МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

Федорова Наталья Виталиевна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ИХ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность 01.02.04 — «Механика деформируемого твёрдого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, доцент

Леган М.А.

НОВОСИБИРСК 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Исследование задач в области механики контактного взаимодействия является важным направлением и неотъемлемой частью современных инженерных разработок, касающихся многих сфер деятельности человека. К ним относятся машиностроение, строительство, биомеханика, геология и многие другие отрасли. Известно, что в зоне контактного взаимодействия наблюдается высокая концентрация напряжений и деформаций, вследствие чего могут появиться пластические деформации и микротрещины, что может привести к началу процесса разрушения, в некоторых случаях приводящего к катастрофическим последствиям. Такое разрушение особенно опасно, в случае использования хрупких материалов, таких как стекло, керамика, бетон и других, из-за быстрого протекания процесса.

Вследствие стремительного развития отраслей науки, связанных с механикой контактного взаимодействия, появляется множество задач, для которых трудно или невозможно получить аналитическое решение. В этом случае на помощь приходят численные методы, одним из которых является метод конечных элементов. Однако, в связи с тем, что контактные задачи весьма трудоёмкие и, как правило, требуют больших затрат вычислительного времени, важно подобрать аналитический метод исследования, который позволит сделать ряд допущений в сложной модели и упростить её до суперпозиции известных решений, таким образом, чтобы полученный результат существенно не отличался от результата, полученного численным методом. При этом подобранный аналитический метод будет учитывать реальные условия задачи, что позволит упростить расчёты инженерам, особенно, когда речь идёт о многократном решении однотипных задач и в тех случаях, когда важным фактором является время решения.

Помимо технологических задач, актуальными являются задачи в такой перспективной области, как биомеханика. В современном мире всё чаще возникают вопросы об усовершенствовании не только качества медицины, но и физических возможностей человека. Контактные задачи нашли своё применение и в этой области, когда изучается взаимодействие между биологическими тканями и материалами, из которых изготавливаются имплантаты. В этом случае анализ контактного взаимодействия характеризует приживляемость имплантата, которая в свою очередь зависит от приложенной нагрузки, площади контакта между имплантатом и биологической тканью, прочности и других физических свойств биологических тканей, а также от покрытий и материала имплантата.

Степень разработанности темы

Исследования, связанные с контактными задачами, выполняются по актуальным направлениям механики деформируемого твердого тела – механике контактного взаимодействия, механике разрушения и трибологии. Современный уровень механики контактного взаимодействия, а также возможности численных алгоритмов позволяют решать контактные задачи различного уровня сложности, проводить экспериментальные исследования совместно с математическим моделированием и численным анализом.

Цель и задачи работы

Цель диссертационной работы – разработка методик получения параметров напряженно-деформированного состояния при решении контактных задач, возникающих в различных областях практического применения.

Идея работы заключается в использовании конечно-элементного анализа для получения численных решений контактных задач с учётом реальных граничных условий, которые близки по постановке к известным модельным задачам, имеющим аналитическое решение.

Для достижения цели потребовалось решение следующих задач:

1. Определить максимальные растягивающие напряжения в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины в стеклянном образце, с учётом напряжений, возникающих от изгиба, вызванного наличием приспособления для проведения экспериментов.

2. Выполнить анализ влияния условий контакта на напряженно-деформированное состояние круглой свободно-опёртой пластины из хрупкого материала алюминида железа при вдавливании стального шара в центр.

3. Найти распределение контактного давления, возникающего между прижатыми друг к другу плоским и профилированным блоками оргстекла, с учётом геометрии начального зазора, реальных размеров блоков и особенностей граничных условий в эксперименте.

4. Установить оптимальную форму керамических стоматологических имплантатов в зависимости от площади контакта и степени минерализации кости.

Методы исследования

Методы исследования включают обзор литературы, проведение теоретических и численных исследований на основе метода конечных элементов и компьютерного моделирования. В некоторых задачах использовались экспериментальные данные.

Научная новизна работы

1. Установлено, что для вычисления максимального растягивающего напряжения в окрестности области контакта, где образуются кольцевые трещины, при испытании образцов конечных размеров по рассмотренной методике, можно воспользоваться аналитической формулой, полученной Хубером для растягивающих напряжений в полупространстве в окрестности области контакта, при этом напряжения от изгиба, возникающие в эксперименте, не влияют на напряжения в окрестности области контакта.

2. В контактной постановке численно решена задача об изгибе круглой пластины при вдавливании в неё стального шара и проведено сравнение численных результатов с результатами, получаемыми по известной формуле Войновского-Кригера. Показано, что для определения поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний хрупких материалов можно пользоваться аналитической формулой Войновского-Кригера.

3. В результате численного решения контактной задачи получено ступенчатое распределение контактного давления между плоским и профилированным блоками конечных размеров. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального гидроразрыва пласта в слоистых горных породах.

4. Установлено, что напряжения в губчатой кости уменьшаются при использовании обратно-конусной формы стоматологических имплантатов. Выявлено, что для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате. Поэтому рекомендуется использовать такую форму имплантатов при протезировании людей в пожилом возрасте.

Практическая значимость работы

1. При проведении испытаний по рассмотренным методикам, параметры напряжённо-деформированного состояния для аналогичных контактных задач могут быть определены с использованием предложенных аналитических методов, без затрат ресурсов и времени на численный анализ для уточнения влияния реальных граничных условий на результаты испытаний каждого образца, что является удобным инструментом для инженеров и экспериментаторов.

2. Полученные результаты оптимальной формы керамических стоматологических имплантатов, в зависимости от площади контакта с кортикальной костью и степени минерализации кости, могут быть использованы в качестве рекомендации для изготовления новых образцов имплантатов, а также для стоматологов при выполнении протезирования для людей разных возрастов.

3. Результаты работы были внедрены: (Приложение А).

4. Диссертационная работа выполнялась в лаборатории статической прочности ИГиЛ СО РАН. Часть результатов получена при выполнении договора № НТЦ-18/08000/01397/Р от 29 ноября 2018 года с ООО «Газпромнефть НТЦ»,

гранта Правительства РФ № 14.W03.31.0002, проектов РФФИ № 15-01-07631 А, РФФИ № 18-08-00528 А и РФФИ № 18-38-00361 мол_а, в том числе под руководством автора диссертационной работы последним из указанных проектов.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в анализе современного состояния исследуемых задач, в проведении теоретических и численных исследований, а также в обработке и анализе результатов. Кроме того, личный вклад состоит в реализации идеи проектирования новой формы керамических стоматологических имплантатов, с учётом увеличения площади контакта имплантата с костью и изменения степени минерализации кости, в зависимости от возраста пациентов. Идея была реализована в рамках проекта по биомеханике в гранте РФФИ № 18-38-00361 мол_а, в котором автор является руководителем и единственным исполнителем.

Положения, выносимые на защиту

1. Напряжения от изгиба, вызванного граничными условиями в эксперименте по вдавливанию шара в стеклянный образец, не будут влиять на значения растягивающих напряжений в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины. Формулу Хубера для получения растягивающих напряжений в полупространстве можно использовать для образцов реальных размеров, испытанных по рассмотренной методике.

2. При испытаниях образцов нового материала по рассмотренной методике посредством вдавливания шара в свободно-опёртую пластину, контактные напряжения не будут оказывать влияния на результаты вычисления поперечной прочности на разрыв с помощью аналитической формулы Войновского-Кригера, полученной для случая изгиба свободно-опёртой пластины сосредоточенной силой в центре.

3. Определение ступенчатого распределения контактного давления между прижатыми друг к другу блоками оргстекла конечных размеров с учётом геометрии их поверхности в области контакта.

4. Использование обратно-конусной формы имплантатов, при которой увеличивается площадь контакта имплантата с кортикальной костью, уменьшит напряжения в пористой губчатой кости, и поэтому улучшит процесс приживляемости, особенно при выполнении протезирования для пациентов пожилого возраста.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность численных исследований обеспечивается проверенными алгоритмами решения классических контактных задач методом конечных элементов, исследованием сходимости сетки конечных элементов, согласованием с классическими аналитическими решениями, корректностью подготовки и проведения экспериментов, соответствием с результатами других авторов.

Апробацией полученных результатов научных исследований является то, что результаты работы представлены и обсуждены на одном зарубежном научном семинаре и 9-ти научных конференциях всероссийского и международного уровня, проходивших на территории РФ. Это Всероссийская конференция с международным участием «Краевые задачи и математическое моделирование» в Новокузнецке в 2016 г. и в 2018 г.; 4-я Всероссийская конференция «Проблемы оптимального проектирования сооружений» в Новосибирске в 2017 г.; X Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела в Самаре в 2017 г.; Всероссийская конференция с международным участием, посвящённая 60-летию Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН в Новосибирске в 2017 г.; Японско-Российский семинар «Advanced Materials Synthesis Process and Nanostructure» в г. Сендай (Япония) в 2018 г.; Российско-Японский семинар «Non-equilibrium processing of materials: experiments and modeling» в Новосибирске в 2018 г.; Юбилейная 30 международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2018) в Москве в 2018 г.; 12 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в Уфе в 2019 г.; Российско-

Японский семинар «Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications» в Новосибирске в 2019 г.

Публикации по теме диссертации

Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 17-ти научных публикациях, в том числе в 3-х статьях в российских журналах из перечня ВАК, в 3-х статьях в зарубежных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus, в том числе в журнале, входящем в первый квартиль Q1 Web of Science, и в 11 статьях в периодических сборниках, трудах и тезисах международных и всероссийских конференций.

Структура и объём работы

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка используемой литературы (126 наименований), изложена на 135 страницах и содержит 46 рисунков и 7 таблиц.

Благодарность

Выражаю глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю д.т.н. Михаилу Антоновичу Легану за постановку интересных задач для исследований, помощь в подготовке работы, внимание и проявленное терпение. Отдельную благодарность выражаю к.т.н. Александру Николаевичу Пелю за привитый интерес к исследованиям в области биомеханики. Выражаю огромную благодарность всем своим преподавателям и учителям за полученные знания, родителям за возможность учиться, всем кто верил в мои успехи и в особенности тем, кто не верил.

ГЛАВА 1. ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ВОЗНИКАЮЩИЕ ЗАДАЧИ

1.1 Исторические аспекты становления механики контактного взаимодействия

Появление классической механики контактного взаимодействия связано с именем немецкого физика Генриха Рудольфа Герца (1857-1894). В 1885 г. Герц стал профессором в Университете Карлсруэ, где он и сделал своё знаменитое открытие о существовании электромагнитных волн. Однако, помимо знаменитого вклада в электродинамику, в 1882 г. Герц опубликовал две статьи «О контакте упругих тел» по тематике, которая позже стала называться механикой контактного взаимодействия. Эти работы стали источником важных идей в исследованиях контактного взаимодействия, и до сих пор в большинстве статей, в которых рассматривается решение контактных задач, на них ссылаются. Жозеф Буссинеск сделал несколько важных критических замечаний по работам Герца, признавая при этом их огромную важность [1, 2, 3].

В исследовании Герца рассматривались два ассиметричных тела в контакте, на которые действует нагрузка. Результаты получены на основе классической теории упругости и механики сплошной среды. Недостатком теории Герца было пренебрежение силами трения между контактирующими телами. Помимо этого, Герц изучал случаи упругого контакта между телами различной формы, например, контакт двух шаров или контакт шара с полупространством, описал возникновение кольцевых трещин в стекле в окрестности области контакта при некоторой критической нагрузке.

Для обоснования своей теории Герц использовал поведение эллиптических колец Ньютона, образующихся при размещении стеклянной сферы на линзе. Он полагал, что давление, оказываемое сферой на линзу, вызовет изменение колец Ньютона [4]. Однако теория Герца не получила развития до начала следующего столетия, пока не появилась необходимость в данной теории, обусловленная техническими достижениями в развитии транспорта и промышленности.

Теория Герца может применяться лишь к контакту идеально-упругих тел без трения, и прогресс в механике контактного взаимодействия был обусловлен переосмысливанием этих ограничений в пользу контакта с трением. Учёт трения между контактирующими поверхностями позволил построить более реалистичные решения задач контактного взаимодействия. Теория пластичности и линейной вязкоупругости позволили усовершенствовать решения, применительно к контактному взаимодействию неупругих тел [3].

Взаимосвязь между размером сферического индентора и нагрузкой при которой возникают конические трещины в стекле была выявлена Ауэрбахом в 1891 г. На основе теории Гриффитса Ф. Престон качественно описал характер разрушения стела при контактном взаимодействии в 1921-1926 годах, и только в 1956 г. Рослер попытался количественно описать разрушение на поверхности стекла при вдавливании шара, при этом он также опирался на результаты Герца и Гриффитса.

В 1921 г. А. Далладай и Ф. Твиман установили пластическое течение в стекле при контактном взаимодействии с алмазным наконечником. Эндрюс в 1930 г. проводил эксперименты по исследованию ударного контакта с разрушением в стекле.

В 1930-1940 годах группа исследователей под руководством В.Д. Кузнецова проводила экспериментальные исследования контактного взаимодействия и разрушения в монокристаллах со свойствами анизотропии. С.В. Пинегин в послевоенное время проводил исследования на предмет прочности твёрдых материалов при контактном взаимодействии [4].

К.Л. Джонсон, К. Кендал и А.Д. Робертс (JKR-теория) расширили теорию Герца, взяв за основу. Они определили глубину вдавливания с учётом адгезии, при которой в классической теории между шаром и поверхностью образуется характерная шейка за счёт Ван-дер-Ваальсовых сил притяжения.

В 1975 г. Б. Лоун и Т. Уилшоу проанализировали все существующие на тот момент значимые исследования и выделили перспективные направления, что определило становление механики контактного взаимодействия и разрушения, в качестве нового направления в науке.

В 1975 году Б.В. Дерягин, В.М. Мюллер и Ю.П. Топоров опубликовали альтернативную теорию адгезии (DMT – теория). При этом обе теории являются предельными случаями одного общего решения и являются основой механики контактного взаимодействия, на которую опираются модели контактного перехода.

Ф.П. Боуден и Д. Тейбор в середине XX столетия отметили важность шероховатости поверхностей, которую необходимо учитывать при рассмотрении контактных задач, из-за того, что за счёт шероховатости реальная площадь контакта, гораздо меньше, чем в случае идеально гладкого контакта. Это замечание привело к развитию теории контакта шероховатых поверхностей, в которую особый вклад внесли Д.А. Гринвуд и П.Б. Виллиамсон в 1966 г. и Б.Н. Дж. Перссон в 2002 г., которые доказали, что реальная площадь контакта шероховатых поверхностей пропорциональна нормальной силе, а размер и давление отдельно рассматриваемого микроконтакта слабо зависят от нагрузки [5].

1.2 Состояние исследований в области механики контактного взаимодействия в СССР и РФ с середины XX века до настоящего времени

В 1953 г. была опубликована книга Л.А. Галина “Контактные задачи теории упругости”, которая была посвящена плоским и пространственным контактным задачам теории упругости, т.е. задачам о касании упругих тел. Главное внимание в этой книге было уделено задачам о давлении штампа на упругое тело [6]. В 1976 г. была опубликована коллективная обзорная книга “Развитие теории контактных задач в СССР” под редакцией Л.А. Галина. В книге содержатся результаты, принадлежащие в основном советским авторам: рассматриваются математические методы, в том числе теории функций комплексной переменной для решения контактных задач; задачи о контакте тел с разными механическими свойствами;

результаты для случая, когда твёрдое тело движется по поверхности упругого; контактные задачи для жестко-пластического тела [7]. В 1980 г. вышла книга Л.А. Галина “Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости”. В книге рассматриваются контактные задачи при качении, износе и для шероховатых поверхностей контакта. В книге содержатся работы Л.А. Галина, его совместные статьи с И.Г. Горячевой и одна совместная с Н.М. Бородачевым [8]. Все эти работы послужили фундаментом для развития исследований механики контактного взаимодействия в нашей стране.

В 1988 г. была издана книга Ю.В. Колесникова и Е.М, Морозова “Механика контактного разрушения”, которая впоследствии дополнялась и переиздавалась 4 раза вплоть до 2012 г. Приводятся основные результаты решений контактной задачи теории упругости и пластичности, рассматриваются поверхностные трещины, условия возникновения и распространения трещин, разрушение поверхности тела вследствие контактного взаимодействия. Представлены результаты экспериментов и их согласование с расчётом [4].

В 1998 г. вышла книга В.М. Александрова и Д.А. Пожарского “Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел”. В книге рассмотрены численные и аналитические методы для решения неклассических пространственных контактных задач для тел полуограниченных размеров (полупространство, слой и т.д.) в рамках линейной теории упругости [9].

В 1999 г. была опубликована книга Е.М. Морозова и М.В. Зернина “Контактные задачи механики разрушения”. В работе представлен анализ напряжений при контакте и повреждаемости поверхностного слоя материалов с помощью метода конечных элементов, а также приведены исследования повреждаемости деталей и узлов при объёмном и поверхностном напряженно-деформированном состоянии [10].

В 2000 г. вышла книга авторов А.С. Кравчука и А.В. Чигарева “Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами”. В книге изложены методы и результаты приближенного решения при расчёте напряженного состояния в области контакта, с учётом качества поверхностных покрытий [11]. Контактная задача для круглой плиты была рассмотрена в статье Базаренко Н.А. [12].

В 2001 г. была опубликована монография И.Г. Горячевой “Механика фрикционного взаимодействия”, в которой исследуются процессы при динамическом контакте с трением деталей механизмов, напряжённое состояние и износ поверхностей при контакте тел с неоднородными поверхностными слоями, с учётом адгезии, промежуточной среды и условий контакта. Для решения рассматриваемых задач применяются аналитические и численные методы [13]. И.Г. Горячевой написано множество статей, некоторые в соавторстве, посвящённых моделированию контактно-усталостного разрушения [14], моделированию изнашивания поверхностных слоёв деформируемых тел [15], численному анализу точечного контакта с учётом тонкого слоя смазочного материала [16], задачи о скольжении штампов и инденторов по вязкоупругому полупространству [17-19].

В 2001 г. была опубликована обзорная книга “Механика контактных взаимодействий” при совместной работе многих авторов, под редакцией И.И. Ворович и В.М. Александрова, в которой представлены основные достижения, полученные российскими исследователями в разработке методов решения и результатах решения задач механики контактного взаимодействия. Рассматриваются статические и динамические контактные задачи в том числе и в трибологии, задачи контактного разрушения [20].

В 2003 г. было опубликовано учебное пособие И.И. Аргатова и Н.Н. Дмитриева “Основы теории упругого дискретного контакта”, в котором представлены постановки контактных задач и методы их решения в рамках линейной теории упругости. Рассматриваются задачи о штампах, модели одностороннего контакта, условия равновесия твёрдого тела при опирании на шероховатую поверхность [21].

В 2004 г. была опубликована книга В.М. Александрова и М.И. Чебакова “Аналитические методы в контактных задачах теории упругости”. Рассматриваются статические и динамические неклассические задачи механики контактного взаимодействия для неоднородных тел со сложной конфигурацией и условиями в области контакта. Разработаны эффективные аналитические методы решения задач и получены зависимости напряжений, жесткости, размеров области контакта, деформаций от параметров задачи [22]. В 2007 г. авторы выпустили книгу “Введение в механику контактных взаимодействий”, в которой представлены методы решения плоских контактных задач, задач для упругой полуплоскости, для тел с покрытиями, задач для упругой плоскости и полупространства и другие. Задачи рассматривались с учётом и без учёта трения. Рассмотренные методы могут быть использованы для решения задач механики разрушения со смешанными граничными условиями [23].

В 2006 г. была опубликована монография группы авторов С.М. Айзековича, В.М. Александрова и других “Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред”. Представлены новые эффективные методы решения контактных задач для неоднородных сред, которые могут быть использованы в инженерных расчётах и при оценке прямых численных методов [24].

В 2007 г. была опубликована статья К.Е. Казакова, в которой были рассмотрены контактные задачи для тел с покрытиями. В том же году вышла статья Р.Л. Салганик о решении контактной задачи для полуограниченных тел с шероховатой границей [25]. В 2008 г. была представлена статья Н.В. Неустроевой, в которой рассматривалась контактная задача для упругих тел разных размерностей [26].

В 2011 г. М.А. Осипенко и Ю.И. Няшин опубликовали статью, в которой представили подход к решению некоторых одномерных контактных задач [27].

В 2013 г. была опубликована книга В.Л. Попова “Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений”. В книге рассматривается взаимосвязь между контактным взаимодействием и физикой трения при адгезии, трении, смазке и износе, а также численные методы моделирования процессов физики трения от нанотрибологии до масштабных явлений, таких как землетрясения [5].

1.3 Состояние исследований в области механики контактного взаимодействия за рубежом

В 1987 г. вышла монография К. Джонсона, которая явила собой фундаментальную работу, на которую ссылаются и сегодня. Книга “Механика контактного взаимодействия” содержит изложение теории контактного взаимодействия деформируемых тел. Уделено внимание описанию эффектов неупругости, вязкости, накопления повреждений, скольжения и сцепления в области контакта. Рассмотрены сложные прикладные контактные задачи с учётом трения, динамики, теплообмена [3].

В 1993 г. была опубликована книга Д. Франкуа, А. Пине и А. Заоти “Механическое поведение материалов. Часть 2: Вязкоупругость, повреждаемость, разрушение и механика контактного взаимодействия”. Рассматриваются вопросы механики контактного взаимодействия, на макромасштабном уровне и затрагиваются явления трения и износа, а также особенности задач для разных типов материалов: металлов, полимеров, керамики [28].

В 1994 г. вышла книга Д.А. Хиллса и Д. Новелла “Механика фреттинг усталости”. В книге рассмотрены вопросы, связанные с анализом сложного контакта, для которого невозможно получить однозначное аналитическое решение и, как правило, пользуются численными методами. Рассмотрение в книге идеализированных задач даёт физическое понимание, что облегчает выбор правильных граничных условий для исследования сложных реальных задач при моделировании. В книге представлено моделирование контактных задач, включая частичное скольжение, которое приводит к повреждению поверхности; моделирование коротких трещин, которые появляются с резкими градиентами напряжений [29].

В 1995 г. был выпущен сборник трудов “The 2nd Contact Mechanics International Symposium”, в котором собраны труды специалистов в области механики контактного взаимодействия, позволяющие нарисовать общую картину состояния области исследования того времени и выявить новые тенденции и возможности. Сборник разделён на несколько частей, в которых рассматриваются математические формулировки контакта; численные методы; моделирование трения и динамики твёрдых и деформируемых тел, приведены экспериментальные исследования контактного взаимодействия. Предметом широкого интереса являлись задачи динамического контакта между телами [30].

В 2002 г. вышла книга А. Фишера-Криппса “Nanoindentation”. Появился интерес к механическим характеристикам тонкоплёночных систем и малых объёмов материалов с использованием экспериментов на вдавливание сферических и пирамидных инденторов. Основной целью таких испытаний было получение значений модуля упругости и твердости материала образца. Используемые в экспериментах силы и глубина проникновения обычно очень малы, отсюда и термин “наноиндентирование”. В книге представлены методы проверки наноиндентирования, основополагающая теория получения механических характеристик при работе с новыми доступными инструментами [31]. В тот же год вышла статья Ласерда и Врубеля в которой был рассмотрен алгоритм для моделирования распространения трещин вследствие контактного взаимодействия на основе метода граничных элементов [32].

В 2006 г. была опубликована книга П. Вриггерса “Computational Contact Mechanics”, которая представляет собой обзор теории нелинейной механики сплошных сред и ее применения в контактных задачах, а также обзор современных методов моделирования контактных задач с использованием метода конечных элементов. При моделировании контакта важную роль играют алгоритмы, в частности, интерес представляют адаптивные методы, в том числе при построении расчётных сеток для надёжного численного анализа. В книге обсуждаются формулировки контакта, соотношения, необходимые для установления контактных ограничений и определяющих уравнений, действительных на поверхности контакта, а также различные формулировки, алгоритмы и методы дискретизации. На данный момент можно сделать вывод, что не существует однозначного надежного метода для моделирования всех типов контактов, тем не менее, в книге обсуждаются преимущества и недостатки существующих методов [33].

В 2007 г. вышла книга А. Фишера-Криппса “Introduction to Contact Mechanics”. В книге представлены механические свойства материалов, общая механика разрушения, в том числе хрупкое разрушение, описание полей напряжений при упругом и упруго-пластическом контакте, образование конических трещин Герца в хрупких материалах, подповерхностные повреждения в пластичных материалах и значения твердости. Содержит обзор практических методов индентирования [34].

В 2012 г. вышла книга М. Софонеа “Mathematical Models in Contact Mechanics”, в которой представлены некоторые математические модели, которые возникают в механике контактного взаимодействия, математический анализ моделей, который включает вариационную формулировку, результаты существования, единственности и сходимости, различные функциональные методы, включая методы монотонности, штрафов и другие. Уделяется особое внимание механической интерпретации результатов и, таким образом, показана взаимосвязь между моделированием, применением и нелинейным анализом [35].

В 2013 г. была опубликована книга В.А. Ястребова “Numerical Methods in Contact Mechanics”, которая раскрывает основной механизм анализа конечных элементов в механике контактного взаимодействия. Несмотря на распространенность контакта и трения, эти явления трудно изучать экспериментально из-за их многомасштабного и мультифизического характера и недоступности контактных поверхностей для прямых наблюдений. Аналогично, эти проблемы являются сложными для численной обработки из-за специфичности условий контакта, трения и сложности используемых алгоритмов. В книге показаны все вовлеченные компоненты вычислительного анализа контакта и взаимосвязи: геометрия, обнаружение и разрешение. Показаны оригинальные разработки в области вычислительной механики контактного взаимодействия [36].

В 2017 г. вышла книга “The Art of Modeling Mechanical Systems” под редакцией Ф. Пфейффера и Х. Бремера, в которой содержится глава, написанная

М. Раоус “Art of Modeling in Contact Mechanics”. В этой главе рассматриваются общие вопросы моделирования в механике контактного взаимодействия, что позволяет рассмотреть задачи, связанные с негладкими поверхностями. Показано, что негладкий характер поверхностей контакта порождает трудности и особенности на каждом этапе процесса моделирования. Даётся обзор законов механики контакта, базовых понятий, математического анализа, решателей, идентификации составляющих параметров и проверки моделей [37]. В этом же году была опубликована статья Хана с соавторами, в которой рассматривалось контактное взаимодействие между сферическим индентором и образцом геологического сланцевого материала. С помощью конечно-элементного моделирования изучалось влияние адгезии, угла трения, а также и прочность на разрыв при контактном взаимодействии. Результаты моделирования сравнивались с экспериментами при испытании образцов на механические свойства материала посредством микроиндентирования [38].

В статье Матсуда и Накада, изданной в 2018 г., изучается образование кольцевых трещин и прочностные характеристики керамических шариков, подвергнутых термическому шоку. Нагрузка, при которой образовывались кольцевые трещины, уменьшалась по мере увеличения разности температур. В статье была предложена механическая модель, основанная на скорости выделения энергии, для сравнения экспериментальных и теоретических результатов [39]. В 2018 г. была опубликована статья Янга и Грина, в которой методом конечных элементов изучается контакт с трением между однородными материалами при контакте шарика с плоским блоком [40]. В статье Грина, опубликованной в том же году, аналогично изучается контакт скольжения в отсутствие трения при взаимодействии двух полусфер [41].

В статье Хашимото с соавторами за 2019 г. изучается усталость вследствие контактного взаимодействия на примере подшипника качения с образованием кольцевых трещин. Проводится сравнение результатов эксперимента с полученными результатами при численном моделировании [42]. В 2019 г. была опубликована статья Стэна, в которой рассматривается влияние податливости кромки полупространства на адгезионный контакт без трения вблизи края полупространства. Такая модель краевых контактов может быть использована для описания экспериментов на вдавливание шарика в ребристые поверхности [43].

В 2019 г. была опубликована статья Кебли и Бака «Кольцевые трещины в упругом полупространстве», в которой аналитически исследуется осесимметричная задача кольцевой трещины. При этом трещина находится ниже свободной поверхности полубесконечной упругой среды и нагружена равномерным давлением, которое может возникать и от контактного взаимодействия [44].

1.4 Проблемы и перспективные направления в анализе контактных задач

На сегодняшний день задачи контактного взаимодействия не утратили своей актуальности в силу сложности решения, особенно когда мы имеем дело с новыми материалами, композитами и хрупкими материалами, такими, как стекло, где разрушение от контакта предсказать достаточно сложно, а экспериментальный разброс остаётся большим и пока не поддаётся аналитическому описанию, которое в полной мере учитывало бы особенности перечисленных материалов.

Решение задач контактного взаимодействия определяет начальную область контакта и прогнозирует её форму при увеличении уровня нагружения, а также величину нормальных и касательных усилий, и их распределение по поверхности контакта.

Предположение о том, что в общем случае область контакта имеет эллиптическую область сделал Герц. Он предложил методику рассмотрения локальной области контактирующих тел в виде полупространства, нагруженного по малой эллиптической области. В связи с этим допущением, контактные задачи часто рассматриваются независимо от общего напряженного состояния изучаемых тел и способов их закрепления. Для того, чтобы воспользоваться этим допущением, при решении контактной задачи должны выполняться следующие условия: размеры области контакта должны быть малы по сравнению с размерами и радиусами кривизны контактирующих тел. Однако такое допущение может привести к определённым неточностям в расчётах, поэтому при решении некоторых контактных задач, важно учесть общее напряжённое состояние и способ закрепления, чтобы оценить их влияние и минимизировать погрешность получаемых результатов. В данной работе рассматриваются такие контактные задачи.

Существует и обратная ситуация, когда при анализе некоторой конструкции или узла, контакт может происходить между двумя и более телами, при этом чаще всего именно в области контакта происходят поверхностные повреждения, и наблюдается высокая концентрация напряжений. Однако явлениями в контакте пренебрегают, и исследуют напряженно-деформированное состояние конструкции, зависящее от способов закрепления и нагружения в случаях, когда напряжения и деформации на удалении от области контакта гораздо выше или приводят к разрушению конструкции раньше.

Упрощение контактных задач при помощи введения допущений обосновано трудностями решения аналитическими методами. Современные численные методы позволяют создавать модели, учитывающие и контактное взаимодействие, и способы нагружения и закрепления.

В области контакта возникают все виды деформаций и разрушения: от упругой и пластической до распространения микротрещин. При вдавливании индентора в образец, под действием больших значений сжимающего давления в области контакта может возникнуть пластическая деформация даже в хрупких материалах, а у границ области контакта появляются трещины, которые растут в направлении зон с относительно невысокими растягивающими напряжениями вблизи и на поверхности контакта, при этом возникает существенно неоднородное напряженное состояние в окрестности области контакта, которое необходимо описывать методами механики разрушения, в том числе с применением нелокальных критериев разрушения.

В случае, когда поверхности контактирующих тел не являются согласованными, как в рассматриваемой задаче о профилированном блоке, граница области контакта изменяется в зависимости от изменения величины нагружения, и, следовательно, меняется давление и другие параметры напряженно-деформированного состояния. В связи с этим существует проблема отыскания границ области контакта и величины зазора при разных уровнях нагружения, а точность определения этих параметров существенно влияет на точность решения задачи.

При контакте более двух тел, возникает несколько областей контакта, в связи с чем приходится строить итерационный процесс для выполнения граничных условий на всех площадках контакта, что значительно увеличивает время решения задачи.

В процессе контактного взаимодействия реализуется сложное напряженное состояние, при этом если в телах имеются начальные трещины, то может происходить их закрытие, что так же является частным случаем контактного взаимодействия и не всегда есть возможность реализовать эти процессы в конечно-элементном моделировании. Сложным случаем является контакт под действием нескольких внешних нагрузок, особенно при непропорциональном изменении или неодновременном приложении разных нагрузок. В этих условиях только пошаговое приложение нагрузки в процессе моделирования обеспечит точность расчёта. При этом необходимо реализовать итерационную процедуру решения нелинейной задачи на каждом шаге приложения нагрузки. При игнорировании истории нагружения возможно получение принципиально неверного решения [10].

1.5 Контактные задачи в биомеханике, как одно из перспективных направлений исследований

В настоящее время одним из перспективных и значимых направлений является биомеханика. Биомеханика – это раздел науки, объединяющий в себе знания математики, механики, анатомии и физиологии, изучающий на основе моделей и методов механики механические свойства живых тканей, отдельных органов, имплантатов, или организма в целом, а также происходящие в них механические явления.

Контактные задачи в биомеханике наиболее часто возникают при установке имплантатов, когда необходимо оценить взаимодействие живых тканей с инородным телом.

1.5.1 Материалы в задачах биомеханики

При постановке контактной задачи в биомеханике, важным вопросом является определение механических характеристик биологических тканей. В частности, в дентальной имплантации, рассмотренной в этой работе, речь идёт о костях верхней и нижней челюсти человека.

Человеческая кость существует в двух видах, и различается по плотности. «Кортикальной» или «компактной» костью называется кость с плотностью твёрдого вещества более 70%, а «губчатой» или «трабекулярной» с плотностью менее 70% твёрдого вещества [45]. При этом сердцевина кости состоит из губчатой ткани, которая покрыта тонкой оболочкой кортикальной кости. Губчатая кость – это пористый ячеистый материал, состоящий из соединительной сети пластин или стержней, причём их ориентация направлена вдоль приложения нагрузки.

Определение механических характеристик биологических тканей, таких как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и предел прочности, представляет значительные трудности. Отысканию надёжных характеристик посвящено множество работ [45-54]. Для определения механических характеристик использовались стандартные схемы испытаний, ультразвуковые методы измерений скорости прохождения волн через материал, вырезание образцов в различных направлениях из разных костей, при этом все исследования сводились к тому, что кость обладает свойствами анизотропии, механические характеристики кости варьируются не только в зависимости от типа кости, но и от биологических переменных, таких как возраст, пол, состояния патологических изменений организма, уровня активности кости, а также от условий хранения образца до момента эксперимента, которые способствуют неравномерному распределению механических свойств. Стоит отметить, что модуль Юнга кости с биологическими жидкостями меньше, чем высушенной кости.

Для моделирования материала не менее важной характеристикой является прочность кости. Прочность материала определяется его поведением при нагрузке на растяжение или сжатие, при определении твёрдости, предела текучести, предела прочности при статическом изгибе, определении ударной вязкости и других параметров. В реальной жизни провести прямые измерения достаточно сложно. Некоторые прочностные характеристики различных костей представлены в [46]. На свойства кортикальной кости влияют некоторые факторы, один из них - скорость нагружения костной ткани. Автор приводит предельные прочности кортикальной бедренной кости взрослого человека в различных режимах нагрузки, как в продольном, так и в поперечном направлении. Значения представлены в таблице 1.1. Эти результаты показывают, что прочность материала костной ткани зависит от типа и направления нагрузки. Кроме того, автор утверждает, что свойства кортикальной кости изменяются с возрастом. В интервале 20-90 лет прочность на растяжение и модуль Юнга уменьшаются примерно на 2% за десятилетие, то есть примерно с 140 МПа в 30 лет до 120 МПа в 90 лет.

Проблемы возникают при определении упругих механических свойств губчатой кости, её пористость носит индивидуальный характер. В скелете человека полная плотность губчатой кости варьируется в пределах 100 – 1500 кг/м^3, а полная плотность кортикальной кости составляет около 1800 – 2000 кг/м^3. Кривая «напряжение – относительная деформация» для губчатой кости показывает начальную упругую область, за которой наступает необратимое деформирование. Текучесть наступает, когда губчатая кость начинает ломаться. За текучестью идёт область длинного плато, которое создаётся, как всё большее развитие трабекулярного перелома. Переломанные трабекулы начинают заполнять костномозговые пространства. Большая часть костномозгового пространства оказывается заполненной обломками сломанных трабекул. Дальнейшее нагружение губчатой кости после закрытия пор связано с заметным увеличением модуля упругости образца. В [46] предлагается следующая эмпирическая зависимость, для вычисления компрессионной прочности губчатой кости:

$$\sigma = 60\rho^2 \quad (1.1)$$

где σ измеряется в МПа, ρ – плотность в г/см^3.

Таблица 1.1 – Средние величины прочности кортикальной бедренной кости людей в возрасте 19-80 лет [46]

Режим нагрузки	Предельная прочность, МПа
Продольная нагрузка	
Растяжение	133
Сжатие	68
Кручение	68
Поперечная нагрузка	
Растяжение	51
Сжатие	133
Сдвиг	3,3

Одноосные испытания губчатой кости показывают, что её прочность при растяжении приблизительно та же, что при сжатии. При старении организма, недостаточной нагрузке кости и определённых метаболических условиях происходит уменьшение ее минеральной плотности. Увеличение плотности отмечается в результате тяжёлых физических нагрузок и после лечения с использованием терапевтических средств, таких как витамин D3 и препараты кальция [46].

При создании имплантатов для замещения костей и зубов необходимо учитывать особенности твёрдых тканей, как биокомпозитов. Следует отметить, что авторами исследований механических свойств не учитывается вклад в биомеханику костей и зубов параметров кровеносного русла (реология, гидравлика и т.д.). Без питательных веществ, поставляемых кровью, органическая матрица твёрдых тканей погибает, что существенно увеличивает их хрупкость.

Искусственный биоматериал должен соответствовать требованиям биосовместимости и быть прочным с оптимальными механическими свойствами. Кроме того, важными факторами для биоматериала являются простая технология изготовления из него имплантатов и удобное его применение медиками.

На сегодняшний день для создания имплантатов широко распространены сплавы на основе титана. Такие сплавы характеризуются высокой коррозионной устойчивостью, высокой биосовместимостью, биоинертностью, немагнитностью, низкой теплопроводностью, нетоксичностью. Чистый титан более вязкий, он применяется для пористых покрытий фиброметалла [46]. Если средняя предельная прочность коммерчески чистого титана составляет приблизительно 480 МПа, то сплав Ti-6Al-4V имеет механическую прочность почти вдвое больше и наиболее часто применяется для изготовления имплантатов в стоматологии. В книге [46] представлена таблица с механическими свойствами распространённых титановых сплавов.

Наряду с металлическими имплантатами в последнее время стали активно внедряться в костную хирургию и керамические материалы, такие как диоксид циркония [45, 46, 53, 55-57], оксид алюминия [45, 46, 55, 57, 58]. Совершенствование керамических материалов позволило рассматривать их как некоторую альтернативу металлическим сплавам. Биокерамика или биосовместимая нанокерамика, — наноструктурированный керамический материал, используемый в медицине для восстановления (замещения) поврежденных твёрдых тканей. Керамические имплантаты из биокерамики [45, 46, 53, 55, 57, 58], обладают исключительной химической инертностью, коррозионной стойкостью, прочностью, устойчивостью к износу, керамика не обладает электропроводностью. Эти свойства могут быть достигнуты только за счёт использования оксидной керамики. Отрицательными свойствами керамики являются низкая ударная вязкость и высокий модуль Юнга по отношению к средним значениям модуля Юнга кортикальной кости, что может вызвать неплотность прилегания на границе двух материалов и как следствие неприживаемость [55, 59]. Однако, современные исследования показали, что существуют методы создания керамики с направленной пористостью, то есть в различных частях объема материала плотность и тип пор получаются заданными, тем самым появляется возможность программировать упругие свойства имплантата [46, 60]. Авторы приводят зависимость напряжений от деформаций, из которой следует, что чем выше пористость, тем ниже модуль Юнга материала. Пористость вещества определяется объёмом пор, присутствующим в материале, и может оказывать сильное влияние на свойства керамического материала.

В стоматологии керамику применяют, в качестве косметического материала, однако, в настоящее время всё чаще появляются публикации, связанные с применением цельно-керамических имплантатов. Наиболее известной является Y-TZP керамика, которую получают на основе диоксида циркония, с добавлением 2-3% моль иттрия, в качестве стабилизирующего агента. Уникальность этой керамики заключается в механизме трансформационного упрочнения. Суть такого типа упрочнения заключается в том, что если в материале возникает трещина, то в ее вершине происходит трансформация материала с увеличением объёма на 3-5%, которая инициирует появление сжимающих напряжений вблизи кончика трещины. Известно, что в технике сжимающие напряжения способствуют увеличению срока службы изделий в противоположность растягивающим напряжениям, которые в свою очередь способствуют образованию и распространению трещин. Процесс трансформационного упрочнения даёт начало механизму, подавляющему распространение трещины и упрочняющему керамику.

Кроме того, показано сравнение свойств отечественного материала с зарубежными аналогами и несмотря на то, что отечественный материал уступает по показателю прочности на изгиб (600-700 МПа по отношению к 900-1200 МПа у зарубежных аналогов), но превосходит требования стандарта ISO 6872-1995 “Керамика стоматологическая” [61], в котором предел прочности на изгиб должен быть не менее 50 МПа. Стоит отметить, что показатель трещиностойкости K_{IC} отечественного материала, варьирующийся в пределах 10 – 17 МПа м$^{1/2}$, превосходит зарубежные аналоги, у которых K_{IC} варьируется в пределах 9 – 10 МПа м$^{1/2}$. В статье рассматриваются перспективы создания имплантатов из керамики, в том числе и цельно-анатомических форм, что сведёт к нулю риски сколов.

Улучшение поверхности соединения кости и имплантата с использованием поверхностных модификаций и микро - наноразмерных покрытий вызывают интерес во всём мире в течении последних двадцати лет. Многочисленное применение керамики основано на уникальных механических, физических и тепловых свойствах. С точки зрения использования в стоматологии и ортопедии, биосовместимость, прочность, плотность и износостойкость имеют жизненно важное значение.

Пористые материалы всё чаще используются в качестве костных имплантатов из-за того, что они способствуют прорастанию естественной кости и, таким образом, обеспечивают прочную связь между имплантатом и костью. Подобными же свойствами биоактивности обладает такой материал как биостекло [46]. Особый интерес в применении биостекла для медицины заключается в его способности стимулировать рост костной ткани. Биостекло может быть использовано в конструкциях, которые при внедрении в организм будут стимулировать собственные регенеративные механизмы по восстановлению кости до их первоначального состояния и функциональности, например, в случае покрытия имплантатов биостеклом. Биостекла и материалы на их основе не воспринимаются организмом как что-то чужое, напротив, серия биохимических реакций на границе «биостекло – кость» приводит к интенсивному образованию костной ткани в области контакта и в конечном счете к врастанию имплантата в костную ткань. Однако, механические характеристики биостекол не столь обнадеживающие, как их биосовместимость и активность. В силу этого биостекла находят применение в качестве малых или слабо нагружаемых имплантатов в стоматологии и челюстно-лицевой хирургии [57].

1.5.2 Особенности моделирования задач в биомеханике

При решении задач биомеханики часто используют методы и подходы механики деформируемого твёрдого тела. Как правило, для решения задач используют численные методы ввиду сложности геометрии кости и системы действующих на неё усилий. Наиболее удобным и часто применимым является метод конечных элементов [62].

В [45] методу конечных элементов применительно к задачам стоматологии посвящена отдельная глава, в которой говорится, что этот метод широко применяется в биомедицинских системах для анализа напряжённо-деформированного состояния мягких и твёрдых тканей, структур кости и костных протезов, зубных имплантатов.

Наиболее часто встречаются публикации, в которых проводится конечно-элементное моделирование НДС одиночного имплантата, расположенного в некотором объеме челюсти [63-67]. В них рассматриваются различные особенности форм имплантатов и влияние этих особенностей на биологические ткани возле имплантатов. Основной задачей моделирования авторы определяют оценку НДС в костных тканях и имплантате при жевательных нагрузках. В кортикальной и губчатой кости за счет действия моментов от жевательных усилий возможна высокая концентрация напряжений, что может привести к некрозу или разрушению костных тканей, расшатыванию и плохой приживаемости имплантата при эксплуатационных нагрузках. Поэтому актуальной является задача исследования форм имплантатов, которая направлена на решение проблемы по снижению концентрации напряжений в кортикальной и губчатой костях.

Так в работе [64] рассматриваются двадцать семь модификаций модели титанового имплантата с двойной резьбой (поверх обычной резьбы на имплантате имеется винт с большим шагом). Основная идея двойной разнонаправленной резьбы заключается в том, что площадь контакта имплантата с костью вдвое больше, что способствует перераспределению напряжений, как в кости, так и в имплантате. В расчёте учитывается коэффициент трения между имплантатом и губчатой костью равный 0,72; и между имплантатом и кортикальной костью равный 0,64. Нагрузка на имплантат прикладывалась в вертикальном направлении (150 Н) и в горизонтальном направлении (15 Н). Наилучшей формой такого имплантата по перечисленным параметрам оказался тот, у которого обе резьбы имеют одинаковый шаг в 1 мм.

В медицинской практике бывают случаи разрушения имплантатов при эксплуатации. В публикации [67] исследуется влияние формы отверстий под имплантат на распределение периферических напряжений в шейке имплантата, приходящейся на кортикальную кость Максимальные напряжения на кость, возникали при использовании базовых моделей титановых имплантатов с прямой шейкой и минимальные при использовании обратно-конусной шейки имплантата.

В работе [66] рассматривался еще один вариант перехода шейки, а именно имплантаты типа «седло» с плоским выступом головки, опирающимся на поверхность кортикальной кости с диаметрами от 2,5 до 5,5 мм и имплантаты без выступов. При этом наиболее эффективным распределение напряжений было у имплантатов типа «седло» с диаметром более 4,5 мм, чем у имплантатов с меньшим диаметром опирания на кортикальную кость. При этом был сделан вывод о том, что имплантаты типа «седло» могут иметь эффект усиления кортикальной кости из-за лучшего распределения напряжений по поверхности более прочной кости и кроме того могут обеспечить формирование новых костных тканей при остеоинтеграции (приживаемости) под имплантатом.

В статье [65] проведен КЭ анализ коротких и мини зубных имплантатов различных размеров. Мини-имплантаты были установлены в переднюю область нижней челюсти и нагружены вертикальной силой 150 Н. Использование коротких имплантатов в задней области челюсти уменьшает потребность в процедурах увеличения костной ткани и риск перфорации синуса. С биомеханической точки зрения, нагрузка на кости вокруг коротких и мини-имплантатов больше, по сравнению со стандартными имплантатами. Из [65] можно сделать вывод об уменьшении напряжений возле имплантатов при увеличении площади контакта имплантата с костью.

Часто в публикациях появляются дискуссии по поводу угла наклона установки имплантата, в котором будут возникать наименьшие напряжения в кости. В частности, в работе [68] рассматривались модели титановых имплантатов, установленных вертикально и под углом. Значения напряжений в имплантате, установленном под углом, были выше, чем у модели с имплантатом, установленном вертикально.

Отечественные авторы в статье [69] проводили исследования напряжённо-деформированного состояния имплантатов из диоксида циркония, сравнивая их с имплантатами из титана на основе конечно-элементного анализа модели с приложением боковой распределённой нагрузки. Авторы сделали заключение о целесообразности использования диоксида циркония в стоматологии, при том, что предел прочности в имплантате из диоксида циркония не превышает допустимый в соответствии с международным стандартом ISO 13356.

Использование имплантатов обычно ограничивается наличием деградации кости, малой минерализацией костной ткани и близостью к месту внедрения имплантата верхнечелюстных синусов (полости в лицевой части черепа, в которых располагаются гайморовы пазухи). Невозможность размещения имплантатов в задние области верхней челюсти может привести к использованию длинных консолей соединительных каркасов протезов, на которые можно установить косметические протезы. Для упрощения лечения атрофических челюстей с использованием наклонных дистальных имплантатов был разработан метод, который позволяет полностью восстановить челюсть с использованием только двух, трёх или четырёх имплантатов, хотя некоторые авторы предлагают использовать большее количество имплантатов для уменьшения риска протезирования. Такие исследования отражены во многих статьях [63, 70-77].

В работе [78] авторы определили влияние количества и расположения имплантатов на напряжения в кости верхней адентичной челюсти с использованием КЭ моделирования. Расположение титановых имплантатов было смоделировано в следующих конфигурациях: 14 несвязанных имплантатов (US 14); 14 имплантатов, связанных каркасом (S14); 6 связанных имплантатов (клыки, малые коренные зубы и коренные) (S6); 4 связанных имплантата (S4); 6 связанных имплантатов (резцы и клыки) (A6). Для каждой конфигурации была приложена распределенная нагрузка в 200 Н в вертикальном направлении, и нагрузка 200 Н под углом 60^o, что соответствует жевательным нагрузкам. В случае S6 кость и имплантаты испытывали те же напряжения и деформации, что и в случае US 14 и S14. В случаях S4 и A6 материал костей и имплантаты были подвергнуты напряжениям примерно в три раза большим под действием вертикальной нагрузки и примерно в пять раз большим под наклонной нагрузкой, по сравнению с S6. Авторы приходят к выводу, что если качество материала кости (плохая минерализация, близость к синусу) не позволяет ограничиться наименьшим количеством имплантатов, то лишь в этом случае установка большего количества имплантатов оправдана.

Из [63, 70, 75, 78, 79] следует вывод о том, что моделирование нагрузок протеза на кость имело целью отыскать конфигурации расположения имплантатов в челюсти, при которых происходит снижение напряжений в кости. Снижение нагрузки достигалось за счет наклона имплантатов, их связки шиной, за счет выбора материалов протеза, а также увеличения количества имплантатов [76, 78].

Успешность процедуры протезирования зависит не только от количества имплантатов, угла наклона и площади контакта между костью и имплантатом. Помимо этого, важными вопросами являются процесс приживления и первичной устойчивости имплантатов. При моделировании такого рода задач, необходимо опираться на медицинский опыт процесса протезирования.

Работа [80] является обзором современных методов экспериментальной оценки устойчивости связи между имплантатом и костью. Если нагрузка, превышает «предельное напряжение σ_0», то имплантат считается «перегруженным», что приводит к резорбции костной ткани, а напряжения ниже σ_0 полезны для адаптации и восстановления кости. Соответствующий баланс напряжений определяет долгосрочную стабильность имплантата. Основная трудность моделирования приживления имплантата заключается в том, чтобы внедрить в модели материалов описание феномена восстановления костной ткани.

Такая модель предложена в [81]. Здесь автор использует модель пороупругого материала, наполненного жидкостью, применительно к структурному перестроению кости под действием периодических нагрузок. Рост кости описывается уравнением диффузии. Математическая модель дает возможность исследовать процессы восстановления поврежденных костных элементов опорно-двигательного аппарата человека при наличии динамической нагрузки и теоретически обосновать выбор оптимального периодического воздействия на поврежденные ткани с целью их скорейшего и устойчивого заживления.

Работы [80, 82] затрагивают проблемы изменения свойств кости с течением времени, что указывает на необходимость исследования НДС кости с применением более сложных моделей материалов [81] при помощи метода КЭ.

Отдельно стоит отметить, что оценка напряжений по Мизесу в костной ткани, представленная в большинстве статей, оправдана тем, что необратимые деформации наступают раньше достижения напряжением предела прочности кости, поэтому напряжения по Мизесу отражают реальную картину в оценке несущей способности кости, в отличие от оценки по наибольшему растягивающему напряжению, которое используется для определения предельных нагрузок на разрушение. Моделирование НДС костей челюсти в приведенных работах можно рассматривать лишь как первое приближение. В действительности кость проявляет свойства упругой анизотропии, пороупругости и эффект восстановления. Часто авторами научных работ анизотропия кости не учитывается [57, 63, 70, 72, 75, 78, 79], тогда как модули Юнга кортикальной кости вдоль дуги челюсти и поперек нее могут различаться почти в два раза [46, 52, 64]. Оценить НДС кости в зависимости от времени можно с большей точностью, если применять модели материалов с учетом релаксации напряжений, роста костной ткани и насыщенности кости физиологическими жидкостями [81], что открывает большое поле задач для будущих исследований.

1.5.3 Перспективные направления исследований и современные тенденции в биомеханике

В настоящий момент к перспективным направлениям в биомеханике относится разработка технологий по изготовлению имплантатов из новых биоматериалов, таких как керамика и биостекло, а также их применение не только в стоматологии, но и ортопедии.

С точки зрения механики, интерес представляет наилучшая форма имплантатов и их анатомическое расположение, с учётом особенностей живого организма.

Остается открытым вопрос о моделировании механических свойств биологических твёрдых и мягких тканей. Изучение механических свойств костей необходимо проводить не только с учётом их пористости, но и с учётом влияния кровеносной системы, заполнения порового пространства биологическими жидкостями и ремодуляции костной ткани. В этой связи необходимо решать задачи пороупругости, которые будут учитывать реальные прочностные свойства кости [54].

Мало изучено влияние трения между зубными имплантатами из новых биоматериалов и костью при эксплуатационных жевательных нагрузках, что несомненно важно при решении контактных задач в процессе моделирования.

Одним из интересных направлений является использование покрытий для имплантатов. Если ранее была тенденция создания прочных, но при этом пористых имплантатов, в которые могли бы прорастать кровеносные сосуды и естественные костные клетки, создавая прочную связь, то теперь, на примере применения биостекла и цементов, всё чаще идёт речь об обратном «прорастании» имплантата из биоматериала в кость за счёт своей аморфной структуры и гелеобразных покрытий, затвердевающих после проникновения в ближайшие клетки, что создаст ещё более прочную связь.

Проблемой является изучение микроструктуры биоматериалов, в частности, это касается биокерамики, когда от технологии изготовления и формы существенно зависят механические свойства. С точки зрения моделирования интерес представляет пористая структура биоматериалов и поведение материала под действием эксплуатационных нагрузок в окрестности пор, а также развитие трещин от подобных концентраторов напряжений.

Стоит отметить, что среди приведенных статей по моделированию нагрузки протезов на имплантатах, почти нет работ, где варьируется степень минерализации кости в зависимости от возраста пациента. Исследования в этом направлении могут дать информацию о приживляемости протеза в целом, а значит оценить успешность протезирования.

Раздел 1.5 был расширен и опубликован совместно с коллективом авторов в качестве обзорной статьи «Различные подходы к оценке работоспособности имплантатов в стоматологии: материалы, моделирование, современные тенденции» в Российском журнале биомеханики в 2019 году [83].

1.6 Выводы

1. Развитие механики контактного взаимодействия прошло длительный путь со времени первой теории Герца о контакте упругих тел до настоящего времени. Большой вклад в развитие внесли не только зарубежные, но и отечественные исследователи. На сегодняшний день задачи контактного взаимодействия не утратили своей актуальности, более того присутствуют практически во всех технологических процессах, где важной составляющей являются контакты с трением, контакты с промежуточным слоем, контакты, при которых возникают большие пластические деформации, а также разрушение с ростом трещин, контакт шероховатых поверхностей.

2. С развитием численных методов решение контактных задач свелось к разработке алгоритмов для наиболее точного определения площади контакта и давления в области контакта. Численные методы позволили решать комплексные задачи, с учётом одновременного контактного взаимодействия в нескольких локальных зонах для сложных конструкций или рассматривать локальные

контакты с учётом реальных граничных условий, что сложно описать и решить аналитически.

3. При изучении механических характеристик материалов используется микро и наноиндентирование. Эти задачи контактного взаимодействия между образцом и индентором рассматриваются во многих современных работах, при этом исследования в данной области связаны с появлением нового оборудования и новых материалов.

4. В области контакта возникают все виды деформаций и разрушения: от упругой и пластической до распространения микротрещин. Поэтому контактные задачи являются сложными, а для получения наиболее точного результата, при решении необходимо пользоваться инструментами теории упругости, теории пластичности, механики разрушения и трибологии.

5. Контактные задачи нашли применение и в такой специфической и актуальной на сегодняшний день области, как биомеханика. Одним из важнейших вопросов является изучение контактного взаимодействия между имплантатом и биологическими тканями, что характеризует процесс приживления имплантата, а успех имплантации зависит от площади контакта, взаимодействия поверхностей, приложенной нагрузки, свойств биоматериала, покрытий имплантата, а также состояния биологических тканей.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

2.1 Численное моделирование контактных задач на основе метода конечных элементов

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является универсальным численным методом расчёта на статическую и динамическую прочность различных конструкций. Методом конечных элементов выполняется дискретизация рассматриваемой области определения задачи на подобласти, называемые конечными элементами. Конечные элементы могут быть разной геометрической формы (стержни, треугольники, четырёхугольники, тетраэдры, гексаэдры) в том числе и в рамках одной задачи. Расчётная модель может содержать одновременно упругие и упругопластические элементы твёрдого деформируемого тела, специальные нелинейные конечные контактные элементы, моделирующие особые свойства поверхностного слоя или двух поверхностных слоёв противолежащих поверхностей, конечные элементы смазывающей жидкости, находящейся в зоне контакта и др. [10].

Разрешающая замкнутая система нелинейных уравнений, описывающая деформирование твёрдых тел, включает определяющие соотношения, кинематические связи и уравнения движения. В основе применения численных методов вместо дифференциальной формы уравнения движения, рассматривается их слабая форма (*weak form*), которая выражается принципом возможных перемещений. Из слабой формы уравнения движения, следует, что используемые в них поля напряжений не требуют дифференцируемости, а требуют только интегрируемости подынтегральных выражений, которые зависят от перемещений, поэтому слабые формы уравнений движения можно использовать для нахождения обобщённых (разрывных) решений уравнений движения. Ослабление требования гладкости на поля напряжений используется в МКЭ, так что на границах элементов напряжения, как правило, разрывны, а приближение напряжений, при измельчении сетки к непрерывно дифференцируемым полям служит оценкой точности полученного численного решения. Кроме того, необходимо отметить, что решение контактных задач из-за постоянно меняющихся с течением времени условий на границе контакта, как правило, рассматривается в текущей конфигурации [33, 84, 85].

Рассматривается объём V, ограниченный поверхностью $S = S_p + S_u$. При этом на части поверхности S_p заданы поверхностные силы $\{\boldsymbol{p}^T\} = \{p_x, p_y, p_z\}$, на части поверхности S_u заданы перемещения $\{\boldsymbol{U}^T\} = \{u, v, z\}$, а внутри тела действуют объёмные силы $\{\boldsymbol{q}^T\} = \{q_x, q_y, q_z\}$. Тогда принцип возможных перемещений (слабая форма уравнений движения):

$$\delta\Pi = \int_V \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\}\{\boldsymbol{\sigma}\}dV - \int_V \{\delta\boldsymbol{U}^T\}\{\boldsymbol{q}\}dV - \int_{S_u} \{\delta\boldsymbol{U}^T\}\{\boldsymbol{p}\}dS = 0 \tag{2.1}$$

где $\{\delta\boldsymbol{U}^T\} = \{\delta u, \delta v, \delta z\}$ – проекции вектора возможных перемещений на оси координат;

$$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \{\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\varepsilon_{xy}, \delta\varepsilon_{yz}, \delta\varepsilon_{xz}\} =$$
$$= \left\{\frac{\partial\delta u}{\partial x}, \frac{\partial\delta v}{\partial y}, \frac{\partial\delta w}{\partial z}, \frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}, \frac{\partial\delta v}{\partial z} + \frac{\partial\delta w}{\partial y}, \frac{\partial\delta u}{\partial z} + \frac{\partial\delta w}{\partial x}\right\};$$

$\{\boldsymbol{\sigma}^T\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$ – вектор напряжений.

Вычисление напряжений выполняется из определяющих соотношений (закон Гука):

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{2.2}$$

где $\{\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}\}$ – вектор полной деформации.

Матрица упругих постоянных для линейных упругих изотропных материалов:

$$[\boldsymbol{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & \text{симм.} & & & \dfrac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \dfrac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Уравнения Коши в матричной форме:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{U}\} \qquad (2.4)$$

где $[\boldsymbol{B}]$ – матрица дифференциальных операторов:

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Таким образом, уравнения (2.1), (2.2) и (2.4) формируют замкнутую систему уравнений теории упругости [85].

Рассмотрим общую постановку контактной задачи, справедливую для всех задач, представленных в данном исследовании.

Пусть имеется два тела B^1 и B^2 (рис. 2.1). Пусть в результате приложения заданных нагрузок или перемещений эти тела входят в контакт друг с другом. Будем считать, что в результате контакта, тела имеют общую границу c. Для точек контактных поверхностей граничные условия изменчивы, поэтому формулируются в виде неравенств. Для точек, лежащих на общей границе c, выполняется условие непроникновения одного тела в другое, т.е.:

$$g = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n} \geq 0, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ – радиус-векторы материальных точек тел B^1 и B^2 в текущей конфигурации; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к контактной поверхности. Величина g – называется нормальным зазором между телами [84]. При контакте тел на границе контакта $g = 0$, при отсутствии контакта $g > 0$.

На границе контакта возникают распределённые сжимающие контактные силы в направлении нормали:

$$R_N \leq 0. \tag{2.7}$$

При $R_N < 0$ тела находятся в контакте, при $R_N = 0$ контакт между телами отсутствует. Контактные силы могут быть только сжимающими.

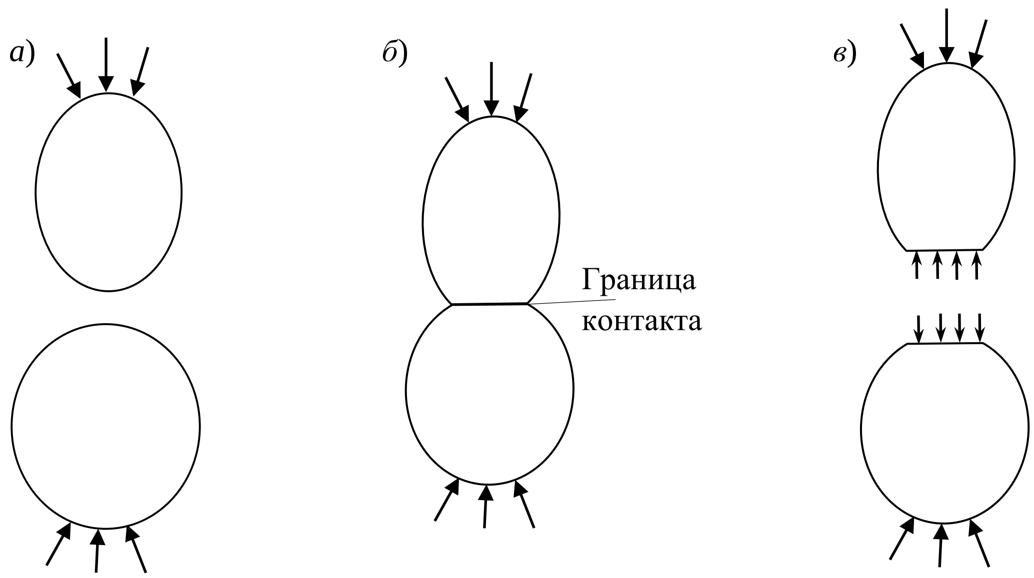

Рисунок 2.1 – Схема контакта двух тел. а) два тела до контакта; б) контакт двух тел; в) действие контактных сил

Распределённые контактные касательные силы могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому в условии рассматривается абсолютная величина R_T. В соответствии с законом трения Кулона предполагаем, что между контактирующими частицами тел нет относительного движения до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$|R_T| < \mu_s R_N, \tag{2.8}$$

где μ_s – статический коэффициент трения.

Как только нарушается неравенство (2.8) контактирующие частицы приходят в относительное движение, при этом касательные контактные силы подчиняются равенству:

$$|R_T| = \mu_d R_N, \tag{2.9}$$

где μ_d – динамический коэффициент трения.

Относительное движение контактирующих частиц продолжается до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$|R_T| < \mu_d R_N, \tag{2.10}$$

Относительного движения контактирующих частиц не будет до тех пор, пока вновь не перестанет выполняться неравенство (2.9).

Таким образом, контактная задача представляет собой формулировку уравнения для движения двух тел с наложенными кинематическими (2.6) и статическими (2.7) ограничениями их движения относительно друг друга [84, 86].

При решении контактных задач, как правило, пользуются двумя наиболее известными методами решения: методом множителей Лагранжа и методом штрафных функций. Основная идея решения контактных задач заключается в том, что к уравнению принципа возможных перемещений добавляются ограничения в виде потенциалов контактных сил.

В случае решения контактной задачи методом множителей Лагранжа, потенциал контактных сил:

$$W_c = -\int_c \boldsymbol{t} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) dc, \tag{2.11}$$

где c – поверхность контакта между телами B^1 и B^2; $\boldsymbol{t}$ – вектор поверхностных контактных сил, действующих на поверхности контакта c (это независимая величина, которая играет роль множителя Лагранжа); $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ – радиусы-векторы материальных точек контактирующих тел. Таким образом, метод множителей

Лагранжа приводит к введению в формулировку задачи новых неизвестных – множителей Лагранжа [84].

В случае решения контактной задачи методом штрафных функций (метод штрафов), потенциал контактных сил:

$$W_c = \frac{1}{2}\int_c (\varepsilon_n g_N^2 + \varepsilon_t g_t^2) dc, \tag{2.12}$$

где $g_N = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \geq 0$ – нормальный перехлёст контактирующих частиц (взаимное проникновение по нормали $\mathbf{n}$ к границе c); $g_t = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)$ – касательный перехлёст, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор к границе c, $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_t \geq 0$ – нормальный и касательный параметры штрафа, так что:

$$\varepsilon_n \to \infty \Longrightarrow g_N \to 0;\ \varepsilon_t \to \infty \Longrightarrow g_t \to 0.$$

Второй член в подынтегральном выражении (2.12) учитывается только в случае прилипания контактирующих тел, а именно когда выполняется (2.9). Метод штрафных функций подразумевает введение фиктивных пружин на границе контакта, которые предохраняют тела от взаимного проникновения [84].

Рассмотрим принципы работы контактов, используемых для решения задач в рамках данного исследования, и методы их решения, реализованные в конечно-элементных пакетах более подробно на схеме масса-пружинка.

2.1.1 Контакт без трения

Рассмотрим контактную задачу, состоящую из точечной массы m, на которую действует сила тяжести, и которая подвешена на пружинку с жесткостью k. Перемещение точечной массы m ограничено жесткой плоскостью (рис. 2.2). Энергия для этой системы может быть записана как:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu. \tag{2.13}$$

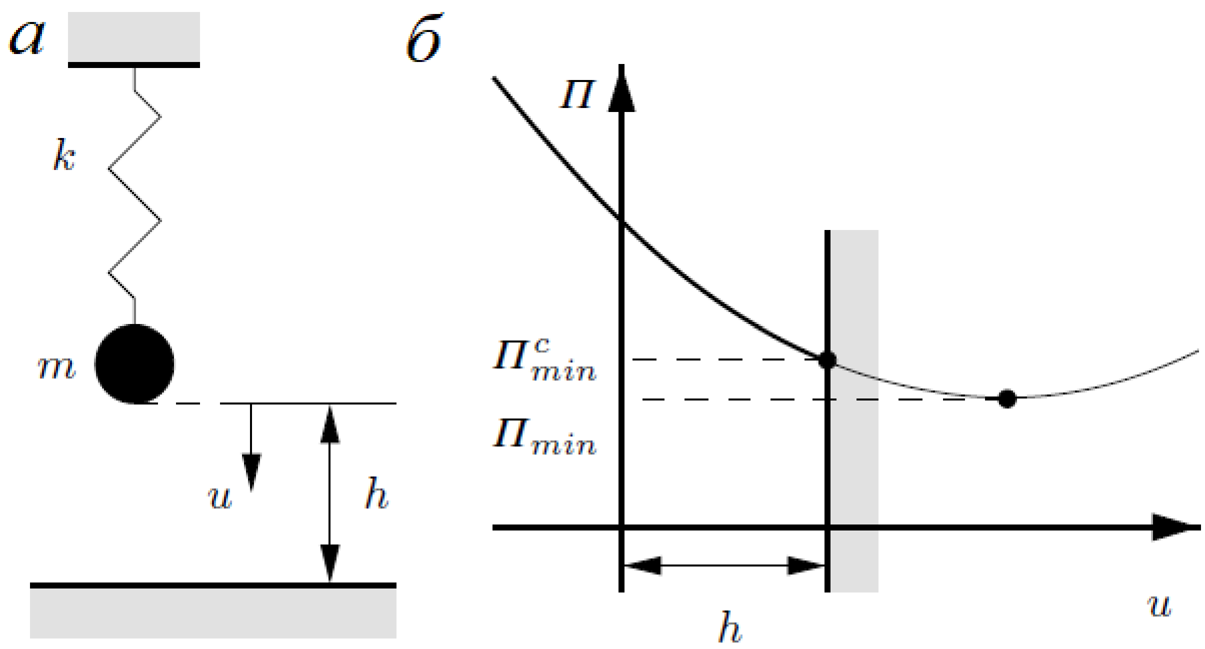

Рисунок 2.2 – а) схема, в которой точечная масса поддерживается пружинкой;

б) зависимость потенциальной энергии от перемещения [33]

Если не накладывать никаких ограничений на смещение u, то можно вычислить экстремум (2.13) по вариации, что приводит к:

$$\delta\Pi(u) = ku\delta u - mg\delta u = 0. \tag{2.14}$$

Поскольку вторая вариация $\Pi(u)$ дает $\delta^2\Pi = k,$ экстремум (2.13) является минимумом при $u = \frac{mg}{k}$. Это изображено на рисунке 2.2 (б).

Ограничение движения массы жесткой опорой можно описать, как:

$$c(u) = h - u \geq 0, \tag{2.15}$$

что исключает проникновение по ограничению неравенства. При $c(u) > 0$ существует зазор между точечной массой и жесткой опорой. При $c(u) = 0$ зазора нет.

Отметим, что изменение δu ограничено на поверхности контакта; из (2.15) можно получить $\delta u \leq 0$, что означает, что виртуальное перемещение должно удовлетворять ограничению и может быть только в вертикальном направлении. Использование этой вариации в вариационной форме (2.14) дает неравенство:

$$ku\delta u - mg\delta u \geq 0, \tag{2.16}$$

в котором знак неравенства следует из того факта, что сила mg больше силы пружины kh в случае контакта, и что вариация на жесткой опоре составляет $\delta u < 0$. Уравнение (2.16) называется вариационным неравенством. Из-за ограничения пространства решения условием ограничения (2.15) решение (2.13) находится не в минимальной точке, связанной с Π_{min}, а в точке, связанной с Π_{min}^c, которая обозначает минимальную энергию в допустимом пространстве решений (рис. 2.2(б)).

Часто вместо вариации δu используется разность между тестовой функцией v и решением u: $\delta u = v - u$. Тестовая функция должна удовлетворять условию $v - h \leq 0$ в точке контакта, как и решение u. С помощью тестовой функции v уравнение (2.14) можно записать в виде:

$$ku(v - u) - mg(v - u) = 0. \tag{2.17}$$

Так как $mg > ku$ в точке контакта, то имеем ограничение $v - h \leq 0$:

$$ku(v - u) \geq mg(v - u). \tag{2.18}$$

В обоих случаях неравенство (2.15), ограничивающее перемещение u, приводит к вариационным неравенствам, которые характеризуют решение u. Эти вариационные неравенства не могут быть непосредственно применены для решения контактной задачи. Для этого нужно использовать соответствующие методы.

Как только точечная масса соприкасается с твердой поверхностью, возникает сила реакции f_R. В классической механике контактного взаимодействия предполагается, что сила реакции между твердой поверхностью и точечной массой отрицательна, поэтому контактное давление может быть только сжимающим. Такое предположение исключает силы трения на поверхности контакта и приводит к ограничению:

$$R_N \leq 0. \tag{2.19}$$

Это означает, что либо есть состояние сжатия ($R_N < 0$), либо сила реакции отсутствует ($R_N = 0$).

Подводя итог, необходимо различать два случая в контактной задаче, где движение ограничено (2.15):

1. Жесткость пружины достаточно велика, чтобы точечная масса не касалась жесткой поверхности. В этом случае действуют следующие условия:

$$c(u) > 0 \text{ и } R_N = 0. \tag{2.20}$$

2. Данные системы масса – пружинка таковы, что точечная масса входит в контакт с жесткой опорой. В этом случае выполняются условия:

$$c(u) = 0 \text{ и } R_N < 0. \tag{2.21}$$

Оба случая могут быть объединены в утверждении:

$$c(u) \geq 0, \ R_N \leq 0 \text{ и } R_N \cdot c(u) = 0, \tag{2.22}$$

которые известны как условия Герца–Синьорини–Мореау в механике контактного взаимодействия.

Вышеприведенные рассуждения можно изобразить на графике зависимости силы реакции от зазора (2.15), на рисунке 2.3. Поскольку кривая смещения нагрузки имеет угол, она не дифференцируема стандартным способом. В связи с этим, когда нужно анализировать контактные задачи, то необходимо применять математические методы для негладких задач [33].

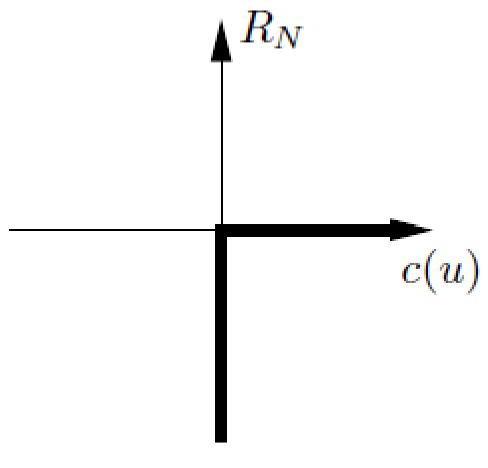

Рисунок 2.3 – Зависимость силы реакции от зазора [33]

2.1.2 Контакт с трением

Теперь используя ту же систему, также можно вычислить фрикционное поведение системы масса-пружинка. Для этого предположим, что масса находится в контакте с жесткой опорой, следовательно, $R_N < 0$. Теперь дополнительно прикладывается сила по касательной к опорной плоскости (рис. 2.4). Уравнения равновесия в вертикальном и тангенциальном направлениях для состояния контакта с обозначениями, приведенными на рисунке 2.4, запишутся как:

$$R_N + mg - kh = 0 \tag{2.23}$$

$$R_T - F_T = 0. \tag{2.24}$$

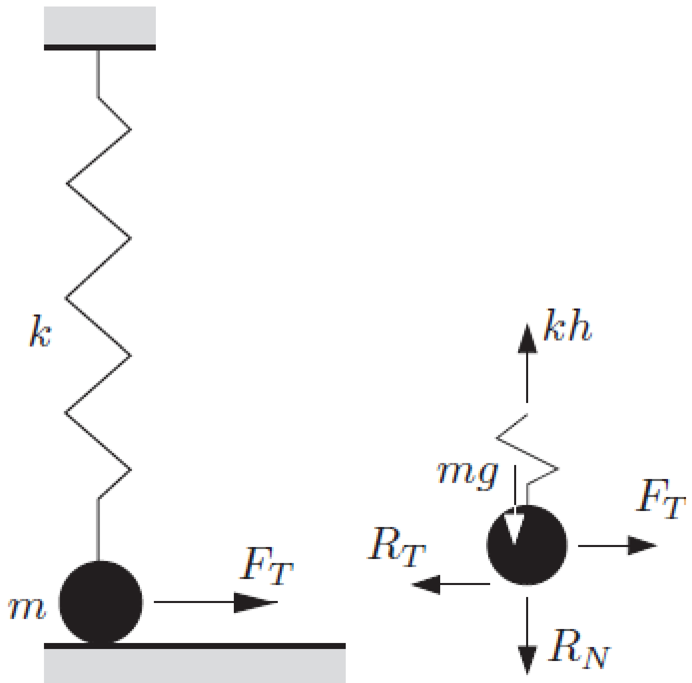

Рисунок 2.4 – Система масса-пружинка под действием тангенциальной силы [33]

Трение между массой и жесткой опорой описывается определяющим уравнением, которое должно быть сформулировано таким образом, чтобы оно описывало физические явления процесса трения. Простейшей моделью, широко используемой в технике, является закон Кулона. В этом определяющем уравнении проводится различие между сцеплением и скользящим состоянием. Сцепление означает, что нет относительного тангенциального движения между массой и жесткой опорой. Во время скольжения между массой и жесткой опорой будет относительное смещение u_T. Эти предположения приводят к следующему набору уравнений, которые описывают фрикционное поведение.

1. Закон Кулона обеспечивает неравенство с участием нормальных (вертикальных) и тангенциальных реакционных сил:

$$f(R_N, R_T) = |R_T| + \mu R_N \leq 0. \qquad (2.25)$$

В этом неравенстве определяющий параметр μ называется коэффициентом трения, который, на самом деле, может зависеть от нескольких других величин, которые будут обсуждаться позже. Стоит обратить внимание, что берется абсолютная величина тангенциальной реакции, поскольку тангенциальная сила F_T может быть положительной или отрицательной. Неравенство (2.25) теперь можно использовать для различия сцепления и скольжения.

2. Сцепление происходит, когда:

$$|R_T| < -\mu R_N. \qquad (2.26)$$

В этом случае нет относительного тангенциального перемещения между массой и жесткой опорой: $u_T = 0$. Кроме того, тангенциальная сила R_T является силой реакции, которая может быть определена из (2.24).

3. Скольжение происходит, когда:

$$|R_T| = -\mu R_N. \qquad (2.27)$$

В этом случае имеем относительное тангенциальное смещение между массой и жесткой опорой: $u_T \neq 0$, а R_T следует непосредственно из приведенного выше уравнения. Направление u_T будет противоположно силе тангенциальной реакции R_T.

Сформулированные выше неравенства можно записать в форме Куна – Такера:

$$|u_T| \geq 0, \; f \leq 0 \; \text{ и } \; |u_T| f = 0, \qquad (2.28)$$

куда входит абсолютное значение тангенциального смещения, поскольку тангенциальная сила F_T может действовать в положительном или отрицательном направлении.

Рассмотренный выше анализ приводит к диаграмме смещения для тангенциальной нагрузки в зависимости от тангенциального смещения в случае трения. Это показано на рисунке 2.5. Как и в случае без трения (рис. 2.3), кривая силы трения смещена и демонстрирует негладкое поведение. Это приводит к математическим трудностям из-за не дифференцируемости по углам при решении контактных задач с трением [33].

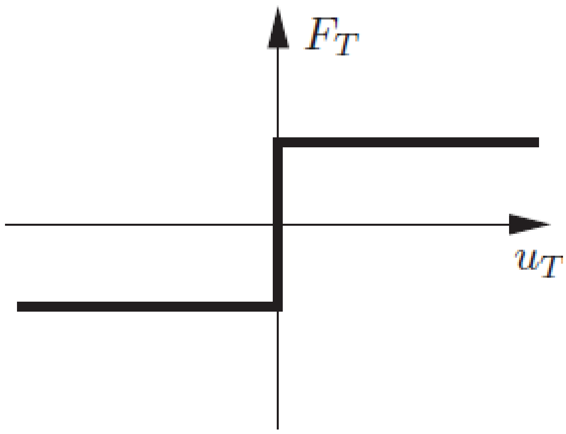

Рисунок 2.5 – Диаграмма нагрузка-перемещение для контакта с трением [33]

2.1.3 Метод множителей Лагранжа

Решение контактной задачи, в которой движение ограничено неравенством (2.15), можно получить методом множителей Лагранжа.

Для этого предположим, что ограничение активно, а значит, условие (2.21) выполняется. Поэтому метод множителей Лагранжа добавляет к энергии системы (2.13) слагаемое, которое содержит ограничение и даёт:

$$\Pi(u, \lambda) = \frac{1}{2} k u^2 - mgu + \lambda c(u). \qquad (2.29)$$

Сравнение с (2.22) показывает, что множитель Лагранжа λ эквивалентен силе реакции f_R. Варьирование (2.29) приводит к двум уравнениям, поскольку δu и $\delta\lambda$ можно изменять независимо:

$$ku\delta u - mg\delta u - \lambda\delta u = 0, \qquad (2.30)$$

$$c(u)\delta\lambda = 0. \qquad (2.31)$$

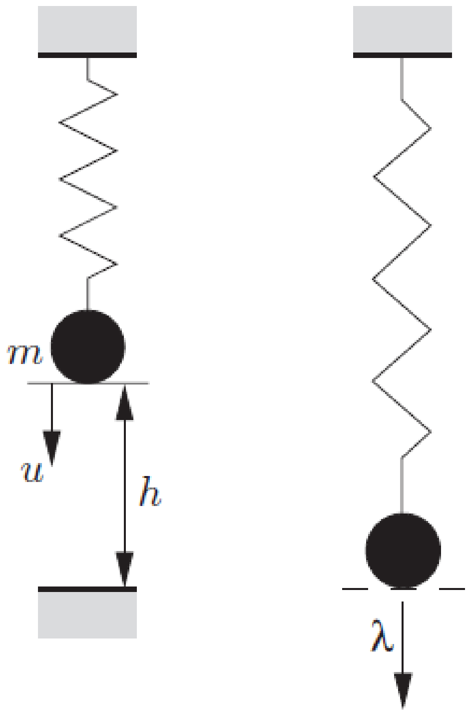

Рисунок 2.6 – Точечная масса поддерживается пружиной и силовой схемой для метода множителей Лагранжа [33]

Первое уравнение представляет собой уравнение равновесия для точечной массы, включая силу реакции, когда она касается твердой поверхности (рис. 2.6), а второе уравнение определяет выполнение уравнения кинематического ограничения (2.15) для контакта при: $u = h$. Благодаря этому вариация больше не имеет ограничений, и можно найти множитель Лагранжа λ, который эквивалентен силе реакции R_N, см. (2.29),

$$\lambda = kh - mg = R_N. \tag{2.32}$$

Однако условие (2.19) должно быть проверено и выполнено решением (2.32). Если это условие не выполняется, то и предположение о контакте больше не выполняется. Это означает, что ограничение неравенства неактивно, и правильное решение может быть вычислено из (2.14) как $u = \frac{mg}{k}$; кроме того, сила реакции или множитель Лагранжа равны нулю [33].

2.1.4 Метод штрафов

Другим хорошо известным методом, который часто применяется в конечно-элементном анализе контактных задач, является метод штрафов. Здесь в качестве ограничения добавляется штрафное слагаемое к энергии (2.13) следующим образом:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \frac{1}{2}\varepsilon[c(u)]^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.33}$$

Как видно из рисунка 2.7, параметр штрафа ε можно интерпретировать как жесткость пружины на поверхности контакта между точечной массой и жесткой опорой. Это связано с тем, что энергия штрафного слагаемого имеет ту же структуру, что и потенциальная энергия простой пружины. Вариация (2.33) дает предположение о контакте:

$$ku\,\delta u - mg\,\delta u - \varepsilon\, c(u)\delta u = 0, \tag{2.34}$$

из которого можно вывести решение:

$$u = (mg + h)/(k + \varepsilon) \tag{2.35}$$

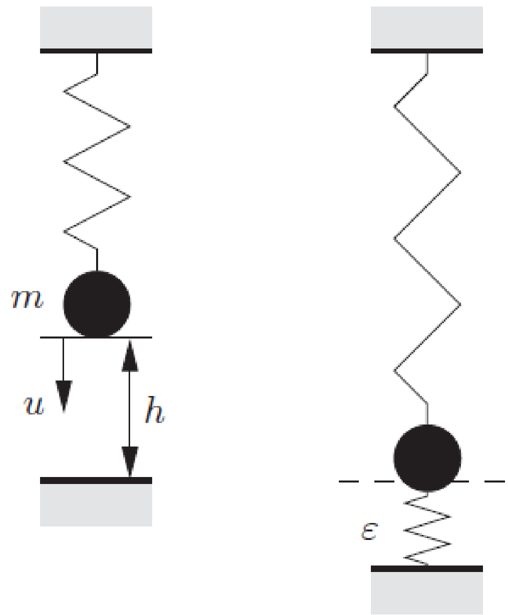

Рисунок 2.7 – Точечная масса поддерживается пружиной и штрафной пружиной за счёт штрафного слагаемого [33]

Тогда уравнение ограничения:

$$c(u) = h - u = \frac{kh - mg}{k + \varepsilon} \tag{2.36}$$

Поскольку $mg \geq kh$ в случае контакта, уравнение (2.36) означает, что происходит проникновение точечной массы в жесткую опору, что физически эквивалентно сжатию пружины (рис. 2.7). Нужно обратить внимание, что проникновение зависит от параметра штрафа. Уравнение ограничения выполняется только в пределе $\varepsilon \to \infty \Rightarrow c(u) \to 0$. Следовательно, в методе штрафов можно выделить два предельных случая:

1. $\varepsilon \to \infty \Rightarrow u - h \to 0$, это решение для очень больших штрафных параметров. Интуитивно ясно, что это означает, что жесткость штрафной пружины очень велика, и, следовательно, происходит только очень небольшое проникновение.
2. $\varepsilon \to 0$ представляет собой неограниченное решение и, таким образом, допустимо только для неактивных ограничений. При таком контакте, решение с очень маленьким штрафным параметром ε приводит к большим проникновениям (2.36).

Сила реакции для метода штрафов вычисляется как $R_N = \varepsilon c(u)$. То есть получаем решение из (2.36):

$$R_N = \lambda = \varepsilon c(u) = \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}(kh - mg), \tag{2.37}$$

которое в пределе $\varepsilon \to \infty$ даёт правильное решение, полученное методом множителей Лагранжа (2.32) [33].

2.2 Основные принципы решения контактных задач в ANSYS Workbench

2.2.1 Геометрия модели

Первым этапом решения задачи является создание геометрической модели или импорт готовой модели из сторонних CAD-систем. В Workbench для этого используется модуль **Geometry**, который позволяет вызвать приложение **Design Modeler**. Геометрическая модель – это математическая модель, которая представляет собой геометрическое описание исследуемого реального объекта, а для программных инженерных комплексов задаёт границы расчётной области в пространстве.

Геометрический процессор **Design Modeler** основан на ядре **Parasolid** и позволяет строить, как двумерные, так и трёхмерные модели, через интерфейс. Геометрическая модель строится последовательно, в соответствии с иерархией примитивов: от создания точек к созданию линий, поверхностей и твердотельных объёмов. История построения геометрической модели представлена в виде древовидной структуры, что позволяет изменять необходимые параметры любых примитивов в любой момент времени построения геометрии. **Design Modeler** позволяет создавать геометрические модели, как на основе эскизов, так и с помощью готовых трёхмерных примитивов.

2.2.2 Сетка конечных элементов

После создания геометрической модели выполняется её разбиение на конечные элементы, т.е. выполняется дискретизация расчётной области. Построение сетки конечных элементов выполняется с помощью модуля **Meshing**. Построение пространственной сетки – один из важнейших этапов в решении задач сплошной среды методом конечных элементов. Качественная расчетная сетка в большинстве случаев является одним из ключевых аспектов получения достоверных результатов численного решения. Некорректно построенная сетка приводит к снижению точности решения, а также к отсутствию сходимости.

Структура сетки определяется законами, устанавливающими взаимосвязь между формой и расположением отдельных элементов сетки относительно друг друга. Если распределение узлов расчетной сетки определяется некоторым общим правилом, то такая сетка называется структурированной, или регулярной. Если же множество узлов сетки не упорядочено (связь между соседними узлами изменяется от элемента к элементу), то такая сетка является неструктурированной, или нерегулярной (рис. 2.8).

Конформными (согласованными) называются сетки, элементы которых удовлетворяют условию: если два любых элемента сетки пересекаются, то область их пересечения представляет собой их общую грань или ребро (рис. 2.9) [87].

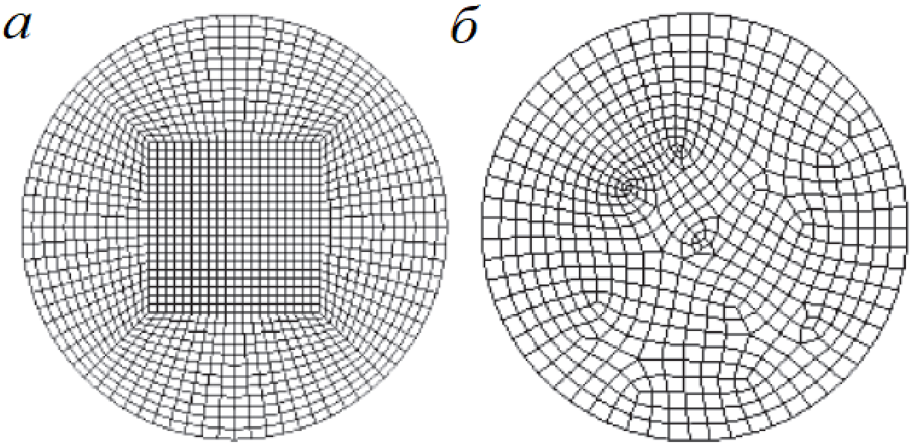

Рисунок 2.8 – Структура расчётных сеток: а) регулярная сетка; б) нерегулярная сетка [87]

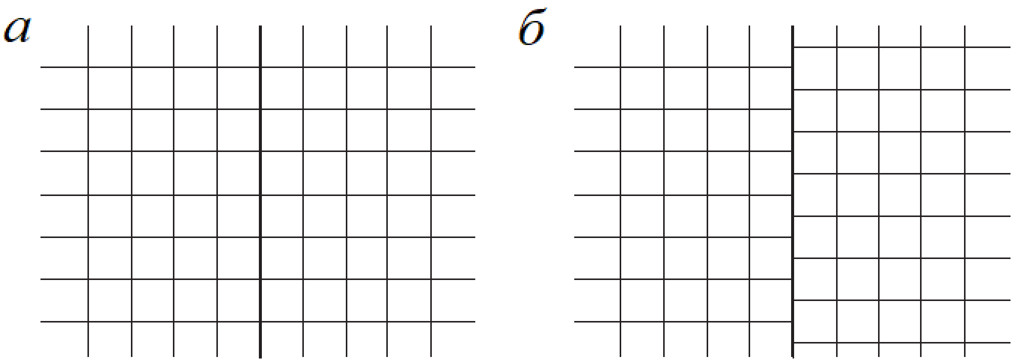

Рисунок 2.9 – Согласованность расчётных сеток: а) конформная сетка; б) неконформная сетка [87]

Конечно-элементные сетки могут быть двумерными и трёхмерными, и соответственно различаться элементами, используемыми для их построения. Двумерные расчётные сетки состоят из треугольных и четырёхугольных элементов, а на границе контакта используются конечные элементы в виде линий и парабол. Для разбиения объёмных трёхмерных тел используются гексаэдры, тетраэдры, пирамиды и призмы. Сетка конечных элементов может быть гибридной и состоять, как из двумерных, так и из трёхмерных элементов. Следует отметить, что сетки с четырехугольными элементами/гексаэдрами содержат меньшее число элементов на модель по сравнению с сетками на основе тетраэлементов, поэтому позволяют быстрее получить решение.

Под размером расчетной сетки подразумевается количество узлов и/или элементов этой сетки, а размер сеточного элемента определяется максимально длинной гранью ячейки. С уменьшением размеров элементов сетка более точно аппроксимирует геометрию расчетной области, что позволяет получить более точное решение исходной задачи. При этом следует помнить, что чем меньше размеры сеточных элементов, тем выше затраты вычислительных ресурсов, необходимых для проведения расчета, поэтому необходимо искать оптимальное соотношение этих показателей.

При настройке разбиения сетки группа параметров **Sizing** позволяет настраивать размеры и плотность сеточных ячеек и управлять разрешающей способностью сетки глобально (то есть применительно ко всем элементам геометрической сборки, включая ребра, грани и объемные тела) и локально (например, для сгущения сетки в определённой зоне), что было выполнено в данном исследовании для ряда задач в области контактного взаимодействия.

Чем сложнее геометрическая модель, тем проблематичнее построить для нее структурированную сетку с ячейками на основе гексаэдров, которая, безусловно, позволила бы получить более быструю сходимость численного решения [87].

В данном исследовании при построении сетки использовались следующие типы конечных элементов для двумерной осесимметричной сетки и для трёхмерной сетки.

PLANE183 – это двумерный, 8-узловой элемент имеющий две степени свободы в каждом узле: перемещение в узлах в направлениях x и y. Этот элемент может использоваться, как плоский элемент (для задач плоского напряжённого и плоского деформированного состояний) или как осесимметричный элемент, в зависимости от выбранной опции. Помимо упругости PLANE183 может описывать пластичность, гиперупругость, ползучесть и большие деформации (рис. 2.10).

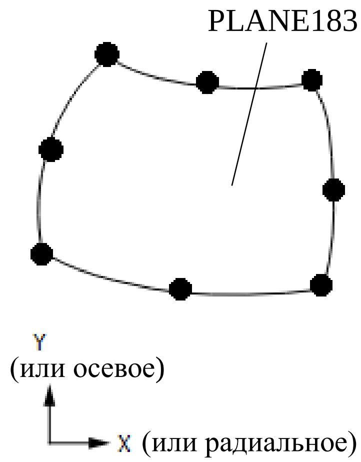

Рисунок 2.10 – Геометрия конечного элемента PLANE183

SOLID186 – это трёхмерный твердотельный 20-узловой элемент высокого порядка. Каждый узел элемента имеет три степени свободы: перемещения в направлениях x, y, z. Элемент поддерживает пластичность, гиперупругость, ползучесть, большие деформации и перемещения. Геометрия, расположение узлов и система координат для этого элемента показаны на (рис. 2.11). Элемент может быть представлен в форме параллелепипеда, призмы, пирамиды и тетраэдра. На поверхности элемента давления могут быть заданы в виде поверхностных нагрузок.

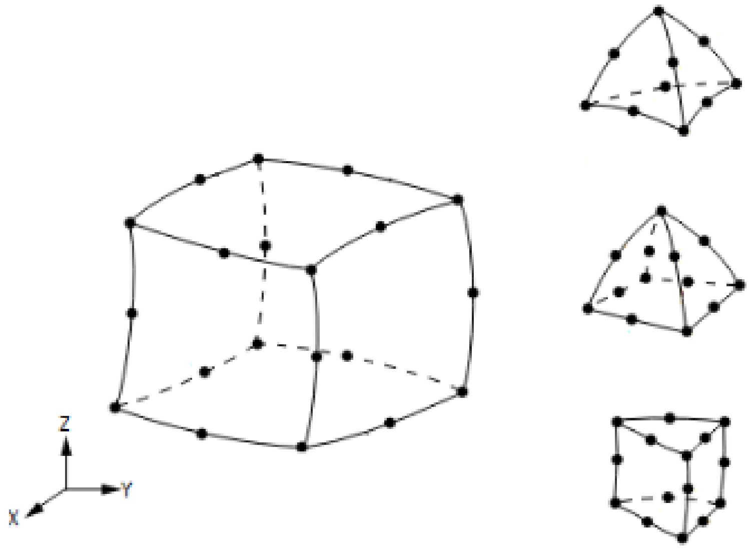

Рисунок 2.11 – Геометрия конечного элемента SOLID186

2.2.3 Моделирование с учётом контактного взаимодействия

В природе все конструкции являются нелинейными. Когда эффекты нелинейности малы, ими можно пренебречь, однако, если нелинейные эффекты значительно влияют на поведение рассматриваемой конструкции и ими нельзя пренебрегать, то задачу необходимо решать в нелинейной постановке. Нелинейности могут быть: геометрические, физические (поведение материала) и контактные.

Контакт является нелинейностью в виде изменения статуса контакта: открытого или закрытого. В зависимости от жесткости контактирующих поверхностей контакты классифицируют на жестко-податливые (rigid-to-flexible) и податливо-податливые (flexible-to-flexible).

Контактное взаимодействие возникает при сближении точек поверхности тел до заданного расстояния, которое носит название «радиус обнаружения» (**Pinball Radius**). На первом этапе моделирования контактного взаимодействия выполняется поиск точек поверхностей тел, сблизившихся на заданное расстояние. Точками поверхности являются узлы конечно-элементной сетки. Однако если требуется повышение точности, то поиск может выполняться и по точкам интегрирования элемента. Вследствие большой вычислительной сложности алгоритма поиска контактирующих точек, области поиска нужно ограничивать. Для этого назначается контактный интерфейс в виде двух областей поверхности, одна из которых является контактной (**Contact**), а другая – целевой (**Target**).

Понятия контактной и целевой областей связаны со вторым этапом контактного алгоритма, на котором вычисляются контактные силы. Для вычисления контактных сил часто используются штрафные методы, предполагающие возможность взаимопроникновения контактирующих поверхностей на некоторую величину. По величине проникновения и контактной жесткости определяются контактные силы $F_{contact}$, которые действуют только на контактную поверхность, что приводит к ее деформации и, соответственно, уменьшению величины проникновения. Таким образом, величина проникновения всегда будет оставаться малой.

Для моделирования контактного взаимодействия используются специальные элементы типа CONTAxxx и TARGExxx, которые наносятся на соответствующие поверхности.

Целевые (**Target**) элементы предназначены для определения величины проникновения. Целевая поверхность должна назначаться на наиболее жестком теле.

Величина проникновения рассчитывается как расстояние между узлом контактного (**Contact**) элемента и гранью целевого элемента. Из этого следует, что, когда размер контактных элементов значительно превышает размер целевых элементов, узлы целевой поверхности могут проникать через грани элементов контактной поверхности. Узлы контактной поверхности не могут проникать через грани целевой поверхности. Поэтому сетка в области контактного взаимодействия тел должна быть мелкой на теле с контактной поверхностью. Если для обнаружения контакта на целевой поверхности используются точки интегрирования, проникновение ограничивается этими точками [87].

При выборе контактных пар и задании контактной и целевой поверхностей, необходимо придерживаться следующих правил:

- ✓ При контакте выпуклого тела с плоским или вогнутым, выпуклая поверхность принимается контактной, а вогнутая или плоская – целевой;
- ✓ При контакте сеток с различным разбиением, поверхность с более мелкой сеткой принимают контактной, а с более крупной – целевой;
- ✓ Более мягкая поверхность выбирается контактной, а более жесткая – целевой;
- ✓ Меньшая поверхность выбирается контактной, а большая – целевой.

Если в контактной области одна поверхность является контактной, а другая – целевой, то контакт называют несимметричным. Если каждая поверхность является и контактной, и целевой одновременно, контакт называют симметричным.

В конечно-элементном пакете ANSYS реализуется пять моделей контакта: «узел к узлу», «узел к поверхности», «линия к линии», «линия к поверхности» и «поверхность к поверхности». В данном исследовании рассматривались трёхмерные и осесимметричные задачи, поэтому модель контакта для всех задач была выбрана «поверхность к поверхности».

Контактная поверхность моделировалась конечными элементами CONTA172 для осесимметричных задач в двумерной постановке и CONTA174 для трёхмерных задач со сложной геометрией контакта.

Для целевой поверхности выбирались следующие конечные элементы. TARGET169 использовался для осесимметричных задач в двумерной постановке. TARGET170 использовался для трёхмерных задач со сложной геометрией контакта.

CONTA172 – это двумерный тип элемента, трёхузловой, высокопорядковый параболический, который может быть расположен на поверхности двумерных твердотельных, в том числе двумерных осесимметричных элементов, со срединными узлами, таких как PLANE183. Элемент используется для описания контакта и скольжения с двумерной целевой поверхностью TARGET169 (рис. 2.12). Элемент имеет те же геометрические характеристики, что и поверхность сплошного элемента, с которой он связан. Контакт происходит, когда поверхность элемента проникает в соответствующую целевую поверхность.

Элемент позволяет использовать кулоновское трение, трение при сдвиговом напряжении, а также имеет возможность разделять контактные поверхности, например, позволяет разделить связанный контакт для имитации расслоения интерфейса.

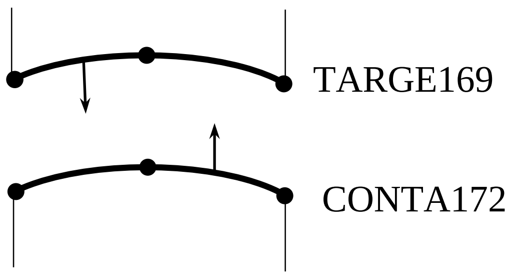

Рисунок 2.12 – Геометрия конечных элементов TARGE169 и CONTA172

CONTA174 – это 8-узловой элемент, предназначенный для общего анализа жестко-податливого и податливо-податливого контактов. При общем анализе контактов площадь контакта между двумя телами, как правило, заранее не известна. CONTA174 применяется для трёхмерной геометрии и является парным с трёхмерным целевым элементом TARGE170. Имеет такие же геометрические характеристики, что и основные элементы на поверхности контакта. Точки обнаружения контакта являются точками интегрирования и расположены либо в узловых точках, либо в Гауссовых точках. Контактный элемент имеет условие ограничения проникновения в целевую поверхность в точках интегрирования. CONTA174 использует Гауссовы точки интегрирования, определённые в [88, 89], которые обеспечивают более точный результат, чем при использовании самих узлов в качестве интеграционных точек. Для элемента используется метод поверхностной проекции [90, 91], в котором вводятся ограничения на контакт в перекрывающейся области при наложении контактного и целевого элементов (рис. 2.13). Этот метод предлагает более плавное распределение напряжений, чем другие варианты обнаружения контактов: контактные силы изменяются плавно при большом скольжении и не прыгают, когда узлы контактной поверхности соскальзывают с краёв целевых поверхностей.

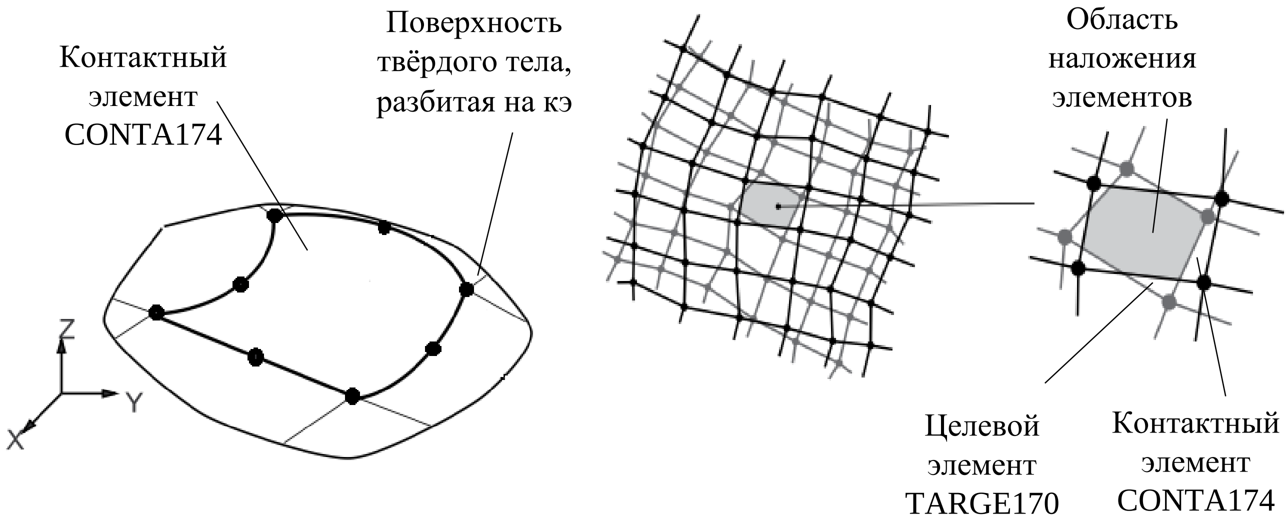

Рисунок 2.13 – Геометрия конечного элемента CONTA174. Метод поверхностной проекции

CONTA174, как и CONTA172, позволяет использовать кулоновское трение, трение при сдвиговом напряжении, а также имеет возможность разделять контактные поверхности.

TARGE170 используется для описания трёхмерных целевых поверхностей. Элементы перекрывают поверхность твердотельных элементов и повторяют их поверхностную геометрию. TARGE170 поддерживает десять типов геометрии трёхмерных сегментов. В рассматриваемых задачах использовался 8-узловой целевой элемент с геометрией, идентичной CONTA174. Силы реакции на всей целевой поверхности получают путём суммирования всех узловых сил, связанных с контактными элементами. По аналогии с TARGE170, TARGE169 используется для целевых поверхностей, но в двумерной постановке (рис. 2.12).

В контактной паре может существовать только один тип контакта. В модели можно смешивать различные типы контактных пар: жестко-податливый и податливо-податливый контакты; симметричный и несимметричный.

Контакты типа **Bonded** и **No Separation** являются линейными и рассчитываются за одну итерацию. Контакты типа **Friction/Frictionless** и **Rough** – нелинейные и требуют использования метода Ньютона–Рафсона и множества итераций.

Связаный контакт (**Bonded**) – этот тип установлен по умолчанию и применим для всех типов контактных областей. Между гранями или ребрами не допускается проскальзывания или разделения.

Контакт без разделения (**No Separation**) – этот тип контакта похож на предыдущий, но применим только к граням (для трехмерных тел) или ребрам (для двумерных). Разрыва между областями контакта не допускается, но малые перемещения в виде проскальзывания без трения могут возникать.

Контакт без трения (**Frictionless**) – при растяжении нормальные напряжения становятся равными нулю, тела разделяются. Применяется только к граням (трехмерные тела) или ребрам (двумерные тела). Решение нелинейное, поскольку площадь контактного взаимодействия может изменяться по мере приложения нагрузки. Предполагается, что коэффициент трения равен нулю, и, таким образом, допускается свободное скольжение.

Контакт с трением (**Frictional**): аналог **Frictionless**, учитывающий трение. Задается коэффициент трения.

Шероховатый контакт (**Rough**) – моделирует идеальную шероховатую поверхность контакта с трением, которая не допускает проскальзывания. Применим только к граням (трехмерные тела) либо ребрам (двумерные тела). Соответствует бесконечному коэффициенту трения между контактирующими телами.

В оболочке Workbench Mechanical используются следующие методы решения контактной задачи:

- ✓ метод штрафов (Pure Penalty);
- ✓ расширенный метод Лагранжа (Augmented Lagrange);
- ✓ уравнения связей (Internal Multipoint Constraint);
- ✓ нормальный метод Лагранжа (Normal Lagrange).

В данном исследовании при решении контактных задач использовался метод штрафов и расширенный метод Лагранжа.

Метод штрафов и расширенный метод Лагранжа основаны на следующей зависимости контактной силы от величины проникновения:

$$F_n = k_n \cdot x_p, \tag{2.38}$$

где k_n – контактная жесткость (в направлении нормали к поверхности); x_p – величина проникновения (по нормали к поверхности).

Основное различие между методами **Pure Penalty** и **Augmented Lagrange** заключается в том, что в последнем к силе контакта добавляется величина λ, которая снижает чувствительность к величине жесткости контакта:

$$F_n = k_n \cdot x_p + \lambda. \tag{2.39}$$

Если задан контакт типа **Rough** или **Bonded**, то, кроме условия непроникновения, контактирующие тела не могут проскальзывать друг относительно друга в касательном направлении. При проскальзывании в касательном направлении всегда используется метод **Pure Penalty**. Жесткость контакта по касательной и расстояние проскальзывания являются аналогичными параметрами:

$$F_\tau = k_\tau \cdot x_s, \tag{2.40}$$

где k_τ – контактная жесткость (в направлении касательной к поверхности); x_s – величина проскальзывания.

По умолчанию используется метод штрафов, как наиболее надежный с точки зрения сходимости. Расширенный метод Лагранжа рекомендуется применять с контактами типа **Frictionless**. Для метода штрафов и расширенного метода Лагранжа имеется возможность определения точек интегрирования, что позволяет в некоторых случаях улучшить сходимость, однако несколько увеличивает время счета [87].

2.2.4 Методика решения нелинейных задач

После построения сетки и задания контактных пар необходимо задать свойства материалов, граничные и начальные условия задачи, выбрать методы расчета, настроить решатель в соответствии с принятой физико-математической моделью и задать требуемую точность расчета.

Модуль **Static Structural** позволяет решить систему уравнений теории упругости.

Если задача решается в двумерной постановке, то в разделе геометрии (Geometry) дерева проекта нужно указать способ учета деформаций по толщине объекта (строка **2D Behavior**):

- ✓ плоское напряженное состояние (**Plane Stress**);
- ✓ плоское деформированное состояние (**Plane Strain**);
- ✓ осесимметричная постановка (**Axisymmetric**).

В этой строке можно указать, что задача решается в осесимметричной постановке (**Axisymmetric**). Для использования условия симметрии геометрическая модель должна быть рассечена плоскостью симметрии или осью симметрии в случае цилиндрических координат. При этом расчет проводится на одной части модели. Отсеченная часть модели заменяется условием симметрии, которое заключается в том, что узлам, расположенным в плоскости симметрии, запрещены перемещение по нормали к этой плоскости.

Процесс расчета является полностью автоматизированным, однако рекомендуется осуществлять контроль над процессом решения: следить за поведением решения и его соответствием критериям сходимости, выводить на экран дополнительные параметры, позволяющие оценить необходимые количественные характеристики решения.

Решение нелинейной задачи выполняется пошагово с плавным изменением нагрузки. Шаг нагружения – это конфигурация нагрузок в заданный момент времени. Шаги приращения (подшаги) – промежуточные конфигурации нагрузок, значения которых получаются путем линейной интерполяции между значениями двух шагов нагружения. Приращение нагрузки на подшаге может устанавливаться автоматически на основании данных о сходимости процесса и приращении деформаций на предыдущем подшаге, статусе контакта и т. д.

Метод Ньютона–Рафсона [92] является итерационным методом решения нелинейных задач. Метод заключается в отыскании на каждом шаге нагружения такого вектора внутренних сил, при котором система находится в равновесии. На каждой итерации выполняется решение системы линейных уравнений для нахождения приращения перемещений, на основании которых вычисляется вектор уравновешивающих сил. Итерации выполняются до тех пор, пока невязка между вектором внешних приложенных сил и вектором уравновешивающих сил не станет ниже заданного значения (критерия сходимости). Для нахождения вектора уравновешивающих внутренних сил в пределах подшага выполняются равновесные итерации.

Процесс дискретизации методом конечных элементов даёт набор уравнений:

$$[K]\{u\} = \{F^a\}, \tag{2.41}$$

где $[K]$ – матрица коэффициентов, $\{u\}$ – вектор неизвестных значений перемещений, $\{F^a\}$ – вектор приложенных нагрузок.

Если коэффициенты матрицы $[K]$ собственные функции неизвестных значений перемещений, тогда уравнение (2.41) является нелинейным уравнением. Метод Ньютона–Рафсона – это итеративный процесс решения нелинейных уравнений и может быть записан, как [93]:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\}, \tag{2.42}$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\}, \tag{2.43}$$

где, в случае конструкционного анализа, $[K_i^T]$ – якобиан (матрица жесткости), i – индекс, представляющий текущую равновесную итерацию, $\{F_i^{nr}\}$ – вектор сил, вычисленный из элементов напряжений.

$[K_i^T]$ и $\{F_i^{nr}\}$ оцениваются на основании полученных значений $\{u_i\}$. Правая часть уравнения (2.42) – это вектор остаточной или несбалансированной нагрузки, т.е. какая-то часть системы находится не в равновесии. Решение одной итерации показано на рисунке 2.14.

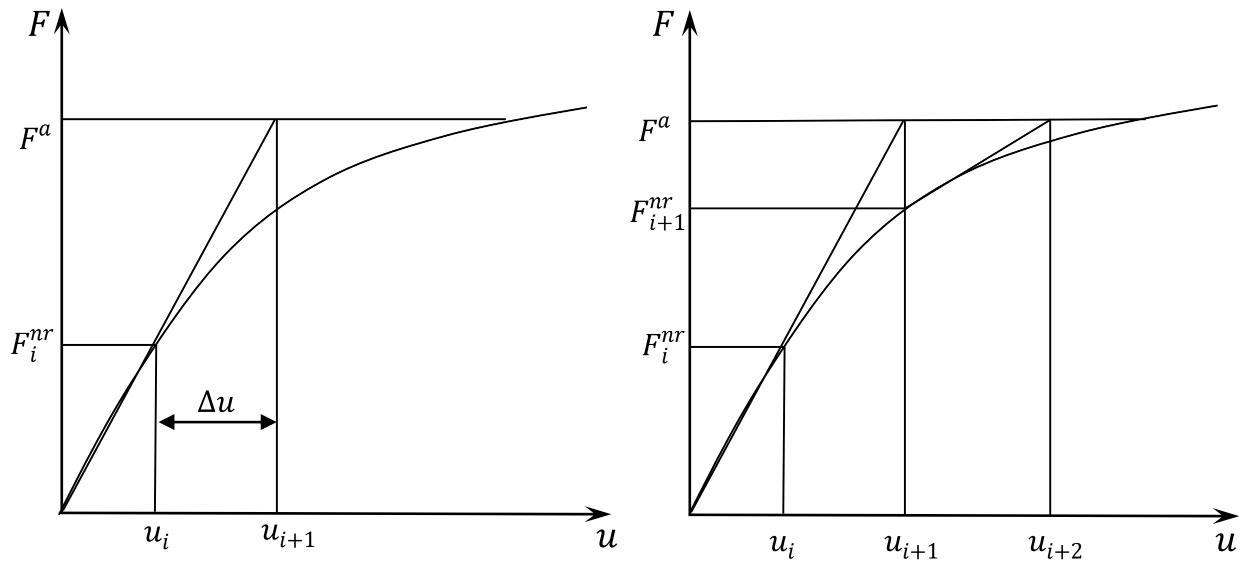

Рисунок 2.14 – Решение по методу Ньютона–Рафсона: а) для одной итерации; б) для двух итераций

Для получения сходящегося решения требуется более одной итерации по методу Ньютона–Рафсона. Общий алгоритм работает следующим образом:

1. Примем $\{u_i\} = \{u_0\} = 0$ на первом временном шаге. $\{u_i\}$ – является сходящимся решением предыдущего шага по времени.

2. Вычисляется обновлённая матрица жесткости $[K_i^T]$ и вектор текущих сил $\{F_i^{nr}\}$ из конфигурации $\{u_i\}$.

3. Вычисляется $\{\Delta u_i\}$ из уравнения (2.42).

4. $\{\Delta u_i\}$ добавляется к $\{u_i\}$, чтобы получить следующее приближенное решение $\{u_{i+1}\}$ по уравнению (2.43).

5. Шаги со 2 по 4 повторяются пока не будет достигнута сходимость решения.

Решение, полученное в конце итерационного процесса, будет соответствовать уровню нагрузки $\{F^a\}$. Конечное сходящееся решение будет в равновесии, так, что вектор текущей нагрузки $\{F_i^{nr}\}$ (вычисленный из текущего напряженного состояния) будет равен вектору приложенной нагрузки (по крайней мере, с некоторой допустимой точностью). Ни одно из промежуточных решений не будет находиться в равновесии.

Если анализ включает нелинейности, зависящие от пути нагружения (такие как пластичность или контакт), то процесс решения требует, чтобы некоторые промежуточные шаги решения были в равновесии. Это эффективно достигается путём указания пошагового анализа, т.е. конечный вектор нагрузки $\{F^a\}$ достигается приращением нагрузки и выполнением итераций Ньютона–Рафсона на каждом шаге нагружения:

$$\left[K_{n,i}^T\right]\{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \left\{F_{n,i}^{nr}\right\}, \quad (2.44)$$

где $\left[K_{n,i}^T\right]$ – матрица жесткости для временного шага n, итерации i, $\{F_n^a\}$ – вектор полной приложенной силы на шаге по времени n, $\left\{F_{n,i}^{nr}\right\}$ – вектор текущей нагрузки на шаге по времени n, итерации i.

Этот процесс является процедурой приращения Ньютона–Рафсона и показан на рисунке 2.15 *а*. Метод Ньютона–Рафсона гарантирует сходимость решения лишь в том случае, если решение на любой $\{u_i\}$ итерации близко к точному решению.

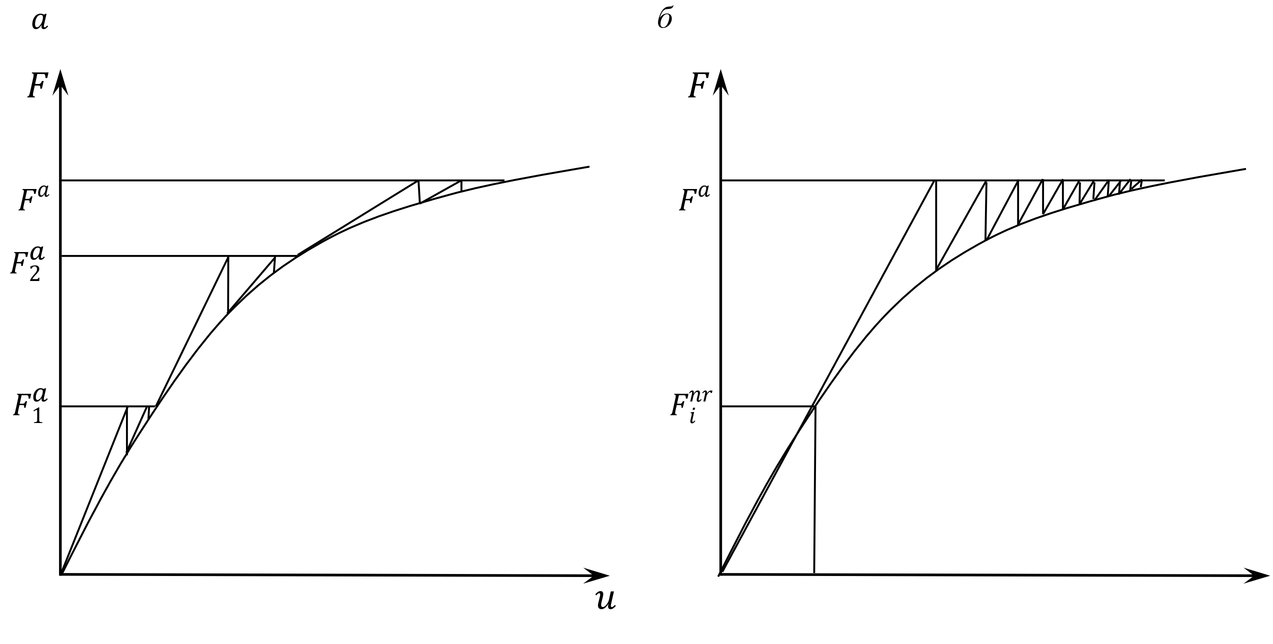

Рисунок 2.15 – Решение по методу Ньютона–Рафсона: а) процедура приращения; б) процедура начальной жесткости

Когда матрица жесткости обновляется на каждой итерации, как показано в уравнениях (2.42) и (2.44) процесс называется методом полного (**Full**) решения

Ньютона–Рафсона, который используется при решении задач пластичности, контактов и больших деформаций. В качестве альтернативного решения, матрица жесткости может обновляться реже с использованием модифицированного метода Ньютона–Рафсона (рис. 2.15 *б*). Модифицированный метод Ньютона–Рафсона сходится медленнее, чем полный, но требует меньше матричных перестановок.

Для улучшения сходимости в методе Ньютона–Рафсона может быть использован алгоритм линейного поиска (**Line Search**). В некоторых задачах использование $\{\Delta u_i\}$ приводит к нестабильности решения. Следовательно, если использовать алгоритм линейного поиска, то уравнение (2.43) изменится так:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + s\{\Delta u_i\}, \tag{2.45}$$

где s – это линейный параметр, при этом $0{,}05 < s < 1$. Величина s автоматически определяется путем минимизации энергии системы, которая сводится к нахождению нулевого значения нелинейного уравнения:

$$g_s = \{\Delta u_i\}^T(\{F^a\} - \{F^{nr}(s\{\Delta u_i\})\}), \tag{2.46}$$

где, g_s – градиент потенциальной энергии относительно s.

Итеративная схема решения в этом случае основывается на уравнении (2.46) [94]. Итерации продолжаются до тех пор, пока:

1. g_s меньше, чем $0{,}5g_0$, где g_0 значение уравнения (2.46) при $s = 0$ (т.е. с использованием $\{F_{n-1}^{nr}\}$ для $\{F^{nr}(s\{\Delta u_i\})\}$).
2. g_s существенно не меняется между итерациями.
3. Выполнено шесть итераций.

Если $g_0 > 0$, итерации не выполняются и $s = 1$. Величина s не может быть меньше 0,5.

Масштабированное решение $\{\Delta u_i\}$ используется для обновления текущих значений перемещений $\{u_{i+1}\}$ в уравнении (2.43), и следующая равновесная итерация выполняется.

2.2.5 Анализ результатов

Основным результатом расчета НДС, проводимого с помощью МКЭ в модуле **Static Structural**, являются перемещения (**Deformation**) узлов КЭ-модели:

$$\vec{U} = \{u_x, u_y, u_z\}, \tag{2.47}$$

По известным перемещениям вычисляются другие зависимые величины, например, деформации (**Strain**) и напряжения (**Stress**). НДС в каждой точке расчетной области описывается тензором напряжений T_σ и тензором деформаций T_ε:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \; T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{2.48}$$

Так как тензор напряжений симметричен, систему координат можно повернуть таким образом, что все его сдвиговые компоненты окажутся равными нулю. Оставшиеся нормальные напряжения, расположенные на диагонали, называют главными напряжениями (**Principal Stress**). Их обычно располагают таким образом, чтобы $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Главные напряжения могут быть выведены с помощью следующих объектов, добавляемых в дерево проекта [87]:

- ✓ σ_1 – Maximum Principal;
- ✓ σ_2 – Middle Principal;
- ✓ σ_3 – Minimum Principal.

Эквивалентные напряжения (в частности, так называемые напряжения Мизеса) часто используется в проектных работах, поскольку они позволяют представить любое произвольное трёхмерное напряженное состояние в виде скалярного значения эквивалентного напряжения. Эквивалентное напряжение является частью теории предельного состояния материала, применяемой, например, для прогнозирования текучести в пластичном материале или в случае решения задач биомеханики для оценки появления необратимых деформаций кости. Вычисляется эквивалентное напряжение по формуле:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}}. \tag{2.49}$$

Удвоенное значение максимального касательного напряжения вычисляется как наибольшая абсолютная величина по формуле:

$$\sigma_{int} = MAX\,(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|). \tag{2.50}$$

При решении контактных задач, в качестве результата выводятся давления в области контакта, площадь области контакта, величина зазора между контактирующими телами.

После завершения расчета необходимо проанализировать полученные результаты и, если есть возможность, сравнить их с имеющимися аналитическими или экспериментальными данными. Также следует помнить, что полученное решение не должно зависеть от размера сеточных элементов, что обычно достигается проведением серии расчетов на сетках различной плотности [87].

2.3 Выводы

1. При решении контактной задачи методом конечных элементов рассматривается задача теории упругости с условиями на границе контакта, которые включают в себя пересчёт величины зазора, нормальных сжимающих контактных сил и касательных контактных сил.

2. В задачах рассматривается два типа контакта: контакт с трением и контакт без трения. При решении контактных задач используется метод множителей Лагранжа, который, как правило, применяется для задач, не учитывающих трение, а также метод штрафных функций, который является более универсальным, подходит как для задач с трением, так и без, и, кроме того, приводит к лучшей сходимости результатов.

3. При решении контактных задач в конечно-элементном пакете ANSYS, особое внимание уделяется построению сетки конечных элементов, в том числе

выбору целевой и контактной поверхностей, и соответствующих контактных и целевых элементов.

4. Для решения нелинейных, в частности, контактных задач используется итерационный метод Ньютона–Рафсона. Полный метод Ньютона–Рафсона, используется в тех задачах, где необходимо знать историю нагружения, и в этом случае матрица жесткости обновляется на каждой итерации. Модифицированный метод Ньютона–Рафсона сходится медленнее, и в этом случае матрица жесткости обновляется реже, однако требует меньше матричных перестановок. Для улучшения сходимости может быть использован алгоритм линейного поиска.

5. При решении контактных задач, в качестве результата, помимо напряжений и деформаций, выводятся давления в области контакта, площадь области контакта, величина зазора между контактирующими телами.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

3.1 Задача об образовании кольцевых трещин в стеклянном полупространстве при контакте с шаром

3.1.1 Постановка задачи

Рассматриваемая задача появилась из эксперимента. В эксперименте моделировалось вдавливание стальных шаров в стеклянное полупространство. В качестве модели стеклянного полупространства рассматривались образцы в форме параллелепипеда со сторонами 20 мм и высотой 10 мм. Необходимо было фиксировать образование кольцеобразных трещин вокруг области контакта. Для этого использовался микроскоп, который устанавливался на нижнее основание траверсы испытательной машины и закрывался стальной защитой с отверстием для микроскопа, как показано на рисунке 3.1. Испытания проводились с помощью шаров различных диаметров: 5,5мм; 10мм; 17мм [95]. Изображение от микроскопа передавалось на экран компьютера в реальном масштабе времени, что позволяло фиксировать нагрузки, при которых появлялись трещины.

Расчётная схема представляет собой контактную задачу [3, 34, 96]. Эффективный модуль упругости вычисляется по формуле:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{st}^2}{E_{st}}\right)^{-1}, \tag{3.1}$$

где $E_{st} = 211$ ГПа – модуль Юнга стали; $E = 70$ ГПа – модуль Юнга стекла; $\nu_{st} = 0{,}28$ – коэффициент Пуассона для стали; $\nu = 0{,}2$ – коэффициент Пуассона для стекла.

Радиус области контакта вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3RP}{4E^*}}, \tag{3.2}$$

где R – радиус шара; P – сила, при которой образовалась кольцевая трещина.

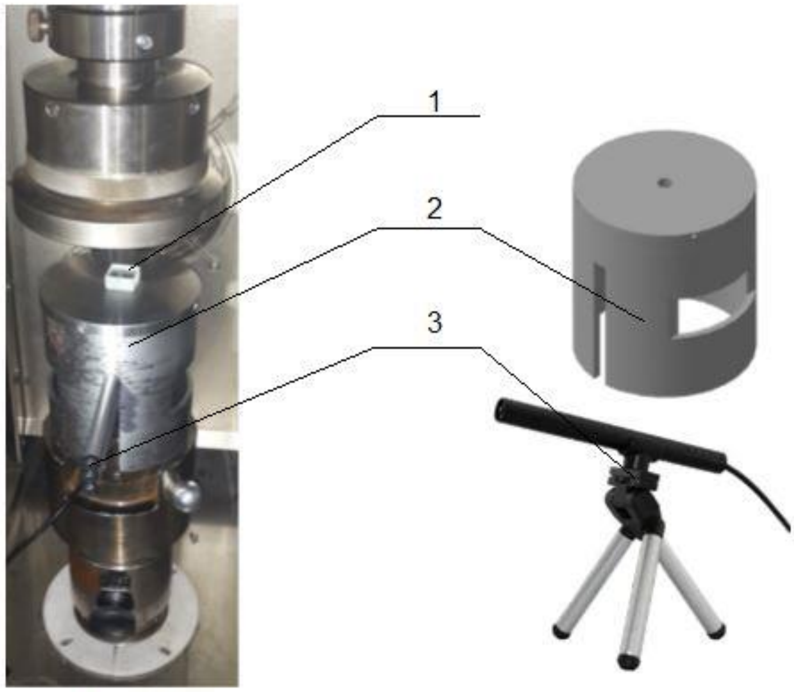

Рисунок 3.1 – Схема для проведения эксперимента на испытательной машине Zwick/Roell Z100: 1 – стеклянный образец; 2 – стальная защита; 3 – микроскоп

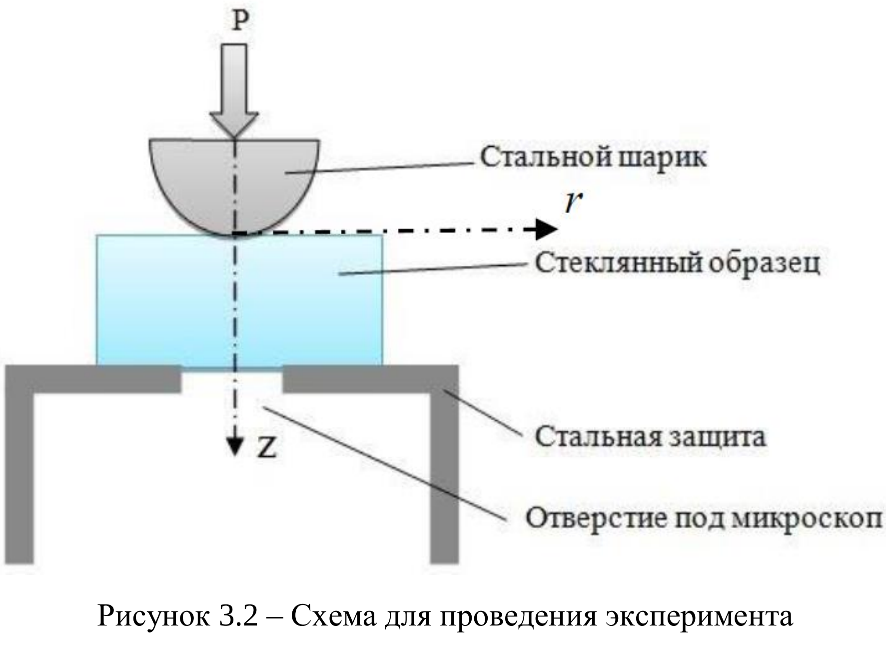

Рисунок 3.2 – Схема для проведения эксперимента

Давление в центре области контакта вычисляется по формуле:

$$p_0 = \frac{3}{2} p_m = \frac{3P}{2\pi a^2}, \tag{3.3}$$

где p_m – среднее давление.

В таблице 3.1 представлены средние значения, полученные из экспериментов.

Таблица 3.1 – Средние значения из экспериментов

Диаметр шара, мм	Нагрузка, при которой образуются кольцевые трещины P, Н	Радиус области контакта a, мм	Давление в центре области контакта p_0, ГПа
5,5	692	0,281	4,18
10	717	0,355	2,72
17	1115	0,498	2,15

Так как в эксперименте кольцевые трещины образовывались в окрестности области контакта на поверхности стеклянного образца, то представляло интерес максимальное растягивающее напряжение в месте образования трещины, то есть радиальное напряжение. Для вычисления радиального напряжения в любой точке полупространства была использована формула Хубера [97]:

$$\sigma_r = p_0 \left[\frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{z^3}{\sqrt{u}^3} \right) + \frac{a^2 z^3}{(u^2 + a^2 z^2)\sqrt{u}} + \frac{z}{\sqrt{u}} \left(\frac{(1-\nu)u}{a^2+u} + (1+\nu) \frac{\sqrt{u}}{a} arct \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - 2 \right) \right], \tag{3.4}$$

где:

$$u = \frac{1}{2} \left(r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \right), \tag{3.5}$$

z – координата, отсчитываемая от поверхности полупространства по нормали к ней; r – радиус, отсчитываемый от точки начального контакта (рис. 3.2).

Цель задачи заключается в определении максимальных растягивающих напряжений в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины численно и аналитически. Нужно было оценить влияние напряжений, возникающих от изгиба из-за наличия отверстия для микроскопа на напряжения в окрестности области контакта.

3.1.2 Принятые допущения и численное моделирование

Так как формула Хубера не учитывает изгиб из-за наличия отверстия для микроскопа, было выполнено моделирование контактной осесимметричной задачи при взаимодействии стального шара со стеклянным полупространством в программном пакете ANSYS 17.2. Рассматривались задачи для каждого диаметра шарика. Так как интерес представляли радиальные растягивающие напряжения на поверхности вокруг области контакта, то было принято допущение, что упругое полупространство может быть смоделировано, как цилиндр с высотой соответствующей высоте образцов, так как реальная форма образцов в виде прямоугольных параллелепипедов не будет существенно влиять на напряжения в окрестности малой круговой области контакта. В связи с этим допущением задача является осесимметричной и рассматривалась в двумерной постановке. В силу симметрии анализировалась половина сечения. Использовался 8-узловой элемент PLANE183 со свойством симметрии, что позволяет решать задачу в двумерной постановке, затрачивая меньше ресурсов машины, но при этом восстанавливать полный трёхмерный вид с результатами решения. Нагрузка, приложенная к шарику, задавалась в соответствии с усреднёнными экспериментальными данными из таблицы 3.1.

На границе контакта создавались контактные пары из контактных (CONTA172) и целевых (TARGET169) конечных элементов. Модель контакта рассматривалась без трения, т.е. касательные силы отсутствуют, поэтому на границе контакта в каждом узле выполнялись условия: зазор $g \geq 0$, сжимающие контактные силы, действующие по нормали к поверхностям $R_N \leq 0$, касательные силы отсутствуют $R_T = 0$. При этом в точке начального контакта шарика с образцом выполнялись следующие условия контакта: $g = 0$, $R_N < 0$, $R_T = 0$.

Необходимо было выяснить влияние отверстия для микроскопа на напряжения в окрестности области контакта. Поэтому для сравнения рассматривалось два типа модельных задач. В первой граничные условия задавались с учётом опирания образца на стальную защиту с отверстием для микроскопа. Вторая соответствовала задаче Герца о вдавливании шара в полупространство. Для второй задачи известно решение Хубера. В соответствии с условием свободного опирания образца были запрещены перемещения в вертикальном направлении по линии, соответствующей поверхности опирания: $U_y = 0$. На оси симметрии были запрещены перемещения в горизонтальном направлении: $U_x = 0$. Схема закрепления и нагружения показана на рисунке 3.3. В окрестности области контакта выполнено сгущение сетки (рис. 3.4).

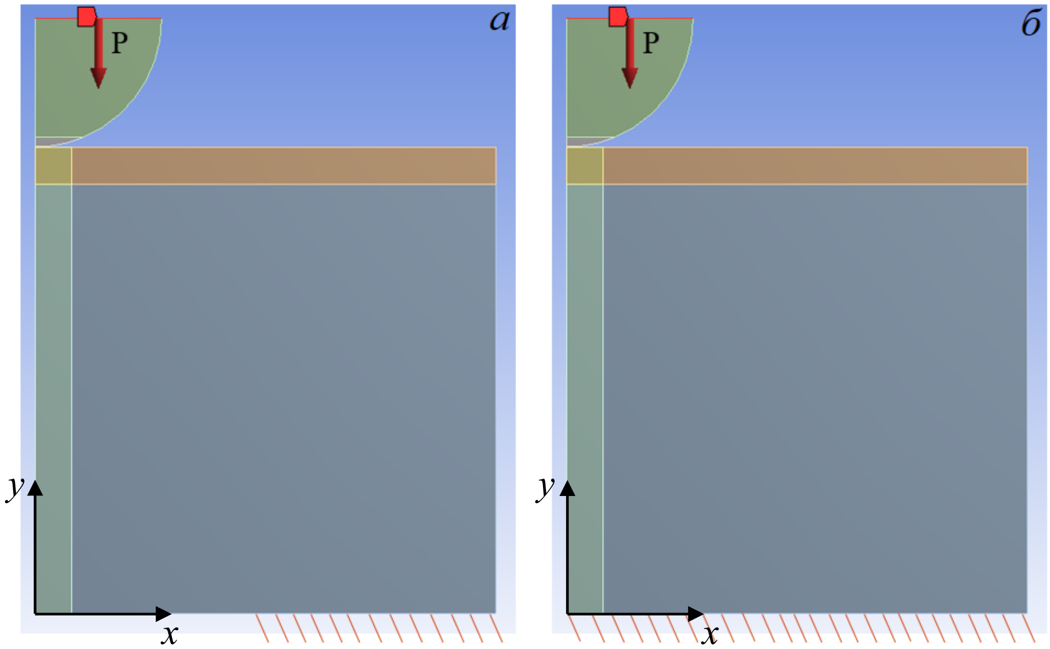

Рисунок 3.3 – Схема закрепления и нагружения: а) для образца в эксперименте, с учётом отверстия для микроскопа; б) для модели полупространства (задача Герца)

Математическая модель включала в себя: систему уравнений теории упругости (уравнения равновесия, определяющие соотношения, уравнения Коши для малых деформаций); модель контакта без трения (касательные силы отсутствуют). Применялся метод пошагового приращения нагрузки (500 шагов «по времени») Ньютона–Рафсона для решения нелинейных задач с дополнительным алгоритмом линейного поиска; метод штрафных функций для решения контактной задачи. Точки контакта определялись по узлам сетки. Контактная жёсткость обновлялась на каждой равновесной итерации.

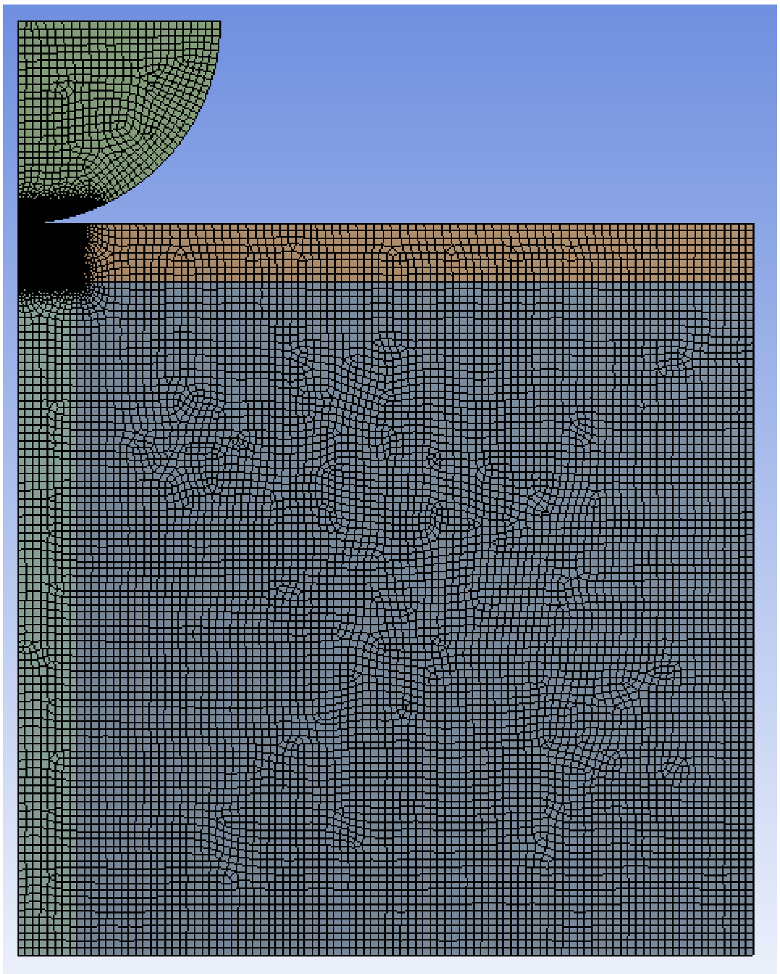

Рисунок 3.4 – Сетка конечных элементов со сгущением в окрестности области контакта

3.1.3 Результаты

Было выполнено исследование сходимости сетки. В зоне сгущения сетки размер конечных элементов был уменьшен в два раза (рис. 3.6) относительно произвольного размера элемента (рис. 3.5) в окрестности сгущения и проведён расчёт.

На рисунке 3.7 показаны результаты вычисления напряжений в области контакта и её окрестности для задачи, учитывающей отверстие для микроскопа. Эти результаты соответствуют решению при произвольном размере конечных элементов при сгущении в окрестности области контакта. На рисунке 3.8 представлены результаты для сетки сгущения, уменьшенной в два раза относительно произвольной сетки сгущения.

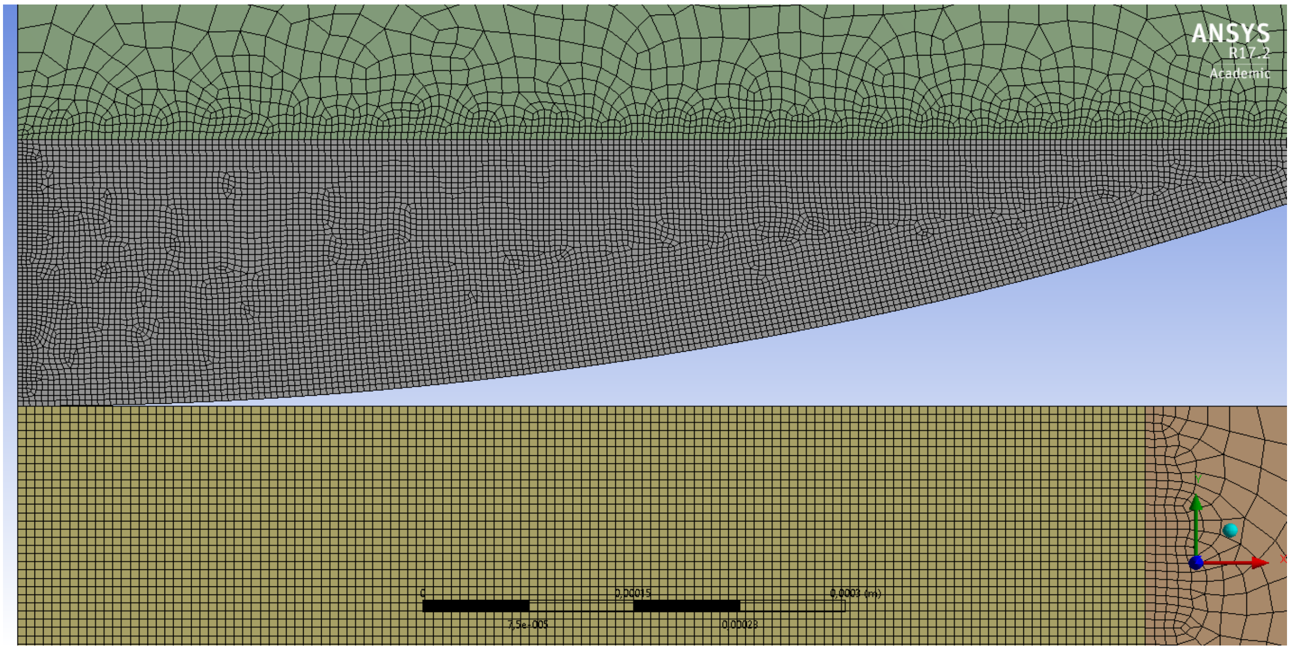

Рисунок 3.5 – Произвольная сетка сгущения в окрестности области контакта

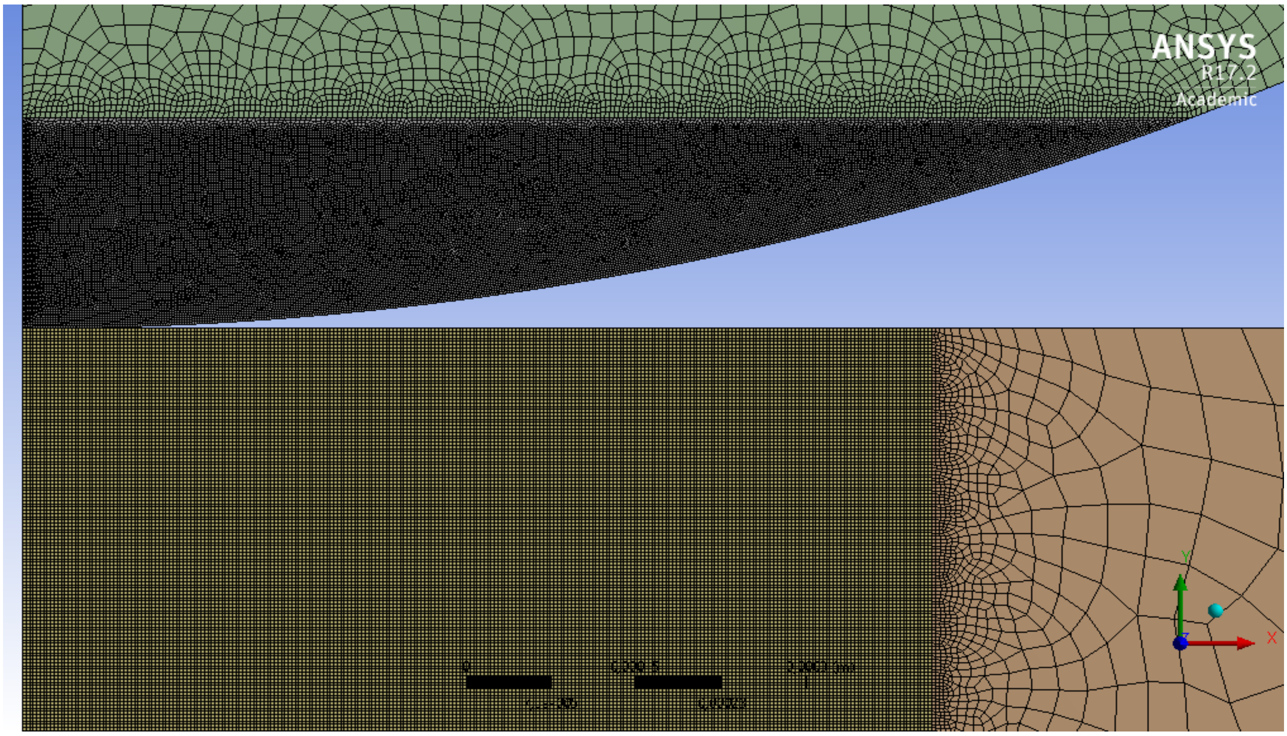

Рисунок 3.6 – Уменьшенная в два раза сетка сгущения по сравнению с произвольной сеткой, в окрестности области контакта

Относительная разность напряжений, полученных для двух разных сеток на примере задачи для шара диаметром 5,5 мм, вычислялась следующим образом:

$$\delta = \left|\frac{755{,}09 - 734{,}85}{755{,}09}\right| \cdot 100\% = 2{,}7\%$$

Аналогичные расчёты были выполнены и для других вариантов задачи, разница в результатах при этом составила в среднем 3,9%, что говорит о хорошей сходимости решения.

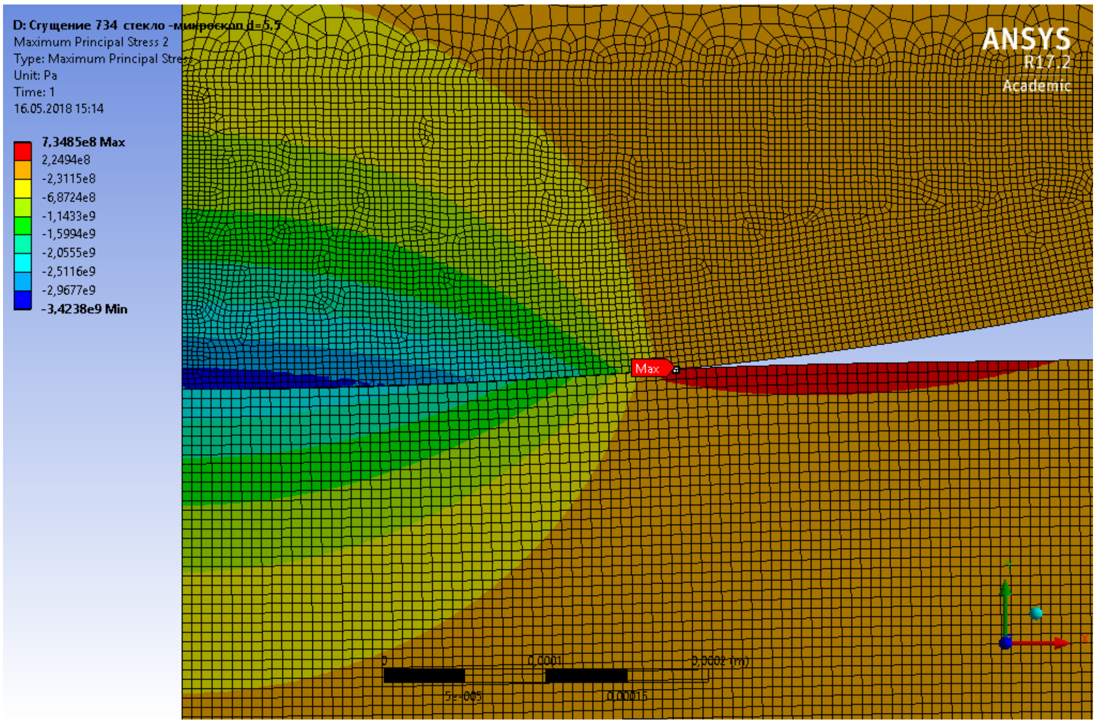

Рисунок 3.7 – Растягивающие напряжения в окрестности области контакта при произвольном размере сетки сгущения для задачи, учитывающей отверстие для микроскопа при диаметре шара 5,5 мм

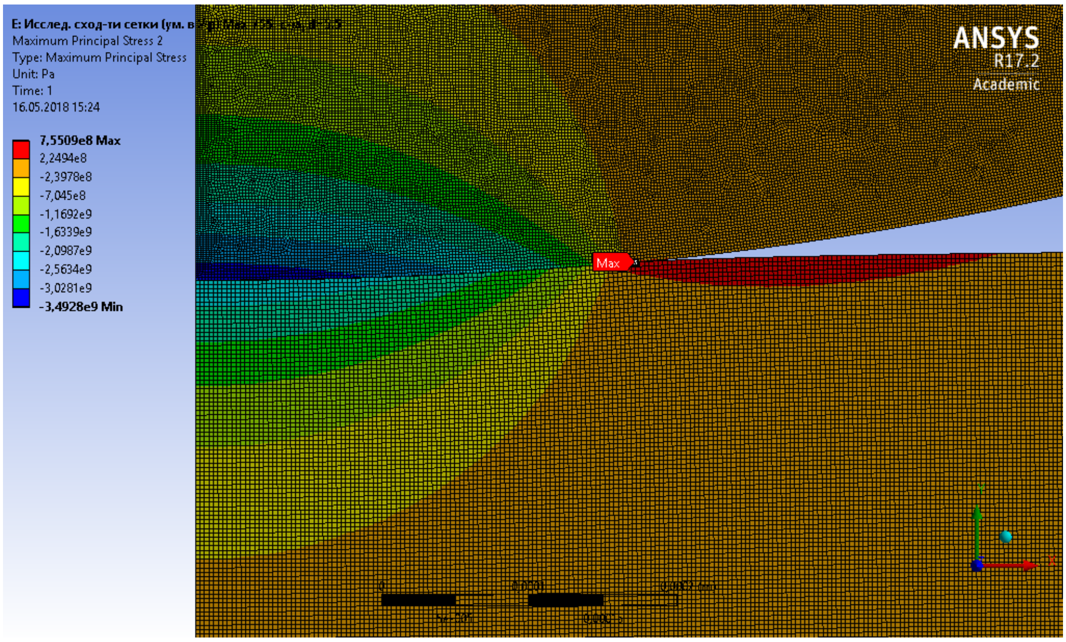

Рисунок 3.8 – Растягивающие напряжения в окрестности области контакта при уменьшенном в два раза размере сетки сгущения для задачи, учитывающей отверстие для микроскопа при диаметре шара 5,5 мм

Таблица 3.2 – Сравнение результатов

Диаметр шара, мм	Максимальное растягивающее напряжение (формула Хубера) σ_r, МПа	Максимальное растягивающее напряжение (численный метод) σ_r, МПа	Максимальное растягивающее напряжение в задаче Герца (численный метод) σ_r, МПа	Относительная разница между численными решениями: задачи Герца и образца в эксперименте, δ%
5.5	755,2	755,09	764,14	1,2
10	513	512,26	512,84	0,1
17	417,2	417,33	419,15	0,4

В таблице 3.2 представлены результаты вычисления радиального напряжения для разных диаметров шара:

- максимальные растягивающие напряжения из аналитического решения Хубера;
- максимальные растягивающие напряжения для модели, учитывающей отверстие под микроскоп, для сетки с размером конечного элемента, дважды уменьшенного при сгущении;
- максимальные растягивающие напряжения в численной модели задачи Герца.

Также приведена относительная разница между численными моделями задачи Герца и задачи, учитывающей отверстие. Так как эта разница не превышает 1,2%, то, следовательно, напряжения от изгиба, возникающие в эксперименте из-за наличия отверстия для микроскопа, существенно не влияют на значения растягивающих напряжений в окрестности области контакта [95, 98, 99-104].

3.2 Задача о контакте круглой свободно опёртой пластины с шаром

3.2.1 Постановка задачи

Появляются новые материалы, для которых возникает необходимость определять поперечную прочность на разрыв. Поперечная прочность на разрыв определяется методами, описанными в [105, 106]. Описанный метод измерения поперечной прочности на разрыв является универсальным для образцов из хрупких материалов, особенно получаемых в процессах искрового плазменного спекания

Суть этого метода заключается в следующем. Образцы для эксперимента изготавливаются в виде круглых пластин из материала, предназначенного для испытаний. Приспособление для проведения эксперимента состоит из следующих элементов, показанных на рисунке 3.9. Полый цилиндр с кромкой, которая обеспечивает свободное опирание круглой пластины по контуру, устанавливается на нижнее основание траверсы испытательной машины. На пластину устанавливается стальной шар и фиксируется лункой верхнего цилиндра, который ограничивает перемещения шарика по поверхности пластины. Третьим элементом является центрирующий (выравнивающий) цилиндр со сквозным отверстием, при этом диаметр сквозного отверстия равен внешнему диаметру первых двух цилиндров. Перемещением цилиндра со сквозным отверстием поступательным движением вверх-вниз осуществляется выравнивание двух цилиндров с шариком и пластиной друг относительно друга. Таким образом, экспериментальная модель готова для испытаний и с высокой точностью реализует симметричную задачу об изгибе круглой пластины посредством контакта шарика с пластиной. Экспериментальная установка показана на рисунке 3.10.

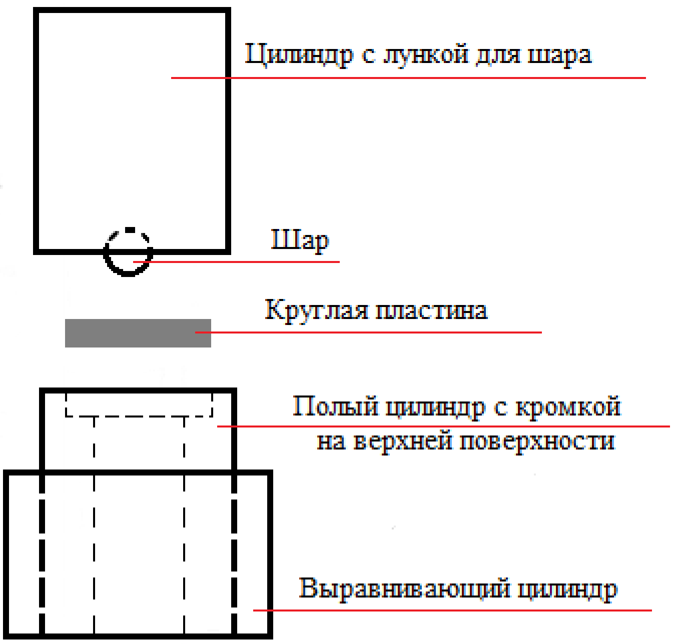

Рисунок 3.9 – Схема для проведения эксперимента

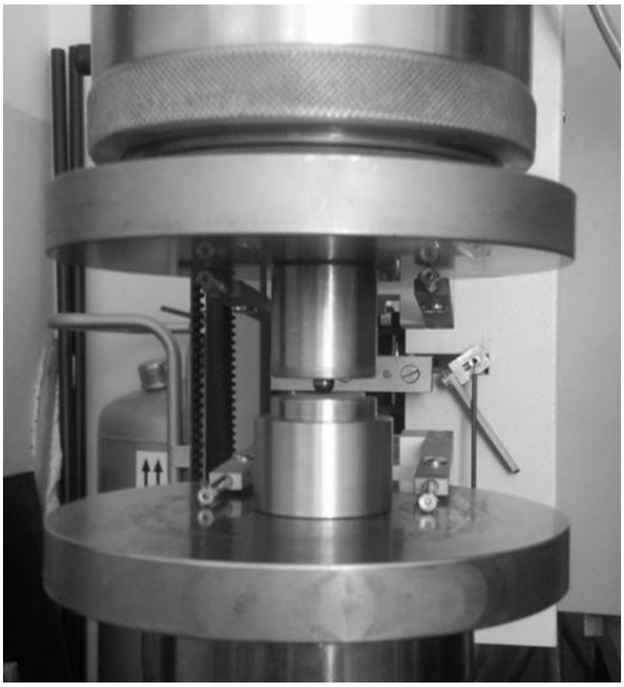

Рисунок 3.10 – Экспериментальная установка Zwick / Roell Z100

Была проведена серия экспериментов по данной методике. В качестве экспериментальных образцов были взяты круглые пластины диаметром ≈ 20 мм, изготовленные посредством реакционного искрового плазменного спекания смеси порошков железа и алюминия при температурах 700°C, 800°C и 900°C без приложения давления на установке SPS Labox 1575 (SINTER LAND, Inc., Япония).

В эксперименте использовался шарик диаметром 6 мм, изготовленный из подшипниковой стали ШХ15, имеющей модуль Юнга $E = 211$ ГПа и коэффициент Пуассона 0,28. Модуль Юнга E алюминида железа FeAl был принят равным 260 ГПа [107]. Коэффициент Пуассона алюминида железа зависит от пористости материала и согласно [108, 109] вычисляется по формуле:

$$\mu = 2\mu_0 \left(\frac{2 - 3\theta}{4 - 3\theta}\right), \tag{3.6}$$

где μ_0 – теоретический коэффициент Пуассона плотного материала, который для FeAl равен 0,31 [110]. θ – полная пористость, зависящая от температуры спекания [108]. Параметры, принятые для рассматриваемых пластин, представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Параметры образцов

№ образца	Температура спекания,°С	Пористость	Коэффициент Пуассона пористого материала	Диаметр пластины, мм	Толщина пластины, мм
1	700	0,47	0,141	19,5	2,12
2	700	0,47	0,141	19,6	2,39
3	700	0,47	0,141	19,7	2,96
4	800	0,47	0,141	19,5	2,85
5	800	0,47	0,141	19,5	3,19
6	800	0,47	0,141	19,5	3,16
7	900	0,53	0,105	19,4	3,17
8	900	0,53	0,105	19,5	3,17
9	900	0,53	0,105	19,4	3,05

Было проведено 9 экспериментов: по 3 эксперимента для пластин, спеченных при одной и той же температуре. Испытания проводились на установке Zwick / Roell Z100 вплоть до разрушения пластин. Данные обо всех экспериментах приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Экспериментальные данные

№ образца	Температура спекания образца, °С	Предельная нагрузка, при которой произошло разрушение, Н
1	700	142,2
2	700	153,3
3	700	269,0
4	800	405,2
5	800	361,8
6	800	345,8
7	900	395,8
8	900	352,0
9	900	388,6

На рисунке 3.11 показан разрушенный образец.

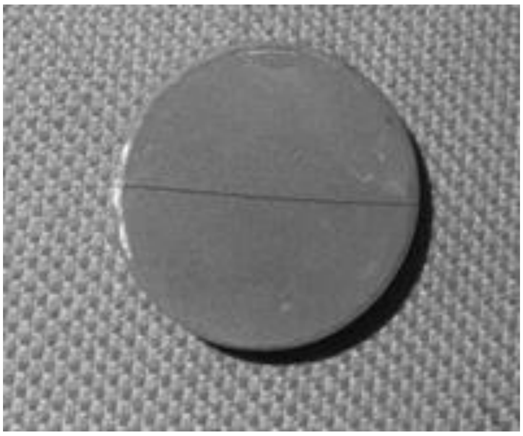

Рисунок 3.11 – Разрушенный образец

3.2.2 . Принятые допущения и методы решения

Вводится допущение, что контактную нагрузку можно рассматривать, как сосредоточенную силу, приложенную в центре. Тогда максимальные растягивающие напряжения можно вычислить по следующей приближённой формуле Войновского–Кригера для свободно опёртой по контуру круглой пластины [105, 106]:

$$\sigma_{MAX} = \frac{P}{h^2}\left[(1+\nu)\left(0.485 \cdot \ln\left(\frac{l}{h}\right) + 0.52\right) + 0.48\right], \tag{3.7}$$

где P – значение приложенной нагрузки; h – толщина пластины; $l = 9{,}1$ мм – радиус опирания пластины [111].

Максимальное растягивающее напряжение имеет место в центре нижней поверхности пластинки, где реализуется двухосное растяжение. Значение этого напряжения, при котором разрушается образец, называется поперечной прочностью на разрыв материала. Однако использованное аналитическое решение не учитывает контактное нагружение в эксперименте, которое заменяется сосредоточенной силой, и, следовательно, не учитываются напряжения в окрестности области контакта. Анализ контактного взаимодействия между шариком и пластиной может быть проведён с помощью метода конечных элементов с целью моделирования реального процесса нагружения в эксперименте. Однако экспериментаторы не всегда имеют время и возможность для детального численного анализа, чтобы оценить предельные напряжения.

В этом случае часто используются классические локальные критерии прочности. При использовании классических локальных критериев предельного состояния обычно предполагается, что разрушение начинается, когда максимальное эквивалентное напряжение достигает предельного значения, по крайней мере, в одной точке тела. Однако локальные критерии дают заниженную оценку предельных нагрузок по сравнению с экспериментальными данными в условиях неоднородного напряженного состояния. В этом случае целесообразно использовать нелокальные критерии разрушения, которые учитывают неоднородное напряженное состояние и дают более высокие оценки предельных нагрузок, которые ближе к реальным.

Для того, чтобы выполнить расчеты по нелокальным критериям, необходимо знать значение трещиностойкости $K_{\mathrm{I}c}$ материала. Критический коэффициент интенсивности напряжений $K_{\mathrm{I}c}$ пористого FeAl, полученного с помощью искрового плазменного спекания без давления, был определён как 0,833 МПа м$^{1/2}$ [112]. Значение $K_{\mathrm{I}c}$ было получено путем сжатия по диаметру круглых пластин FeAl (спеченных при 900 °C), имеющих симметричный центральный разрез.

В данном исследовании в качестве нелокального критерия разрушения рассматривается градиентный критерий [98, 113, 114]. Идея этого критерия заключается в том, что для определения начала разрушения с пределом прочности $\sigma_{\text{в}}$ материала сравнивается не максимальное напряжение, а эффективное напряжение σ_e, которое зависит от неоднородности напряженного состояния.

Целью данного исследования является оценка влияния контактных напряжений в эксперименте и определение максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней поверхности пластины (поперечная прочность на разрыв) численным и аналитическим методами. Для этого необходимо конечно-элементное моделирование рассматриваемого эксперимента, учитывающее контактное взаимодействие между шаром и пластиной, которое имело место в реальном эксперименте. Кроме того, предлагается использовать нелокальный градиентный критерий разрушения для аналитической оценки эффективных растягивающих напряжений в окрестности области контакта и выполнить сравнение аналитических оценок с результатами, полученными численным методом.

3.2.3 Численное моделирование и граничные условия

Задача рассматривалась в программном пакете ANSYS 17.2. Решалась контактная осесимметричная задача о взаимодействии шарика с круглой пластиной, свободно опёртой по контуру. Поскольку толщина и внешний радиус пластины существенно влияют на вычисление напряжений, рассматривались девять задач с реальными значениями предельных нагрузок, толщин и диаметров пластин.

В связи с тем, что задача является симметричной, рассматривалась половина сечения пластины и четверть сечения шарика (рис. 3.12.). Использовался 8-узловой элемент PLANE183 со свойством симметрии, что позволяет решать задачу в двумерной постановке, затрачивая меньше ресурсов машины, но при этом восстанавливать полный трёхмерный вид с результатами решения (рис. 3.13). Средний размер конечных элементов составил 0,1 мм. На границе контакта создавались контактные пары из контактных (CONTA172) и целевых (TARGET169) конечных элементов. Модель контакта рассматривалась без трения, т.е. касательные силы отсутствуют, поэтому на границе контакта в каждом узле выполнялись условия: зазор $g \geq 0$, сжимающие контактные силы, действующие по нормали к поверхностям $R_N \leq 0$, касательные силы отсутствуют $R_T = 0$. При этом в точке начального контакта шарика с пластиной выполнялись следующие условия контакта: $g = 0$, $R_N < 0$, $R_T = 0$.

Нагрузка, приложенная к шарику, задавалась в соответствии с экспериментальными данными из таблицы 3.3. Закрепление в модели было выполнено по контуру внутреннего радиуса площадки опирания. В соответствии с условием свободного опирания пластины были запрещены перемещения в вертикальном направлении в точке, соответствующей контуру опирания: $U_y = 0$. На оси симметрии были запрещены перемещения в горизонтальном направлении: $U_x = 0$.

Математическая модель включала в себя: систему уравнений теории упругости (уравнения равновесия, определяющие соотношения, уравнения Коши для малых деформаций); модель контакта без трения (касательные силы отсутствуют). Применялся метод пошагового приращения нагрузки (500 шагов «по времени») Ньютона–Рафсона для решения нелинейных задач с дополнительным алгоритмом линейного поиска; метод множителей Лагранжа для решения контактной задачи. Точки контакта определялись по узлам сетки. Контактная жёсткость обновлялась на каждой равновесной итерации.

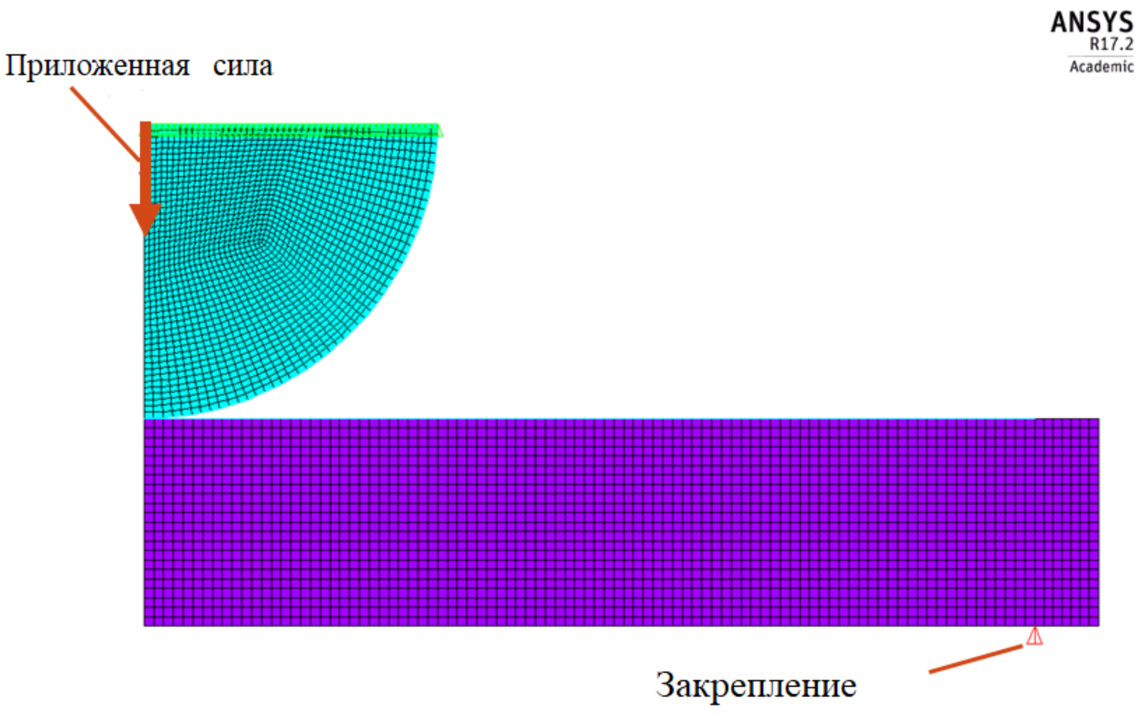

Рисунок 3.12 – Схема закрепления модели, приложение нагрузки и сетка конечных элементов

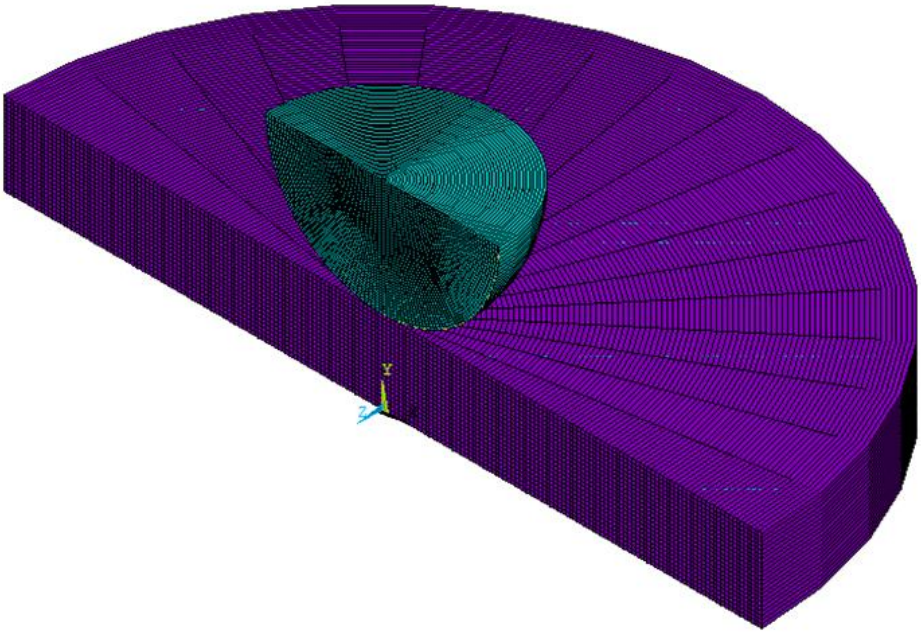

Рисунок 3.13 – Трёхмерное отображение половины модели за счёт свойства симметрии выбранного конечного элемента

3.2.4 Результаты

Были получены растягивающие напряжения (для каждого образца) в пластине. В связи с хрупким характером разрушения пластин интерес представляли значения растягивающих напряжений в центре на нижней стороне пластины. На рисунке 3.14 представлена эпюра первых главных напряжений (растягивающих) варианта задачи для одной из пластин, спечённой при 700°С.

Результаты вычислений напряжений аналитическим и численным методом сведены в таблицу 3.5.

Относительная разница между численным и аналитическим методом не превышает 5,6%. Из этого можно сделать вывод, что для вычисления поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний новых материалов можно воспользоваться формулой Войновского – Кригера [108, 115, 116].

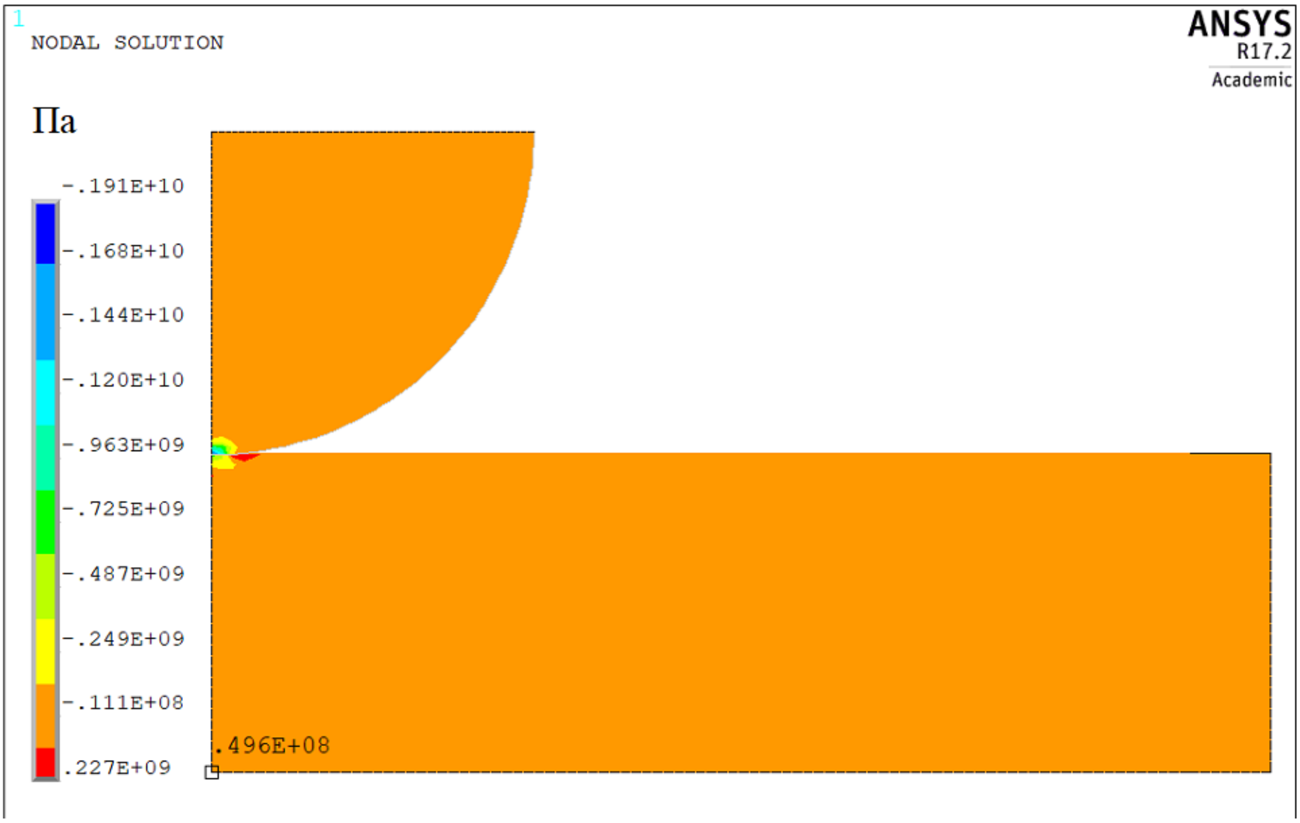

Рисунок 3.14 – Эпюра растягивающих напряжений с фиксированным значением максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней поверхности пластины, спечённой при 700°С

Таблица 3.5 – Сравнение результатов

№ образца	Температура изготовления образца, °С	Предельное напряжение при изгибе (аналитический метод), МПа	Напряжение в центре на нижней стороне пластины (численный метод), МПа	Относительная разница, %
1	700	59,5	56,3	5,6
2	700	48,7	46,1	5,6
3	700	52,0	49,6	4,9
4	800	85,6	81,7	4,8
5	800	58,8	56,3	4,4
6	800	57,4	55,0	4,4
7	900	63,8	61,2	4,3
8	900	56,8	54,3	4,5
9	900	68,5	65,6	4,5

3.2.5 Применение градиентного критерия разрушения на примере испытания одного из образцов

В связи с тем, что все геометрические и физические параметры для пластин, спечённых при температуре 900°С известны, задача рассматривается для одного из образцов. В соответствии с экспериментом анализ контактной осесимметричной задачи о взаимодействии шара с круглой пластиной, свободно опёртой по контуру, был проведён в конечно-элементном пакете ANSYS 17.2. Размер конечного элемента был принят равным $L^*/24$. Параметр L^* получен в [114] исходя из условия согласования градиентного критерия с линейной механикой разрушения и выражается через характеристики материала: предел прочности $\sigma_в$ и вязкость разрушения K_{Ic}. Предположим для этой задачи, что предел прочности $\sigma_в = \sigma_{max}$, где $\sigma_{max} = 63{,}8$ МПа – поперечная прочность на разрыв, вычисленная по формуле (3.7) для пластины, спечённой при температуре 900°С (таблица 3.5). Тогда:

$$L^* = \frac{2K_{Ic}^2}{\pi\sigma_в^2}. \tag{3.8}$$

Для рассматриваемой задачи L^* составила $1{,}085 \cdot 10^{-4}$м.

Задача рассматривалась также, как и предыдущие, и отличалась лишь заданным размером конечных элементов.

Значения максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней стороне пластины составили 62,8 МПа, как показано на рисунке 3.15.

Сравнивая эти значения с σ_{max}, полученными по формуле (3.7), заметим, что относительная разница между численным и аналитическим методом составила 1,6%. Однако согласно конечно-элементному расчёту максимальные растягивающие напряжения сосредоточены не в центре на нижней поверхности пластины, а на поверхности в окрестности области контакта в результате конечно-элементного моделирования. Наблюдается резкая неоднородность напряженного состояния в узлах в направлении от поверхности вглубь образца, как видно на рисунке 3.16.

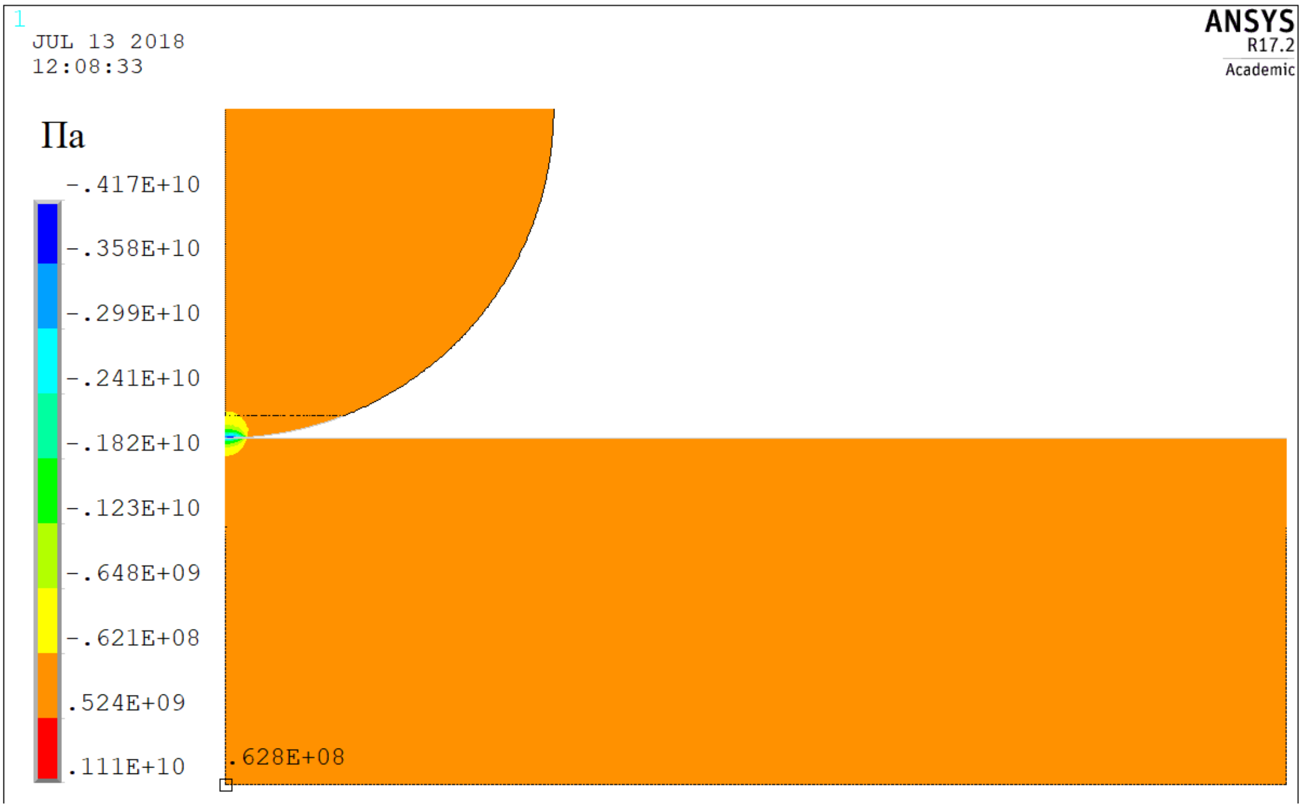

Рисунок 3.15 – Эпюра растягивающих напряжений с фиксированным значением максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней поверхности пластины, спечённой при 900°C

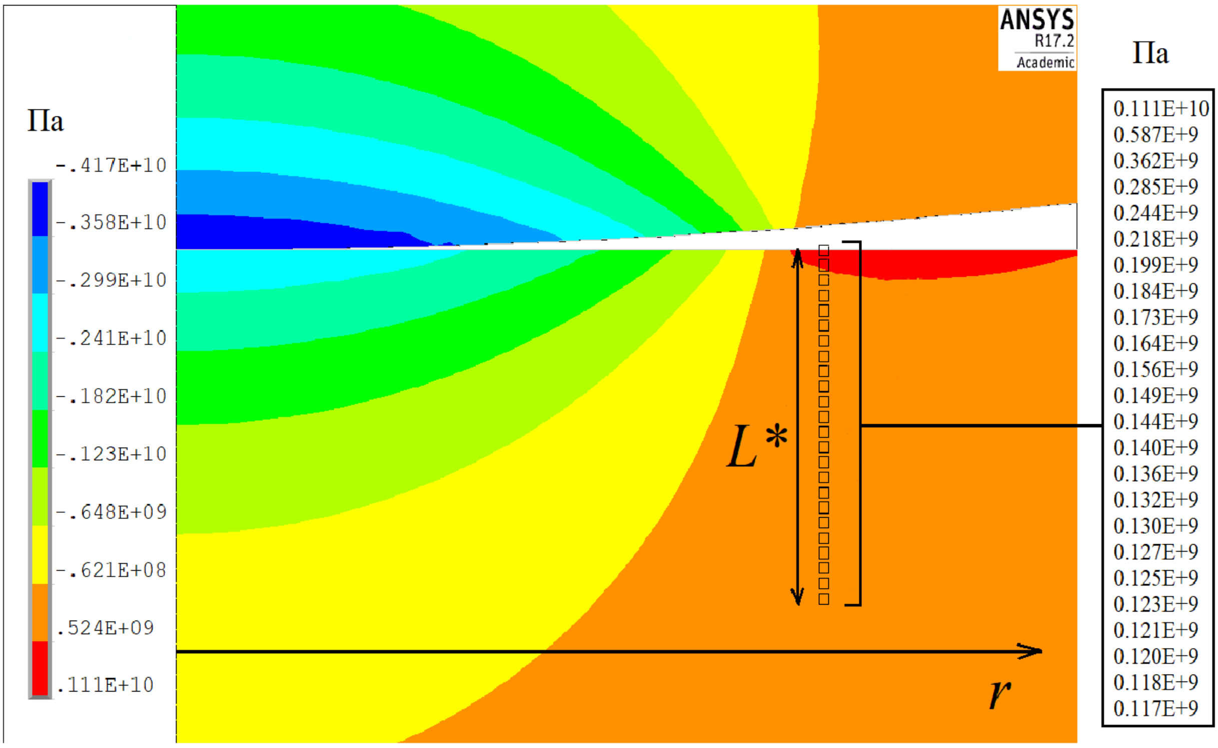

Рисунок 3.16 – Значение первых главных напряжений в узлах интегрирования на отрезке L^* от точки максимальных растягивающих напряжений вглубь образца

Для моделирования разрушения применим локальный критерий максимальных растягивающих напряжений. Когда шар вдавливается в упругое полупространство, в окрестности области контакта имеют место растягивающие радиальные силы. Максимальное значение радиальных напряжений на поверхности полупространства сосредоточены в точках границы круговой области контакта. Поэтому, согласно локальному критерию максимальных напряжений, разрушение должно начинаться по области границы контакта. Радиальные напряжения зависят от радиуса r на поверхности полупространства за пределами области контакта в соответствии с формулой [3, 97]:

$$\sigma_r = p_m \frac{1-2\nu}{2}\frac{a^2}{r^2}. \tag{3.9}$$

Здесь $p_m = \frac{P}{\pi a^2}$ – среднее напряжение в области контакта; ν – коэффициент Пуассона; a – радиус области контакта, который вычисляется по формуле [3]:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3RP}{4E^*}}, \tag{3.10}$$

где R – радиус шара; P – сила, при которой образуется трещина; E^* – эффективный модуль упругости при контакте стального шара с FeAl:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{st}^2}{E_{st}}\right)^{-1}, \tag{3.11}$$

Для стали $E_{st} = 2.11 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{st} = 0{,}28$. Для FeAl, спечённого при 900°С $E = 260 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0{,}105$.

Радиус области контакта a, полученный аналитически по формуле (3.10), равен $1{,}938 \cdot 10^{-4}$ м, и в результате численного моделирования a равен $1{,}427 \cdot 10^{-4}$ м. Разница в значениях получается из-за того, что аналитическая формула не учитывает изгиб, в отличие от численного метода.

Принимая во внимание недостаточно точное описание экспериментальных данных критерием максимальных напряжений [95], для оценки предельного растягивающего напряжения использовался нелокальный градиентный критерий разрушения. Для применения этого критерия необходимо знать распределение напряжений не только на поверхности, но также внутри тела. Формулы, которые могут быть использованы для вычисления напряжений в любой точке полупространства для задачи Герца о вдавливании шарика были получены Хубером [97]. Радиальные напряжения в решении Хубера вычисляются по формуле [34]:

$$\sigma_r = \frac{3}{2} p_m \left[\frac{1-2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{z^3}{\sqrt{u}^3} \right) + \frac{a^2 z^3}{(u^2 + a^2 z^2)\sqrt{u}} + \frac{z}{\sqrt{u}} \left(\frac{(1-\nu)u}{a^2+u} + (1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\nu) \frac{\sqrt{u}}{a} arctg\left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - 2 \right) \right], \tag{3.12}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \right)$$

Здесь z – координата, измеряемая от поверхности полупространства по нормали к ней.

С использованием градиентного критерия эффективные напряжения σ_e вычисляются аналитически и сравниваются с пределом прочности $\sigma_в$. Эффективное напряжение пропорционально первому главному напряжению в рассматриваемой точке тела и зависит от относительного градиента g_n нормальных напряжений σ_n действующих перпендикулярно плоскости, включающей площадку первого главного напряжения σ_1 в рассматриваемой точке тела, где плоскость и площадка имеют общую нормаль n:

$$g_n = \frac{|grad\sigma_n|}{\sigma_n}, \tag{3.13}$$

Относительный градиент находится с помощью решения соответствующей задачи упругости. Выражение для эффективных напряжений записывается в виде [113]:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_1}{1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L^* g_n}}, \tag{3.14}$$

Здесь β – неотрицательный безразмерный параметр, который может быть рассмотрен, как параметр аппроксимации. Считается, что разрушение в окрестности рассматриваемой точки начинается, когда эффективные напряжения достигают предела прочности материала, то есть условие разрушения записывается в виде:

$$\sigma_e = \sigma_\text{в}, \tag{3.15}$$

При $z = 0$ на поверхности в окрестности области контакта первое главное напряжение – это радиальное напряжение σ_r, которое используется в градиентном критерии. Формулы (3.9) и (3.12) используются для вычисления радиального напряжения и его производных по координатам r и z. Затем, аналитически определяется относительный градиент радиального напряжения и эффективное напряжение. Из формулы (3.9) на поверхности полупространства находим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -p_m(1-2\nu)\frac{a^2}{r^3}$$

Определим производную $\frac{\partial \sigma_r}{\partial z}$, используя выражение (3.12):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = \frac{3}{2}p_m\left[\frac{1-2\nu}{3}\frac{a^2}{r^2}\left(-\frac{3z^2}{u^{3/2}}+\frac{3}{2}\frac{z^3}{u^{5/2}}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right.$$

$$+\frac{3a^2z^2(u^2+a^2z^2)u^{1/2}-a^2z^3\left[\frac{5}{2}u^{3/2}\frac{\partial u}{\partial z}+2a^2zu^{1/2}+\frac{a^2z^2}{2u^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial z}\right]}{\left((u^2+a^2z^2)u^{1/2}\right)^2}$$

$$+\ (1-\nu)\frac{\left(u^{1/2}+\frac{z}{2u^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial z}\right)(a^2+u)-zu^{1/2}\frac{\partial u}{\partial z}}{(a^2+u)^2}$$

$$\left.+\ (1+\nu)\left(\frac{1}{a}arctg\left(\frac{a}{u^{1/2}}\right)-\frac{\frac{z}{2u^{3/2}}}{1+\frac{a^2}{u}}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{2u^{1/2}-z\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{u^{1/2}}}{u}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(1+\frac{r^2+z^2+a^2}{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}}\right)z$$

Когда $z = 0$ и $r \neq a$, тогда $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Следовательно, $\frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = \frac{3}{2} p_m \left(\frac{(1-\nu)\sqrt{u}}{a^2+u} + \frac{1+\nu}{a} arctg \frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}} \right)$; $u(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2)^2} \right)$.

Относительный градиент вычисляется по формуле:

$$g_r = \frac{|grad\sigma_r|}{\sigma_r}, \text{ где } |grad\sigma_r| = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial z}\right)^2}. \quad (3.16)$$

Подставляя формулу (3.16) в (3.14), находим эффективные напряжения аналитически.

Результаты, полученные с помощью метода конечных элементов, используем в градиентном критерии. Поскольку сетка конечных элементов разбивается таким образом, что размер грани конечного элемента равен $L^*/24$, значения напряжений в узлах по z от 0 до L^* извлекаются, как функция от r, как показано на рисунке 3.16. Данные первых главных напряжений в узлах обозначаются $\sigma_i(r)$, где $i \in$ [1, 2, …, 24] и означает номер узлового ряда, когда нумерация рядов начинается от поверхности вглубь пластины по оси z.

$$\Delta\sigma = \sigma_1(r) - \sigma_1(r + \Delta r). \quad (3.17)$$

Здесь Δr – расстояние между узлами по координате r. Тогда:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta r}. \quad (3.18)$$

Модуль градиента и относительный градиент вычисляются по формулам:

$$|grad\sigma| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1(r) - \sigma_2(r)}{L^*/24}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta r}\right)^2} \quad (3.19)$$

$$g_n = \frac{|grad\sigma|}{\sigma_1(r)} \quad (3.20)$$

Выражение для эффективных напряжений запишется в виде:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_1(r)}{\left(1 + \sqrt{L^* g_n}\right)} \quad (3.21)$$

На рисунке 3.17 показаны зависимости эффективных напряжений от координаты r, полученные аналитическим и численным методами на поверхности пластины. Максимальные значения $\sigma_{e(an)max} = 298{,}6$ МПа, и $\sigma_{e(num)max} = 272{,}5$ МПа. Разница в значениях получается из-за того, что численный анализ учитывает изгиб, как в реальном эксперименте, в отличие от аналитической формулы. Ввиду этого факта аналитическое решение дает достаточно хорошую оценку эффективных напряжений в окрестности области контакта. Зависимости имеют максимумы, координаты которых вдоль оси r дают оценки радиуса возможных кольцевых трещин при контактном взаимодействии. В этом случае r, полученный аналитическим методом, составляет 0,000216 м, а по результатам численного моделирования равен 0,000223 м. Противоречие состоит в том, что разрушение происходит из-за изгиба. Однако вблизи области контакта возникает высокая концентрация максимальных растягивающих напряжений. Можно предположить, что во время эксперимента могут возникать микроскопические кольцевые трещины в окрестности области контакта [117].

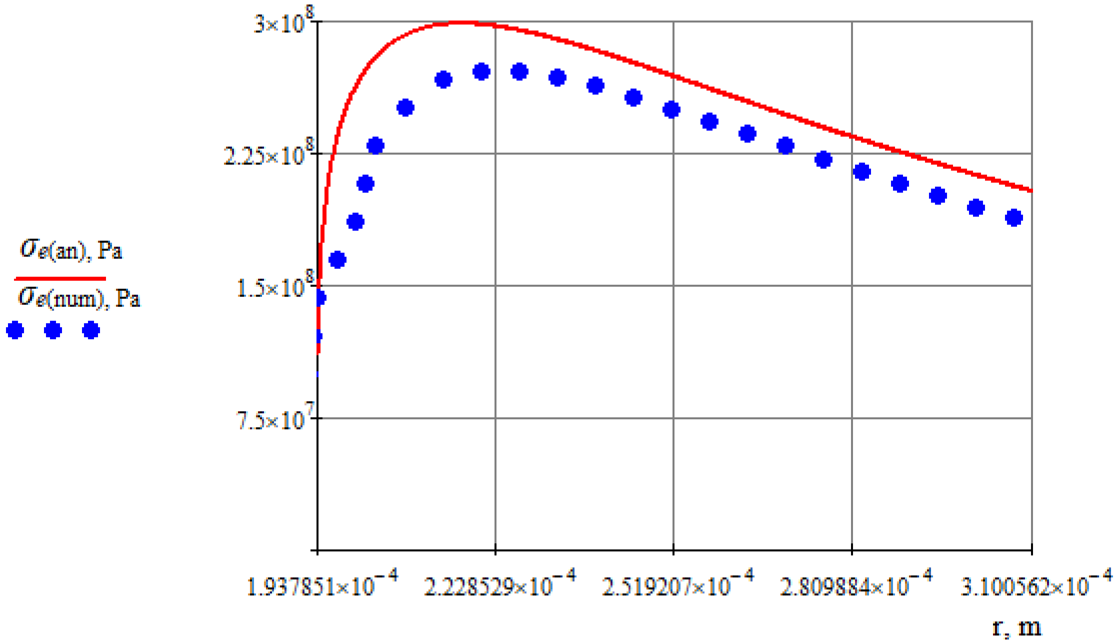

Рисунок 3.17 – $\sigma_{e(an)max}$ – эффективное напряжение, полученное аналитически, $\sigma_{e(num)max}$ – эффективное напряжение, полученное численным методом

3.3 Задача о контакте прямоугольных блоков из оргстекла с профилированным зазором

3.3.1 Постановка задачи

Эта задача появилась при подготовке эксперимента по моделированию гидроразрыва пласта (ГРП) в лабораторных условиях. Когда ГРП используется в реальных условиях, то трещину желательно проращивать только в продуктивных слоях, где находятся залежи нефти, при этом нельзя пересекать трещиной слои с газом и подземными водами, это приведёт к нежелательным последствиям. Следовательно, геометрия трещины должна быть смоделирована корректно для проектирования и оценки таких воздействий на пласт. Поэтому точное моделирование ГРП при наличии градиента напряжений является фундаментальным требованием для проектирования воздействия на пласт. Для оценки точности модели необходимо сравнение результатов расчёта с данными о росте трещины из тщательно контролируемых и непосредственно управляемых лабораторных экспериментов.

Лабораторный метод основывается на создании пошагового изменения напряжений на границе, которая ограничивает плоскость развития трещины, между двумя блоками оргстекла. Для образования нескольких зон контактного давления на границе между прижатыми друг к другу блоками поверхность одного блока имела заданный профиль, полученный на станке с программным управлением. В результате контакта профилированного блока с гладкой поверхностью другого блока возникают разные зоны сжимающих напряжений. Этот метод впервые был использован в [118] для исследования роста области гидроразрыва в продуктивной зоне низких сжимающих напряжений, которая была ограничена двумя симметричными областями с высокими контактными давлениями. В [119] эксперимент проведён для исследования гидроразрыва в продуктивной зоне средних напряжений, с одной стороны ограниченной барьерной зоной высоких сжимающих напряжений, а с другой стороны зоной низких сжимающих напряжений.

Вязкость разрушения на границе контакта равна нулю и в этом случае рост области гидроразрыва определяется течением вязкой жидкости. Утечки жидкости не происходит из-за того, что проницаемость оргстекла отсутствует. Этот экспериментальный метод отличается от условий в пласте, где имеется проницаемость жидкости в поровое пространство. Однако преимуществом рассматриваемой методики является возможность наблюдения области гидроразрыва в процессе эксперимента через прозрачные блоки.

Экспериментальная установка представляет собой следующую схему, показанную на рисунке 3.18. В качестве основания рассматривается подвижная жёсткая плита из стали с размерами 600x600x150 мм, которая передаёт усилия от 6-ти домкратов на блоки оргстекла. В стальной плите есть отверстие под трубку для подвода жидкости гидроразрыва. На плиту устанавливается первый разделительный блок оргстекла (6) с размерами 580x580x88 мм, который также имеет отверстие под трубку. Материал блока снижает возмущения поля напряжений на нижней поверхности от концентраторов в виде пазов для лент со светодиодами, необходимыми для подсветки области гидроразрыва. Следующим устанавливается профилированный в одном направлении блок оргстекла (5) с размерами 580x580x180 мм. На блок (5) устанавливается блок оргстекла (4), с размерами 580x580x182, между нижней плоской поверхностью которого и верхней профилированной поверхностью блока (5) при сжатии создается ступенчатое распределение давления. Сверху на блок оргстекла (4) устанавливается блок оргстекла (3) с размерами 580x580x187, который является промежуточным между блоком (4) и верхней стальной несущей плитой (2). При этом в центре стальной плиты имеется отверстие для видеокамеры, поэтому блок оргстекла (3) предназначен для того, чтобы не передавать возмущение напряженного состояния от отверстия для видеокамеры на распределение напряжений в блоках в окрестности области гидроразрыва.

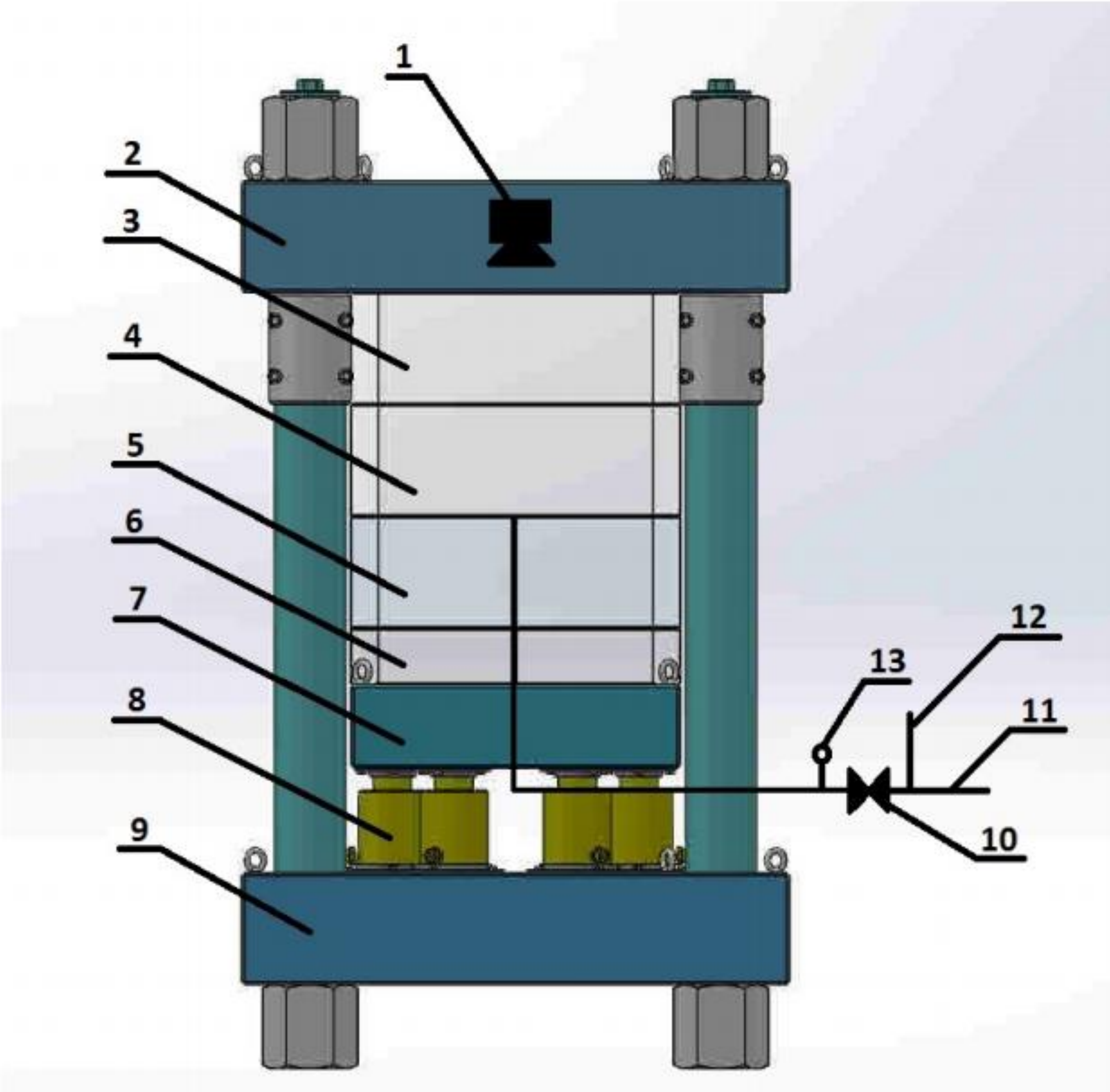

Рисунок 3.18 – Экспериментальная установка. (1) система видеофиксации; (2) верхняя несущая плита из стали; (3) верхний разделитель из оргстекла; (4) верхняя часть образца из оргстекла; (5) нижняя часть образца; (6) нижний разделитель из оргстекла; (7) подвижная жесткая плита; (8) система нагружения из 6 домкратов; (9) нижняя несущая плита из стали; (10) клапан; (11) линия нагнетания жидкости гидроразрыва; (12) линия откачивания воздуха. (13) датчик давления в линии нагнетания жидкости гидроразрыва

Зоны напряжений образуются в результате контактного взаимодействия при сжатии плоского и профилированного блока. Траектория профиля может быть получена из решения задачи о ступенчатой нагрузке. Между (4) и (5) блоками оргстекла при начальном контакте имеется зазор, однако при сжатии блоков обе поверхности будут полностью прижаты друг к другу и между ними возникнет контактное давление. Затем между блоками (4) и (5) нагнетается жидкость, при достижении некоторого давления появляется область гидроразрыва, которая затем распространяется при меньшем давлении.

Цель задачи определить распределение сжимающих напряжений, возникающих при контакте плоского и профилированного блоков оргстекла, с учётом влияния реальных размеров блоков и особенностей граничных условий в эксперименте.

3.3.2 Принятые допущения и аналитическое решение задачи о ступенчатой нагрузке.

Рассмотрим случай действия распределённой нагрузки (давления) на полосе предполагаемого профилированного блока, как показано на рисунке 3.19. Существует аналитическое решение для определения перемещений поверхности полупространства под действием равномерно распределённой нагрузки на полосе [3].

$$U_z(x) = \frac{-(1-\nu^2)\cdot P}{\pi E} \cdot \left[(x+b)\cdot ln\left[\left(\frac{x+b}{b}\right)^2\right] - (x-b)\cdot ln\left[\left(\frac{x-b}{b}\right)^2\right]\right] + C, \tag{3.22}$$

где $P = 4$ МПа – давление, действующее на полосу шириной $2b = 100$ мм. Коэффициент Пуассона оргстекла $\nu = 0{,}4$, а его модуль Юнга $E = 3{,}3$ ГПа [119].

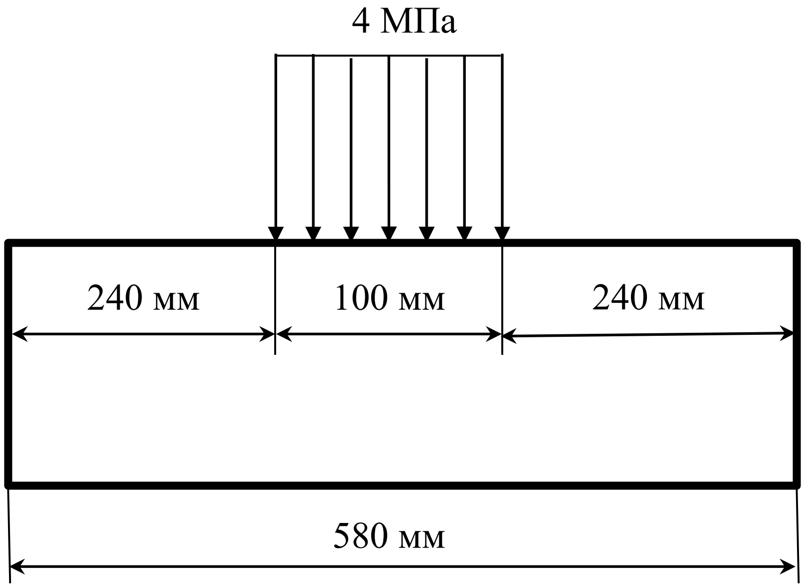

Рисунок 3.19 – Схема ступенчатой нагрузки

С помощью уравнения для перемещений поверхности полупространства получаем форму профиля, симметричного относительно вертикальной оси, показанного на рисунке 3.20. При этом значение постоянной *C* в (3.22) задавалось таким образом, что на краях блока перемещение поверхности было равно нулю.

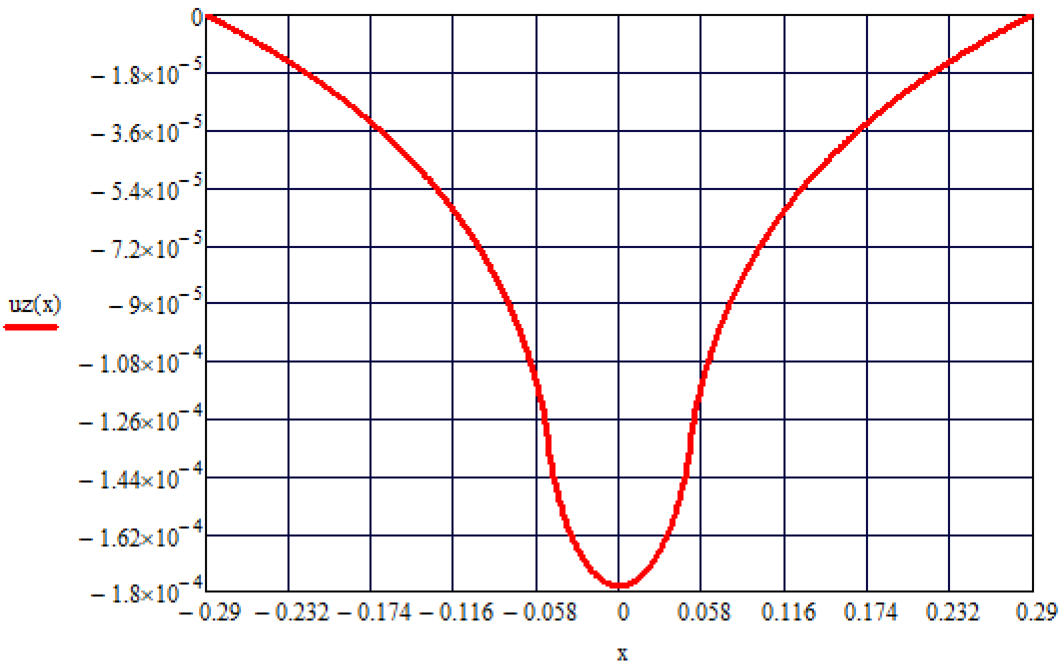

Рисунок 3.20 – Форма профиля поверхности блока оргстекла

В эксперименте используется не полупространство, а блоки, имеющие конкретные размеры. Кроме того, в аналитическом решении не учитывается отверстие под видеокамеру. Профиль перемещений был вычислен с учётом нагрузки на полосе шириной 100 мм, и был вырезан в блоке в одном направлении. В расчете задавалась максимальная нагрузка 2500 кН, создаваемая экспериментальной установкой.

В конечно-элементной модели эта сила будет равномерно распределена по всей поверхности верхнего блока из оргстекла, с которой контактирует стальная плита, за исключением круговой области диаметром 0,15 м, расположенной в центре блока и соответствующей отверстию для видеокамеры.

3.3.3 Численное моделирование.

Построена трёхмерная модель сборки блоков из оргстекла, представленная на рисунке 3.21. При создании модели профилированного блока, траектория профиля в эскизе задавалась в соответствии с уравнением (3.22).

Закрепление выполнялось по нижней поверхности блока (6), по которой оргстекло контактирует с подвижной стальной плитой, при этом перемещения на этой поверхности запрещались по всем направлениям: $U_x = U_y = U_z = 0$. На верхней поверхности модели выделен контур диаметром 0,15 м, соответствующий отверстию под видеокамеру. Нагрузка прикладывалась по верхней поверхности, за исключением отверстия для видеокамеры (рис. 3.22).

На границе контакта создавались контактные пары из контактных (CONTA174) и целевых (TARGET170) конечных элементов. Контактные пары задавались с учётом трения. При этом на границе контакта между блоками в каждом узле выполнялись условия контакта: зазор $g = 0$, сжимающие контактные силы $R_N < 0$, касательные силы $R_T < \mu_s R_N$, где μ_s – статический коэффициент трения для контактирующих поверхностей оргстекла, который равен 0,8.

Сетка конечных элементов задавалась гексагональной, со сгущением по плоскостям, в зоне контакта профилированного блока, для более точного решения в окрестности зазора (рис. 3.23). Средний размер конечного элемента составил 0,01м, а в зоне сгущения 0,005 м.

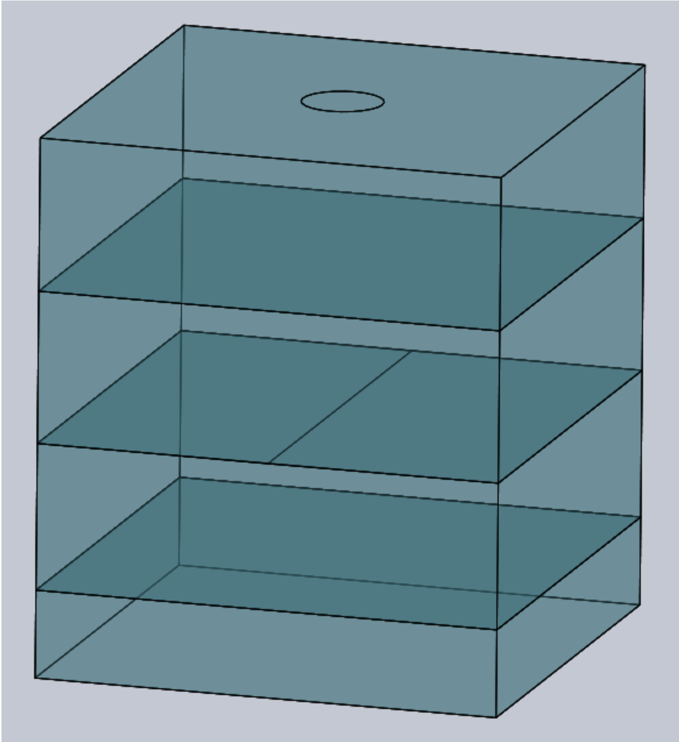

Рисунок 3.21 – Трёхмерная модель блоков из оргстекла

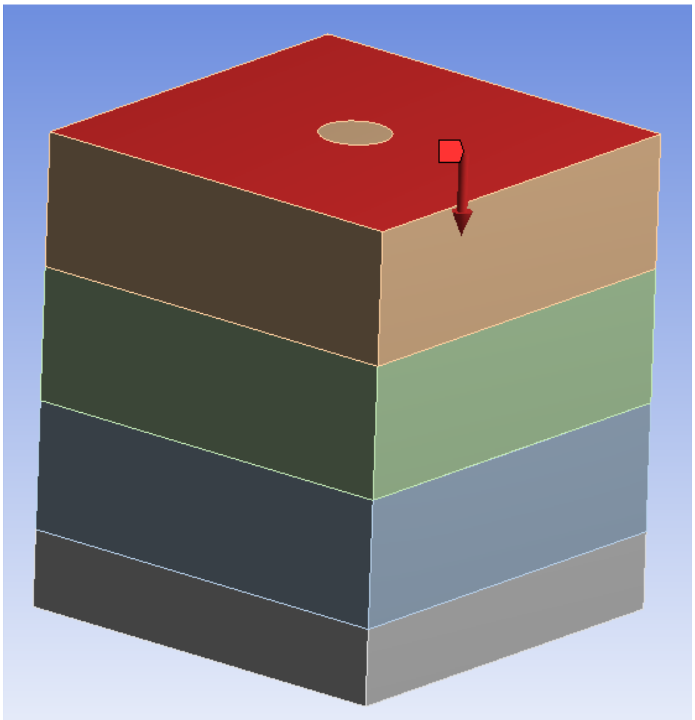

Рисунок 3.22 – Схема нагружения модели

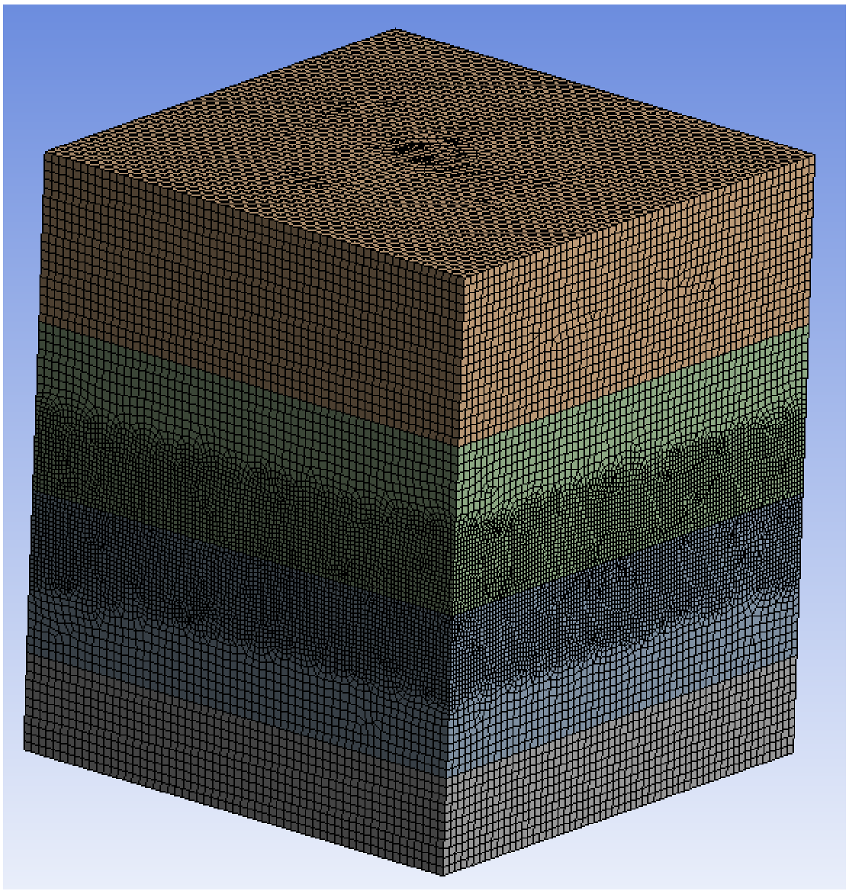

Рисунок 3.23 – Сетка конечных элементов со сгущением в области контакта профилированного блока

Математическая модель включала в себя: систему уравнений теории упругости (уравнения равновесия, определяющие соотношения, уравнения Коши для малых деформаций); модель контакта с трением. Применялся метод пошагового приращения нагрузки (500 шагов «по времени») Ньютона-Рафсона для решения нелинейных задач с дополнительным алгоритмом линейного поиска; метод штрафных функций для решения контактной задачи. Точки контакта определялись по узлам сетки. Контактная жёсткость обновлялась на каждой равновесной итерации.

3.3.4 Результаты

В результате численного анализа получили давления и перемещения в зоне профилированного зазора. Конечно-элементное моделирование учитывало реальные граничные условия, в том числе отверстие под видеокамеру.

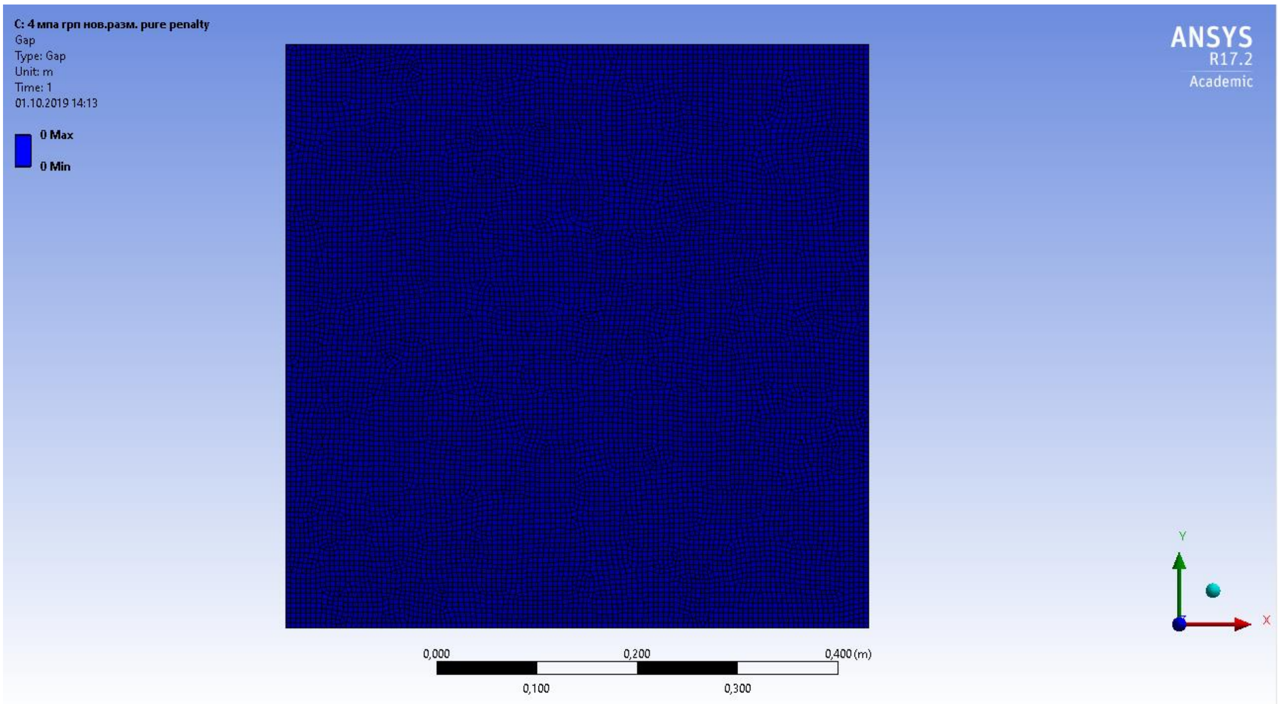

Рисунок 3.24 – Зазор в области контакта профилированного блока отсутствует

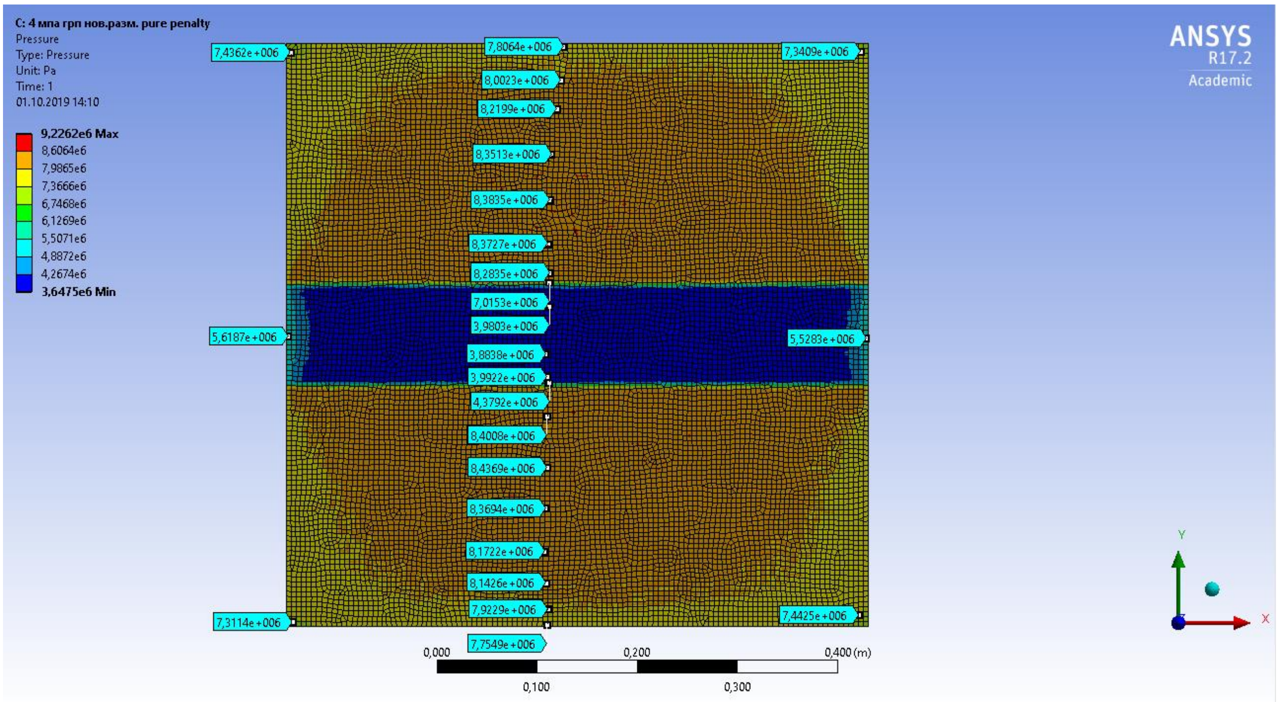

Рисунок 3.25 – Давления в области контакта профилированного блока

Необходимо было выяснить, достаточно ли нагрузки, реализуемой экспериментальной установкой, чтобы профилированный и не профилированный блоки были полностью прижаты друг к другу до начала нагнетания жидкости. На рисунке 3.24 представлен зазор в области контакта после приложения нагрузки.

Синяя зона отражает результат, что блоки находятся в полном контакте и зазор отсутствует.

При максимальном усилии сжатия среднее значение давления в центральной полосе равно 3,9 МПа, а на краях центральной полосы давление достигает 5,6 МПа. Давление в области контакта имеет характерный ступенчатый вид: давление в центральной полосе отличается от давлений на боковых полосах в среднем на 4 МПа. Максимальные значения давления достигают 9,2 МПа (рис. 3.25).

Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального ГРП в слоистых горных породах [120].

3.4 Исследование формы керамических стоматологических имплантатов в зависимости от площади контакта и степени минерализации кости

Существует целая отрасль производства имплантатов. В современной медицине распространены процедуры протезирования коленных и тазобедренных суставов, позвоночника, зубов и других частей тела. Большинство имплантатов мировые производители изготавливают из титана. В последние годы появилась тенденция перехода от металлических имплантатов к керамическим, в том числе и в стоматологии. Это связано с рядом недостатков металлических имплантатов: склонность к коррозии, плохая биосовместимость, засвечивание на рентгенограмме и др. В то время как, керамические материалы имеют ряд преимуществ, основные из которых это высокая биосовместимость, химическая инертность, коррозионная стойкость, прочность, устойчивость к износу, отсутствие электропроводности, высокая биоадгезивность. Керамика из оксида циркония хорошо подходит для зубных имплантатов. Диоксид циркония в три раза прочнее титана, кроме того в процессе приживления в кости он схож по свойствам с титаном. Важными преимуществами зубных имплантатов из керамики в стоматологии являются: такие же свойства светопреломления и светопроводимости, как и в натуральных зубах; они подходят для мостовидного протезирования; обладают гладкой поверхностью и образуют меньше зубного налёта; плотно прилегают к культе зуба и не усаживаются; относительно легкие; не подвержены воздействию различных красителей; не оставляют металлического привкуса во рту; исключают возможность обнажения металла под десной и последующую корректировку; не вызывают побочных эффектов, таких как синюшность десны; не ранят десну; гипоаллергенны; пористость материала способствует лучшей остеоинтеграции.

В то же время, в связи с высокой хрупкостью материалов из керамики и недостаточно изученными пределами применимости в условиях эксплуатационного нагружения, специалисты устанавливают керамические имплантаты в случае протезирования фронтальных зубов, где не требуется интенсивная жевательная нагрузка и отдают предпочтение имплантатам из титановых сплавов для установки в области коренных зубов, чтобы обезопасить пациента от неизученных последствий установки керамических имплантатов. В связи с низким спросом на керамические имплантаты, несущие основные жевательные нагрузки, мировые производители делают упор на производство имплантатов из различных титановых сплавов, применяя технологии напыления для придания шероховатости поверхности, чтобы улучшить качество остеоинтеграции, что делает имплантаты более дорогостоящими. Кроме того, имплантаты из керамики до последнего времени можно было привезти лишь из-за границы, однако всё больше российских производителей стали выпускать имплантаты из керамики, заняв конкурирующие ниши при производстве имплантатов для позвоночника, коленного и тазобедренного суставов. Однако, производство керамических имплантатов для стоматологического протезирования до сих пор не развито. Поэтому задача по установлению возможности применения цельнокерамических имплантатов в стоматологии в качестве элементов, воспринимающих основные жевательные нагрузки весьма актуальна.

3.4.1 Принятые допущения и численное моделирование

С трёхмерного томографического снимка челюсти пациента, были сняты анатомические размеры, по которым была построена трёхмерная модель центральной части верхней челюсти, которая учитывает состав губчатой и кортикальной кости. Твердотельная модель части челюсти включает в себя кортикальную кость переменной толщины, варьирующейся в пределах 2 мм. Внутренняя полость челюсти заполнена губчатой костью (рис. 3.26).

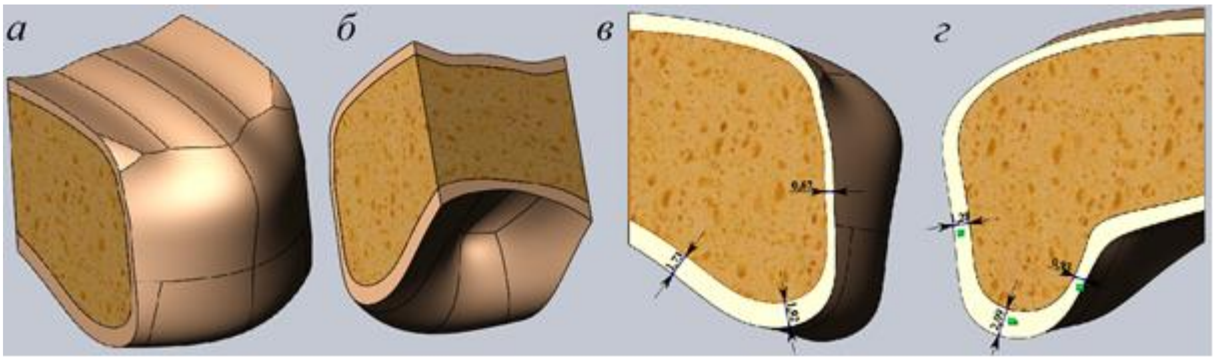

Рисунок 3.26 – Модель части верхней челюсти: а, б – трёхмерный вид части верхней челюсти; в, г – толщина кортикальной кости в двух произвольных сечениях, размеры указаны в мм

В модели челюсти были вырезаны отверстия с резьбой под соответствующие типы имплантатов и были построены модели имплантатов следующих типов: цилиндрический, конический, цилиндрический обратно-конусный и конусный обратно-конусный (рис. 3.27).

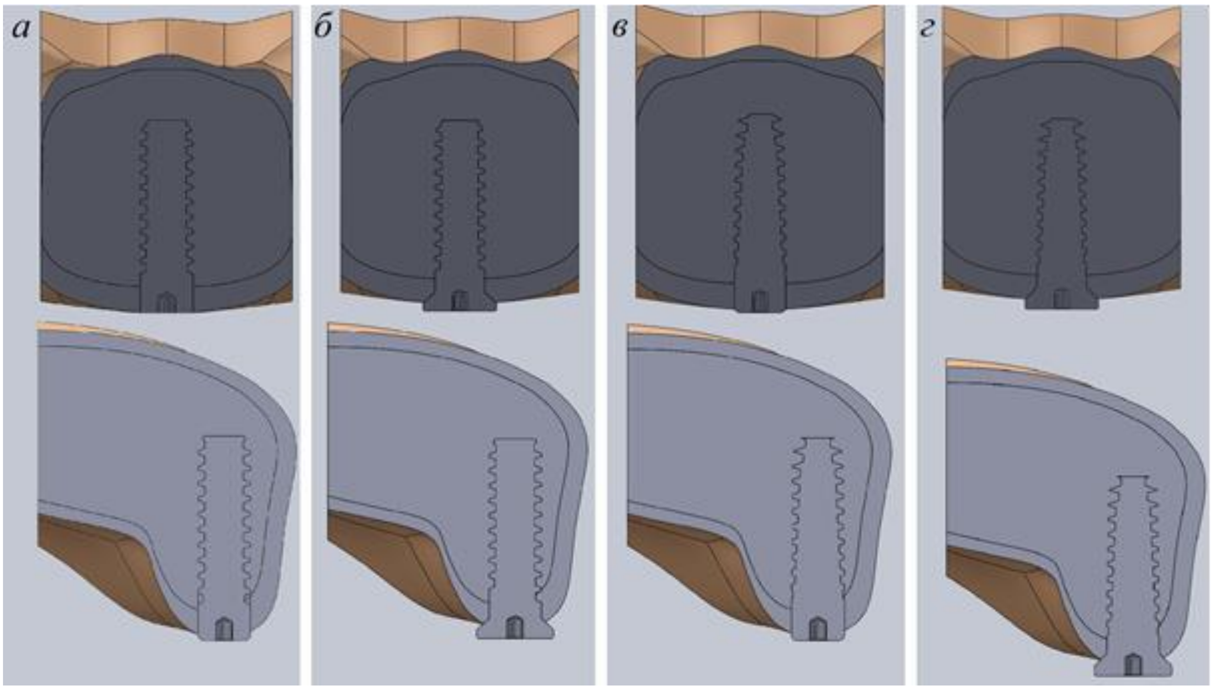

Рисунок 3.27 – Модели имплантатов (фронтальное и боковое сечения челюсти): а) цилиндрический; б) цилиндрический обратно-конусный; в) конусный; г) конусный обратно-конусный

Необходимо отметить, что модели имплантатов цилиндрический и конусный построены на основе реальных имплантатов, применяемых в стоматологии в настоящее время, а цилиндрический обратно-конусный и конусный обратно-конусный строились на основе предыдущих типов имплантатов, однако, у них шейка имплантатов имеет обратную коническую форму из-за следующего предположения. Внутренняя часть челюсти состоит из непрочного пористого материала, а именно губчатой кости, у которой площадь контакта с имплантатом больше, при этом губчатая кость является менее прочной из-за пористой структуры и плохо воспринимает жевательные нагрузки, в том числе и в процессе приживляемости имплантата. Основная нагрузка приходится на более прочную кортикальную кость, являющуюся внешней оболочкой челюсти, толщина которой всего 2 миллиметра. Таким образом, за счёт обратно-конусной формы шейки имплантата предполагается, что увеличится площадь контакта между имплантатом и кортикальной костью, и соответственно произойдёт перераспределение напряжений, вследствие чего напряжения в губчатой кости уменьшатся. Увеличение площади контакта при использовании обратно-конусной формы имплантата по сравнению с прямой, показано на рисунке 3.28. При этом диаметр прямой шейки имплантата 4,2 мм, а диаметр шляпки обратно-конусного имплантата увеличен до 6,2 мм.

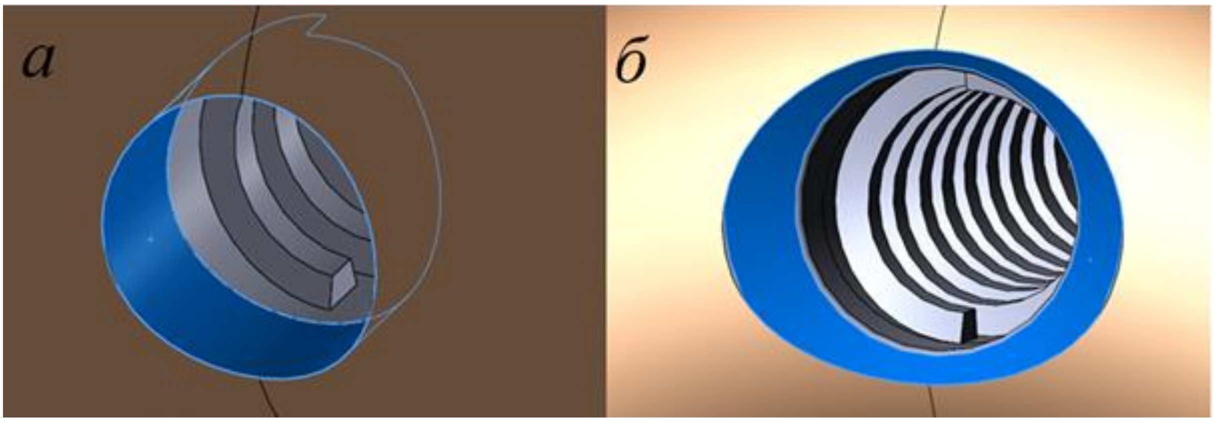

Рисунок 3.28 – Площадь контакта имплантата с кортикальной костью: а) при прямой форме шейки имплантата; б) при обратно-конусной форме шейки имплантата

В связи с тем, что рассматриваемые задачи имеют сложную геометрию и не приводятся к теоретически известным модельным задачам, имеющим аналитическое решение, необходимо применять численные методы. Наиболее удобным является метод конечных элементов, который имеет широкое распространение в научной и инженерной практике. Метод конечных элементов позволяет изучить сложные процессы, протекающие в областях контакта имплантатов с костью, а также учесть дентальную форму имплантатов, резьбу, переменную толщину кортикальной и губчатой кости по поверхности их соединения, а также анатомическую форму геометрии модели для максимально точной оценки эквивалентных напряжений для каждого компонента модели.

В расчёте рассматривается два варианта модели материала. Первый вариант, когда кортикальная и губчатая кости являются линейным изотропным материалом с нормальной минерализацией кости. Второй вариант, когда кортикальная и губчатая кости являются линейным изотропным материалом с критической минерализацией кости.

В [46] представлены эмпирические формулы для вычисления предела прочности и модуля упругости для губчатой кости в зависимости от плотности, которая меняется с возрастом:

$$\sigma = 60\rho^2\,, \tag{3.23}$$

$$E = 1.915\rho^3\,, \tag{3.24}$$

где σ измеряется в МПа, Е – измеряется в МПа, ρ – плотность в г/см^3. В скелете человека полная плотность губчатой кости варьируется в пределах 0,1-1,5 г/см^3. Для оценки механических свойств губчатой кости при различной минерализации, эти экстремальные значения плотности были приняты для расчёта в качестве параметров нормальной и критической минерализации. Таким образом модуль упругости губчатой кости меняется с 6,46 ГПа при нормальной минерализации до 1,915 МПа при критической минерализации, а предел прочности со 135 МПа при нормальной минерализации до 0,6 МПа при критической минерализации. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3.

Предел прочности и модуль упругости кортикальной кости уменьшаются, со 140 МПа в 30 лет до 120 МПа в 90 лет. За тот же самый период модуль упругости уменьшается с 17 ГПа до 15,6 ГПа. Данные параметры кортикальной кости были так же соотнесены с нормальной и критической минерализацией. Имплантаты в модели рассматривались из Y-TZP керамики ZrO2+3,8% Y2O3, для которой модуль Юнга 400 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел прочности 750 МПа [45, 56, 57, 121-123].

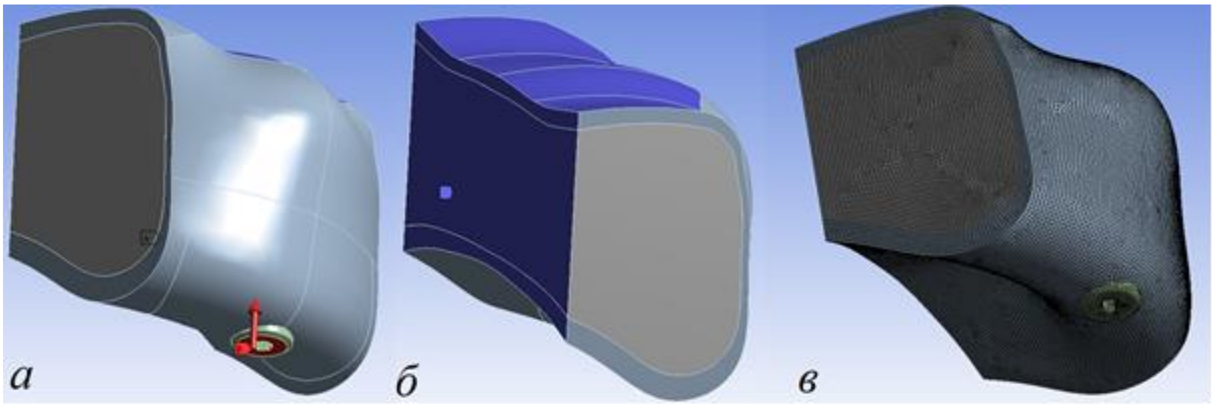

Рисунок 3.29 – а) задание нагрузки 150 Н; б) закрепление модели; в) сетка конечных элементов

Закрепление было выполнено по поверхностям верхней и задней части модели, при этом перемещения на этой поверхности в каждом узле запрещались по всем направлениям: $U_x = U_y = U_z = 0$. Нагрузка величиной 150 Н прикладывалась к поверхности имплантата, в соответствии с направлением жевательной нагрузки (рис. 3.29) [63].

На границе контакта создавались контактные пары из контактных (CONTA174) и целевых (TARGET170) конечных элементов. Контактные пары задавались без трения из предположения, что связанная модель контакта соответствует успешной остеоинтеграции. При этом на границе контакта между блоками в каждом узле выполнялись условия контакта: зазор $g = 0$; сжимающие контактные силы $R_N < 0$; условие связанности контакта между имплантатом и костью $U_{y1} = U_{y2}$; $U_{x1} = U_{x2}$; $U_{z1} = U_{z2}$, где перемещения с индексом 1 – означают перемещения на границе контакта в кости, а с индексом 2 – перемещения на границе контакта в имплантате.

Математическая модель включала в себя: систему уравнений теории упругости (уравнения равновесия, определяющие соотношения, уравнения Коши для малых деформаций); модель контакта связанная. Применялся метод пошагового приращения нагрузки (500 шагов «по времени») Ньютона-Рафсона для решения нелинейных задач с дополнительным алгоритмом линейного поиска; метод штрафных функций для решения контактной задачи. Точки контакта определялись по узлам сетки. Контактная жёсткость обновлялась на каждой равновесной итерации. Средний размер конечного элемента составил порядка 0,00025 м.

3.4.2 Результаты

В результате решения задач были определены эквивалентные напряжения по Мизесу в кортикальной и губчатой костях, а также в имплантате. Результаты эквивалентных напряжений по Мизесу в кортикальной и губчатой кости одного из образцов представлены на рисунке 3.30, а в имплантате на рисунке 3.31. Результаты расчёта всех моделей представлены в таблице 3.6.

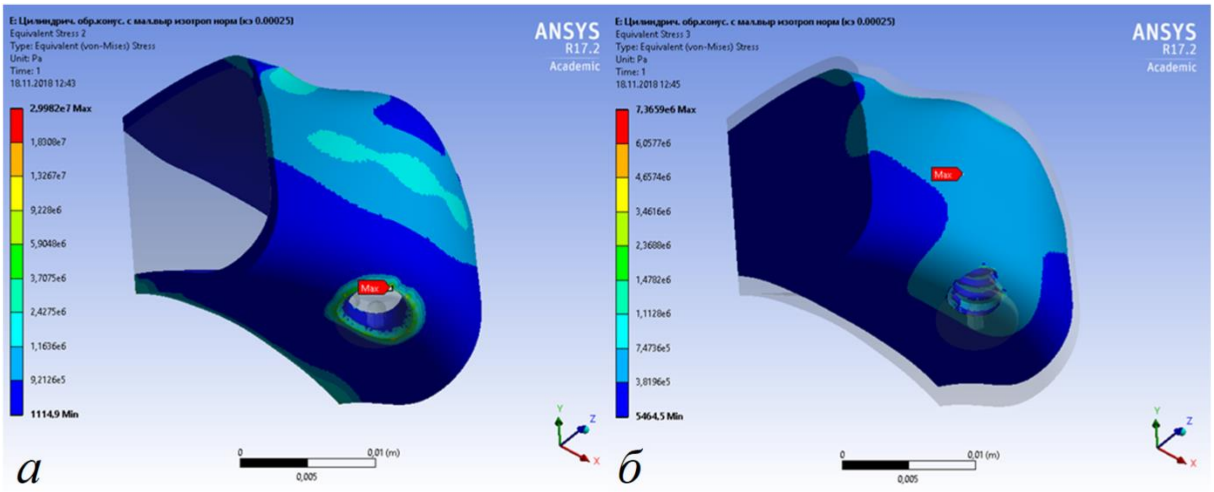

Рисунок 3.30 – а) эпюра эквивалентных напряжений в кортикальной кости на примере модели с цилиндрическим обратно-конусным имплантатом; б) эпюра эквивалентных напряжений в губчатой кости на примере модели с цилиндрическим обратно-конусным имплантатом

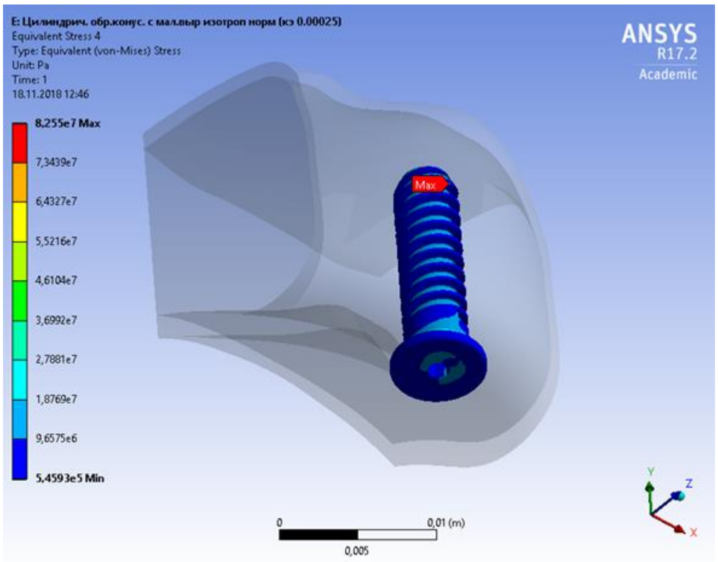

Рисунок 3.31 – Эпюра эквивалентных напряжений в имплантате на примере модели с цилиндрическим обратно-конусным имплантатом

Таблица 3.6 – Сравнение результатов

Тип имплантата	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа					
	Нормальная минерализация			Критическая минерализация		
	Кортикальная кость	Губчатая кость	Имплантат	Кортикальная кость	Губчатая кость	Имплантат
Цилиндрический	32,3	7,78	38,69	168,9	0,16	87,7
Цилиндрический обратно-конусный	29,9	7,36	82,55	81,4	0,14	57,9

Конусный	26,3	6,5	57,7	163,6	0,18	249,4
Конусный обратно-конусный	31,5	5,4	49,8	82,3	0,15	48,6

В результате проведённого исследования обратно-конусной формы имплантатов установлено, что напряжения в губчатой кости, как при нормальной, так и при критической минерализации уменьшаются, что является преимуществом таких имплантатов перед имплантатами стандартной формы. При этом, если при нормальной минерализации форма имплантатов не играет существенной роли, то для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате.

Данное исследование было выполнено автором при поддержке молодёжного гранта РФФИ №18-38-00361 «Исследование возможности применения цельнокерамических имплантатов в стоматологии на основе анализа напряжённо-деформированного состояния», в котором автор являлась руководителем и единственным исполнителем с 2018 по 2020 годы. Современное состояние проблемы по данной теме было изучено и опубликовано в обзорной статье [83]. Результаты исследования опубликованы в [124-126].

3.5 Выводы

1. Определены максимальные растягивающие напряжения в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины в стеклянном образце. Установлено, что напряжения от изгиба, возникающие из-за наличия отверстия, не влияют на растягивающие напряжения в окрестности области контакта. Формулу Хубера для получения растягивающих напряжений в полупространстве можно использовать для образцов конечных размеров, испытанных по рассмотренной методике.

2. Установлено, что для вычисления поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний хрупких материалов можно воспользоваться

формулой Войновского-Кригера для круглой свободно опёртой пластины из FeAl при вдавливании стального шара в центр.

3. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального ГРП в слоистых породах. Подтверждено, что отверстие под видеокамеру не влияет на напряжения в области контакта, а нагрузки, реализуемой экспериментальной установкой, достаточно для устранения зазора между плоским и профилированным блоками оргстекла.

4. Установлено, что при критической минерализации кости использование обратно-конусной формы шейки имплантатов существенно снижает напряжения в губчатой кости, в кортикальной кости и в имплантате. Поэтому рекомендуется использовать такую форму имплантатов при протезировании людей в пожилом возрасте.

Заключение

В диссертационной работе были получены численные решения контактных задач, имеющих практическое значение, которые близки по постановке к известным задачам, имеющим аналитическое решение, и выполнено сравнение результатов расчетов напряжённо-деформированного состояния в области контакта с результатами моделирования с использованием аналитических решений. Кроме того, была рассмотрена практическая контактная задача биомеханики, для изучения оптимальной формы имплантатов, обеспечивающей наибольшую площадь контакта с костью и, соответственно, наименьшие значения контактных напряжений.

Основные результаты работы:

1. Установлено напряжённо-деформированное состояние стеклянного образца в форме параллелепипеда, моделирующего полупространство в эксперименте при вдавливании стального шара в центр образца. С помощью метода конечных элементов, учитывающего реальные граничные условия в эксперименте, найдены максимальные растягивающие напряжения в окрестности области контакта, от действия которых образуются кольцевые трещины в стеклянном полупространстве. Относительная разница между численными моделями задачи Герца и задачи, учитывающей отверстие, не превышает 1,2%, следовательно, напряжения, возникающие от изгиба в эксперименте из-за наличия отверстия для микроскопа, существенно не влияют на значения растягивающих напряжений в окрестности области контакта. Формулу Хубера для получения растягивающих напряжений в полупространстве можно использовать для образцов конечных размеров, испытанных по рассмотренной методике.

2. Установлено напряжённо-деформированное состояние круглой свободно опёртой пластины из хрупкого материала алюминида железа при вдавливании стального шара в центр. С помощью численного моделирования, с учётом реальных граничных условий и способа нагружения в эксперименте,

найдены максимальные растягивающие напряжения в центре на нижней поверхности пластины. Выполнено сравнение с результатами аналитического решения модельной задачи о круглой свободно опёртой пластине, нагруженой сосредоточенной силой в центре. Относительная разница между численным и аналитическим методом не превышает 5,6%. Из этого был сделан вывод, что для вычисления поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний новых материалов можно воспользоваться формулой Войновского–Кригера. Построена зависимость эффективных напряжений от координаты r, полученных аналитическим и численным методом на поверхности пластины. Разница в значениях получается из-за того, что численный анализ в отличие от аналитической формулы учитывает изгиб, возникающий в реальном эксперименте. Аналитическое решение дает достаточно хорошую оценку эффективных напряжений в окрестности области контакта. Зависимости имеют максимумы, координаты которых вдоль оси r дают оценки радиуса возможных кольцевых трещин при контактном взаимодействии. Противоречие состоит в том, что разрушение происходит из-за изгиба. Однако вблизи области контакта возникает высокая концентрация максимальных растягивающих напряжений. Предполагается, что во время эксперимента в окрестности области контакта могут возникать микроскопические кольцевые трещины.

3. Установлено напряжённо-деформированное состояние прямоугольных блоков из оргстекла, при начальном контакте которых имеет место зазор заданной формы. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального ГРП в слоистых породах. Подтверждено, что отверстие под видеокамеру не имеет влияния на напряжения в области контакта, а нагрузки, реализуемой экспериментальной установкой, достаточно для устранения зазора между плоским и профилированным блоками оргстекла.

4. Установлено, что напряжения в губчатой кости, как при нормальной, так и при критической минерализации уменьшаются при использовании обратно-

конусной формы стоматологических имплантатов, что является несомненным преимуществом таких имплантатов перед имплантатами стандартной формы. При этом выявлено, что если при нормальной минерализации форма имплантатов не играет существенной роли, то для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате. Поэтому рекомендуется использовать такую форму имплантатов при протезировании людей в пожилом возрасте.

Список литературы

1. Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н. Генрих Герц. 1857—1894. – М.: Наука, 1968. – 312 с.

2. Храмов Ю.А. Герц Генрих Рудольф. Физики: Биографический справочник / Изд. 2-е – М.: Наука, 1983. – 400 с.

3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 510с., ил.

4. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Механика контактного разрушения. Изд. 4-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2012. – 224 с.

5. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2013. – 352 с.

6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 268 с.

7. Галин Л.А. и др. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с.

8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

9. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.

10. Морозов Е.М., Зернин М.В. Контактные задачи механики разрушения. – М.: Машиностроение, – 1999. – 544 с.

11. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – М.: Технопринт. – 2000. – 196 с.

12. Базаренко Н.А. Контактная задача для круглой плиты со свободным от напряжений торцом // Прикладная математика и механика – 2010. – Т. 74, № 6. – С. 978-991.

13. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.

14. Горячева И.Г., Торская Е. В. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого основания // Механика твердого тела. – 2008. – №3. – С. 132-144.

15. Горячева И.Г. Моделирование изнашивания деформируемых тел на разных масштабных уровнях // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 31-39.

16. Горячева И.Г., Усов П.П. Численный анализ вязкоупругогидродинамического точечного контакта при стационарных условиях // Трение и износ. – 2010. – Т. 31, № 1. – С. 13-23.

17. Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 430, № 4. – С. 490-493.

18. Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю. Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учётом сил молекулярного притяжения // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99-107.

19. Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, № 6. – С. 853-863.

20. Айзикович С.М. и др. Механика контактных взаимодействий. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.

21. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта: Учебное пособие. – СПб.: Политехника, 2003. – 233с.

22. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – М.: Физматлит, 2004. – 302 с.

23. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007. – 114 с.

24. Айзикович С.М., Александров В.М. и др. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. Монография. – М.: Физматлит, 2006. – 240 с.

25. Салганик Р. Л., Мохель А.Н., Федотов А.А. Контактная задача теории упругости для полуограниченных тел с шероховатой границей при почти полном их контакте // Вестник МАИ. – 2007. – Т. 14, № 4. – С. 119-127.

26. Неустроева Н.В. Контактная задача для упругих тел разных размерностей // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, № 4. – С. 60-75.

27. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Изв. Сарат.ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 1. – С. 77-84.

28. François D., Pineau A., Zaoui A. Mechanical Behaviour of Materials. Volume II: Viscoplasticity, Damage, Fracture and Contact Mechanics // Springer, Hermes, Paris, 1998. – 410 p.

29. Hills D.A., Nowell D. Mechanics of Fretting Fatigue // Springer Science & Business Media, 1994. – 246 p.

30. Contact Mechanics. Proceedings of the 2nd Contact Mechanics International Symposium // Springer, New York, 1995. – 469 p.

31. Fischer-Cripps A.C., Nanoindentation // Springer, New York, 2002. – 216 p.

32. Lacerda L.A., Wrobel L.C. An efficient numerical model for contact-induced crack propagation analysis // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol.39. – P.5719-5736.

33. Wriggers P. Computational Contact Mechanics // Springer, Berlin, 2006. – 521 p.

34. Fischer-Cripps A.C. Introduction to Contact Mechanics // Springer, New York, 2007. – 240 p.

35. Sofonea M. Mathematical Models in Contact Mechanics // Cambridge University Press, New York, 2012. – 295 p.

36. Yastrebov V. A. Numerical Methods in Contact Mechanics // ISTE, London, 2013. – 295 p.

37. Pfeiffer F., Bremer H., The Art of Modeling Mechanical Systems // CISM International Centre for Mechanical Sciences. 2017. – 392 p.

38. Han Y., Abousleiman Y.N., Hull K.L., Al-Muntasheri G. A. Numerical Modeling of Elastic Spherical Contact for Mohr-Coulomb Type Failures in Micro-Geomaterials // Experimental Mechanics. – 2017. – Vol.57. – P.1091-1105.

39. Matsuda S., Nakada T. Simple mechanics model and Hertzian ring crack initiation strength characteristics of silicon nitride ceramic ball subjected to thermal shock // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol.197. – P.236-247.

40. Yang H., Green I. Analysis of displacement-controlled fretting between a hemisphere and a flat block in elasto-plastic contacts // Journal of Tribology. – 2018. – Vol.141(3). – P.1-33.

41. Green I. An Elastic-plastic Finite Element Analysis of Two Interfering Hemispheres Sliding in Frictionless Contact // Physical Science International Journal. – 2018. – Vol.19 (1). – P.1-34.

42. Hashimoto S. Komata H., Okazaki S., Matsunaga H. Quantitative evaluation of the flaking strength of rolling bearings with small defects as a crack problem // International Journal of Fatigue. – 2019. – Vol.119. – P.119-203.

43. Stan G. The effect of edge compliance on the adhesive contact between a spherical indenter and a quarter-space // International Journal of Solids and Structures – 2019. – Vol.158. – P.165-175.

44. Kebli B., Baka Z. Annular crack in an elastic half-space // International Journal of Engineering Science. – 2019. – Vol.134. – P.117-147.

45. Choi A.H., Ben-Nissan B. Anatomy, Modeling and Biomaterial Fabrication for Dental and Maxillofacial Applications. – Bentham, 2018. – 208 p.

46. Хлусов И.А., Пичугин В.Ф., Рябцева М.А. Основы биомеханики биосовместимых материалов и биологических тканей: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета. – 2007. – 149 с.

47. Arendts F.J., Sigolotto C. Standard measurements, elasticity values and tensile strength behavior of the human mandible, a contribution to the biomechanics of the mandible // Journal of Biomedical Technologies. – 1989. Vol. 34, No. 10. – P. 248-255.

48. Arendts F. J., Sigolotto C. Mechanical characteristics of the human mandible and study of in vivo behavior of compact bone tissue, a contribution to the description of biomechanics of the mandible // Journal of Biomedical Technologies. – 1990. Vol. 35, No. 6. – P. 123-130.

49. Ashman R.B., Van Buskirk W.C. The elastic properties of a human mandible // Advances in Dental Research. – 1987. – Vol. 1, No. 1. – P. 64-67.

50. O'Mahony A. M., Williams J.L., Katz J.O., Spencer P. Anisotropic elastic properties of cancellous bone from a human edentulous mandible // Clinical Oral Implants Research. –2000. – Vol. 11, No. 5. – P. 415-421.

51. Rho J.Y. An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone // Ultrasonics. – 1996. – Vol. 34, No. 8. – P. 777-783.

52. Silva G.C., Cornacchia T.M., De Magalhães C.S., Bueno A.C., Moreira A.N. Biomechanical evaluation of screw- and cement-retained implant-supported prostheses: A nonlinear finite element analysis // The Journal of prosthetic dentistry. – 2014. – Vol. 112, No. 6. – P. 1479–1488.

53. Turner C.H., Rho J., Takano Y., Tsui T.Y., Pharr G.M. The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: results from two microscopic measurement techniques // Journal of Biomechanics. – 1999. Vol. 32, No. 4. – P. 437-441.

54. Turner C.H., Cowin S.C., Rho J.Y., Ashman R.B., Rice J.C. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone // Journal of Biomechanics. – 1990. Vol. 23, No. 6. – P. 549-561.

55. Вафин С. М. Керамика на основе диоксида циркония. Достижения и перспективы / Стоматолог-практик. – 2011. – № 1. – С. 26-33.

56. Duraccio D., Mussano F., Faga M.G. Biomaterials for dental implants: current and future trends // Journal of Materials Science. – 2015. – Vol. 50, No. 14. – P. 4779-4812.

57. Kokubo T. Bioceramics and their clinical applications. – Cambridge, 2008. – 784 p.

58. Веселов С.В., Стукачева Н.С., Кузьмин Р.И., Черкасова Н.Ю. Структура и механические свойства керамических материалов системы Al2O3–ZrO2 // Научный вестник НГТУ. – 2016. – Т. 65, № 4. – С. 207-217.

59. Гветадзе Р.Ш., Дьяконенко Е.Е., Лебеденко И.Ю. Исследования старения, усталости и деградации с целью повышения надежности стоматологической керамики. Обзор статей в мировых журналах. // Стоматолог. – 2016. – № 6. С. 51-60

60. Камышная К.С., Хабас Т.А. Исследование процесса получения пор заданной конфигурации в керамике из диоксида циркония за счёт направленной кристаллизации карбамида. // Научные исследования и разработки. – 2016. – № 9. С. 33-38.

61. ГОСТ 31571-2012. Керамика стоматологическая. Технические требования. Методы испытаний. – М: Стандартинформ. – 2013. – 20 с.

62. Фокин В.Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твёрдого тела: учеб. пособие. – Самара: Изд-во Самар. гос. техн. ун-та, 2010. – 131 с.

63. Bevilacqua M., Tealdo T., Pera F. Three-Dimensional Finite Element Analysis of Load Transmission Using Different Implant Inclinations and Cantilever Lengths // The International Journal of Prosthodontics. – 2008. Vol. 21, No. 6. – P. 539-542.

64. De Cos Juez F. J., Lasheras F. S., García Nieto P. J., Alvarez-Arenal A. Non-linear numerical analysis of a double-threaded titanium alloy dental implant by FEM // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – Vol. 206. – P. 952-967.

65. Hasan I., Heinemann F., Aitlahrach M., Bourauel Ch. Biomechanical finite element analysis of small diameter and short dental implant // Biomed Technologies. – 2010. Vol. 55. – P. 341-350.

66. Kong Y.S., Park J.W., Choi D.J. FEA model analysis of the effects of the stress distribution of saddle-type implants on the alveolar bone and the structural/physical

stability of implants // Maxillofacial Plastic and Reconstructive Surgery. – 2016. – Vol. 38, No. 9. – P. 1-9.

67. Lee K. B. Finite element analysis of peri-implant bone stress influenced by cervical module configuration of endosseous implant // The Journal of Korean Academy of Prosthodontics. – 2009. – Vol. 47, No. 4. – P. 394-405.

68. Guven S., Atalayb Y., Asutayb F., Ucanc M.C., Dundard S., Karamane T., Gunesc N. Comparison of the effects of different loading locations on stresses transferred to straight and angled implant supported zirconia frameworks: a finite element method study // Biotechnology & Biotechnological Equipment. – 2015. – Vol. 29, No. 4. – P. 766-772.

69. Няшин Ю.И., Рогожников Г.И., Никитин В.Н., Асташина Н.Б. Биомеханический анализ зубных имплантатов из сплава титана и диоксида циркония // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 102-109.

70. Bevilacqua M., Tealdo T., Menini M., Pera F., Mossolov A., Drago C., Pera P. The influence of cantilever length and implant inclination on stress distribution in maxillary implant-supported fixed denture // The Journal of prosthetic dentistry. – 2011. Vol. 105. – P. 5-13.

71. Capelli M., Zuffetti F., Del Fabbro M., Testori T. Immediate rehabilitation of the completely edentulous jaw with fixed prostheses supported by either upright or tilted implants: A multicenter clinical study // The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants. – 2007. Vol. 22. – P. 639-644.

72. Ebadian B., Mosharraf R., Khodaeian N. Effect of cantilever length on stress distribution around implants in mandibular overdentures supported by two and three implants // European Journal of Dentistry. – 2016. Vol.10, No.3. – P. 333-340.

73. Guven S., Beydemir K., Dundar S., Eratilla V. Evaluation of stress distributions in peri-implant and periodontal bone tissues in 3- and 5-unit tooth and

implant-supported fixed zirconia restorations by finite elements analysis // European Journal of Dentistry. – 2015. Vol. 9, No.3. – P. 329-339.

74. Jemt T. Fixed implant-supported prostheses in the edentulous maxilla. A five-year follow-up report // Clinical Oral Implants Research. – 1994. Vol. 5. – P. 142-147.

75. Menini M., Pesce P., Bevilacqua M., Tealdo T., Barberis F. Effect of Framework in an Implant-Supported Full-Arch Fixed Prosthesis: 3D Finite Element Analysis // The International Journal of Prosthodontics. – 2015. Vol. 28, No. 6. P. 627-630.

76. Silva G.C., Mendonça J.A., Lopes L.R., Landre J. Stress Patterns on Implants in Prostheses Supported by Four or Six Implants: A Three Dimensional Finite Element Analysis / The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants. – 2010. Vol. 25, No. 2. – P. 239-246.

77. Testori T., Del Fabbro M., Capelli M., Zuffetti F., Francetti L., Weinstein R. L. Immediate occlusal loading and tilted implants for the rehabilitation of the atrophic edentulous maxilla: 1-year interim results of a multicenter prospective study // Clinical Oral Implants Research. – 2008. Vol. 19. – P. 227-232.

78. Sano M., Ikebe K., Yang T.C., Maeda Y. Biomechanical Rationale for Six Splinted Implants in Bilateral Canine, Premolar, and Molar Regions in an Edentulous Maxilla // Implant Dentistry. – 2012. Vol. 21, No. 3. – P. 220-224.

79. Hussein L.A. A CT-based 3D-Finite element analysis of using zirconia prosthetic material as a full-arch hybrid fixed detachable mandibular prosthesis // The Journal of American Science. – 2015. Vol. 11, No. 2. – P. 108-118.

80. Mathieu V., Vayron R., Richard G., Lambert G., Naili S., Meningaud J. P., Haiat G. Biomechanical determinants of the stability of dental implants: Influence of the

bone – implant interface properties // Journal of Biomechanics. – 2013. Vol. 47, No. 1. – P. 3-13.

81. Маслов Л.Б. Математическая модель структурной перестройки костной ткани. // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17, №2 (60). – С. 36-63.

82. Frisardi G., Barone S., Paoli A., Frisardi F., Tullio A., Lumbau A., Chessa G. Biomechanics of the press-fit phenomenon in dental implantology: an image-based finite element analysis // Head & Face Medicine. – 2012. Vol. 8. – P. 8-18.

83. Ларичкин А.Ю., Федорова Н.В., Тодер М.С., Шевела А.А. Различные подходы к оценке работоспособности имплантатов в стоматологии: материалы, моделирование, современные тенденции = Different approaches to evaluating the performance efficiency of implants in dentistry: materials, modelling, modern trends // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 1. – С. 117-139.

84. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел // Новосибирск: Изд-во СО РАН. – 2000. – 262 с.

85. Присекин В.Л., Расторгуев Г.И. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 238 с.

86. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н., Матюхин Ю.И., Хавин Г.Л. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.

87. Федорова Н.Н., Вальгер С.А., Данилов М.Н., Захарова Ю.В. Основы работы в ANSYS 17. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.

88. Cescotto S., Zhu Y.Y. Large Strain Dynamic Analysis Using Solid and Contact Finite Elements Based on a Mixed Formulation – Application to Metalforming // Journal of Metals Processing Technology. – 1994. Vol. 45. – P. 657-663.

89. Cescotto S., Charilier R. Frictional Contact Finite Elements Based on Mixed Variational Principles // International Journal for Numercial Method in Engineering. – 1992. Vol. 36. – P. 1681-1701.

90. Puso M.A., Laursen T.A. A Mortar Segment-to-Segment Contact Method for Large Deformation Solid Mechanics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2004. Vol. 193. – P. 601-629.

91. Puso M. A., Laursen T.A. A Mortar Segment-to-Segment Frictional Contact Method for Large Deformations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2004. Vol. 193. – P. 4891-4913.

92. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: Изд-во журнала «Світ геотехніки», 2009. – 400 с.

93. Bathe K.J. Finite Element Procedures. – Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1996. – 1052 p.

94. Schweizerhof K.H., Wriggers P. Consistent Linearization for Path Following Methods in Nonlinear FE Analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1986. Vol. 59. – P. 261-279.

95. Леган М.А., Новоселов А.Н., Фёдорова Н.В. Разрушение стекла вблизи области контакта со стальными шарами // ПМТФ. – 2018. Т.59, №4. – С. 149-159.

96. Hertz H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper // Z. angew. Math. 1881. Bd 92. S. 156-171.

97. Huber M.T. Zur Theorie der Beruhrung fester elastischer Korper // Ann. Physik. 1904. Bd 14. S. 153-163.

98. Legan M.A., Novoselov A.N., Fedorova N.V. Formation of annular cracks in glass during contact interaction // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. № 894 – Art. 012051 (7 p.)

99. Леган М.А., Новоселов А.Н., Федорова Н.В. Образование кольцевых трещин в стекле при контактном взаимодействии // Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва: тез. докл. Всеросс. конф. с международным участием посвящ. 60-летию Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 4–8 сент. 2017 г. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2017. – С. 162.

100. Федорова Н.В., Леган М.А., Новоселов А.Н., Численный анализ контактного взаимодействия при вдавливании стального шара в стеклянное полупространство // 10 Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: материалы, Самара, 18–22 сент. 2017 г.: в 2 т. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – Т. 2. – С. 258-260.

101. Fedorova N.V., Legan M.A. The problem of the formation of annular cracks in the glass half-space upon contact with the ball, taking into account real experimental conditions // Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications: abstr., Russia-Japan workshop, Novosibirsk, 11–13 Nov. 2019. – Novosibirsk, 2019. – P. 8.

102. Федорова Н.В., Леган М.А. Определение контактных напряжений при вдавливании шара в образцы из стекла с учетом граничных условий в эксперименте // Юбилейная 30 междунар. инновационная конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2018): сб. тр. конф., Москва, 20–23 нояб. 2018 г. – М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. – С. 212-215.

103. Fedorova N.V., Legan M.A. Determining the contact stresses of the ball indentation in glass specimens with the actual conditions of their support // Non-

equilibrium processing of materials: experiments and modeling: abstr. of Russian-Japan joint seminar, Novosibirsk 1–3 Okt. 2018. – Novosibirsk: IPS NSU, 2018. – P. 38.

104. Леган М.А., Новоселов А.Н., Федорова Н.В. Разрушение стекла при контактном взаимодействии со стальными шарами // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. – Новокузнецк: Новокузнец. ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та, 2019. – С. 77-82.

105. Khaleghi E., Lin Y.S., Meyers M.A., Olevsky E.A., Spark plasma sintering of tantalum carbide // Scr. Mater. – 2010. № 63 – P. 577-580.

106. Wei X., Back C., Izhvanov O., Khasanov O.L., Haines C.D., Olevsky E.A. Spark Plasma Sintering of commercial zirconium carbide powders: densification behavior and mechanical properties // Materials – 2015. №8 – P. 6043-6061.

107. Harmouche M.R., Wolfenden A. // Mater. Sci. Eng.– 1986. № 84 – P.35-42.

108. Dudina D.V., Legan M.A., Fedorova N.V., Novoselov A.N., Anisimov A.G., Esikov M.A. Structural and mechanical characterization of porous iron aluminide FeAl obtained by pressureless Spark Plasma Sintering// Mater. Sci. Eng., A. – 2017. № 695 – P. 309-314.

109. Wei X., Back C. Spark plasma sintering of commercial zirconium carbide powders: Densification behavior and mechanical properties // Materials – Open Access Materials Science Journal. – 2015. № 8 – P.6043-6061.

110. Fu C.L., Yoo M.H. Electronic structure and mechanical behavior of transition-metal aluminides: A first-principles total-energy investigation // Mater. Chem. Phys. – 1992. № 32 – P. 25-36.

111. Woinowsky-Krieger S. Ingenieur-Archiv. 1933. Band IV. Heft 4. S. 305-331.

112. Dudina D.V., Bokhonov B.B., Legan M.A., Novoselov A.N., Skovorodin I.N., Bulina N.V., Esikov M.A., Mali V.I. Analysis of the formation of FeAl with a high open porosity during electric current-assisted sintering of loosely packed Fe-Al powder mixtures // Vacuum. – 2017. №146 – P. 74-78.

113. Леган М.А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода // ПМТФ. – 1994. Т.35, №5 – С. 117-124.

114. Леган М.А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. – 1993. Т.34, №4 – С. 146-154.

115. Федорова Н.В., Дудина Д.В., Леган М.А., Новоселов А.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния при изгибе круглых пластин, изготовленных методом искрового плазменного спекания // Краевые задачи и математическое моделирование: тем. сб. науч. ст. – Новокузнецк, 2017. – С. 192-196.

116. Федорова Н.В., Дудина Д.В., Леган М.А., Новоселов А.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния при изгибе круглых пластин, изготовленных методом искрового плазменного спекания // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 4 Всерос. конф., Новосибирск, 11–13 апр. 2017 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 311-318.

117. Fedorova N.V., Legan M.A., Dudina D.V. Fracture analysis in the area of contact stresses using the FEM and the gradient criteria of the limiting state // Materials Today: Proceedings. – 2019. Vol. 16, pt. 1. – P. 130-136.

118. Jeffrey, R.G., Bunger A.P. A detailed comparison of experimental and numerical data on hydraulic fracture growth through stress contrasts // In: Proc. 2007 SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, College Station, 2007. Paper SPE 106030.

119. Wu, R., Bunger, A.P., Jeffrey R.G., Siebrits, E.A comparison of numerical and experimental results of hydraulic fracture growth into a zone of lower confining stress // In The 42nd US Rock Mechanics Symposium (USRMS). American Rock Mechanics Association. 2008.

120. Федорова Н.В., Леган М.А. Задача о контакте блоков из оргстекла с профилированным зазором // Международной молодежной научной конференции "XLV Гагаринские чтения"(14-17 апреля 2020г., Москва, Россия): сборник трудов секции “Механика и моделирование материалов и технологий” – Москва, 2020. (принята в печать).

121. Christel P., Meunier A., Heller M., Torre J.P., Peille C.N. Mechanical properties and short-term in vivo evaluation of yttrium oxide-partially-stabilized Zirconia // Journal of Biomedical Materials Research – 1989. Vol. 23. – P. 45-61.

122. Kyu B.L. Finite element analysis of peri-implant bone stress influenced by cervical module configuration of endosseous implant // The Journal of Korean Academy of Prosthodontics. – 2009. Vol. 47, No. 4. – P. 394-405.

123. Park J. Bioceramics: Properties, Characterizations and Applications. – Iowa, 2008. – 292 p.

124. Федорова Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов из керамики в зависимости от их формы и степени минерализации кости = The study of the stress-strain state of the dental ceramic implants depending on their shape and bone mineralization degree // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 451-459.

125. Федорова Н.В. Анализ напряженно-деформированного состояния керамических стоматологических имплантатов // 12 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр. в 4 т., Уфа, 19–24 авг. 2019 г. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2019. – Т. 4. – С. 218-220.

126. Федорова Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния цельнокерамических имплантатовв зависимости от их формы для использования в стоматологии // Юбилейная 30 междунар. инновационная конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2018): сб. тр. конф., Москва, 20–23 нояб. 2018 г. – М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. – С. 403-406.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

«УТВЕРЖДАЮ»
Заместитель генерального директора по научному инжинирингу ООО «Газпромнефть НТЦ»

А.А. Пустовских

«25» 03 2020 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы
Федоровой Натальи Виталиевны,
представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Настоящим актом подтверждается, что результаты расчёта, включенные в диссертационную работу Федоровой Н.В., использовались в ООО «Газпромнефть НТЦ» для анализа контактного давления между плоским и профилированным блоками оргстекла в установке экспериментального моделирования гидроразрыва пласта (ГРП) в рамках проекта «Оптимальная модель ГРП». В блоках оргстекла создавалось ступенчатое распределение сжимающих напряжений, моделирующее распределение напряжений в слоистой среде, действующих вдоль слоев. Так как блоки имели конечные размеры, то для определения контактных напряжений потребовалось использовать программу метода конечных элементов. Показано, что распределение контактного давления имеет характерный ступенчатый вид. Давление в центральной полосе меньше давления на боковых полосах. Однако на краях центральной полосы (на границе блоков) оно выше, чем в центре. При анализе экспериментальных результатов, полученных на лабораторной установке моделирования ГРП, необходимо учитывать, что неравномерность распределения контактного давления вдоль центральной полосы может оказывать влияние на зависимость давления жидкости гидроразрыва от объема закаченной жидкости.

Руководитель направления
управления научно-технологического
сопровождения нефтегазовых проектов

Г.В. Падерин