моментные теории находят также применение в исследовании природы пластического деформирования материалов [38, 39]. Так, в работе В. М. Садовского и М. А. Гузева [38] численное моделирование структурно-неоднородного

материала на основе ортотропного континуума Коссера подтвердило гипотезу о том, что пластификация материала на мезоуровне обуславливается вращательными степенями свободы частиц. Гипотеза о возникновении первичного пластического течения в нагруженных твёрдых телах по ротационному механизму на мезомасштабном уровне была предложена В. Е. Паниным [40, 41, 42] в рамках описания твёрдого тела как многоуровневой иерархически организованной системы [43]. В работах [40, 44, 45] обосновывается механизм развития пластической деформации твёрдых тел в поле поворотных моментов, возникающих на мезоуровне.

Моделированию блочной среды на основе моментного континуума Коссера посвящены работы В. М. Садовского и О. В. Садовской [46, 47]. Одна из проблем, возникающая при применении модели Коссера для описания реальных сред, состоит в определении параметров модели. Данная модель в изотропном случае имеет восемь параметров, в то время как в изотропной теории упругости всего три параметра, например, параметры Ламе λ , μ и плотность ρ . Один из простых способов пересчёта феноменологических параметров континуума через параметры блочно-слоистой среды был представлен в [47]. Также исследовались резонансные свойства модели Коссера в работах [47, 48, 49].

Второй подход к моделированию сред со сложной структурой состоит в построении модели, представляющей собой решётку из элементарных структурных ячеек. Свойства элементарной ячейки задаются таким образом, чтобы отображать основные характеристики поведения материала. Значительный вклад в развитие метода структурного моделирования внесли такие авторы, как Э. Кренер [50], А. М. Кривцов [51, 52, 53], Ж. Пуже [54, 55], Д. А. Индейцев [56] и другие.

В рамках структурного метода можно строить модели блочных сред различного уровня сложности. Если среда состоит из достаточно жёстких блоков, деформациями которых можно пренебречь, то возможно представление в виде системы жёстких масс, связанных между собой упругими пружинами. Математические модели блочных сред, представляющие собой дискретно-периодические решётки масс с упругими связями, хорошо исследованы численно и аналитически в одномерной, двумерной и трёхмерной постановках Н. И. Александровой [57, 58, 59]. Дискретно-периодическая модель блочной среды описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, числен-

ное решение которой строится с применением стандартных разностных схем. Для двумерного случая было построено аналитическое решение задачи Лэмба для дискретно-периодического полупространства [58]. Было показано хорошее соответствие одномерной расчётной модели и эксперимента [18]. Связи между массами решётки могут обладать различными реологическими свойствами. Так, в работах [17, 60] вводятся вязкоупругие связи между массами для учета затухания волн.

Необходимость построения более сложных моделей возникает, когда прослойки обладают достаточной жёсткостью и следует учитывать упругие свойства блоков. В работе В. А. Сарайкина, А. Г. Черникова и Е. Н. Шера [15] предложена модель, учитывающая упругость блоков, предусматривающая распространение только низкочастотных возмущений. Уравнения записываются относительно перемещений центров блоков, поэтому модель также является дискретно-периодической. Расчёты по данной модели хорошо согласуются с экспериментами.

Наиболее последовательной стоило бы считать модель, в которой деформации как блоков, так и прослоек рассматриваются в точной постановке с применением уравнений динамической теории упругости. Но поскольку прослойки являются достаточно тонкими объектами, для их описания применяются упрощённые модели. Один из вариантов упрощения состоит в моделировании прослоек в виде внутренних граничных условий, задаваемых на плоскостях контакта блоков. Модели с такими прослойками и упругими блоками были рассмотрены В. М. Садовским и применены в различных задачах динамики блочных сред в плоской постановке [46, 47, 61].

Влияние реологии тонких прослоек на характер распространения волн в средах с упругими блоками было исследовано в работах [62, 63, 64]. В частности, в рамках упрощённых уравнений прослоек были построены модели сред с упругими блоками и вязкоупругими, пластическими, пористыми и пористыми влагонасыщенными прослойками. Для моделирования разномодульных, пористых и сыпучих материалов В. М. Садовским в монографии [65] был введён реологический элемент «жёсткий контакт». Он применим для описания различных процессов, происходящих на границах раздела блоков. Особенный интерес представляют волны разрушения, которые, как предполагается, распространяются вдоль границ структурных ячеек материала. Моделированию волн

разрушения в блочных средах при различном напряжённо-деформированном состоянии посвящены работы [66, 67].

Вопросом распространения волн в средах с тонкими слоями занимались такие авторы, как Л. М. Бреховских, Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков [68, 68, 69, 70, 71, 72]. Некоторые работы Л. А. Молоткова посвящены построению эффективных моделей блочных и слоистых сред. Модели воспроизводят поведение сред с чередующимися упругими, жидкими или пористыми слоями с учётом различных контактных условий на границах слоёв [71, 72]. На основе матричного метода проведены исследования волн, распространяющихся в эффективных средах [73].

Оригинальный подход к построению математических моделей геоматериалов, обладающих внутренней структурой, был описан в работах А. Ф. Ревуженко и С. В. Лаврикова [74, 75]. Предложенный метод позволяет описывать иерархические среды на микро- и макромасштабном уровне с учётом блочного строения. Параметры с разных масштабных уровней связываются посредством внутренних переменных. В рамках данного подхода исследуются различные вопросы деформирования в горных материалах, в частности решены задачи о напряжённо-деформированном состоянии блочного массива вокруг выработок [11, 76].

Геологические среды с затуханием

На уровне малых масштабов горные породы представляют собой трещиновато-пористые среды, насыщенные влагой или газом. Характерные размеры микротрещин и пор в горных породах составляют до 1 мм, размеры каверн в поперечном сечении могут составлять от 1 мм до 10 см [77].

Полномасштабное моделирование волновых процессов в пористой влагонасыщенной среде предполагает учёт особенностей строения каналов пор деформируемой твёрдой фазы, а также свойств жидкости, заполняющей поры. Данный подход, вероятно, позволил бы обнаружить тонкие эффекты, связанные со сложным течением жидкости в каналах и с особенностями взаимодействия жидкости со стенками упругих сосудов. Однако это представляет собой весьма трудоёмкую задачу. При прямом численном моделировании для учёта отдельных пор или каверн возникает необходимость измельчения разностной сетки, что требует значительных вычислительных ресурсов. Для прямого

численного моделирования используются многомасштабные численные методы [78, 79], либо методы с локальной адаптацией сетки [80, 81, 82].

В предположении несущественности влияния каждой отдельной неоднородности на распространение волн строятся гомогенизированные модели среды. Осреднённые модели пористых влагонасыщенных сред представляют собой двухкомпонентный континуум, в котором в каждой точке одновременно сосуществуют жидкий флюид и твёрдый скелет. Одной из наиболее известных является модель Био [83, 84]. В среде Био возможны два типа волн: быстрые продольные и поперечные волны, распространяющиеся по скелету, и медленные продольные волны, распространяющиеся по флюиду. Экспериментальное подтверждение существования медленных волн было опубликовано в [85]. Амплитуды медленных волн при этом гораздо ниже амплитуд быстрых волн.

Наиболее простым способом описания пористых влагонасыщенных сред следует считать подход Гассмана [86], в котором связаны пористость и осреднённые упругие константы флюида и скелета. Это частный случай теории Био с неподвижным флюидом, приводящий к уравнениям линейной теории упругости в изотропной среде. Данный подход не позволяет учесть дисперсии волн и диссипации энергии.

В теории Био предполагается, что неупругие эффекты возникают за счёт взаимодействия движущейся жидкости с твёрдой фазой, что приводит к диссипации механической энергии и затуханию волн. Существуют различные модификации модели Био, учитывающие дополнительные механизмы диссипации, например, потоки выдавливания (s squirt-flow), возбуждаемые в поперечных направлениях [87, 88, 89].

Значительный вклад в разработку моделей многоскоростного континуума привнесли В. Н. Доровский, А. М. Блохин, Е. И. Роменский [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98]. Разработанная Е. И. Роменским унифицированная термодинамически согласованная модель континуума позволяет решать широчайший класс задач механики сплошных сред [99, 100]. В рамках данного подхода модели сплошных сред строятся в виде симметрических гиперболических термодинамически согласованных систем первого порядка, что обеспечивает корректность постановки задачи Коши [101]. В частности, была построена модель пористой влагонасыщенной среды [98]. Одним из главных преимуществ перед моделью Био является симметричность уравнений. Более того, данный подход позволяет

строить нелинейные модели влагонасыщенных сред. Данная модель не предусматривает введения таких параметров, как извилистость или проницаемость пор, или каких-либо коэффициентов привносимых в модель «извне». Поведение среды зависит от одного свободного параметра – времени релаксации. Данный параметр не имеет очевидной физической интерпретации, и его подбор при описании различных режимов поведения пористой влагонасыщенной среды стоит отдельным вопросом.

Дисперсию и поглощение волн в геологических средах можно описать, используя модели вязкоупругости. При таком подходе амплитуды продольных волн, распространяющихся во флюиде, считаются пренебрежимо малыми. Для вязкоупругой модели можно получить схожие с влагонасыщенной средой частотные зависимости фазовой скорости продольных и поперечных волн и коэффициента затухания. Определением параметров эффективной вязкоупругой среды, соответствующей влагонасыщенной среде, занимались, например, такие авторы, как В. В. Лисица, С. А. Соловьёв и М. А. Новиков [102, 103, 104], J. G. Rubino с соавторами [105, 106]. Для решения задачи нахождения частотно-зависимого тензора жёсткости однородного вязкоупругого материала численно решаются краевые задачи для уравнений Био при различных типах нагружения образца пористого материала. Трудность задачи состоит в построении быстрого алгоритма восстановления эффективных свойств вязкоупругой среды, эквивалентной пористой влагонасыщенной среде в низкочастотном диапазоне. На характер затухания помимо свойств флюида и скелета существенно влияет связность трещин трещиновато-пористой среды [103, 104].

Характер зависимости затухания от частоты и влагонасыщенности горной породы был изучен в экспериментах [107, 108, 109]. Например, в песчанике при фиксированной влагонасыщенности в широком диапазоне частот $10 - 10^4$ Гц коэффициент затухания сначала возрастает, достигает максимума, затем убывает [107]. При заданной частоте затухание продольных волн возрастает с ростом влагонасыщенности, достигает максимума в пределах 80 – 90%, поперечные волны затухают сильнее всего при влагонасыщенности в 100% [107]. Результаты экспериментов также свидетельствуют о высокой чувствительности затухания к изменению вязкости наполняющей пористую породу жидкости [110], а также о независимости затухания от амплитуды колебаний в сейсмических экспериментах [109]. В более узких частотных диапазонах затухание

мало отклоняется от постоянной величины [111]. Например, экспериментальные исследования, проведённые для пород в Pierre Shale, показали, что в диапазоне частот, характерных для сейсмики (1-200 Гц) затухание можно считать константой [112].

Модель вязкоупругого тела Пойнтинга-Томсона имеет множество приложений и широко используется в геофизике. В литературе её также называют моделью Зинера или моделью стандартного линейного тела (standard linear solid, SLS) [113]. Пойнтинг и Томсон изначально предлагали использовать её для описания поведения стеклянных волокон [114]. Модель обобщённого стандартного тела используется для описания сред, затухание в которых практически не изменяется с частотой [113]. Реологическая схема данной модели представляет собой несколько параллельно соединённых механизмов SLS.

У обобщённой модели функция затухания $\alpha(\omega)$ имеет несколько экстремумов, число которых определяется количеством SLS-механизмов. Соответственно, чем больше SLS-механизмов в модели, тем более точно функция $\alpha(\omega)$ может аппроксимировать константу на определённом отрезке $[\omega_a, \omega_b]$. Определение оптимальных параметров модели с постоянным затуханием в некотором частотном диапазоне $[\omega_a, \omega_b]$ представляет собой отдельную задачу. В работах [115, 116, 117] предложены методики вычисления оптимальных параметров, при которых затухание $\alpha(\omega)$ отклоняется от заданной постоянной в наименьшей степени.

В работах Г. В. Решетовой, В. А. Чеверды и В. В. Лисицы [118, 119, 120, 121] для численного исследования сейсмических волновых полей в многомасштабных геологических средах с поглощением используется модель обобщённого стандартного линейного тела. С применением оригинальных численных методов и построенных на их основе эффективных программных комплексов удаётся изучить широкий круг вопросов, связанных с распространением волн в неоднородных геологических средах, в частности вблизи скважин при сейсмоакустическом каротаже [119, 122].

Разностные методы решения динамических задач

Многие задачи динамики деформируемого твёрдого тела могут быть приведены к виду симметрической t -гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка. Например, к такому виду относятся уравнения ди-

намической теории упругости, записанные относительно напряжений и скоростей перемещений [101]. Доказано, что для такого вида систем корректно поставлена задача Коши [101, 123, 124].

Для численного решения таких систем удобно пользоваться разностной аппроксимацией. Метод конечных разностей привлекателен своей относительной простотой в реализации. Идея метода заключается в дискретизации области решения разностной сеткой с заменой дифференциальных операторов конечно-разностными. После дискретизации получаются разностные уравнения, решение которых в некоторой норме сходится к решению дифференциальной задачи. Основной теоремой в теории разностных схем является теорема Лакса-Рябенского-Филиппова, которая утверждает, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует её сходимость, причём порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации [125, 126].

При решении многомерных задач механики сплошных сред удобно пользоваться методами расщепления по пространственным координатам и по физическим процессам. Значительный вклад в развитие методов расщепления внесли Г. И. Марчук и Н. Н. Яненко [127, 128]. Применение процедуры пространственного расщепления приводит к серии одномерных задач. Расщепление по физическим процессам позволяет раздельно учитывать взаимосвязанные явления такие, как упругость, теплопередачу, электромагнитные взаимодействия.

Широкое применение имеет метод двуциклического расщепления второго порядка сходимости [127]. Однако существует возможность строить алгоритмы и более высокого порядка [129, 130, 131]. Для многомерных уравнений переноса, акустики, линейной теории упругости были построены методы расщепления по пространственным координатам третьего и четвёртого порядков [131]. Для сохранения итогового порядка аппроксимации многомерной задачи необходимо, чтобы порядок аппроксимации схем для одномерных задач был не ниже порядка схемы расщепления. Особенность схем расщепления порядка выше второго заключается в наличии отрицательных шагов по времени.

Для решения одномерных гиперболических уравнений и систем широко применяются методы, в которых используется понятие характеристик уравнений. Прямой метод характеристик использовался ещё Риманом [132]. Идея метода состоит в дискретизации отрезка, на котором заданы начальные условия, затем из полученных точек строятся характеристики, на их пересечении вычис-

ляются новые значения через инварианты [133]. Решение определяется на сетке, узлами которой являются точки пересечения двух семейств характеристик, при этом аппроксимация характеристик может проводиться разными способами.

Наличие разрывов решения приводит к усложнению алгоритмов, основанных на методе характеристик [133]. Применение однородных разностных схем устраняет сложности, так как они строятся на основе аппроксимации интегральных законов сохранения на фиксированной сетке [133]. Аппроксимация законов сохранения обеспечивает консервативность схем, но привносит схемную вязкость. Вязкость приводит к сглаживанию фронтов разрывных решений и решений с большим градиентом.

Схема с искусственной вязкостью, имеющая нелинейный характер, была предложена Нейманом и Рихтмайером для локализации разрыва в пределах нескольких ячеек разностной сетки [134]. К однородным схемам без явного введения псевдовязкости относятся схемы Лакса и Лакса-Вендрофа [135]. Таковым является и метод распада разрыва С. К. Годунова [136], классический вариант которого имеет первый порядок аппроксимации и обеспечивает монотонность решения.

При построении разностных схем помимо аппроксимации и устойчивости важное значение имеет понятие монотонности. Для гиперболических уравнений и систем справедлива теорема Годунова о невозможности построения линейной двухслойной монотонной схемы с порядком аппроксимации выше первого [137]. Для получения монотонных схем повышенного порядка аппроксимации используются нелинейные схемы [138, 139]. Существует множество модификаций метода Годунова с повышенным порядком точности, сохраняющих монотонность решения. Один из способов улучшения аппроксимации состоит в реконструкции кусочно-постоянного распределения функций в кусочно-полиномиальное с использованием так называемых функций-ограничителей коэффициентов полиномов [140]. Разработано множество различных вариантов функций-ограничителей [141, 142, 143, 144]. Многообразие способов реконструкции связано с неоднозначностью выбора коэффициентов для кусочно-полиномиальных распределений.

В. В. Русанов построил схему третьего порядка точности для уравнений газовой динамики [145]. Данная схема применяется для расчётов динамических задач теории упругости [131]. Предложенный Русановым метод построения схем

аналогичен итерационному методу Рунге-Кутты, он был распространён для построения схем более высокого порядка точности В. Б. Балакиным [146].

На основе сеточно-характеристического метода, значительный вклад в развитие которого внесли К. М. Магомедов и А. С. Холодов [147], удаётся построить монотонные схемы третьего и четвёртого порядков, удовлетворяющие характеристическому критерию монотонности [148]. Сеточно-характеристические схемы высокого порядка точности успешно применяются в задачах моделирования волновых процессов в слоистых и трещиноватых геологических средах [149, 150, 151]. Данные схемы используются с методом расщепления высокого порядка точности.

Разностные схемы повышенного порядка точности можно построить, используя предложенный Г. В. Ивановым метод нескольких локальных аппроксимаций неизвестных функций полиномами [152, 153]. Преимущество подхода заключается в том, что уравнения схемы выводятся из разностного аналога закона сохранения, что позволяет на этапе построения схемы явно выразить мощность искусственной диссипации. Регулируя параметры диссипации можно построить монотонные схемы первого порядка, наилучшим образом воспроизводящие разрывные решения. Данные схемы применяются при построении алгоритмов расчёта задач динамики упругих и упругопластических сред [152].

На основе метода дифференциального приближения Ю. И. Шокиным были построены монотонные схемы повышенного порядка точности [154, 155]. Подход основан на введении в схему функции, которая подавляет дисперсионные слагаемые дифференциального приближения, приводящие к осцилляциям решения. На основе данного метода можно строить нелинейные схемы с регулируемой диссипацией и дисперсией.

Стоит выделить также спектрально-разностные методы, основанные на интегральном преобразовании Лагерра по времени, рассмотренные в работах Б. Г. Михайленко, Г. В. Решетовой, В. А. Чеверды [120, 121, 156, 157]. Они широко применяются для решения различных задач математической физики, в частности, для решений уравнений акустики и теории упругости. Преимущество использования преобразования Лагерра заключается в хорошей обусловленности систем алгебраических уравнений, возникающих после дискретизации производных, в то время как спектрально-разностный метод с Фурье преобразованием не гарантирует хорошей обусловленности.

Для повышения точности решений разностных схем можно воспользоваться методом экстраполяции Ричардсона [158], который основан на комбинировании численных решений, полученных на сетках с разным параметром. В монографии Г. И. Марчука и В. В. Шайдурова [159] изложены некоторые модификации данного метода, также он применялся для решения нестационарных задач и для повышения точности в методе расщепления. Указанный метод позволяет получать решения произвольного порядка точности, поэтому важным условием его применения является гладкость решений.

Отдельной проблемой, возникающей в задачах распространения волн в неограниченных средах, является моделирование неотражающих граничных условий. Например, для однородных изотропных сред условия на границах вычислительной области могут быть реализованы относительно просто путём введения идеально согласованного неотражающего слоя PML (perfectly matched layer). Данный метод был впервые применён к задачам о распространении электромагнитных волн в неограниченной среде [160]. Существует множество модификаций PML и они широко используются при решении задач геофизики и сейсмологии [161, 162]. Для анизотропных сред построение неотражающих условий приводит к весьма сложным решениям [163]. Основным недостатком данного метода – неустойчивость, которая может проявляться при моделировании распространения волн при достаточно длительном времени, когда волны полностью проходят внутрь поглощающего слоя. Возмущения возникают внутри слоя, после чего нарастают и распространяются внутрь вычислительной области [164], [165]. Неустойчивость классического PML также проявляется при моделировании волновых процессов в анизотропных средах [166]. Наиболее предпочтительным способом решения данной проблемы является построение слоя M-PML (Multiaxial PML), в котором происходит замена переменных не только в нормальном направлении, как в PML, но и в касательном. Параметры слоя подбираются таким образом, чтобы добиться минимального отражения и обеспечить устойчивость [166], [167], [164].

Существуют также способы моделирования слабоотражающих условий на границе, в которых используются соотношения на характеристиках. Например, в книге М. А. Ильгамова и А. Н. Гильманова [168] или в статье С. А. Анисимова и В. Д. Кургузова [169] рассматриваются условия, в которых соотношения на приходящих из-за границы области характеристиках задаются равными

нулю. Применение данного подхода в многомерном случае приводит к частичному отражению волн при падении волны на границу под непрямым углом. Усовершенствование метода предполагает решение задачи определения формы фронта волны вблизи границ. Например, для определения точек перегиба фронта можно использовать дифференциальные анализаторы, разработанные Н. Н. Яненко, В. М. Фоминым и Е. В. Ворожцовым [170, 171].

Глава 1

Блочная среда с упругими блоками и прослойками

1.1 Отражающие свойства тонких прослоек при распространении плоских монохроматических волн

В разделе сравнивается модель тонкой прослойки, заданная в виде внутренних граничных условий, со слоем, описываемым уравнениями теории упругости. Рассматривается задача об отражении и прохождении плоских монохроматических волн. Задача формулируется в плоской постановке с использованием разложения поля перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие [69, 172].

Уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе) записываются в следующем виде:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = \rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Векторное поле перемещений $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представляется в виде суммы потенциального векторного поля и соленоидального:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \vec{\psi}.$$

То есть вводится скалярный $\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ и векторный $\vec{\psi}(t, x_1, x_2, x_3)$ потенциал перемещений. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости. В плоской задаче потенциал $\psi = \psi_3$ будет скалярным, а компоненты вектора перемещений запишутся в виде:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \quad (1.2)$$

Подстановка выражений для перемещений (1.2) в уравнения Ламе (1.1) дадут систему

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta\varphi) + \mu(\Delta\psi), \\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta\varphi) - \mu(\Delta\psi). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\varphi) = c_p^2 \Delta(\Delta\varphi), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\psi) = c_s^2 \Delta(\Delta\psi). \quad (1.4)$$

Первое уравнение получается в результате дифференцирования первого уравнения (1.3) по x_1 , второго по x_2 , и их последующего суммирования. Дифференцируя первое уравнение (1.3) по x_2 , второе по x_1 , вычитая одно из другого, получим второе уравнение (1.4). Уравнения (1.4) можно записать в виде уравнений Лапласа для функций $\Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_p^2 \Delta\varphi$ и $\Psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\psi$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = 0.$$

Нулевое решение является решением данной системы, откуда получаются независимые уравнения, описывающие продольные и поперечные волны

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_p^2 \Delta\varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta\psi. \quad (1.5)$$

Здесь $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость продольных волн, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость поперечных волн. Известно, что если некоторая функция комплексного аргумента $F(x_1 + ix_2, t) = \Phi(x_1, x_2, t) + i\Psi(x_1, x_2, t)$ является аналитической (для неё выполняются условия Коши-Римана), тогда $\Phi = \text{Re}F$ и $\Psi = \text{Im}F$ – гармонические функции. Значит, уравнения (1.5) выполняются с точностью до гармонической функции. В пространственной постановке по аналогии с (1.5) получится система из четырёх уравнений (одно для φ и три для $\vec{\psi}$).

Решение для (1.5) в виде бегущих волн для φ и ψ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= f\left(t + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{c_p}\right), & m_1^2 + m_2^2 &= 1, \\ \psi &= g\left(t + \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{c_s}\right), & n_1^2 + n_2^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь коэффициенты $n_{1,2}$, $m_{1,2}$ вещественны. Далее рассматривается частный случай решения в виде плоских монохроматических волн:

$$\varphi = Ae^{i\omega(t + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{c_p})}, \quad \psi = Be^{i\omega(t + \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{c_s})}. \quad (1.7)$$

1.1.1 Отражение и прохождение волн в упругой среде с плоским слоем

Рассмотрим задачу об отражении и прохождении плоских монохроматических волн в упругой среде с плоским слоем толщиной δ (рисунок 1.1). Пусть

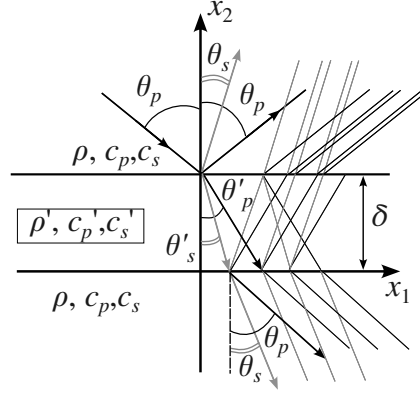


Рисунок 1.1 – Система продольных (чёрные линии) и поперечных волн (серые линии), возникающая при взаимодействии плоской продольной волны со слоем

на слой ($x_2 \geq \delta$) под углом θ_p падает плоская продольная монохроматическая волна единичной амплитуды с частотой ω :

$$\varphi_0 = e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)} = e^{i(\omega t + k_p \sin \theta_p x_1 - k_s \cos \theta_s x_2)}. \quad (1.8)$$

Здесь и далее для сокращения выкладок введены обозначения для волн снаружи слоя: $\xi_{p,s} = k_{p,s} \sin \theta_{p,s}$, $\eta_{p,s} = k_{p,s} \cos \theta_{p,s}$, где $k_{p,s} = \omega/c_{p,s}$ – волновое число; аналогично для волн внутри слоя: $\xi'_{p,s} = k'_{p,s} \sin \theta'_{p,s}$, $\eta'_{p,s} = k'_{p,s} \cos \theta'_{p,s}$, где $k'_{p,s} = \omega/c'_{p,s}$.

При взаимодействии с границами как продольной, так и поперечной волны возникают волны обоих типов. В среде над верхней границей слоя $x_2 \geq \delta$ волновое поле состоит из падающей волны φ_0 , продольной отражённой φ_R и поперечной отражённой ψ_R :

$$\varphi_0 = e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \varphi_R = R_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 + \eta_p x_2)}, \quad \psi_R = R_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 + \eta_s x_2)}.$$

внутри слоя $0 < x_2 < \delta$ продольные волны φ_L и поперечные ψ_L представляются в виде суперпозиции

$$\begin{aligned} \varphi_L &= A_p e^{i(\omega t + \xi'_p x_1 - \eta'_p x_2)} + B_p e^{i(\omega t + \xi'_p x_1 + \eta'_p x_2)}, \\ \psi_L &= A_s e^{i(\omega t + \xi'_s x_1 - \eta'_s x_2)} + B_s e^{i(\omega t + \xi'_s x_1 + \eta'_s x_2)}. \end{aligned}$$

В среде под нижней границей слоя $x_2 \leq 0$ волновая картина складывается из прошедших продольных φ_T и поперечных волн ψ_T :

$$\varphi_T = T_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \psi_T = T_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 - \eta_s x_2)}.$$

Задача состоит в определении коэффициентов T_p , T_s , R_p и R_s . Коэффициенты определяются из условий непрерывности перемещений u_1 , u_2 и напряжений

σ_{22} , σ_{12} на границах слоя $x_2 = 0$ и $x_2 = \delta$:

$$[u_1] = 0, \quad [u_2] = 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, всего получается восемь условий. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ выражаются через φ и ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Условия на границах слоя (1.9) записываются в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^-}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^-}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_1}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_1^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x_1 \partial x_2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_1^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x_2^2} \right) &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

При рассмотрении границы $x_2 = \delta$ в систему подставляются выражения: $\varphi^+ = \varphi_0 + \varphi_R$, $\psi^+ = \psi_R$, $\varphi^- = \varphi_L$, $\psi^- = \psi_L$; а для границы $x_2 = 0$: $\varphi^+ = \varphi_L$, $\psi^+ = \psi_L$, $\varphi^- = \varphi_T$, $\psi^- = \psi_T$.

Когда скорость распространения волн в слое меньше, чем в среде ($c'_p < c_p$, $c'_s < c_s$), угол падения θ_p не достигает критического ($\theta_p < \theta_p^*$), и происходит регулярное отражение продольных волн от границ слой-среда. Это справедливо и для поперечных волн, поскольку $c'_s < c'_p$ или $\theta'_s < \theta'_p$. В этом случае множители $e^{i\xi_p x_1}$, $e^{i\xi_s x_1}$, $e^{i\xi'_p x_1}$ и $e^{i\xi'_s x_1}$ сократятся в силу закона Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_p}{c_p} = \frac{\sin \theta_s}{c_s} = \frac{\sin \theta'_p}{c'_p} = \frac{\sin \theta'_s}{c'_s}. \quad (1.11)$$

Условия (1.9) будут представлять собой систему линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{f}, \quad (1.12)$$

содержащую 8 неизвестных $\vec{x} = (R_p, R_s, A_p, A_s, B_p, B_s, T_p, T_s)$, с матрицей коэффициентов A и вектором правой части $\vec{f}$:

$$A = \begin{pmatrix} -\xi_p e^{i\eta_p \delta} & -\eta_s e^{i\eta_s \delta} & \xi'_p e^{-i\eta'_p \delta} & -\eta'_s e^{-i\eta'_s \delta} & \xi'_p e^{i\eta'_p \delta} & \eta'_s e^{i\eta'_s \delta} & 0 & 0 \\ -\eta_p e^{i\eta_p \delta} & \xi_s e^{i\eta_s \delta} & -\eta'_p e^{-i\eta'_p \delta} & -\xi'_s e^{-i\eta'_s \delta} & \eta'_p e^{i\eta'_p \delta} & -\xi'_s e^{i\eta'_s \delta} & 0 & 0 \\ \Omega e^{i\eta_p \delta} & -\Upsilon_s e^{i\eta_s \delta} & -\Omega' e^{-i\eta'_p \delta} & -\Upsilon'_s e^{-i\eta'_s \delta} & -\Omega' e^{i\eta'_p \delta} & \Upsilon'_s e^{i\eta'_s \delta} & 0 & 0 \\ \Upsilon_p e^{i\eta_p \delta} & -\Xi e^{i\eta_s \delta} & \Upsilon'_p e^{-i\eta'_p \delta} & -\Xi' e^{-i\eta'_s \delta} & -\Upsilon'_p e^{i\eta'_p \delta} & -\Xi' e^{i\eta'_s \delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi'_p & \eta'_s & -\xi'_p & -\eta'_s & \xi_p & -\eta_s \\ 0 & 0 & \eta'_p & \xi'_s & -\eta'_p & \xi'_s & -\eta_p & -\xi_s \\ 0 & 0 & \Omega' & \Upsilon'_s & \Omega' & -\Upsilon'_s & -\Omega & -\Upsilon_s \\ 0 & 0 & -\Upsilon'_p & \Xi' & \Upsilon'_p & \Xi' & \Upsilon_p & -\Xi \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \xi_p e^{-i\eta_p \delta} \\ -\eta_p e^{-i\eta_p \delta} \\ -\Omega e^{-i\eta_p \delta} \\ \Upsilon_p e^{-i\eta_p \delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи введены обозначения:

$$\Omega = (\lambda + 2\mu)\eta_p^2 + \lambda\xi_p^2, \quad \Omega' = (\lambda' + 2\mu')\eta_p'^2 + \lambda'\xi_p'^2,$$

$$\Xi = \mu(\eta_s^2 - \xi_s^2), \quad \Xi' = \mu'(\eta_s'^2 - \xi_s'^2),$$

$$\Upsilon_s = 2\mu\xi_s\eta_s, \quad \Upsilon'_s = 2\mu'\xi'_s\eta'_s, \quad \Upsilon_p = 2\mu\xi_p\eta_p, \quad \Upsilon'_p = 2\mu'\xi'_p\eta'_p$$

Когда слой более «жесткий» ($c'_p > c_p$, $c'_s > c_s$), при падении плоской продольной волны на слой возможны два случая. В первом случае, когда достигается критический угол $\theta_p^* = \arcsin(c_p/c'_p)$, происходит полное отражение продольной волны, и возникает продольная волна, распространяющаяся вдоль границы слоя $x_2 = \delta$, экспоненциально затухающая по x_2 (головная волна). Поскольку $c'_p > c'_s$, поперечные волны проникают внутрь слоя, при взаимодействии с границами слоя образуют продольные и поперечные волны, распространяющиеся по обе границы от слоя, а также поверхностную продольную волну вдоль границы $x_2 = 0$. Во втором случае при достижении критического угла

$\theta_p^{**} = \arcsin(c_p/c'_s)$ вдоль границы $x_2 = \delta$ распространяется поперечная поверхностная волна (волна Релея). Это возможно, когда $c'_s > c_p$.

При углах, превышающих критический, нужно снять требование вещественности коэффициентов $n_{1,2}$, $m_{1,2}$ плоской волны (1.6) [172]. При превышении критического угла $\theta_p > \theta_p^*$ ($\theta_p > \theta_p^{**}$) из условий $n_1^2 + n_2^2 = 1$ ($m_1^2 + m_2^2 = 1$) получаем, что $\eta'_p = \omega x_2 \sqrt{1 - (c'_p/c_p)^2 \sin^2 \theta_p}$ ($\eta'_s = \omega x_2 \sqrt{1 - (c'_s/c_p)^2 \sin^2 \theta_p}$) становится комплексным. Для того, чтобы при $\theta_p > \theta_p^*$ решение удовлетворяло граничным условиям и условию ограниченности перемещений, нужно принять

$$\eta'_p = i\omega x_2 \sqrt{(c'_p/c_p)^2 \sin^2 \theta_p - 1} \quad \text{для } x_2 < \delta.$$

Аналогично при $\theta_p > \theta_p^{**}$ следует принять

$$\eta'_s = i\omega x_2 \sqrt{(c'_s/c_p)^2 \sin^2 \theta_p - 1} \quad \text{для } x_2 < \delta.$$

Вдоль границы будут распространяться поверхностные волны

$$\varphi = A_p e^{i(\omega t + k_p \sin \theta_p x_1)} e^{-\omega x_2 \sqrt{1 - (c'_p/c_p)^2 \sin^2 \theta_p}} \quad \text{при } \theta_p > \theta_p^*,$$

$$\psi = A_s e^{i(\omega t + k_p \sin \theta_p x_1)} e^{-\omega x_2 \sqrt{1 - (c'_s/c_p)^2 \sin^2 \theta_p}} \quad \text{при } \theta_p > \theta_p^{**}.$$

Решение такого вида даёт экспоненциальное затухание при удалении от границы $x_2 = \delta$ вдоль направления x_2 . Аналогичные замены нужно произвести при рассмотрении границы $x_2 = 0$, затем вычислять коэффициенты $R_p, R_s, A_p, A_s, B_p, B_s, T_p, T_s$.

1.1.2 Отражение и прохождение волн в упругой среде с тонкой прослойкой

Рассмотрим задачу о взаимодействии плоской продольной монохроматической волны с тонкой упругой прослойкой (рисунок 1.2). Тонкая прослойка описывается в виде дифференциально-разностных соотношений [46] на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Величины с индексами «+» и «-» относятся к границам сред, расположенным выше и ниже оси x_1 , соответственно. Уравнения получены путём осреднения

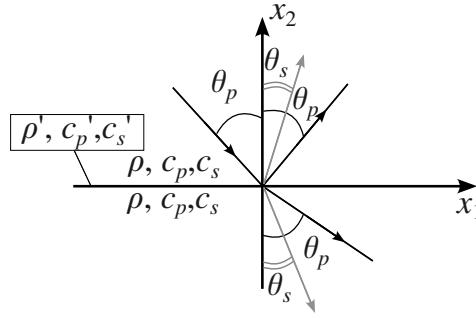


Рисунок 1.2 – Система продольных (чёрные линии) и поперечных волн (серые линии), возникающая при взаимодействии плоской продольной волны с тонкой прослойкой

уравнений движения и определяющих соотношений теории упругости по толщине прослойки (в направлении оси x_2). Используя выражения для компонент вектора перемещений (1.2) и тензора напряжений (1.10), перепишем уравнения для тонкой прослойки в терминах потенциалов перемещений φ и ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial(\varphi^+ + \varphi^-)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\psi^+ + \psi^-)}{\partial x_2} \right) = \\ = \frac{\mu}{\delta} \left(2 \frac{\partial^2(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2(\psi^+ - \psi^-)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\psi^+ - \psi^-)}{\partial x_2^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial(\varphi^+ + \varphi^-)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\psi^+ + \psi^-)}{\partial x_1} \right) = \\ = \frac{1}{\delta} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial x_1^2} - 2\mu \frac{\partial^2(\psi^+ - \psi^-)}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2(\varphi^+ + \varphi^-)}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2(\varphi^+ + \varphi^-)}{\partial x_1^2} - 2\mu \frac{\partial^2(\psi^+ + \psi^-)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\psi^+ - \psi^-)}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(2 \frac{\partial^2(\varphi^+ + \varphi^-)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2(\psi^+ + \psi^-)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\psi^+ + \psi^-)}{\partial x_2^2} \right) = \\ = \frac{\mu'}{\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\psi^+ - \psi^-)}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Потенциалы перемещений по обе стороны от границы $x_2 = 0$ будут следующие-

ми: $\varphi^+ = \varphi_0 + \varphi_R$, $\psi^+ = \psi_R$, $\varphi^- = \varphi_T$, $\psi^- = \psi_T$, где

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \varphi_T = \tilde{T}_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \psi_T = \tilde{T}_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 - \eta_s x_2)}, \\ \varphi_R &= \tilde{R}_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 + \eta_p x_2)}, \quad \psi_R = \tilde{R}_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 + \eta_s x_2)}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Задача состоит в вычислении коэффициентов $\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s$. Система (1.13) после подстановки в неё (1.14) запишется в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$B\vec{y} = \vec{g}\tag{1.15}$$

с вектором неизвестных $\vec{y} = (\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s)$, матрицей коэффициентов B и вектором правой части $\vec{g}$:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2 + \lambda\xi_p^2}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p}{\delta} & \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2 + \lambda\xi_p^2}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p}{\delta} & \mu\xi_s\eta_s + \frac{(\lambda' + 2\mu')\xi_s}{\delta} & -\mu\xi_p\eta_s - \frac{(\lambda' + 2\mu')\xi_s}{\delta} \\ \mu\xi_p\eta_p + \frac{\mu'\xi_p}{\delta} & \mu\xi_p\eta_p + \frac{\mu'\xi_p}{\delta} & -\frac{\mu(\xi_s^2 - \eta_s^2)}{2} + \frac{\mu'\eta_s}{\delta} & -\frac{\mu(\xi_p^2 - \eta_p^2)}{2} + \frac{\mu'\eta_s}{\delta} \\ -\frac{\rho'\omega^2\xi_p}{2} - \frac{2\mu\xi_p\eta_p}{\delta} & -\frac{\rho'\omega^2\xi_p}{2} + \frac{2\mu\xi_p\eta_p}{\delta} & \frac{\rho'\omega^2\eta_s}{2} - \frac{\mu(\eta_s^2 - \xi_s^2)}{\delta} & -\frac{\rho'\omega^2\eta_s}{2} - \frac{\mu(\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\delta} \\ \frac{\rho'\omega^2\eta_p}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2}{\delta} + \frac{\lambda\xi_p^2}{\delta} & -\frac{\rho'\omega^2\eta_p}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2}{\delta} + \frac{\lambda\xi_p^2}{\delta} & \frac{\rho'\omega^2\xi_s}{2} + \frac{2\mu\xi_s\eta_s}{\delta} & \frac{\rho'\omega^2\xi_p}{2} - \frac{2\mu\xi_p\eta_s}{\delta} \end{pmatrix},$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2 + \lambda\xi_p^2}{2} + \frac{(\lambda' + 2\mu')\eta_p}{\delta} \\ \mu\xi_p\eta_p - \frac{\mu'\xi_p}{\delta} \\ \frac{\rho'\omega^2\xi_p}{2} + \frac{2\mu\xi_p\eta_p}{\delta} \\ -\frac{\rho'\omega^2\eta_p}{2} + \frac{(\lambda + 2\mu)\eta_p^2}{\delta} - \frac{\lambda\xi_p^2}{\delta} \end{pmatrix}.$$

Выписать в явном виде решения систем (1.12) и (1.15) довольно сложно из-за громоздких символьных выражений. Для построения зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения θ_p и от толщины слоя δ системы линейных алгебраических уравнений каждый раз решаются для конкретных параметров среды, значений толщины слоя и угла падения.

При вычислении решения проверялось выполнение уравнения баланса энергии, записанного через плотности потоков мощности по обе стороны слоя

$$J_0 = J_R + J_T.\tag{1.16}$$

Плотность потока мощности выражается формулой

$$J = \sigma_{22}\bar{v}_2 + \sigma_{12}\bar{v}_1,$$

где $v_i = \partial u_i / \partial t$ – скорость перемещений, а черта обозначает комплексное сопряжение. Перемещения и напряжения вычисляются через φ_0 и полученные φ_R ,

ψ_R , φ_T и ψ_T по формулам (1.2) и (1.10). Тождество (1.16) выполняется для всех приведённых ниже расчётов.

Коэффициенты отражения и прохождения в общем случае представляют собой комплексные величины. Модуль комплексного коэффициента показывает амплитуду волны, аргумент показывает фазовый сдвиг при взаимодействии с границей. Ниже сравниваются модули R_p, R_s, T_p, T_s для среды со слоем и модули $\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s$ для среды с тонкой прослойкой в зависимости от угла падения плоской продольной волны θ_p . Параметры материалов среды и слоёв представлены в таблице 1.1. Из рисунка 1.3 заметно, что с уменьшением толщины про-

Таблица 1.1 – Параметры упругой среды и слоёв

	Среда		Слой'		Слой''	
Материал	I	II	I'	II'	I''	II''
ρ , кг/м ³	1	1	0.71	0.71	0.5	0.5
c_p , м/с	1	1	0.71	0.71	0.5	0.5
c_s , м/с	0.69	0.58	0.41	0.21	0.34	0.28
ν	0.05	0.25	0.05	0.25	0.05	0.25

слойки зависимости коэффициентов становятся ближе. Для поперечных волн (рисунок 1.4) наблюдается несколько большее расхождение между решениями.

На рисунке 1.5 представлены зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для продольных волн от относительной толщины прослойки δ/l , где $l = 2\pi c_p/\omega$ – длина продольной монохроматической волны. В модели тонкой прослойки не учитывается интерференция, характерная для слоя. Поэтому модель тонкой прослойки пригодна только при относительно длинных волнах или при достаточно малой толщине δ .

Для оценки границ применимости используемой модели тонкой прослойки предлагается вычислить относительную погрешность

$$err = \frac{||\vec{x} - \vec{y}||}{||\vec{x}||}.$$

Здесь вектор $\vec{x} = (|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, вектор $\vec{y} = (|\tilde{R}_p|, |\tilde{R}_s|, |\tilde{T}_p|, |\tilde{T}_s|)$, компоненты векторов представляют собой функции от угла падения θ_p , толщины прослойки δ и коэффициента податливости q , с помощью которого задаются упругие параметры прослойки:

$$\rho' = \sqrt{q}\rho, \quad c'_p = \sqrt{q}c_p, \quad c'_s = \sqrt{q}c_s. \quad (1.17)$$

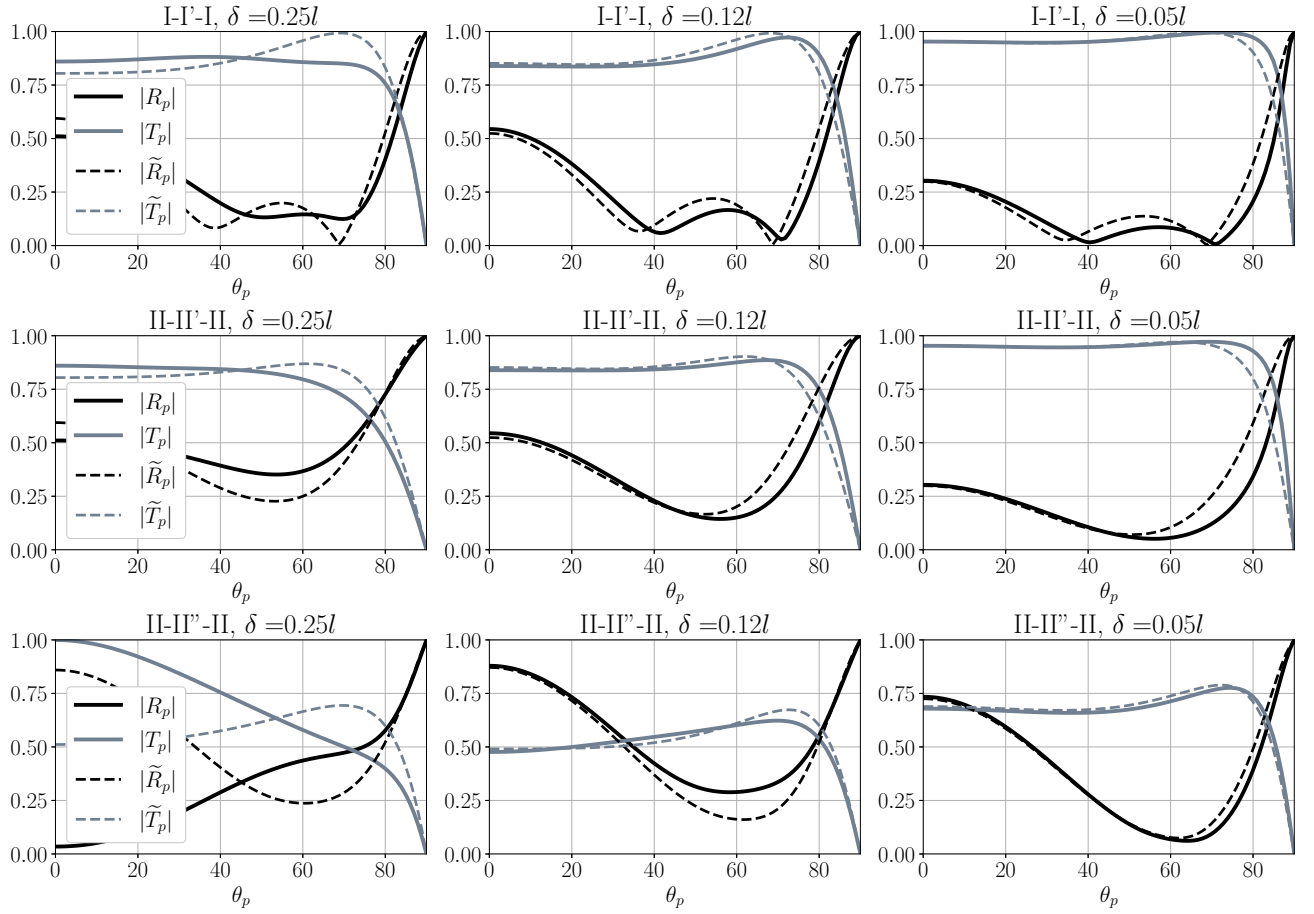


Рисунок 1.3 – Коэффициенты отражения и прохождения продольных волн в зависимости от угла падения плоской продольной волны

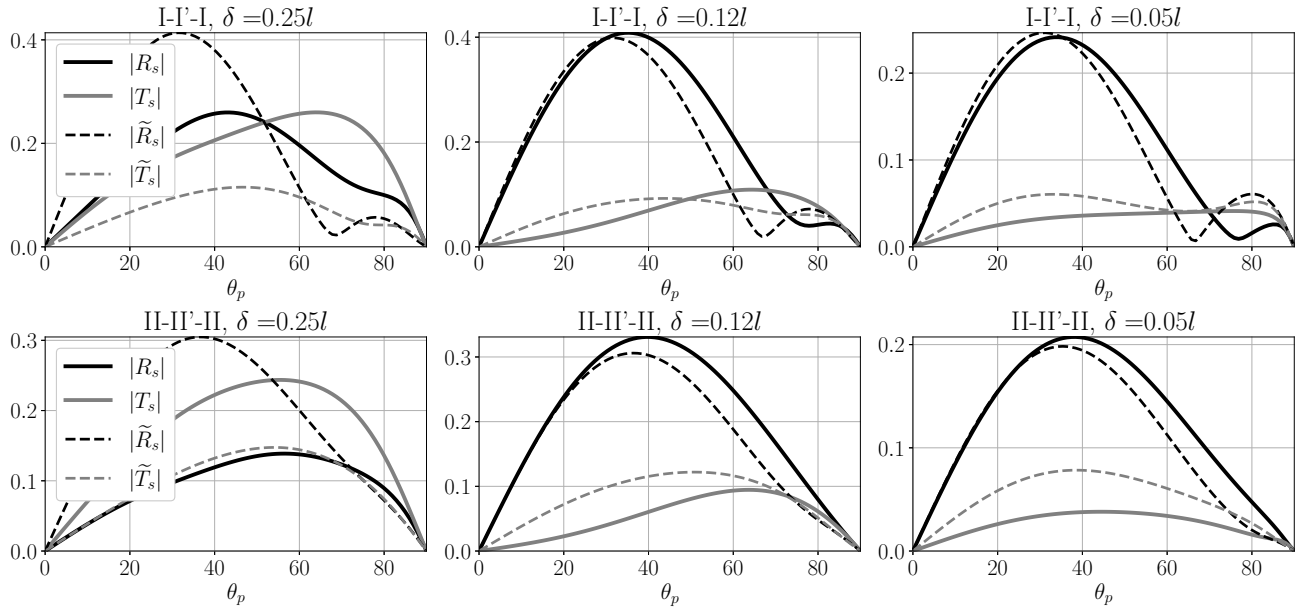


Рисунок 1.4 – Коэффициенты отражения и прохождения поперечных волн в зависимости от угла падения плоской продольной волны

Относительная погрешность вычислена в норме

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\int_0^{\pi/2} (|R_p|^2 + |R_s|^2 + |T_p|^2 + |T_s|^2) d\theta}.$$

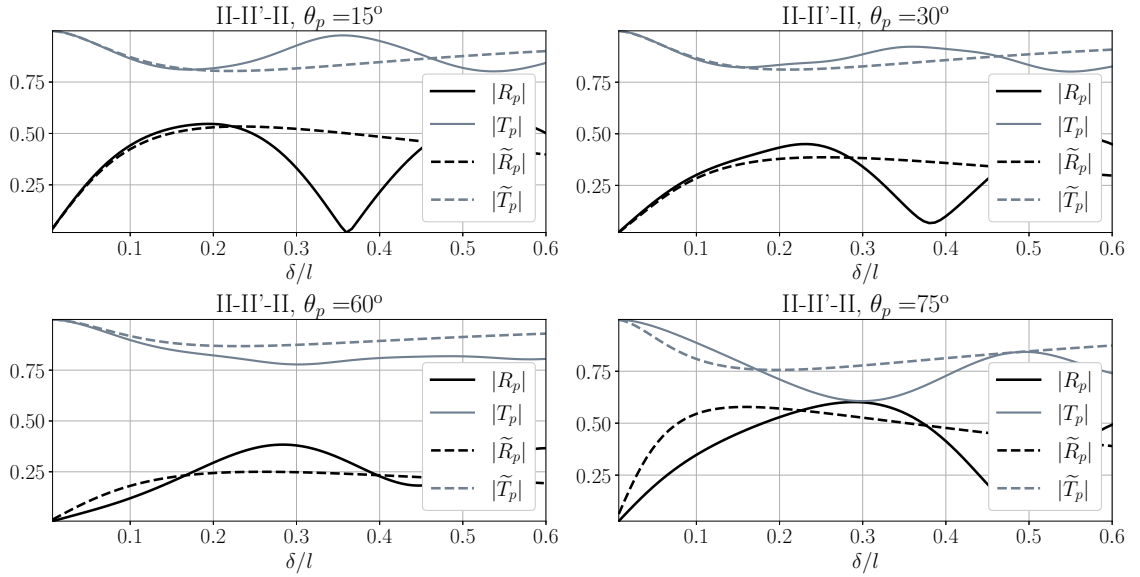


Рисунок 1.5 – Коэффициенты отражения и прохождения продольных волн в зависимости от толщины прослойки при падении плоской продольной волны под фиксированным углом

На рисунке 1.6 построены зависимости относительной погрешности $err(\delta/l, q)$ при $N_\theta \times N_q \times N_\delta = 90 \times 100 \times 100$. То есть системы (1.12) и (1.15) решались $N_\theta \times N_q \times N_\delta$ раз, где N_θ – количество точек равномерного разбиения отрезка $[0; \pi/2]$, N_q и N_δ – количество узлов равномерной сетки по осям q и δ/l , соответственно.

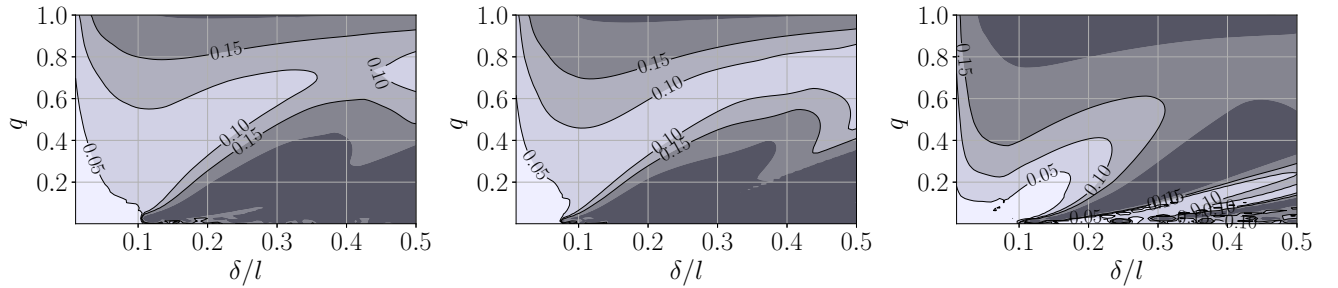


Рисунок 1.6 – Зависимость $err(\delta/l, q)$ для сред с $\nu = \nu' = 0.05$, $\nu = \nu' = 0.25$ и $\nu = \nu' = 0.45$

Если норма задаётся как $||\vec{x}|| = \max_{\theta_p}(|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, то полученные распределения ошибки $err(\delta/l, q)$ будут отличаться несущественно. Для достаточно тонких и податливых прослоек рассматриваемая модель тонкой прослойки даёт вполне приемлемое приближение. Если связь между упругими параметрами среды и слоя (1.17) задаётся другим способом, то внешний вид поля распределения ошибки изменится в большей степени, но малая величина относительной погрешности будет всё так же находиться в области малых значений толщины и податливости прослойки

1.2 Трёхмерная модель блочной среды с тонкими упругими прослойками

На рисунке 1.7 изображена модель блочной среды в виде периодической структуры, состоящей из блоков в форме параллелепипедов. Однородные изотропные упругие блоки разделяются прослойками, толщина которых в каждом из направлений обозначена δ_1 , δ_2 , δ_3 . Уравнения движения и определяющие

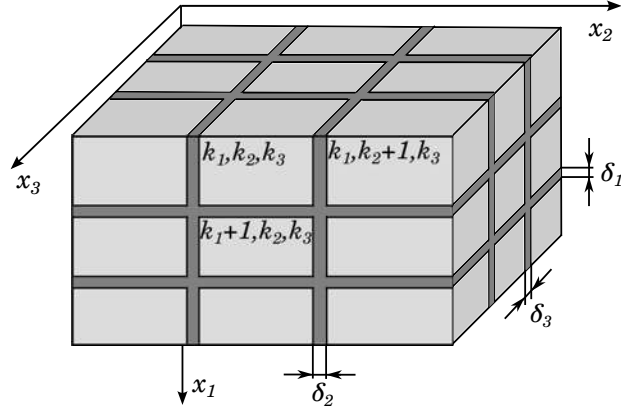


Рисунок 1.7 – Модель блочной среды с прослойками

уравнения для блоков записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, & \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \\
 \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}, \\
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right).
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Предполагается, что толщина прослойки много меньше размеров блока, поэтому прослойки представляются как плоскости контактирующих между собой

блоков. Уравнения упругих прослоек представляют собой дифференциально-разностные соотношения, записанные в виде внутренних граничных условий для блоков [46]. Прослойки в направлении оси x_1 между блоками (k_1, k_2, k_3) и $(k_1 + 1, k_2, k_3)$ описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \\ \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} &= \mu' \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Уравнения получаются из уравнений теории упругости путём их осреднения по толщине прослойки. Производные по пространству заменяются разностями, при этом в прослойке учитываются только касательные напряжения σ_{12} , σ_{13} и нормальное напряжение σ_{11} . Аналогично записываются уравнения вдоль направления оси x_2 для прослоек между блоками (k_1, k_2, k_3) и $(k_1, k_2 + 1, k_3)$

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}, \\ \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-}{\delta_2}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-}{2} &= \mu' \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_2}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

и в направлении оси x_3 для прослоек между блоками (k_1, k_2, k_3) и $(k_1, k_2, k_3 + 1)$

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-}{\delta_3}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-}{\delta_3}, \\ \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_3}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_3}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-}{2} &= \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_3}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} &= \mu' \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_3}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Параметры материалов прослоек обозначены штрихами, а верхние индексы «+» и «-» обозначают скорости и напряжения, относящиеся к границам взаимодействующих блоков.

Полученная математическая модель упругой блочной среды является термодинамически согласованной, удовлетворяет интегральному закону сохранения энергии. Рассмотрим блочный массив из $n_1 \times n_2 \times n_3$ блоков размерами

$H_1 \times H_2 \times H_3$ каждый. Закон сохранения для системы уравнений (1.18) – (1.21), рассматриваемой в $\Omega = [0, n_1 H_1] \times [0, n_2 H_2] \times [0, n_3 H_3]$, выражается в виде суммы кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек, равной потоку вектора Умова-Пойнтинга через границу Ω :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \int_0^{H_1} \int_0^{H_2} \int_0^{H_3} \left(\frac{\rho}{2} \vec{v}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, x_3)^2 + W^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, x_3) \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + \delta_1 \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \int_0^{H_2} \int_0^{H_3} \left(\frac{\rho'}{2} \left[\frac{\vec{v}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \vec{v}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2(\lambda' + 2\mu')} \left[\frac{\sigma_{11}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \sigma_{11}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 + \\
& + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{12}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \sigma_{12}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{13}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \sigma_{13}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 \right) dx_2 dx_3 + \\
& + \delta_2 \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2-1} \sum_{k_3=1}^{n_3} \int_0^{H_1} \int_0^{H_3} \left(\frac{\rho'}{2} \left[\frac{\vec{v}^{k_1, k_2+1, k_3}(t, x_1, 0, x_3) + \vec{v}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, H_2, x_3)}{2} \right]^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2(\lambda' + 2\mu')} \left[\frac{\sigma_{22}^{k_1, k_2+1, k_3}(t, x_1, 0, x_3) + \sigma_{22}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, H_2, x_3)}{2} \right]^2 + \\
& + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{12}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, x_1, 0, x_3) + \sigma_{12}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, H_2, x_3)}{2} \right]^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{23}^{k_1, k_2+1, k_3}(t, x_1, 0, x_3) + \sigma_{23}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, H_2, x_3)}{2} \right]^2 \right) dx_1 dx_3 + \\
& + \delta_3 \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3-1} \int_0^{H_1} \int_0^{H_2} \left(\frac{\rho'}{2} \left[\frac{\vec{v}^{k_1, k_2, k_3+1}(t, x_1, x_2, 0) + \vec{v}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, H_3)}{2} \right]^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2(\lambda' + 2\mu')} \left[\frac{\sigma_{33}^{k_1, k_2, k_3+1}(t, x_1, x_2, 0) + \sigma_{33}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, H_3)}{2} \right]^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{23}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, 0) + \sigma_{23}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, H_3)}{2} \right]^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\mu'} \left[\frac{\sigma_{13}^{k_1, k_2, k_3+1}(t, x_1, x_2, 0) + \sigma_{13}^{k_1, k_2, k_3}(t, x_1, x_2, H_3)}{2} \right]^2 dx_1 dx_2 = \\
& = \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \int_0^{H_2} \int_0^{H_3} \left(p_1^{N_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3) - p_1^{0, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) \right) dx_2 dx_3 + \\
& + \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_3=1}^{N_3} \int_0^{H_1} \int_0^{H_3} \left(p_2^{k_1, N_2, k_3}(t, x_1, H_2, x_3) - p_2^{k_1, 0, k_3}(t, x_1, 0, x_3) \right) dx_1 dx_3 + \\
& + \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \int_0^{H_1} \int_0^{H_2} \left(p_3^{k_1, k_2, N_3}(t, x_1, x_2, H_3) - p_3^{k_1, k_2, 0}(t, x_1, x_2, 0) \right) dx_1 dx_2. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Здесь $\vec{v}$ – вектор скоростей, $p_1 = \sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2 + \sigma_{13}v_3$, $p_2 = \sigma_{22}v_2 + \sigma_{12}v_1 + \sigma_{23}v_3$, $p_3 = \sigma_{22}v_2 + \sigma_{13}v_1 + \sigma_{23}v_3$ – проекции вектора плотности потока мощности, W – упругий потенциал:

$$2W = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2,$$

где модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно равны

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Термодинамическая согласованность модели гарантирует корректность постановки начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями, при которых правая часть (1.22) неотрицательна [101]. Можно показать, что обычные для теории упругости граничные условия в скоростях и напряжениях относятся к диссипативным [123].

1.3 Численный метод решения

Система уравнений для блоков (1.18) записывается в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = B_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}. \quad (1.23)$$

Здесь $U = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$ – вектор неизвестных. Численный метод решения системы основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Данный подход обеспечивает второй порядок сходимости по времени и пространству, если на каждом из этапов расщепления

применяются схемы второго порядка [127]. После расщепления система (1.23) сводится к серии одномерных задач:

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} &= B_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}, & U^{(1)}(t_0) &= U^{(0)}(t_0), \\
A \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} &= B_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x_2}, & U^{(2)}(t_0) &= U^{(1)}(t_0 + \Delta t/2), \\
A \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} &= B_3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x_3}, & U^{(3)}(t_0) &= U^{(2)}(t_0 + \Delta t/2), \\
A \frac{\partial U^{(4)}}{\partial t} &= B_3 \frac{\partial U^{(4)}}{\partial x_3}, & U^{(4)}(t_0) &= U^{(3)}(t_0 + \Delta t/2), \\
A \frac{\partial U^{(5)}}{\partial t} &= B_2 \frac{\partial U^{(5)}}{\partial x_2}, & U^{(5)}(t_0 + \Delta t/2) &= U^{(4)}(t_0 + \Delta t), \\
A \frac{\partial U^{(6)}}{\partial t} &= B_1 \frac{\partial U^{(6)}}{\partial x_1}, & U^{(6)}(t_0 + \Delta t/2) &= U^{(5)}(t_0 + \Delta t).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Вдоль каждого из направлений x_1, x_2, x_3 решается задача о распространении плоских продольных и поперечных волн. Независимые подсистемы плоских продольных и поперечных волн, соответствующие направлению x_1 , запишутся в виде:

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1}; \\
\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v_2}{\partial x_1};
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\rho \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_3}{\partial x_1}. \tag{1.27}$$

В прослойках, соединяющих блоки в направлении x_1 , решаются уравнения:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \tag{1.28}$$

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, \tag{1.29}$$

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} = \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} = \mu' \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1}. \tag{1.30}$$

Для решения одномерных задач реализовано два алгоритма. В одном из них используется метод распада разрыва С. К. Годунова [136] для решения уравнений в блоках, а уравнения прослоек решаются по схеме Г. В. Иванова [152]. Во втором алгоритме схема Иванова используется и для блоков, и для прослоек.

В разработанном программном комплексе возможен учёт иерархического строения среды. То есть вычислительная область, состоящая из крупных блоков первого иерархического уровня, может быть раздроблена на более мелкие блоки, которые в свою очередь также могут состоять из некоторого числа ещё меньших блоков. Блоки в форме параллелепипедов могут иметь произвольные размеры. При рассмотрении сред с несколькими иерархическими уровнями желательно задавать более мелкую сетку. Может возникнуть ситуация, когда прослойки с различных иерархических уровней принадлежат границам одних и тех же ячеек разностной сетки. В этом случае при задании параметров прослоек приоритет отдаётся прослойкам с более крупного иерархического уровня.

1.3.1 Алгоритм решения одномерных задач, основанный на методе распада разрыва Годунова

Рассмотрим в прямоугольнике $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ систему уравнений плоских волн

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Введём для x равномерную разностную сетку x_j ($j = 1, \dots, N$) с шагом $x_{j+1} - x_j = h = \text{const}$ и равномерную сетку для t с шагом τ . В начальный момент времени заданы условия $v(0, x) = v_0(x)$, $\sigma(0, x) = \sigma_0(x)$, на границах заданы $v(t, 0) = V_0$, $\sigma(t, 0) = \Sigma_0$, $v(t, L) = V_N$, $\sigma(t, L) = \Sigma_N$. Проинтегрируем (1.31) по ячейке сетки $[t_0, t_0 + \tau] \times [x_j, x_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(t_0 + \tau, x) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(t_0, x) dx + \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left(\sigma(t, x_{j+1}) - \sigma(t, x_j) \right) dt, \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma(t_0 + \tau, x) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma(t_0, x) dx + \rho c^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left(v(t, x_{j+1}) - v(t, x_j) \right) dt. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Скорости и напряжения $v(t, x_j)$, $\sigma(t, x_j)$ сохраняются постоянными в течение времени $\tau^* = h/c$, пока информация с соседних узлов не достигнет x_j . Значения

в граничных узлах ячейки сетки обозначим большими буквами V^j , Σ^j . Они вычисляются через инварианты Римана $I_{j+1/2}^\pm = \rho c v_{j+1/2} \pm \sigma_{j+1/2}$:

$$V^j = \frac{I_{j+1/2}^+ + I_{j-1/2}^-}{2\rho c}, \quad \Sigma^j = \frac{I_{j+1/2}^+ - I_{j-1/2}^-}{2}. \quad (1.33)$$

Затем аппроксимируются уравнения (1.32). Разделим их на h и разрешим относительно центральных узлов ячейки сетки $v^{j+1/2}$, $\sigma^{j+1/2}$:

$$v^{j+1/2} = v_{j+1/2} + \tau \frac{\Sigma^{j+1} - \Sigma^j}{\rho h}, \quad \sigma^{j+1/2} = \sigma_{j+1/2} + \rho c^2 \tau \frac{V^{j+1} - V^j}{h}. \quad (1.34)$$

Следуя принятым для неявных схем терминам, будем называть этап вычислений (1.33) «предиктором», а (1.34) «корректором». Для устойчивости схемы (1.33)–(1.34) необходимо соблюдение условия Куранта $R = c\tau/h \leq 1$, где R – число Куранта. Это условие является и достаточным для начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями [123]. Полученная схема (1.33)–(1.34) аппроксимирует систему (1.31) с первым порядком [136]. Действительно, подставляя (1.33) в (1.34), получим первое дифференциально приближение схемы:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{hc}{2}(1-R) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{hc}{2}(1-R) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (1.35)$$

В областях монотонного изменения решения можно добиться второго порядка аппроксимации, применяя процедуры реконструкции инвариантов Римана. В результате применения подобных процедур получается кусочно-полиномиальный разрывный сплайн с сохранением интегральных средних значений по ячейкам и минимальной суммой модулей скачков на границах ячеек. Воспользуемся предельной реконструкцией с $\min\text{mod}$ -ограничителем [140]. Инварианты Римана в ячейке $(j, j+1)$ представляются как линейные функции

$$I(x) = I_{j+1/2} + \alpha_{j+1/2}^0(x - x_{j+1/2}).$$

В начале процедуры определяются скачки значений в ячейках по формуле

$$\Delta I_j^0 = I_{j+1/2} - I_{j-1/2}.$$

Угловой коэффициент прямой вычисляется по формуле

$$\alpha_{j+1/2}^0 = \frac{\text{sign } \Delta I_j^0}{h} \min\{|\Delta I_j^0|, |\Delta I_{j+1}^0|\} \quad \text{при} \quad \Delta I_j^0 \Delta I_{j+1}^0 > 0,$$

$$\alpha_{j+1/2}^0 = 0 \quad \text{при} \quad \Delta I_j^0 \Delta I_{j+1}^0 \leq 0$$

В результате получается кусочно-линейный разрывный сплайн, монотонный в области монотонного изменения решения. На последующих итерациях вычисляются новые скачки

$$\Delta I_j^s = \Delta I_{j+1}^{s-1} - (\alpha_{j-1/2}^{s-1} + \alpha_{j+1/2}^{s-1})h,$$

через которые пересчитываются коэффициенты α_j^s . Значения инвариантов Римана на границах ячеек будут иметь вид:

$$I_{j+1/2}^\pm = I_{j+1/2} \pm \alpha_{j+1/2} \frac{h}{2}. \quad (1.36)$$

После применения процедуры получается кусочно-линейный сплайн с минимальными разрывами на границах ячеек сетки. Можно показать, что при условии монотонности решения схема Годунова с реконструкцией инвариантов будет иметь второй порядок аппроксимации. Это проверяется непосредственной подстановкой уравнений (1.33) с пересчитанными согласно (1.36) инвариантами Римана в уравнения (1.34).

Решение уравнений в прослойках

Уравнения в прослойках изначально представляются в удобном для расщепления виде и описывают одномерные движения вдоль направлений x_1 , x_2 и x_3 . Система уравнений для прослоек в направлении x_1 (1.28)–(1.30) состоит из трёх независимых аналогичных друг другу одномерных подсистем, описывающих продольные и поперечные движения. Одномерные уравнения для упругих прослоек записываются в следующем виде:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \rho' c'^2 \frac{v^+ - v^-}{\delta}. \quad (1.37)$$

Для их решения используется бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова, который описан в работах [46, 62, 173]. Уравнения на шаге корректор записываются в виде:

$$\rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{\tau} = \rho' c'^2 \frac{v^+ - v^-}{\delta}. \quad (1.38)$$

Здесь $\hat{v}$, $\hat{\sigma}$ относятся к текущему временному слою, v , σ – к предыдущему, а знаками «+», «−» отмечены значения на границах соседних блоков, как показано на рисунке 1.8. После умножения соответствующих уравнений на $(\hat{v} + v)/2$ и

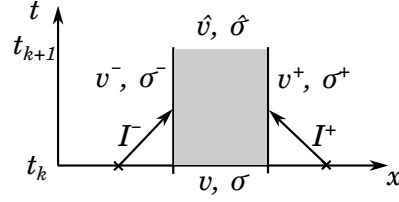


Рисунок 1.8 – Обозначения в разностной схеме для прослойки

$(\hat{\sigma} + \sigma)/2$ и их суммирования получается дискретный аналог закона сохранения

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + \frac{1}{\rho' c'^2} \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\tau} + D^h = \frac{\sigma^+ v^+ - \sigma^- v^-}{\delta},$$

где мощность схемной диссипации имеет вид:

$$D^h = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta} \left(\frac{v^+ + v^-}{2} - \frac{\hat{v} + v}{2} \right) + \frac{v^+ - v^-}{\delta} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} \right). \quad (1.39)$$

Отсутствие схемной диссипации имеет место при условии $\hat{\sigma} + \sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ и $\hat{v} + v = v^+ - v^-$. Используя эти соотношения, перепишем уравнения (1.38):

$$v^+ + v^- = 2v + \frac{\tau}{\rho' \delta} (\sigma^+ - \sigma^-), \quad \sigma^+ + \sigma^- = 2\sigma + \frac{\rho' c'^2 \tau}{\delta} (v^+ - v^-). \quad (1.40)$$

Для определения значений на границах блоков $v^\pm, \sigma^\pm$ используются соотношения на характеристиках:

$$I^+ = \rho c v^+ + \sigma^+, \quad I^- = \rho c v^- - \sigma^-, \quad (1.41)$$

из которых получаются выражения для $v^+ + v^-$ и $\sigma^+ + \sigma^-$:

$$v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \quad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c (v^+ - v^-).$$

Подстановка этих выражений в (1.40) даст

$$v^+ - v^- = \frac{\delta (I^+ - I^- - 2\sigma)}{\rho c \delta + \rho' c'^2 \tau}, \quad \sigma^+ - \sigma^- = \frac{\rho' \delta (I^+ + I^- - 2\rho c v)}{\rho' \delta + \rho c \tau}. \quad (1.42)$$

Текущие значения скоростей и напряжений внутри прослойки $\hat{v}, \hat{\sigma}$ определяются из уравнений шага «корректор» (1.38). При вычислении значений в приграничных узлах блоков участвуют выражения $v^\pm, \sigma^\pm$, которые получаются путём сложения и вычитания уравнений (1.40) и (1.42). Безусловная устойчивость схемы позволяет обойти проблему согласования шагов по времени между вычислениями в блоках и прослойках, что позволяет рассчитывать задачи, в которых $c' > c$, без потери устойчивости.

Распараллеливание алгоритма

Алгоритмы разработаны для многопроцессорных вычислительных систем кластерной архитектуры с распределённой памятью при использовании технологии MPI (Message Passing Interface). Используется трёхмерная декомпозиция расчётной области с равномерным распределением узлов сетки между $p_1 \times p_2 \times p_3$ процессами. Счёт одномерной задачи вдоль оси x_1 организован следующим образом: в каждом процессе происходит разделение обрабатываемой подобласти из $N_{1loc} \times N_{2loc} \times N_{3loc}$ узлов на K равных прямоугольных призм с основанием $M_2 \times M_3$ узлов, внутри каждой из которых одновременно решаются одномерные системы. Для сеток с большой размерностью такое разделение позволяет сократить время расчётов, число K подбирается эмпирически. Обмены происходят при решении одномерных задач на шаге «предиктор» с использованием стандартных функций Send и Recv на $p_1 - 1$ плоскостях. Сначала передаются вычисленные в приграничных узлах сетки инварианты Римана, затем вычисляются скорости и напряжения в узлах на границе соседних процессов, и после обмена в параллельном режиме вычисляются разностные уравнения шага «корректор». Аналогично реализуются вычисления по направлениям x_2 и x_3 .

1.3.2 Схема Иванова Г. В. с контролируемой диссипацией для одномерных задач

Анализ схем для решения осесимметричных задач на примере распространения цилиндрических волн был представлен в работах [174, 175]. Здесь рассматривается более простой случай плоских волн. Построим разностную схему для системы плоских волн, распространяющихся в однородной среде:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.43)$$

Рассматривается регулярная разностная сетка. Величины на текущем временном слое записываются с «крышкой» $\hat{v} = v^{j-1/2}$, с предыдущего временного слоя – без «крышки» $v_{j-1/2} = v$, величины с заглавной буквы и индексами « $\pm$ » относятся к правой и левой границам ячейки. На рисунке 1.9 изображена ячейка сетки с введёнными обозначениями.

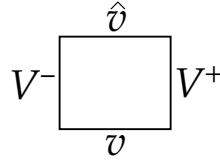


Рисунок 1.9 – Ячейка разностной сетки

Выпишем закон сохранения для системы (1.43)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2\rho c^2} \right) = \frac{\partial(\sigma v)}{\partial x}. \quad (1.44)$$

Запишем разностные уравнения шага «корректор» в ячейках прямоугольной пространственно-временной сетки

$$\rho \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{h}, \quad \frac{1}{\rho c^2} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{V^+ - V^-}{h}. \quad (1.45)$$

Домножим первое уравнение системы (1.45) на $(\hat{v} + v)/2$, а второе на $(\hat{\sigma} + \sigma)/2$, после суммирования получим дискретный аналог закона сохранения (1.44)

$$\frac{1}{\tau} \left(\rho \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\rho c^2} \right) + D^h = \frac{\Sigma^+ V^+ - \Sigma^- V^-}{h},$$

где мощность схемной диссипации

$$D^h = \frac{V^+ - V^-}{h} \left(\frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{2} - \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} \right) + \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{h} \left(\frac{V^+ + V^-}{2} - \frac{\hat{v} + v}{2} \right). \quad (1.46)$$

Будем полагать, что значения скорости в ячейке, вычисленные как полусуммы значений в соседних узлах по времени и пространству, совпадают

$$v_0 = \frac{V^+ + V^-}{2} = \frac{\hat{v} + v}{2}. \quad (1.47)$$

Пусть выражение для напряжений в первых скобках (1.46) зависит от параметра γ и скорости

$$\frac{\gamma}{h} (V^+ - V^-) = \frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{2} - \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2}. \quad (1.48)$$

Таким образом, в формуле (1.46) второе слагаемое равно нулю, и мощность диссипации можно определить как квадратичную форму вида:

$$D^h = \frac{\gamma}{h^2} (V^+ - V^-)^2,$$

которая будет неотрицательной, если параметр $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ схема будет полностью консервативна. Можно также ввести ещё одну константу диссипации

и вместо (1.47) получить ещё одно выражение, аналогичное (1.48), записанное для напряжений [152]. С учётом (1.45) замыкающие уравнения схемы на шаге «предиктор» приводятся к системе

$$\begin{aligned}\Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\rho h}{\tau}(V^+ + V^- - 2v), \\ \Sigma^+ + \Sigma^- &= \frac{\rho c^2 \tau + 2\gamma}{h}(V^+ - V^-) + 2\sigma.\end{aligned}$$

Складывая и вычитая уравнения, получим

$$\begin{aligned}2\Sigma^+ &= (a + b)V^+ + (a - b)V^- + 2\sigma^{j-1/2} - 2av_{j-1/2}, \\ 2\Sigma^- &= (b - a)V^+ + (-b - a)V^- + 2\sigma^{j+1/2} + 2av_{j+1/2},\end{aligned}\tag{1.49}$$

где $a = \rho h/\tau$, $b = \rho c^2 \tau/h + 2\gamma/h$. Имея в виду, что на границах ячеек значения скорости $V^+ = V^j$, $V^- = V^{j-1}$, получим систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей для внутренних узлов ($j = 1 \dots N-1$)

$$AV^{j+1} + CV^j + BV^{j-1} = F_j,\tag{1.50}$$

где

$$A = B = a - b, \quad C = 2(a + b), \quad F_j = 2a(v_{j+1/2} + v_{j-1/2}) + 2(\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}).$$

К системе уравнений добавляются граничные условия $V^0 = V(t + \tau/2, x_0)$ и $V^N = V(t + \tau/2, x_N)$ в случае, если известны скорости. Если известны напряжения $\Sigma^0 = \sigma(t + \tau/2, x_0)$ и $\Sigma^N = \sigma(t + \tau/2, x_N)$, то согласно (1.49) в узлах $j = 0$ и $j = N$ получим уравнения

$$(-b - a)V^0 + (b - a)V^1 = -2av_{1/2} - 2\sigma_{1/2} + 2\Sigma^0,$$

$$(a - b)V^{N-1} + (a + b)V^N = 2av_{N-1/2} - 2\sigma_{N-1/2} + 2\Sigma^N.$$

Таким образом, на шаге «предиктор» схемы получается трёхдиагональная система, которая решается методом прогонки. Уравнения на шаге «корректор» в центральном узле ячейки $x_{j-1/2}$ примут вид:

$$\hat{v} = V^+ + V^- - v, \quad \frac{1}{\rho c^2} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{V^+ - V^-}{h}.\tag{1.51}$$

Здесь первое уравнение следует из (1.47).

Для однородной среды коэффициенты a и b (A и B) не зависят от номера узла. Когда среда неоднородна, а сетка нерегулярна, коэффициенты будут определяться по формулам:

$$a_{j-1/2} = \frac{\rho_{j-1/2} h_{j-1/2}}{\tau}, \quad b_{j-1/2} = \frac{\rho_{j-1/2} c_{j-1/2}^2 \tau}{h_{j-1/2}} + \frac{2\gamma}{h_{j-1/2}}.$$

$$A_{j-1} = B_j = a_{j-1/2} - b_{j-1/2}, \quad C_j = a_{j-1/2} + b_{j-1/2} + a_{j+1/2} + b_{j+1/2},$$

$$F_j = 2a_{j+1/2} v_{j+1/2} + 2a_{j-1/2} v_{j-1/2} + 2(\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}).$$

В среде с прослойками система на шаге «предиктор» решается для $N = N_b + N_l$ ячеек, где N_b – количество узлов, выделенное для решения в блоках, N_l – количество прослоек. При дискретизации расчётной области для каждой прослойки выделяется одна дополнительная ячейка разностной сетки. Создаются массивы из N_l элементов для хранения скоростей и напряжений в прослойке с предыдущего шага по времени, которые нужны для вычисления скоростей на межблочных границах. При вычислении скоростей на шаге «предиктор» коэффициенты для блоков и прослоек (отмечены штрихами) примут вид:

$$a = \frac{\rho h}{\tau}, \quad b = \frac{\rho c^2 \tau}{h} + \frac{2\gamma}{h}, \quad a' = \frac{\rho' \delta}{\tau}, \quad b' = \frac{\rho' c'^2 \tau}{\delta} + \frac{2\gamma'}{\delta}.$$

Уравнения шага «корректор» для блоков запишутся как (1.51), а для прослоек в дополнительных ячейках виде:

$$\hat{v} = V^+ + V^- - v, \quad \frac{1}{\rho' c'^2} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{V^+ - V^-}{\delta}.$$

Неотрицательность мощности диссипации ($\gamma \geq 0$) обеспечивает равномерную устойчивость решения, то есть выполняется неравенство $\|(\hat{v}, \hat{\sigma})\|^2 \leq \|(v, \sigma)\|^2$, где норма определяется как $\|(v, \sigma)\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^x \rho v^2 + \frac{1}{\rho c^2} \sigma^2 dx$. Данная схема является безусловно устойчивой, что позволяет выбрать большой шаг по времени и сократить время вычислений. Однако расчёт волновых процессов с большими градиентами при крупных шагах по времени приводит к потере точности решения [176].

Выражая $\frac{\partial \Sigma}{\partial x}$ через $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial x}$ через $\frac{\partial v}{\partial x}$ в разложении в ряд Тейлора уравнений шага «корректор» и раскладывая в ряд уравнения шага «предиктор», можно получить дифференциальное приближение схемы:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(h^2), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + O(h^2). \quad (1.52)$$

Когда параметр схемной диссипации γ порядка h^2 и выше, схема будет иметь второй порядок аппроксимации, но будет немонотонной. Если γ порядка h , то схема имеет первый порядок.

Распараллеливание алгоритма

Обмен данными между процессами происходит при решении одномерных задач на шаге «предиктор». Основная трудность связана с наличием трёхдиагональной системы. Для организации обменов можно использовать два подхода. Первый заключается в распараллеливании алгоритма прогонки методом Яненко и Коновалова [177]. Второй подход является более простым и предполагает вычисление значений в граничных точках процессов по схеме Годунова с дальнейшим итерационным пересчётом этих значений.

Предлагаемый способ был рассмотрен в [174]. Он заключается в том, что в граничных узлах значения скоростей вычисляются по формулам, соответствующим шагу «предиктор» схемы Годунова:

$$V^j = \frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} + \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{2\rho c}. \quad (1.53)$$

Затем в параллельном режиме каждым отдельным процессом вычисляется решение трёхдиагональной системы методом прогонки. Значения вычисленные по формулам (1.53) играют роль граничных условий. Затем V^j на границах процессов пересчитывается по формуле, которая выражается из трёхдиагональной системы (1.50):

$$V^j = \frac{F_j - B_j V^{j-1} - A_j V^{j+1}}{C_j}. \quad (1.54)$$

Полученная формула является выражением итерационного метода Якоби для системы с трёхдиагональной матрицей.

Приближение, найденное по формулам (1.53), является достаточно точным, и после однократного применения процедуры (1.54) можно достичь второго порядка аппроксимации для бездиссипативной схемы ($\gamma = 0$) при условии достаточно большого количества ячеек сетки, обрабатываемых одним процессом. Теоретическая оценка количества итераций в зависимости от количества ячеек сетки в каждом процессе представляет собой отдельную задачу. Можно рассмотреть предельный случай такой схемы, когда в каждой ячейке сетки на шаге «предиктор» вычисляются значения V по формуле (1.53), затем происходит итерационный пересчёт по формуле (1.54), после чего решаются уравнения

шага «корректор» (1.51). Такая схема с итерациями будет иметь вид:

$$V^j(0) = \frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} + \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{2\rho c},$$

$$V^j(s) = \frac{F_j - BV^{j-1}(s-1) - AV^{j+1}(s-1)}{C_j}, \quad s = 1, \dots, S,$$

$$v^{j+1/2} = V^{j+1}(s) + V^j(s) - v_{j+1/2}, \quad \frac{1}{\rho c^2} \frac{\sigma^{j+1/2} - \sigma_{j+1/2}}{\tau} = \frac{V^{j+1}(s) - V^j(s)}{h}.$$

Здесь s – номер итерации. В ходе вычислительных экспериментов было обнаружено, что для достижения второго порядка сходимости требуется 5-7 итераций, что приводит к весьма длительному времени вычислений.

1.3.3 Тестовые расчёты одномерной задачи

Исследуем порядок сходимости схем на гладком решении. Решение системы (1.43) будем искать в виде стоячих волн

$$v = -\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx),$$

$$\sigma = -\rho c(\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)).$$

Здесь k – волновое число, ω – частота. Погрешность численного решения определяется в энергетической норме

$$\|(v, \sigma)\| = \sup_{0 < t < T} \sqrt{\int_0^H \left(\rho \frac{v^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2\rho c^2} \right) dx}.$$

Относительная погрешность err численного решения $U_h = (v_h, \sigma_h)$, полученного на равномерной сетке с пространственным шагом h , вычисляется по формуле:

$$err = \frac{\|U_h - [U]_h\|}{\|[U]_h\|}.$$

Здесь $[U]_h$ – проекция точного решения на ту же сетку. Порядок сходимости численного решения определяется по формуле:

$$p = \log_2 \frac{\|U_{2h} - [U]_{2h}\|}{\|U_h - [U]_h\|}, \quad (1.55)$$

В тестовом решении $\rho = 1$ кг/м³, $c = 1$ м/с, $\omega = 8\pi$. В таблице 1.2 приведены результаты численного исследования сходимости рассмотренных выше разностных схем. Схема, основанная на методе Годунова с реконструкцией, обладает

Таблица 1.2 – Влияние γ на сходимость схемы

Кол-во узлов	Схема Годунова с реконструкцией		$\gamma = h$		$\gamma = h^2$		$\gamma = h^3$	
			err	p	err	p	err	p
100	0.045821	0.968	0.340381	0.716	0.010804	1.987	0.001912	2.003
200	0.023420	0.981	0.207171	0.833	0.002726	1.999	0.000477	2.003
400	0.011869	0.992	0.116307	0.908	0.000682	2.004	0.000119	1.988
800	0.005969	0.996	0.061998	0.951	0.000170	1.993	0.000030	2.019
1600	0.002992	-	0.032074	-	0.000043	-	0.000007	-

первым порядком сходимости. Схема Иванова имеет второй порядок сходимости, когда параметр γ порядка h^2 и выше. Когда γ порядка h схема имеет первый порядок сходимости.

Поскольку схема является безусловно устойчивой, можно брать шаги по времени, не удовлетворяющие условию Куранта, сохраняя при этом второй порядок сходимости. В таблице 1.3 приведены результаты анализа сходимости схемы при различных числах Куранта R . Увеличение шага по времени сокращает время расчётов, но приходится жертвовать точностью.

Таблица 1.3 – Погрешность решения бездиссипативной ($\gamma = 0$) схемы Иванова при различных значениях числа Куранта R

Кол-во узлов	$R = 0.9$		$R = 1.5$		$R = 2.5$	
	err_r	p	err	p	err	p
100	0.001896	1.993	0.012553	2.002	0.053641	2.022
200	0.000475	1.993	0.003132	2.000	0.013206	2.006
400	0.000119	1.991	0.000783	1.998	0.003288	2.000
800	0.000030	1.992	0.000196	2.000	0.000822	2.004
1600	0.000007	-	0.000049	-	0.000205	-

Монотонность схем

Рассмотрим задачу мгновенного приложения к левой границе постоянного напряжения $\sigma(t, 0) = 1$ при нулевых начальных условиях. На рисунке 1.10 показано поведение численного решения при разных γ . Заметно, что когда порядок малости γ сравним с h , то разрыв заметно сглаживается, а при γ порядка h^2 решение немонотонно, но за счёт схемной вязкости амплитуда осцилляций численного решения снижается. Когда γ порядка малости h^3 и мень-

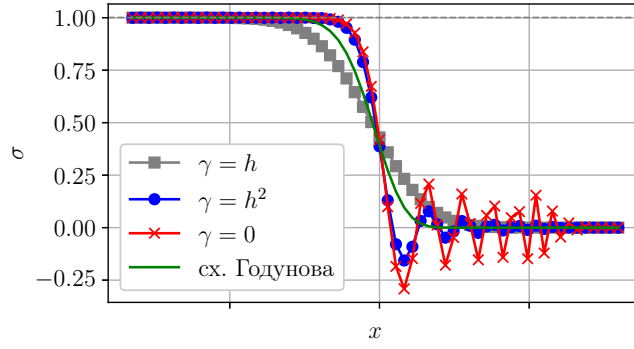


Рисунок 1.10 – Графики напряжений $\sigma(x)$ при $R = \tau/h = 0.9$ в зависимости от параметра диссипации γ

ше, существенное влияние на решение оказывают члены порядка малости h^2 , содержащие производные третьего порядка (1.52). Следует отметить, что решение, полученное по схеме Иванова, совпадает с решением, полученным схемой Годунова, при параметре диссипации $\gamma = \rho c(1 - R)h$.

1.3.4 Тестовые расчёты двумерной задачи

Рассмотрен тест, аналогичный предложенному в работе В. И. Голубева [131]. В качестве начального условия использовались две продольные и две поперечные волны с профилем $v(\xi) = \sin^6(\xi)$, где ξ – нормаль к волновому фронту. Продольные волны распространяются под углом 45° к границам, а поперечные под углом 135° . На границах задаются периодические граничные условия, которые при заданных углах распространения волн обеспечивают отсутствие артефактов от границ. Параметры среды задавались следующими: $\rho = 2000$ кг/м³, $c_p = 2000 \cdot \sqrt{2}$ м/с, $c_s = 1000 \cdot \sqrt{2}$ м/с. Размер расчётной области составляет $L_1 = L_2 = 10$ м, разностная сетка равномерная $N_1 = N_2 = N$. Время расчёта составило один полный период, то есть до момента восстановления исходного волнового поля. На рисунке 1.11 показано волновое поле в начальный момент времени. Погрешность численного решения относительно точного $err_2 = ||[U]_h - U_h|| / ||[U]_h||$ вычислялась в дискретном аналоге нормы $L_\infty(0, T; L_2(0, L))$

$$||U|| = \sup_{0 < t < T} \sqrt{\iint_{\Omega} \left(\rho \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + W \right) dx_1 dx_2}.$$

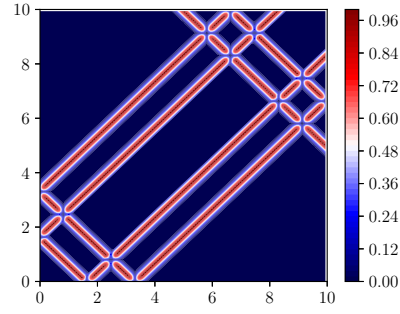


Рисунок 1.11 – Модуль вектора скорости в начальный момент времени

Здесь W – упругий потенциал:

$$2W = \rho(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2) - \frac{9\nu}{E}\sigma_0^2.$$

Относительная погрешность err_c вычислена в норме

$$||U|| = \sup_{0 < t < T} \max_{\Omega} |U|.$$

В таблицах 1.4 и 1.5 приведены результаты численного анализа порядка сходимости схем (1.55).

Таблица 1.4 – Относительная погрешность решения при двуциклическом расщеплении
($R = c_p \tau / h = 0.9$)

N	Сх. Годунова с реконструкцией				Сх. Иванова $\gamma = 0$			
	err_2	p_2	err_c	p_c	err_2	p_2	err_c	p_c
40	0.065842	1.618	0.048797	1.685	0.058746	2.047	0.070740	1.899
80	0.021445	1.490	0.015177	1.482	0.014219	2.072	0.018963	1.961
160	0.007636	1.331	0.005434	1.326	0.003381	2.090	0.004872	2.015
320	0.003036	1.189	0.002168	1.195	0.000794	2.048	0.001205	2.001
640	0.001331	-	0.000947	-	0.000192	-	0.000301	-

Численный эксперимент показывает, что схема Годунова с предельной реконструкцией инвариантов имеет первый порядок сходимости, несмотря на то, что схема расщепления второго порядка. В данной ситуации можно обойтись простой схемой расщепления, порядок схемы останется первым, но погрешность возрастет. Бездиссипативная схема Иванова с двуциклическим расщеплением даёт второй порядок сходимости. Применение простой схемы расщепления не позволяет достичь второго порядка.

Таблица 1.5 – Относительная погрешность при простом расщеплении для схемы Иванова
($R = c_p \tau / h = 0.9$, $\gamma = 0$)

N	err_2	p_2	err_c	p_c
40	0.061088	1.658	0.067981	1.466
80	0.019363	1.578	0.024605	1.283
160	0.006486	1.572	0.010113	1.227
320	0.002181	1.561	0.004319	1.219
640	0.000739	-	0.001856	-

1.3.5 Слабоотражающие граничные условия

При моделировании распространения возмущений в неограниченном пространстве на границах вычислительной области необходимо поставить специфические условия, имитирующие беспрепятственное прохождение волн за пределы области без отражения. В случае одномерной задачи распространения плоских волн граничные условия могут быть сформулированы точно в дифференциальном виде. Проблема заключается лишь в разностной аппроксимации полученных соотношений [168, 169]. Рассмотрим уравнения, описывающие распространение плоских волн в однородном полупространстве $x \geq 0$:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

На левой границе $x = 0$ задаются скорости, напряжения, либо их линейная комбинация. Инварианты Римана, переносящие возмущения слева направо и справа налево соответственно равны:

$$I^- = \rho c v - \sigma \quad \text{и} \quad I^+ = \rho c v + \sigma.$$

Чтобы волна беспрепятственно проходила через правую границу $x = L$, необходимо отсечь волны, приходящие из бесконечности, а именно задать

$$I^+ = \rho c v(t, L) + \sigma(t, L) = 0.$$

Аппроксимация полученного условия даст выражение

$$I^+(x_N) = \rho c v(x_{N+1/2}) + \sigma(x_{N+1/2}) = 0.$$

Данное условие обеспечивает полное поглощение волны без искажений решения в расчётной области $x \in (0, L)$.

Распространить вышеописанный подход на многомерные задачи без искажения решения в расчётной области не удаётся, поскольку возникают частичные отражения от границ. Рассмотрим часть упругого полупространства $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$. На границе $x_1 = 0$ заданы условия свободной поверхности. По аналогии с одномерным случаем условия на остальных границах задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{11}^+(L_1, x_2, x_3) &= 0, & I_{12}^+(L_1, x_2, x_3) &= 0, & I_{13}^+(L_1, x_2, x_3) &= 0, \\ I_{22}^-(x_1, 0, x_3) &= 0, & I_{12}^-(x_1, 0, x_3) &= 0, & I_{23}^-(x_1, 0, x_3) &= 0, \\ I_{22}^+(x_1, L_2, x_3) &= 0, & I_{12}^+(x_1, L_2, x_3) &= 0, & I_{23}^+(x_1, L_2, x_3) &= 0, \\ I_{33}^-(x_1, x_2, 0) &= 0, & I_{13}^-(x_1, x_2, 0) &= 0, & I_{23}^-(x_1, x_2, 0) &= 0, \\ I_{33}^+(x_1, x_2, L_3) &= 0, & I_{13}^+(x_1, x_2, L_3) &= 0, & I_{23}^+(x_1, x_2, L_3) &= 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Предложенный способ является естественным для задач, в которых применяются процедуры расщепления на одномерные задачи. Волны, падающие на границу под непрямым углом, будут частично отражаться и тем самым вносить погрешность в решение.

Можно модифицировать данный подход, определяя направление движения волнового фронта $\vec{\nu}$. Нужно предположить, что волна является плоской в окрестности некоторой точки x , находящейся вблизи границы. Задача состоит в построении вектора $\vec{\nu}$ при помощи дифференциальных анализаторов, основанных на вычислении производных от скоростей или напряжений по пространственным переменным с дальнейшим определением точек перегиба [170, 171]. Вектор $\vec{\nu}$ есть один из базисных векторов локальной декартовой системы координат, связанной с фронтом. Зная этот вектор и матрицу перехода от исходной системы координат к локальной, можем переформулировать граничные условия для скоростей $\tilde{v} = D^*v$ и напряжений $\tilde{\sigma} = D^*\sigma D$.

Несколько иной подход в задании неотражающих граничных условий состоит в построении поглощающих слоёв. Идеально согласованный слой (perfectly matched layer, PML) строится таким образом, чтобы на границе со слоем не происходило отражений, а внутри слоя волна полностью поглощалась, не доходя до границ вычислительной области. Применение данного подхода осложняется возникновением неустойчивости при моделировании длительных волновых процессов. Внутри слоя могут возникнуть нарастающие возмущения, распространяющиеся внутрь вычислительной области [164], [165]. При моделировании анизотропных сред классический PML также проявляет

неустойчивость. Одним из достаточно простых и наиболее привлекательных способов решения проблемы является построение слабоотражающего слоя М-РМЛ (Multiaxial PML). Согласование границ слоя проводится не только в нормальном направлении, но и в касательном, что приводит к частичному отражению волн от слоя. Задача состоит в определении оптимальных параметров слоя для обеспечения минимального отражения при сохранении устойчивости. Данный способ был подробно описан в работе В. В. Лисицы и М. Н. Дмитриева [166, 167].

1.4 Задача Лэмба для упругой блочной среды

Рассмотрим задачу Лэмба для блочного полупространства в трёхмерной постановке. Решение вычисляется в $\Omega = [0; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$. Будем считать, что прослойки во всех направлениях имеют одинаковую толщину $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. На свободной поверхности $x_1 = 0$ задаются условия $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$. В точке $x_2 = x_3 = 0$ задаётся источник нормального давления $\sigma_{11}(t) = p_0 \delta(t)$, здесь $\delta(t)$ – дельта-функция. В расчётах задавалось импульсное воздействие постоянной амплитуды p_0 длительностью один шаг по времени τ . На границах $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ ставятся условия симметрии

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = v_2 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = v_3 = 0.$$

На остальных границах ($x_1 = L_1$, $x_2 = L_2$ и $x_3 = L_3$) задаются слабоотражающие граничные условия (1.56).

Решение вычислено в массиве из 45^3 кубических блоков со стороной $H = 1.6$ м, на каждый блок приходится 16^3 узлов равномерной разностной сетки. Параметры упругих блоков и прослоек указаны в таблице 1.6. На рисунке

Таблица 1.6 – Параметры упругой блочной среды

	Блоки	Прослойки		
	$H = 1.6$ м	$\delta = 15$ мм	$\delta = 80$ мм	$\delta_1 = 80$ мм, $\delta_2 = 15$ мм
ρ , кг/м ³	2400	1200		
c_p , м/с	4500	1000		
c_s , м/с	2700	700		

1.12 представлены линии уровня скорости v_1 в один и тот же момент времени после приложения нагрузки в однородной упругой среде и блочных средах с

толщиной прослойки $\delta = 15$ мм и $\delta = 80$ мм, а также в иерархической блочной среде, каждый из 5^3 крупных блоков которой состоит из 9^3 малых блоков со стороной 160 мм, при этом толщина прослойки между крупными блоками $\delta_1 = 80$ мм, а между малыми блоками $\delta_2 = 15$ мм. На рисунке 1.13 изображены осциллограммы поверхностных волн для тех же сред. За счёт деформирова-

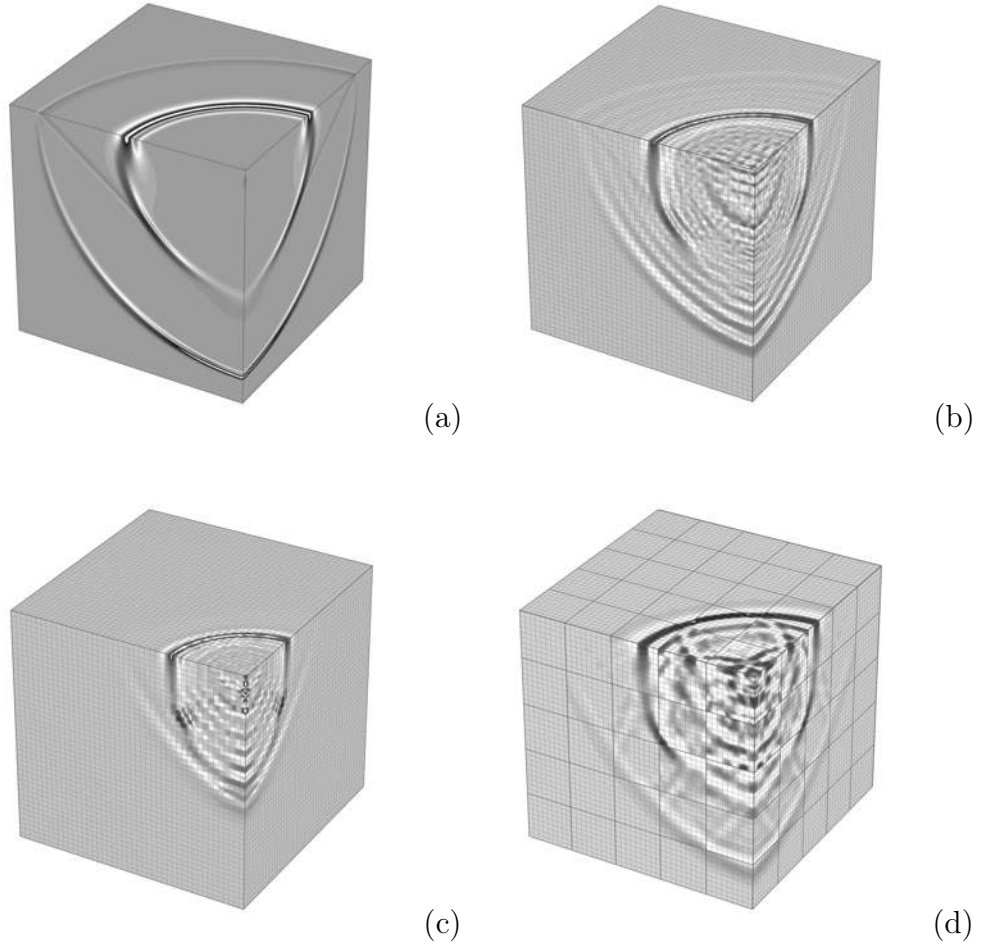


Рисунок 1.12 – Линии уровня v_1 в однородной упругой среде с параметрами ρ , c_p , c_s (а), в блочных средах с толщиной прослойки $\delta = 15$ мм (б), $\delta = 80$ мм (в), в иерархической среде $\delta_1 = 80$ мм, $\delta_2 = 15$ мм (д)

ния прослойки в блочных средах возникают осцилляции, амплитуда и период которых увеличивается с увеличением толщины прослойки, скорость распространения волн в среде снижается. При увеличении податливости прослойки наблюдается та же тенденция.

Скорость волн, распространяющихся в одномерной среде с блоками толщиной H и прослойками толщиной δ , можно вычислить по следующим форму-

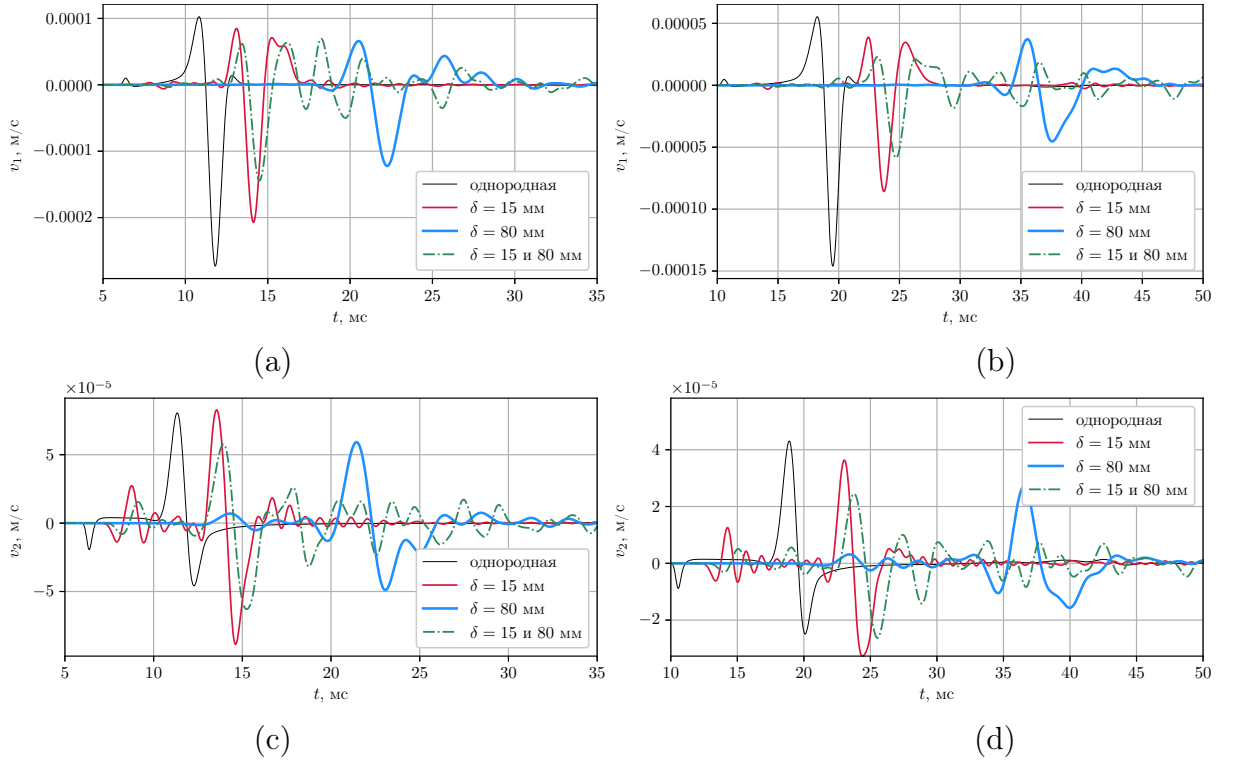


Рисунок 1.13 – $v_1(t)$ и $v_2(t)$ в серединах верхних поверхностей блоков $k_2 = 14$, $k_3 = 14$ (а, с) и $k_2 = 23$, $k_3 = 23$ (b, d)

лам [47]:

$$\tilde{c}_p = c_p c'_p \frac{H + \delta}{H c'_p + \delta c_p}, \quad \tilde{c}_s = c_s c'_s \frac{H + \delta}{H c'_s + \delta c_s}.$$

Эти скорости используются для вычисления времени прибытия продольной волны t_P , поперечной t_S и волны Рэля t_R в точку, удалённую от источника на расстояние r :

$$t_P = r/\tilde{c}_p, \quad t_S = r/\tilde{c}_s, \quad t_R = r/\tilde{c}_R.$$

Скорость рэлеевской волны определяется по формуле:

$$\tilde{c}_R = \xi \tilde{c}_s.$$

Здесь ξ – положительный вещественный корень уравнения Рэля

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\left(3 - 2\frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2}\right)\xi^2 - 16\left(1 - \frac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2}\right) = 0,$$

удовлетворяющий требованию $\tilde{c}_s^2/\tilde{c}_p^2 < 1$ [178].

Сравнение решений, полученных по схеме Годунова и схеме Иванова

Сравним решения, вычисленные по схеме Годунова (раздел 1.3.1) и по схеме Иванова с контролируемой диссипацией (раздел 1.3.2). На рисунке 1.14

показаны линии уровня скорости v_1 в блочных средах с параметрами, соответствующими рисунку 1.12 (b). Решения на рисунках 1.14 (b) и (c) вычислены по схеме Иванова с параметром схемной диссипации $\gamma = 1.5 \cdot 10^4$ и $\gamma = 0$, соответственно. Качественно волновые картины (a) и (b) вполне идентичны, различие

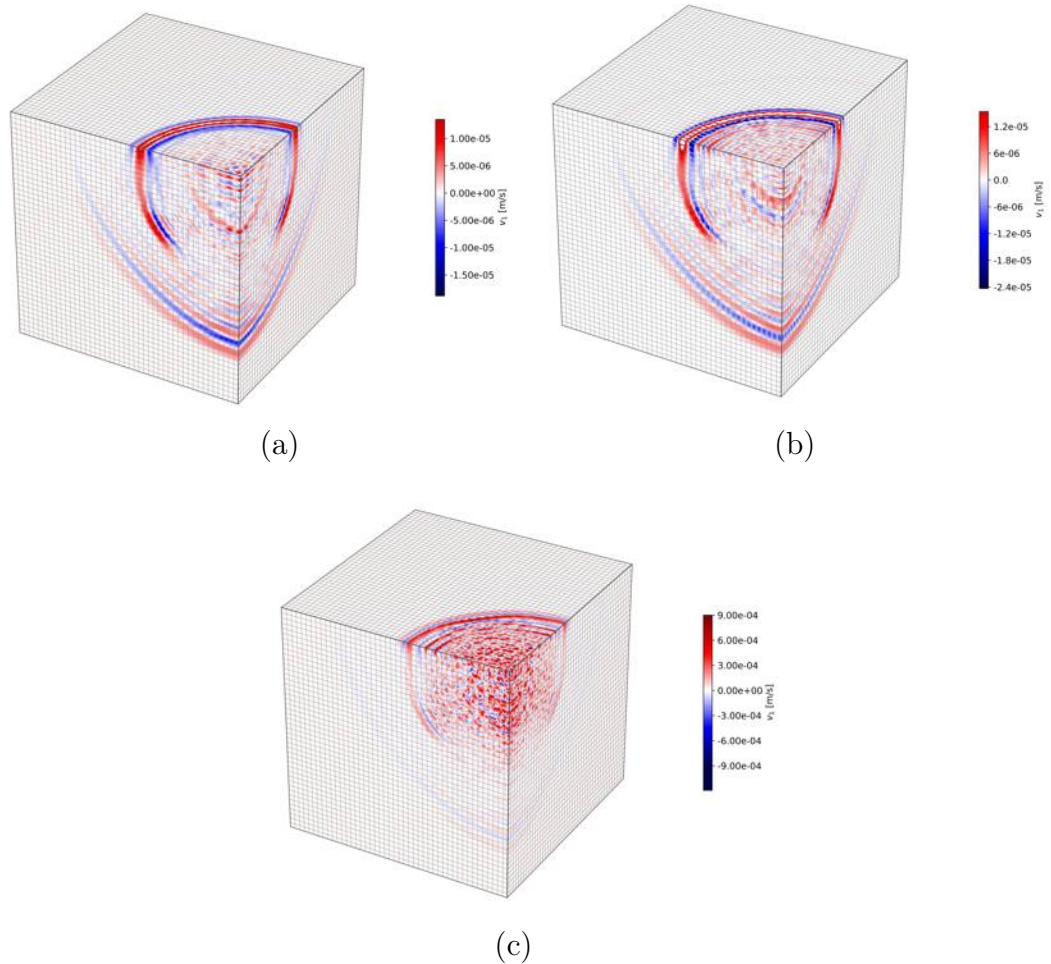


Рисунок 1.14 – Линии уровня скорости v_1 : (a) схема Годунова, (b) схема Иванова с параметром диссипации $\gamma = 1.5 \cdot 10^4$ и (c) схема Иванова с параметром диссипации $\gamma = 0$

заметно лишь в амплитудах волн. По мере уменьшения схемной диссипации возрастают осцилляции численного решения. На рисунках 1.15 (a), (b), (c) изображены осциллограммы поверхностных волн для разных блоков. Уменьшение параметра схемной диссипации γ приводит к увеличению амплитуд волн, более отчётливо становятся видны колебания, возникающие за счёт деформации прослоек. Дальнейшее уменьшение параметра диссипации приводит к нежелательным осцилляциям, связанным с немонотонностью схемы.

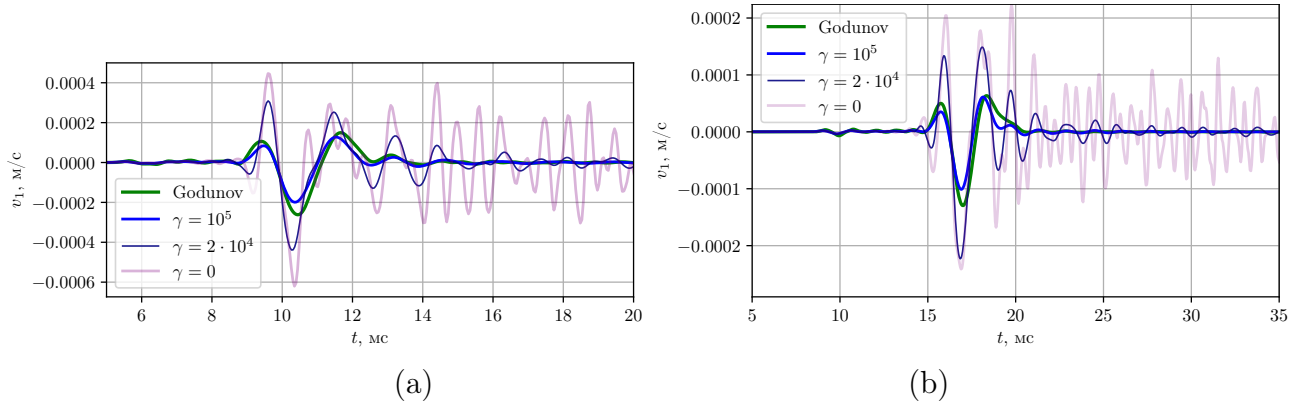


Рисунок 1.15 – Осциллограммы вертикальной компоненты скорости v_1 в центрах верхних поверхностей блока $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 14$ (a); $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 23$ (b)

1.4.1 Сравнение с дискретно-периодической моделью

Когда прослойки намного податливее блоков, можно пренебречь деформацией блоков и воспользоваться моделью дискретно-периодической решётки, в узлах которой находятся жёсткие блоки в виде точечных масс [18, 21, 59]. Пусть решётка состоит из одинаковых масс M , связанных между собой пружинами длиной l и жёсткостью K_1 в направлениях осей x_1, x_2, x_3 , в диагональных направлениях жёсткость пружин равна K_2 . На рисунке 1.16 изображена схема соединения масс. При $K_1 = K_2$ решётка изотропна и соответствует при $l \rightarrow 0$

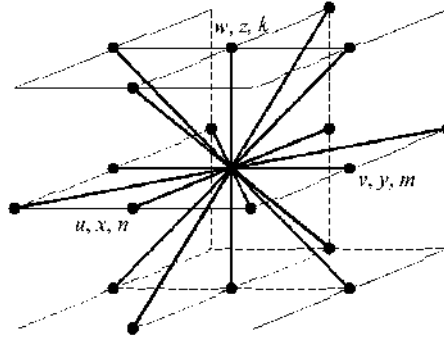


Рисунок 1.16 – Схема соединения масс пружинами в трёхмерной дискретной модели

изотропной упругой среде с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$. Уравнения дискретной блочной среды в перемещениях записываются в виде [59]:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_1^{n,m,k} &= K_1\Lambda^{nn}u_1^{n,m,k} + K_2((\Phi^{nk} + \Phi^{nm})u_1^{n,m,k} + \Psi^{nm}u_2^{n,m,k} + \Psi^{nk}u_3^{n,m,k}), \\ M\ddot{u}_2^{n,m,k} &= K_1\Lambda^{mm}u_2^{n,m,k} + K_2(\Psi^{nm}u_1^{n,m,k} + (\Phi^{mk} + \Phi^{nm})u_2^{n,m,k} + \Psi^{mk}u_3^{n,m,k}), \\ M\ddot{u}_3^{n,m,k} &= K_1\Lambda^{kk}u_3^{n,m,k} + K_2(\Psi^{nk}u_1^{n,m,k} + \Psi^{mk}u_2^{n,m,k} + (\Phi^{mk} + \Phi^{nk})u_3^{n,m,k}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Lambda^{nn} f^{n,m,k} &= f^{n+1,m,k} - 2f^{n,m,k} + f^{n-1,m,k}, \\ \Phi^{nm} f^{n,m,k} &= f^{n+1,m+1,k} + f^{n-1,m-1,k} - 4f^{n,m,k} + f^{n-1,m+1,k} + f^{n+1,m-1,k}, \\ \Psi^{nm} f^{n,m,k} &= f^{n+1,m+1,k} + f^{n-1,m-1,k} - f^{n-1,m+1,k} - f^{n+1,m-1,k}.\end{aligned}$$

Сравним поведение волн на поверхности блочного полупространства для двух различных моделей блочной среды. В дискретно-периодической среде для блока с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ задаётся ступенчатое воздействие амплитуды A : $u_1(t) = A\mathbf{H}(t)$, где $\mathbf{H}(t)$ – функция Хевисайда. В блочно-слоистой среде в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ задаётся импульс скорости $v_1(t) = \dot{u}_1(t) = A\delta(t)$. Рассмотрим блочные среды из $45 \times 45 \times 45$ блоков, на каждый из которых приходится 16^3 ячеек сетки. Рассматриваются среды с соотношением импедансов блоков и прослоек $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 11.57, 80$ и 625 . Параметры материалов блоков и прослоек представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Параметры блочной среды из $45 \times 45 \times 45$ блоков ($\nu = 0.25$)

	Блоки	Прослойки (а)	Прослойки (b)	Прослойки (с)
	$H = 160$ мм	$\delta = 10$ мм	$\delta = 10$ мм	$\delta = 10$ мм
ρ , кг/м ³	6250	400	1200	1800
c_p , м/с	6000	150	392	1800
c_s , м/с	3464	87	227	1039

На рисунке 1.17 представлены зависимости вертикальной компоненты скорости $v_1(t)$ в блоке с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 23$. Для модели с упругими блоками синим цветом показана зависимость $v_1(t)$ в центральной точке верхней грани блока. Красная линия соответствует решению для дискретно-периодической модели с массой блоков $M = \rho H^3$, длиной пружин $l = H + \delta$ и коэффициентами жёсткости пружин $K_1 = K_2 = \tilde{c}_p^2 M / (3l^2)$. Тонкой чёрной линией показано численное решение, полученное для однородной среды со средней плотностью $\tilde{\rho}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ и скоростями распространения продольных и поперечных волн $\tilde{c}_p, \tilde{c}_s$.

Во всех случаях наблюдаются колебания относительно решения, полученного для однородной среды. Характер поверхностных волн в блочной среде с достаточно податливыми прослойками качественно воспроизводится дискретно-периодической моделью. С вычислительной точки зрения выгоднее использо-

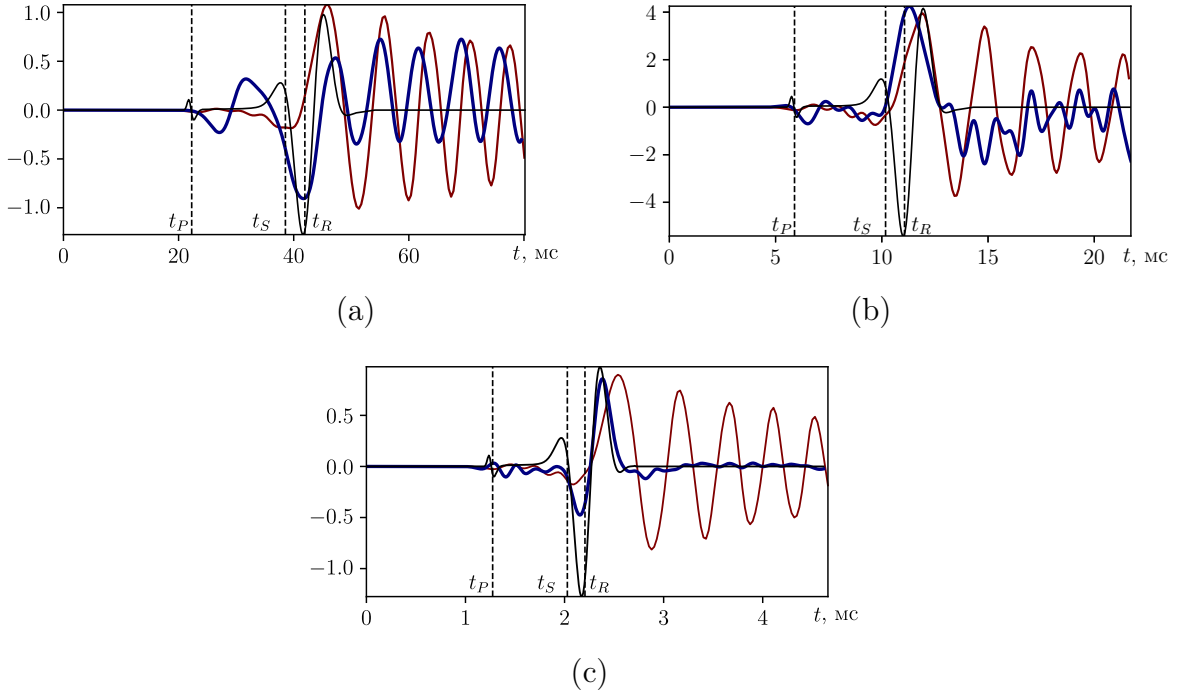


Рисунок 1.17 – Осциллограммы вертикальной компоненты скорости поверхностных волн $v_1(t)$ блока $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 23$ для сред с соответствующими параметрами прослоек (а), (б), (с) из таблицы 1.7. Красные линии показывают решение в дискретно-периодической решётке, синие в блочной среде с упругими блоками и прослойками, чёрные в однородной упругой среде с осреднёнными параметрами

вать дискретные модели для описания сред, в которых прослойки намного податливее блоков. В среде с более жёсткими прослойками осцилляции проявляются в меньшей степени, и представление блоков в виде жёстких масс не вполне адекватно, поскольку не учитывается распространение волн в блоках. Более сложная модель, учитывающая упругие свойства блоков, записываемая относительно перемещений центральных точек блоков, была получена для решения задач в двумерной постановке в работе [15].

Выводы по главе

Для решения задач динамики структурно-неоднородных блочно-слоистых сред предложено использовать математическую модель, в которой однородные изотропные блоки описываются уравнениями теории упругости, а уравнения упругих прослоек представляются в виде внутренних граничных условий для блоков. Рассматриваемая модель блочно-слоистой среды является термодинамически корректной и для неё выполняется закон сохранения энергии. Анализ

решения в виде плоских монохроматических волн показал, что рассматриваемые уравнения тонких упругих прослоек с приемлемой точностью могут моделировать волновые процессы в средах с достаточно тонкими и податливыми прослойками. Предложенная модель тонких прослоек также пригодна для описания длинноволновых процессов.

Для численного решения начально-краевых задач динамики блочной среды в трёхмерной постановке используется процедура расщепления по пространственным координатам. Для решения расщеплённых одномерных систем уравнений реализовано два алгоритма, в одном из которых применяется метод Годунова, во втором используется разностная схема Г. В. Иванова с контролируемой диссипацией. Второй алгоритм более гибок в отношении выбора шага по времени и позволяет задавать произвольную схемную диссипацию, однако более сложен в реализации. Разработан авторский комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем кластерной архитектуры с применением библиотеки MPI.

Результаты численного моделирования задачи Лэмба в блочном полупространстве указывают на особенности получаемых волновых картин. В блочных средах возникают ненаблюдаемые в однородной среде возмущения, вызванные деформацией прослоек. Увеличение толщины податливых прослоек в блочной структуре приводит к увеличению амплитуды и периода этих возмущений. Увеличение податливости прослоек приводит к тому же результату. В случае достаточно податливых прослоек решение становится качественно схожим с решением, полученным при использовании дискретно-периодической модели.

Глава 2

Блочная среда со сложными реологическими свойствами

2.1 Модель стандартного линейного вязкоупругого тела

Реологическая схема модели стандартного линейного тела (Standard linear solid, SLS), представляющая собой последовательное соединение упругого элемента с параллельно соединёнными упругим и вязким элементами, изображена на рисунке 2.1 (а). Данная модель впервые была предложена Пойнтингом и Томсоном при изучении поведения стеклянных волокон [114]. Материал в случае низкочастотного или длительного нагружения более податлив, и деформируются обе упругие пружины. При высокочастотном или мгновенном нагружении материал становится более жёстким, поскольку вязкий элемент блокирует параллельно стоящую пружину. Первому режиму соответствует релаксационный или длительный модуль $\mu_\infty = \mu\mu_0/(\mu + \mu_0)$, а второму режиму соответствует мгновенный модуль μ_0 . На рисунке 2.1 (б) показана эквивалентная модель, называемая моделью Зинера. Для неё длительный и мгновенный модули равны $\tilde{\mu}_\infty$ и $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu} + \tilde{\mu}_\infty$, соответственно. Параметры моделей могут пересчитаны по формулам:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \tilde{\mu} + \tilde{\mu}_\infty, & \mu &= (\tilde{\mu} + \tilde{\mu}_\infty) \frac{\tilde{\mu}_\infty}{\tilde{\mu}}, & \eta &= \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\mu}} (\mu + \mu_0), \\ \tilde{\mu}_\infty &= \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0}, & \tilde{\mu} &= \frac{\mu_0^2}{\mu + \mu_0}, & \tilde{\eta} &= \eta \frac{\mu_0^2}{(\mu + \mu_0)^2}. \end{aligned}$$

Данные модели лишены недостатков, которые присущи более простым моделям вязкоупругости. Так, например, в модели Максвелла, представляющей собой последовательное соединение упругой пружины и вязкого демпфера, при постоянном растягивающем напряжении будет происходить бесконечное удлинение образца материала. В модели Фойгта, представляющей собой параллельное соединение пружины и демпфера, при высокочастотной нагрузке материал становится абсолютно жёстким, и скорости волн стремятся к бесконечности.



Рисунок 2.1 – Реологическая схема стандартного линейного тела (a) и модели Зинера (b)

Модель, изображённая на рисунке 2.2 (a), состоящая из нескольких параллельно соединённых механизмов SLS, называется обобщённой моделью стандартного линейного тела (generalized standard linear solid, GSLS). На рисунке 2.2 (b) представлена обобщённая модель Максвелла (generalized Maxwell body, GMB). Первая модель содержит $3M$ параметров, а вторая $2M + 1$. В работе [179] показано, что данные модели эквивалентны. Параметры моделей можно однозначно пересчитать, если, например, «расщепить» упругий элемент $\tilde{\mu}_\infty$, полагая $\tilde{\mu}_\infty = \sum_{m=1}^M a_m \tilde{\mu}_{\infty,m}$ и $\sum_{m=1}^M a_m = 1$ [179]. То есть можно представить обобщённую модель Максвелла в виде параллельного соединения механизмов Зинера (рисунок 2.1 (b)).

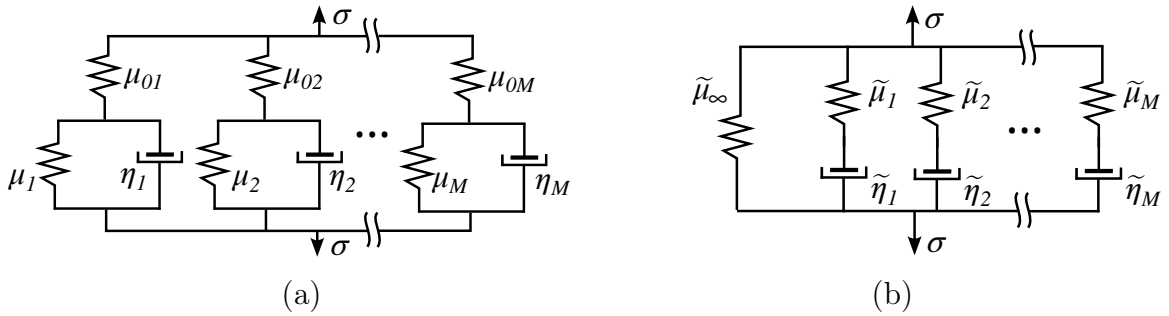


Рисунок 2.2 – Реологическая схема модели обобщённого стандартного линейного тела (a) и обобщённой модели Максвелла (b)

Модель стандартного линейного тела находит широкое применение в различных задачах сейсмологии и геофизики [113, 180]. Обобщённая модель применяется для описания геоматериалов, добротность которых в достаточно широком диапазоне частот постоянна. В работах Г. В. Решетовой, В. А. Чеверды, В. В. Лисицы данная модель используется при численном решении задач, связанных с особенностями распространения волновых полей в неоднородных средах с поглощением [118, 119, 181].

2.1.1 Определяющие уравнения стандартного линейного вязкоупругого тела в одномерном случае

Рассматриваемые модели вязкоупругости допускают запись определяющих соотношений в виде дифференциальных уравнений, связывающих напряжения, деформации и их производные линейным образом. Запишем определяющее уравнение для модели стандартного линейного тела в случае чистого сдвига

$$\frac{\mu + \mu_0}{\mu_0} \tau + \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu \gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Данное уравнение описывает два релаксационных процесса. Один из них – релаксация деформации при мгновенном нагружении однородного образца постоянным касательным напряжением τ_0 . Процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\eta \frac{d\gamma(t)}{dt} + \mu \gamma(t) = \mu \gamma_\infty,$$

где $\gamma_\infty = \tau_0/\mu_\infty$ – деформация при длительном воздействии постоянным напряжением τ_0 , а $\mu_\infty = \frac{\mu_0 \mu}{\mu_0 + \mu}$ – длительный модуль сдвига. В начальный момент времени деформация сдвига равна $\gamma(0) = \gamma_0 = \tau_0/\mu_0$. Решение уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, запишется следующим образом:

$$\gamma(t) = \gamma_\infty + (\gamma_0 - \gamma_\infty) e^{-t/t_\gamma},$$

где $t_\gamma = \eta/\mu$ – время релаксации деформации. Другой релаксационный процесс проходит при мгновенном приложении постоянного сдвига γ_0 и описывается уравнением:

$$\frac{\eta}{\mu_0 + \mu} \frac{d\tau(t)}{dt} + \tau(t) = \tau_\infty,$$

где $\tau_\infty = \gamma_0 \mu_\infty$ – касательное напряжение при длительном приложении постоянного сдвига γ_0 . Решение этого уравнения при начальном условии $\tau(0) = \tau_0 = \mu_0 \gamma_0$ имеет вид:

$$\tau(t) = \tau_\infty + (\tau_0 - \tau_\infty) e^{-t/t_\tau}.$$

Здесь $t_\tau = \eta/(\mu_0 + \mu)$ – время релаксации напряжения. Справедливо неравенство, обеспечивающее затухание волн в среде:

$$t_\tau < t_\gamma.$$

Уравнение (2.1) можно записать в терминах релаксационного модуля, и времён релаксации деформации и напряжения:

$$\tau + t_\tau \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu_\infty \left(\gamma + t_\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right). \quad (2.2)$$

Пересчитать феноменологические параметры через известные значения μ_∞ , t_γ , t_τ можно по формулам:

$$\eta = \frac{\mu_\infty t_\gamma^2}{t_\gamma - t_\tau}, \quad \mu_0 = \mu_\infty \frac{t_\gamma}{t_\tau}, \quad \mu = \frac{\eta}{t_\gamma}. \quad (2.3)$$

Определяющее уравнение для модели Зинера (рисунок 2.1 b) запишется в виде:

$$\tau + t_\tau \frac{\partial \tau}{\partial t} = \tilde{\mu}_\infty (\gamma + t_\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}).$$

Здесь времена релаксации выражаются формулами:

$$t_\tau = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\mu}}, \quad t_\gamma = \frac{t_\tau (\tilde{\mu}_\infty + \tilde{\mu})}{\tilde{\mu}_\infty \tilde{\mu}}.$$

Рассмотрим обобщённую модель стандартного линейного тела (GSLS). В модели из M SLS-механизмов деформация одинакова в каждом из механизмов $\gamma = \gamma_1 = \dots = \gamma_M$, а напряжения суммируются $\tau = \sum_{m=1}^M \tau_m$. Таким образом, система определяющих уравнений, записанная в терминах релаксационных модулей $\mu_{\infty m}$ и времён релаксации $t_{\tau, m}$, $t_{\gamma, m}$, будет иметь вид:

$$\tau_m + t_{\tau m} \frac{\partial \tau_m}{\partial t} = \mu_{\infty m} \left(\gamma + t_{\gamma m} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right), \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.4)$$

Переход к системе, записанной через модули упругости и коэффициенты вязкости, осуществляется по формулам (2.3), записанным для каждого $m = 1, \dots, M$:

$$\eta_m = \frac{\mu_{\infty m} t_{\gamma m}^2}{t_{\gamma m} - t_{\tau m}}, \quad \mu_{0 m} = \mu_{\infty m} \frac{t_{\gamma m}}{t_{\tau m}}, \quad \mu_m = \frac{\eta_m}{t_{\gamma m}}. \quad (2.5)$$

Далее будем рассматривать модель, в которой длительные модули равны между собой: $\mu_\infty = \mu_{\infty 1} = \dots = \mu_{\infty M}$. При такой связи параметров количество свободных параметров равно $2M + 1$ как в обобщённой модели Максвелла (рисунок 2.2 b). Можно аналогично задать $\mu_{0 1} = \dots = \mu_{0 M}$.

2.1.2 Система уравнений динамики вязкоупругой среды

Будем предполагать, что при всестороннем сжатии и растяжении материал ведёт себя как упругий, а вязкоупругие свойства проявляются только для девиаторных компонент тензоров. Для девиаторов тензоров напряжений $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ и деформаций $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ в пространственном случае записываются определяющие уравнения модели SLS в одной из двух эквивалентных форм:

$$\frac{\mu + \mu_0}{\mu_0} \sigma'_{ij} + \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} = 2 \mu \varepsilon'_{ij} + 2 \eta \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t} \quad (2.6)$$

или

$$\sigma'_{ij} + t_\tau \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} = 2 \mu_\infty \left(\varepsilon'_{ij} + t_\gamma \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t} \right),$$

совместно с дифференциальными уравнениями движения и кинематическими уравнениями для малых деформаций

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.7)$$

где ρ – плотность среды, v_i – вектор скорости. Упругое деформирование объёма описывается уравнением

$$\sigma_0 = K \varepsilon_0. \quad (2.8)$$

Здесь $\sigma_0 = (\sigma_{ij} \delta_{ij})/3$ – гидростатическое напряжение, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ – деформация объёма, K – коэффициент объёмного сжатия. Уравнения (2.6)–(2.8) образуют замкнутую математическую модель.

Выпишем систему уравнений, описывающую волновые движения в вязкоупругой среде в форме, эквивалентной (2.6)–(2.8):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{1}{3K} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\sigma'_{ij} - s'_{ij}}{\eta}, \\ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial s'_{ij}}{\partial t} &= \frac{\sigma'_{ij} - s'_{ij}}{\eta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $s'_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} - (\mu/\mu_0)\sigma$ – тензор условных напряжений, соответствующий «нижнему» упругому элементу реологической схемы (рисунок 2.1 а). В силу введенного выше предположения об упругом изменении объёма тензор условных напряжений состоит только из девиаторных компонент, то есть $s_{ij} = s'_{ij}$.

Уравнения модели в форме (2.9) допускают представление в виде термодинамически согласованной по Годунову системы законов сохранения [101], имеющей важное значение для обоснования математической корректности постановки краевых задач и при конструировании численных методов

$$\frac{\partial \varphi(U)}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i(U)}{\partial x_i} + g(U), \quad \varphi(U) = \frac{\partial \Phi}{\partial U}, \quad \psi_i(U) = \frac{\partial \Psi_i}{\partial U}. \quad (2.10)$$

Здесь U – вектор с компонентами v_i , σ_0 , σ'_{ij} и s'_{ij} ; $\Phi(U)$ и $\Psi_i(U)$ – производящие потенциалы:

$$\Phi = \rho \frac{v_i v_i}{2} + \frac{\sigma_0^2}{2K} + \frac{2\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \delta_{ij} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{4\mu_0} + \frac{s'_{ij} s'_{ij}}{4\mu}, \quad \Psi_i = \sigma_{ij} v_j.$$

Вектор $g(U)$ определяется через диссипативную функцию Рэлея $D(U)$:

$$D = \frac{1}{\eta} (\sigma'_{ij} - s'_{ij}) (\sigma'_{ij} - s'_{ij}), \quad g(U) = -\frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial U}. \quad (2.11)$$

Эквивалентность системы уравнений (2.9), и системы (2.10) проверяется непосредственно путем дифференцирования потенциалов.

В общем случае производящих потенциалов произвольного вида система дивергентных уравнений (2.10) обладает дополнительным дивергентным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U \cdot \varphi(U) - \Phi(U) \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U \cdot \psi_i(U) - \Psi_i(U) \right) + U \cdot g(U). \quad (2.12)$$

В рассматриваемой модели производящие потенциалы и диссипативная функция являются квадратичными функциями вектора U . Для них справедлива теорема Эйлера

$$U \cdot \varphi(U) = 2\Phi(U), \quad U \cdot \psi_i(U) = 2\Psi_i(U), \quad U \cdot g(U) = -D(U).$$

С помощью этих формул уравнение (2.12) приводится к уравнению баланса энергии

$$\frac{\partial \Phi(U)}{\partial t} + D(U) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_i(U)}{\partial x_i}.$$

Система (2.10) преобразуются к матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + G U, \quad A = \frac{\partial \varphi}{\partial U}, \quad B_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial U}, \quad G = \frac{\partial g}{\partial U}, \quad (2.13)$$

с симметричными матрицами-коэффициентами A и B_i , выписать которые в явном виде сложно из-за большой размерности системы. При условии положительности феноменологических параметров потенциал $\Phi(U)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму, поэтому матрица A положительно определена и система (2.13) относится к классу линейных систем уравнений, t -гиперболических по Фридрихсу [124]. Для симметрической t -гиперболической системы, рассматриваемой в области Ω диссипативные граничные условия будут иметь вид:

$$U \sum_{i=1}^3 n_i B_i U \leq 0,$$

где n – вектор внешней нормали к Ω . Очевидно, что система уравнений динамической теории упругости также относится к классу симметрических t -гиперболических.

Для модели обобщённого стандартного линейного тела GSLS, состоящей из M механизмов, система уравнений будет аналогична (2.9):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{1}{3K} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \delta_{ij} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\mu_{0m}} \frac{\partial \sigma'_{ij,m}}{\partial t} &= \frac{M}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \sum_{m=1}^M \frac{\sigma'_{ij,m} - s'_{ij,m}}{\eta_m}, \quad (2.14) \\ \frac{1}{2\mu_m} \frac{\partial s'_{ij,m}}{\partial t} &= \frac{\sigma'_{ij,m} - s'_{ij,m}}{\eta_m}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^M \sigma_{ij,m}$; $\sigma'_{ij,m} = \sigma'_{ij} \mu_{0m} / (\sum_{m=1}^M \mu_{0m})$. Данная система, как и в случае простой SLS-модели, является термодинамически согласованной и приводится к симметрической t -гиперболической форме (2.13).

2.1.3 Вязкоупругие прослойки

Вязкоупругие свойства прослоек описываются моделью SLS и учитываются только при сдвиговых движениях блоков. Данная модель использовалась при решении плоских задач в работах [62, 64]. В направлении x_1 уравнения прослойки будут иметь вид:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \quad \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1},$$

$$\begin{aligned}
\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, & \frac{1}{\lambda'_0 + 2\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} &= \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\
\frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} \right), \\
\frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} &= \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} \right), \\
\frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} &= \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} \right), \\
\frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} &= \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Вдоль направлений x_2 и x_3 уравнения записываются таким же образом. Закон сохранения для блочной среды с вязкоупругими блоками и прослойками записывается аналогично (1.22) с добавлением в левой части (1.22) под знак тройного интеграла членов, выражающих диссипацию в блоках (2.11)

$$D^{k_1, k_2, k_3} = (\sigma'_{ij}{}^{k_1, k_2, k_3} - s'_{ij}{}^{k_1, k_2, k_3})^2 / (\eta),$$

и сумм, выражающих мощность диссипации в прослойках. В прослойках, соединяющих блоки в направлении x_1 мощность диссипации записывается в виде:

$$\begin{aligned}
D'_1 &= \delta_1 \sum_{k_1=1}^{n_1-1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \int_0^{H_2} \int_0^{H_3} \frac{1}{\eta'} \left[\frac{\sigma_{12}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \sigma_{12}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{s_{12}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + s_{12}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 + \\
&\quad + \frac{1}{\eta'} \left[\frac{\sigma_{13}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + \sigma_{13}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{s_{13}^{k_1+1, k_2, k_3}(t, 0, x_2, x_3) + s_{13}^{k_1, k_2, k_3}(t, H_1, x_2, x_3)}{2} \right]^2 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Соответствующие суммы D'_2 и D'_3 в направлениях x_2 и x_3 получаются совершенно аналогично. Таким образом, для модели среды с упругими (вязкоупругими) блоками и упругими (вязкоупругими) прослойками выполняется закон сохранения энергии.

2.1.4 Добротность вязкоупругой среды

В линейной теории вязкоупругости зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(\xi)$ устанавливается уравнением Больцмана

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \xi) \varepsilon(\xi) d\xi,$$

где R – ядро релаксации. При циклическом нагружении деформация и напряжение изменяются по законам:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad \sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Здесь $\varphi = \omega t_0$ – угол запаздывания меняющийся в пределах от 0 до $\pi/2$ (t_0 – время запаздывания). Для среды Больцмана подстановка такого вида решения приведёт к

$$\sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \int_{-\infty}^t R(t - \theta) \varepsilon_0 e^{i\omega \theta} d\theta.$$

Вводя замену переменных $\xi = t - \theta$, получим

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\varphi} = \int_0^{\infty} R(\xi) \varepsilon_0 e^{-i\omega \xi} d\xi = \hat{R}(i\omega).$$

Здесь $\hat{R}(i\omega)$ – преобразование Лапласа ядра релаксации. Отсюда тангенс угла потерь выражается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Re} \hat{R}}{\operatorname{Im} \hat{R}}.$$

Котангенс угла потерь $\operatorname{ctg} \varphi$ может использоваться как формула для определения добротности. Условием диссипативности вязкоупругой среды выступает $\operatorname{Im} \hat{R} \geq 0$ [65], при выполнении этого условия волны в среде будут затухать, а добротность будет положительной.

Добротность – величина, показывающая относительное уменьшение механической энергии в единице объёма материала за один период колебаний, выражаемая формулой [182]:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{D_T}, \quad (2.16)$$

где $W_{\max}$ – наибольшее значение потенциальной энергии в цикле, $D_T = E(t) - E(t + T)$ – рассеянная за один период энергия. Выражение для работы за время от 0 до данного момента t записывается в виде:

$$A = \int_0^t \sigma d\varepsilon = \omega \sigma_0 \varepsilon_0 \left(\cos \varphi \int_0^t \sin \omega \theta \cos \omega \theta d\theta + \sin \varphi \int_0^t \sin^2 \omega \theta d\theta \right).$$

Первый интеграл выражает собой работу упругих сил, второй интеграл представляет необратимую работу или диссипацию и содержит как периодическую составляющую, так и непериодическую, зависящую от t . Перепишем предыдущее уравнение, выделяя обе составляющие:

$$A = W + D.$$

Здесь W – работа упругих сил, D – диссипация энергии, выражаемые формулами:

$$W(t) = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \cos \varphi \sin^2 \omega t, \quad D(t) = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \varphi \left(\omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right).$$

Можно заметить, что при периодической нагрузке в момент максимального растяжения или сжатия образца скорость диссипации, как и скорость деформаций, равна нулю. Максимальное значение W достигается, когда $\omega t = \pi/2$, и равно

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \cos \varphi.$$

В расчёте на один период $T = 2\pi/\omega$ диссипация $D(T) = D_T = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \varphi$. Теперь подставим полученное в формулу добротности (2.16):

$$Q = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Полученное выражение для добротности совпадает с определением добротности, выражаемое через комплексные модули (преобразование Лапласа ядра релаксации). Таким образом, справедлива формула

$$Q = \frac{\operatorname{Re} \hat{R}}{\operatorname{Im} \hat{R}}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим систему плоских волн в вязкоупругой среде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \sigma = \int_0^\infty R(\theta) \varepsilon(t - \theta) d\theta. \quad (2.18)$$

Рассмотрим решение в виде монохроматических волн вида $U = \hat{U}e^{i(\omega t - kx)}$, где $U = (v, \varepsilon, \sigma)$ – вектор неизвестных функций, а $k = k_1 - ik_2$ – комплексное волновое число, ω – частота. Подстановка решения в систему (2.18) даст

$$\omega \rho \hat{v} = -k \hat{\sigma}, \quad \omega \hat{\varepsilon} = -k \hat{v}, \quad \hat{\sigma} = \hat{\varepsilon} \hat{R}(i\omega).$$

Упростив систему, получим

$$\hat{R} = \frac{\rho \omega^2}{k^2}.$$

Чтобы определить действительную и мнимую части волнового числа k перейдём к уравнению

$$(k_1^2 - k_2^2 - 2ik_1k_2)(\hat{R}_1 + i\hat{R}_2) = \rho \omega^2,$$

где $\hat{R}_1 = \text{Re } \hat{R}$, $\hat{R}_2 = \text{Im } \hat{R}$. Выделяя действительную и мнимую части уравнения перейдём к системе:

$$(k_1^2 - k_2^2)\hat{R}_1 + 2k_1k_2\hat{R}_2 = 0, \quad (k_1^2 - k_2^2)\hat{R}_2 - 2k_1k_2\hat{R}_1 = \rho \omega^2.$$

Решением данной системы будет

$$k_1 = \frac{\omega}{|\hat{R}|} \sqrt{\frac{\rho(\hat{R}_1 + |\hat{R}|)}{2}}, \quad k_2 = \frac{\omega \hat{R}_2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho}{|\hat{R}|^2(\hat{R}_1 + |\hat{R}|)}}, \quad (2.19)$$

где $|\hat{R}| = \sqrt{\hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2}$. Степень затухания выражается формулой $a = 1/k_2$, а длина волны равна $l = 2\pi/k_1$, запишем их отношение, учитывая (2.19):

$$\frac{a}{l} = \frac{k_1}{2\pi k_2} = \frac{\hat{R}_1 + |\hat{R}|}{2\pi \hat{R}_2}.$$

Согласно (2.17) имеем $\hat{R}_1 = Q\hat{R}_2$, и получаем

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2\pi}(Q + \sqrt{Q^2 + 1}), \quad \text{при } Q \gg 1 : \quad \frac{a}{l} \approx \frac{Q}{\pi}.$$

Таким образом, амплитуда монохроматической волны уменьшается в e раз по мере прохождения ей расстояния Ql/π , то есть добротность определяется количеством длин волн, за которое амплитуда уменьшается в $e^\pi \approx 23$ раза.

Рассмотрим определяющее уравнение в форме (2.2), преобразование Лапласа ядра релаксации запишется в виде:

$$\hat{R}(i\omega) = \frac{\hat{\tau}(i\omega)}{\hat{\gamma}(i\omega)} = \mu_\infty \frac{1 + it_\gamma \omega}{1 + it_\tau \omega}.$$

Отсюда в силу (2.17) формула добротности для модели стандартного линейного тела примет вид:

$$Q(\omega, t_\gamma, t_\tau) = \frac{1 + \omega^2 t_\gamma t_\tau}{\omega(t_\gamma - t_\tau)}. \quad (2.20)$$

Минимум функции $Q(\omega)$ достигается в точке $\omega_{min} = 1/\sqrt{t_\gamma t_\tau}$.

Для модели обобщённого стандартного линейного тела формула добротности может быть выведена аналогичным образом из системы (2.4) с учётом соотношений $\mu_\infty = \mu_{\infty 1} = \dots = \mu_{\infty M}$ и того, что деформация у всех механизмов одна и та же, а напряжения суммируются:

$$Q(\omega, t_{\tau m}, t_{\gamma m}) = \frac{\sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}}{\sum_{m=1}^M \frac{\omega(t_{\gamma m} - t_{\tau m})}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}}. \quad (2.21)$$

Моделирование вязкоупругой среды с постоянной добротностью

В работах Г. В. Решетовой, В. А. Чеверды, В. В. Лисицы при моделировании волновых процессов в средах с поглощением используется обобщённая модель стандартного линейного тела совместно с τ -методом [118, 119, 181]. Авторами подробно обосновано применение τ -метода, а также описаны технологии построения эффективных численных алгоритмов.

В ряде экспериментов [107, 112] для горных пород было установлено, что при частотах, характерных для сейсмики (1-200 Гц), добротность остаётся постоянной. Чтобы смоделировать среду с постоянной добротностью, нужно решить задачу приближения функции (2.20) или (2.21) постоянной величиной на заданном отрезке $[\omega_a, \omega_b]$ с учётом ограничения на время релаксации $0 < t_{\tau m} < t_{\gamma m}$, $m = 1 \dots M$. В литературе [115, 117] рассматривается задача поиска $t_{\tau m}, t_{\gamma m}$, обеспечивающих минимум среднеквадратичного отклонения добротности от постоянной величины

$$\Phi(t_{\gamma m}, t_{\tau m}) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} (Q_c^{-1} - Q(\omega, t_{\gamma m}, t_{\tau m})^{-1})^2 d\omega \rightarrow \min. \quad (2.22)$$

Можно показать, что Φ имеет множество стационарных точек. Один из способов решения состоит в поиске локального минимума методом наименьших квадратов с ограничениями на $t_{\tau m}, t_{\gamma m}$: $t_{min} \leq t_{\tau m} < t_{\gamma m} \leq t_{max}$. В работе [115]

для решения данной задачи был предложен τ -метод, предполагающий введение дополнительного соотношения для времени релаксации t^* :

$$t^* = \frac{t_{\gamma m}}{t_{\tau m}} - 1. \quad (2.23)$$

Учитывая введённое обозначение, перепишем формулу обратной добротности Q^{-1} для модели GSLS (2.21), положим $t^* \ll 1$, и получим линейную по t^* формулу:

$$Q^{-1} \approx \sum_{m=1}^M \frac{\omega t_{\tau m} t^*}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}.$$

Предположение о малости t^* позволяет упростить задачу минимизации (2.22) и найти t^* из уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt^*} = 2 \int_{\omega_a}^{\omega_b} (Q^{-1} - Q_c^{-1}) \frac{dQ^{-1}}{dt^*} d\omega = 0. \quad (2.24)$$

Выражение для t^* может быть получено аналитически:

$$t^* = \frac{1}{Q_c} \frac{\sum_{m=1}^M I_{0m}}{\sum_{m=1}^M I_{1m} + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=m+1}^M I_{2mk}},$$

где

$$I_{0m} = \frac{1}{2t_{\tau m}} \left[\ln(1 + \omega^2 t_{\tau m}^2) \right]_{\omega_a}^{\omega_b}, \quad I_{1m} = \frac{1}{2t_{\tau m}} \left[\arctan(\omega t_{\tau m}) - \frac{\omega t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2} \right]_{\omega_a}^{\omega_b},$$

$$I_{2mk} = \frac{t_{\tau m} t_{\tau k}}{t_{\tau k}^2 - t_{\tau m}^2} \left[\frac{\arctan(\omega t_{\tau m})}{t_{\tau m}} - \frac{\arctan(\omega t_{\tau k})}{t_{\tau k}} \right]_{\omega_a}^{\omega_b}.$$

Задать t^* и вычислить M неизвестных $t_{\gamma m}$ невозможно без каких либо дополнительных уравнений. Постоянная t^* определяется при заранее заданном массиве $t_{\tau m}$, $m = 1, \dots, M$. Проблема заключается в произволе задания констант $t_{\tau m}$, их можно распределить, например, в зависимости от частот $t_{\tau m} = 1/\omega_m$, где $\omega_m \in [\omega_a, \omega_b]$, $m = 1, \dots, M$.

Рассмотрим модели с одним, двумя и четырьмя релаксационными механизмами. Для описания среды с добротностью $Q_c = 20$ в диапазоне частот от 2 до 200 Гц для $M = 1$ зададим $t_{\tau} = 0.0054$, для $M = 2$ и для $M = 4$ зададим массивы $t_{\tau m} = 1/(m\omega_b)$, затем вычислим t^* и все $t_{\gamma m}$. На рисунке 2.3

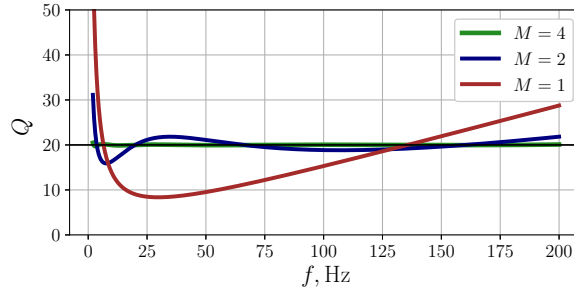


Рисунок 2.3 – Зависимость добротности от частоты для сред с различным количеством SLS-механизмов

показаны зависимости добротности от частоты для сред с различным количеством SLS-механизмов. Заметно, что модель с бóльшим количеством релаксационных механизмов даёт лучшее приближение постоянной Q_c . Четырёх механизмов вполне достаточно для описания среды с независимой от частоты добротностью в необходимом диапазоне частот. Таким образом, модель обобщённого стандартного линейного тела более пригодна для описания сред с постоянной добротностью.

2.1.5 Взаимосвязь добротностей плоских продольных и поперечных волн

Рассмотрим модель обобщённого стандартного линейного тела GSLS, в которой объёмные деформации носят чисто упругий характер, а модули при длительном нагружении задаются как $\mu_\infty = \mu_{\infty 1} = \dots = \mu_{\infty M}$. Система уравнений, описывающая динамику вязкоупругой среды, состоит из уравнений движения, кинематических уравнений и определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, & \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), & \sigma_0 &= K \varepsilon_0, \\ \sigma'_{ij,m} + t_{\tau m} \frac{\partial \sigma'_{ij,m}}{\partial t} &= 2\mu_\infty \left(\varepsilon'_{ij,m} + t_{\gamma m} \frac{\partial \varepsilon'_{ij,m}}{\partial t} \right), & m &= 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из данной системы можем получить систему для плоских поперечных волн вдоль направления x_1 :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_{12,m}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \\ \left(1 + t_{\tau m} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{12,m} &= 2\mu_\infty \left(1 + t_{\gamma m} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{12}, & m &= 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Выпишем действительную и мнимую части преобразования Лапласа ядра релаксации для поперечных волн $\hat{R}_s$:

$$\operatorname{Re} \hat{R}_s = 2\mu_\infty \sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}, \quad \operatorname{Im} \hat{R}_s = 2\mu_\infty \sum_{m=1}^M \frac{\omega(t_{\gamma m} - t_{\tau m})}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}.$$

Система уравнений плоских продольных волн вдоль направления x_1 выводится из системы (2.25) с помощью формул:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3}, \quad \sigma'_{11} = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{3}, \\ \varepsilon_0 &= \varepsilon_1, \quad \varepsilon'_{11} = \frac{2}{3}\varepsilon_1, \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{33} = -\frac{\varepsilon_1}{3}, \end{aligned}$$

и принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_{1,m}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{1,m} + 2\sigma_{2,m} = 3K_m \varepsilon_1, \\ \left(1 + t_{\tau m} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{2}{3}(\sigma_{1,m} - \sigma_{2,m}) &= 2\mu_\infty \left(1 + t_{\gamma m} \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon'_{11}, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Исключая из системы $\sigma_{2,m} = (3K_m \varepsilon_1 - \sigma_{1,m})/2$, получим систему:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_{1,m}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \\ \left(1 + t_{\tau m} \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{1,m} &= \frac{4}{3} \mu_\infty (1 + \varkappa) \left(1 + t_{\varepsilon m} \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon_1, \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $\varkappa = 3K/4\mu_\infty$, а время релаксации деформации в m -том механизме при прохождении продольной волны $t_{\varepsilon m} = (t_{\gamma m} + \varkappa t_{\tau m})/(1 + \varkappa)$. Последнее уравнение в (2.26) записано относительно ε_1 и σ_1 , обозначим образ ядра релаксации $\hat{R}_p = \hat{\sigma}_1/\hat{\varepsilon}_1$, действительная и мнимая части которого запишутся в виде:

$$\operatorname{Re} \hat{R}_p = \frac{4}{3} \mu_\infty \sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2} + \frac{4}{3} \mu_\infty M \varkappa, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{Im} \hat{R}_p = \frac{4}{3} \mu_\infty \sum_{m=1}^M \frac{\omega(t_{\gamma m} - t_{\tau m})}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}. \tag{2.28}$$

Запишем добротность для плоских продольных и поперечных волн в соответствии с формулой (2.17):

$$Q_p = \frac{\operatorname{Re} \hat{R}_p}{\operatorname{Im} \hat{R}_p}, \quad Q_s = \frac{\operatorname{Re} \hat{R}_s}{\operatorname{Im} \hat{R}_s}. \tag{2.29}$$

Нетрудно заметить, что неравенство

$$Q_p > Q_s \quad (2.30)$$

выполняется всегда, поскольку в (2.27) $\mu_\infty \mathfrak{x} > 0$. После непосредственной подстановки действительных и мнимых частей $\hat{R}_s$ и $\hat{R}_p$ можем убедиться в том, что знаменатели в (2.29) одинаковы, а из этого и из (2.30) следует, что

$$\frac{Q_p}{Q_s} = \frac{3 \operatorname{Re} \hat{R}_p}{2 \operatorname{Re} \hat{R}_s} > 1.$$

Выразим Q_p :

$$Q_p = Q_s \frac{3 \operatorname{Re} \hat{R}_p}{2 \operatorname{Re} \hat{R}_s} = Q_s \left(1 + \frac{M \mathfrak{x}}{\sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2}} \right). \quad (2.31)$$

Можно обнаружить, что в силу $t_{\tau m} < t_{\gamma m}$

$$\sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2} > M. \quad (2.32)$$

Из (2.31) и (2.32) следует, что

$$\sum_{m=1}^M \frac{1 + \omega^2 t_{\gamma m} t_{\tau m}}{1 + \omega^2 t_{\tau m}^2} = \frac{Q_s \sum_{m=1}^M \mathfrak{x}}{Q_p - Q_s} > M.$$

Выразим отсюда Q_p :

$$Q_p < (1 + \mathfrak{x}) Q_s.$$

С учётом (2.30) получим неравенства, связывающие добротность продольных и поперечных волн для модели обобщённого стандартного линейного тела:

$$Q_s < Q_p < (1 + \mathfrak{x}) Q_s. \quad (2.33)$$

В соответствии с неравенством (2.33) изобразим для модели стандартного линейного тела множество, в котором можно выбрать допустимые Q_s , Q_p при определённой частоте. На рисунке 2.4 изображены допустимые множества выбора добротности Q_p и Q_s в зависимости от параметра $\mathfrak{x} = 3K/4\mu_\infty$. Заметно, что с увеличением $\mathfrak{x}$ расширяется диапазон выбора добротностей.

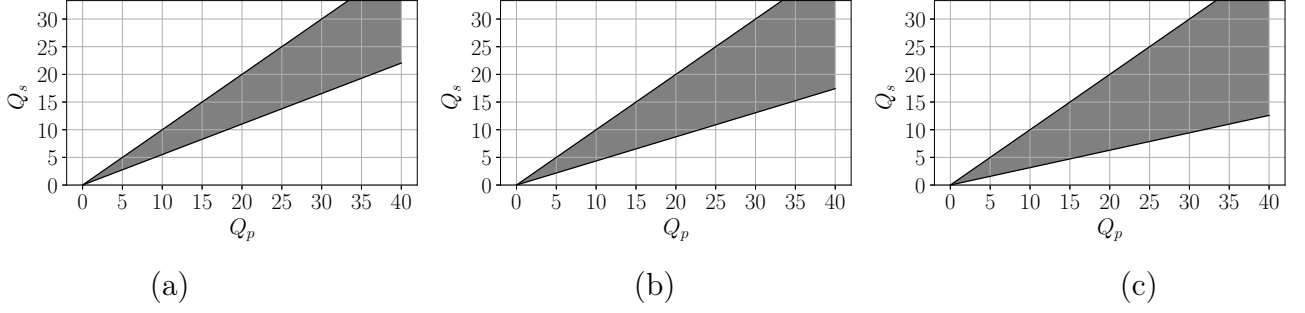


Рисунок 2.4 – Допустимое множество выбора Q_p и Q_s : (a) $\alpha = 0.89$; (b) $\alpha = 1.29$; (c) $\alpha = 1.83$

2.2 Численный метод решения уравнений для вязкоупругих блочных сред

Системы уравнений динамики вязкоупругой среды (2.9) или (2.14) для трёхмерного случая могут быть записаны в матричной форме:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = B_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} + GU. \quad (2.34)$$

Для модели SLS вектор неизвестных $U = (v_j, \sigma_{ij}, s_{ij})$, а для модели GSLS $U = (v_j, \sigma_{ijm}, s_{ijm})$, где $m = 1, \dots, M$ – номер SLS-механизма. Двухциклическое расщепление приводит систему (2.34) к серии одномерных задач:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} &= B_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_1}, & U^{(1)}(t_0) &= U^{(0)}(t_0), \\ A \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} &= B_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x_2}, & U^{(2)}(t_0) &= U^{(1)}(t_0 + \Delta t/2), \\ A \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} &= B_3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x_3}, & U^{(3)}(t_0) &= U^{(2)}(t_0 + \Delta t/2), \\ A \frac{\partial U^{(4)}}{\partial t} &= GU^{(4)}, & U^{(4)}(t_0) &= U^{(3)}(t_0 + \Delta t/2), \\ A \frac{\partial U^{(5)}}{\partial t} &= B_3 \frac{\partial U^{(5)}}{\partial x_3}, & U^{(5)}(t_0 + \Delta t/2) &= U^{(4)}(t_0 + \Delta t), \\ A \frac{\partial U^{(6)}}{\partial t} &= B_2 \frac{\partial U^{(6)}}{\partial x_2}, & U^{(6)}(t_0 + \Delta t/2) &= U^{(5)}(t_0 + \Delta t), \\ A \frac{\partial U^{(7)}}{\partial t} &= B_1 \frac{\partial U^{(7)}}{\partial x_1}, & U^{(7)}(t_0 + \Delta t/2) &= U^{(6)}(t_0 + \Delta t). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Этапы 1-3 и 5-7 описывают динамику упругой среды (1.24). Расщепление приводит к решению одномерных задач теории упругости с модулями K и

$\mu_0 = \sum_{m=1}^M \mu_{0m}$, которые соответствуют верхним упругим элементам реологической схемы, изображённой на рисунке 2.1 (а) или 2.2 (а). Методы решения одномерных задач теории упругости описаны в разделах 1.3.1 и 1.3.2.

На четвёртом этапе решается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая вязкие процессы:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = GU.$$

Решение системы вычисляется по разностной схеме Кранка-Николсон:

$$A \frac{U^{i+1/2} - U_{i+1/2}}{\Delta t} = G \frac{U^{i+1/2} + U_{i+1/2}}{2}. \quad (2.36)$$

Для модели SLS схема запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} \frac{(\sigma'_{jk})^{i+1/2} - (\sigma'_{jk})_{i+1/2}}{\Delta t} &= -\frac{(s'_{jk})^{i+1/2} + (s'_{jk})_{i+1/2}}{2\eta} + \frac{(\sigma'_{jk})^{i+1/2} + (\sigma'_{jk})_{i+1/2}}{2\eta}, \\ \frac{1}{2\mu} \frac{(s'_{jk})^{i+1/2} - (s'_{jk})_{i+1/2}}{\Delta t} &= \frac{(\sigma'_{jk})^{i+1/2} + (\sigma'_{jk})_{i+1/2}}{2\eta} - \frac{(s'_{jk})^{i+1/2} + (s'_{jk})_{i+1/2}}{2\eta}. \end{aligned}$$

Для модели GSLS схема имеет аналогичный, но более громоздкий вид, поскольку необходимо вычислить напряжения σ_{ijm} , s_{ijm} во всех M SLS-механизмах. Также нужно учесть, что при решении одномерных задач теории упругости в направлении x_1 напряжения σ'_{11} , σ_{12} и σ_{13} представляют собой суммы по отдельным SLS-механизмам:

$$\sigma'_{11} = \sum_{m=1}^M \sigma'_{11m}, \quad \sigma_{12} = \sum_{m=1}^M \sigma_{12m}, \quad \sigma_{13} = \sum_{m=1}^M \sigma_{13m}.$$

Параметры μ_{0m} , μ_m , η_m при $m = 1, \dots, M$ заранее не известны, но могут быть определены исходя из некоторых предположений. Пусть известны плотность материала ρ , добротность Q_s , коэффициент объёмного сжатия K и длительный модуль сдвига, который равен $M\mu_\infty$ в силу предположения о том, что для всех механизмов справедливо: $\mu_\infty = \mu_{\infty 1} = \dots = \mu_{\infty M}$. Определим массивы $t_{\tau m}$ и $t_{\gamma m}$, обеспечивающие постоянство добротности, затем по формулам (2.5) вычислим η_m , μ_{0m} , μ_m . Аналогично, вместо $M\mu_\infty$ можно задаться модулем $M\mu_{0m}$, который соответствует высокочастотному режиму, а затем вычислить остальные параметры, включая $\mu_{\infty m}$.

Тест на добротность для сред SLS и GSLS

Рассмотрим две однородные вязкоупругие среды SLS и GSLS с параметрами $\rho = 2400$ кг/м³, $K = 25.3$ ГПа, $M\mu_\infty = 11.6$ ГПа, и временами релаксации, обеспечивающими приблизительно постоянные добротности плоских продольных и поперечных волн $Q_p = 20$ и $Q_s = 10$. Модель GSLS состоит из $M = 4$ механизмов. На рисунке 2.5 показаны зависимости добротности от частоты, построенные по формулам (2.20), (2.21). Вычислительная область со-

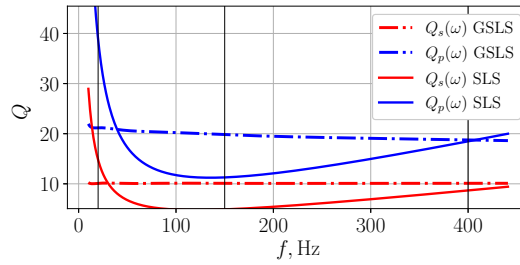


Рисунок 2.5 – Зависимость добротности продольных и поперечных волн от частоты

стоит из 400^3 узлов, на всей границе $x_1 = 0$ задаётся источник продольных волн $\sigma_{11} = A \sin(2\pi f)$, либо источник поперечных волн $\sigma_{12} = B \sin(2\pi f)$, на остальных границах задаются слабоотражающие условия (1.56). На рисунке 2.6 представлены графики скоростей $v_1(x_1)$ и $v_2(x_1)$ для продольных и поперечных волн при различной частоте (размер области подбирался исходя из частоты). Решение расщеплённых одномерных подсистем, описывающих упругие волны, получено по схеме Годунова при числе Куранта $R = 0.985$.

Добротность показывает количество длин волн, за которое амплитуда уменьшается в $e^{-\pi}$ раз (пунктирные линии). Можно заметить, что в численном эксперименте добротность соответствует заданной (рисунок 2.5). Уменьшение шага по времени из-за наличия схемной диссипации может привести к более интенсивному затуханию численного решения. Применение схемы Иванова при малом параметре диссипации γ даёт более точный результат. Более того, при расчёте разрывных и высокочастотных решений возможно использовать бездиссипативную схему со вторым порядком аппроксимации при относительно малой добротности, поскольку модельная вязкость будет подавлять осцилляции, вызванные немонотонностью схемы.

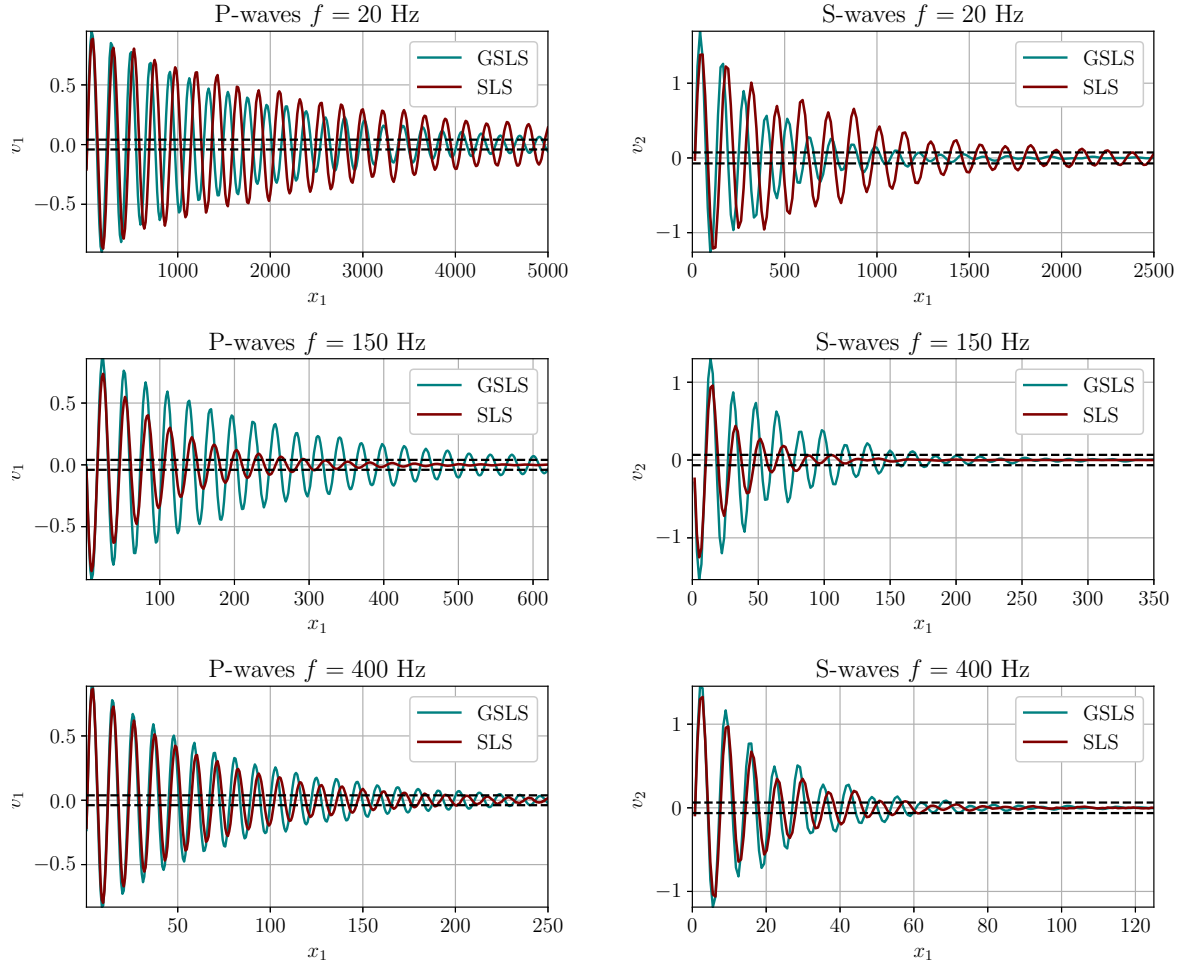


Рисунок 2.6 – Плоские продольные и поперечные волны различной частоты в средах SLS и GSLS с четырьмя механизмами

Решение уравнений вязкоупругих прослоек

Система (2.15) состоит из трёх независимых подсистем. Продольные возмущения упругие, вязкоупругие свойства проявляются при сдвигах. Одномерные уравнения для сдвиговых движений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \\ \frac{1}{\mu'_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} &= \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right), \\ \frac{1}{\mu'} \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2} &= \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right).\end{aligned}$$

Для решения используется бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова [152]. На шаге «корректор» разностной схемы уравнения имеют вид:

$$\rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{1}{\mu'_0} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right),$$

$$\frac{1}{\mu'} \frac{\hat{s} - s}{\tau} = \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right). \quad (2.37)$$

Здесь $\hat{v}$, $\hat{\sigma}$ относятся к текущему временному слою, а v , σ – к предыдущему, знаками «+», «-» отмечены значения на границах соседних блоков. После умножения соответствующих уравнений на $(\hat{v} + v)/2$, $(\hat{\sigma} + \sigma)/2$ и $(\hat{s} + s)/2$ и их последующего суммирования получим дискретный аналог закона сохранения

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + \frac{1}{\mu'_0} \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\tau} + \frac{1}{\mu'} \frac{\hat{s}^2 - s^2}{2\tau} + D + D^h = \frac{\sigma^+ v^+ - \sigma^- v^-}{\delta},$$

где диссипация механической энергии $D = (\sigma^+ + \sigma^- - s^+ - s^-)^2 / (4\eta')$, а мощность схемной диссипации имеет вид:

$$D^h = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta} \left(\frac{\hat{v} + v}{2} - \frac{v^+ + v^-}{2} \right) + \frac{v^+ - v^-}{\delta} \left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} \right) + \\ + \frac{1}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right) \left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{\hat{s} + s}{2} + \frac{s^+ + s^-}{2} \right).$$

Отсутствие схемной диссипации имеет место при условии $\hat{\sigma} + \sigma = \sigma^+ + \sigma^-$, $\hat{v} + v = v^+ - v^-$ и $\hat{s} + s = s^+ - s^-$. Используя эти соотношения, перепишем уравнения (2.37):

$$v^+ + v^- = 2v + \frac{\tau}{\rho'\delta} (\sigma^+ - \sigma^-), \\ \sigma^+ + \sigma^- = 2\sigma + \frac{\mu'_0 \tau}{\delta} (v^+ - v^-) - \frac{\mu'_0 \tau}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right), \quad (2.38) \\ s^+ + s^- = 2s + \frac{\mu' \tau}{\eta'} \left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2} \right).$$

Для определения значений на границах блоков $v^\pm$, $\sigma^\pm$ воспользуемся соотношениями на характеристиках (1.41):

$$I^+ = \rho c v^+ + \sigma^+, \quad I^- = \rho c v^- - \sigma^-,$$

из которых получаются выражения для $v^+ + v^-$ и $\sigma^+ + \sigma^-$:

$$v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \quad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c (v^+ - v^-).$$

Подстановка этих выражений в (2.38) даст

$$\begin{aligned}
 v^+ - v^- &= \frac{1}{\alpha} \left(\beta(I^+ - I^-) - 2\sigma - \frac{2\mu'_0\tau}{2\eta' + \mu'\tau} s \right), \\
 \sigma^+ - \sigma^- &= \frac{\rho'\delta}{\rho'\delta + \rho c\tau} (I^+ + I^- - 2\rho c v), \\
 s^+ + s^- &= \frac{\mu'\tau}{2\eta' + \mu'\tau} (I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-)) + \frac{4\eta'}{2\eta' + \mu'\tau} s.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Здесь коэффициенты α и β выражаются формулами:

$$\beta = \frac{2\eta' + \mu'_0\tau}{2\eta'} + \frac{\mu'\mu'_0\tau^2}{2\eta'(2\eta' + \mu'\tau)}, \quad \alpha = \frac{\mu'_0\tau}{\delta} + \rho c\beta.$$

Выражения для скоростей и напряжений на текущем временном слое внутри прослойки $\hat{v}$, $\hat{\sigma}$ определяются из уравнений шага «корректор» (2.37). При вычислении значений в приграничных узлах блоков участвуют выражения $v^\pm$, $\sigma^\pm$, которые получаются путём сложения и вычитания уравнений (2.38) и (2.39).

Вышеописанный алгоритм применяется для случая, когда уравнения в блоках решаются методом Годунова (раздел 1.3.1). Если уравнения в блоках решаются по схеме Иванова с контролируемой диссипацией (раздел 1.3.2), то для уравнений в прослойках применяется процедура расщепления по физическим процессам. То есть сначала вычисляется решение «упругой» составляющей задачи для всех блоков и прослоек. Затем, на отдельном этапе по схеме Кранка-Николсон (2.36) вычисляется «вязкая» составляющая решения в прослойках и в блоках.

2.3 Сравнение с экспериментом

Результаты расчётов, полученные для модели с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, сравнивались с данными эксперимента, опубликованными в статье В. А. Сарайкина, А. Г. Черникова, Е. Н. Шера [15]. На двусосном стенде сборка из $6 \times 6 \times 1$ блоков одинаковых размеров была закреплена по контуру. Свойства материалов блоков и прослоек указаны в таблице 2.1. Схема проведения эксперимента изображена на рисунке 2.7. Акселерометры a_1 и a_2 устанавливались в центральных точках боковых граней блоков с координатами (2,2) и (4,2). Воздействие стержневого ударника в центральной точке верхней грани блока с координатами (1,2) длительностью $T_{imp} = 0.2$ мс приближённо

Таблица 2.1 – Параметры блочной среды из $6 \times 6 \times 1$ блоков

	Блоки	Прослойки
	$H_1 \times H_2 \times H_3 = 89 \times 125 \times 250$ мм	$\delta = 5$ мм
ρ , кг/м ³	2040	1100
c_p , м/с	2670	-
μ'_1 , Па	-	$10^7/1.3$
μ'_2 , Па	-	$1.35 \cdot 10^7/1.3$
ν	0.3	0.3

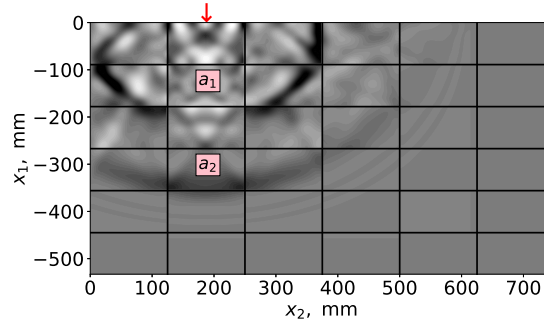


Рисунок 2.7 – Схема проведения эксперимента

описывается формулой [15]:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\pi t/T_{imp}), & 0 < t \leq T_{imp}, \\ 0, & t > T_{imp}. \end{cases}$$

Расчёты выполнены для модели среды с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, описываемыми уравнениями (2.15). Для решения уравнений в блоках использовалась схема Годунова, уравнения прослоек решались по схеме Иванова, параметр Куранта при вычислениях принимался равным 0.98.

Недостаток данных о материале прослоек оставляет определённый произвол в выборе параметров вязкоупругой модели. Пусть модули сдвига прослоек, представленные в таблице, соответствуют длительному модулю μ_∞ . В расчётах параметры вязкоупругих прослоек, соединяющих блоки в направлении x_1 , принимались равными: $\eta = 2.6 \cdot 10^3$ Па·с, $\mu_0 = 0.95 \cdot 10^7$ Па, $\mu = 4.1 \cdot 10^7$ Па. Для направления x_2 задавались параметры: $\eta = 2.6 \cdot 10^3$ Па·с, $\mu_0 = 1.28 \cdot 10^7$ Па, $\mu = 5.54 \cdot 10^7$ Па. На рисунках 2.8 – 2.11 представлены графики ускорений из работы [15] и графики, полученные в результате численного моделирования. Зависимости ускорения от времени, измеренные в ходе эксперимента, обозначены синей пунктирной линией. Красные сплошные линии показывают результаты вычислений для модели динамического взаимодействия блоков, предложенной

авторами статьи [15]. Кривыми зелёного цвета показаны результаты численного эксперимента в двумерной постановке, а фиолетовыми линиями – в трёхмерной постановке.

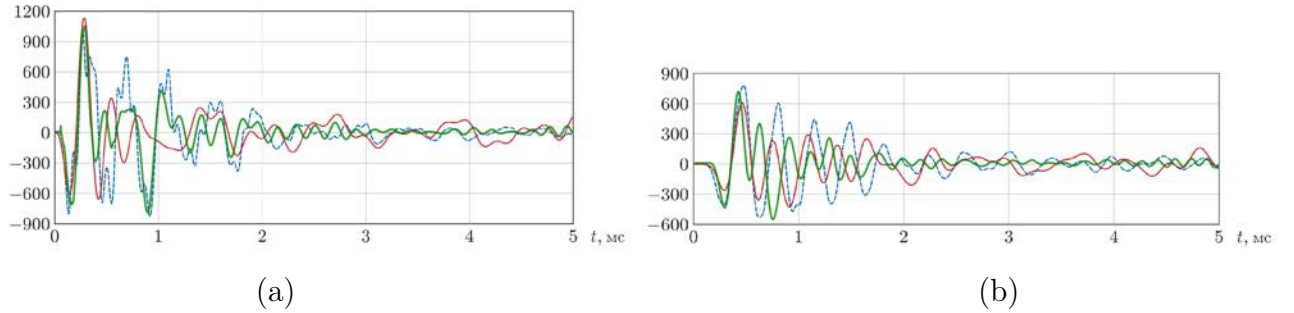


Рисунок 2.8 – Ускорение $w_1(t)$ в блоках a_1 (a) и в a_2 (b) (2D)

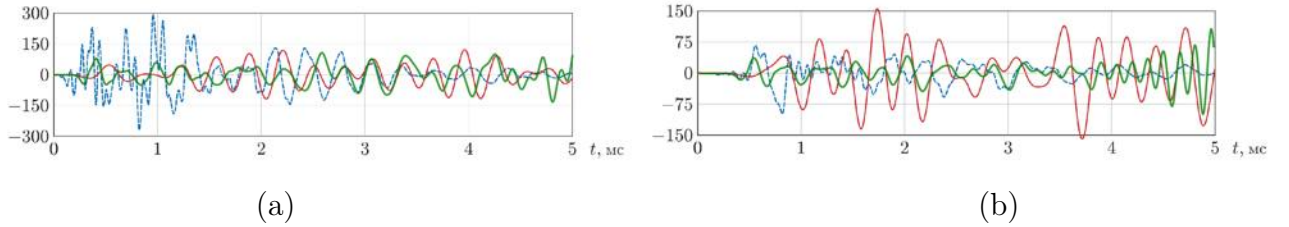


Рисунок 2.9 – Ускорение $w_2(t)$ в блоках a_1 (a) и в a_2 (b) (2D)

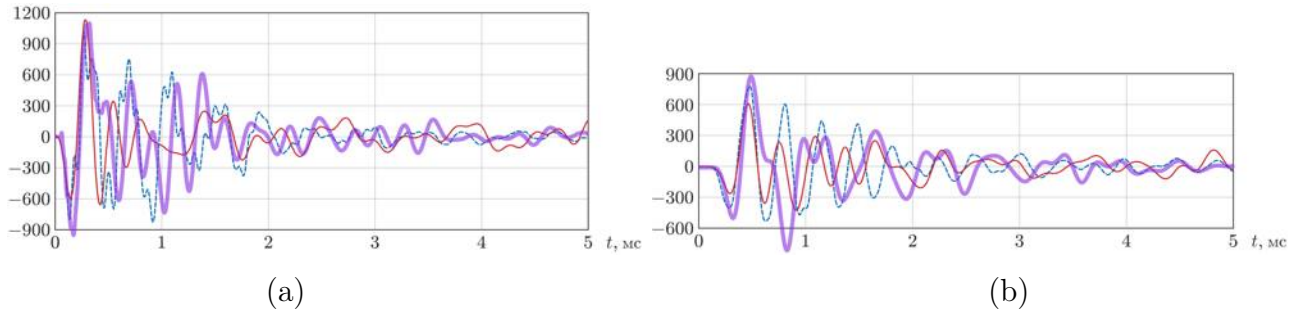


Рисунок 2.10 – Ускорение $w_1(t)$ на боковой поверхности блоков a_1 (a) и a_2 (b) (3D)

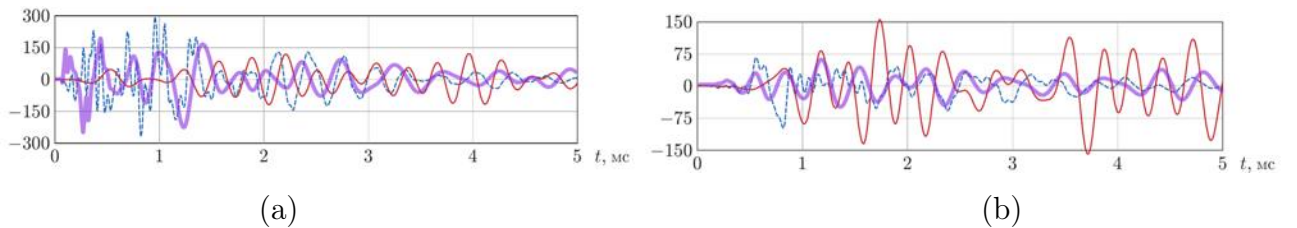


Рисунок 2.11 – Ускорение $w_2(t)$ на боковой поверхности блоков a_1 (a) и a_2 (b) (3D)

Результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Ускорения, измеренные в блоке a_1 , имеют низко- и высокочастотную составляющую, в блоке a_2 высокочастотные колебания затухают

быстрее. Графики ускорения на рисунках 2.8 (а) и 2.10 (а) во многом повторяют экспериментальные кривые. На рисунках 2.8 (b) и 2.10 (b) наблюдается расхождение по фазе. Более заметные расхождения с экспериментом видны на рисунке 2.9 (а): для ускорения w_2 , измеренного для блока a_1 , характерна высокая амплитуда и частота колебаний, в то время как вычисленное ускорение имеет намного меньшую амплитуду и частоту. Это связано с тем, что ускорения в двумерной модели не вполне соответствуют реально измеренным, поскольку в эксперименте акселерометры располагались на боковых гранях. В расчётах по трёхмерной модели ускорения измерены на боковых гранях блоков, и получены более точные результаты. На рисунке 2.11 (а) для вычисленного ускорения w_2 при $t < 0.5$ мс становятся заметными высокочастотные колебания большой амплитуды, зарегистрированные в эксперименте. При использовании модели упругих прослоек качественный характер кривых не изменится, отсутствие затухания в прослойках даст более высокие амплитуды при $t > 1$ мс.

2.4 Пористые прослойки

Контактное взаимодействие между блоками учитывается при помощи нелинейной модели распространения продольных волн. Для описания пористых и разномодульных прослоек применяются реологические схемы, в которых содержится элемент – жёсткий контакт, показанный на рисунке 2.12. Жёсткий контакт описывает поведение сыпучей среды, состоящей из твёрдых недеформируемых частиц. Этот элемент в объединении с упругими пружинами, вязкими демпферами и пластическими шарнирами позволяет строить реологические модели различных материалов: композитов, грунтов, пористых сред [65]. Поведение сыпучей среды с жёсткими частицами описывается

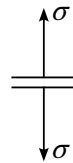


Рисунок 2.12 – Жёсткий контакт

системой

$$\sigma \leq 0, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \sigma \varepsilon = 0,$$

которая эквивалентна вариационным неравенствам:

$$\sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \geq 0; \quad \varepsilon(\tilde{\sigma} - \sigma) \leq 0, \quad \sigma, \tilde{\sigma} \leq 0,$$

где $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$ – варьируемые величины. Можно показать [65], что формулировка в виде вариационного неравенства эквивалентна

$$\sigma = \pi(b_1 \varepsilon),$$

где π – проектор на неположительную ось.

Для описания эффекта уплотнения прослоек используется модель пористой среды, которая является частным случаем модели разномодульной среды. Данная модель была использована в более общем варианте для пористых влагонасыщенных прослоек в работах [62, 63, 64]. На рисунке (2.13) представлены реологические схемы разномодульного и пористого материала. Разномодульный материал при растяжении податлив и имеет модуль b_2 , а модуль при сжатии равен $b_1 + b_2$. Пористый материал податлив и при сжимающих нагрузках до момента полного смыкания контакта. В пористых прослойках задаётся изначальная пористость ψ_0 , при $\psi_0 = 0$ получается модель разномодульного материала. Величина ψ_0 не имеет прямого отношения к объёмной доле пустоты в материале и выражает изначальную деформацию контактного элемента. Уравнения дви-

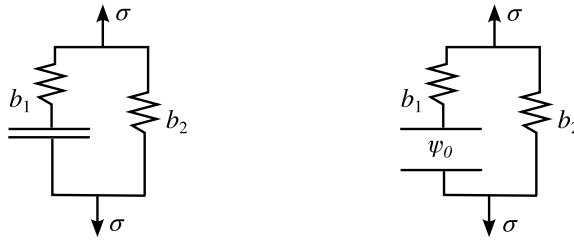


Рисунок 2.13 – Реологические схемы разномодульной и пористой среды

жения и определяющие соотношения разномодульной прослойки записываются следующим образом:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = b_2 \varepsilon + b_1 \pi(\varepsilon). \quad (2.40)$$

Закон сохранения выводится путём умножения первого уравнения системы (2.40) на $(v^+ + v^-)/2$, второго – на $(\sigma^+ + \sigma^-)/2$, после суммирования получается:

$$\frac{\rho'}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^+ + v^-}{2} \right)^2 + \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{(\sigma v)^+ - (\sigma v)^-}{\delta}.$$

Пользуясь последним уравнением системы (2.40), запишем закон сохранения:

$$\frac{\rho'}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^+ + v^-}{2} \right)^2 + \frac{b_2}{2} \frac{d\varepsilon^2}{dt} + \frac{b_1}{2} \frac{d\pi^2(\varepsilon)}{dt} = \frac{(\sigma v)^+ - (\sigma v)^-}{\delta}. \quad (2.41)$$

Закон сохранения для среды упругими блоками и разномодульными прослойками запишется аналогично (1.22), с суммированием выражений типа (2.44) по всем прослойкам блочного массива.

Для пористых прослоек уравнения выглядят аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \\ \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} &= b_2 \varepsilon + b_1 \pi(\varepsilon + \psi_0), \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon - \pi(\psi_0 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь ψ – текущая пористость. В записанных уравнениях для тонких разномодульных и пористых прослоек деформации проектируются на неположительную ось.

Численный метод решения

Уравнения на шаге «корректор» разностной схемы для разномодульной прослойки выглядят следующим образом:

$$\rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = b_2 \frac{\hat{\varepsilon} + \varepsilon}{2} + b_1 \pi(\hat{\varepsilon}, \varepsilon). \quad (2.42)$$

Проектор $\pi(\hat{\varepsilon}, \varepsilon)$ записывается в форме:

$$\pi(\hat{\varepsilon}, \varepsilon) = \frac{\pi^2(\hat{\varepsilon}) - \pi^2(\varepsilon)}{2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)} = \begin{cases} \frac{\hat{\varepsilon} + \varepsilon}{2}, & \hat{\varepsilon} \leq 0, \varepsilon \leq 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)}, & \hat{\varepsilon} > 0, \varepsilon \leq 0, \\ \frac{\hat{\varepsilon}^2}{2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)}, & \hat{\varepsilon} \leq 0, \varepsilon > 0, \\ 0, & \hat{\varepsilon} > 0, \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Данный вид проектора был построен Ченцовым Е. П. в диссертационной работе [183] из соображений выполнения закона сохранения энергии на дискретном уровне. Закон сохранения в дискретной форме получается умножением первого уравнения на $(v^+ + v^-)/2$, второго – на $(\sigma^+ + \sigma^-)/2$, и их последующего суммирования:

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + \frac{(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)(\sigma^+ + \sigma^-)}{\tau} = \frac{(\sigma v)^+ - (\sigma v)^-}{\delta}.$$

Как и в случае построения численной схемы для упругих прослоек, здесь принимается условие отсутствия схемной диссипации (1.39): $v^+ + v^- = \hat{v} + v$ и $\sigma^+ + \sigma^- = \hat{\sigma} + \sigma$. Учёт третьего уравнения системы (2.42) даёт закон сохранения на дискретном уровне

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + b_2 \frac{\hat{\varepsilon}^2 - \varepsilon^2}{2\tau} + b_1 \frac{\pi^2(\hat{\varepsilon}) - \pi^2(\varepsilon)}{2\tau} = \frac{(\sigma v)^+ - (\sigma v)^-}{\delta}. \quad (2.44)$$

Уравнения шага «корректор» для пористой прослойки имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} &= \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, & \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} &= \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \\ \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} &= b_2 \frac{\hat{\varepsilon} + \varepsilon}{2} + b_1 \pi(\psi + \hat{\varepsilon}, \psi_0 + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где проектор записывается аналогично (2.43) с учётом начальной пористости ψ_0 :

$$\pi(\psi_0 + \hat{\varepsilon}, \psi_0 + \varepsilon) = \pi(\hat{\psi}, \psi) = \begin{cases} \frac{\hat{\psi} + \psi}{2}, & \hat{\psi} \leq 0, \psi \leq 0, \\ -\frac{\psi^2}{2(\hat{\psi} - \psi)}, & \hat{\psi} > 0, \psi \leq 0, \\ \frac{\hat{\psi}^2}{2(\hat{\psi} - \psi)}, & \hat{\psi} \leq 0, \psi > 0, \\ 0, & \hat{\psi} > 0, \psi > 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Замыкающие уравнения системы – это инварианты Римана (1.41) и соотношения, обеспечивающие отсутствие схемной диссипации:

$$\begin{aligned} I^+ &= \rho c v^+ + \sigma^+, & I^- &= \rho c v^- - \sigma^-, \\ v^+ + v^- &= \hat{v} + v, & \sigma^+ + \sigma^- &= \hat{\sigma} + \sigma. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Решение системы (2.45) – (2.47) предполагает рассмотрение четырёх условий, записанных в (2.46). Сначала вычисляется текущая пористость ψ , затем деформация ε , через которую вычисляются скорости и напряжения на границах взаимодействующих блоков. Численная схема записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \frac{T + (\rho c \delta - \tau b_2 - \tau b_1) \psi}{\rho c \delta + \tau b_2 + \tau b_1}, & T + (\rho c \delta - \tau b_2 - \tau b_1) \psi &\leq 0, \psi \leq 0, \\ \hat{\psi} &= \frac{T + 2\rho c \delta \psi + \sqrt{D_1}}{2(\rho c \delta + \tau b_2)}, & T + (\rho c \delta - \tau b_2 - \tau b_1) \psi &> 0, \psi \leq 0, \\ \hat{\psi} &= \frac{T + 2\rho c \delta \psi - \sqrt{D_2}}{2(\rho c \delta + \tau b_2 + \tau b_1)}, & T + (\rho c \delta - \tau b_2) \psi &\leq 0, \psi > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi} &= \frac{T + (\rho c \delta - \tau b_2) \psi}{2(\rho c \delta + \tau b_2)}, \quad T + (\rho c \delta - \tau b_2) \psi > 0, \quad \psi > 0, \\
\varepsilon &= \psi - \psi_0, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\psi} - \psi_0, \\
\hat{v} &= \frac{\tau(I^+ + I^-) + (\rho' \delta - \rho c \tau) v}{\rho' \delta + \rho c \tau}, \\
v^+ &= \frac{\hat{v} + v}{2} + \frac{\delta}{2\tau}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon), \quad v^- = \frac{\hat{v} + v}{2} - \frac{\delta}{2\tau}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon), \\
\sigma^+ &= I^+ - \rho c v^+, \quad \sigma^- = \rho c v^- - I^-,
\end{aligned}$$

где

$$T = (I^+ - I^-)\tau + 2\tau b_2 \psi_0,$$

$$D_1 = (T + 2\rho c \delta \psi)^2 - 4(\tau b_2 + \rho c \delta)(\psi^2(\rho c \delta - \tau b_2 - \tau b_1) + T\psi),$$

$$D_1 = (T + 2\rho c \delta \psi)^2 - 4(\tau b_1 + \tau b_2 + \rho c \delta)(\psi^2(\rho c \delta - \tau b_2) + T\psi).$$

Если рассматривать прослойку как трёхмерный пористый слой, то алгоритм решения усложнится.

2.5 Упругопластические прослойки

Для описания проскальзывания в тонких прослойках используется модель упругопластических прослоек. Предположим, что нормальное напряжение не влияет на пластическую деформацию в прослойках, возникающую при сдвиге. Сдвиговые деформации раскладываются на упругую и пластическую составляющие. Тогда для прослойки, соединяющей блоки в направлении x_1 , уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta}, \quad \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, \\
\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} &= \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \left(\frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta} - e_{12}^p \right), \quad \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} = \mu' \left(\frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta} - e_{13}^p \right).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Здесь $e_{ij}^p = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ – тензор скоростей пластической деформации. Напряжения σ_{12} и σ_{13} удовлетворяют вариационному неравенству:

$$e_{12}^p(\delta \sigma_{12}^+ + \delta \sigma_{12}^-) + e_{13}^p(\delta \sigma_{13}^+ + \delta \sigma_{13}^-) \leq 0, \tag{2.49}$$

где $\delta\sigma_{ij}^{\pm} = (\tilde{\sigma}_{ij}^{\pm} - \sigma_{ij}^{\pm})$ – произвольная допустимая вариация напряжений. Запись в виде вариационного неравенства соответствует принципу максимума Мизеса, в котором утверждается, что для истинного напряжённого состояния мощность диссипации не меньше, чем для любого из допустимых состояний. Для сдвиговых компонент тензора напряжений задаётся условие текучести в виде ограничения

$$f(\sigma_{12}, \sigma_{13}) \leq \tau_s,$$

где f – выпуклая положительно-однородная функция текучести материала, описывающая множество допустимых состояний в пространстве напряжений.

Процедура корректировки решения

Из определяющих уравнений для σ_{12} и σ_{13} (2.48) выразим скорости пластических деформаций e_{12}^p и e_{13}^p и подставим в (2.49):

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2\mu'} - \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta} \right) \delta \left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2\mu'} - \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta} \right) \delta \left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} \right) \geq 0.$$

В зависимости от способа аппроксимации полученного неравенства можно получить несколько вариантов алгоритмов корректировки. После аппроксимации производной выражения в скобках примут вид:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2\mu'} - \frac{v_j^+ - v_j^-}{\delta} \right) = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^+ + \hat{\sigma}_{ij}^-}{2\mu'\tau} - \frac{\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-}{2\mu'\tau} - \frac{v_j^+ - v_j^-}{\delta}.$$

На каждом шаге по времени алгоритм состоит из двух этапов: на первом этапе решается задача упругого деформирования прослойки, на втором этапе происходит процедура корректировки решения. Обозначим $\bar{\sigma}_{ij}$ решение задачи теории упругости, тогда после умножения на $\tau\mu'$ получим неравенство

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_{12}^+ + \hat{\sigma}_{12}^-}{2} - \frac{\bar{\sigma}_{12}^+ + \bar{\sigma}_{12}^-}{2} \right) \delta (\hat{\sigma}_{12}^+ + \hat{\sigma}_{12}^-) + \left(\frac{\hat{\sigma}_{13}^+ + \hat{\sigma}_{13}^-}{2} - \frac{\bar{\sigma}_{13}^+ + \bar{\sigma}_{13}^-}{2} \right) \delta (\hat{\sigma}_{13}^+ + \hat{\sigma}_{13}^-) \geq 0.$$

Будем считать, что напряжения в прослойке определяются полусуммами граничных значений напряжений. Тогда перейдём к неравенству с ограничением

$$(\hat{\sigma}_{12} - \bar{\sigma}_{12})\delta\hat{\sigma}_{12} + (\hat{\sigma}_{13} - \bar{\sigma}_{13})\delta\hat{\sigma}_{13} \geq 0, \quad f(\bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}) \leq \tau_s.$$

Рассматривается условие текучести f вида:

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{13}^2} \leq \sqrt{2}\tau_s.$$

Применим к полученному неравенству корректирующую процедуру Уилкинса [184], состоящую в проектировании вектора напряжений в пространстве σ_{12}, σ_{13} на окружность радиусом $\sqrt{2}\tau_s$:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij}, & \text{если } \sqrt{\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{13}^2} \leq \sqrt{2}\tau_s, \\ \pi(\bar{\sigma}_{ij}) = \bar{\sigma}_{ij}\sigma_s / \sqrt{\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{13}^2}, & \text{если } \sqrt{\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{13}^2} > \sqrt{2}\tau_s. \end{cases}$$

Для прослоек, соединяющих блоки в направлениях x_2 и x_3 , алгоритм записывается аналогичным образом.

2.6 Упругопластическое включение в блочной среде

Математическая модель изотропного упругопластического включения записывается в виде системы, состоящей из уравнений движения, определяющих уравнений для упругой составляющей тензора деформации ε_{ij}^e и определяющих соотношений для пластической составляющей ε_{ij}^p в виде вариационного неравенства:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \varepsilon_{ij}^e = a_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t} \leq 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij}, \sigma_{ij} \in F.$$

Здесь a_{ijkl} – тензор модулей податливости, F – множество допустимых вариаций тензора напряжений, а $\tilde{\sigma}_{ij}$ – произвольный элемент из F . Множество F задаётся условием пластичности Мизеса

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_s^2,$$

где σ_s – предел текучести материала. На каждом шаге по времени сначала вычисляется решение системы динамической теории упругости. Затем применяется стандартная процедура корректировки напряжений Уилкинса [184], представляющая собой отдельный этап в алгоритме расщепления (1.24).

Рассматривается область $1\text{м} \times 1\text{м} \times 1\text{м}$ блочного полупространства, в котором на глубине 0.65 м находится однородное изотропное упругопластическое включение размерами $0.25\text{м} \times 0.65\text{м} \times 0.45\text{м}$, упругими параметрами $\rho^i = 2500$ кг/м³, $c_p^i = 4000$ м/с, $c_s^i = 1800$ м/с, и с относительно малым пределом текучести σ_s^i . Блоки описываются параметрами $\rho = 3000$ кг/м³, $c_p = 5000$ м/с, $c_s = 3000$ м/с. В численных экспериментах рассматриваются среды с толщиной прослойки $\delta = 1.25$ мм. Равномерная разностная сетка состоит из 640^3 ячеек.

На поверхности $x_1 = 0$ площадка радиусом $r = 0.02$ м испытывает мгновенное ударное воздействие $\sigma_{11}(0, x_2, x_3) = p_0 \delta(t)$ амплитудой $p_0 = 250\sigma_s^i$, на остальной части поверхности при $x_2^2 + x_3^2 \geq r^2$ ставятся условия $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$. На границах $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ задаются условия симметрии $\sigma_{12} = \sigma_{23} = v_2 = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{32} = v_3 = 0$, а на остальных границах ($x_1 = L_1$, $x_2 = L_2$ и $x_3 = L_3$) ставятся слабоотражающие условия (1.56).

На рисунке 2.14 изображены снимки волнового поля в упругих блочных средах с включением, где чёрным цветом показана область, в которой произошла пластическая деформация. Заметно, что размер этой области зависит от количества блоков, на которые раздроблена среда.

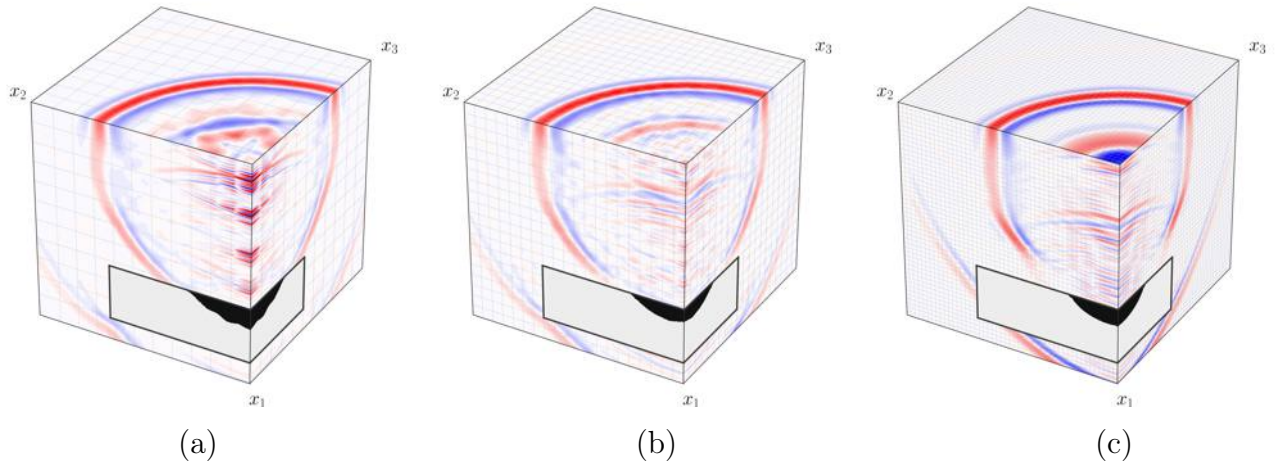


Рисунок 2.14 – Снимки волнового поля в среде из упругих кубических блоков и упругих прослоек ($\delta' = 1.25$ мм, $\rho'/\rho = c'_p/c_p = c'_s/c_s = 0.65$) с упругопластическим включением: (а) $n = 12$ блоков, (б) $n = 21$ блок, (с) $n = 53$ блока

Для оценки масштабов пластической деформации, развившейся во включении, вычислялись отношения V_p/V и H_p/H , где V и H – объём и высота включения, а V_p и H_p – объём и высота пластической зоны. На рисунке 2.15 показаны V_p/V и H_p/H для сред с прослойками фиксированной толщины $\delta = 1.25$ мм в зависимости от количества n блоков или слоёв, на которые раздроблена рассматриваемая часть блочного полупространства. Линия 1 соответствует средам из кубических блоков, линия 2 соответствует слоистым средам с горизонтальными слоями, разделёнными тонкими прослойками. Линии 3 и 4 показывают зависимости для сред из блоков, длина, ширина и высота которых находятся в пропорциях 4:2:1. Линия 3 соответствует кирпичной кладке со смещением на $1/2$ длины блока по оси x_3 , а линия 4 соответствует простой сборке без смещения.

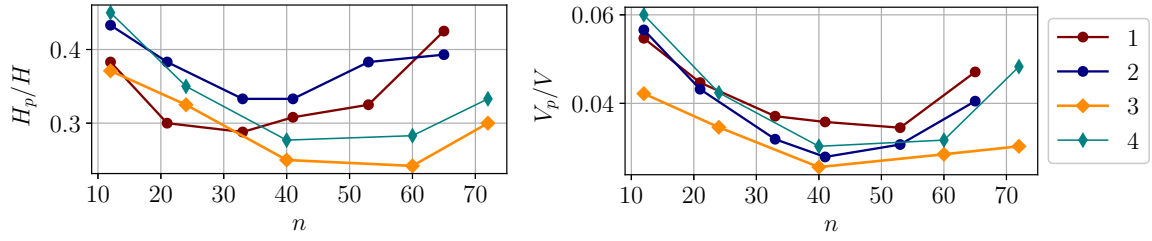


Рисунок 2.15 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества блоков (слоёв) в упругих средах с прослойками: 1 – среда с кубическими блоками одинаковых размеров; 2 – горизонтально-слоистая среда; 3 – кирпичная кладка из блоков с д:ш:в = 4:2:1; 4 – те же блоки, сложенные без смещений

Дробление среды на блоки или слои до определённого n приводит к уменьшению размеров области пластической деформации в заглубленном включении, затем по мере увеличения n её размеры возрастают. Способ расположения блоков также играет важное значение, например, кирпичная кладка (кривая 3) лучше препятствует развитию пластической деформации во включении. В однородной упругой среде, параметры которой соответствуют материалу блоков, пластическая деформация развивается в наибольшей мере ($V_p/V = 0.074$, $H_p/H = 0.48$).

Далее рассматриваются только среды из кубических блоков. На рисунке 2.16 показаны зависимости V_p/V и H_p/H от количества блоков n для сред с вязкоупругими блоками и упругими прослойками и для сред с упругими блоками и вязкоупругими прослойками. Линия 1 показывает зависимости в средах с упругими прослойками и вязкоупругими блоками, описываемыми моделью GSLS, с постоянной добротностью в диапазоне 2-1000 Гц добротностью $Q_p = 30$, $Q_s = 15.5$. Линией 2 обозначены зависимости для таких же сред, но добротность материала блоков ниже $Q_p = 20$, $Q_s = 11$. Линия 3 соответствует средам с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, описываемыми моделью SLS, со значениями параметров $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.025$ с, $\mu_\infty = \rho^i c_s^{i2}$. Линия 4 соответствует предыдущему случаю с $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.001$ с. Заметно, что изменение параметров вязкоупругих прослоек слабо влияет на зависимости V_p/V и H_p/H . Учёт затухания в блоках оказывает более существенное влияние.

На рисунке 2.17 показаны те же зависимости для сред с упругими блоками и упругопластическими прослойками, моделирующими проскальзывание блоков. Линия 1 соответствует случаю, когда касательное напряжение при котором начинается проскальзывание в прослойках равно $\tau_s = \sigma_s^i/4$, линия 2

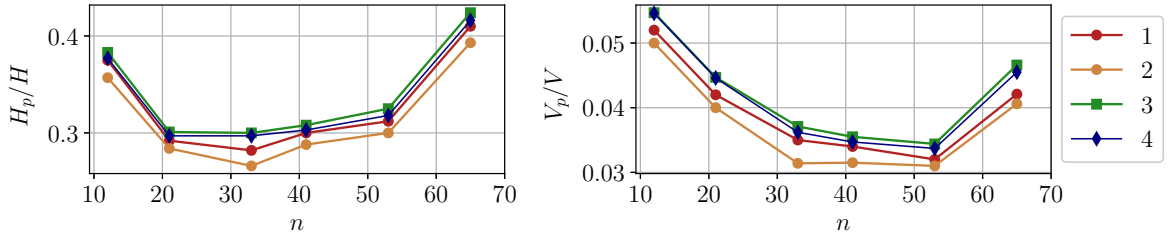


Рисунок 2.16 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах: 1 – с вязкоупругими блоками $Q_p = 30$, $Q_s = 15.5$; 2 – с вязкоупругими блоками $Q_p = 20$, $Q_s = 11$; 3 – с вязкоупругими прослойками $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.025$ с; 4 – с вязкоупругими прослойками $t_\gamma = 0.03$ с, $t_\tau = 0.001$ с

соответствует случаю $\tau_s = \sigma_s^i/2$, линия 3 показывает зависимости в средах $\tau_s = \sigma_s^i$. У сред, в которых проскальзывание блоков начинается при меньших τ_s , во включении развиваются большие пластические деформации при ударной нагрузке.

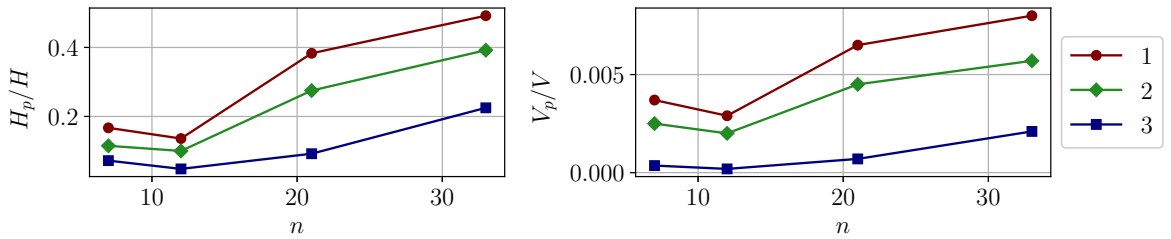


Рисунок 2.17 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах с упругими блоками и проскальзывающими прослойками, предел текучести τ_s у которых: 1 – $\sigma_s^i/4$; 2 – $\sigma_s^i/2$; 3 – σ_s^i

На рисунке 2.18 представлены V_p/V и H_p/H в зависимости от количества блоков n для сред с упругими блоками и пористыми (разномодульными) прослойками. Рассматриваются прослойки, модули которых при сжатии равны $\rho'c_p^2/2\rho c_p^2 = 0.61$. При нулевой начальной пористости $\psi_0 = 0$, то есть при отсутствии начальной деформации на контакте (рисунок 2.13), сжатие прослойки происходит с модулем $b_1 + b_2 = \rho'c_p^2 = b$. При растягивающих нагрузках модуль будет равен b_2 . Линия 1 показывает зависимости для сред, прослойки которых имеют $\psi_0 = 0$ и $b_2 = 0.45b$. Линия 2 соответствует случаю $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.45b$, линия 3 – случаю $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.25b$, а линия 4 – случаю $\psi_0 = 1 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.25b$. В средах с разномодульными прослойками пластическая зона во включении крупнее, чем в средах с пористыми прослойками. Зависимости H_p/H и V_p/V от n в среде с разномодульными прослойками сначала убывают, затем растут, а в средах с пористыми прослойками по мере роста

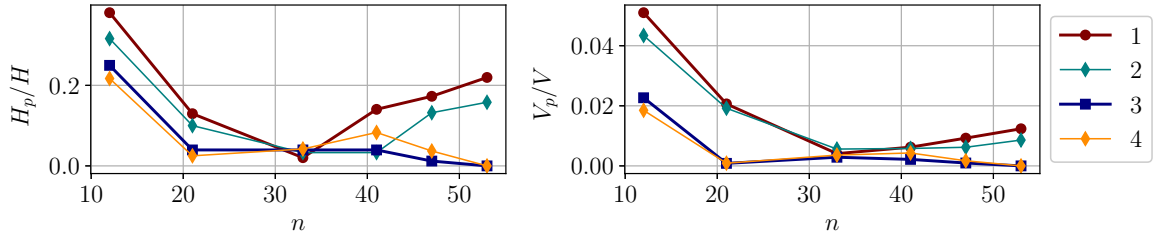


Рисунок 2.18 – Зависимость H_p/H и V_p/V от количества кубических блоков в средах с упругими блоками и пористыми прослойками: 1 – $\psi_0 = 0$, $b_2 = 0.45b$; 2 – $\psi_0 = 0$, $b_2 = 0.25b$; 3 – $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.45b$; 4 – $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $b_2 = 0.25b$

n становятся равными 0. Стоит также отметить, что увеличение ψ_0 приводит меньшим значениям H_p/H и V_p/V .

Выводы по главе

Для описания процессов затухания волн в блоках предлагается использовать модель стандартного линейного вязкоупругого тела и её обобщённую версию. Рассматривается модель среды, в которой вязкоупругость проявляется на девиаторах тензоров, а объёмные деформации носят упругий характер. Обобщённая модель позволяет более точно описывать среды, у которых в сейсмическом диапазоне частот добротность постоянна. Для учёта затухания в прослойках также используется модель стандартного линейного вязкоупругого тела.

Проведено численное моделирование эксперимента, в котором измерялись осциллограммы ускорения при ударном воздействии на закреплённую сборку из блоков. Для этого использовалась модель с упругими блоками и вязкоупругими прослойками. Расчёты, проведённые в плоской и пространственной постановке, показали приемлемое соответствие экспериментальным данным, при этом трёхмерная модель показала более достоверные результаты.

Рассмотрена модель пористых прослоек, которая позволяет учитывать эффект уплотнения межблочного материала, а также его разнсопротивляемость растяжению и сжатию. Также предложено использовать модель упругопластических прослоек, моделирующих проскальзывание блоков. С алгоритмической точки зрения представление прослоек в виде внутренних граничных условий для блоков упрощает задачу, так как для прослоек в виде трёхмерных тел процедуры корректировки имеют более сложный вид.

Рассмотрена задача о заглубленном упругопластическом включении в блочном полупространстве. Оценено влияние параметров блочной среды на объём пластически деформированного материала включения при импульсном воздействии на свободной поверхности полупространства.

Глава 3

Исследование волновых полей импульсного сейсмоисточника в однородных и блочных средах

Сейсморазведка с использованием сейсмоисточников импульсного типа с электромагнитным приводом обладает рядом преимуществ перед классическими способами сейсморазведки. Основными достоинствами являются простота транспортировки, энергоэффективность и экологичность [185]. Сейсмоисточник генерирует импульс давления, изображённый на рисунке 3.1 (а). Давление сначала линейно возрастает в течение времени t_g , затем остаётся постоянным на протяжении t_c , после чего сигнал прекращается. В действительности после окончания импульса в установке некоторое время наблюдаются вибрации [186], связанные с конструктивными особенностями источника (рисунок 3.1 б).

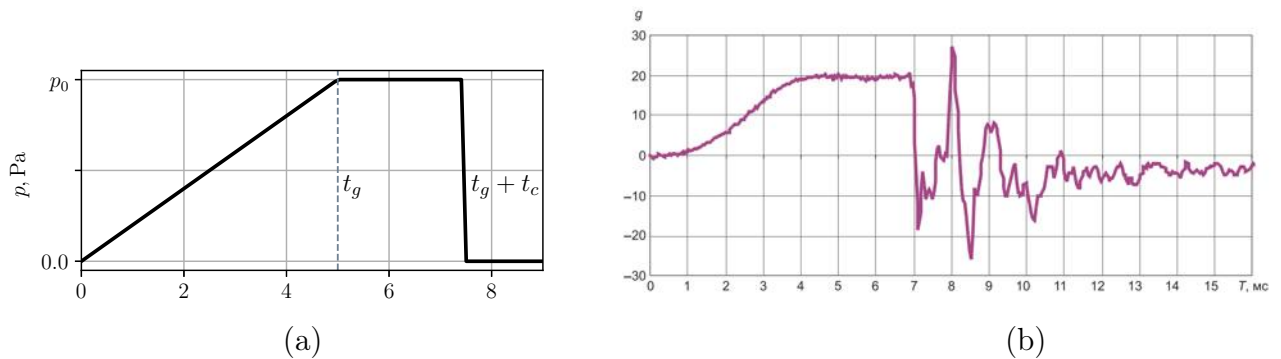


Рисунок 3.1 – Задаваемая зависимость давления от времени (а) и данные акселерометра [186] (б)

Качество сейсмических данных во многом обусловлено характеристиками генерируемого импульса. Сейсморазведка импульсными источниками проводится с использованием технологии «накопления сигнала», подразумевающей многократное воздействие источника в точке возбуждения. За счёт большого числа измерений данная технология позволяет очистить сигнал от помех. Одним из очевидных решений по уменьшению количества импульсов в режиме накопления является увеличение энергии сигнала, однако это может потребовать модификации электромагнитного привода или установки более мощного

источника питания.

Было проведено численное исследование волновых полей, генерируемых импульсным сейсмоисточником в плоскостойкой и блочной среде. Оценено влияние продолжительности импульса и радиуса платформы излучателя на качество сигнала при постоянстве энергии сейсмоисточника. Распространение волн в плоскостойкой среде с однородными изотропными слоями моделировалось в двумерной осесимметричной постановке.

3.1 Волновые поля импульсного сейсмоисточника в однородных и плоскостойких средах

Рассмотрим уравнения теории упругости в двумерной осесимметричной постановке:

$$\begin{aligned} \rho x_2 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial(\sigma_{11} x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\sigma_{12} x_2)}{\partial x_2}, \\ \rho x_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial(\sigma_{12} x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\sigma_{22} x_2)}{\partial x_2} - \sigma_{33}, \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\partial t} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial(\sigma_{33} + \sigma_{11})}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial t} &= \frac{v_2}{x_2}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ и $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Вертикальному направлению соответствует x_1 , а радиальному соответствует x_2 . Решение системы (3.1) вычисляется в цилиндрической области Ω глубиной L_1 и радиусом L_2 . На поверхности $x_1 = 0$ на жёсткую платформу радиусом r_0 действует импульс давления $p(t)$, при $x_2 > r_0$ задаются условия свободной поверхности:

$$\sigma_{12}(t, 0, x_2) = 0, \quad \sigma_{11}(t, 0, x_2) = \begin{cases} p(t), & x_2 \leq r_0, \\ 0, & x_2 > r_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Граничные условия на оси симметрии $x_2 = 0$ имеют вид:

$$v_2(t, x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(t, x_1, 0) = 0. \quad (3.3)$$

На границах $x_1 = L_1$ и $x_2 = L_2$ ставятся слабоотражающие граничные условия.

В расчётах использовались материалы, параметры которых представлены в таблице 3.1. Сравнивается два типа нагружения. Первый – импульсная

Таблица 3.1 – Параметры материалов

	Материал	ρ , кг/м ³	c_p , м/с	c_s , м/с
1	Глина	2200	1800	1000
2	Грунт	2400	4500	2700
3	Твёрдый грунт	2600	6000	3500
4	Лёд	900	3000	1800
5	Вода	1000	1450	0

нагрузка (рисунок 3.1 а). Второй тип – импульс разгрузки статически напряжённого состояния. В гипотезе о статическом нагружении предполагается, что времени импульса достаточно, чтобы сформировать поле напряжений, возникающее при статическом приложении постоянного давления. Рассматривается решение задачи Буссинеска о действии концентрированной нормальной силы на границе упругого полупространства [187]. Это решение выступает в роли функции Грина при определении статических напряжений.

На рисунках 3.3, 3.2 изображены линии уровня напряжений упругого потенциала для статически напряжённого состояния и для импульсного нагружения в момент времени перед разгрузкой [188]. Вычисления проводились для среды «грунт» с параметрами из таблицы 3.1. Результаты получены для сейсмоисточника с энергией импульса $W_0 = 1$ кДж. Напряжения измерены в МПа $\sqrt{\text{кДж}}$, скорости – в м/(с $\sqrt{\text{кДж}}$), а потенциальная энергия в 1/м³. В силу линейности уравнений напряжения σ_{ij} и скорости v_j могут быть получены умножением на $\sqrt{W_0}$, потенциальная энергия умножением на W_0 .

Напряжённо-деформированные состояния, образованные импульсом и статической нагрузкой, имеют некоторые качественные и количественные различия. Например, напряжения вблизи поверхности в случае статической нагрузки выше. Изменение длительности импульса до 10 мс ($t_c = t_g = 5$ мс) не приводит к качественному изменению распределения напряжений и потенциальной энергии, количественные различия так же остаются. Вычисления показывают, что динамическая нагрузка более существенно влияет на напряжённо-деформированное состояние перед разгрузкой для относительно твёрдых материалов. Для более податливых материалов с меньшими скоростями c_p , c_s разница между решениями статической и динамической задач менее

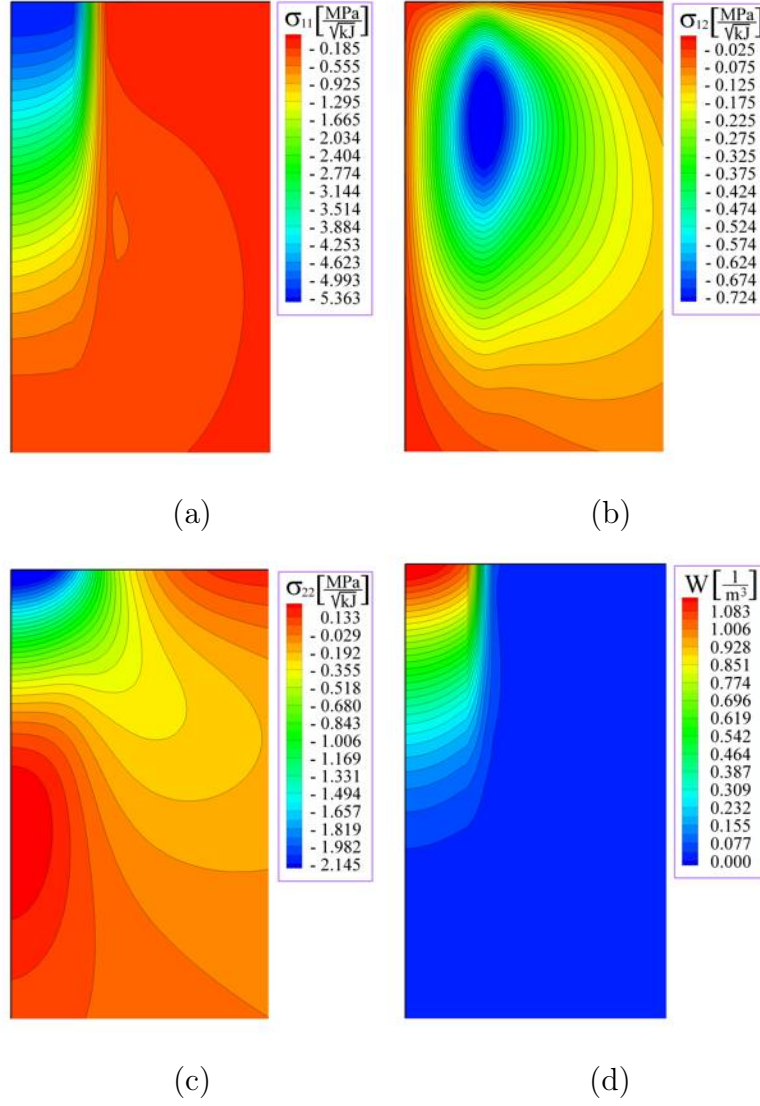


Рисунок 3.2 – Линии уровня напряжений σ_{11} (a), σ_{12} (b), σ_{22} (c) и упругого потенциала W (d) для динамической нагрузки в момент времени перед разгрузкой $t = 5$ мс ($t_c = t_g = 2.5$ мс)

выражена.

Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики в однородной среде были получены Фурье-преобразованием вертикальной компоненты скорости $v_1(t)$, измеренной в трёх точках на глубине $x_1 = 30$ м в течение времени $t^* = 0.5$ с:

$$\hat{v}_1(x_1, x_2, \omega) = \int_0^{t^*} v_1(x_1, x_2, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.4)$$

Вычисления проводились в области $50\text{м} \times 50\text{м}$ с равномерной сеткой из 1000×1000 узлов. На рисунке 3.4 показаны спектральные кривые сигнала

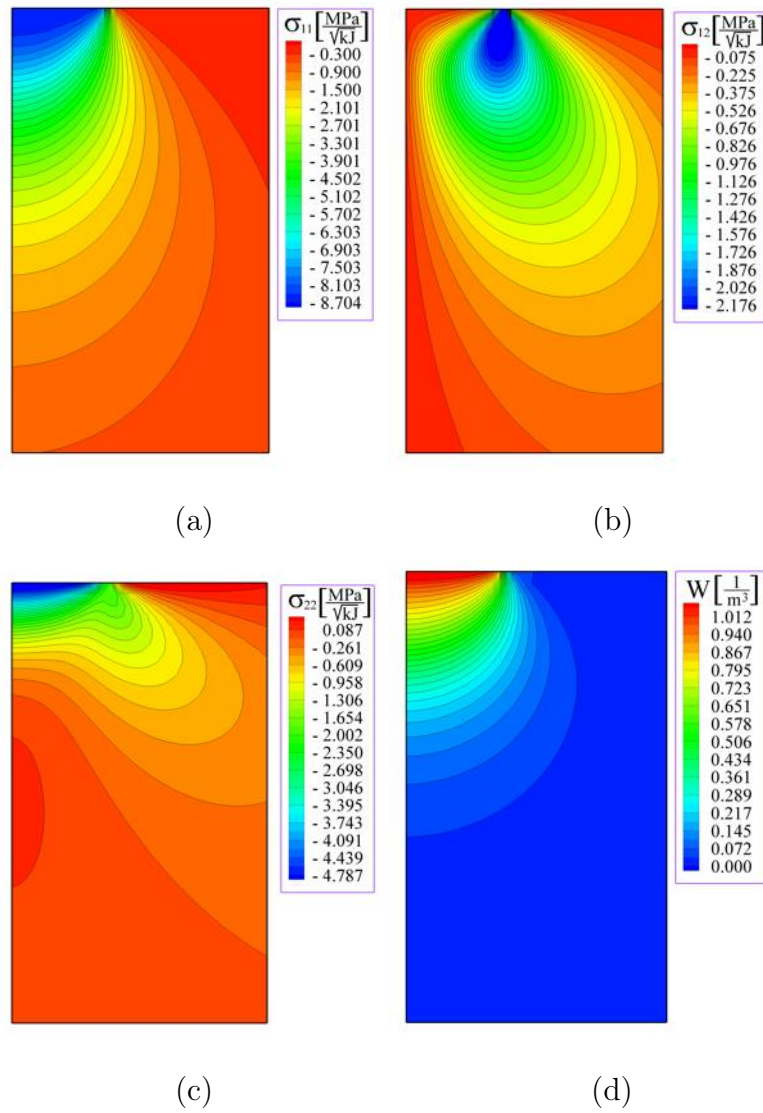


Рисунок 3.3 – Линии уровня напряжений σ_{11} (a), σ_{12} (b), σ_{22} (c) и упругого потенциала W (d) в случае статической нагрузки

при различной длительности импульса в точке на оси симметрии $x_2 = 0$ м (красные кривые), в точках на расстоянии $x_2 = 15$ м и $x_2 = 30$ м от оси симметрии (зелёные и синие кривые). Заметно, что при разгрузке статически напряжённого состояния и при длительном импульсе выражен максимум амплитуд на частоте 40-45 Гц. С уменьшением длительности импульса максимум сдвигается в сторону больших частот, возрастают амплитуды высокочастотной части спектра.

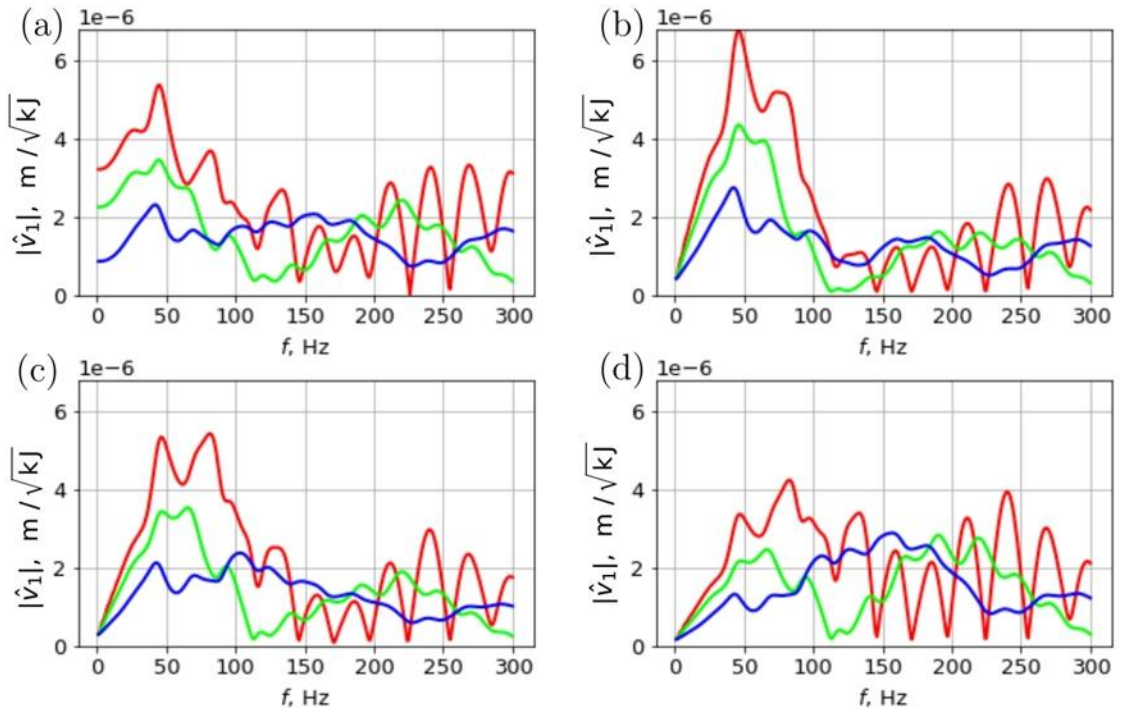


Рисунок 3.4 – Спектральные кривые амплитудно-частотных характеристик, измеренных на глубине $x_1 = 30$ м, для разных типов воздействия: (а) разгрузка статически напряженного состояния, (б) импульс $t_g = 5$ мс, $t_c = 5$ мс, (в) импульс $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс, (г) импульс $t_g = 2.5$ мс, $t_c = 1.5$ мс

Влияние радиуса жёсткой платформы и длительности импульса на амплитуду отражённого сигнала

Оценим влияние длительности импульса и радиуса жёсткой платформы излучателя на сигнал, отражённый от плоской границы раздела сред. Расстояние от поверхности до границы раздела слоёв $x_1 = H$ и расстояние до точки измерения скорости $x_2 = r_0 + R$ подобраны таким образом (рисунок 3.5), что время прихода отражённой продольной волны больше, чем время прохождения поверхностной волны Рэлея. В расчётах рассматривалась область размерами $x_1 = 40$ м, $x_2 = 80$ м с границей раздела сред на глубине $H = 32$ м, количество узлов сетки $N_1 = 1600$, $N_2 = 3200$. Амплитуда скорости v_1 измерена на расстоянии $R = 8$ м от края платформы источника. Зависимости на рисунке 3.6 показывают, что при фиксированной энергии источника изменение радиуса жёсткой платформы в пределах от 0.6 до 2 м слабо влияет на амплитуду отражённого сигнала, которая изменяется в пределах 5%. Влияние длительности импульса более существенно, и более длительный импульс обеспечивает несколько бóльшую амплитуду отражённого сигнала.

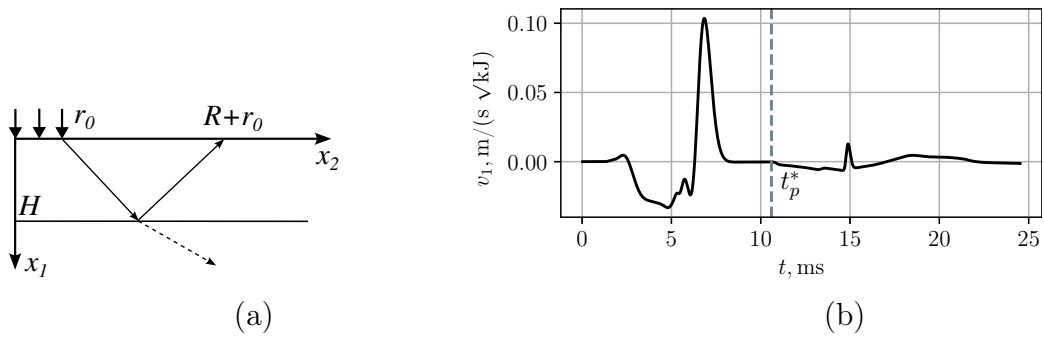


Рисунок 3.5 – Отражение волны от границы раздела сред (а) и время прихода t_p^* отражённой волны на свободную поверхность (б)

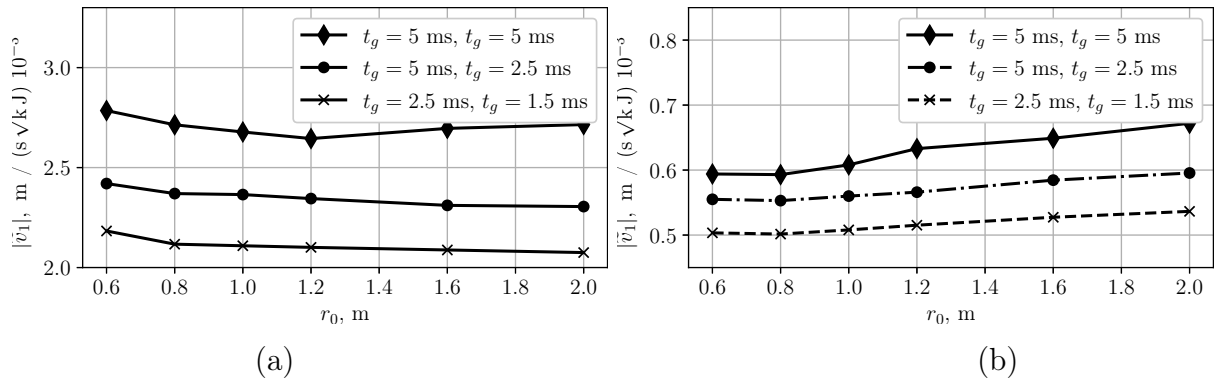


Рисунок 3.6 – Амплитуда скорости v_1 волны, отражённой от границы раздела сред 3-1 (а) и 2-3 (б) в зависимости от радиуса платформы и длительности импульса при фиксированной энергии источника

Сейсмический КПД в плоскостной среде

Сейсмический КПД вычисляется как соотношение потока энергии W_{Xk} через дно k -ого цилиндра высотой X_k и радиусом основания $r_0 + X_k \tan \theta$ (рисунок 3.7) к потоку энергии W_0 , вычисленному вблизи поверхности под платформой сейсмоисточника радиусом r_0 . Для осесимметричной задачи W_0 и W_{Xk}

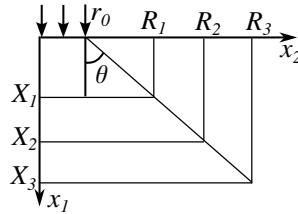


Рисунок 3.7 – Схема измерения сейсмического КПД.

вычисляются по формулам:

$$W_0 = \pi \int_0^T p(t) \left(\int_0^{r_0} v_1(0, x_2, t) dx_2^2 \right) dt,$$

$$W_{Xk} = \pi \int_0^T \left(\int_0^R v_j(X_k, x_2, t) \sigma_{1j}(X_k, x_2, t) dx_2^2 \right) dt.$$

Увеличение радиуса жёсткой платформы сейсмоисточника улучшает энерго-

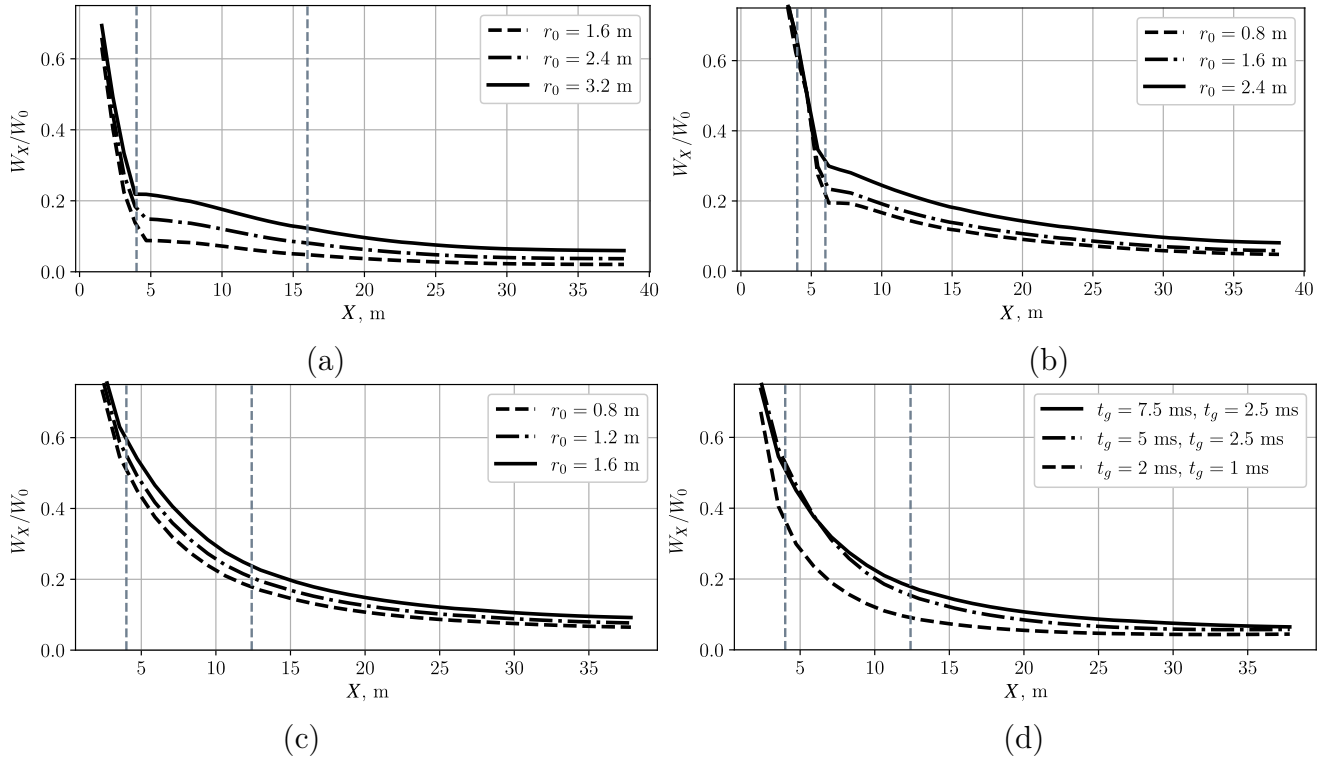


Рисунок 3.8 – Зависимость КПД от глубины при $\theta = \pi/4$ для источников с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс с различным радиусом платформы при в средах (а) вода-грунт-твёрдый грунт (b) лёд-вода-твёрдый грунт (с) глина-грунт-твёрдый грунт, (d) в среде глина-грунт-твёрдый грунт для разной длительности импульса источника с радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м

эффективность сейсмоисточника. В большей степени это заметно в средах вода-грунт и лёд-вода-грунт. На небольших глубинах увеличение длительности импульса также приводит к увеличению сейсмического КПД.

3.2 Волновые поля импульсного сейсмоисточника в блочных средах

Численное моделирование распространения волн в блочной среде проводилось в трёхмерной постановке. Рассматривалась вычислительная область, состоящая из 720^3 узлов равномерной разностной сетки для блоков. В приведённых расчётах показано влияние параметров блочной среды на характер распространения волн, генерируемых импульсным источником. Материал упругих блоков – «грунт» из таблицы 3.1 ($\rho = 2400$ кг/м³, $c_p = 4500$ м/с, $c_s = 2700$ м/с).

На рисунке 3.9 показаны зависимости сейсмического КПД от глубины. Для оценки влияния параметров блочной среды на сейсмический КПД рассматривались ситуации, когда среды состоят из $n = 15^3$, 45^3 и 74^3 кубических блоков со сторонами $H = 3.3$ м, 1.1 м и 0.65 м, соответственно, а толщина прослоек одинакова $\delta = 10$ мм (рисунок 3.9 а). Также приведены расчёты для среды из $n = 45^3$ блоков с толщиной прослоек 10 мм при разной податливости прослоек (рисунок 3.9 б). Изменение податливости упругих прослоек и разме-

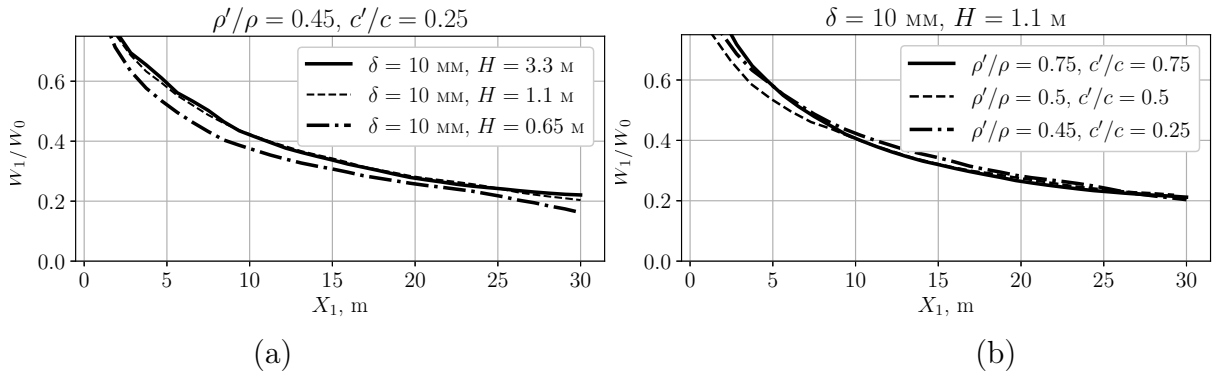


Рисунок 3.9 – Зависимость КПД от глубины в блочных средах при $\theta = \pi/4$ с длительностью импульса источника $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс, радиус платформы $r_0 = 0.6$ м

ров блоков слабо влияет на сейсмический КПД. Изменение толщины прослоек также оказывает незначительное влияние на зависимость КПД от глубины.

Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики импульсного сейсмоисточника более чувствительны к изменению параметров упругих прослоек. Рассмотрим вычислительную область, которая состоит из 32^3 кубических блоков со стороной

1.5 м каждый, толщина прослоек $\delta = 15$ мм. На рисунке 3.10 показаны спектральные кривые, измеренные на глубине $X = 30$ м. В первом эксперименте вычислен спектр в однородной среде и в блочной среде при различной податливости прослоек. Фурье-преобразование (3.4) скорости $v_1(t)$ вычислено в точке $X = 30$, $R = 32$ м, где R – расстояние от оси x_1 , проходящей через центр платформы источника. В блочной среде низкочастотные амплитуды выше, чем в однородной среде и возрастают по мере увеличения податливости прослоек (рисунок 3.10 а). В низкочастотной части спектра при этом амплитуды снижаются. Также показано изменение характера спектра при удалении от оси x_1 (рисунок 3.10 б). По мере удаления увеличивается количество блоков и прослоек, через которые проходит волна, это приводит к снижению амплитуд высокочастотной части спектра. Таким образом, блочная среда выступает как фильтр низких частот.

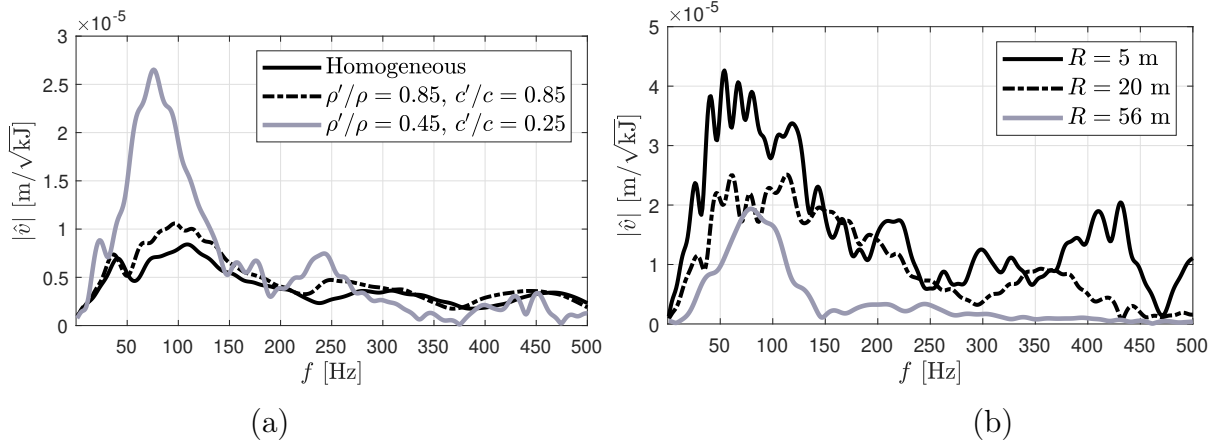


Рисунок 3.10 – Амплитудно-частотные характеристики источника с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс и радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м, измеренные на глубине $X = 30$ м в блочных средах: (а) с различной податливостью прослоек, (б) на различных расстояниях R от оси x_1

На рисунке 3.11 показаны спектральные кривые в среде с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, а также в среде с вязкоупругими блоками и упругими прослойками. Для сравнения приводится кривая, полученная для упругой блочно-слоистой среды. Соотношения плотностей и скоростей для податливых упругих прослоек равны $\rho'/\rho = c'/c = 0.5$, для вязкоупругих аналогично, что соответствует $\mu'_0/\mu = 0.125$. Параметры вязкоупругих прослоек равны $\eta = 6.9 \cdot 10^6$ Па·с, $\mu_0 = 2.2 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 4.2 \cdot 10^9$ Па. Вязкоупругие блоки описываются моделью GSLS из четырёх механизмов с постоянной добротностью $Q_s = 11$, $Q_p = 20$ в диапазоне 2-1000 Гц. Наличие вязкоупругих прослоек

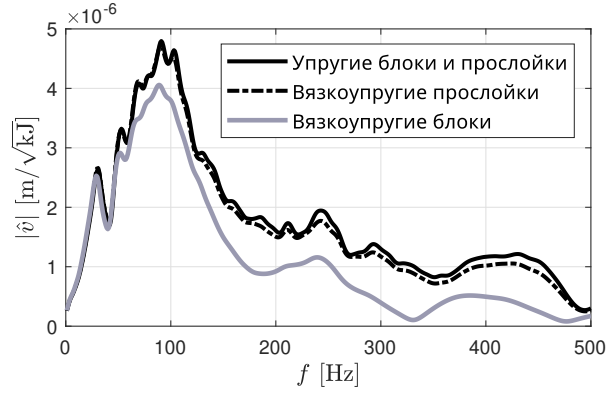


Рисунок 3.11 – Амплитудно-частотные характеристики источника с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс и радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м, измеренные на глубине $X = 30$ м при $R = 30$ м в блочных средах с вязкоупругими свойствами

слабо влияет на спектр сигнала, хотя в сравнении с упругими прослойками в высокочастотной области амплитуды немного ниже. Изменение параметров μ' и η' не приводит к значительным изменениям. Учёт вязкоупругости в блоках приводит к более заметным изменениям, амплитуды всего спектра становятся ниже.

На рисунке 3.12 показаны амплитудно-частотные характеристики сейсмоисточника в среде, учитывающей проскальзывание в податливых прослойках с $\rho'/\rho = c'/c = 0.5$, проскальзывание происходит при достижении предельного сдвигового напряжения τ_s . Чем меньше в прослойках предельное напряжение τ_s , тем глубже развивается пластическая деформация, что приводит к большей диссипации энергии. По мере уменьшения τ_s сначала уменьшаются амплитуды высокочастотной части АЧХ, дальнейшее уменьшение приводит к снижению амплитуд всего спектра и сдвигу максимума влево.

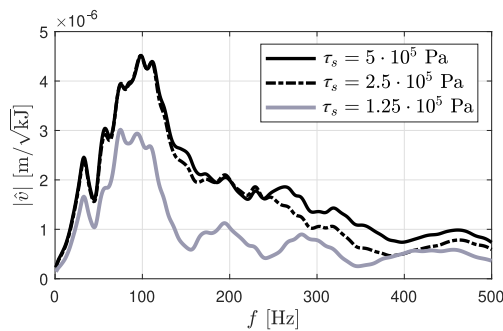


Рисунок 3.12 – Амплитудно-частотные характеристики источника с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс и радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м, измеренные на глубине $X = 30$ м при $R = 30$ м в среде с упругопластическими прослойками

В расчётах АЧХ для среды с уплотняющимися пористыми прослойками модуль модуль на сжатие при отсутствии начальной деформации на контакте принимался равным $\rho'c_p'^2/\rho c_p^2 = 0.42$ (рисунок 2.13). Этот модуль равен $b_1 + b_2 = b$, модуль при растяжении принят равным $b_2 = 0.01b$. На рисунке 3.13 изображены спектральные кривые для блочных сред с прослойками, у которых заданы различные значения пористости (начальной деформации на контакте) ψ_0 . Увеличение пористости делает прослойки более податливыми при сжимающих нагрузках. При частоте до 100 Гц по мере уменьшения пористости наблюдается смещение максимума в сторону меньших частот и снижение амплитуд, которое также характерно при частотах свыше 250 Гц. Однако в диапазоне от 100 до 250 Гц в среде с $\psi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ амплитуды несколько выше, чем в среде с большим ψ_0 .

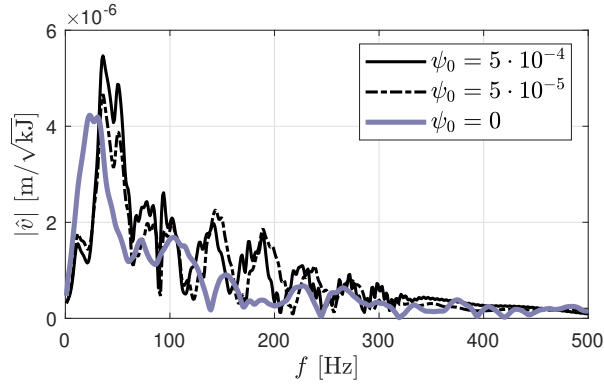


Рисунок 3.13 – Амплитудно-частотные характеристики источника с длительностью импульса $t_g = 5$ мс, $t_c = 2.5$ мс и радиусом платформы $r_0 = 0.6$ м, измеренные на глубине $X = 30$ м при $R = 30$ м в среде с пористыми и разномодульными прослойками

Отражение сигнала от упругого включения в блочной среде

Рассматривается блочное полупространство, имеющее два иерархических уровня прослоек. Вычислительная область без учёта прослоек представляет собой куб со сторонами $L = 48$ м и в каждом из направлений содержит $n' = 22$ прослойки первого иерархического уровня толщиной δ' и $n'' = 31$ прослойку второго уровня толщиной δ'' . Наиболее крупные блоки, по всем граням соединённые прослойками первого уровня, представляют собой кубы со стороной ≈ 2.09 м. Они содержат внутри себя блоки в форме параллелепипедов различных размеров, так как соотношение n''/n' количества прослоек на разных иерархических уровнях есть нецелое число, иначе бы получилась регулярная струк-

тура из кубических блоков. Все блоки упругие и описываются параметрами $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 4500 \text{ м/с}$, $c_s = 2700 \text{ м/с}$.

Сравниваются волны на поверхности блочных сред с упругим включением и без него. Упругое включение, описываемое параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 1800 \text{ м/с}$, $c_s = 500 \text{ м/с}$, имеющее размеры $6\text{м} \times 27\text{м} \times 27\text{м}$, располагается на глубине 39 м . На рисунке 3.14 показаны линии уровня скорости v_1 в блочной среде с включением и осциллограммы $v_1(t)$ на поверхности в точке $x_2 = 18 \text{ м}$, $x_3 = 18 \text{ м}$. Первая пунктирная линия показывает время прихода начала импульса t_p по поверхности, вторая линия показывает время прихода отражённого от включения сигнала t_p^* . Для времени $t > t_p^*$ сигналы на поверхности

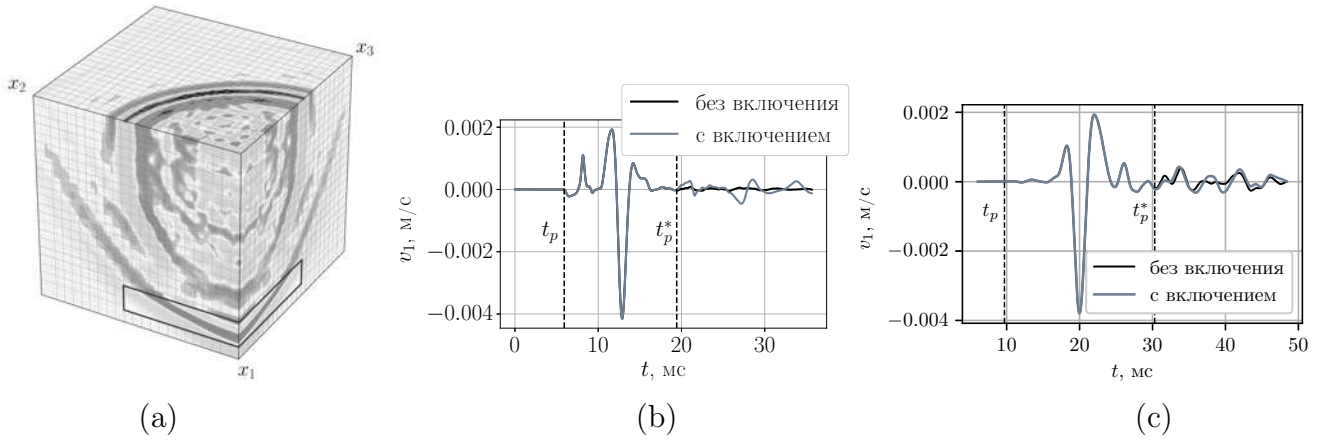


Рисунок 3.14 – Линии уровня v_1 в среде с упругим включением (а), осциллограммы поверхностных волн $v_1(t)$ (b), (c)

сравниваются по формуле:

$$d = \frac{\max_{t > t_p^*} |v_1 - v_1^b|}{\max_{t > t_p^*} |v_1|}.$$

Здесь $v_1^b(t)$ и $v_1(t)$ скорости перемещений на поверхности в среде с включением и без него, соответственно. В таблице 3.2 показаны значения d в зависимости от толщины и податливости прослоек при разной длительности $t_{imp} = t_g + t_c$ и $t_g = t_c$.

Качество отражённого от податливого включения сигнала существенным образом зависит от параметров блочной среды. Чем больше толщина упругих прослоек и их податливость, тем сложнее обнаружить включение. В среде со слишком тонкими прослойками волны распространяются почти как в одно-

Таблица 3.2 – Значения d в блочных средах с упругими блоками ($\rho = 2400$ кг/м³, $c_p = 4500$ м/с, $c_s = 2700$ м/с) и различными прослойками

Упругие прослойки									d	
№	ρ' , кг/м ³	ρ'' , кг/м ³	c'_p , м/с	c''_p , м/с	c'_s , м/с	c''_s , м/с	δ' , мм	δ'' , мм	$t_{imp} = 5$ мс	$t_{imp} = 2$ мс
I	1350	1800	2531	3375	1519	2025	22	15	2.976	2.844
II	1014	1560	1901	2925	1141	1755	22	15	1.913	1.182
III	1350	1800	2531	3375	1519	2025	66	45	2.176	1.244
IV	1014	1560	1901	2925	1141	1755	66	45	1.221	0.783

родной среде. Увеличение длительности импульса сейсмоисточника приводит к незначительным изменениям.

Вне зависимости от времени и формы импульса в среде с прослойками, обладающими достаточной податливостью и толщиной, возможна ситуация, когда включение практически невозможно обнаружить. На рисунке 3.14 (с) показаны поверхностные волны в точке, удалённой на $x_2 = 18$ м, $x_3 = 18$ м. Пунктирной линией показано время t_p^* прихода отражённого от включения сигнала. Параметры прослоек ρ , c_p , c_s соответствуют случаю II таблицы 3.2, но количество прослоек в рассматриваемой области $n' = 37$, $n'' = 53$, а толщина прослоек на соответствующих иерархических уровнях $\delta' = 114$ мм и $\delta'' = 80$ мм. Заметно, что различия между волнами на поверхности сред с включением и без практически не наблюдаются.

Выводы по главе

Исследовано поведение импульсного сейсмоисточника в однородной и слоистой среде в осесимметричной постановке. Проведено сравнение напряжённо-деформированного состояния приповерхностных грунтов при статическом нагружении и импульсном в момент перед разгрузкой. Оценено влияние таких параметров, как длительность импульса и площадь платформы. Амплитудно-частотные характеристики для источников с фиксированной энергией приводят к показывающему рост максимумов амплитуд при увеличении длительности импульса. Аналогично амплитуды поверхностных волн, отражённых от плоской границы раздела сред на определённой глубине, увеличиваются с ростом длительности импульсного воздействия. Влияние радиуса жёсткой платформы сей-

систоисточника на амплитуды и сейсмический КПД менее выражено. Источники с бóльшей площадью излучателя обеспечивают режим работы с более высоким сейсмическим КПД, особенно в случаях, когда приповерхностные слои достаточно податливы, например, в конфигурации «лёд-вода-грунт» или «вода-грунт».

Изучено влияние блочного строения среды на волновые поля систоисточника с фиксированными характеристиками (время импульса, площадь платформы). Показано, что блочность слабо влияет на сейсмический КПД систоисточника. На амплитудно-частотных характеристиках систоисточника было показано, что увеличение податливости упругих прослоек приводит к росту амплитуд и их сдвигу в сторону нижних частот. Спектры сигнала показывают, что при удалении от источника высокочастотные колебания подавляются. Учёт затухания приводит к снижению амплитуд и смещению их максимумов в стороны меньших частот. Рассмотрено два механизма затухания: вязкоупругость в блоках и прослойках и упругопластичность в прослойках. Также рассмотрены пористые прослойки.

Исследовано качество сигнала, отражённого от податливого включения, в зависимости от параметров блочной среды. Показано, что в блочной среде разность между сигналами в среде с включением и без него становится менее выраженной по мере увеличения податливости и толщины прослоек.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Решена задача о распространении плоской монохроматической волны в среде с упругим слоем и с прослойкой, которая задаётся в виде внутренних граничных условий. Было установлено, что рассматриваемая упрощённая модель прослойки применима для описания волн в среде с достаточно тонкими и податливыми прослойками, а также для описания длинноволновых процессов.
2. Разработана пространственная математическая модель упругой блочной среды с тонкими прослойками. В математической модели блочной среды могут быть учтены вязкоупругие свойства блоков и прослоек. Для описания эффекта проскальзывания блоков использована модель упругопластических прослоек. Также рассмотрены разномодульные и пористые прослойки.
3. Для решения задач динамики блочных сред разработан авторский программный комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем кластерной архитектуры с использованием библиотеки MPI. Алгоритм решения задач основан на методе расщепления по пространственным координатам. Для упругих и вязкоупругих блочных сред реализовано два конечно-разностных подхода к решению одномерных расщеплённых задач, в одном из которых применяется метод Годунова, во втором используется разностная схема Г. В. Иванова с контролируемой диссипацией. Для сред с пористыми и упругопластическими прослойками используются алгоритмы корректировки решения, которые достаточно просто реализованы за счёт представления прослоек в виде внутренних граничных условий для блоков.
4. Численно решены некоторые задачи распространения волн в блочных средах. Для модели с упругими блоками и вязкоупругими прослойками было проведено сравнение с экспериментом. Расчёты, проведённые в плоской и пространственной постановке, показали приемлемое соответствие данным

лабораторных измерений. Рассмотрена задача с заглубленным упругопластическим включением в блочном полупространстве. Также был проведен численный анализ волновых полей, генерируемых импульсным сейсмическим источником, в однородных и блочных средах. Показано влияние параметров блочной среды на качество сигнала, зафиксированного на поверхности после отражения от заглубленного упругого включения.

Перспективы исследования состоят в использовании полученной трёхмерной модели упругой блочной среды для проверки гипотез, связанных с вычислением параметров моментного континуума Коссера через параметры блочной среды. Также возможно развитие в направлении численного исследования волн разрушения, распространяющихся вдоль границ структурных элементов материалов. Данная задача предполагает рассмотрение особого вида контактных условий между блоками.

Приложение

Копия свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2025615731

**Программа расчёта задач динамики трёхмерных
блочнo-слоистых сред с упругими блоками и тонкими
упругими прослойками (3D_blocky_elast_waves)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
научное учреждение "Федеральный исследовательский
центр "Красноярский научный центр Сибирского
отделения Российской академии наук" (RU)*

Автор(ы): *Ефимов Евгений Александрович (RU)*

Заявка № **2025613222**
Дата поступления **21 февраля 2025 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **07 марта 2025 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Список литературы

1. Садовский, М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — С. 829–832.
2. Садовский, М. А. О механике блочного горного массива / М. А. Садовский, Г. Г. Кочарян, В. Н. Родионов // ДАН СССР. — 1988. — Т. 302. — С. 306–307.
3. Садовский, М. А. О свойстве дискретности горных пород / М. А. Садовский, Л. Г. Болховитинов, В. Ф. Писаренко // ДАН СССР. — 1982. — Т. 12. — С. 3–18.
4. Садовский, М. А. Соподчиненность и подобие геодвижений в связи с естественной кусковатостью пород / М. А. Садовский, С. С. Сардаров // ДАН СССР. — 1980. — Т. 250. — С. 846–848.
5. Курленя, М. В. О динамическом поведении “самонапряженных” блочных сред. Ч. I: одномерная механико-математическая модель / М. В. Курленя, В. Н. Опарин, Е. Г. Балмашнова // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2001. — Т. 1. — С. 3–11.
6. Курленя, М. В. Волны маятникового типа. Ч. II: Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования / М. В. Курленя, В. Н. Опарин, В. И. Востриков // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 1996. — С. 3–38.
7. Курленя, М. В. Волны маятникового типа. Ч. III: Данные натурных измерений / М. В. Курленя, В. Н. Опарин, В. И. Востриков // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 1996. — С. 3–27.
8. Опарин, В. Н. Представление размеров естественных отдельностей горных пород в канонической шкале. Классификации / В. Н. Опарин, А. С. Танаино // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2009. — С. 40–53.
9. О верификации кинематического выражения для волн маятникового типа по данным сейсмических измерений в условиях рудника Таштагольский и мраморного карьера Искитимский / В. Н. Опарин, В. Ф. Юшкин, Н. А.

- Кулинич, Д. Е. Рублёв, А. В. Юшкин // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2015. — С. 3–23.
10. О новой шкале структурно-иерархических представлений как паспортной характеристике объектов геосреды / В. Н. Опарин, В. Ф. Юшкин, А. А. Акинин, Е. Г. Балмашнова // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 1998. — С. 16–33.
 11. Лавриков, С. В. О расчете напряженно-деформированного состояния разупрочняющегося блочного массива вблизи выработки // Физическая мезомеханика. — 2010. — Т. 13. — С. 53–63.
 12. Кочарян, Г. Г. Динамика деформирования блочных массивов горных пород / Г. Г. Кочарян, А. А. Спивак. — Москва : ИЦК Академкнига, 2003. — 422 с.
 13. Костюченко, В. Н. Деформационные характеристики межблоковых промежутков различного масштаба / В. Н. Костюченко, Г. Г. Кочарян, Д. В. Павлов // Физическая мезомеханика. — 2002. — Т. 5. — С. 23–42.
 14. Курленя, М. В. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа U_μ / М. В. Курленя, В. Н. Опарин, В. И. Востриков // ДАН СССР. — 1993. — Т. 333. — С. 3–13.
 15. Сарайкин, В. А. Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) / В. А. Сарайкин, А. Г. Черников, Е. Н. Шер // ПМТФ. — 2015. — Т. 56. — С. 688–697.
 16. Сарайкин, В. А. Расчет волн, распространяющихся в сборке из прямоугольных блоков // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2008. — С. 32–42.
 17. Александрова, Н. И. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах / Н. И. Александрова, Е. Н. Шер, А. Г. Черников // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2008. — С. 3–13.

18. Александрова, Н. И. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде / Н. И. Александрова, А. Г. Черников, Е. Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2005. — С. 46–55.
19. Шер, Е. Н. Влияние горного давления на спектральный состав маятниковых волн, возникающих в блочных средах при импульсном нагружении / Е. Н. Шер, А. Г. Черников // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2019. — Т. 6. — С. 317–322.
20. Шер, Е. Н. Об оценке параметров структуры блочных сред на модельном примере сейсмического зондирования кирпичной стены / Е. Н. Шер, А. Г. Черников // Физ. - техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2020. — С. 11–17.
21. Александрова, Н. И. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника / Н. И. Александрова, Е. Н. Шер // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2010. — С. 60–72.
22. Ерофеев, В. И. Структурное моделирование метаматериалов / В. И. Ерофеев, И. С. Павлов. — Нижний Новгород: ИПФ РАН : Федер. исслед. центр Ин-т приклад. физики РАН, Ин-т проблем машиностроения РАН, 2019. — 196 с.
23. Cosserat, E. Theorie des Corps Deformables. Chwolson's Traite Physique / E. Cosserat, F. Cosserat // Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. — 1909. — P. 953–1173.
24. Truesdell, C. The classical field theories / C. Truesdell, R. A. Toupin. — Berlin : Springer, 1960.
25. Toupin, R. A. Theories of elasticity with couple-stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1964. — Vol. 17. — P. 85–112.
26. Седов, Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. — 1965. — Т. 20. — С. 121–180.

27. Седов, Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы // ПММ. — 1968. — Т. 32. — С. 771–785.
28. Ерофеев, В. И. Волновые процессы в твёрдых телах с микроструктурой. — Москва : Издательство Московского университета, 1999. — 328 с.
29. Ерофеев, В. И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2. — С. 5–10.
30. Кулеш, М. А. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера / М. А. Кулеш, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков // Акустический журнал. — 2006. — Т. 52. — С. 227–235.
31. Кулеш, М. А. Волны в упругой среде Коссера / М. А. Кулеш, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2008. — С. 64–75.
32. Трусов, П. В. Многоуровневые модели моно и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения / П. В. Трусов, А. И. Швейкин. — Новосибирск : Издательство Сибирского отделения РАН, 2019. — 605 с.
33. Brocato, M. Application of the theory of Cosserat media to the elastoplastic behaviour of polycrystals / M. Brocato, A. Ehrlacher, P. Tamagny // Continuum Thermomechanics. — 2000. — P. 43–54.
34. Forest, S. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials / S. Forest, F. Barbe, G. Cailletaud // Int. J. Solids Struct. — 2000. — Vol. 37. — P. 7105–7126.
35. Емельянов, А. Н. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — С. 40–45.
36. Grekova, E. F. Wave Propagation in Rocks Modeled as Reduced Cosserat Continuum with Weak Anisotropy / E. F. Grekova, G. C. Herman // Proceedings of 66th EAGE (European Association of Geoscientists and Engineers) conference, Paris. — 2004. — P. P098.

37. Кулеш, М. А. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера / М. А. Кулеш, Е. Ф. Грекова, И. Н. Шардаков // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55. — С. 216–225.
38. Моделирование пластической деформации на основе теории ортотропного континуума Коссера / В. М. Садовский, М. А. Гузев, О. В. Садовская, С. Qi // Физическая мезомеханика. — 2019. — Т. 22. — С. 59–66.
39. Sulem, J. A continuum model for periodic two-dimensional block structures / J. Sulem, H.-B. Muhlhaus // Mech. Cohesive-friction. Materials. — 1997. — Vol. 2. — P. 31–46.
40. Панин, В. Е. Нелинейные волновые процессы в деформируемом твёрдом теле как в иерархически организованной системе / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин, А. В. Панин // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15. — С. 7–22.
41. Панин, В. Е. Деформируемое твёрдое тело как иерархически организованная система / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин // Физическая мезомеханика. — 2011. — Т. 14. — С. 7–26.
42. Панин, В. Е. Физические принципы мезомеханики поверхностных слоев и внутренних градиц раздела в деформируемом твёрдом теле / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин // Физическая мезомеханика. — 2003. — Т. 6. — С. 5–14.
43. Структурные уровни деформации твёрдых тел / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, Т. Ф. Елсукова, А. Г. Иванчин // Изв. вузов. Физика. — 1982. — Т. 25. — С. 5–27.
44. Егорушкин, В. Е. Калибровочная динамическая теория дефектов в неоднородно деформируемых средах со структурой. Поведение границы раздела // Изв. вузов. Физика. — 1990. — Т. 22. — С. 51–68.
45. Егорушкин, В. Е. Динамика пластической деформации. Волны локализированной пластической деформации в твердых телах // Изв. вузов. Физика. — 1992. — Т. 35. — С. 19–41.
46. Sadovskii, V. M. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on

- equations of the Cosserat continuum / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // Wave Motion. — 2015. — Vol. 52. — P. 138–150.
47. Садовский, В. М. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера / В. М. Садовский, О. В. Садовская, М. П. Варыгина // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. — 2013. — Т. 5. — С. 111–118.
 48. Садовский, В. М. О резонансных свойствах моментного континуума Коссера / В. М. Садовский, О. В. Садовская, М. П. Варыгина // Прикладная механика и техническая физика. — 2010. — Т. 51. — С. 126–136.
 49. Sadovskaya, O. V. Analysis of rotational motion of material microstructure particles by equations of the Cosserat elasticity theory / O. V. Sadovskaya, V. M. Sadovskii // Acoustical Physics. — 2010. — Vol. 56. — P. 942–950.
 50. Kroner, E. Non-local theory of elasticity for a finite inhomogeneous medium – a derivation from lattice theory / E. Kroner, B. K. Datta // Fundamental aspects of dislocation theory : conference proc. — Washington : National Bureau of Standards. — 1970. — Vol. 2. — P. 737–746.
 51. Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий / Е. А. Иванова, А. М. Кривцов, Н. Ф. Морозов, А. Д. Фирсова // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2003. — С. 110–127.
 52. Кривцов, А. М. Моделирование упругих свойств кристаллов с гексагональной плотноупакованной решеткой / А. М. Кривцов, Е. А. Подольская // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2010. — С. 77–86.
 53. Кривцов, А. М. О механических характеристиках наноразмерных объектов / А. М. Кривцов, Н. Ф. Морозов // Физика твердого тела. — 2002. — Т. 44. — С. 2158–2163.
 54. Pouget, J. Lattice dynamics and stability of modulated-strain structures for elastic phase transitions in alloys // Phys. Rev. B. — 1993. — Vol. 48. — P. 864–875.
 55. Pouget, J. Lattice model for elastic ferroelectric crystals : microscopic

- approach / J. Pouget, G. Askar, G. A. Maugin // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 33. — P. 6304–6325.
56. Индейцев, Д. А. Динамические эффекты в материалах со сложной структурой / Д. А. Индейцев, В. Н. Наумов, Б. Н. Семенов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2007. — С. 17–39.
 57. Александрова, Н. И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. — 2003. — С. 38–47.
 58. Alexandrova, N. I. The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium // Wave Motion. — 2014. — Vol. 51. — P. 818–832.
 59. Alexandrova, N. I. Seismic waves in a three-dimensional block medium // Proc. R. Soc. A. — 2016. — Vol. 472. — P. 20160111.
 60. Влияние параметров блочной среды на процесс диссипации энергии / К. Ванг, Н. И. Александрова, И. Пан, В. Н. Опарин, Л. Доу, А. И. Чанышев // Прикладная механика и техническая физика. — 2019. — Т. 60. — С. 168–177.
 61. Садовский, В. М. Математическое моделирование волн маятникового типа с применением высокопроизводительных вычислений / В. М. Садовский, О. В. Садовская, М. П. Варыгина // Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: тр. 2-ой Росс.-Кит. науч. конф. (Новосибирск, 2–5 июля 2012). — Новосибирск: ИГД им. Н.А. Чинакала СО РАН. — С. 138–144.
 62. Sadovskii, V. M. Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 33. — P. 111–121.
 63. Chentsov, E. P. Modeling of Wave Processes in a Blocky Medium with Fluid-saturated Porous Interlayers / E. P. Chentsov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. — 2017. — Vol. 1895. — P. 080002–1.

64. Sadovskii, V. M. Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, A. A. Lukyanov // Journal of Computational Physics. — 2017. — Vol. 345. — P. 834–855.
65. Садовская, О. В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с.
66. Sadovskii, V. M. Supercomputer Modeling of Wave Propagation in Blocky Media Accounting Fractures of Interlayers / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya // Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures / ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev, I. S. Pavlov, A. V. Porubov. — Cham : Springer International Publishing, 2020. — P. 379–398.
67. Sadovskaya, O. V. Mathematical Modelling of Fracture Waves in a Blocky Medium with Thin Compliant Interlayers / O. V. Sadovskaya, V. M. Sadovskii. // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2024. — Vol. 382.
68. Петрашень, Г. И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах / Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис. — Ленинград : Наука, 1982. — 289 с.
69. Бреховских, Л. М. Акустика слоистых сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. — Москва : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 416 с.
70. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах. — Москва : Наука, 1973. — 343 с.
71. Молотков, Л. А. О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2003. — Т. 297. — С. 254–271.
72. Молотков, Л. А. О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. II // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2003. — Т. 297. — С. 230–253.

73. Молотков, Л. А. Эффективная модель блочной пористой среды с контактами проскальзывания на границах // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2001. — Т. 275. — С. 140–164.
74. Ревуженко, А. Ф. Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск : Издательство НГУ, 2000. — 428 с.
75. Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой / С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин // Физическая мезомеханика. — 2008. — Т. 11. — С. 45–60.
76. Лавриков, С. В. О деформировании блочной среды вокруг выработки / С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко // ФТПРПИ. — 1990. — С. 7–15.
77. Геологический словарь. В трёх томах. Т. 2. / Сост. О. В. Петров. — СПб. : Изд-во ВСЕГЕИ, 2010. — 480 с.
78. Gao, K. e. a. A multiscale method for elastic wave equation modeling // SEG Annual Meeting (Houston, USA, September 22-27, 2013) : Expanded Abstracts. — Houston : s. n. — 2013. — P. 3444–3448.
79. Capdeville, Y. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-SV waves / Y. Capdeville, L. Guillot, J. J. Marigo // Geophysical Journal International. — 2010. — Vol. 182. — P. 903–922.
80. Moczo, P. e. a. 3-D finite-difference, finite-element, discontinuous-Galerkin and spectral-element schemes analysed for their accuracy with respect to P-wave to S-wave speed ratio // Geophysical Journal International. — 2011. — Vol. 187. — P. 1645–1667.
81. Vishnevsky, D. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves / D. Vishnevsky, V. Lisitsa // Geophysics. — 2014. — Vol. 79. — P. 219–232.
82. Virieux, J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite- difference method // Geophysics. — 1986. — Vol. 51. — P. 889–901.
83. Biot, M. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media // Journal of Applied Physics. — 1962. — Vol. 33. — P. 1482–1498.

84. Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — Vol. 28. — P. 168–191.
85. Plona, T. Observation of a Second Bulk Compressional Wave in a Porous Medium at Ultrasonic Frequencies // Appl. Phys. Lett. — 1980. — Vol. 36. — P. 259–261.
86. Gaßmann, F. Über die Elastizität Poröser Medien // Vier, Der Natur Gesellschaft. — 1951. — P. 1–23.
87. Carcione, J. M. Differential form and numerical implementation of Biot's poroelasticity equations with squirt dissipation / J. M. Carcione, B. Gurevich // Geophysics. — 2011. — Vol. 76. — P. N55–N64.
88. Dvorkin, J. Dynamic poroelasticity: A unified model with the squirt and the Biot mechanisms / J. Dvorkin, A. Nur // Geophysics. — 1993. — Vol. 58. — P. 524–533.
89. Parra, J. The transversely isotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application // Geophysics. — 1977. — Vol. 62. — P. 309–318.
90. Блохин, А. М. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума / А. М. Блохин, В. Н. Доровский. — Новосибирск : РАН, Сиб. отд-ние, Объед. ин-т геологии, геофизики и минералогии, Ин-т математики, 1994. — 187 с.
91. Доровский, В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. — 2016. — С. 39–45.
92. Доровский, В. Н. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Прикладная механика и техническая физика. — 1992. — Т. 33. — С. 403–409.
93. Сорокин, К. Э. Математическая модель двухфазной среды, содержащей примеси / К. Э. Сорокин, В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Естественные и технические науки. — 2016. — Т. 2. — С. 139–145.

94. Blokhin, A. M. Symmetrization of continuum mechanics equations // Sib. J. Diff. Eq. — 1993. — Vol. 2. — P. 3–47.
95. Блохин, А. М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. — Новосибирск : Наука, 1986. — 240 с.
96. Доровский, В. Н. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко, Е. И. Роменский // Физика горения и взрыва. — 1993. — Т. 29. — С. 99–110.
97. Роменский, Е. И. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14. — С. 86–97.
98. Romenski, E. Two-phase hyperbolic model for porous media saturated with a viscous fluid and its application to wavefields simulation / E. Romenski, G. Reshetova, I. Peshkov // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 106. — P. 567–600.
99. A unified HTC multiphase model of continuum mechanics / D. Ferrari, I. Peshkov, E. Romenski, M. Dumbser // Journal of Computational Physics. — 2025. — Vol. 521.
100. Dumbser, M. A unified hyperbolic formulation for viscous fluids and elastoplastic solids / M. Dumbser, I. Peshkov, E. Romenski // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics – Springer New York LLC – Aachen. — 2018. — Vol. 237. — P. 451–463.
101. Годунов, С. К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 280 с.
102. Соловьёв, С. А. Численное решение уравнений Био в квазистатической постановке для оценки сейсмического затухания в анизотропных средах / С. А. Соловьёв, М. А. Новиков, В. В. Лисица // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2022. — Т. 2. — С. 246–253.
103. Новиков, М. А. Численное моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых флюидозаполненных средах / М. А. Новиков, В. В.

- Лисица, А. А. Козяев // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — Т. 19. — С. 130–149.
104. Новиков, М. А. Численная оценка сейсмического затухания в анизотропных трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах / М. А. Новиков, В. В. Лисица // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2021. — Т. 2. — С. 186–195.
 105. Numerical upscaling in 2-D heterogeneous poroelastic rocks: Anisotropic attenuation and dispersion of seismic waves / J. G. Rubino, E. Caspari, T. M. Muller, M. Milani, N. D. Barbosa, K. Holliger // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2016. — Vol. 121. — P. 6698–6721.
 106. Rubino, J. G. Equivalent viscoelastic solids for heterogeneous fluid-saturated porous rocks / J. G. Rubino, C. L. Ravazzoli, J. E. Santos // Geophysics. — 2009. — P. 1–13.
 107. Murphy, W. F. I. Effects of partial water saturation on attenuation in sandstones // J. Acoust. Soc. Am. — 1982. — Vol. 71. — P. 1458–1468.
 108. Spencer, J. W. Stress relaxations at low frequencies in fluid saturated rocks: Attenuation and modulus dispersion // Journal of Geophysical Research. — 1981. — Vol. 86. — P. 1803–1812.
 109. Winkler, K. W. Pore fluids and seismic attenuation in rocks / K. W. Winkler, A. M. Nur // Geophysical Research Letters. — 1979. — Vol. 6. — P. 1–4.
 110. Jones, T. Velocity and attenuation in sandstone at elevated temperatures and pressures / T. Jones, A. M. Nur // Geophysical Research Letters. — 1983. — Vol. 10. — P. 140–143.
 111. Gordon, R. B. Velocity and attenuation of seismic waves in imperfectly elastic rock / R. B. Gordon, L. A. Davis // Journal of Geophysical Research. — 1968. — Vol. 73. — P. 3917–3935.
 112. Attenuation of shear and compressional waves in Pierre shale / F. J. McDonald, F. A. Angona, R. L. Mills, R. L. Sengbush, R. G. van Nostrand, J. E. White // Geophysics. — 1958. — Vol. 23. — P. 421–439.

113. Carcione, J. Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media: Third Edition. — S. l. : Elsevier, 2007. — 538 p.
114. Poynting, J. H. A text-book of physics: Properties of matter / J. H. Poynting, J. J. Thomson. — S. l. : Griffin, 1902.
115. Blanch, J. O. Modeling of a constant Q ; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique / J. O. Blanch, J. O. Robertsson, W. W. Symes // Geophysics. — 1995. — Vol. 60. — P. 176–184.
116. Russo, G. A constant Q technique for the numerical simulation of attenuation of seismic body waves / G. Russo, A. Zollo // Geophysics. — 2003. — Vol. 68. — P. 1744–1748.
117. Quick and accurate Q parameterization in viscoelastic wave modeling / S. Hestholm, S. Ketcham, R. Greenfield, M. Moran, G. McMechan // Geophysics. — 2006. — Vol. 71. — P. T147–T150.
118. Решетова, Г. В. Численное моделирование сейсмических и сейсмоакустических волновых полей в разномасштабных и резкоконтрастных средах : Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 05.13.18 ; ИВМиМГ СО РАН. — Новосибирск : б. и., 2010. — 298 с.
119. Reshetova, G. Parallel Simulation of 3D Wave Propagation by Domain Decomposition / G. Reshetova, V. Cheverda, D. Vishnevsky // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2013. — Vol. 1. — P. 6–11.
120. Михайленко, Б. Г. Численно-аналитический метод решения задачи о распространении сейсмических и акустико-гравитационных волн для неоднородной модели Земля–Атмосфера / Б. Г. Михайленко, Г. В. Решетова // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2006. — Т. 9. — С. 37–46.
121. Mikhailenko, B. G. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method / B. G. Mikhailenko, A. A. Mikhailov, G. V. Reshetova // Pure and Applied Geophysics. — 2003. — Vol. 160. — P. 1207–1224.

122. Решетова, Г. В. Численное моделирование процессов распространения сейсмоакустических полей с учетом неоднородности зоны проникновения / Г. В. Решетова, В. А. Чеверда, И. Н. Ельцов // Физическая мезомеханика. — 2005. — Т. 8. — С. 99–105.
123. Годунов, С. К. Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1979. — 392 с.
124. Friedrichs, K. O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Commun. Pure Appl. Math. — 1954. — Vol. 7. — P. 345–392.
125. Lax, P. D. Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations / P. D. Lax, R. D. Richtmyer // Comm. Pure Appl. Math. — 1956. — Vol. 9. — P. 267–293.
126. Рябенский, В. С. Об устойчивости разностных уравнений / В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов. — Москва : Гостехиздат, 1956. — 171 с.
127. Марчук, Г. И. Методы расщепления. — Москва : Наука, 1988. — 264 с.
128. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1967. — 196 с.
129. Yoshida, H. Construction of higher order symplectic integrators // Phys. Lett. A. — 1990. — P. 262–268.
130. Lee, J. A split step approach for the 3-D Maxwell's equations / J. Lee, B. Fornberg // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — P. 185–505.
131. Голубев, В. И. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления / В. И. Голубев, А. В. Шевченко, И. Б. Петров // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14. — С. 899–910.
132. Риман, Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. — Москва : Гостехиздат, 1948. — С. 376–395.
133. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — Москва : Наука, 1978. — 687 с.

134. Von Neumann, J. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks / J. Von Neumann, R. D. Richtmeyer // J. App. Phys. — 1950. — Vol. 21. — P. 232–237.
135. Lax, P. D. Systems of conservation laws / P. D. Lax, B. Wendroff // Commun. Pure Appl. Math. — 1960. — Vol. 13. — P. 217–237.
136. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, Г. П. Крайко. — Москва : Наука, 1976. — 400 с.
137. Годунов, С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47. — С. 271–306.
138. Гольдин, В. Я. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений / В. Я. Гольдин, Н. Н. Калиткин, Т. В. Шитова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1965. — Т. 5. — С. 938–944.
139. Самарский, А. А. Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевин // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361. — С. 21–23.
140. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — Москва : Физматлит, 2001. — 608 с.
141. Колган, В. П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1978. — Т. 18. — С. 1340–1345.
142. Van Leer, B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, II: Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme // Journal of Computational Physics. — 1974. — Vol. 14. — P. 361–370.
143. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 49. — P. 357–393.
144. Roe, P. L. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 18. — P. 337–365.

145. Русанов, В. В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 180. — С. 1303–1305.
146. Балакин, В. Б. О методах типа Рунге-Кутты для уравнений газовой динамики // ЖВМ И МФ. — 1970. — Т. 10. — С. 1512–1519.
147. Холодов, А. С. Сеточно-характеристические численные методы / А. С. Холодов, К. М. Магомедов. — Москва : Наука, 1988. — 287 с.
148. Холодов, А. С. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа / А. С. Холодов, Я. А. Холодов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46. — С. 1560–1588.
149. Голубев, В. И. Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом / В. И. Голубев, И. Б. Петров, Н. И. Хохлов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53. — С. 1709–1720.
150. Численный расчет волновых процессов в трещиноватых средах на гексаэдральных сетках сеточно-характеристическим методом / В. И. Голубев, И. Б. Петров, Н. И. Хохлов, К. И. Шульц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — С. 509–518.
151. Петров, И. Б. Моделирование задач 3D сейсмологии на высокопроизводительных вычислительных системах / И. Б. Петров, Н. И. Хохлов // Матем. моделирование. — 2014. — Т. 26. — С. 342–350.
152. Численное решение задач упругопластического деформирования твёрдых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. — Новосибирск : Сиб. ун-в. изд-во, 2002. — 352 с.
153. Иванов, Г. В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. — 1978. — Т. 37. — С. 63–77.
154. Шокин, Ю. И. Построение монотонных схем на основе метода дифференциального приближения / Ю. И. Шокин, Ю. В. Сергеева, Г. С. Хакимзянов // ЖВТ. — 2004. — Т. 9. — С. 97–104.

155. Шокин, Ю. И. О монотонизации явной схемы предиктор-корректор / Ю. И. Шокин, Ю. В. Сергеева, Г. С. Хакимзянов // Вестник КазНУ. Математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 2. — С. 103–114.
156. Mikhaileenko, B. G. Spectral laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — Vol. 12. — P. 105–110.
157. Решетова, Г. В. Использование преобразования Лагерра для построения идеально подходящих поглощающих слоев без расщепления / Г. В. Решетова, В. А. Чеверда // Матем. моделирование. — 2006. — Т. 18. — С. 91–101.
158. Richardson, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam // Philos. Trans. Roy. Soc, London, ser. A. — 1910. — Vol. 210. — P. 307–357.
159. Марчук, Г. И. Повышение точности решений разностных схем / Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. — Москва : Наука, 1979. — 320 с.
160. Berenger, J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114. — P. 185–200.
161. Appelo, D. A new absorbing layer for elastic waves // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 215. — P. 642–660.
162. The implementation of an improved NPML absorbing boundary condition in elastic wave modeling / Z. Qin, M. Lu, X. Zheng, Y. Yao, C. Zhang, J. Song // Applied Geophysics. — 2009. — Vol. 6. — P. 113–121.
163. Collino, F. Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. — 2001. — Vol. 66. — P. 294–307.
164. Meza-Fajardo Kristel, C. A Nonconvolutional, Split-Field, Perfectly Matched Layer for Wave Propagation in Isotropic and Anisotropic Elastic Media: Stability Analysis / C. Meza-Fajardo Kristel, S. A. Papageorgiou Apostolos // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2008. — Vol. 4. — P. 1811–1836.

165. Festa, G. Interaction between surface waves and absorbing boundaries for wave propagation in geological basins: 2D numerical simulations / G. Festa, E. Delavaud, V. J.-P. // *Geophys. Res. Lett.* — 2005. — Vol. 32.
166. Дмитриев, М. Н. Применение слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть I: Уровень отражений / М. Н. Дмитриев, В. В. Лисица // *Сиб. журн. вычисл. матем.* — 2011. — Т. 14. — С. 333–344.
167. Дмитриев, М. Н. Применение слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть II: Устойчивость / М. Н. Дмитриев, В. В. Лисица // *Сиб. журн. вычисл. матем.* — 2012. — Т. 15. — С. 36–44.
168. Ильгамов, М. А. Неотражающие граничные условия / М. А. Ильгамов, А. Н. Гильманов. — Москва : Физматлит, 2003. — 240 с.
169. Анисимов, С. А. Моделирование неотражающих условий при численном решении задач теории упругости / С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов // *Вычислительные технологии.* — 1999. — Т. 4. — С. 3–13.
170. Яненко, Н. Н. Дифференциальные анализаторы ударных волн / Н. Н. Яненко, Е. В. Ворожцов, В. Фомин // *Докл. АН СССР.* — 1976. — Т. 227. — С. 50–53.
171. Fomin, V. M. Differential analysers shock waves: theory / V. M. Fomin, E. V. Vorozhsov, N. N. Yanenko // *Computers and Fluids.* — 1976. — Vol. 4. — P. 171–183.
172. Шемякин, Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности (курс лекций). — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 1968. — 336 с.
173. Efimov, E. A. Wave Propagation in a Blocky-layered Medium with Thin Interlayers / E. A. Efimov, V. M. Sadovskii // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* — 2025. — Vol. 18. — P. 119–129.
174. Садовский, В. М. Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды /

- В. М. Садовский, О. В. Садовская, Е. А. Ефимов // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — Т. 22. — С. 47–66.
175. Sadovskii, V. M. Finite Difference Schemes for Modelling the Propagation of Axisymmetric Elastic Longitudinal Waves / V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, E. A. Efimov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. — 2020. — Vol. 13, no. 5. — P. 644–654.
 176. Кукуджанов, В. Н. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела / В. Н. Кукуджанов, В. И. Кондауров // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке. — 1975. — Т. 5. — С. 39–84.
 177. Об организации параллельных вычислений и распараллеливание прогонки / Н. Н. Яненко, А. Н. Коновалов, А. Н. Бугров, Г. В. Шустов // Численные методы механики сплошных сред. — 1978. — Т. 7. — С. 139–146.
 178. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. В 10-ти томах Т. VII. Теория упругости. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Физматлит, 2003. — 264 с.
 179. Danping, C. Equivalence Relations of Generalized Rheological Models for Viscoelastic Seismic-Wave Modeling / C. Danping, Y. Xingyao // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2014. — Vol. 104. — P. 260–268.
 180. Bourbié, T. Acoustics of Porous Media / T. Bourbié, O. Coussy, B. Zinszner. Institut français du pétrole publications. — S. l. : Editions Technip, 1987.
 181. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями / Д. М. Вишнеvский, В. В. Лисица, Г. В. Решетова // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 155–165.
 182. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. — Москва : Наука, 1977. — 384 с.
 183. Ченцов, Е. П. Математическое моделирование колебательных процессов в структурно неоднородных средах : Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : 05.13.18 ; ФГБНУ «Федераль-

- ный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук». — Красноярск : б. и., 2019. — 136 с.
184. Wilkins, M. L. Calculation of elastic-plastic flow // *Methods in Computational Physics: Fundamental Methods in Hydrodynamics*. — 1964. — Vol. 3. — P. 211–263.
 185. Разработка, изготовление и продажа импульсных невзрывных электромагнитных источников «Енисей» // Сайт компании АО «ГЕОТЕК». — 2020. — URL: <https://gseis.ru/impuls> (дата обращения: 05.10.2020).
 186. Щадин, П. Ю. Характеристики волнового сейсмического поля, возбуждаемого импульсными источниками “Енисей” // *Технологии сейсморазведки*. — 2013. — Т. 4, № 10. — С. 74–80.
 187. Филоненко-Бородич, М. М. Теория упругости. — Москва : Физматлит, 1959. — 364 с.
 188. Sadvskii, V. M. Analysis of seismic waves excited in near-surface soils by means of the electromagnetic pulse source “Yenisei” / V. M. Sadvskii, O. V. Sadvskaya, E. A. Efimov // *Materials Physics and Mechanics*. — 2019. — Vol. 42. — P. 544–557.