

УТВЕРЖДЕНА

Приказом № 32

от «02» августа 2023 г.

Принята Ученым советом ИГиЛ СО РАН  
Протокол № 8 от «30» июня 2023 г.

## ПРОГРАММА

кандидатского экзамена по специальной дисциплине

### **1.1.8 Механика деформируемого твердого тела**

(физико-математические науки, технические науки)

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: механика и термодинамика сплошных сред, теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, теория ползучести, механика разрушения, теория устойчивости, механика композиционных материалов, мезомеханика многоуровневых сред со структурой, вычислительная механика деформируемого твердого тела, экспериментальная механика деформируемого твердого тела.

### **1. Основы механики деформируемого твердого тела (МДТТ)**

Основные проблемы и практические приложения МДТТ в машиностроении, строительстве, судостроении и др. отраслях. Механические свойства твердых, жидких и газообразных сред. Описание структуры реальных тел на макро-, мезо- и микроуровнях. Феноменологическое описание модели сплошной среды. Понятие о напряжениях, деформациях, перемещениях и их полях.

Основные физико-механические свойства реальных сред (упругость, вязкость, пластичность), их влияние на сопротивление материалов деформированию и разрушению. Диаграммы деформирования и их аппроксимация при простых нагружениях. Влияние различных факторов (температуры, скорости деформирования либо нагружения, ползучести и релаксации, радиоактивного облучения, давления, цикличности и др. физических воздействий) на параметры диаграмм деформирования.

Основные принципы МДТТ: принцип детерминизма, принцип макроскопической определенности, принцип локального действия, принцип материальной объективности, принцип затухающей памяти, законы термодинамики.

### **2. Механика и термодинамика сплошных сред**

Элементы тензорного и векторного анализа. Понятие тензора. Ранг тензора. Скаляры, векторы, диады, полиады. Криволинейные координаты, базисные векторы ковариантного и контравариантного базисов. Контравариантные векторы и тензоры. Метрический или фундаментальный тензор. Операции с тензорами. Сложение и умножение тензоров. Скалярное произведение, двойное скалярное произведение, тензорное произведение. Симметрия тензоров, определитель тензора, обратный тензор, собственно ортогональный тензор. Ковариантное дифференцирование тензоров, градиент тензора. Дивергенция тензора. Теорема Гаусса - Остроградского для векторного и тензорного полей.

дифференцирование тензоров, градиент тензора. Дивергенция тензора. Теорема Гаусса - Остроградского для векторного и тензорного полей.

Кинематика деформирования. Лагранжевы и эйлеровы координаты. Лагранжев и эйлеров подходы. Закон движения. Переход от эйлерова описания к лагранжеву и обратно. Тензоры градиентов деформаций и перемещений. Объективные тензоры. Дифференцирование тензоров по времени.

Полярное разложение тензора градиента деформации. Тензоры деформаций Коши-Грина и Пиолы. Тензоры деформаций Грина-Лагранжа и Альманси. Геометрический смысл тензоров деформаций. Линейный тензор деформаций (тензор деформаций Коши). Вычисление тензора малых деформаций по заданному полю перемещений.

Классификация сил в механике сплошных сред: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Векторы Коши истинных и условных напряжений. Тензоры напряжений Коши и первый тензор напряжений Пиолы - Кирхгофа. Тензоры напряжений Кирхгофа и второй тензор напряжений Пиолы - Кирхгофа. Тензор напряжений Коши при бесконечно малой деформации материальной частицы. Мощность внутренних сил. Меры деформаций и напряжений, сопряжённые по мощности.

Законы сохранения механики сплошных сред: уравнения баланса массы, импульса, момента импульса, кинетической, потенциальной и полной энергии.

Термодинамические процессы и циклы. Термодинамические параметры состояния. Понятие о работе, теплоте, внутренней энергии, температуре и энтропии. Первый и второй законы термодинамики. Термодинамические потенциалы состояния. Общие формы определяющих соотношений механики сплошных сред.

### **3. Теория деформированного состояния**

Вектор перемещения. Относительное удлинение материального волокна и угловая деформация сдвига между ортогональными волокнами. Главные оси и главные деформации. Характеристическое уравнение для определения главных деформаций. Главные сдвиги. Модуль тензора деформаций. Круги деформаций Мора. Параметр вида деформированного состояния Надаи-Лоде. Процессы сложного и простого деформирования, тензор - девиатор и шаровой тензор малых нелинейных конечных деформаций. Направляющий тензор. Решение характеристического уравнения для определения главных деформаций в тригонометрической форме Кардана. Октаэдрические сдвиг и удлинение. Угол вида деформированного состояния и его связь с параметром Надаи - Лоде. Тензор малых линейных конечных деформаций Коши. Уравнения совместности линейных деформаций Сен-Венана. Тензор линейного поворота. Тензор скоростей деформаций. Векторное пространство деформаций Прагера и представление в нем тензора деформаций. Представление компонент тензоров деформаций в криволинейных координатах. Тензор дисторсии, понятие о тензоре изгиба-кручения.

### **4. Теория напряженного состояния**

Закон парности касательных напряжений и симметрия тензора напряжений. Преобразование компонент тензора напряжений. Главные оси и главные нормальные напряжения тензора. Характеристическое уравнение для определения главных напряжений. Инварианты тензора напряжений. Главные касательные напряжения. Геометрическая интерпретация тензора напряжений (эллипсоид напряжений Ламе, круги напряжений Мора, поверхность напряжений Коши). Параметр вида напряженного состояния Надаи-Лоде. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Их инварианты и модули. Модуль тензора напряжений. Интенсивность напряжений. Решение характеристического уравнения для определения главных напряжений в тригонометрической форме Кардана. Направляющий тензор. Простое и сложное нагружения. Напряжения на октаэдрических площадках. Угол вида напряженного состояния и его связь с параметром Надаи - Лоде. Векторное пространство напряжений Прагера и представление в нем тензора напряжений. Поле напряжений. Дифференциальные уравнения равновесия и движения частицы тела. Граничные и начальные условия Представления уравнений в криволинейных координатах (цилиндрических, сферических). Модель Коссера, понятие о моментных напряжениях.

## 5. Теория упругости

Термодинамика упругого деформирования. Упругий потенциал и дополнительная работа. Формулы Грина. Закон Гука. Связи между напряжениями и деформациями для изотропной и анизотропной сред. Симметрия матрицы упругих постоянных. Частные виды упругой анизотропии. Удельная потенциальная энергия деформации и удельная дополнительная работа линейно упругого тела. Соотношение между напряжениями и деформациями при изменении температуры для изотропного тела.

Основные уравнения теории упругости. Общая постановка задачи. Постановка задачи в напряжениях. Постановка задачи теории упругости в перемещениях. Дифференциальные уравнения равновесия и движения Ламе. Принцип Сен-Венана. Общие решения дифференциальных уравнений Коши, Максвелла и Мореры. Пространственные задачи теории упругости. Задача Буссинеска о действии сосредоточенной силы на полупространство. Задача Герца о сжатии упругих тел. Задача о вдавлении осесимметричного штампа.

Кручение стержней. Полуобратный метод Сен-Венана. Гармоническое уравнение и краевое условие для функции кручения. Решение задачи о кручении в напряжениях. Уравнение Пуассона и краевое условие для функции напряжений Прандтля. Мембранная аналогия Прандтля. Задачи о кручении стержней эллиптического, треугольного и прямоугольного поперечных сечений: вариационные принципы теории упругости.

Общие теоремы и вариационные принципы. Теорема Клапейрона. Теорема о единственности решения. Теорема Кастильяно. Теорема Бетти. Возможные перемещения и изменения напряженного состояния. Вариационные принципы Лагранжа, минимума потенциальной и дополнительной энергии, обобщенный принцип минимума потенциальной энергии Васидзу, принцип Рейснера.

Вариационные методы решения задач теории упругости: Релея-Ритца, Лагранжа, Бубнова - Галеркина.

Плоская задача теории упругости. Плоское напряженное состояние и плоская деформация. Основные уравнения в декартовых и полярных координатах. Метод решения плоских задач в напряжениях. Бигармоническое уравнение и граничные условия для функции напряжений. Частные решения плоских задач в декартовых и полярных координатах. Комплексное представление функции напряжений и компонент тензоров напряжений и деформации. Граничные условия. Решение частных задач.

Динамические задачи теории упругости. Уравнения движения в форме Ламе. Динамические, геометрические и кинематические условия совместности на волновом фронте. Свободные волны в неограниченной изотропной упругой среде. Общее решение в форме Ламе. Фундаментальное решение динамических уравнений теории упругости для пространства. Плоские гармонические волны. Коэффициенты отражения, прохождения и трансформации. Полное отражение. Поверхностные волны Релея. Волны Лява. Установившиеся колебания упругих тел. Частоты и формы собственных колебаний. Вариационный принцип Релея.

Теория тонких упругих пластин и оболочек. Основные гипотезы. Полная система уравнений теории пластин и оболочек. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория. Краевые эффекты. Задача о круглой симметрично нагруженной пластине.

Температурные задачи теории упругости. Уравнения термоупругости.

## 6. Теория пластичности

Пластическое деформирование твердых тел. Предел текучести. Упрочнение. Остаточные деформации. Идеальная пластичность. Физические механизмы пластического течения. Понятие о дислокациях. Локализация пластических деформаций. Линии Людерса-Чернова.

Идеальное упругопластическое тело. Идеальное жесткопластическое тело. Пространство напряжений. Критерий текучести и поверхность текучести. Критерии Треска и Мизеса. Пространство главных напряжений. Геометрическая интерпретация условий текучести. Условие полной пластичности. Влияние среднего напряжения.

Упрочняющееся упругопластическое тело. Упрочняющееся жесткопластическое тело. Параметры упрочнения.

Законы связи между напряженным и деформированным состояниями в теории течения. Принцип Мизеса. Постулат Дракера. Ассоциированный закон пластического течения. Теория скольжения. Краевые задачи теории течения. Теоремы единственности. Вариационные принципы теории течения.

Теория предельного равновесия. Статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия. Верхние и нижние оценки. Примеры.

Кручение призматического тела за пределом упругости. Предельное равновесие при кручении. Характеристики. Поверхность напряжений, как поверхность постоянного ската. Песчаная аналогия. Разрывы напряжений.

Песчано-мембранная аналогия Прандтля - Надаи для кручения идеально упругопластических тел.

Пластическое плоское деформированное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей. Статически определимые и неопределимые задачи. Характеристики. Свойства линий скольжения. Методы решения основных краевых задач теории плоской пластической деформации. Задача Прандтля о вдавливании штампа. Пластическое плоское напряженное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса. Характеристики.

Плоские упругопластические задачи теории идеальной пластичности. Двухосное растяжение толстой и тонкой пластин с круговым отверстием.

Деформационные теории пластичности. Теория Генки. Теория малых упруго пластических деформаций Ильюшина. Теорема о разгрузке. Метод упругих решений. Задача о толстостенной трубе из упрочняющегося материала.

Упругопластические волны в стержне. Ударное нагружение. Волна разгрузки. Остаточные деформации. Критическая скорость удара.

### **7. Теория вязкоупругости и ползучести**

Понятие о ползучести и релаксации. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модель Максвелла, модель Фойгта, модель Томсона. Время релаксации. Время запаздывания.

Определяющие соотношения теории вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации. Непрерывные ядра и ядра со слабой особенностью. Термодинамические ограничения на выбор ядер ползучести и релаксации.

Формулировка краевых задач теории вязкоупругости. Методы решения краевых задач теории вязкоупругости: принцип соответствия Вольтерры, применение интегрального преобразования Лапласа, численные методы. Теорема единственности.

Вариационные принципы в линейной вязкоупругости. Применение вариационного метода к задачам изгиба.

Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в вязкоупругую полуплоскость. Контакт вязкоупругих тел: аналог задачи Герца.

Определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости. Разложение Вольтерры - Фреше. Упрощенные одномерные модели.

Теории старения, течения, упрочнения и наследственности. Ползучесть при сложном напряженном состоянии. Определяющие соотношения.

Установившаяся ползучесть. Уравнения состояния деформируемых тел, находящихся в условиях установившейся ползучести. Постановка краевых задач. Вариационные принципы теории установившейся ползучести: принцип минимума полной мощности, принцип минимума дополнительного рассеяния. Установившаяся ползучесть и длительная прочность стержня.

Неустановившаяся ползучесть. Определяющие уравнения теории неустановившейся ползучести. Вариационные принципы теории течения и теории упрочнения. Неустановившаяся ползучесть стержневой решетки. Устойчивость стержней и пластин из реономных материалов.

## 8. Механика разрушения

Понятие о разрушении и прочности тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Вязкое и хрупкое разрушение. Концентраторы напряжений. Коэффициент концентрации напряжений: растяжение упругой полуплоскости с круговым и эллиптическим отверстиями.

Феноменологические теории прочности. Поверхность предельных состояний. Критерии прочности: силовой, деформационный, энергетический. Критерии длительной и усталостной прочности. Расчет прочности по допускаемым напряжениям. Коэффициент запаса прочности.

Двумерные задачи о трещинах в упругом теле. Методы теории аналитических функций. Формулы Колосова-Мухелишвили. Асимптотика полей напряжений и смещений в окрестности вершины трещины. Коэффициент интенсивности напряжений, методы его вычисления.

Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины в упругом теле. Энергетический подход Гриффитса в механике разрушения. Силовой подход в механике разрушения: модели Баренблатта и Ирвина. Эквивалентность подходов в случае хрупкого разрушения. Формула Ирвина.

$J$ -интеграл Черепанова - Райса и его инвариантность. Вычисление потока энергии в вершину трещины. Устойчивый и неустойчивый рост трещины,  $J_R$ -кривая.

Динамическое распространение трещин. Динамический коэффициент интенсивности напряжений. Предельная скорость трещины хрупкого разрушения (теоретическая оценка и экспериментальные данные).

Локализованное пластическое течение у вершины трещины. Оценка линейного размера пластической зоны у вершины трещины по Ирвину. Поле скольжения у вершины трещины нормального отрыва в идеально пластическом теле. Модель трещины Леонова-Панасюка - Дагдейла с узкой зоной локализации пластических деформаций.

Кинетическая концепция прочности твердых тел. Формула Журкова. Кинетическая теория трещин. Рост трещин в условиях ползучести.

Понятие об усталостном разрушении. Малоцикловая и многоцикловая усталость. Основные законы роста усталостных трещин.

Понятие о поврежденности. Типы поврежденности. Математическое представление поврежденности. Параметр поврежденности Качанова - Работнова.

Кинетические уравнения накопления поврежденности. Принцип линейного суммирования повреждений. Накопление повреждений в условиях ползучести.

## 9. Теория устойчивости

Понятие устойчивости. Задача об изгибе балки. Устойчивость продольно сжатого стержня. Определение криволинейной формы изогнутой балки в нелинейной постановке. Устойчивость стержня при температурном нагружении. Устойчивость равновесия. Продольно сжатый стержень на упругом основании. Динамическая потеря устойчивости продольно сжатого стержня. Потеря устойчивости стержня при растяжении. Устойчивость продольно сжатого стержня

за пределом упругости. Решения Ясинского, Энгессера, Кармана. Концепция устойчивости Шенли. Стойка Шенли. Устойчивость продольно сжатого стержня при ползучести.

Устойчивость сжатой пластины. Дивергенция панели. Вынужденные колебания пластины. Резонанс. Панельный флаттер. Устойчивость фермы Мизеса. Потеря устойчивости плоской формы изгиба полосы за пределом упругости.

### **10. Механика композиционных материалов**

Волокнистые композиты. Высокопрочные и высокомодульные волокна. Роль связующего материала в волокнистом композите. Уравнения состояния волокнистых композитов. Статистическая природа прочности волокна. Прочность пучка. Неэффективная длина волокна в композите. Однонаправленные композиты с металлической матрицей. Композиты с полимерной матрицей. Слоистые композиты. Термоупругие свойства слоистых композитов. Диссипативные свойства слоистых композитов. Свойства конструкционных композиционных материалов.

### **11. Мезомеханика многоуровневых сред со структурой**

Мезомеханика структурно-неоднородных сред. Мезомеханика разрушения. Физическая мезомеханика материалов. Мезомеханика функциональных материалов с эффектом памяти формы. Структурно-аналитическая теория прочности Лихачева-Малинина. Структурно-аналитическая теория мезомеханики материалов.

### **12. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела**

Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных разностей для дифференциальных уравнений теории упругости.

Вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии упругого тела. Методы Релея-Ритца, Бубнова -Галеркина и градиентного спуска в задачах минимизации функционала полной потенциальной энергии.

Метод конечных элементов в теории упругости. Пределы применимости метода конечных элементов.

Формула Сомильяны и метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов).

Метод характеристик в двумерных задачах теории пластичности. Область определенности и область зависимости решения гиперболической краевой задачи.

Понятие о вычислительном эксперименте. Использование вычислительного эксперимента для решения задач механики деформируемого твердого тела.

### **13. Экспериментальная механика деформируемого твёрдого тела**

Моделирование реальных процессов. Определение фундаментальных механических характеристик материалов. Общая характеристика современных испытательных комплексов. Классификация методов механических испытаний. Методы тензометрирования. Оптический метод анализа полей деформаций.

Поляризационно-оптический метод. Измерительные приборы. Погрешности измерений. Математическая обработка результатов измерений.

### Литература

1. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
3. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979.
5. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
6. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990.
7. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990.
8. Ильюшин А.А. Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
10. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
11. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.
12. Ключников В.Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980.
13. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
14. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000.
15. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993.
16. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
17. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
19. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.
20. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
21. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. Курс лекций. СПб.: Профессия, 2012.
22. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
23. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
24. Работнов Ю.Н. Сопrotивление материалов. Физматгиз, 1962.
25. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х томах. М.: Наука, 1983, 1984.
26. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
27. Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория пластичности. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2011.
28. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

Разработал:

Главный научный сотрудник Лаборатории механики композитов д.ф.- м.н. В.Д. Кургузов