УТВЕРЖДЕНА
Приказом № 32
от «02» августа 2023 г.

Принята Ученым советом ИГиЛ СО РАН
Протокол № 8 от «30» июня 2023 г.

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по специальной дисциплине
1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)

В основу настоящей программы положены следующие математические дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и смежные вопросы математического и функционального анализа.

1. Базовые теоремы существования и единственности решений для обыкновенных дифференциальных уравнений (Пеано, Коши-Пикара). Условия единственности, близкие к минимальным.
2. Гладкость решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
3. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальные системы решений. Метод вариации постоянных.
4. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.
5. Автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.
6. Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Асимптотическая устойчивость. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
7. Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона.
8. Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Функция Грина.
9. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
10. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши.
11. Характеристики уравнений в частных производных. Задача Коши и теорема Коши-Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных.
12. Метод разделения переменных.
13. Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Фундаментальное решение. Задачи на собственные значения и разложения по собственным функциям.
14. Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Принцип максимума и теорема единственности. Свойства

решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника).

15. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны).

16. Обобщенные решения краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Задачи на собственные функции и собственные значения эллиптического оператора.

17. Обобщенные функции (распределения) и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.

18. Пространства Соболева. Теоремы вложения, следы функций на границе области.

19. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Теорема Гильберта-Шмидта.

20. Дополнительные вопросы, из числа которых может формироваться индивидуальная часть экзамена в зависимости от направления исследований экзаменуемого:

20.1. Спектральные задачи для дифференциальных операторов.

20.2. Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях.

20.3. Дифференциальные уравнения с запаздыванием.

20.4. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами.

20.5. Теория псевдодифференциальных операторов.

20.6. Теория дифференциально-операторных уравнений.

20.7. Теория функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных краевых задач.

20.8. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

20.9. Теория дифференциальных включений и вариационных неравенств.

20.10. Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью.

20.11. Принцип максимума Понтрягина.

20.12. Методы монотонности и компактности при решении нелинейных уравнений в частных производных.

20.13. Теория Гамильтона–Якоби.

Литература

1. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971 г.
2. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М., Наука, 1988.
3. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000 г.
4. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1968.

5. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1951.

6. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

7. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973 г.

8. Ж.-Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972 г.

9. Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1996 г.

10. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983 г.

11. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

12. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М: Наука, 1995 г.

13. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998г. (и другие издания).

14. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963 г. (и другие издания).

15. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. М., Мир, 1977.

16. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М., Мир, 1979.

17. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.

18. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г.Свешников. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985г.

19. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. Издательство иностранной литературы, М.; 1962 г.

20. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980 г.

21. А.Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985 г.

22. М.А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978 г.

Разработал:

Ведущий научный сотрудник Лаборатории краевых задач механики сплошных сред д.ф.-м.н. А.Е. Мамонтов