УТВЕРЖДЕНА
Приказом № 32
от «02» августа 2023 г.

Принята Ученым советом ИГиЛ СО РАН
Протокол № 8 от «30» июня 2023 г.

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по специальной дисциплине
1.1.6 Вычислительная математика
(физико-математические науки)

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

1. Функциональный анализ

Метрические, нормированные, гильбертовы пространства.

Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения.

Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Ряды Фурье и их свойства.

Линейные функционалы и операторы.

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^l.

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Теоремы вложения (без доказательств).

2. Математическая физика

Математические модели физических задач.

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики (гиперболические, параболические, эллиптические, смешанные). Корректная формулировка задач Коши, начально-краевых и краевых задач.

Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.

Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задачи Коши для уравнения теплопроводности и колебаний в одномерном и многомерном случаях.

Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Квазилинейные гиперболические системы законов сохранения.

Характеристическая форма записи. Инварианты гиперболической системы. Корректная постановка начально-краевых задач. Классические и обобщенные решения. Центрированные волны разрежения и устойчивые сильные разрывы (ударные волны). Условия Гюгонио. Задача Римана о распаде начального разрыва. Системы уравнений мелкой воды и газовой динамики.

3. Численные методы

Численные методы алгебры.

Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнения. Теорема о сходимости этих методов. Методы Ньютона и касательных.

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Число обусловленности матрицы. Одношаговые итерационные методы. Метод прогонки.

Приближение функций.

Интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, оценка их точности. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

Численное интегрирование.

Интегро-интерполяционные формулы трапеций, прямоугольников и парабол (Симпсона); оценка их точности. Интегро-интерполяционные формулы общего вида. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. Методы прогонки и стрельбы. Консервативные разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Методы решения уравнений математической физики.

Методы построения численных схем: конечно-разностные, интегро-интерполяционные (конечно-объемные), проекционные (конечно-элементные и спектральные). Применение численных схем для решения краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Аппроксимация, устойчивость и сходимость численного метода. Явные и неявные, двухслойные и трехслойные по времени разностные схемы; их свойства. Спектральный метод исследования устойчивости и его применение на примере разностных схем, аппроксимирующих линейное уравнение переноса (схемы Годунова, Лакса, Лакса-Вендроффа).

Консервативные разностные схемы для гиперболических систем законов сохранения и теорема Лакса-Вендроффа об их сходимости. Понятие монотонности разностной схемы по Годунову. Критерий монотонности линейной разностной схемы. Теорема об отсутствии линейных монотонных схем повышенной точности. Современные численные схемы повышенной точности (MUSCL, TVD, WENO, CABARET), в которых «запрет Годунова» преодолевается за счет различных видов нелинейной коррекции потоков. Примеры применения этих схем.

Понятие слабой аппроксимации гиперболических систем законов сохранения. Критерий повышенного порядка слабой аппроксимации. Пример устойчивой разностной схемы третьего порядка слабой аппроксимации.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач, в частности, методы расщепления и переменных направлений.

Методы решения обратных и некорректных задач.

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
9. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов Ф.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001.
10. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

Дополнительная литература

1. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
2. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.
3. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
4. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Изд. НГУ, Новосибирск, 2014.
5. Ковыркина О.А., Остапенко В.В., Фроловская О.А. Введение в теорию разностных схем. Изд. НГУ, Новосибирск, 2021.

Разработал:

Главный научный сотрудник Лаборатории прикладной и вычислительной гидродинамики д.ф.- м.н. В.В. Остапенко.