

На правах рукописи



Валов Александр Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ТРЕЩИН В
СЛОИСТЫХ ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ**

Специальность 1.1.9 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
РАН
Головин Сергей Валерьевич

Официальные оппоненты: **Савенков Евгений Борисович**,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН,
Федеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук”, г. Москва,
Заместитель директора по научной работе

Давлетбаев Альфред Ядгарович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ООО «РН-Геология Исследования Разработка» в городе Уфе — БашНИПИнефть, г. Уфа,
Директор по цифровому развитию

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий», г. Москва

Защита состоится 8 декабря 2026 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. академика Лаврентьева, 15, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.055.01.

Автореферат разослан 2 октября 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.055.01,
д-р физ.-мат. наук, доцент



Прокудин Дмитрий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Скважина обеспечивает доступ к целевому пласту как при добыче углеводородов, так и при закачке флюидов в недра, включая проекты геологического захоронения CO_2 . На протяжении ее жизненного цикла возникают две взаимосвязанные задачи: обеспечение требуемого притока флюида между скважиной и пластом и обеспечение долговременной герметичности скважины. Обе задачи связаны с распространением гидравлических трещин в предварительно напряженной слоистой пороупругой среде. Эффективность гидравлического разрыва пласта (ГРП) зависит от геометрии трещины, на которую существенно влияют контрасты сжимающих напряжений между слоями. Герметичность скважины при закачке CO_2 определяется состоянием цементного камня, вдоль границ которого интерфейсная трещина гидравлического отслоения образует один из наиболее вероятных путей утечки. Экспериментальные исследования в условиях, приближенных к промысловым, сопряжены с существенными сложностями, поэтому основным инструментом анализа и оценки рисков становится математическое моделирование, а необходимость серийных и параметрических расчетов жестко ограничивает допустимые вычислительные затраты. Разработка моделей и вычислительных подходов, корректно описывающих слоистую пороупругую среду и термopopoупругие эффекты при сохранении приемлемого времени расчета, представляет собой актуальную научную и практическую задачу.

Степень разработанности темы исследования. В отличие от классических моделей ГРП (KGD, PKN, радиальная), в которых форма и направление роста трещины фиксированы, модели planar 3D рассматривают двумерное течение жидкости в трещине совместно с трехмерным упругим деформированием породы без априорных предположений о геометрии [Peirce A., Detournay E., 2008] и за счет сочетания точности и вычислительной эффективности наиболее распространены в инженерных приложениях. Их точность существенно зависит от условия распространения в вершине, в качестве которого применяется универсальная асимптотика, охватывающая три предельных режима и переходы между ними [Dontsov E., Peirce A., 2015]. Она не содержит механизма учета границ слоев, что приводит к потере точности при пересечении фронтом границ слоев с различными сжимающими напряжениями [Dontsov E.V., Hewson C.W., McClure M.W., 2022] и вынуждает измельчать расчетную сетку, затрудняя применение planar 3D моделей на грубых сетках, характерных для инженерных приложений. Не обобщены на случай многослойной среды и компоненты алгоритмов отслеживания фронта. Вторая группа нерешенных вопросов связана с целостностью обсаженных скважин при закачке CO_2 , где основным барьером межпластовой изоляции служит цементный камень, а дефекты на его границах служат очагами инициации гидравлического отслоения. Предложенные модели отслоения учитывают термopopoупругие эффекты и трехмерный характер распространения [Gu C., Feng Y., Mosleh M.H., et al., 2024] ценой существенных

вычислительных затрат, ограничивающих их применение для параметрических исследований и сценарного анализа закачки CO_2 .

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка математических моделей, асимптотических решений и вычислительных подходов для описания распространения гидравлических трещин в слоистых поропругих средах и интерфейсных трещин с учетом термoporoppyrux эффеkтов при затратах, приемлемых для параметрических исследований и инженерных приложений. Для достижения цели решены следующие задачи:

- Разработать асимптотическое решение для полубесконечной гидравлической трещины, пересекающей слои с различными сжимающими напряжениями, оценить размер области его применимости и расширить ее с помощью коэффициента релаксации напряжений.
- Модифицировать модель *planar 3D* на основе неявного множества уровня для использования построенной асимптотики в качестве условия распространения, а коэффициент релаксации обобщить на случай трещины конечных размеров с произвольным расположением слоев. Провести верификацию и валидацию модели и исследовать влияние разрешения сетки на точность предсказываемой геометрии трещины.
- Исследовать влияние наклона скважины на геометрию системы одновременно распространяющихся гидравлических трещин.
- Разработать модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня, учитывающую трехмерный характер ее распространения, термoporoppyrux деформирование системы «обсадная колонна — цемент — порода» и начальное напряженное состояние, обусловленное строительством скважины и гидратацией цемента.
- Провести анализ чувствительности гидравлического отслоения к условиям нагружения и выявить основные факторы, определяющие риск его возникновения как потенциального пути утечки CO_2 .

Научная новизна. Впервые построены два асимптотических решения для полубесконечной гидравлической трещины с учетом слоистости по сжимающим напряжениям: с поправкой трещиностойкости и на основе аппроксимации интегральной формулировки обыкновенным дифференциальным уравнением. Первое сохраняет форму универсальной асимптотики и остается точным в режиме доминирующей трещиностойкости, второе точно во всех режимах при затратах, приемлемых для алгоритмов отслеживания фронта. Получена оценка размера окрестности вершины, в которой эти решения справедливы, и показано, что она сокращается по мере удаления фронта от границы слоя. Для ее расширения введен коэффициент релаксации напряжений. Разработана модификация модели ГПП *planar 3D* на основе алгоритма неявного множества уровня, использующая построенную асимптотику в качестве условия распространения, что существенно повышает точность моделирования в слоистой среде, особенно на грубых сетках. Коэффициент релаксации напряжений обобщен на случай трещины конечных размеров и не зависит от количества и расположения слоев.

Разработана трехмерная модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня при закачке CO_2 , учитывающая термопорупругое деформирование околоскважинной области и начальное напряженное состояние после строительства скважины и гидратации цемента. Задача сведена к последовательности двумерных задач в сечениях скважины, сопряженных с моделью вертикального распространения, что сохраняет трехмерный характер роста трещины при затратах, приемлемых для параметрических исследований. Выявлены три характерных режима раскрытия трещины в поперечном сечении: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение с немонотонным раскрытием и полное отслоение. Переходы между режимами носят скачкообразный характер, чувствительный к условиям нагружения, что позволило определить практические индикаторы эволюции трещины по промысловым данным. Установлено, что ползучесть горной породы качественно меняет взаимодействие трещины со слоистостью пласта: без ее учета трещина ускоряется при пересечении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями, а при полной релаксации напряжений останавливается на них. Закачка холодной жидкости и снижение пластовой температуры повышают риск отслоения, а рост порового давления его снижает.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в развитии асимптотических и вычислительных методов моделирования гидравлических трещин в слоистых порупругих средах, а также в построении модели интерфейсной трещины гидравлического отслоения цементного камня при закачке CO_2 и выявлении качественных закономерностей ее развития под действием термопорупругих эффектов. С практической точки зрения разработанные модели и вычислительные подходы применимы в задачах проектирования операций гидравлического разрыва пласта в слоистых пластах, включая многостадийный гидроразрыв на наклонных скважинах, и в задачах обеспечения долгосрочной герметичности скважин при закачке CO_2 . Разработанная модель включена в состав российского симулятора гидроразрыва пласта «Кибер-ГРП» в качестве ключевой расчетной модели распространения плоских трещин.

Методология и методы исследования. Математические постановки задач сформулированы в рамках аппарата механики сплошных сред на основе теории термопорупругости, линейной механики разрушения и теории смазочного течения жидкости. Использованы методы асимптотического анализа окрестности вершины гидравлической трещины, метод разрывных смещений, метод конечных объемов и метод конечных элементов, а также численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы:

- Разработана и реализована в виде эффективного численного алгоритма модель развития плоской трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП) на основе алгоритма неявного отслеживания фронта трещины

- (ILSA) с учетом слоистости среды по сжимающим напряжениям.
- Для решения задачи моделирования впервые построено асимптотическое решение для полубесконечной трещины ГРП, распространяющейся в проницаемой упругой среде со слоистостью по сжимающим напряжениям, а также предложен подход коэффициента релаксации напряжений, позволяющий расширить область, в которой разработанное асимптотическое решение остается справедливым.
 - Построенная модель валидирована на точных решениях и лабораторных экспериментах и включена в качестве ключевой расчетной модели в состав российского симулятора гидроразрыва пласта «Кибер-ГРП».
 - Разработана трехмерная модель гидравлического отслоения цементного камня от обсадной колонны при закачке CO_2 в пласт. Трехмерная задача решена через сопряжение последовательности решений двумерных задач термопороупругости в поперечных сечениях скважины с одномерной моделью развития трещины гидроразрыва вдоль скважины.
 - Выявлены три характерных режима профиля раскрытия трещины гидравлического отслоения цементного камня в поперечном сечении скважины и практические индикаторы их реализации по промысловым данным закачки. Установлены закономерности влияния ползучести горной породы, температуры закачиваемой жидкости, порового давления и температуры пласта на риск отслоения.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечивается использованием общепринятых уравнений и определяющих соотношений механики сплошных сред, строгих математических методов и апробированных численных алгоритмов. Верификация разработанных программных реализаций проведена путем сравнения с эталонными аналитическими решениями и анализа сходимости при измельчении расчетной сетки. Валидация построенных моделей проведена путем сопоставления с опубликованными данными лабораторных экспериментов.

Представленные результаты докладывались и обсуждались на конференциях: Всероссийская конференция с международным участием и школа молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л. В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, 2019); The international workshop “Coupled thermo-hydro-mechanical problems of fracture mechanics” (Novosibirsk, 2019); XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019); VI Всероссийская научная конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Севастополь, 2021); The international workshop “Reservoir simulation for geological carbon storage studies and reservoir safety” (Shanghai, 2024, 2025).

Результаты обсуждались на открытом заседании Ученого совета ИГиЛ СО РАН (2023 г.) и на научных семинарах под руководством д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманыюка Е. В. (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. Коробейникова С. Н. и д.ф.-м.н. Шутова А. В.

(ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. Головина С. В. («Газпромнефть НТЦ» и НГУ).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, базы данных Web of Science и Scopus [1–5]. Получен патент на изобретение [6] и два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [7; 8].

Личный вклад автора. Публикация [1] выполнена автором единолично. В работах [2–5] автором выполнена программная реализация моделей. В работе [2] разработана и верифицирована модель разрушения цементного камня, выполнены расчеты и анализ результатов. В статье [3] построено асимптотическое решение с учетом слоистости по сжимающим напряжениям, введен коэффициент релаксации напряжений и проведен сравнительный анализ подходов. В работе [4] алгоритм ILSA обобщен для использования построенной асимптотики в качестве условия распространения, коэффициент релаксации — на случай трещины конечных размеров, выполнены верификация и валидация алгоритма, исследована чувствительность геометрии трещины к размеру сетки. В статье [5] построена трехмерная модель отслоения, проведены параметрические исследования и установлены закономерности влияния условий закачки и состояния пласта на риск отслоения. Постановка задач, выбор методов решения, обсуждение и физическая интерпретация результатов, а также подготовка публикаций и докладов выполнены совместно с соавторами.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 247 страниц, включая 71 рисунок и 12 таблиц. Список литературы содержит 218 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы (проект № 14.581.21.0027, 2017–2020 гг.), мегагранта Минобрнауки России (№ 14.W03.31.0002, 2017–2021 гг.), а также гранта Минобрнауки России на проведение исследований совместно с организациями Китайской Народной Республики (№ 075-15-2023-588, 2023–2025 гг.).

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, показана степень разработанности по теме исследования, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, охарактеризованы новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована достоверность и приведена апробация результатов.

В **первой главе** рассмотрены две прикладные задачи, объединяемые единой постановкой о распространении гидравлической трещины в предварительно напряженной слоистой пороупругой среде: гидравлический разрыв пласта и гидравлическое отслоение цементного камня обсаженной скважины при закачке CO_2 . Приведен обзор исследований по моделированию ГРП, асимптотическому

поведению вблизи вершины трещины и целостности обсаженной скважины. Выявлены нерешенные вопросы и сформулированы задачи исследования.

Во **второй главе** рассматривается задача о полубесконечной трещине гидравлического разрыва, распространяющейся с постоянной скоростью V в условиях плоской деформации через слои с различными сжимающими напряжениями. В **параграфе 2.1** приведена постановка задачи в однородной среде. Для описания задачи вводятся сопутствующая координата s с началом в вершине трещины и приведенные параметры $E' = E/(1 - \nu^2)$, $K' = \sqrt{32/\pi} K_{\text{Ic}}$, $C' = 2C_L$, $\mu' = 12\mu$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, K_{Ic} — трещиностойкость, C_L — коэффициент утечек, μ — динамическая вязкость жидкости. Совместное рассмотрение уравнения смазочного течения, условия распространения трещины и уравнения упругости приводит к несингулярной интегральной формулировке относительно раскрытия $w(s)$.

Предполагается, что сжимающее напряжение в пласте имеет кусочно-постоянное распределение, s_j — положения границ слоев, $\Delta\sigma_j$ — амплитуда j -го скачка напряжений. Формулировка с учетом слоистости по сжимающим напряжениям в безразмерных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{E'w}{K's^{1/2}}, \chi = \frac{2C'E'}{V^{1/2}K'}, l = \left(\frac{K'^3}{\mu'E'^2V} \right)^2, \tilde{s} = \left(\frac{s}{l} \right)^{1/2}, \Delta\Sigma_j = \frac{\Delta\sigma_j l^{1/2}}{K'}, \\ \tilde{w}(\tilde{s}) &= 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G\left(\frac{\tilde{x}'}{\tilde{s}}\right) \left[\frac{1}{\tilde{w}(\tilde{x}')^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{x}')^3} \right] d\tilde{x}' + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^n \Delta\Sigma_j \tilde{s}_j G\left(\frac{\tilde{s}_j}{\tilde{s}}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где G — несингулярное интегральное ядро. Первые три слагаемых в правой части (1) отвечают предельным режимам доминирующей трещиностойкости (k), доминирующей вязкости (m) и доминирующих утечек ($\tilde{m}$), четвертое — вкладу слоистости. Универсальная асимптотика [Dontsov E., Peirce A., 2015], применяемая в качестве условия распространения в современных симуляторах гидроразрыва, представляет собой приближенное решение уравнения (1) без учета последнего слагаемого, то есть построена для однородной по напряжениям среды:

$$\frac{s^2 V \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left(\frac{K' s^{1/2}}{E' w}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w V^{1/2}} \right), \quad (2)$$

где g_δ — известная функция, аргументами которой служат безразмерные комплексы трещиностойкости и утечек.

В **параграфе 2.2** рассмотрена проблема пересечения фронтом трещины границ между слоями. Алгоритм неявного множества уровня ILSA [Peirce A., Detournay E., 2008] определяет расстояние от опорного элемента до фронта по асимптотическому решению, поэтому расположенная между опорным и концевым элементами граница слоев полностью игнорируется. Показано, что это порождает численные артефакты: концевые элементы вблизи границ слоев приобретают раскрытие, существенно превышающее раскрытие соседних элементов того же слоя, а высота трещины оказывается завышенной. Ошибка имеет

порядок размера элемента расчетной сетки, вследствие чего проблема наиболее критична на грубых сетках, характерных для инженерных приложений.

В **параграфе 2.3** предложены подходы к учету слоистости по сжимающим напряжениям. В качестве эталона точности используется прямое численное решение интегрального уравнения (1). Такой подход обладает высокой вычислительной стоимостью, а получить приближенное решение уравнения (1) способом, аналогичным построению универсальной асимптотики, не представляется возможным [Dontsov E.V., 2017].

Первое из построенных асимптотических решений сохраняет форму универсальной асимптотики (2), заменяя в ней постоянную трещиностойкость K' на эффективную трещиностойкость $K'_{\text{eff}}(s)$, учитывающую влияние границ слоев. Отбрасывание в (1) слагаемых, отвечающих за вязкую диссипацию и утечки, дает раскрытие $w_{\text{eff}}(s)$ в режиме доминирующей трещиностойкости, с помощью которого определяется эффективная трещиностойкость:

$$K'_{\text{eff}}(s) = \frac{w_{\text{eff}}(s)E'}{s^{1/2}}, \quad \frac{s^2 V \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left(\frac{K'_{\text{eff}}(s) s^{1/2}}{E' w}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w V^{1/2}} \right). \quad (3)$$

Показано, что условие $K'_{\text{eff}}(s) > 0$ накладывает ограничение на амплитуды скачков напряжений $\sum_{j=1}^n \Delta \sigma_j F(s, s_j) / s^{1/2} < \pi K' / 4$, которое фактически ограничивает величину отрицательных скачков. Вычислительная сложность подхода близка к сложности стандартной универсальной асимптотики, а решение является точным только в режиме доминирующей трещиностойкости.

Второе построенное решение основано на аппроксимации несингулярной интегральной формулировки обыкновенным дифференциальным уравнением. Дифференцирование (1) с использованием приближения $\tilde{w} \approx \tilde{s}^\delta$ приводит к задаче Коши, правая часть которой содержит производную ядра G' , имеющую особенность при $\tilde{s} = \tilde{s}_j$. Особенность устраняется заменой переменной $\hat{w} = \tilde{w} - G_\Sigma(\tilde{s})$, где $G_\Sigma(\tilde{s}) = (4/\pi) \sum_{j=1}^n \Delta \Sigma_j \tilde{s}_j G(\tilde{s}_j/\tilde{s})$, после чего задача принимает несингулярный вид

$$\frac{d\hat{w}}{d\tilde{s}} = \frac{\beta_m^3}{3(\hat{w} + G_\Sigma)^2} + \frac{\chi \beta_m^4}{4(\hat{w} + G_\Sigma)^3}, \quad \hat{w}(0) = 1, \quad (4)$$

где $\beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6}$ и $\beta_{\tilde{m}} = 4/(15(\sqrt{2} - 1))^{1/4}$. В отсутствие скачков напряжений уравнение (4) допускает разделение переменных и приводит к универсальной асимптотике. В отличие от решения с поправкой трещиностойкости, первые два слагаемых в правой части (4) позволяют учитывать влияние слоев не только в режиме доминирующей трещиностойкости, но и при существенном влиянии вязкости и утечек, причем ограничений на $\Delta \Sigma_j$ не требуется.

В **параграфе 2.4** проведено сравнение построенных решений с численным решением интегрального уравнения в k и m -режимах при умеренном уровне утечек $\chi = 1$. Чтобы различать слабые и сильные амплитуды скачка в разных режимах, введена относительная интенсивность скачка $\Delta S_j = 8 \Delta \Sigma_j \tilde{s}_j / (\pi \tilde{w}_0(\tilde{s}_j))$, где $\tilde{w}_0$ — раскрытие в случае однородного пласта.

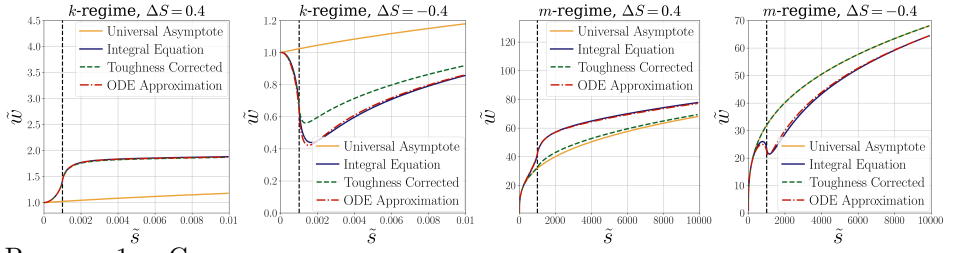


Рисунок 1 — Сравнение различных подходов для положительного и отрицательного скачков напряжений в k -режиме и m -режиме

Результаты сравнения приведены на рисунке 1. Установлено, что при положительном скачке напряжений ОДУ-аппроксимация неотличима от решения интегрального уравнения в обоих режимах, а погрешность не превышает 1%. Решение с поправкой трещиностойкости сохраняет сопоставимую точность лишь в k -режиме, тогда как в m -режиме, где значительна роль вязкости, его погрешность возрастает до 13–20%. При отрицательных скачках раскрытие становится немонотонным, и ОДУ-аппроксимация воспроизводит его количественно при умеренных амплитудах, с погрешностью до 2%, и качественно при больших, где погрешность достигает 7–15%. Решение с поправкой трещиностойкости занижает влияние отрицательного скачка, а в m -режиме практически нечувствительно к наличию слоя и совпадает с универсальным асимптотическим решением. По вычислительным затратам ОДУ-аппроксимация сопоставима с решением с поправкой трещиностойкости, тогда как численное решение интегрального уравнения на два порядка медленнее и для отслеживания фронта непригодно.

В параграфе 2.5 исследована область применимости построенных асимптотических решений на грубых сетках, определяемая размером окрестности вершины трещины, в которой асимптотика сохраняет приемлемую точность. Для оценки этого размера рассмотрена гидравлическая трещина высоты h в условиях плоской деформации при постоянном внутреннем давлении, пересекающая два симметричных барьера напряжений амплитуды $\Delta\sigma$, которые ограничивают продуктивный слой высоты H . Постоянство давления дает явное выражение для профиля раскрытия $\bar{w}_{ps}$ и отвечает режиму доминирующей трещиностойкости, в котором все построенные асимптотические решения совпадают. В безразмерных переменных $\bar{w} = E'w/(K_{Ic}H^{1/2})$, $\bar{h} = h/H$, $\bar{s} = s/H$ результаты зависят от единственного параметра $\Delta\bar{\sigma} = \Delta\sigma H^{1/2}/K_{Ic}$. Область применимости ρ_v определяется как отношение расстояния от вершины трещины, в пределах которого погрешность асимптотики не превышает 5%, к полувысоте трещины.

Установлено, что при $\Delta\bar{\sigma} = 2$ область применимости сокращается с 19% при $\bar{h} = 1$ до 4% при $\bar{h} = 3$. При малых амплитудах скачка она меняется слабо, при больших — резко уменьшается по мере удаления вершины трещины от границы слоя. Для расширения области применимости в асимптотическое решение вводится коэффициент релаксации напряжений $\lambda(\bar{\xi})$, эффективно

уменьшающий амплитуду скачка:

$$\bar{w}_a^\lambda(\bar{s}) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \bar{s}^{1/2} - \frac{4\lambda(\bar{\xi})\Delta\bar{\sigma}}{\pi} F(\bar{s}, \bar{\xi}), \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{h} - 1}{2}. \quad (5)$$

Значение $\lambda = 1$ отвечает решению без релаксации. Коэффициент релаксации минимизирует среднеквадратичное отклонение асимптотики от решения для трещины конечной высоты на отрезке длины L вблизи вершины, моделирующем размер элемента сетки. Установлено, что оптимальный коэффициент релаксации имеет вид

$$\lambda(\bar{\xi}) = \frac{0.7}{0.7 + \bar{\xi}}. \quad (6)$$

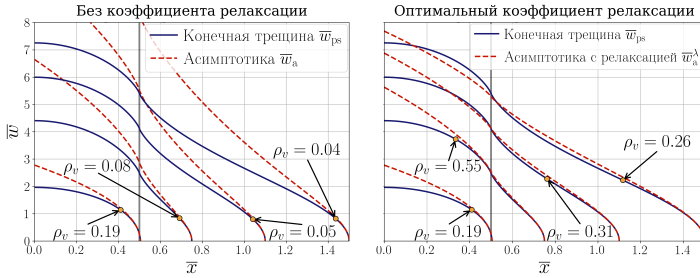


Рисунок 2 — Сравнение аналитического решения и асимптотики (5) без коэффициента релаксации (слева) и с оптимальным коэффициентом (справа)

Результаты применения коэффициента релаксации приведены на рисунке 2. Установлено, что для всех рассмотренных значений высоты трещины и амплитуды скачка область применимости не опускается ниже 19% против 4% без релаксации. Это позволяет использовать построенное асимптотическое решение на грубых сетках без существенной потери точности.

В **третьей главе** разработана модификация модели гидравлического разрыва пласта planar 3D на основе алгоритма неявного множества уровня (ILSA) [Dontsov E., Peirce A., 2017], использующая построенное во второй главе асимптотическое решение в качестве условия распространения.

В **параграфе 3.1** приведена постановка задачи о плоской трещине гидроразрыва, распространяющейся в плоскости (x, y) вследствие закачки несжимаемой ньютоновской жидкости с объемным расходом $Q(t)$ через точечный источник в начале координат. Минимальное сжимающее напряжение $\sigma_h(y)$ является кусочно-постоянной функцией. Давление жидкости p в трещине связано с раскрытием w гиперсингулярным интегральным уравнением упругости, а течение жидкости описывается уравнением смазки:

$$p(x, y, t) = \sigma_h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p \right) = Q(t) \delta(x, y) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}, \quad (8)$$

где $\mathcal{A}(t)$ — область, занимаемая трещиной, $t_0(x, y)$ — момент времени, в который фронт трещины достигает точки (x, y) . Условием распространения фронта служит асимптотическое решение в окрестности вершины трещины $w(s) \approx w_a(s)$, где s — расстояние до фронта трещины.

В параграфе 3.2 описан численный алгоритм ILSA. Для дискретизации уравнения упругости (7) используется метод разрывных смещений, а для уравнения смазки (8) — метод конечных объемов. Асимптотическое решение в алгоритме ILSA используется для решения двух взаимосвязанных задач. Во-первых, по известному раскрытию в опорных элементах, соседних с фронтом трещины, вычисляются расстояния до него, после чего фронт восстанавливается из решения уравнения эйконала. Во-вторых, по известному положению фронта асимптотическое решение интегрируется в его окрестности, что позволяет корректно определить распределение объема жидкости вблизи фронта.

В параграфе 3.3 основные компоненты алгоритма ILSA обобщены на случай многослойной среды. В разработанной модификации в качестве условия распространения используется ОДУ-аппроксимация (4). Для учета горизонтальных границ слоев выделяются три возможных направления распространения фронта: вверх, вниз и в горизонтальном направлении. Для каждого опорного элемента уравнение $w_a(s) = w^s$, где w^s — раскрытие в опорном элементе, решается три раза. Полученные значения расстояния используются в качестве краевых условий для уравнения эйконала, конечно-разностная схема для которого модифицирована для учета трех значений расстояния в различных направлениях.

При вычислении объема жидкости в концевом элементе для горизонтальной ориентации фронта используется универсальное асимптотическое решение w_a^u , а для вертикальной ориентации — асимптотическое решение с учетом слоистости по напряжениям w_a^σ . Для произвольного угла ориентации фронта α применяется интерполяция $w_a(s) = w_a^u(s) \cos^2 \alpha + w_a^\sigma(s) \sin^2 \alpha$. Объем жидкости для решения w_a^σ вычисляется прямым численным интегрированием решения ОДУ-аппроксимации.

Коэффициент релаксации напряжений (6), введенный в параграфе 2.5, получен для режима доминирующей трещиностойкости и явно зависит от высоты центрального слоя H , которая не имеет однозначного определения в случае произвольной конфигурации слоев. Поэтому предложен коэффициент релаксации, определяемый через размер элемента сетки:

$$\lambda_k(\xi) = \max(0, 1 - \xi/(k\Delta y)), \quad (9)$$

где ξ — расстояние от вершины трещины до границы слоя, а параметр k определяет длину области релаксации. Для определения оптимального значения k рассматривается задача о трещине с симметричными барьерами напряжений при независимом варьировании вязкости жидкости, трещиностойкости породы и величины скачка напряжений (рисунок 3).

Установлено, что для большинства значений параметров минимум погрешности достигается при $k = 3$. В отличие от коэффициента (6), полученный

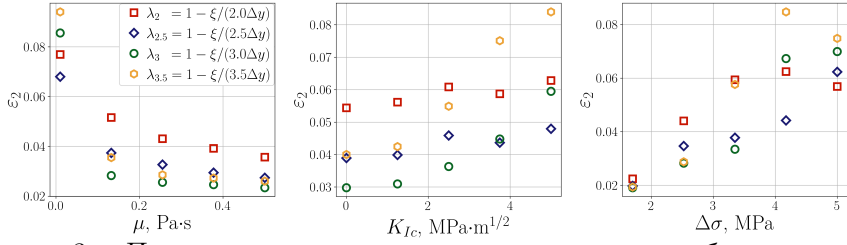


Рисунок 3 — Погрешность расчета высоты трещины на грубых сетках при различных k в зависимости от μ , K_{IC} и $\Delta\sigma$

коэффициент релаксации λ_3 откалиброван для различных режимов распространения трещины и не зависит от количества и расположения слоев.

В **параграфе 3.4** выполнена верификация алгоритма на аналитических решениях для радиальной гидравлической трещины и валидация на экспериментальных данных [Wu R., Bungler A., Jeffrey R., et al., 2008] по распространению гидравлической трещины в плоскости контакта блоков из полиметилметакрилата со слоистостью по сжимающим напряжениям.

В **параграфе 3.5** исследовано влияние размера элементов расчетной сетки на геометрию трещины, поскольку основная цель использования асимптотического решения с учетом слоистости по напряжениям заключается в повышении точности расчетов на грубых сетках. Наиболее наглядно это проявляется в задаче о прорыве тонкой перемычки с повышенными сжимающими напряжениями (рисунок 4, n — число элементов сетки по толщине перемычки), где момент прорыва перемычки при использовании универсального асимптотического решения существенно зависит от размера сетки. Напротив, в случае асимптотического решения с релаксацией напряжений как эволюция высоты трещины, так и момент прорыва перемычки практически не зависят от размера сетки. Аналогичное повышение точности показано для трещины постоянной высоты и для умеренных барьеров напряжений.

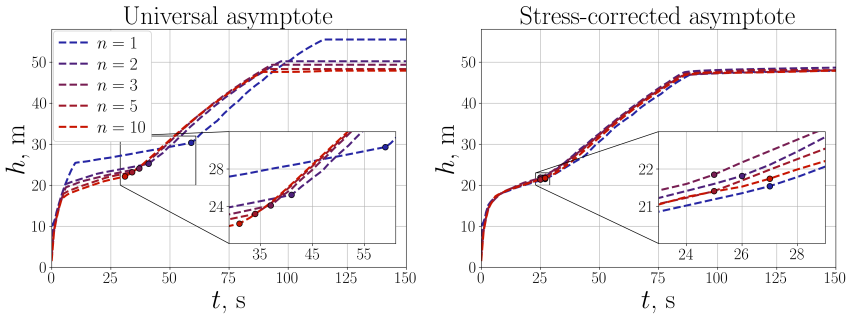


Рисунок 4 — Высота трещины при прорыве перемычки на различных сетках: универсальная асимптотика (слева) и асимптотика с релаксацией (справа)

В **параграфе 3.6** разработанная модель применена к задаче одновременного распространения нескольких параллельных гидравлических трещин

вдоль наклонной скважины. Рассмотрен предельный случай равномерного распределения расхода жидкости между трещинами, соответствующий высокому гидравлическому сопротивлению перфораций. В модели не учитываются касательные разрывы смещений, а дополнительное сжимающее напряжение, создаваемое соседними трещинами, вычисляется по их раскрытию с предыдущего шага по времени, что позволяет использовать алгоритм для одиночной трещины без изменений. Пренебрежение касательными разрывами смещений обосновано аналитической оценкой отбрасываемых слагаемых: уменьшение эффективной жесткости отдельной трещины не превышает 13.5%, а влияние на механическое взаимодействие между различными трещинами не превышает 3.7%. Показано, что при отсутствии наклона скважины трещины сохраняют симметричную форму, близкую к радиальной, тогда как наклон скважины и связанное с ним горизонтальное смещение точек закачки приводят к формированию существенно асимметричных трещин.

В **четвертой главе** разработана трехмерная модель гидравлического отслоения цементного камня обсаженной скважины при закачке CO_2 в пласт.

В **параграфе 4.1** приведена постановка задачи. Рассматривается вертикальная обсаженная и зацементированная скважина, в которой трещина отслоения инициируется вблизи перфораций и распространяется вдоль одной из границ цементного камня. Обсадная колонна моделируется как термоупругий материал, цементный камень и слоистая горная порода — как термопорупругие среды. Учитываются анизотропия пластовых напряжений и эксцентриситет обсадной колонны. Каждое поперечное сечение скважины рассматривается в приближении плоской деформации. Закачиваемая жидкость считается однофазной, ньютоновской и несжимаемой.

Начальное напряженное состояние определяется в рамках многостадийного анализа нагружения, отслеживающего эволюцию напряжений от строительства скважины до эксплуатации. Рассмотрены два предельных сценария, ограничивающих диапазон возможных состояний. Сценарий без учета ползучести последовательно включает стадии цементирования, остаточной объемной усадки цемента после схватывания и эксплуатационного нагружения, что соответствует нижней границе сжимающих напряжений в цементном камне. В сценарии предельной ползучести возмущения, вызванные бурением и усадкой цемента, релаксируют к среднему гидростатическому уровню пластовых напряжений, что соответствует теоретической верхней границе.

В **параграфе 4.2** сформулирована модель, описывающая распространение трещины вдоль скважины с помощью усредненного уравнения смазки:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial z} = \frac{Q_{\text{inj}}}{2\pi R} \delta(z - z_{\text{perf}}) - \bar{q}_L, \quad (10)$$

$$\bar{q}_z = -\Lambda \frac{\bar{w}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho g \right), \quad \Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega^3 d\theta, \quad (11)$$

где $\bar{w}(z)$ — среднее по азимуту раскрытие трещины, функция Ω задает форму

профиля раскрытия в поперечном сечении, Λ — безразмерная гидравлическая проводимость, R — радиус границы отслоения, Q_{inj} — расход жидкости, поступающей в трещину через перфорации на глубине z_{perf} , p_f — давление жидкости в трещине, μ и ρ — вязкость и плотность закачиваемой жидкости. Утечки жидкости в цемент и породу линейно зависят от давления: $\bar{q}_L = \mathcal{L}_1 p_f + \mathcal{L}_0$. Давление жидкости в трещине определяется в каждом сечении в приближении локальной упругости:

$$p_f = \sigma_0 \Sigma_n + C_0 \Pi \bar{w}, \quad (12)$$

где Σ_n и Π — безразмерные нормальное напряжение и коэффициент упругости, определяемые из решения задачи в сечении, σ_0 и C_0 — характерные сжимающее напряжение и жесткость трещины. В работе получено обобщение энергетического условия распространения [Sarvaramini E., Garagash D.I., 2015] для плоской трещины на случай трещины с цилиндрической геометрией:

$$p_f^{\text{tip}} - \sigma_0 \Sigma_n^{\text{tip}} = \sqrt{\frac{C_0 \Pi^{\text{tip}} \gamma^{\text{tip}} G_c}{\pi}}, \quad \bar{w}^{\text{tip}} = \sqrt{\frac{\gamma^{\text{tip}} G_c}{\pi C_0 \Pi^{\text{tip}}}}, \quad (13)$$

где G_c — критическая скорость высвобождения энергии, γ — угол дуги трещины в поперечном сечении скважины.

Деформирование системы «обсадная колонна — цемент — порода» в каждом поперечном сечении описывается уравнениями термопорупругости:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon} - b(p - p^0) \mathbf{I} - 3\alpha_s K(T - T^0) \mathbf{I}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - 3\alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{k}{\eta} \nabla p \right), \quad (15)$$

$$C_m \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\kappa \nabla T), \quad (16)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0$ — начальное напряжение, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, p и T — поровое давление и температура, p^0 и T^0 — их начальные значения, λ и G — параметры Ламе, K — модуль объемного сжатия скелета, b и M — коэффициент и модуль Био, α_s и α_m — коэффициенты термического расширения скелета и насыщенной среды, k — проницаемость, η — вязкость поровой жидкости, C_m — объемная теплоемкость, κ — теплопроводность. На внутренней поверхности обсадной колонны задаются давление и температура закачиваемой жидкости, на внешней границе — пластовые напряжения, поровое давление и температура, на берегах трещины — давление жидкости p_f . Распространение трещины в азимутальном направлении описывается моделью зоны сцепления.

Ключевым элементом разработанного подхода является алгоритм сопряжения модели вертикального распространения трещины вдоль ствола скважины и термопорупругой задачи в ее поперечных сечениях. Модель вертикального распространения описывает рост трещины и распределение среднего раскрытия $\bar{w}(z)$ вдоль скважины. Для этого ей требуются гидравлическая проводимость Λ в (11), связь давления с раскрытием (12) и закон утечек

$\bar{q}c = \mathcal{L}_1 p_f + \mathcal{L}_0$. Эти соотношения определяются из решения термопорупругой задачи, которое вычисляется независимо в каждом сечении. В качестве граничного условия в сечении задается объем трещины $2\pi R\bar{w}(z)$, найденный в модели вертикального распространения, а давление жидкости в трещине является неизвестной величиной. По полученным в сечении полям напряжений, перемещений, порового давления, температуры и профилю раскрытия вычисляются коэффициенты Λ , Σ_n , Π , $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$. Они используются в модели вертикального распространения на следующем шаге по времени.

В параграфе 4.3 описана численная схема. Для уравнений распространения трещины вдоль ствола скважины используется метод конечных объемов. Среднее раскрытие в окрестности вершины трещины задается асимптотикой $\bar{w}_a(s) = (As + B)^{1/3}$, где s — расстояние до фронта, а коэффициенты A и B и положение фронта определяются из условия (13) и сохранения объема жидкости в концевом и опорном элементах. Для нелинейной термопорупругой задачи в сечениях применяется метод конечных элементов.

В параграфе 4.4 приведены результаты численных экспериментов. Выполнена верификация модели на аналитических решениях для гидравлической трещины постоянной высоты и на аналитическом осесимметричном решении термопорупругой задачи при полном отслоении, а также установлена сходимость сопряженного алгоритма при измельчении расчетной сетки.

Исследовано влияние начального напряженного состояния на риск инициации отслоения. Установлено, что эффект объемной усадки цемента определяется соотношением жесткостей цемента и породы. Если цемент мягче породы, усадка снижает сжатие на обеих границах цементного камня. Если цемент жестче породы, сжатие на внешней границе также снижается, тогда как на границе «обсадная колонна — цемент» оно возрастает. Показано также, что высокое давление продавочной жидкости повышает риск отслоения, а высокое давление цементного раствора снижает его.

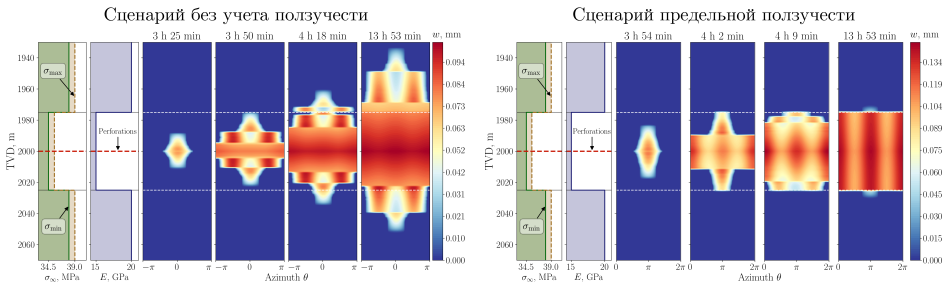


Рисунок 5 — Раскрытие трещины отслоения $w(z, \theta)$ в слоистом пласте: без учета ползучести (слева) и в сценарии предельной ползучести (справа)

Рассмотрено распространение отслоения в слоистом пласте, центральный слой которого ограничен сверху и снизу слоями с более высокими сжимающими напряжениями и модулем Юнга (рисунок 5). Установлено, что ползучесть горной породы качественно меняет взаимодействие трещины со слоистостью пласта.

В сценарии без учета ползучести трещина, вопреки ожиданию, ускоряется при пересечении границ слоев с высокими сжимающими напряжениями, поскольку в этом сценарии сжатие на границах цементного камня определяется главным образом условиями цементирования, а в верхнем и нижнем слоях оно ниже, чем в центральном, вследствие контраста упругих свойств. В сценарии предельной ползучести сжатие на границах цементного камня определяется преимущественно пластовыми напряжениями, и трещина останавливается на границах слоев.

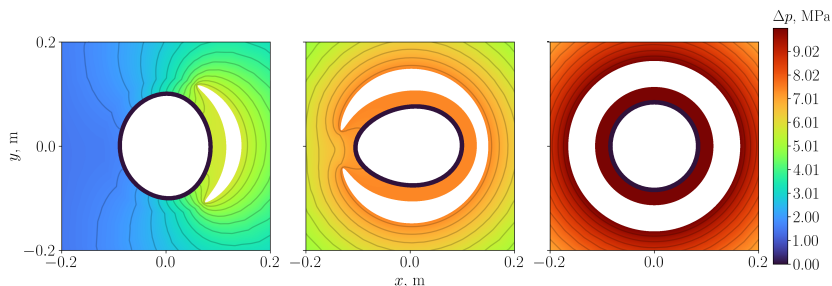


Рисунок 6 — Три характерных режима трещины гидравлического отслоения: изменение порового давления в сечении скважины

Выявлены три характерных режима профиля раскрытия трещины гидравлического отслоения в поперечном сечении скважины, которые последовательно сменяют друг друга по мере роста угла дуги трещины (рисунок 6). На начальной стадии реализуется режим серповидного частичного отслоения: угол дуги трещины меньше π , а раскрытие максимально в направлении минимального горизонтального напряжения. Когда угол дуги превышает π , происходит скачкообразный переход к режиму развитого неполного отслоения, в котором профиль раскрытия становится немонотонным. Когда трещина охватывает всю границу цементного камня, профиль раскрытия вновь скачкообразно меняется, что соответствует режиму полного отслоения.

На основе выявленных режимов установлены практические индикаторы эволюции трещины по промысловым данным. При закачке с заданным давлением контролируется расход, который возрастает с ростом угла дуги, отражая увеличение приемистости трещины. При закачке с заданным расходом контролируется давление, которое убывает, поскольку рост трещины снижает ее гидравлическое сопротивление. Резкие изменения расхода или давления могут указывать на переходы между режимами отслоения.

В **параграфе 4.5** проведен анализ чувствительности гидравлического отслоения к условиям нагружения. Установлено, что при закачке холодной жидкости граница «обсадная колонна — цемент» охлаждается быстро благодаря высокой теплопроводности стали, а граница «цемент — порода» — позднее из-за низкой теплопроводности цемента, поэтому риск отслоения повышается на первой границе на раннем этапе закачки, а на второй — на позднем. Для длительной закачки CO_2 рассмотрена эволюция пластовых условий. Показано, что рост порового давления увеличивает сжатие на границах цементного

камня и снижает риск отслоения, тогда как снижение пластовой температуры уменьшает сжатие и повышает риск отслоения. Также показано, что анизотропия пластовых напряжений и эксцентриситет обсадной колонны влияют на распределение нормальных напряжений на границах цементного камня, а также на азимут и границу инициации отслоения.

В **параграфе 4.6** выполнена количественная оценка влияния факторов, не учитываемых в модели: многофазного течения в зоне проникновения CO_2 в пласт, конвективного теплопереноса вдоль трещины и эффекта Джоуля — Томсона. Показано, что влияние этих факторов невелико и модель применима для прогнозирования распространения трещины.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Рассмотрены три подхода к построению асимптотического решения для полубесконечной трещины ГРП с учетом слоистости по сжимающим напряжениям. Разработаны решение с поправкой трещиностойкости и аппроксимация интегральной формулировки обыкновенным дифференциальным уравнением, а численное решение интегрального уравнения использовано в качестве эталона точности. Показано, что область применимости асимптотики сокращается по мере удаления фронта трещины от границы слоя. Для ее расширения введен коэффициент релаксации напряжений.

2. Разработана модификация модели *planar 3D ILSA*, использующая построенное асимптотическое решение в качестве условия распространения. Основные компоненты алгоритма и коэффициент релаксации напряжений обобщены на случай многослойной среды и трещины конечных размеров соответственно. Показано, что предложенные модификации существенно повышают точность алгоритма *ILSA* на грубых сетках.

3. Рассмотрена задача одновременного распространения нескольких трещин вдоль наклонной скважины. Пренебрежение касательными разрывами смещений обосновано аналитической оценкой: уменьшение эффективной жесткости отдельной трещины не превышает 13.5%, а влияние на механическое взаимодействие трещин не превышает 3.7%. Показано, что наклон скважины приводит к формированию существенно асимметричных трещин.

4. Разработана трехмерная модель интерфейсной трещины гидравлического отслоения на границах цементного камня при закачке CO_2 . Модель учитывает термoporоупругое деформирование системы «обсадная колонна — цемент — порода» и начальное напряженное состояние в двух предельных сценариях жизненного цикла скважины. Трехмерная задача сведена к последовательности двумерных задач в сечениях скважины, сопряженных с моделью вертикального распространения, что обеспечивает вычислительные затраты, приемлемые для параметрических исследований.

5. Обнаружены три характерных режима трещины гидравлического отслоения в поперечном сечении скважины: серповидное частичное отслоение, развитое неполное отслоение с немонотонным раскрытием и полное отслоение. Выявлены практические индикаторы их реализации по промысловым

данным закачки. Установлено, что ползучесть горной породы качественно меняет взаимодействие трещины со слоистостью пласта. Снижение пластовой температуры при долговременной закачке CO₂ увеличивает риск отслоения, а рост порового давления его снижает.

Публикации автора по теме диссертации

1. Valov A.V. On the simultaneous growth of multiple hydraulic fractures emanating from an inclined well // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 2057, no. 1. — P. 012079.
2. Valov A.V., Golovin S.V., Shcherbakov V.V., Kuznetsov D.S. Thermoporoelastic model for the cement sheath failure in a cased and cemented wellbore // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2022. — Vol. 210. — P. 109916.
3. Valov A.V., Dontsov E.V. On the layer crossing problem for a semi-infinite hydraulic fracture // Engineering Fracture Mechanics. — 2023. — Vol. 293. — P. 109730.
4. Valov A.V., Dontsov E.V., Baykin A.N., Golovin S.V. An implicit level set algorithm for hydraulic fracturing with a stress-layer asymptote // Engineering Fracture Mechanics. — 2023. — Vol. 292. — P. 109662.
5. Valov A.V., Dontsov E.V., Zhang F. Thermoporoelastic model for fluid-driven debonding of cement during CO₂ injection in a vertical well // Geomechanics for Energy and the Environment. — 2026. — P. 100785.
6. Способ определения геометрии трещин ГРП с учётом разделения и взаимодействия потоков жидкости ГРП между трещинами : патент на изобретение 2786303 С1 RU / Е.В. Шель, А.В. Валов, А.Н. Байкин, В.В. Неверов, С.В. Головин, С.А. Боронин, Д.Ю. Дербышев, А.А. Осипцов ; ООО «Газпромнефть-Технологические партнерства» (RU). — Заявл. 19.12.2022.
7. Модуль расчёта многостадийного ГРП в слоистой по сжимающим напряжениям среде в рамках модели Planar 3D ILSA : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020611805 RU / С.В. Головин, А.В. Валов, А.Н. Байкин, Е.В. Донцов, А.М. Гурин, П.В. Ковтуненко, А.М. Скопинцев, Г.В. Падерин, Е.В. Шель ; ООО «Газпромнефть Научно-Технический Центр» (RU). — Заявл. 11.02.2020.
8. Модуль расчета геометрии плоской трещины ГРП в слоистой по сжимающим напряжениям среде по модели Planar 3D ILSA : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020611608 RU / С.В. Головин, А.В. Валов, А.Н. Байкин, Е.В. Донцов, А.М. Гурин, П.В. Ковтуненко, А.М. Скопинцев, Г.В. Падерин, Е.В. Шель ; ООО «Газпромнефть Научно-Технический Центр» (RU). — Заявл. 05.02.2020.

Валов Александр Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ТРЕЩИН В СЛОИСТЫХ
ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 29.09.2026. Заказ № 326
Формат 60×84/16. Объем 1.3 п.л. Тираж 90 экз.

Отпечатано в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15