

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Банщикова Инна Анатольевна

**ПОЛЗУЧЕСТЬ ИЗОТРОПНЫХ И ОРТОТРОПНЫХ СПЛАВОВ И
ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность 01.02.04 –
Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д-р. техн. наук, доцент
М. А. Леган

Новосибирск – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ И РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ	28
1.1 Современные тенденции в машиностроении	28
1.2 Классификация и особенности режимов деформирования.....	32
1.3 Кинетические уравнения ползучести и повреждаемости для описания процессов ползучести и разрушения элементов конструкций...	39
1.3.1 Определяющие уравнения ползучести и повреждаемости в энергетической форме.....	41
1.3.2 Экспериментальное обоснование гипотезы «единой кривой» повреждаемости	44
1.3.3 Методика определения параметров кинетических уравнений с монотонной и немонотонной зависимостью предельной деформации от напряжения	50
1.3.4 Время разрушения при деформировании образцов с заданной скоростью	56
1.4 Свойства анизотропии и разносопротивляемости при растяжении и сжатии материалов в условиях ползучести.....	66
1.5 Выводы по первой главе	71
ГЛАВА 2. ИЗОТРОПНЫЙ МАТЕРИАЛ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	73
2.1 Обзор изотропных моделей, учитывающих разные свойства материала на растяжение и сжатие в условиях ползучести	73
2.2 Модель изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на трансформированном пространстве напряжений.....	74
2.2.1 Кручение круглого сплошного стержня в условиях установившейся ползучести	78

2.2.2 Кручение пластины из разупрочняющегося сплава	91
2.2.3 Кручение пластины из упрочняющегося сплава	96
2.3 Выводы по второй главе	100
ГЛАВА 3. ОРТОТРОПНЫЙ МАТЕРИАЛ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	103
3.1 Обзор ортотропных моделей ползучести.....	103
3.2 Модель ортотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на потенциальном подходе	104
3.3 Ортотропный материала с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие.....	106
3.3.1 Изгиб пластин из трансверсально-изотропного материала.....	108
3.3.1.1 Чистый изгиб пластин при неустановившейся ползучести	109
3.3.1.2 Чистый изгиб пластин в условиях установившейся ползучести.....	111
3.3.1.3 Решение задачи о изгибе пластины методом конечных элементов.....	113
3.3.1.4 Влияние трансверсально-изотропных свойств материала в направлении нормали к плите на изгиб пластины.....	116
3.3.1.5 Экспериментальная апробация методов расчета на задаче кручения пластины из изотропного материала.....	123
3.3.1.6 Экспериментальная апробация модели и методов расчета на задаче кручения пластины из трансверсально-изотропного материала.....	127
3.3.1.7 Влияние трансверсально-изотропных свойств материала в направлении сдвига на изгиб гладких и оребренных пластин.....	132
3.3.2 Кручение ортотропных стержней.....	139
3.3.2.1 Кручение стержня, вырезанного в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите.....	140
3.3.2.2 Кручение стержня, вырезанного в направлении плоскости трансверсально-изотропной плиты.....	143
3.3.2.3 Сравнительный анализ результатов расчета кручения круглых сплошных и кольцевых стержней.....	147

3.4 Модель изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на потенциальном подходе	155
3.4.1 Определяющие соотношения в случае растяжения, сжатия и плоского напряженного состояния.....	156
3.4.2 Изгиб гладких пластин	158
3.4.3 Прямые и обратные задачи формообразования пластин.....	162
3.5 Ползучесть ортотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие.....	165
3.5.1 Определяющие соотношения в случае растяжения, сжатия и плоского напряженного состояния.....	166
3.5.2 Кручение стержня, вырезанного из трансверсально-изотропной плиты с разными свойствами материала на растяжение и сжатие.....	167
3.5.2.1 Кручение стержня кольцевого сечения, вырезанного в направлении нормали к плите.....	172
3.5.2.2 Кручение стержня кольцевого сечения, вырезанного в направлении плоскости плиты.....	173
3.5.2.3 Анализ результатов расчетов и экспериментов на кручение стержней кольцевого сечения.....	176
3.6 Выводы по третьей главе	180
ГЛАВА 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ	184
4.1 Выбор режимов формования и оценка эксплуатационного ресурса по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности при одноосном растяжении стержней.....	184
4.1.1 Анализ режимов деформирования при постоянных напряжениях и с заданной кинематикой	186
4.1.2 Результаты численных расчетов для разных сплавов.....	189
4.2 Формообразование полусферической оболочки в условиях ползучести.....	198
4.2.1. Разрешающие соотношения, основанные на безмоментной теории оболочек.....	199
4.2.2. Решение задачи формообразования без учета накопления	

повреждений	204
4.2.3 Расчет параметров процесса формообразования оболочки с учетом накопления повреждений.....	211
4.2.4 Сравнительный анализ накопления повреждений для оболочек из разных сплавов.....	215
4.3 Выводы по четвертой главе	220
ГЛАВА 5. ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.....	222
5.1 Механизмы разрушения в условиях ползучести.....	226
5.2 Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения осесимметрично нагруженных кольцевых пластин.....	232
5.2.1 Метод расчета на основе решения установившейся ползучести материала.....	236
5.2.2 Расчет методом конечных элементов в программе ANSYS	245
5.2.3 Сравнительный анализ решений	246
5.3 Длительность до разрушения вращающихся и растягиваемых дисков с учетом стадии распространения фронта разрушения	252
5.3.1 Расчет длительности первой стадии до начала разрушения	252
5.3.2 Расчет продолжительности стадии распространения фронта разрушения	257
5.3.3 Влияние выбора формы диска и моделей теории ползучести на продолжительность стадий разрушения	259
5.4 Апробация метода расчета длительности до разрушения на примере растягиваемой пластины с круговым отверстием	267
5.5 Выводы по пятой главе	270
Заключение	273
Список литературы	282
Приложение А	318
Приложение Б	319
Приложение В	320
Приложение Г	321
Приложение Д	335

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В авиа- судостроении и общем машиностроении все большее применение находят новые облегченные высокопрочные конструкционные сплавы. Изготовление изделий из этих сплавов и их последующая эксплуатация осложняется такими свойствами как анизотропия, разное сопротивление растяжению и сжатию, упрочнение-разупрочнение. Деформационно-прочностные свойства материалов зависят от уровня температуры, скорости нагружения, вида напряженного состояния. Анизотропия и различие в свойствах на растяжение, сжатие, сдвиг могут являться результатом предварительной обработки на стадии производства заготовок, например, после прокатки.

В настоящее время в производство активно внедряются технологические процессы обработки материалов давлением, в основе которых лежат медленные температурно-скоростные режимы деформирования в условиях ползучести и режимы близкие к сверхпластичности. Такие режимы позволяют уменьшить повреждаемость и сберечь ресурс изделий уже на стадии изготовления. В условиях повышенных температур усложненные реологические свойства материалов проявляются сильнее и требуют применения в расчетах соответствующих моделей. Анализ и проверка моделей должны проводиться на конструкциях в условиях сложного напряженного состояния, что требует решения соответствующих задач, развития численных методов расчета, в том числе с использованием современных конечно-элементных программных комплексов.

Поиск рациональных температурно-скоростных кинематических и статических режимов формования заготовок с изменяющимися параметрами процесса формообразования для максимального сбережения ресурса материала конструкции представляет актуальное направление исследований. Этапы поиска могут включать экспериментальное исследование свойств

материала, математическое моделирование с учетом усложненной реологии и упругого восстановления после снятия нагрузок, прогнозирование длительности эксплуатации элементов конструкций. Время начала разрушения конструкции в течение эксплуатации не полностью определяет ее долговечность. От начала до полного разрушения готовая конструкция может работать достаточно продолжительный период времени. Определение дополнительного срока эксплуатации представляет важную задачу.

Степень разработанности темы исследования. Различным теоретическим и прикладным аспектам обработки материалов давлением в медленных режимах деформирования за счет необратимых деформаций ползучести и сверхпластичности посвящено значительное число исследований (Б.В. Горев, Г.А. Раевская, О.В. Соснин, Н.Н. Малинин, А.М. Локощенко, К.И. Романов, А.А. Поздеев, С.С. Яковлев, Р. А. Васин, Ф.У. Еникеев, К.А. Padmanabhan, С.Н. Hamilton , N.E. Paton и другие). Временные затраты на стадии изготовления дают выигрыш по прочностным параметрам и в ресурсе деталей. Для описания процессов ползучести и накопления повреждений в материале существуют различные подходы (Л.М. Качанов, Ю.Н. Работнов, А.А. Ильюшин, С.А. Шестериков, А.М. Локощенко, О.В. Соснин, Б.В. Горев, А.Ф. Никитенко, В.П. Радченко, В.И. Астафьев, Б.Е. Победря, А.М. Othman, D.R. Hayhurst, J.L. Chaboche, Y. Liu, S. Murakami, B.F. Dyson, Z.L. Kowalewski, K. Naumenko, Y. Kostenko, H. Altenbach, M. Chrzanowski, J. Betten, A. Zolochovsky, J.J. Skrzypek, A.W. Ganczarski). Выделяют эмпирически и физически обоснованные модели накопления повреждений. Для эмпирических моделей не предпринимается никаких попыток определить физическую природу параметра поврежденности и провести различие между различными механизмами повреждений. В физически обоснованных моделях в качестве меры поврежденности может выступать доля суммарного объема пор и трещин в единице объема, плотность пор и дислокаций. До сих пор эмпирический подход описания материала кинетическими уравнениями ползучести

Ю.Н. Работнова со скалярным параметром поврежденности в силу своей простоты не утратил своей актуальности и его различные модификации остаются востребованными в настоящее время. Следует отметить, что система уравнений Ю.Н. Работнова обладает некоторым произволом, поскольку независимое определение параметров уравнений из экспериментальных данных невозможно. Исследователи используют различные подходы для наилучшего описания данных экспериментов (О.В. Соснин, А.Ф. Никитенко, Б.В. Горев, С.А. Шестериков, А.М. Локощенко, М.А. Юмашева, Н.А. Веклич, S. Murakami, J. Lemaitre, F. Garofalo). Б.В. Горевым для многих материалов установлено геометрическое подобие кривых ползучести при постоянных напряжениях и температурах в нормированных переменных «нормированная деформация – нормированное время». При таком подходе удастся связать параметр поврежденности с измеряемыми в эксперименте величинами деформацией при разрушении и временем разрушения, устранить произвол при нахождении параметров функциональных зависимостей. Деформация при разрушении при этом на кривых ползучести при постоянном напряжении может быть непостоянна. Такая модель нуждается в обосновании возможности описания процессов деформирования и накопления повреждений материалов конструкций вплоть до разрушения. Недостаточно внимания уделено методике определения параметров кинетических уравнений, если зависимость деформации при разрушении от напряжения на исходных кривых ползучести немонотонна.

Материал заготовок, применяемый для формообразования корпусных элементов конструкций, как правило, обладает существенной анизотропией и разными свойствами на растяжение и сжатие. Большинство моделей для изотропных разнсопротивляющихся растяжению и сжатию при ползучести материалов используют степенные функции с одинаковыми показателями при растяжении и сжатии (Б.В. Горев, О.В. Соснин, И.В. Любашевская, А.Ф. Никитенко, А.А. Золочевский, И.Ю. Цвелодуб, S. Sklepus, T.D. Hyde,

Е. Blond). Однако экспериментальные данные для некоторых сплавов показывают, что при растяжении и сжатии может отличаться не только показатель ползучести установившейся стадии, но и показатели, характеризующие упрочнение–разупрочнение.

Существует ряд моделей для описания анизотропных материалов при ползучести в предположении одинаковых и различных свойств при растяжении и сжатии (О.В. Соснин, Б.В. Горев, J. Betten, И.Ю. Цвелодуб, Н. Altenbach, G.Z. Voyiadjis, A. Zolochovsky, S. Sklepus, А.И. Олейников, К. Naumenko, Н. Altenbach, Yong Li, Zhusheng Shi, V. Kobelev, L. Razdolsky, M. Leoni, M. Karstunen). В этих моделях при наличии разных свойств материала на растяжение и сжатие также, как правило, используются функции с одинаковыми степенными показателями для растяжения и сжатия. В публикациях встречаются варианты анизотропных (И.Ю. Цвелодуб) и трансверсально-изотропных (А.И. Олейников) моделей, учитывающих разные свойства материалов, для описания которых используются функции с разными степенными показателями для растяжения и сжатия, однако апробация этих моделей недостаточна или отсутствует.

При выборе того или иного температурно-скоростного режима формообразования, обеспечивающего нужную форму изделия, минимальный уровень накопления повреждений и учитывающего деформации пластичности и ползучести, возникает необходимость решения прямых и обратных задач. Моделирование процессов деформирования оболочечных и стержневых конструкций из анизотропных и неоднородных материалов, в том числе с использованием современных конечно-элементных программных комплексов, рассматривается в работах авторов М.В. Грязев, С.Н. Ларин, С.С. Яковлев, К.С. Бормотин, Б.Д. Аннин, А.И. Олейников, И.Ю. Цвелодуб, С.К. Голушко, Ф.У. Еникеев, А.А. Янковский, Ю.В. Немировский, В.П. Радченко, М.Н. Саушкин, В.В. Цветков, В.О. Каледин, Т.В. Бурнышева, D. Guines, A. Gavrus, N.S. Bhatnagar, S.K. Gupta, D. Banabic. Исследования И.Ю. Цвелодуба и К.С. Бормотина показали, что для материалов,

подчиняющихся энергетическому варианту теории ползучести в варианте О.В. Соснина (работа рассеяния при разрушении постоянная величина), накопление минимального уровня повреждений наблюдается в режиме, когда скорость деформаций ползучести постоянна. Накопление минимальной поврежденности материала после изготовления может дать существенное отличие в длительности эксплуатации деталей в холодном состоянии при низких уровнях напряжений. Однако не всегда поведение конструкционного сплава можно описать в рамках энергетического варианта теории ползучести.

Оценка срока эксплуатационного ресурса элементов конструкций остается актуальной проблемой в энергетике. Ползучесть является одним из механизмов разрушения. Нормативный срок эксплуатации обычно отождествляют со временем начала разрушения. Ряд исследователей для оценки срока эксплуатации рекомендуют использовать теоретические модели, учитывающие распространения фронта разрушения (Л.М. Качанов, T.N. Hyde, D.R. Hayhurst). Различия в оценке времени разрушения объясняется использованием разных вариантов теории ползучести и механизмов разрушения, различных критериев длительной прочности (Ю.Н. Работнов, Л.М. Качанов, С.А. Шестериков, А.М. Локощенко, А.Ф. Никитенко, И.В. Любашевская, В.И. Гладштейн, А.А. Лебедев, В.П. Сдобырев, J.E. Jonson, Sh.N. Kats, J.M. Brear, T.N. Hyde, D.R. Hayhurst). Анализ движения фронта разрушения и нахождение продолжительности стадий разрушения является необходимым при определении дополнительного срока эксплуатации.

Исходя из состояния экспериментальных и теоретических исследований по проблемам, посвященным формообразованию элементов конструкций в медленных режимах деформирования и последующей их эксплуатации, **цель диссертационной работы следующая:** разработка моделей ползучести, учитывающих разные свойства на растяжение и сжатие для изотропных и ортотропных материалов, и анализ накопления повреждений при моделировании процессов формообразования и

деформирования металлических элементов конструкций для максимального сбережения и прогнозирования эксплуатационного ресурса.

Задачи исследования:

- Экспериментально и теоретически обосновать возможность описания процессов деформирования упрочняющихся и разупрочняющихся материалов вплоть до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией, для материалов с непостоянной величиной деформации при разрушении на диаграммах ползучести «деформация–время» при постоянном напряжении.
- Обобщить модель изотропного разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести материала, основанную на «трансформированном» пространстве напряжений, на случай упрочняющегося материала и провести апробацию модели на задачах кручения стержней и изгиба пластин из упрочняющихся и разупрочняющихся сплавов.
- Построить модель ползучести для ортотропного материала с использованием потенциальной функции тензора напряжений, учитывающей разные свойства при растяжении и сжатии, и провести апробацию модели на задачах кручения круглых сплошных и кольцевых стержней, изгиба гладких и орелбренных пластин.
- Для нахождения режимов, обеспечивающих минимальный уровень накопления повреждений, для ряда сплавов исследовать разные статические и кинематические режимы деформирования при растяжении стержней и формообразовании полусферических оболочек. Разработать метод решения задачи формообразования полусферической оболочки из плоской заготовки в условиях ползучести за заданное время на основе безмоментной теории оболочек.
- Разработать и апробировать пользовательскую подпрограмму в конечно-элементном пакете ANSYS для моделирования накопления повреждений.

— Разработать численный метод для расчета напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения конструкций с учетом стадии распространения фронта разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести и повреждаемости, и апробировать этот метод при решении задач изгиба кольцевых пластин, вращающихся дисков и растягиваемых пластин с круговым отверстием.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории ползучести, упругости и пластичности, вычислительной математики и численных методов, вариационного исчисления, оригинальные экспериментальные методики обработки данных по ползучести, оригинальное лабораторное оборудование для проведения экспериментов в условиях сложного напряженного состояния. Для математического моделирования используются конечно-элементный пакет ANSYS с внедренными в него пользовательскими подпрограммами и специально разработанные алгоритмы и программы на языке Fortran.

Достоверность полученных результатов определяется применением апробированных численных методов, корректным использованием методов МДТТ, использованием современных комплексов программ, а также получением решений альтернативными методами расчета, сравнением с известными аналитическими решениями и с данными экспериментов. Достоверность экспериментальных данных обеспечивается корректным применением оборудования и методики обработки опытных данных.

Научная новизна результатов диссертации.

1. Обоснована возможность описания процессов деформирования упрочняющихся и разупрочняющихся материалов вплоть до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией для материалов с непостоянной величиной деформации при

разрушении на диаграммах ползучести «деформация-время» при постоянном напряжении.

2. Модель для изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие при ползучести материала, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, обобщена на случай наличия первого упрочняющего участка кривой ползучести, при этом для аппроксимации данных ползучести одноосного деформирования используются степенные функции с разными показателями степени, характеризующими растяжение и сжатие не только на установившейся стадии, но и на стадиях упрочнения – разупрочнения; модель численно и экспериментально апробирована при решении задач кручения круглых стержней и кручения пластин.

3. Развита модель на основе скалярного потенциала тензора напряжений для ортотропного материала, свойства которого на растяжение и сжатие различны и который на стадии установившейся ползучести описывается функциями с разными степенными показателями при растяжении и сжатии; модель апробирована при решении задач изгиба гладких и оребренных пластин, кручения круглых сплошных и трубчатых стержней из изотропных и трансверсально-изотропных сплавов с одинаковыми и разными свойствами при растяжении и сжатии.

4. Получена оценка влияния трансверсально-изотропных свойств таких, как свойство более слабого сопротивления деформированию в направлении нормали к плите и в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости плиты, на процессы изгиба гладких и оребренных пластин и процессы кручения стержней в условиях ползучести.

5. Получены новые аналитические решения для угловой скорости закручивания стержней, вырезанных в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите; для угловой скорости закручивания стержней, вырезанных в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты, получены нижняя и верхняя оценки на основе принципов

минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, согласующиеся с результатами моделирования в программе ANSYS.

6. Разработан и апробирован программный конечно-элементный комплекс «CreePL», предназначенный для решения прямых и обратных задач расчета остаточной и упреждающей геометрии оснастки гладких панелей одинарной и двойной кривизны из изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие материала при деформировании в медленных режимах ползучести, в том числе при термофиксации, с заданной продолжительностью процесса формообразования и с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок.

7. Установлено, что вид зависимости деформации при разрушении от напряжения (монотонное возрастание/убывание или немонотонное поведение) на диаграммах ползучести «деформация – время» влияет на режим деформирования, обеспечивающий минимальный уровень накопления повреждений; для ряда сплавов проведен анализ кинематических и статических режимов деформирования стержней при растяжении и режимов формообразования полусферических оболочек.

8. Разработана учитывающая накопление повреждений в режимах ползучести подпрограмма на языке Fortran, которая встроена в пакет ANSYS и апробирована при решении задач изгиба кольцевой пластины и формообразования давлением полусферической оболочки из круглой листовой заготовки.

9. На основе кинетических уравнений ползучести и повреждаемости разработан численный метод для расчета напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения конструкций с учетом стадии распространения фронта разрушения, при этом решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала; метод апробирован при решении задач изгиба кольцевых пластин, вращающихся дисков и растягиваемых пластин с круговым отверстием. Проведен анализ

длительности стадии распространения фронта разрушения в зависимости от геометрических размеров конструкции и выбора варианта теории ползучести.

Теоретическая и практическая ценность работы. При описании процессов деформирования материалов вплоть до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией, появляется возможность связать параметры функциональных зависимостей ползучести и повреждаемости с измеряемой в эксперименте величиной деформации при разрушении. Разработанные модели для изотропных и ортотропных материалов, обладающих разными свойствами на растяжение и сжатие в условиях ползучести, позволяют описать более сложное поведение материала и расширяют класс используемых конструкционных сплавов при решении технологических задач обработки материалов давлением. Выводы о влиянии этих свойств материала должны учитываться при выборе и корректировке нагрузки. Полученные аналитические решения и оценки могут применяться при планировании экспериментов на ползучесть. Разработанные программы в пакете ANSYS и на языке Fortran могут использоваться для расчетов параметров процессов формообразования конструкций при решении прямых и обратных задач. Результаты исследований получили практическое применение при изготовлении технологической оснастки на ОАО КнААПО (Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение им. Ю. А. Гагарина, в настоящее время Филиал ПАО «Компания Сухой» «Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина»). При выборе режима формообразования, обеспечивающего минимальный уровень накопления повреждений, необходимо учитывать вид зависимости деформации при разрушении от напряжения на экспериментальных диаграммах ползучести. Предложенный метод расчета длительности до разрушения с учетом стадии распространения фронта разрушения может использоваться для прогнозирования дополнительного срока эксплуатации конструкции.

Положения, выносимые на защиту:

1. Обоснование использования кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией, для описания процессов деформирования вплоть до разрушения упрочняющихся и разупрочняющихся материалов с непостоянной величиной деформации при разрушении на диаграммах ползучести «деформация-время» при постоянном напряжении.

2. Модель изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, использующая для описания стадий упрочнения-разупрочнения и установившейся ползучести степенные функции с разными показателями для растяжения и сжатия; результаты численной и экспериментальной апробации модели на задачах кручения стержней и изгиба пластин.

3. Модель на основе скалярного потенциала тензора напряжений для ортотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, при этом процессы одноосного деформирования на установившейся стадии ползучести описываются функциями с разными степенными показателями для растяжения и сжатия.

4. Результаты теоретического и экспериментального исследования влияния трансверсально-изотропных свойств ползучести на процессы изгиба гладких и оребренных пластин и на процессы кручения стержней.

5. Новые аналитические решения, нижняя и верхняя оценки на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, полученные для скорости изменения угла закручивания стержней, вырезанных из трансверсально-изотропного материала.

6. Программный конечно-элементный комплекс «CreePL», предназначенный для решения прямых и обратных задач формообразования в условиях чистого изгиба гладких изотропных панелей одинарной и двойной кривизны в медленных режимах ползучести с учетом разных

свойств материала при растяжении и сжатии и упругого восстановления после снятия нагрузок.

7. Результаты теоретических и численных исследований по выбору на основе экспериментальных данных рациональных статических и кинематических режимов деформирования, обеспечивающих минимальный уровень накопления повреждений при растяжении стержней и формообразовании полусферических оболочек давлением.

8. Алгоритмы численной реализации метода расчета напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения конструкций с учетом стадии распространения фронта разрушения, и их апробация при решении задач изгиба кольцевых пластин, вращающихся дисков и растягиваемых пластин с круговым отверстием; результаты сравнительного анализа длительной прочности в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести: в формулировке Ю.Н. Работнова или в формулировке Л.М. Качанова.

9. Реализация модели кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией, в виде подпрограммы на языке Fortran встроенной в пакет ANSYS и ее апробация при решении задач формообразования полусферической оболочки и изгиба кольцевой пластины.

Апробация. Материалы диссертационного исследования опубликованы в 62 научных работах, включенных в общий список литературы: 23 статьи в журналах, входящих в список ВАК, базы данных WEB of Science (Core collection и RSCI) и Scopus [6 - 19; 60; 93; 95; 224 -228; 256]; 39 публикаций в материалах и трудах конференций [21– 39; 41; 43– 47; 94; 96; 99; 102; 130; 131; 152; 163; 164; 179; 220 - 223]. Получено два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ [приложения А, Б]. Опубликовано два учебных пособия, в которых изложено применение метода конечных элементов для расчета конструкций на прочность в среде программного комплекса ANSYS [40, 42].

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами НИР Института гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН («Теоретическое, экспериментальное и численное моделирование деформирования, разрушения и живучести однородных и структурированных материалов и элементов конструкций» – № гос. регистрации 01201054086; ФНИ СО РАН III.23.3.2. – «Научное обоснование и развитие ресурсосберегающих технологий для формообразования деталей из материалов с усложненной реологией при медленных режимах деформирования»); по грантам Ведущих научных школ НШ-3066.2008.1, НШ-246.2012.1; по проектам, поддержанными РФФИ (05-08-33470-а, 07-01-12043-офи, 08-01-00168-а, 11-01-00522-а, 11-08-00845-а, 15-01-07631, 16-08-00713), INTAS 03-51-6046; в рамках договора № 20/03 между КнаАГТУ (Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет) и ИГиЛ СО РАН «Математическое моделирование процесса формообразования гладких монолитных панелей одинарной и двойной кривизны в медленных режимах деформирования, разработка проектов документации на изготовление механической и гидравлической частей образца опытного оборудования для формообразования» (15 дек. 2003 г. – 30 апр. 2005 г.). Результаты проведенных исследований получили применение на ОАО КнаАПО (Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение им. Ю. А. Гагарина, в настоящее время Филиал ПАО «Компания Сухой» «Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина») [приложение В].

Результаты диссертационных исследований докладывались на российских и международных конференциях:

Международные конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Усть-Каменогорск, Казахстан, 11-14 сентября 2003 г.; Алматы, Казахстан, 6 – 10 октября 2004 г.; Алматы, Казахстан, 10 - 14 сентября 2008 г.); Всероссийская школа-семинар по

современным проблемам механики деформируемого твердого тела (Новосибирск, 13-17 октября 2003 г.); I, II и III Всероссийские конференции «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 13-19 октября 2006 г.; 10-14 октября 2011 г.; 26-30 мая 2014 г.); 19-я, 20-я и 21-я Всероссийские конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Бийск, 29 - 31 августа 2005 г.; Кемерово, 2 - 6 июля 2007 г.; Кемерово, 29 июня - 2 июля 2009 г.); Всероссийская конференция «Актуальные проблемы механики сплошных сред» (Пермь, 1-2 ноября 2005 г.); XII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Москва, МАИ, 20-22 февраля 2006 г.); 8-я, 10-я, 13-я, 15-я Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 1-3 декабря 2006 г.; 25-27 ноября 2010; 25-27 ноября 2016 г.; 14-16 февраля 2020 г.); Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 20-25 августа 2007 г.); Всероссийская конференция «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 17–22 сентября 2007 г.); II Всероссийская конференция «Безопасность и живучесть технических систем» (Красноярск, 8–12 октября 2007 г.); VI Всероссийская конференция «Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем» (Красноярск, 18-21 сентября 2018 г.); V Всероссийская конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (Екатеринбург, 24 – 28 марта 2008 г.); Российская научно-техническая конференция «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 26-28 мая 2009 г.); 5-я, 7-я, 8-я Всероссийская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 29–30 мая 2008 г.; 3–6 июня 2010 г.; 15–17 сентября 2011 г.); X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 18-22 сентября 2017 г.); 7-я Международная конференция «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности

конструкций и методы их решения» (Санкт-Петербург, 17-20 июня 2008 г.); Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 23-28 апреля 2009 г.); Международная конференция «Математические и информационные технологии» (Копаоник, Сербия, 27 - 31 августа 2009 г.; Будва, Черногория, 31 августа - 5 сентября 2009 г.); II Международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, Ереван, Армения, 4-8 октября 2010 г.); IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.); X и XI, XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 24-30 августа 2011 г.; Казань, 20-24 августа 2015 г.; г. Уфа 19-24 августа 2019 г.); 3-я, 4-я Всероссийская конференция «Проблемы оптимального проектирования сооружений» Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Новосибирск, НГАСУ, 15-17 апреля 2014 г.; 11-13 апреля 2017 г.); Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Бишкек, 14-15 сентября 2012 г.); V-ая Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» (Москва, 26-29 ноября 2013 г.); Конференция «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н. Работнова» (Москва, ИМАШ РАН, 24-26 февраля 2014 г.); XVI, XVII Всероссийская научно-техническая конференция «Наука. Промышленность. Оборона» (Новосибирск, 22-24 апреля 2015 г.; 20-22 апреля 2016 г.); Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и волновые приложения» (Новосибирск, 29 февраля – 2 марта 2016 г.); Всероссийская конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Ялта, 19 – 25 сентября 2016 г.); Всероссийская конференция «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 4-8 сентября 2017 г.); XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС, Москва, 20-23 ноября 2018 г.); Всероссийская конференция и

школа для молодых ученых «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, 13-17 мая 2019 г.); на семинарах Отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством проф. О.В. Соснина; академика РАН Б.Д. Аннина; д.ф.-м.н. С.Н. Коробейникова; на заседаниях по проекту INTAS (грант № 03-51-6046) в университете г. Портсмута (Великобритания, 25 -30 апреля 2005 г.), в университете г. Зигена (Германия, 1-8 марта 2006 г.), в ИГиЛ СО РАН (Новосибирск, 2-8 сентября 2006 г.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, пяти приложений. Объем диссертации составляет 338 страниц, включая 89 рисунков, 24 таблицы. Список литературы содержит 286 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, описана степень ее разработанности, сформулированы цель и задачи исследований, приведены теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована степень достоверности и приведена апробация результатов.

Первая глава носит обзорно-постановочный характер. В начале главы обсуждаются преимущества способов обработки конструкционных металлов давлением в медленных режимах деформирования за счет деформаций ползучести и режимах близких к сверхпластичности, приводится обзор оборудования и изобретений.

Описание различных традиционных методов обработки конструкционных сплавов в условиях пластичности приводится в работах авторов (А.А. Кривенок, М.Б. Жужков, Масуд Гермези). Применение нетрадиционных режимов формообразования в режимах ползучести и сверхпластичности теоретически и экспериментально обосновывается многими отечественными и зарубежными исследователями (Б.В. Горев, О.В. Соснин, Н.Н. Малинин, А.М. Локощенко, К.И. Романов, А.А. Поздеев, С.С. Яковлев, Р.А. Васин, Ф.У. Еникеев, А.А. Шитиков, К.А. Padmanabhan,

С.Н. Hamilton , N.E. Paton). Преимуществом таких режимов с напряжениями, не превосходящими предела упругости, является снижение уровня нагрузок благодаря повышению температуры, уменьшение повреждаемости материала, что позволяет сохранить эксплуатационный ресурс на стадии изготовления. Для обеспечения таких способов обработки материалов давлением требуется специальное оборудование (Б.В. Горев, Г.А. Раевская, О.В. Соснин, Л.Л. Рублевский, И.Д. Клопотов, И.В. Любашевская, О.Г. Сенаторова, Е.А. Ткаченко, А.И. Пекарш, Р.Ф. Крупский, А.И. Олейников).

Нахождение рациональных температурно-скоростных режимов формообразования конструкций в условиях сложного напряженного состояния включает моделирование, учитывающее деформационно-прочностные особенности материала. В первой главе численно и экспериментально на примере ряда конструкционных сплавов обосновывается применения кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией или нормированной работой рассеяния, для моделирования формообразования в условиях ползучести и оценки эксплуатационного ресурса. На примерах растяжения стержня и кручения круглого вала с постоянной скоростью деформирования иллюстрируется, что с увеличением этой скорости накопление необратимой деформации может как увеличиваться, так и падать. Как следствие возникают задачи по поиску режимов формования заготовок, обеспечивающих минимальный уровень накопления повреждений с целью максимального сбережения ресурса на стадии изготовления.

На основе анализа экспериментальных данных (Б.В. Горев, И.Ж. Масанов, О.В. Соснин, В.В. Рубанов, А.Ф. Никитенко, Y. Li , Zh. Shi , J. Lin, N. Tsuno, S. Shimabayashi, H. Watanabe, M. Fukusumi и другие) показывается необходимость разработки математических моделей для учета свойств анизотропии и разнсопротивляемости материала при растяжении и сжатии при решении задач формообразования в условиях

высокотемпературной ползучести. Не всегда экспериментальные данные удается описать по моделям, опубликованным в литературных источниках.

При кручении круглого сплошного вала с постоянной скоростью угла закручивания показывается, что после начала разрушения, когда параметр поврежденности достигает критического значения на поверхности вала, конструкция может деформироваться еще продолжительное время сопоставимое со временем до начала разрушения. Оценка времени от начала до полного разрушения представляет актуальную проблему при эксплуатации элементов конструкций.

Во второй главе модель изотропного с разными свойствами материала на растяжение и сжатие, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, предложенная в работе И.Ю. Цвелодуба, обобщается на случай упрочняющегося материала. Для описания экспериментальных данных одноосного деформирования используются степенные функции, все показатели которых для стадий установившейся, упрочнения и разупрочнения при растяжении и сжатии различны. Модель апробируется при решении задач кручения круглых стержней и кручения квадратных пластин.

Кручение стержней из титанового сплава моделируется в предположении установившейся ползучести материала, разрабатывается подход для оценки напряженно-деформированного состояния по методу характеристических параметров, сравниваются решения, полученные с использованием двух моделей и с данными экспериментов. Показывается, что за счет свойства разносопротивляемости материала при растяжении и сжатии происходит удлинение образца вдоль оси и сжатие вдоль радиуса.

С использованием развитой модели, учитывающей разные свойства при растяжении и сжатии, решаются задачи чистого кручения пластин из разупрочняющегося алюминиевого сплава при температуре 200 °С и упрочняющегося алюминиевого сплава при температуре 195 °С. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

В третьей главе на основе скалярного потенциала в предположении установившейся ползучести строится модель ортотропного материала,

свойства которого при растяжении и сжатии различны, при этом интенсивность процессов при одноосном деформировании описывается функциями с разными степенными показателями для растяжения и сжатия. Для учета разных свойств на растяжение и сжатие используется угол вида напряженного состояния. Модель апробируется для случаев изотропного и трансверсально-изотропного материалов с одинаковыми и разными свойствами на растяжение и сжатие. Модель используется при решении ряда задач в условиях сложного напряженного состояния: изгиб гладких и оребренных пластин, кручение круглых сплошных и трубчатых стержней, проводится сравнение с экспериментальными данными.

На основе предложенной модели исследуется влияние трансверсально-изотропных свойств материала (более слабого сопротивления деформированию в направлении нормали к плите и в поперечно-сдвиговом направлении по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости плиты) на величину прогиба пластины. Рассматривается изгиб в седловидную, цилиндрическую и двойной положительной кривизны поверхность гладких и оребренных пластин. Результаты вычислений для гладких скручиваемых пластин, полученные с применением разных методов расчета, сравниваются с данными экспериментов.

С использованием предложенной модели в кинематической постановке решаются задачи изгиба пластин из изотропного сплава с учетом разных свойств при растяжении и сжатии. Разрабатывается программный комплекс «CreePL» на основе метода конечных элементов, предназначенный для решения прямых и обратных задач формообразования гладких панелей одинарной и двойной кривизны при медленных режимах деформирования, в том числе при термофиксации. Комплекс позволяет решать задачи расчета остаточной формы пластины (прямые задачи) и определения упреждающей геометрии оснастки (обратные задачи) при заданной продолжительности процесса формообразования с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок в предположении чистого изгиба.

На основе построенной модели решаются задачи кручения круглых сплошных и кольцевых стержней, вырезанных в продольном направлении плиты и в направлении нормали к плите из трансверсально-изотропного сплава с одинаковыми и разными свойствами при растяжении и сжатии. С помощью полученных аналитических решений и оценок на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, а также численного моделирования в программе ANSYS выполняется анализ влияния трансверсально-изотропных свойств на напряженно-деформированное состояние и угол закручивания. Показывается возникновение депланации сечения при кручении стержня с круглым поперечным сечением из ортотропного материала при ползучести. Для кручения цилиндрических кольцевых стержней приводится сравнение результатов расчетов и экспериментов.

В четвертой главе на основе кинетических уравнений ползучести и повреждаемости выполняется анализ накопления повреждений при разных кинематических и статических режимах растяжения стержней и формообразования полусферических оболочек. В работах И.Ю. Цвелодуба и К.С. Бормотина в рамках энергетического подхода в варианте О.В. Соснина (работа рассеяния при разрушении постоянна) теоретически обосновывается минимальное накопление повреждений в кинематических режимах деформирования, при которых скорость деформации ползучести постоянна. Однако конструкционные сплавы удовлетворяют энергетическому варианту теории ползучести в достаточно узком температурно-скоростном диапазоне.

При растяжении стержней для разных сплавов исследуются два режима: статический – под действием постоянных напряжений, и кинематический – при постоянных скоростях деформаций, соответствующих скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений. Аналитически и численно показывается, что для сплавов, у которых на исходных диаграммах ползучести «деформация - время» деформация при разрушении монотонно убывает с увеличением напряжения, наименьшее накопление повреждений происходит в кинематических режимах при

постоянных скоростях деформаций. Для сплавов, у которых предельная деформация монотонно возрастает, меньшее накопление напряжений дает статический режим. Исследуется также сплав с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения.

Рассматривается обратная задача формообразования в условиях упругопластичности и ползучести за заданное время круглой листовой заготовки в часть полусферической оболочки с заданным прогибом в центральной точке купола. Исследуется широкий класс статических и кинематических режимов для нескольких сплавов. Разрабатывается подпрограмма на языке Fortran для учета повреждаемости при расчетах в комплексе ANSYS. Показывается возможность оценки нагрузки по методике, основанной на решении уравнения равновесия безмоментной оболочки.

В пятой главе исследуется напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения кольцевых осесимметрично нагруженных пластин и вращающихся дисков гиперболической формы. Временем начала разрушения, соответствующего продолжительности первой стадии, считается момент, когда в какой-либо точке конструкции параметр поврежденности достигает критического значения.

Для пластин расчет напряженно-деформированного состояния и длительности первой стадии разрушения осуществляется двумя способами, затем проводится сравнение результатов. В первом случае задача неустановившейся ползучести с использованием критерия Треска–Сен-Венана сводится к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала пластины. В основе другого способа расчета лежит метод конечных элементов комплекса ANSYS, при этом в определяющие уравнениях входит критерий Мизеса, а для моделирования накопления повреждений используется пользовательская процедура на языке Fortran.

Для вращающегося и растягиваемого диска гиперболической формы проводится исследование напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения с учетом двухстадийности. Вторая стадия – это распространение фронта разрушения и полное разрушение тела.

Сравниваются два варианта кинетической теории ползучести – в формулировке Ю.Н. Работнова и в формулировке Л.М. Качанова. Исследуется продолжительность стадий в зависимости от геометрических размеров конструкции и нагрузки, выполняется анализ движения фронта разрушения.

Метод расчета длительности до разрушения с учетом двухстадийности апробируется на примере растягиваемых пластин с круговым отверстием: сначала по исходным кривым ползучести одноосного растяжения находятся параметры кинетических уравнений ползучести и повреждаемости, а затем с использованием полученных параметров выполняется расчет напряженно-деформированного состояния растягиваемых пластин. В качестве критерия длительной прочности применяется смешанный критерий типа Хейхерста.

Заключение содержит краткий обзор основных результатов, полученных в диссертационной работе, и рекомендации по их практическому применению.

Личный вклад автора. Основная часть экспериментальных данных, приведенных в диссертационной работе, либо получена соавторами (сотрудниками лаборатории статической прочности, в которой работает автор), либо взята из литературных источников, на которые имеются соответствующие ссылки. Автору принадлежит частично обработка некоторых этих экспериментальных данных. Автор принимал непосредственное участие по проведению и планированию экспериментов по кручению ортотропных пластин, описанных в третьей главе. Автору принадлежит разработка новых моделей, получение новых аналитических решений и оценок, разработка новых методов расчета, постановка задач и вывод разрешающих уравнений во второй, третьей и четвертой главах. В пятой главе автору принадлежит частичный вывод разрешающих уравнений. Во всех главах — разработка численных алгоритмов и программ. Сравнительный анализ численных и экспериментальных данных в основном выполнялись лично автором и частично студентами и магистрантами под руководством автора.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ И РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

1.1 Современные тенденции в машиностроении

В производстве современных изделий машиностроительного профиля широко используются высокопрочные, но при этом, малопластичные и труднодеформируемые сплавы. Традиционные квазистатические режимы со скоростями порядка нескольких процентов в секунду при обработке таких сплавов могут приводить к повреждению уже на стадии изготовления. Альтернативными способами обработки материалов давлением являются медленные температурно-скоростные режимы деформирования за счет необратимых деформаций ползучести, включая режимы сверхпластичности и близкие к ним, со скоростями деформаций порядка $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и меньше [75; 79; 80; 92; 116; 145; 166; 178; 180; 193; 210; 268; 273]. Преимущества таких медленных режимов с напряжениями, не превосходящими предела упругости, следующие:

- Снижается уровень нагрузок благодаря повышению температуры и увеличению длительности силового воздействия.
- Уменьшается поврежденность материала, что позволяет сохранить эксплуатационный ресурс на стадии изготовления.
- Снижается уровень остаточных напряжений после снятия нагрузок, поскольку внутренние напряжения успевают прорелаксировать до достаточно малых величин.
- Процесс нагружения с такими скоростями не выходит за пределы упругой области, т.е. пластические деформации отсутствуют, деформирование при изменении нагрузки не делится на активную и пассивные части, что позволяет упростить построение соответствующих определяющих уравнений.

Временные затраты на стадии изготовления компенсируются качеством и ресурсом детали. По некоторым прочностным параметрам выигрыш достигает десятикратных величин по сравнению с традиционными методами обработки материалов давлением (гибкой впередвижку на прессах, выколоткой по шаблону, дробеструйной обработкой, многопереходной штамповкой). Обзоры по традиционным методам обработки деталей летательных аппаратов можно найти в работах [66; 114; 126], в [122] обсуждаются вопросы предельных деформаций и разрушения при горячей листовой штамповке металлов.

Отсутствие пластических деформаций при формообразовании, как правило, приводит к меньшей поврежденности материала и увеличению показателя деформируемости. На рисунке 1.1 изображен изгиб пластины из алюминиевой танковой брони марки АБТ-102 толщиной 24 мм при комнатной температуре (на переднем плане) и при температуре закалки 470 °С (на втором плане). Исследования, проводимые на сплаве АБТ-102 при медленных температурных режимах нагружения, позволили получить изделия, удовлетворяющие всем требованиям ГОСТа (эксперименты проведены Леган М.А., Рубанов В.В., Никитенко А.Ф. в 1984г в ИГиЛ СО РАН) [224].



Рисунок 1.1 – Изгиб пластины из алюминиевой танковой брони марки АБТ-102 толщиной 24 мм при комнатной температуре (на переднем плане) и при температуре закалки 470°С (на втором плане)

Нетрадиционные методы обработки материалов давлением в медленных режимах деформирования за счет деформаций ползучести, включая режимы, близкие к сверхпластичности, требуют специального

оборудования, позволяющего управлять процессом формообразования [76; 77; 193].

В настоящее время существует ряд способов формообразования крупногабаритных пластин при ползучести в условиях холодной и горячей обработки (патенты РФ № 2336966, 2216421, 2056197, 1147471, 2076010, 2076011, 2251464, 2396367, 2475322 [157; 158; 159; 160; 161], патент США 5.345.799 и другие).

Универсальное многопуансонное оборудование нового поколения, а именно технический образец модуля с электрическим приводом штоков, разработанный сотрудниками Новосибирского научно-исследовательского института авиационной технологии и организации производства и Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН работает с 2006 г. на Новосибирском авиационном заводе им. В.П. Чкалова (филиал ПАО «Компания Сухой»). Эта установка формообразования панелей УФП-1М с изменяемой геометрией поверхности оснастки в процессе деформирования эффективно используется для изготовления и правки несущих элементов конструкций, для формообразования в режимах ползучести при температурах старения и температурах, близких к сверхпластичности. Применение этого оборудования позволяет получать изделия сложного аэро- и гидродинамического контура одинарной и двойной кривизны, включая отрицательной кривизны, за один технологический цикл без пластических изломов и без геометрической потери устойчивости. В процессе формообразования заготовка двухстороннее зажимается соосно установленными штоками с индивидуальным заданием перемещения каждого во все время процесса деформирования по программе, процесс формообразования совмещается с термообработкой материала [55; 87; 88; 157; 192]. Модульность установки позволяет набирать размер для больших длин деталей. В настоящее время производится гибка плит из титанового сплава АБВТ-20 толщиной порядка 10 мм при температуре 850°C с габаритами 800 мм на 2000 мм. Аналоги установок штокового типа имеют

фиксированные формы матриц и пуансона, постоянные равные скорости перемещения штоков, что не позволяет формообразовывать детали двойной кривизны за один цикл.

Другое изобретение [160] относится к обработке металлов давлением и может быть использовано в самолетостроении при изготовлении крупногабаритных листовых и объемных деталей. Заготовку формообразуют за два этапа: на первом приближенно на 80-100% к окончательному контуру, в холодном состоянии с созданием напряжений сжатия в поверхностном слое на выпуклой стороне заготовки; на втором этапе заготовке придают окончательную форму с созданием напряжений растяжения для уравнивания и релаксации напряжений сжатия. Эффекты – более высокое качество и снижение затрат труда.

В [161] описан еще один способ получения изделий из высокопрочных, особенно сверхпрочных алюминиевых сплавов системы Al-Zn-Mg-Cu-Zr, применяемых в качестве обшивок крыла и других силовых элементов планера самолетов, а также наземных транспортных средств. Технология формообразование крупногабаритных панелей за счет необратимых деформаций ползучести при температуре старения отрабатывается в Филиале ПАО «Компания Сухой» «Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина». Способ включает горячую прокатку слитка с получением заготовки, закалку, правку растяжением, предварительное старение и деформационное старение, совмещенное с формообразованием в режиме ползучести. Предварительное старение заготовки проводят в две ступени. На первой ступени нагрев проводят при температуре 95–115°C с выдержкой 3–10 ч, на второй ступени осуществляют нагрев при температуре 120-140°C с выдержкой 2–5 ч. Деформационное старение, совмещенное с формообразованием в режиме ползучести, проводят при температуре 145–165°C с выдержкой 5–10 ч и скорости деформирования не более 0,5 % ч⁻¹. Обеспечиваются стабильно высокие прочностные свойства алюминиевых сплавов при достаточном уровне коррозионной стойкости,

трещиностойкости и сопротивления усталости, что увеличивает весовую эффективность и ресурс изделия [2; 54; 126].

Поиск оптимальных температурно-скоростных режимов формования заготовки с изменяющимися параметрами процесса формообразования для максимального сбережения ресурса материала конструкции требует комплексного подхода включающего:

- Экспериментальные исследования свойств материала [74; 81; 86; 97; 111].
- Математическое моделирование и анализ моделей, учитывающих такие свойства материала, как анизотропию, разнсопротивляемость при растяжении и сжатии, упрочнение, упругое восстановление после снятия нагрузок и обратную ползучесть, контактное взаимодействие и другие явления [4; 6; 52; 53; 57; 113; 117; 147; 174; 212; 233; 234; 247; 249; 260; 263; 266].
- Физическое моделирование условий формования и прогнозирование длительности эксплуатации элементов конструкций [133; 255; 270] .

1.2 Классификация и особенности режимов деформирования

Традиционно выделяют два основных класса процессов деформирования материалов: динамические при скоростях деформирования порядка сотен процентов в секунду и выше $d\varepsilon/dt > 1\text{с}^{-1}$ и квазистатические со скоростями деформирования порядка процентов в секунду и меньше $d\varepsilon/dt < 10^{-2}\text{с}^{-1}$. Считаем, что полная деформация состоит из следующих составляющих [170]

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^c ,$$

где ε^e – обратимые упругие деформации, ε^p и ε^c – необратимые деформации пластичности и ползучести. Процесс предполагается изотермический, поэтому обратимые температурные деформации ε^T не учитываются. В зависимости от вклада деформации ползучести в

необратимую деформацию рассматривается три типа медленных режимов деформирования [87]:

- *режим пластичности*, когда вся необратимая деформация образуется только за счет деформаций пластичности;
 - *режим вязкопластичности*, когда вклад деформаций ползучести и пластичности в суммарную величину необратимой деформации сопоставим;
 - *режим ползучести*, при котором деформации пластичности отсутствуют, и накопление необратимых деформаций происходит только за счет ползучести.
- Под пластической деформацией подразумевается «мгновенная» пластическая деформация, зависящая только от параметра нагружения и его приращения и не зависящая от времени необратимая деформация.

Как правило, для металлических сплавов при медленных скоростях деформирования при комнатной температуре реализуется режим пластичности, при этом деформации ползучести отсутствуют. При повышенной температуре режим пластичности наблюдается при высоких скоростях, порядка $\dot{\epsilon} \approx 10^{-1} - 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, когда деформации ползучести не успевают проявиться. При снижении скорости в составляющей необратимых деформаций появляются деформации ползучести. Наличие деформаций ползучести и деформации пластичности характерно для режима вязкопластичности.

Отсутствие пластических деформаций при формообразовании, как правило, приводит к меньшей поврежденности материала и увеличению показателя деформируемости (относительной степени деформации). Режимы сверхпластичности характеризуются возрастанием деформационной способности исходного материала в состоянии поставки в некотором достаточно узком температурно-скоростном диапазоне нагружения (для большинства материалов $T \geq 0,5T_{\text{пл}}$ и $\dot{\epsilon} < 10^{-3} \text{ с}^{-1}$). При температурах сверхпластичности материал подчиняется «установившемуся» течению практически без упрочнения–разупрочнения вплоть до разрушения. Даже без подготовки ультрамелкозернистой структуры в условиях, близких к

сверхпластичности предельная деформация на момент разрушения ε_* выше, чем деформация ε_* при «мгновенном» упругопластическом деформировании.

В качестве примера иллюстрирующего описанные выше различные режимы деформирования рассмотрим диаграммы сплава BT20 (Ti-Al-Zr-V-Mo) на растяжение (пруток диаметром 44 мм в исходном состоянии) при температуре сверхпластичности 800 °С [93]. Сплав BT20 деформируется при температуре 800 °С под действием постоянных напряжений $\sigma = \text{const}$ практически без каких-либо параметров упрочнения–разупрочнения вплоть до разрушения (см. рисунок 1.2, а). Диаграмма 1 на рисунке 1.2, б соответствует «мгновенному» упругопластическому деформированию при средней скорости деформации $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, величина деформации при разрушении составляет $\varepsilon_* \approx 0,3$, при этом можно считать, что деформации ползучести отсутствуют ($\varepsilon^c = 0$). Остальные диаграммы (2–7) содержат в величине необратимой деформации составляющую деформации ползучести ε^c , зависящую от времени. Горизонтальная штриховая линия на рисунке 1.2, б соответствует пределу упругости материала $\sigma_e = 110 \text{ МПа}$ и отделяет «вязкую» область, в которой необратимое деформирование осуществляется только за счет деформаций ползучести ($\varepsilon^H = \varepsilon^c$), от «вязкопластической». Диаграммы 2 и 3, расположенные ниже упругопластической диаграммы и выше штриховой линии, относятся к деформированию в режиме вязкопластичности. Расположенные ниже штриховой линии диаграммы 4–6 быстро выходят на горизонтальную асимптоту, пластические деформации отсутствуют. Деформации при разрушении составляют величины порядка $\varepsilon_* \approx 1,0 - 1,3$.

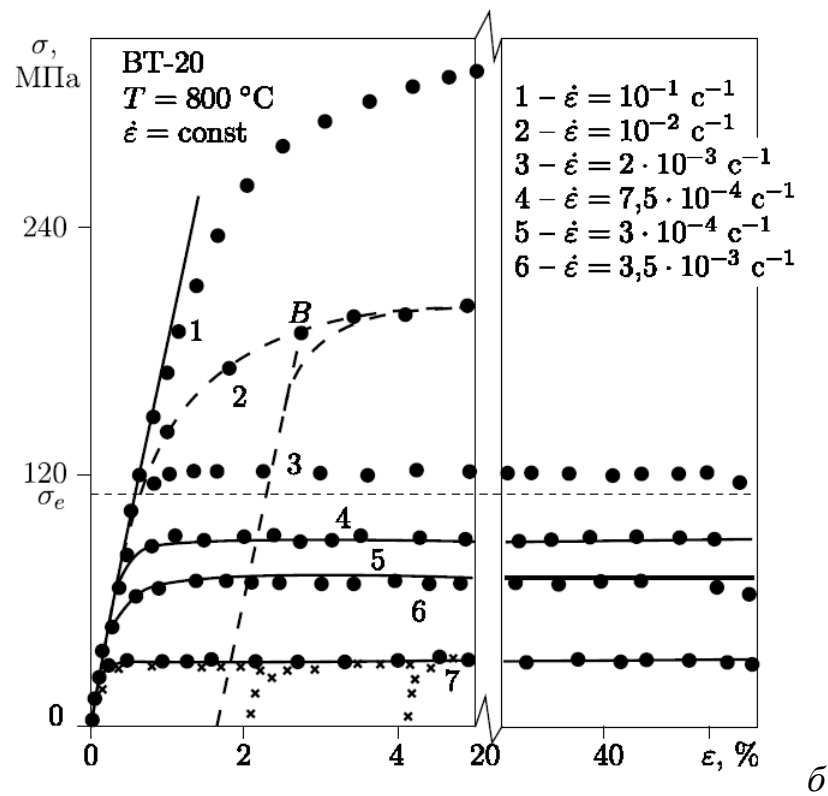
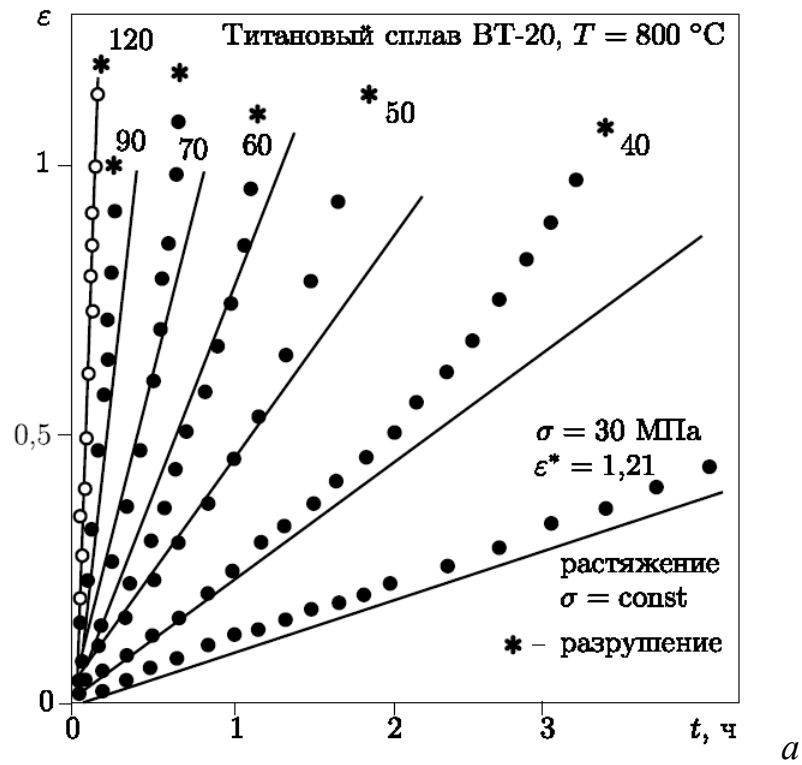


Рисунок 1.2 – Диаграммы ползучести на растяжение при постоянных напряжениях и аппроксимация по степенной зависимости – сплошные линии (а); диаграммы деформирования титанового сплава в режимах вязкопластичности и близких к сверхпластичности с различными скоростями деформаций на растяжение (б)

При деформациях порядка $\varepsilon \approx 0,6 - 0,7$ на диаграммах рисунка 1.2, б наблюдается падение напряжений с ростом деформаций (ниспадающий участок), которые соответствуют переходу в третью разупрочняющуюся стадию ползучести процесса деформирования при постоянных напряжениях (рисунок 1.2, а). Сплошными линиями на рисунках 1.2, а и 1.2, б приведены результаты расчетов по степенной зависимости $\dot{\varepsilon}^c = B\sigma^n$ без учета разупрочнения с параметрами: $B = 1,03 \times 10^{-13} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$, $n = 3$, модуль Юнга $E = 20 \text{ ГПа}$.

Три цикла «нагрузка – разгрузка», показанные на диаграмме 7 крестиками, повторяют друг друга и подтверждают тем самым запись определяющего уравнения в виде $\dot{\varepsilon}^c = \varphi_c(\sigma, T)$ без каких-либо параметров упрочнения–разупрочнения. В данном случае для описания процесса деформирования с постоянной скоростью деформации нет необходимости следить, какой идет процесс нагрузки или разгрузки (уменьшение напряжений). В вязкопластической области (см. точку В на диаграмме 2 рисунка 1.2, б) приходится отслеживать активный идет процесс или пассивный и использовать соответствующие соотношения [49; 58].

При уменьшении скорости деформации диаграммы « $\sigma - \varepsilon$ » выходят на горизонтальные асимптоты аналогично диаграммам деформирования идеально-пластического материала, непосредственно перед разрушением наблюдается участок ниспадающей ветви на кривой деформирования.

Предположим, что в процессе деформирования скорость полной деформации постоянна $\dot{\varepsilon} = V_C = \text{const}$. Из выражения $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c$, где $\varepsilon^e = \sigma/E$ — упругая составляющая, E — модуль Юнга материала, следует $V_C = d\sigma/(E dt) + d\varepsilon^c/dt$. Подставляя $d\sigma/dt = V_C d\sigma/d\varepsilon$, получим $d\sigma/d\varepsilon = E(1 - \varphi_c(\sigma, T)/V_C)$. С увеличением напряжения при деформировании со скоростью $V_C = \text{const}$ возрастает скорость деформации ползучести $\eta = d\varepsilon^c/dt$, при некотором значении напряжения производная $d\sigma/d\varepsilon$

обратится в нуль, т. е. при активном нагружении скорость деформаций ползучести $\dot{\eta} = \dot{\varphi}_c(\sigma, T)$ сравнивается со скоростью полной деформации $\dot{\eta} = \dot{\varepsilon} = V_C$ и диаграмма « $\sigma - \varepsilon$ » выходит на горизонтальный уровень. Чем меньше заданная скорость деформирования $\dot{\varepsilon} = V_C = \text{const}$, тем при меньшем значении напряжения диаграмма выйдет на горизонтальный уровень. Сплошными линиями на рисунке 1.2, б показан расчет по степенной зависимости с использованием параметров «установившейся» ползучести.

Отсюда следует, что для таких материалов, у которых практически линейный процесс ползучести во времени, напряженно-деформированное состояние в элементах конструкций будет зависеть от скорости деформирования (нагружения). Другой вывод: чтобы получать от материала максимум деформативности при формообразовании и сохранить эксплуатационный ресурс на стадии изготовления, в процессе следует следить за тем, чтобы отсутствовала пластическая деформация ($\varepsilon^p = 0$), т.е. необходимо деформировать в режиме ползучести, не выходя по напряжениям из упругой области ($\sigma < \sigma_e$).

Аналогичные результаты получены и для другого вида испытаний — на чистое кручение круглых образцов. Известно, что сдвиговые параметры материала являются базовыми. Так как в экспериментах с однородным напряженно-деформированным состоянием на тонкостенных образцах степени деформаций достигаются не более 7–8 % вследствие геометрической потери устойчивости образцов, то для достижения конечных деформаций на кручение испытывались сплошные круглые образцы без кольцевой проточки (исключая концентрацию напряжений) [82]. В [93] для сплава АМГ-6М (Al-Mg) при температуре сверхпластичности 450 °С (пруток диаметром 45 мм в состоянии поставки) приведены результаты экспериментов на растяжение и чистое кручение сплошных образцов с той же величиной интенсивности напряжений в характеристической точке [71]. Следует отметить, что материал является изотропным практически без каких-либо эффектов

упрочнения—разупрочнения вплоть до разрушения. В [93] также представлены экспериментальные данные и результаты расчетов крутящего момента в зависимости от угла закручивания при кручении сплошного образца с постоянной погонной скоростью изменения угла закручивания θ . Скорость задавалась такой, чтобы напряжения в образце не превосходили предела упругости материала. Для этого сплава незначительный ниспадающий участок также наблюдается перед самым разрушением.

Аналогичный результат имеет место и для материалов с наличием первой стадии ползучести и какого-либо изотропного параметра упрочнения, например, описываемых зависимостью $\dot{\varepsilon}^c = \varphi_c(\sigma, T)/(\varepsilon^c)^\alpha$. При снятии « $\sigma - \varepsilon$ » диаграммы с заданной скоростью $\dot{\varepsilon} = V_c = \text{const}$ кривая деформирования выходит на горизонтальный участок при некотором напряжении близком к σ_0 , соответствующем скорости деформации ползучести $\dot{\varepsilon}_0^c$ на установившемся участке в эксперименте на ползучесть при $\sigma_0 = \text{const}$ со скоростью общей деформации, равной $\dot{\varepsilon} = V_c = \dot{\varepsilon}_0^c = \varphi_c(\sigma_0, T)$ [94].

При наличии третьей стадии ползучести, имеем, что переход материала в разупрочняющуюся стадию соответствует ниспадающей ветви диаграммы, следующей сразу после асимптотического участка. Напряжения на кривой « $\sigma - \varepsilon$ », включая ниспадающий участок, не превосходят напряжения, соответствующего асимптоте (в рамках гипотезы, что упругие свойства материала не зависят от деформации ползучести) [87].

Для режимов пластичности и вязкопластичности важным является вопрос о том, какой идет процесс – активного нагружения или разгрузки. Пластическая составляющая необратимой деформации не зависит от реального времени, а только от параметра нагружения, при нагружении возрастает, при разгрузке "замораживается" и насчитывается по законам, отличным от законов ползучести. Класс режимов ползучести, когда пластических деформаций нет, описывается уравнениями, не разделяющими процесс нагружения на активный и пассивный, а рассматривают его как единый [87].

1.3 Кинетические уравнения ползучести и повреждаемости для описания процессов ползучести и разрушения элементов конструкций

Обзоры различных подходов (Л.М. Качанов, Ю.Н. Работнов, А.А. Ильюшин, С.А. Шестериков, А.М. Локощенко, М.А. Юмашева, О.В. Соснин, Б.В. Горев, А.Ф. Никитенко, В.П. Радченко, В.И. Астафьев, Б.Е. Победря, А.М. Othman, D.R. Hayhurst, J.L. Chaboche, Y. Liu, S. Murakami, B.F. Dyson, Z.L. Kowalewski, K. Naumenko, H. Altenbach, M. Chrzanowski, J. Betten, A. Zolochovsky, J.J. Skrzypek, A.W. Ganczarski и других) к описанию ползучести с учетом накопления повреждений можно найти в работах [61; 142; 269; 272]. Выделяют эмпирически и физически обоснованные модели накопления повреждений.

Для эмпирических моделей не предпринимается никаких попыток определить физическую природу параметра поврежденности и провести различие между различными механизмами повреждений. Основоположниками данного подхода являются Л.М. Качанов [119; 120] и Ю.Н. Работнов [168; 170], которые ввели для описания накоплений повреждений в материале при ползучести зависящий от времени структурный параметр в интервале от 0 до 1. Л.М. Качанов определяет понятие сплошности [118] «Состояние трещиноватости (или «поврежденности») материала будем характеризовать скалярной величиной $0 \leq \psi \leq 1$; условимся называть ее сплошностью». Ю.Н. Работнов [170, с.364] вводит «некоторое число q , совершенно условно» которое выбирает в интервале (0,1), при этом $q=0$ соответствует условно неповрежденному материалу, а $q=1$ соответствует образованию макроскопических трещин. Этот параметр Ю.Н. Работнов применяет для описания третьей разупрочняющейся стадии ползучести вплоть до разрушения. Позже он вводит несколько таких параметров состояния или повреждения, воздерживаясь от более детальной их интерпретации, отмечая, что при желании этим параметрам можно приписать физический смысл [167, с. 619].

В физически обоснованных моделях предполагается учет влияния механизмов повреждения на процесс разрушения при ползучести, а в качестве меры поврежденности может выступать доля суммарного объема пор и трещин в единице объема, плотность материала, плотность пор и их средний объем, плотность дислокаций и т.д.

Большинство материалов обладают свойствами анизотропии, поэтому в общем случае, повреждаемость имеет векторный или тензорный вид [142; 272]. Применение вектора или тензора повреждаемости на практике встречает ряд трудностей: усложняются модели, увеличивается объем численных расчетов и обработки экспериментальных данных. Поэтому различные модификации уравнений ползучести со скалярными параметрами поврежденности остаются востребованными и в настоящее время. Значительная часть базируется на понятии эффективного напряжения в виде $\sigma/(1-q)$ или $\sigma/(1-q^r)^m$ [135; 209]. Возможен вариант, когда «начало процесса разрушения материала наступает тогда, когда некоторая функциональная комбинация от этих параметров достигает критической величины» [150].

В общем случае определяющие уравнения для одноосного напряженного состояния записываются в виде системы уравнений [167]

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = f_c(\sigma, T, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \frac{dq_i}{dt} = \varphi_c(\sigma, T, \varepsilon^c, t, q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.1)$$

При наличии одного параметра поврежденности система может быть конкретизирована в виде [170]

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma^n}{(1-q)^{k_1}}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{B_\omega \sigma^g}{(1-q)^{k_2}}.$$

Следует отметить, что выписанная система обладает произволом, поскольку независимое определение параметров уравнений из экспериментальных данных невозможно [170]. При выборе этих параметров авторы стремятся наилучшим образом описать экспериментальные данные, при этом единой методики определения параметров нет.

В [93; 95], оставаясь в рамках концепции Ю.Н. Работнова и не наделяя параметр поврежденности физическим смыслом, показана возможность описания процессов деформирования вплоть до разрушения, при этом параметр поврежденности зависит от измеряемых в эксперименте величин $\omega = \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$, $0 \leq \omega \leq 1$, ε_*^c – предельная деформация при разрушении.

1.3.1 Определяющие уравнения ползучести и повреждаемости в энергетической форме

В [191] за меру интенсивности процесса ползучести и накопления повреждаемости принимается величина мощности рассеяния $W_A = \dot{\varepsilon}_{ij}^c \sigma_{ij}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij}^c – компоненты тензора деформаций ползучести, точка производная по времени. В [81] определяющие уравнения (1.1) в одноосном случае аналогично [170] конкретизированы в энергетических терминах в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f_c(\sigma, T)}{(1-q)^{\kappa_1}}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\Phi_c(\sigma, T)}{(1-q)^{\kappa_2}}, \quad (0 \leq q \leq 1), \quad (1.2)$$

где $A = \int_0^t W_A dt = \int_0^{\varepsilon^c} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c$ – работа рассеяния, коэффициенты κ_1, κ_2 зависят от температуры T . В [81] показано, что с помощью замены $(1-\omega) = (1-q)^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$ ($\kappa_2 + 1 > \kappa_1$) уравнения (1.2) можно представить в виде соотношений с одинаковыми функциями в знаменателе, и тем самым исключить произвол в определении параметров функциональных зависимостей:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f_c(\sigma, T)}{(1-\omega)^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi_c(\sigma, T)}{(1-\omega)^m}, \quad (1.3)$$

$$m = \kappa_1 / (\kappa_2 - \kappa_1 + 1), \quad \varphi_c(\sigma, T) = (\kappa_2 - \kappa_1 + 1) \Phi_c(\sigma, T).$$

Для параметра поврежденности ω ($0 \leq \omega \leq 1$) в одноосном случае должно выполняться уравнение «единой кривой»

$$(1 - \omega)^{m+1} = (1 - \tilde{\tau}), \quad (1.4)$$

где $\tilde{\tau} = (\kappa_2 + 1) \int_0^t \Phi_c(\sigma, T) dt$ или $\tilde{\tau} = (m + 1) \int_0^t \varphi_c(\sigma, T) dt$ – приведенное время.

После интегрирования (1.4) для параметра поврежденности ω следует

$$\omega = 1 - (1 - (m + 1) \int_0^t \varphi_c(\sigma, T) dt)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (1.5)$$

После интегрирования (1.3) при $\sigma = \text{const}$ получаются следующие выражения:

$$\omega = 1 - [1 - (m + 1) \varphi_c(\sigma, T) t]^{\frac{1}{m+1}}, \quad A = \frac{f_c(\sigma, T)}{\varphi_c(\sigma, T)} \omega, \quad (1.6)$$

$$\omega = A / A_*, \quad A_* = f_c(\sigma, T) / \varphi_c(\sigma, T), \quad (1.7)$$

$$\tilde{\tau} = t / t_*, \quad t_* = \frac{1}{(m + 1) \varphi_c(\sigma, T)}. \quad (1.8)$$

Формулы (1.7) и (1.8) означают, что параметр поврежденности в случае одноосного деформирования есть отношение текущей работы рассеяния A к ее величине на момент разрушения A_* , т.е. приведенная работа $\omega = A / A_*$, а $\tilde{\tau}$ есть нормированное время – отношение текущего времени к времени разрушения t_* . При $\sigma = \text{const}$ выполняется равенство $\omega = A / A_* = \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$ и экспериментальную проверку полученных уравнений необходимо проводить в нормированных координатах $\omega = A / A_* = \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$, $\tilde{\tau} = t / t_*$.

Для материала с тремя стадиями ползучести определяющие уравнения можно конкретизировать в следующем виде [81]

$$W_A = \frac{dA}{dt} = \frac{f_c(\sigma, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi_c(\sigma, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad (1.9)$$

где α – параметр упрочнения. В этом случае в нормированных координатах $\omega = A/A_* \equiv \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$, $\tilde{t} = t/t_*$ для параметра поврежденности также выполняется уравнение «единой кривой» в виде

$$(1 - \omega^{(\alpha+1)})^{m+1} = 1 - \tilde{t}. \quad (1.10)$$

При $\sigma = \text{const}$ из (1.8) после интегрирования получается [101]

$$\omega = \left(1 - (1 - (m+1)(\alpha+1)\varphi_c(\sigma, T)t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad A = \frac{f_c(\sigma, T)}{\varphi_c(\sigma, T)} \omega, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon^c = \frac{f_c(\sigma, T)}{\sigma \cdot \varphi_c(\sigma, T)} \omega, \quad \varepsilon_*^c = \frac{f_c(\sigma, T)}{\sigma \cdot \varphi_c(\sigma, T)}.$$

Из (1.11) следует, что для одноосного напряженного состояния скалярный параметр поврежденности ω есть величина показателя деформируемости материала, т.е. $\omega = \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$ – нормированная деформация, причем для любой зависимости предельной деформации ε_*^c от напряжения.

Кинетические уравнения (1.9) могут быть обобщены на случай сложного напряженного состояния [81; 101]:

$$W_A = \frac{dA}{dt} = \frac{f_c(\sigma_e, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad A = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dt, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi_c(\sigma_{e*}, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad (1.13)$$

$$\eta_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \lambda \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda = \frac{W_A}{\sigma_e}. \quad (1.14)$$

Здесь σ_e, σ_{e*} – однородные относительно напряжений функции первой степени (функции инвариантов тензора напряжений и тензора анизотропии свойств ползучести). В качестве эквивалентного напряжения σ_e можно принять интенсивность напряжений $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}/2)^{1/2}$, если использовать критерий Мизеса, либо максимальное касательное напряжение, если использовать критерий Треска, и т.д. Обозначено $\bar{\sigma}_{ij}$ – компоненты девиатора напряжений. Эквивалентное напряжение σ_{e*} определяется как комбинация напряженных состояний. При комбинировании учитывается то,

что в стационарных условиях нагружения должно происходить эквивалентное накопление повреждений, т.е. длительность до разрушения должна быть одинакова. В качестве эквивалентного напряжения σ_{e*} можно принять интенсивность напряжений σ_i , если использовать критерий длительной прочности Каца, либо максимальное нормальное напряжение, если использовать критерий длительной прочности Джонсона и другие критерии. Обзор, посвященный критериям длительной прочности можно найти в [138]. Среди работ, опубликованных в последние годы можно отметить публикации [240; 257; 275], в которых обсуждаются вопросы выбора критерия разрушения при ползучести в условиях многоосного напряженного состояния.

1.3.2 Экспериментальное обоснование гипотезы «единой кривой» повреждаемости

Ввод приведенных координат $\omega = A/A_* = \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$, $\tilde{t} = t/t_*$ для обработки экспериментальных данных при стационарных режимах нагружения ($\sigma = \text{const}$) позволяет связать параметр поврежденности с измеряемыми в эксперименте величинами $\varepsilon^c, t, \varepsilon_*^c, t_*$, при этом параметру ω не придается какой-либо физический смысл. Геометрическое подобие кривых ползучести («единая кривая») при постоянных напряжениях и температурах в нормированных переменных установлено для многих материалов [81; 83; 86; 89; 191; 194; 248].

В [93] для материалов без первой стадии ползучести ($\alpha = 0$) показана возможность описания процессов деформирования вплоть до разрушения с использованием уравнений (1.12)-(1.14), где $\omega = \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$, $0 \leq \omega \leq 1$, при этом $\varepsilon_*^c \neq \text{const}$.

На рисунке 1.3, а представлены экспериментальные значения работы рассеяния (точки) при ползучести в характеристической точке $\hat{A} = \bar{\sigma}_i \hat{\varepsilon}_i^c$,

полученные при кручении сплошных круглых образцов из сплава АК4-1 (Al-Cu-Mg-Fe-Ni) при $T = 250^\circ\text{C}$ при интенсивности напряжений $\hat{\sigma}_i = 160; 170; 180; 190; 200; 210; 230$ МПа [84; 93; 96]. Символ « $\cap$ » относится к величинам в характеристической точке. Символом «*» на диаграмме обозначено разрушение. В работе [132] утверждается, что существует малая окрестность точки $\hat{r}$ на радиусе внутри стержня, в которой значение σ_i не изменяется с течением времени и равно значению напряжения в этой точке в момент нагрузки. Такую точку на радиусе авторы называют характеристической, а совокупность таких точек внутри стержня образует цилиндрическую поверхность. Интенсивность напряжений в характеристической точке ($\hat{r} = 3R/4$, R – радиус образца) связана с внешним крутящим моментом M зависимостью [71]

$$\hat{\sigma}_i = 3\sqrt{3}M / (2\pi R^3). \quad (1.15)$$

На рисунке 1.3, б данные перестроены в нормированных координатах $\omega = A/A_* \equiv \varepsilon^c / \varepsilon_*^c$, $\tilde{t} = t/t_*$. На рисунках 1.3, в и г эти же данные изображены в координатах $\hat{\varepsilon}_i^c, t$ (индекс «с» опущен). Интенсивность деформаций ползучести в характеристической точке определяется соотношением [82]

$$\hat{\varepsilon}_i^c = \vartheta \hat{r} / \sqrt{3}, \quad (1.16)$$

где ϑ – погонный угол закручивания. Несмотря на то, что $\hat{\varepsilon}_i^c$ и $\hat{A}_*$ монотонно возрастают с увеличением $\hat{\sigma}_i$, данные в нормированных координатах группируются плотным пучком.

В [95] на примере титанового сплава 3В (Ti–Al–V) демонстрируется возможность описания процесса деформирования и разрушения упрочняющихся материалов в рамках гипотезы «единой кривой» с использованием уравнений (1.12)–(1.14).

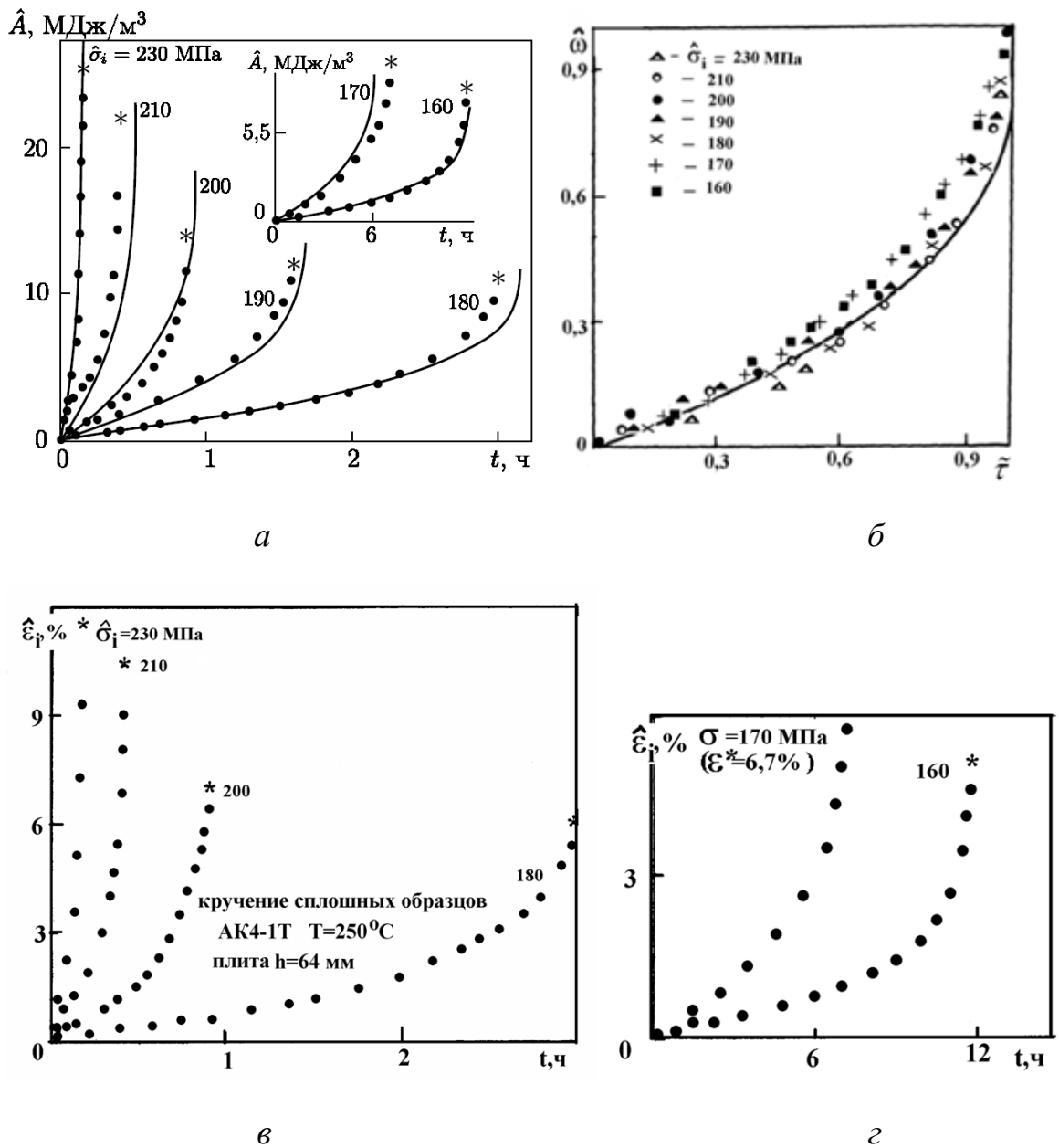


Рисунок 1.3 – Зависимость работы рассеяния в характеристической точке от времени при кручении сплошных образцов из сплава АК4-1 при $T = 250^\circ\text{C}$, $\hat{\sigma}_i = \text{const}$ и их аппроксимация (линии) по кинетическим уравнениям ползучести (1.12)–(1.14) со скалярным параметром поврежденности (а), «единая кривая» в нормированных координатах и их аналитическая аппроксимация (б). экспериментальные значения интенсивности деформаций ползучести в характеристической точке в зависимости от времени при постоянной $\hat{\sigma}_i$ (в, г).

Сплав ЗВ применяется в судостроении для изготовления деталей корпусов. Их формообразование и эксплуатация осуществляются в холодном состоянии.

На рисунках 1.4, *а* и *в* иллюстрируется подобие кривых ползучести на растяжение при $\sigma = \text{const}$ трубчатых образцов, вырезанных в продольном направлении из плиты толщиной 20 мм. При комнатной температуре у сплава наблюдаются все три стадии ползучести, при этом величина энергии рассеяния $A = \int_0^{\varepsilon^c} \sigma d\varepsilon^c$ при разрушении на растяжение практически постоянна.

На рисунке 1.4, *б* приведены данные экспериментов на том же сплаве на растяжение, кручение и комбинации растяжения с кручением при $\sigma_i = \text{const}$ трубчатых образцов, вырезанных в поперечном направлении плиты. Не смотря на то, что из диаграмм следует, что $A_* \neq \text{const}$, данные экспериментов в координатах $\omega - \tilde{t}$ ($\omega = A/A_* \equiv \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$ и $\tilde{t} = t/t_*$) достаточно хорошо группируются в «единую кривую» (рисунок 1.4, *в*). Тем самым подтверждается геометрическое подобие кривых ползучести $A/A_* - t/t_*$, а также запись уравнения для параметра поврежденности в виде $d\omega/dt = \varphi_c(\sigma_{e*}, T)\psi_c(\omega)$, где σ_{e*} — эквивалентное напряжение представляет функцию напряженных состояний, при которых в стационарных условиях нагружения происходит равное накопление повреждений и при $\omega = 1$ длительность до разрушения одинакова.

Аналогичный прием построения исходных экспериментальных данных деформирования в нормированных координатах использовался в [196] для обоснования уравнения кривой усталости при малоцикловом нагружении. Экспериментально было установлено подобие кривых циклической ползучести в координатах $\omega = \varepsilon/\varepsilon_*$, $\tilde{t} = N/N_*$ (N_* — число циклов до разрушения).

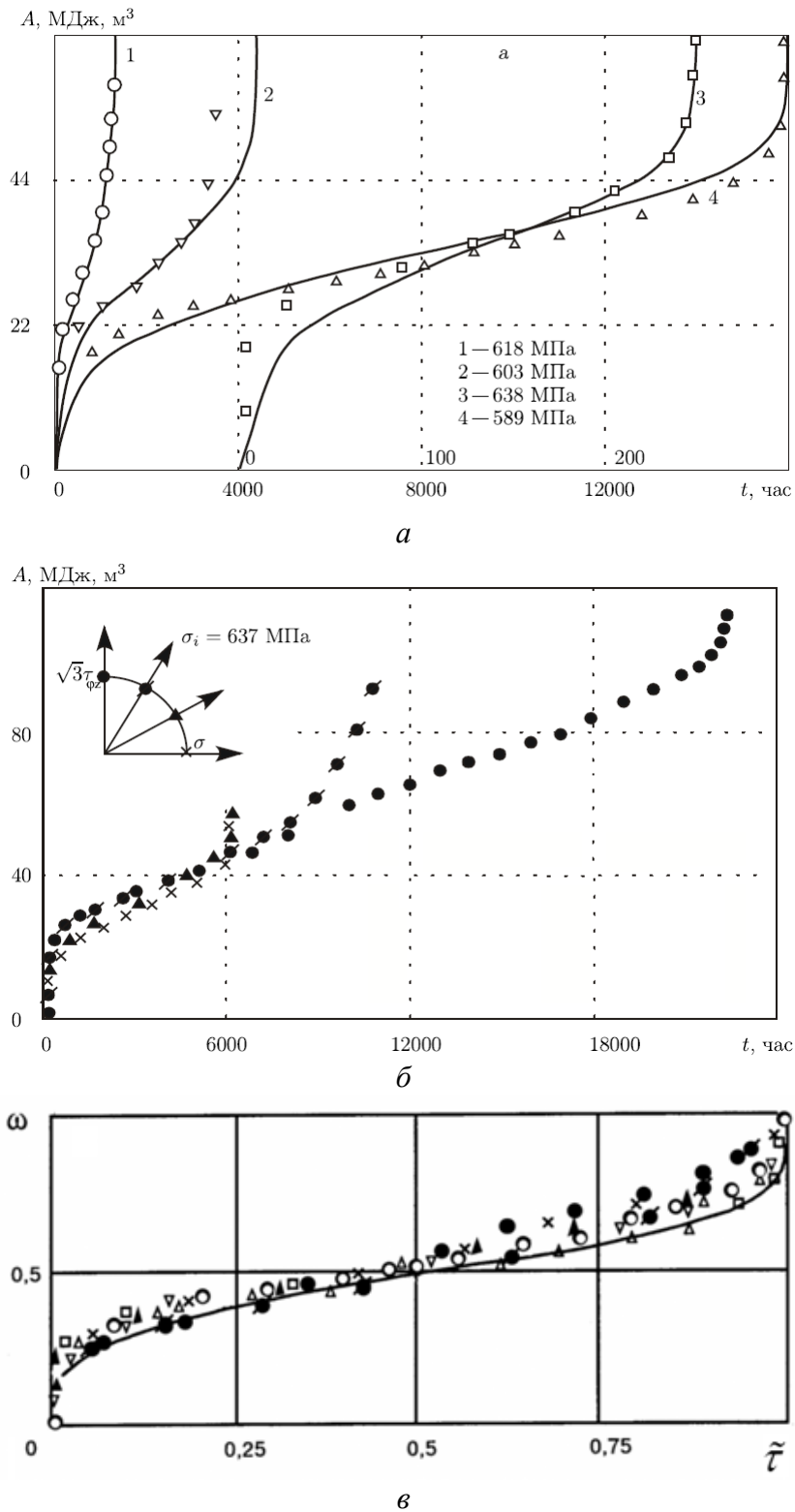


Рисунок 1.4 – Экспериментальные данные для титанового сплава 3В: диаграммы ползучести $A(t)$ при комнатной температуре на растяжение образцов, вырезанных в продольном направлении плиты (*a*); диаграммы ползучести на растяжение, кручение и комбинации растяжения с кручением при $\sigma_i = \text{const}$ образцов, вырезанных в поперечном направлении плиты (*б*); «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \tilde{t}$, где $\omega = A/A_*$ ($A_* \neq \text{const}$), $\tilde{t} = t/t_*$ (*в*)

В [149] показано, что контур $\sigma_i = \text{const}$, который приведен на рисунке 1. 4, б в виде символов (точки, треугольники и т.д.) соответствующих экспериментов на растяжение, кручение и комбинаций растяжения с кручением, является контуром эквивалентного напряжения в смысле равенства постоянной мощности рассеяния работы на установившемся участке кривой ползучести $W_{Amin} = dA/dt = \sigma_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^c = \text{const}$, при этом отмечается вполне удовлетворительное подтверждение ассоциированного закона течения для этого контура ($\dot{\epsilon}_{kl}^c = \lambda \partial \sigma_i / \partial \sigma_{kl}$). Таким образом, эквивалентным напряжением в смысле интенсивности процесса ползучести по энергетической мере W_A для указанного сплава является интенсивность напряжений $\sigma_e = \sigma_i$. Вместе с этим из диаграмм видно, что длительность до разрушения при кручении для рассматриваемого сплава более чем в 3,5 раза больше, чем длительность до разрушения при растяжении при одном и том же уровне $\sigma_e = \sigma_i = \text{const}$. Это означает, что эквивалентное напряжение σ_{e*} с одинаковой длительностью до разрушения в уравнении для параметра поврежденности (1.13) не совпадает с эквивалентным напряжением в уравнении ползучести (1.12) ($\sigma_{e*} \neq \sigma_e$) из-за значительной разницы в длительностях до разрушения при $\sigma_e = \text{const}$.

Следует отметить, что если для сплава АК4-1 при $T = 250$ °С с уменьшением интенсивности напряжений σ_i величина интенсивности деформаций при разрушении монотонно уменьшается, то для сплава ЗВ при растяжении интенсивности предельных деформаций наоборот монотонно возрастает. В обоих случаях экспериментальные данные группируются плотным пучком в единую кривую.

Возможность сведения в единую кривую экспериментальных данных с немонотонной зависимостью $\mathcal{E}_{i*}^c(\sigma_i)$ обсуждаются в работах [86; 194].

1.3.3 Методика определения параметров кинетических уравнений с монотонной и немонотонной зависимостью предельной деформации от напряжения

Методика определения параметров определяющих уравнений (1.12) – (1.14) изложена в работах [12; 190; 191; 248]. Показатель m характеризует разупрочняющуюся стадию ползучести и находится по третьему участку «единой кривой» после точки перегиба для упрочняющихся материалов или просто по конечному участку, если упрочнение отсутствует.

При отсутствии упрочнения, логарифмируя (1.4) получаем соотношение

$$(m+1)\ln(1-\omega) = \ln(1-\tilde{\tau}),$$

которое в координатах $\ln(1-\omega) - \ln(1-\tilde{\tau})$ является уравнением прямой. По наклону этой прямой определяется m . Здесь $\omega = \varepsilon_k^c / \varepsilon_{k*}^c$, $\tilde{\tau} = t_k / t_{k*}$, ε_k^c , t_k – деформации ползучести и время, соответствующие точке перехода в разупрочняющуюся стадию на кривой ползучести « $\varepsilon^c - t$ » при $\sigma = \sigma_k = \text{const}$, ε_{k*}^c , t_{k*} – деформации ползучести и время при разрушении на k -ой кривой ползучести при $\sigma = \sigma_k = \text{const}$. Выбирая среднее значение из величин m , полученных для различных значений $\sigma = \sigma_k$, определяется коэффициент m . Для разупрочняющихся материалов ($\alpha = 0$) коэффициент m может быть найден методом наименьших квадратов отклонения кривой (1.4) от экспериментальных точек, сведенных в единую кривую в координатах « $\omega - \tilde{\tau}$ » во всем диапазоне изменения параметра ω .

Коэффициент α определяется по данным начального участка кривой « $\omega - \tilde{\tau}$ » до точки перехода на стадию установившейся ползучести [12]. В этом случае, принимается $\frac{d\omega}{dt} = \varphi_c(\sigma, T) / \omega^\alpha$. Интегрируя это уравнение от нулевого состояния до текущих значений ω , t , и далее логарифмируя полученное соотношение, приходим к уравнению прямой

$$(\alpha + 1) \ln(\omega) = \ln[(\alpha + 1)\varphi_c(\sigma, T)] + \ln(1 - \tilde{\tau}).$$

По наклону этой прямой для нескольких значений $\sigma = \sigma_k = \text{const}$ и $T = \text{const}$ определяется коэффициент α . Возможно также определение коэффициента α по данным сведенным в единую кривую (1.10) методом наименьших квадратов.

При сжатии не всегда удастся провести эксперимент до разрушения в основном из-за потери устойчивости в процессе деформирования (искривления) [42]. Рекомендуемая методика определения значения коэффициента m в предложена в [81].

В качестве $f_c(\sigma, T)$ и $\varphi_c(\sigma, T)$ могут быть выбраны степенные или экспоненциальные функции в следующем виде [81; 103; 185]: $B\sigma^n$; $B_1 \exp(\beta\sigma)$; $B_3(\exp(\beta\sigma^2) - 1)$ и другие.

В случае выбора функции в степенном виде $f_c(\sigma, T) = B_A \sigma^n$, коэффициенты B_A, n определяются по экспериментальным данным на установившейся стадии кривой ползучести « $\varepsilon^c - t$ » при $\sigma = \text{const}$. Логарифмируя соотношение $\dot{\varepsilon}^c = B_A \sigma^n$, получаем $\ln(\dot{\varepsilon}^c) = \ln(B_A) + n \ln \sigma$. Выбирая среднее значение из величин n , полученных при различных $\sigma = \sigma_k = \text{const}$, определяется значение коэффициента n и далее коэффициента B_A . Если $\varphi_c(\sigma, T) = B_\omega \sigma^g$, то из (1.11) следует время разрушения: $t_* = 1 / ((m + 1)(\alpha + 1)B_\omega \sigma^g)$. После логарифмирования выражение для t_* преобразуется к виду $\ln(t_*) = -\ln((m + 1)(\alpha + 1)B_\omega) - g \ln(\sigma)$ для нахождения значений коэффициентов g, B_ω .

Степенной вид функций $f_c(\sigma, T)$ и $\varphi_c(\sigma, T)$ позволяет описывать поведение материалов с монотонной зависимостью работы рассеяния A_* (деформации ε_*^c) при разрушении от напряжения [136]. Сплавы АК4-1 при $T = 250^\circ \text{C}$ (рисунок 1.3) и 3В при комнатной температуре (рисунок 1.4) с монотонной зависимостью предельной деформации от напряжения удастся

удовлетворительно описать степенными функциями в рамках гипотезы «единой кривой».

Сплошные линии на рисунке 1.3 аппроксимация экспериментальных данных на кручение образцов из сплава АК4-1 (Al-Cu-Mg-Fe-Ni) при $T = 250^\circ\text{C}$ по уравнениям:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma_i^{n+1}}{(1-\omega)^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_i^g}{(1-\omega)^m} \quad (1.17)$$

со следующими значениями параметров: $B_A = 2,79 \cdot 10^{-40} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$, $n = 15$, $m = 2$, $B_\omega = 3,39 \cdot 10^{-31} (\text{МПа})^{-g} \text{с}^{-1}$, $g = 11,5$, $G = 17 \text{ ГПа}$ [84; 93; 248].

Сплошные линии на рисунке 1.4 аппроксимация экспериментальных данных на растяжение образцов из сплава 3В (Ti-Al-V) при $T = 20^\circ\text{C}$ по уравнениям:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma^{n+1}}{\omega^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma^g}{\omega^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m} \quad (1.18)$$

со следующими значениями констант: $\alpha = 2,5$, $m = 7$, $n = 50,8$, $g = 51,8$, $B_A = 1,46 \cdot 10^{-151} \text{МПа}^{(-n)} \text{с}^{-1}$, $B_\omega = 2,205 \cdot 10^{-153} (\text{МПа})^{-g} \text{с}^{-1}$, $E = 120 \text{ ГПа}$. Свойства данного сплава могут быть описаны в рамках энергетического варианта теории ползучести, работа рассеяния при разрушении $A_* = 66,2 \text{ МДж/м}^3$ [95; 186; 191]. В [128] приведено численное решение задачи растяжения стержня при $\sigma = \text{const}$ с использованием уравнений (1.18) для сплава 3В, хорошо согласующееся с экспериментальными данными.

Анализ экспериментальных исследований на ползучесть и длительную прочность ряда сплавов [102; 123; 224] показывает, что зависимость деформации при разрушении от напряжения может иметь немонотонный характер: возрастет с уменьшением напряжения, а затем понижаться или наоборот сначала понижаться, а затем увеличиваться при уменьшении напряжения. Применение энергетического варианта теории ползучести [191] возможно только в определенных температурно-временных диапазонах и для некоторых типов материалов. Немонотонный вид этой зависимости также

значительно ограничивает возможность приданию параметру поврежденности конкретного физического смысла. Подходы математического описания немонотонной зависимости, имеющей внутренний максимум или минимум в рамках кинетической теории Работнова с использованием одного и двух параметров поврежденности обсуждаются в [59; 136; 142]. В [86] показана возможность использования кинетических уравнений со скалярным параметром поврежденности в виде (1.9) для описания процесса ползучести и разрушения сплавов на основе железа (Сталь45, сплав ВЛ-1Д) в диапазоне температур, близких к температуре сверхпластичности, а именно в области температур с резко немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств.

Рассмотрим методику определения параметров определяющих уравнений ползучести и повреждаемости для материалов с *немонотонной зависимостью деформации при разрушении* на примере стали марки X18H10T (Fe-Cr-Ni-Mn) при температуре 850 °C [136]. Для описания деформирования, аналогично [136], в уравнениях (1.9) будем использовать функции $f_c(\sigma) = B_A \sigma \cdot \text{sh}(\sigma/c)$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$. Тогда с учетом (1.11)

предельная деформация: $\varepsilon_*^c = \frac{B_A}{B_\omega} \cdot \frac{\text{sh}(\sigma/c)}{\sigma^g}$. Можно показать, что $\frac{d^2 \varepsilon_*^c}{d\sigma^2} > 0$. Из

условия $\frac{d\varepsilon_*^c}{d\sigma} = 0$ находим уравнение для определения минимума

$\sigma \cdot \text{cth}(\sigma/c) = g \cdot c$. Логарифмируя уравнение для скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии $\eta = B_A \text{sh}(\sigma/c)$, получаем соотношение для определения констант B_A и c : $\ln(\eta) \approx \sigma/c + \ln(B_A/2)$. На рисунке 1.5, а точками 1-4 изображены экспериментальные зависимости деформации ползучести от времени, соответствующие напряжениям $\sigma = 39,2; 49; 58,8; 78,4$ МПа [136]. На рисунке 1.5, б по этим данным построена зависимость логарифма скорости деформации ползучести от напряжения в предположении установившейся ползучести. Видно, что точки

группируются вдоль прямой линии $\ln(\eta) = a\sigma + b$. Для определения коэффициентов a и b , используется линейная регрессия по методу наименьших квадратов. Далее определяются $c = 1/a$ и $B_A = 2\exp(b)$. На рисунке 1.5, а прямые штриховые линии – аппроксимация по зависимости $\eta = B_A \text{sh}(\sigma/c)$ с полученными значениями $B_A = 2,183 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1}$ и $c = 18,6 \text{ МПа}$.

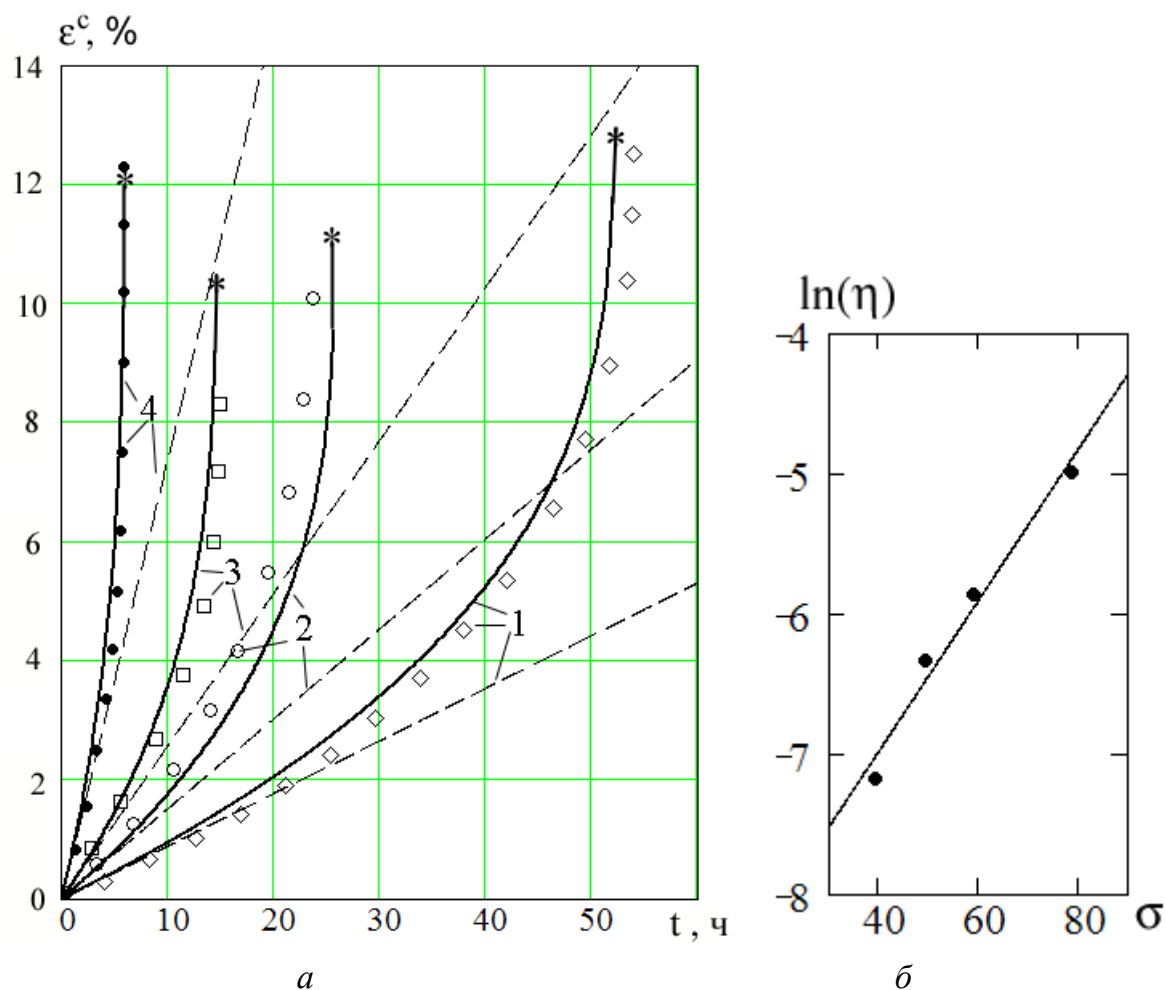


Рисунок 1.5 – Экспериментальные данные (точки) и аппроксимационные зависимости 1-4 для стали X18H10T при температуре 850 °С, соответствующие напряжениям $\sigma = 39,2; 49; 58,8; 78,4$ МПа. Прямые штриховые линии – аппроксимация в предположении установившейся ползучести; сплошные линии – аппроксимация с учетом повреждаемости (а); экспериментальная (точки) и аппроксимационная (линия) зависимость « $\ln(\eta) - \sigma$ » в предположении установившейся ползучести (б).

Экспериментальные данные, изображенные на рисунке 1.6, *а*, перестроены в относительных координатах « $\omega - \tilde{\tau}$ » ($\tilde{\tau} = t/t_*$, $\omega = \varepsilon/\varepsilon_*$, $0 \leq \tilde{\tau} \leq 1$). Предполагается, что упрочнение отсутствует $\alpha = 0$. Сплошная кривая на рисунке 1.6, *а* – аппроксимация этих данных «единой кривой» $\omega = 1 - (1 - \tilde{\tau})^{1/(m+1)}$ по методу наименьших квадратов. Получено значение параметра $m = 1,8$.

Из (1.11) следует, что время разрушения

$$t_* = 1 / ((m+1)B_\omega \sigma^g). \quad (1.19)$$

Логарифмируя (1.19), приходим к уравнению для определения значений параметров g, B_ω : $\ln(t_*) = -\ln((m+1)B_\omega) - g \ln(\sigma)$. Экспериментальные точки $\ln(t_*) - \ln(\sigma)$ для стали X18H10T группируются вдоль прямой линии (рисунок 1.6, *б*). Методом наименьших квадратов получены коэффициенты уравнения прямой линии $g = 3,165$ и $B_\omega = 6,231 \cdot 10^{-8} \text{ МПа}^{-g} \text{ ч}^{-1}$.

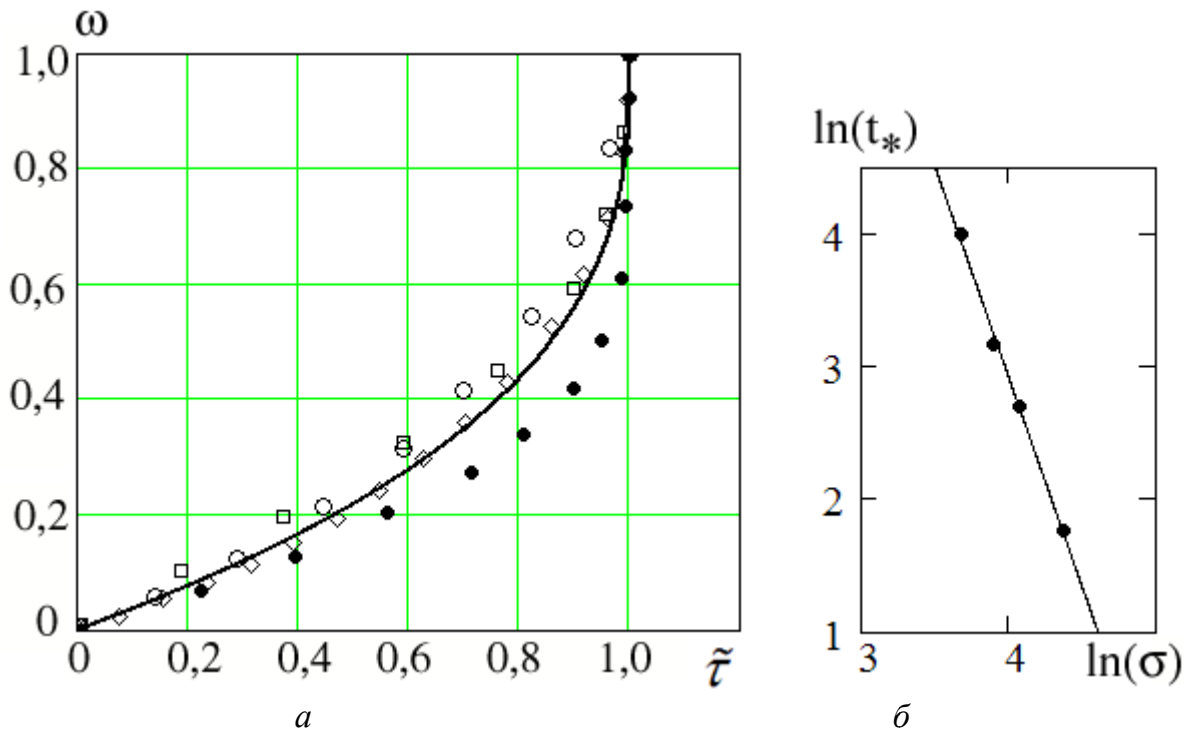


Рисунок 1.6 – Экспериментальные данные для стали X18H10T, построенные в относительных координатах « $\omega - \tilde{\tau}$ » и аппроксимация этих данных «единой кривой» (а); экспериментальная (точки) и аппроксимационная (линия) зависимости $\ln(t_*) - \ln(\sigma)$ (б).

На рисунке 1.5, а сплошные линии – аппроксимация экспериментальных данных с учетом повреждаемости и полученных значений констант по формулам (1.9), где $f_c(\sigma) = B_A \sigma \cdot \text{sh}(\sigma/c)$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$. При $\sigma = 39,2; 49; 58,8; 78,4$ МПа получены следующие значения $\varepsilon_*^c = 12,9; 10,9; 10,4; 12,0$ %.

В работе [194] приведены кривые удельной работы рассеяния и «единая кривая» при растяжении образцов из титанового сплава ОТ-4 (Ti-Al-Mn) при температуре 500 °С. Зависимость деформации при разрушении от напряжения немонотонна и имеет максимум в диапазоне напряжений 80 МПа $< \sigma < 135$ МПа. Для описания ползучести этого сплава можно использовать

функции $f_c(\sigma) = B_A \sigma^{n+1}$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \text{sh}(\sigma/c)$. Тогда $\varepsilon_*^c = \frac{B_A}{B_\omega} \cdot \frac{\sigma^n}{\text{sh}(\sigma/c)}$,

$\frac{d^2 \varepsilon_*^c}{d\sigma^2} < 0$. Из условия $\frac{d\varepsilon_*^c}{d\sigma} = 0$ следует уравнение $\sigma \cdot \text{cth}(\sigma/c) = n \cdot c$, решая

которое можно найти значение σ , при котором ε_*^c достигает максимум. В целом методика определения параметров в уравнениях (1.12) – (1.14) для материала, предельная деформация которого имеет максимум, аналогична методике описанной для материала, предельная деформация которого имеет минимум, и проиллюстрированной на примере стали марки X18H10T.

1.3.4 Время разрушения при деформировании образцов с заданной скоростью

При обработке материалов давлением для изготовления деталей в условиях пластичности и ползучести, включая режимы близкие к сверхпластичности, а также для предотвращения аварийных ситуаций с целью сохранения остаточного эксплуатационного ресурса проводится прогнозирование элементов конструкций на живучесть. Под живучестью элементов конструкции понимается способность сохранять

эксплуатационные свойства на стадиях накопления повреждений и макроскопического разрушения. Расчеты на живучесть особенно актуальны применительно к ответственным конструкциям повышенной прочности, которые работают в условиях нестационарных температурно-силовых режимов эксплуатации. Для оценки живучести необходимы расчетные и экспериментальные диаграммы деформирования материалов с ниспадающим участком кривой — стадией разупрочнения, которая предшествует разрушению. Для разупрочняющей стадии характерно интенсивное накопление повреждений в материале и падение сопротивления деформирования.

Для материалов в холодном состоянии проблема живучести в условиях хрупкого разрушения отражена в работах С. Д. Волкова и его учеников [62; 63; 108]. Получены полностью равновесные диаграммы напряжений на растяжение, кручение (сдвиг), одноосное и объемное сжатие, спадающие до нуля после перехода через максимум путем замены физических уравнений связи между напряжениями и деформациями, используемых в упруго-пластической теории, функциями сопротивления материалов, определяемыми экспериментально на круглых образцах с узкой кольцевой проточкой, т. е. с наличием концентратора напряжений. В испытаниях существенной была имитация жесткости системы нагружения при активной деформации [62]. Несмотря на то, что приближенная форма кусочно-линейной аппроксимации функций сопротивления в физических уравнениях не обеспечивает должного совпадения с экспериментальными данными, она может быть полезной для оценки условий устойчивости сопротивления материала разрушению и позволяет выполнить качественную оценку многих аспектов деформирования и разрушения элементов конструкций из материалов с наличием ниспадающего участка на « $\sigma - \varepsilon$ » диаграмме.

Применительно к задачам обработки материалов давлением в условиях повышенных температур и значительной продолжительности процесса, показано, что скорость нагружения (деформации) существенно влияет на

полную « $\sigma - \varepsilon$ » диаграмму деформирования, включая ниспадающую ветвь диаграммы [94]. В этом направлении следует отметить исследования по анализу расслоения диаграмм с различными заданными скоростями деформирования на растяжение в условиях ползучести с учетом разупрочнения [172] с использованием структурной модели среды стержневого типа, базирующейся на энергетическом подходе накопления поврежденности в локальном элементе [173].

Ниже применительно к формообразованию деталей демонстрируется описание в пределах упругой области кривых деформирования при растяжении и кручении сплошных круглых образцов с заданной скоростью деформации с использованием кинетических уравнений ползучести и повреждаемости.

Возможность описания деформирования до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести и повреждаемости (1.17) иллюстрируется на *примере кручения сплошных круглых образцов из сплава АК4-1* при $T = 250^\circ\text{C}$ с различными постоянными скоростями угла закручивания [84; 96]. Радиус образцов $R \approx 0,01\text{ м}$, длина $l_0 \approx 0,033\text{ м}$.

Предполагается, что полные деформации состоят из упругих и деформаций ползучести $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^c$. Дифференцирование последнего уравнения по времени с учетом первого уравнения (1.17) для стержня круглого поперечного сечения при кручении приводит к уравнению:

$$r\theta = \dot{\tau} / G + (\sqrt{3})^{n+1} B_A \tau^n / (1 - \omega)^m. \quad (1.20)$$

Здесь θ – скорость изменения погонного угла закручивания, которая задается постоянной, $\tau = \tau_{z\varphi}$ – касательное напряжение в цилиндрических координатах.

После разбиения сечения образца по радиусу r на интервалы из (1.20) и второго уравнения (1.17) получается система дифференциальных уравнений относительно τ и ω . При $t = 0$ погонный угол закручивания $\vartheta = 0$ ($\vartheta = \theta t$).

Для решения полученной системы уравнений использовался метод Рунге–Кутты–Мерсона с автоматическим шагом по времени.

Другой способ расчета основан на методе характеристического напряжения, который применим для ряда конструкций таких, как балки, пластины, круглые сплошные и трубчатые стержни [70; 71; 72; 132]. В случае кручения сплошного круглого стержня радиуса R постоянным моментом M с течением времени распределение σ_i вдоль направления r будет изменяться, при этом в характеристической точке напряжения связаны с моментом M зависимостью (1.15). Из выражений, приведенных в [71] следует, что $\hat{r} = 3R/4$ при $n \rightarrow \infty$. По этой характеристической точке при кручении стержня с постоянной скоростью изменения угла закручивания можно найти соответствующую нагрузку $M(t)$. В этом случае решается система из двух уравнений:

$$3R\theta/4 = \dot{\hat{r}}/G + (\sqrt{3})^{n+1} B_A \hat{r}^n / (1 - \hat{\omega})^m, \quad \dot{\hat{\omega}} = (\sqrt{3})^g B_\omega \hat{r}^g / (1 - \hat{\omega})^m.$$

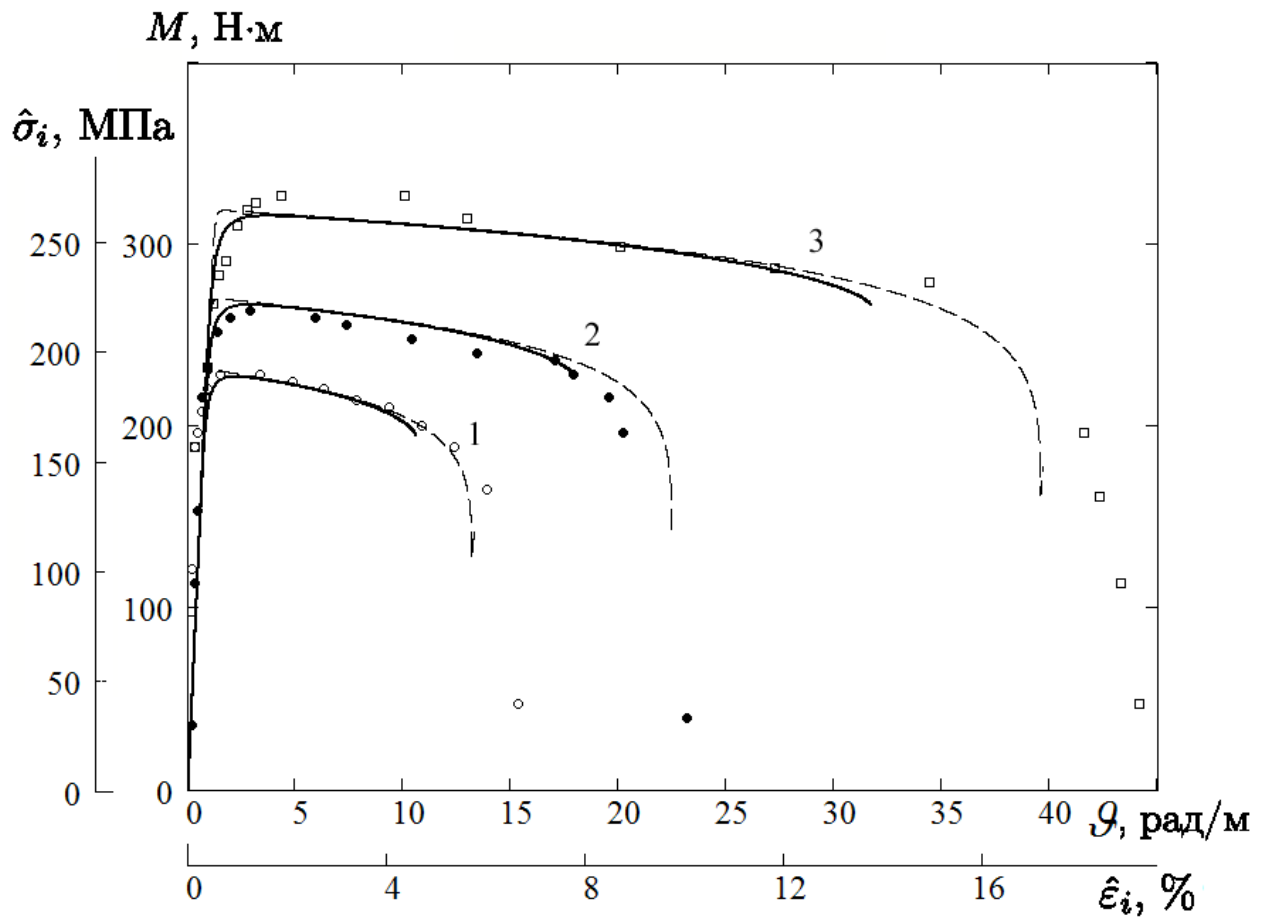
На рисунке 1.7, а изображены экспериментальные данные (точки) и расчетные зависимости значения крутящего момента от угла закручивания $M(\vartheta)$ для трех значений погонной угловой скорости закручивания $\theta = 1,08 \cdot 10^{-3}$; $1,14 \cdot 10^{-2}$; $0,136$ рад/(мс) (кривые 1–3 соответственно). На этом же рисунке для сравнения нанесены оси значений интенсивности напряжений и интенсивности деформаций в характеристической точке. Сплошные линии – расчет методом Рунге–Кутты–Мерсона, штриховые линии – расчет методом характеристического напряжения. Получены значения напряжений $\hat{\sigma}_i = 191,6$; $223,9$; $264,1$ МПа, вычисленные по формуле $\hat{\sigma}_i = (\theta \hat{r} / (\sqrt{3} B_A))^{1/n}$ для значений скорости изменения погонного угла закручивания 1–3. Крутящий момент связан со значением напряжения в характеристической точке выражением $M = 2\pi R^3 \hat{r} / 3$, где $\hat{r} = \hat{\sigma}_i / \sqrt{3}$.

На рисунке 1.7, б, показано распределение касательного напряжения по радиусу вала, полученное из решения системы уравнений (1.17), (1.20) в моменты времени $t = 50 \cdot 10^2$; $1,5 \cdot 10^2$; $3 \cdot 10^2$; $9 \cdot 10^2$; $1,57 \cdot 10^3$ с (кривые 1–6) для $\theta = 1,14 \cdot 10^{-2}$ рад/(мс). На рисунке 1.7, в изображены зависимости накопления повреждений от времени на поверхности вала, соответствующие

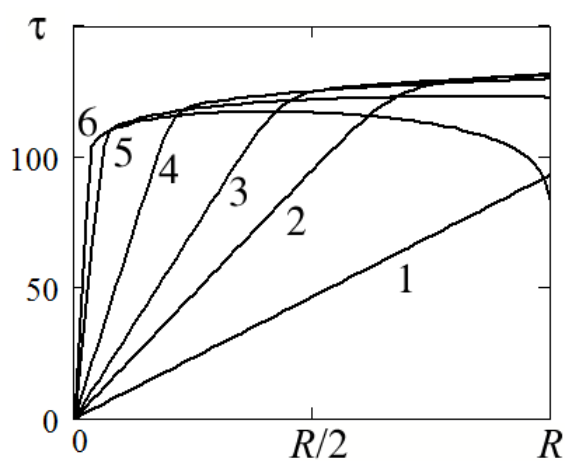
линиям 1-3 на рисунке 1.7, *a*. При решении системы (1.17), (1.20) в точках разбиения вдоль радиуса вычисления прекращаются при достижении параметром поврежденности значения $\omega=1$ на поверхности вала (сплошные линии на рисунке 1.7, *a*). Расчет по методу характеристических напряжений позволяет оценить поведение конструкции с учетом распространения фронта разрушения. Параметр поврежденности в этом случае достигает значения $\omega=1$ в области характеристической точки. Наличие стадии распространения фронта разрушения подтверждается также экспериментальными данными (точки на рисунке 1.7, *a*), при этом видно, что стадия распространения фронта разрушения по времени сопоставима с первой стадией накопления повреждений (скрытой стадией разрушения) до достижения параметром поврежденности значения $\omega=1$ на поверхности скручиваемого вала.

Из представленных на рисунках 1.3 и 1.7 экспериментальных и расчетных диаграмм следует, что уравнения (1.17) хорошо описывают не только процессы деформирования с постоянным внешним закручивающим моментом, но и с заданной кинематикой (деформирование с постоянной скоростью изменения погонного угла закручивания).

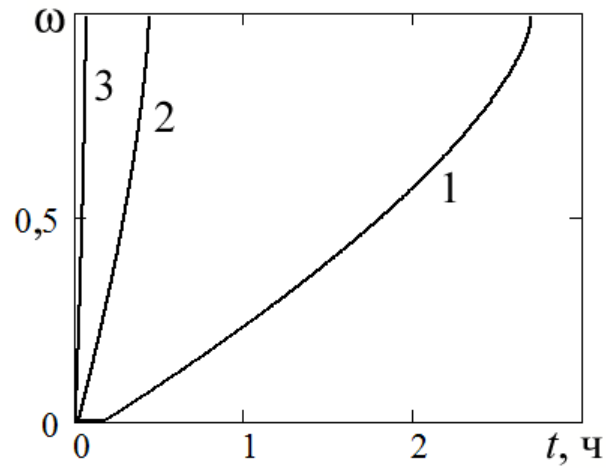
Необходимо отметить, что сплав АК4-1 при $T=250^{\circ}\text{C}$ охрупчивается, т.е. деформации при разрушении уменьшаются с увеличением времени (рисунок 1.3, *a*), при этом отсутствует стадия установившейся ползучести. На графике (рисунок 1.7, *a*) видно, что зависимости « $M - \theta$ » после упругого участка нагружения дают сразу ниспадающую ветвь на кривой деформирования (без горизонтальной асимптотики), причем, чем медленнее процесс (кривые 1, 2), тем меньше предельная величина деформаций. Внешние координаты $\hat{\sigma}_i - \hat{\varepsilon}_i$ на рисунке 1.7, *a* пересчитаны для характеристической точки. Таким образом, экспериментально и численно установлено соответствие ниспадающей ветви « $\sigma - \varepsilon$ » диаграммы третьей разупрочняющейся стадии ползучести с интенсивным накоплением повреждений.



a



б



в

Рисунок 1.7 – Экспериментальные и расчетные значения крутящего момента для трех значений (кривые 1–3) скорости изменения погонного угла закручивания (а), эпюры касательного напряжения $\tau = \tau_{z\varphi}$ по радиусу образца в различные моменты времени для эксперимента 2 (б); зависимость накопления повреждений от времени на поверхности вала, линии 1-3 соответствуют линиям 1-3 на диаграмме а (в).

Исходя из экспериментальных данных и результатов расчета, можно рекомендовать, что для данного сплава формообразование деталей следует проводить в быстром упругопластическом режиме с последующей релаксацией при этой температуре. Медленные температурно-скоростные режимы формообразования для данного сплава рекомендуются при температуре отжига или выше — при температуре сверхпластичности [93; 102].

Применительно к оценке истощения ресурса на стадии изготовления деталей и оценке остаточного эксплуатационного ресурса после процесса формообразования рассматривается *деформирование круглых стержней при одноосном растяжении из упрочняющегося ($\alpha \neq 0$) титанового сплава 3В (Ti–Al–V) при комнатной температуре по зависимостям (1.18). На рисунке 1.4 сплошными линиями показана аппроксимация исходных экспериментальных данных. Приведенное на рисунках 1.8, а и 1.8, б накопление деформаций и повреждений в стержнях для этих экспериментов при постоянном напряжении $\sigma = 603; 618; 638$ МПа (линии 1–3 соответственно) вычислялось по формулам (1.11). Получена предельная деформация $\varepsilon_*^c = 11; 10,7; 10,4\%$, т.е. для сплава 3В предельная деформация ε_*^c монотонно убывает при увеличении напряжения, при этом $A_* = \text{const}$.*

Накопление деформаций и повреждений, а также зависимость напряжений от времени в стержнях при постоянных скоростях деформаций, равных скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений ($\dot{\varepsilon}^c = B_A \sigma^n$) показано на рисунке 1.9.

Из диаграмм на рисунке 1.9, а видно, что площади ограниченные кривыми 1–3 для всех приведенных скоростей практически совпадают, тем самым подтверждается постоянство удельной работы рассеяния вплоть до разрушения и правильность записи уравнения ползучести (1.12) в энергетических терминах. Параметр поврежденности хорошо соотносится с нормированной работой рассеяния ($\omega = A / A_* \equiv \varepsilon / \varepsilon_*^c$) для одноосного случая нагружения.

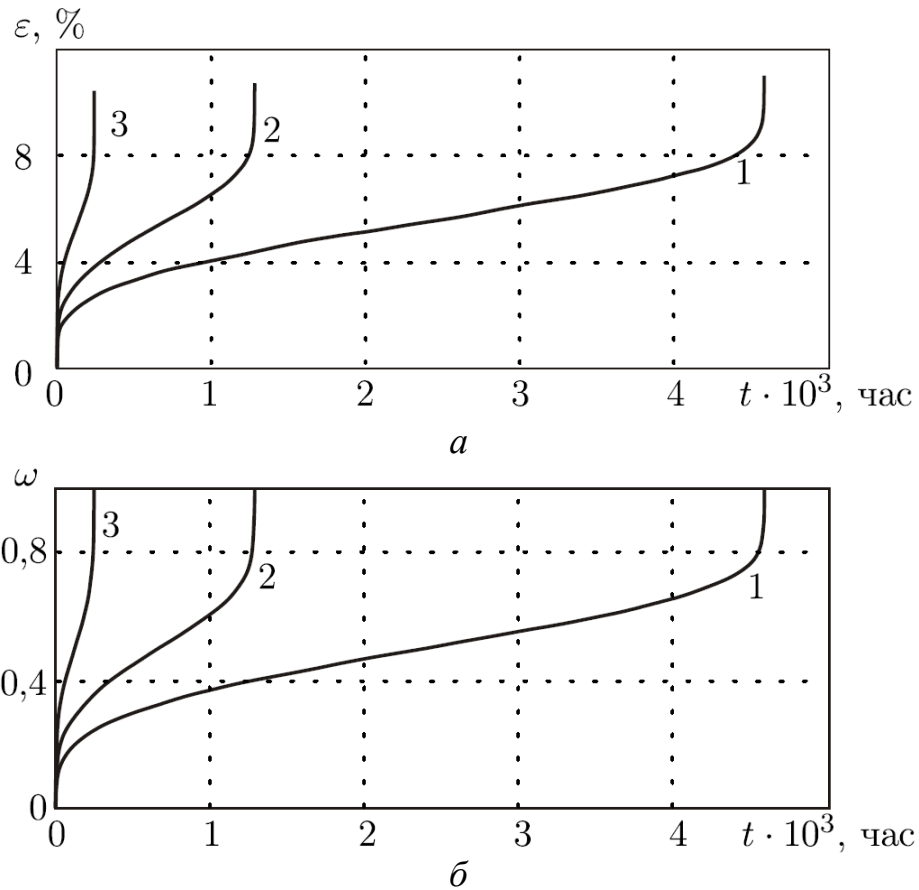


Рисунок 1.8 – Результаты численных расчетов по деформированию круглых стержней из титанового сплава ЗВ при комнатной температуре: зависимость накопления деформации ползучести от времени при постоянных напряжениях (а); зависимость повреждений от времени в материале при постоянных напряжениях (б). Линии 1–3 соответствуют $\sigma = 603; 618; 638$ МПа

Расчеты показывают, что время накопления повреждений вплоть до начала разрушения при постоянной скорости деформирования существенно больше (в 30 раз и более, рисунок 1.9, в) в сравнении с деформированием под действием соответствующего постоянного напряжения (рисунок 1.8, а). Тем не менее, для данного сплава с точки зрения сохранения остаточного эксплуатационного ресурса на стадии изготовления формирование до необходимой величины деформации ε деталей, работающих в условиях, близких к растяжению с заданной кинематикой процесса деформирования предпочтительнее, чем формообразование под действием постоянных напряжений.

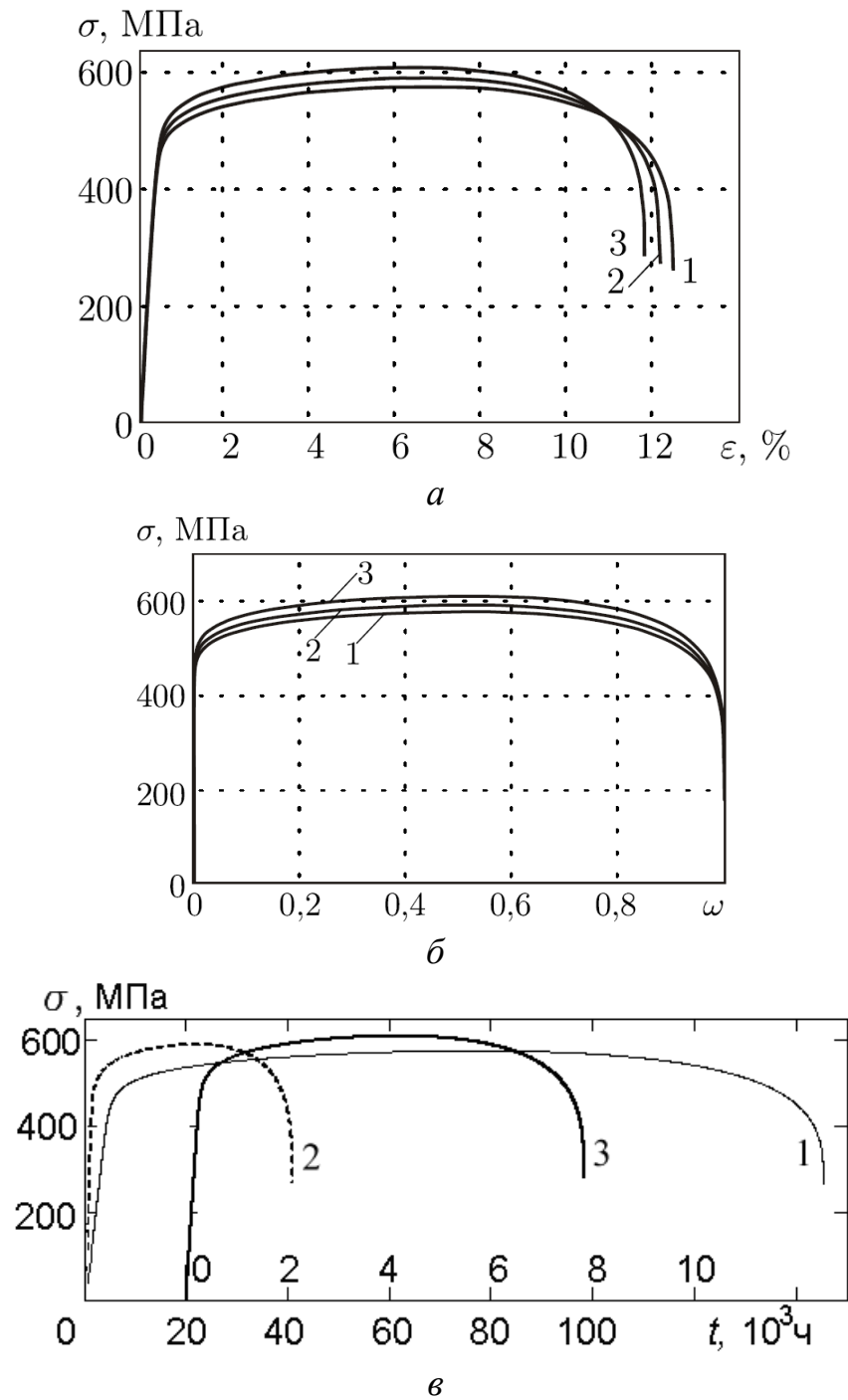


Рисунок 1.9 – Результаты численных расчетов по деформированию круглых стержней из титанового сплава 3В при комнатной температуре: зависимость напряжений при деформировании с заданной кинематикой от деформаций (*a*); зависимость напряжений при деформировании с заданной кинематикой от повреждений (*б*); зависимость напряжений при деформировании с заданной кинематикой от времени (*в*). Линии 1–3 соответствуют $\dot{\varepsilon}^c$ при $\sigma = 603; 618; 638$ МПа

Действительно, если растянуть стержень до величины деформации $\varepsilon \approx 4\%$ постоянным напряжением $\sigma = 638$ МПа (рисунок 1.8, *а*), то величина параметра поврежденности материала на стадии изготовления будет $\omega_{pr} = \varepsilon / \varepsilon_*^c \approx 0,4$ (рисунок 1.8, *б*) и на эксплуатационный ресурс остается величина поврежденности материала $\omega_{ex}^1 = 1 - \omega_{pr} \approx 0,6$. Если же растягивать стержень до той же величины $\varepsilon \approx 4\%$ с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = 4,18 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, соответствующей скорости ползучести на установившейся стадии ползучести при $\sigma = 638$ МПа (рисунок 1.9, *а*), то на эксплуатационный ресурс остается величина $\omega_{ex}^2 = 1 - 0,3 \approx 0,7$ (рисунок 1.9, *б*). Разница в остаточной поврежденности материала после изготовления $\Delta\omega = \omega_{ex}^2 - \omega_{ex}^1 \approx 0,1$ для двух режимов формообразования может дать существенное отличие в длительности эксплуатации деталей изделий в холодном состоянии при низких уровнях растягивающих напряжений.

Из анализа результатов, полученных на основе кинетических уравнений со скалярным параметром поврежденности для материалов, у которых наблюдается подобие исходных кривых ползучести, перестроенных в нормированных деформациях при постоянных напряжениях и температурах, следует, что количественным показателем живучести элементов конструкций является величина степени деформируемости материала при переходе в третью (разупрочняющуюся) стадию ползучести, характеризующуюся интенсивным накоплением микроповреждений и макроразрушений.

1.4 Свойства анизотропии и разнсопротивляемости при растяжении и сжатии листовых материалов в условиях ползучести

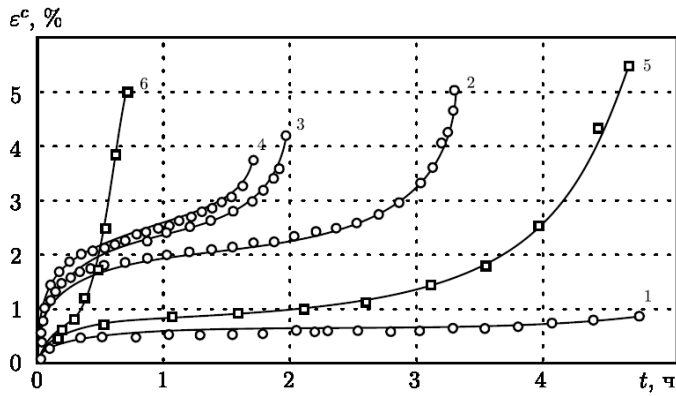
Исходный материал заготовок (листы, прокатанные плиты разных толщин), применяемый для формообразования корпусных элементов конструкций методами, как правило, обладает существенной анизотропией с разными свойствами на растяжение и сжатие [60; 97; 98]. Наиболее слабое направление в смысле сопротивления деформированию в условиях ползучести для плит – под углом 45° к нормали плиты, для листов – по нормали к листу.

Деформационно-прочностные свойства конструкционных материалов зависят от уровня температуры, скорости нагружения (деформирования) и вида напряженного состояния. При этом различие в поведении может быть не только количественным, но и качественным. При быстром нагружении материал может вести себя как изотропная среда, а при медленном нагружении проявляет и анизотропию, и различие в свойствах на растяжение, сжатие. Так, материалы при температурах сверхпластичности подчиняются «установившемуся» течению практически без упрочнения-разупрочнения вплоть до разрушения [189]. В ряде случаев исследования показывают, что при температурах сверхпластичности свойства материала при растяжении и сжатии практически одинаковые [286]. При температурах близких, к температуре сверхпластичности [78; 171; 178], материал разупрочняется, можно считать, что установившаяся стадия отсутствует, отсутствует первый упрочняющийся участок. В области умеренных температур (температуры старения, эксплуатации и т. п.) легкие сплавы деформируются, как правило, с резко выраженной стадией упрочнения.

В работе [95] на примерах алюминиевого сплава АК4-1 и титановых сплавов 17 и 3В иллюстрируется характер деформационно-прочностного поведения легких сплавов при умеренных температурах.

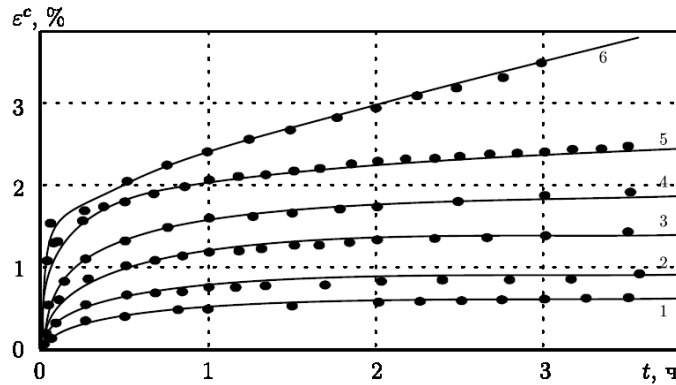
На рисунках 1.10, *а* и *б* приведены диаграммы ползучести ε^c растяжения и сжатия под действием постоянного напряжения при температуре старения 195°C круглых образцов (соответственно светлые и темные точки), изготовленных из плиты авиационного алюминиевого сплава АК4-1 толщиной 45 мм в поперечном направлении к прокату. На рисунке 1.10, *а* цифрами указаны данные экспериментов: 1 — $\sigma = 280$ МПа, $\varepsilon_*^c = 8,9\%$, 2 — $\sigma = 310$ МПа, $\varepsilon_*^c = 9,7\%$, 3 — $\sigma = 315$ МПа, $\varepsilon_*^c = 7,8\%$, 4 — $\sigma = 320$ МПа, $\varepsilon_*^c = 7,3\%$, 5 — $\sigma = 200$ МПа, $\varepsilon_*^c = 13\%$, 6 — $\sigma = 250$ МПа, $\varepsilon_*^c = 20\%$; на рисунке 1.10, *б*: 1 — $\sigma = 290$ МПа, 2 — $\sigma = 300$ МПа, 3 — $\sigma = 310$ МПа, 4 — $\sigma = 320$ МПа, 5 — $\sigma = 340$ МПа, 6 — $\sigma = 345$ МПа. Из сравнения результатов экспериментов при одних и тех же напряжениях видно, что при сжатии указанный сплав существенно прочнее, чем при растяжении. Для сопоставления на рисунке 1.10, *а* квадратами приведены результаты двух экспериментов в продольном направлении, которые иллюстрируют анизотропию в плоскости листа.

На рисунках 1.10, *в* и *г* представлены аналогичные экспериментальные данные на растяжение до разрушения под действием постоянного напряжения для образцов, вырезанных по нормали к плите и под углом 45° к нормали в поперечном направлении, соответственно, из которых видно, что сплав наряду с разнсопротивляемостью обладает существенной анизотропией. Характер деформирования в плоскости плиты (продольное, поперечное направления) не только количественно, но и качественно отличается от деформирования по нормали к плите и под углом 45° к нормали плиты. Для поперечного направления деформации при разрушении ε_*^c практически одинаковы, для направления вдоль проката (квадраты) выше, чем для поперечного направления, а для направлений по нормали к плите и под углом 45° к нормали плиты — уменьшаются с увеличением длительности эксперимента (деформации при разрушении обозначены на графиках звездочками). Самое слабое направление в смысле сопротивления деформированию — под углом 45°.



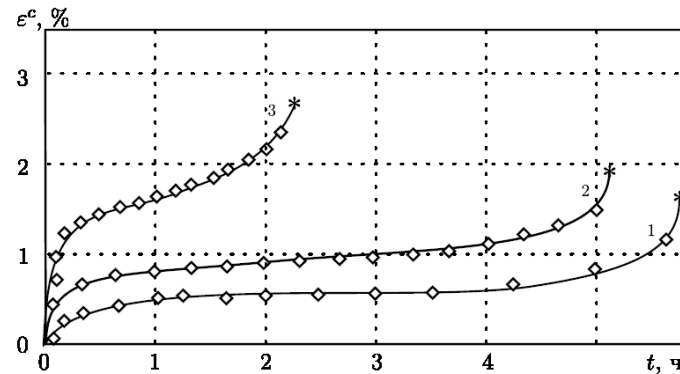
- 1 — $\sigma = 280$ МПа, $\varepsilon^* = 8,9\%$
 2 — $\sigma = 310$ МПа, $\varepsilon^* = 9,7\%$
 3 — $\sigma = 315$ МПа, $\varepsilon^* = 7,8\%$
 4 — $\sigma = 320$ МПа, $\varepsilon^* = 7,3\%$
 5 — $\sigma = 200$ МПа, $\varepsilon^* = 13\%$
 6 — $\sigma = 250$ МПа, $\varepsilon^* = 20\%$

a



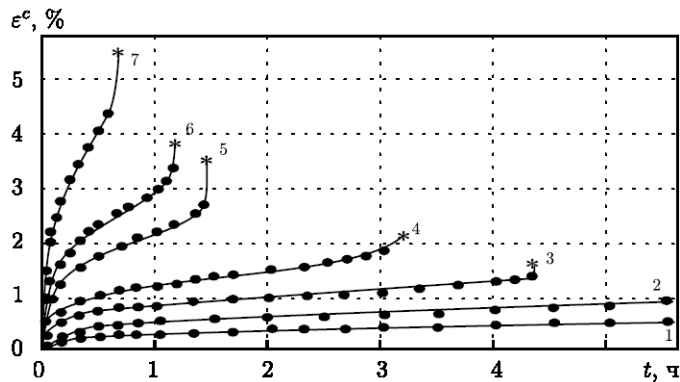
- 1 — $\sigma = 290$ МПа
 2 — $\sigma = 300$ МПа
 3 — $\sigma = 310$ МПа
 4 — $\sigma = 320$ МПа
 5 — $\sigma = 340$ МПа
 6 — $\sigma = 345$ МПа

б



- 1 — $\sigma = 260$ МПа
 2 — $\sigma = 270$ МПа
 3 — $\sigma = 290$ МПа

в



- 1 — $\sigma = 230$ МПа, $t_* = 11$ ч, $\varepsilon^* = 1,3\%$
 2 — $\sigma = 250$ МПа, $t_* = 6,3$ ч, $\varepsilon^* = 1,0\%$
 3 — $\sigma = 260$ МПа
 4 — $\sigma = 270$ МПа
 5 — $\sigma = 290$ МПа
 6 — $\sigma = 300$ МПа
 7 — $\sigma = 310$ МПа

г

Рисунок 1.10 – Диаграммы деформирования образцов из сплава АК4-1 на растяжение и сжатие при постоянном напряжении для различных направлений (звездочки — разрушение): растяжение в продольном и поперечном направлении (а); сжатие в поперечном направлении (б); растяжение по нормали (в); растяжение под углом 45° к нормали (г)

На рисунке 1.11, *а* приведены результаты экспериментов на растяжение в условиях ползучести при $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ образцов из титанового сплава 17 (Ti-Al-Zr-V, плита толщиной 60 мм) при деформировании с постоянной скоростью для различных направлений плиты. Видно, что самое слабое направление сопротивления деформированию для титанового сплава – под углом 45° к нормали.

Точки 1, 2 на рисунке 1.11, *б* – диаграммы ползучести при постоянных напряжениях $\sigma = 562; 555\text{ МПа}$ для образцов, вырезанных в направлении нормали к плите. На рисунке 1.11, *в* изображена «единая кривая» для этих диаграмм. Линии на рисунках 1.11, *б* и *в* – аппроксимация экспериментальных данных по уравнениям (1.18) со следующими значениями констант: $\alpha = 2,7$; $m = 3$; $B_A = 1,116 \cdot 10^{-125}\text{ МПа}^{(-n)}\text{с}^{-1}$; $B_{\omega} = 6,0 \cdot 10^{-102}(\text{МПа})^{-g}\text{с}^{-1}$; $n = 43,06$; $g = 34,84$ (обработка Банщикова И.А.). Точки 1, 2 на рисунке 1.11, *г* диаграммы ползучести при растяжении образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, с постоянной скоростью перемещения захватов ($V_C = 8,2 \cdot 10^{-6}; 4,1 \cdot 10^{-6}\text{ 1/с}$, соответствуют линиям 3, 4 на рисунке 1.11, *а*). Полагая, что скорость полных деформаций $\dot{\varepsilon} = V_C$, для нахождения $\sigma(t)$ и $\sigma(\varepsilon)$, имеем систему уравнений:

$$V_C = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{B_A \sigma^n}{\omega^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_{\omega} \sigma^g}{\omega^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^m}.$$

Линии 1, 2 на рисунке 1.11, *г* – решение этой системы с полученными константами. Ниспадение на кривых деформирования (рисунок 1.11, *г*) зависит от скорости деформации, при этом величины нормированной деформации соответствуют величинам при переходе в разупрочняющуюся (третью) стадию ползучести при постоянном напряжении (рисунок 1.11, *б, в*).

Результаты экспериментов, приведенные на рисунке 1.4 для сплава ЗВ при комнатной температуре показывают, что удельная работа рассеяния при разрушении $A_* = \sigma \varepsilon_*$ и деформация ε_* существенно зависят от вида напряженного состояния.

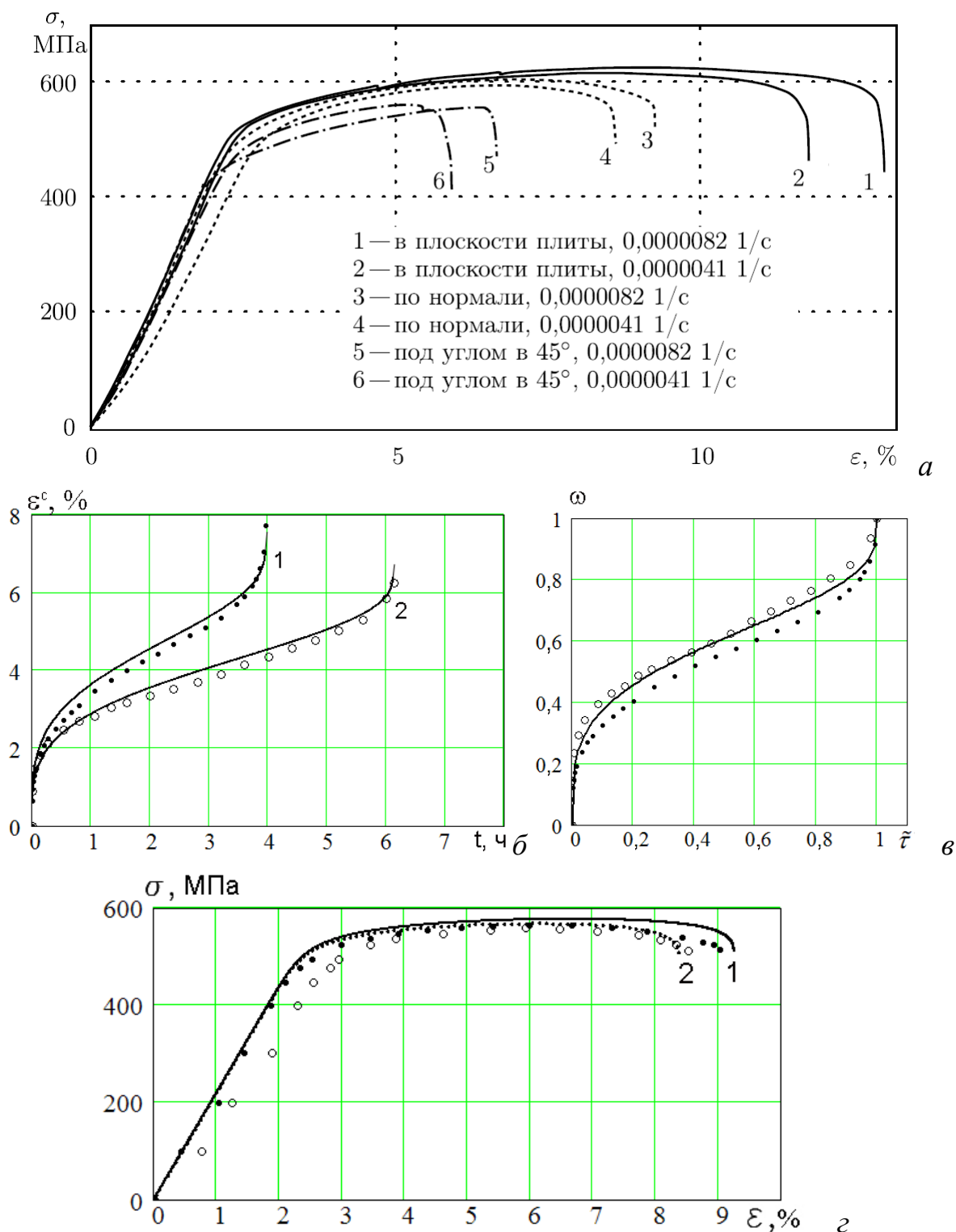


Рисунок 1.11 – Титановый сплав 17 (Ti-Al-Zr-V) при $T = 100$ °C: экспериментальные диаграммы на растяжение с постоянной скоростью деформирования образцов, вырезанных в различных направлениях (а); диаграммы ползучести при постоянных напряжениях для образцов, вырезанных в направлении нормали, точки 1, 2 – $\sigma = 562$; 555 МПа (б); «единая кривая» в нормированных координатах (в); экспериментальные (точки) и расчетные диаграммы на растяжение с постоянной скоростью деформирования образцов, вырезанных в направлении нормали к плите (г)

Так при чистом растяжении $A_* = \text{const}$, а в области от растяжения до чистого кручения A_* возрастает при одной и той же величине интенсивности напряжений, и значит, эти результаты не могут быть описаны в рамках деформационного и энергетического критериев прочности. Из представленных на рисунке 1.4 экспериментальных данных следует, что титановый сплав 3В также проявляют сильную анизотропию: при одном и том же растягивающем напряжении время до разрушения продольных образцов (рисунок 1.4, а) в 30 раз меньше времени до разрушения поперечных образцов (рисунок 1.4, б).

Учет анизотропии и разнсопротивляемости свойств ползучести материала требует разработки математических моделей для решения задач обработки материалов давлением.

1.5 Выводы по первой главе

1. Экспериментально и теоретически обоснована возможность описания процессов деформирования упрочняющихся и разупрочняющихся материалов вплоть до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией (отношение деформации в текущий момент времени к деформации на момент разрушения) для материалов с непостоянной величиной деформации при разрушении на диаграммах ползучести «деформация–время» при постоянном напряжении. Для нахождения параметров функциональных зависимостей необходимо проверить подобие экспериментальных кривых ползучести в нормированных координатах «нормированная деформация – нормированное время» для материалов с любой зависимостью предельной деформации при разрушении от напряжения $\varepsilon_*^c(\sigma) \neq \text{const}$. Методика определения параметров кинетических уравнений ползучести и повреждаемости продемонстрирована

на примере сплава с немонотонной зависимостью предельной деформации от напряжения.

2. Показано, что величина нормированной деформации перехода в третью — разупрочняющуюся стадию ползучести является количественным показателем для оценки живучести элементов конструкций, т.е. способности сохранять эксплуатационные свойства на стадиях накопления повреждений и макроскопического разрушения.

3. Модель кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией, апробирована на задачах растяжения стержня и кручения круглого вала с постоянной скоростью деформирования. Показано, что с увеличением скорости деформирования накопление необратимой деформации может как увеличиваться, так и падать в зависимости от свойств материала. Поиск рациональных температурно-скоростных режимов формования заготовок, обеспечивающих минимальный уровень накопления повреждений для максимального сбережения ресурса — важная задача исследования.

4. Экспериментально и численно при кручении сплошного вала показано, что после начала разрушения, конструкция может деформироваться еще продолжительное время сопоставимое со временем до начала разрушения. Оценка длительности дополнительного срока работы конструкции от начала до полного разрушения представляет актуальную проблему исследования.

5. Необходимо обобщение рассмотренной модели и разработка новых математических моделей для решения задач формообразования при обработке материалов давлением при наличии свойств анизотропии и разных свойств материала на растяжение и сжатие в условиях ползучести.

Результаты исследований главы опубликованы в журналах ВАК и WEB of Science [60; 93; 95; 224] и трудах конференций [94; 96; 102].

ГЛАВА 2. ИЗОТРОПНЫЙ МАТЕРИАЛ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1 Обзор изотропных моделей, учитывающих разные свойства на растяжение и сжатие в условиях ползучести

Свойства анизотропии материала и его разносопротивляемости при растяжении и сжатии могут возникнуть после таких процессов технологической обработки, как прокатка или прессование, а также являться следствием неоднородности материала, что характерно, например, для композитов [147;174; 212; 247]. Особенно заметно эти свойства проявляются в условиях повышенных температур. Исследования в этой области зачастую ограничиваются построением моделей, поскольку проверка моделей требует значительного объема данных экспериментов, выполняемых на специальном оборудовании продолжительное время, как правило, в печах.

Большинство моделей для изотропных разносопротивляющихся растяжению и сжатию при ползучести материалов используют степенные функции с одинаковыми показателями при растяжении и сжатии [69; 73; 74; 91; 113; 205], при этом помимо установившейся стадии ползучести могут описываться также стадии упрочнения и разупрочнения [239; 267; 284].

Для ряда сплавов экспериментально показано, что интенсивность процессов при одноосном растяжении и сжатии может отличаться и описываться степенными функциями с разными показателями для растяжения и сжатия не только на стадии установившейся ползучести [17; 97], но и на стадиях упрочнения-разупрочнения [81; 95; 101; 148; 262; 276; 286]. Для описания процессов деформирования элементов конструкций из таких изотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния на установившейся стадии ползучести можно использовать модели включающие степенные функции с разными показателями для растяжения и сжатия [9; 124; 203; 235].

В настоящей главе модель [203], использующая понятие «трансформированного» пространства напряжений и учитывающая разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию с разными степенными показателями для растяжения и сжатия, обобщается на случай упрочняющегося материала и апробируется на задачах кручения стержней в предположении установившейся ползучести и на задачах изгиба пластин из разупрочняющегося и упрочняющегося материалов.

2.2 Модель изотропного материала с разными свойствами при растяжении и сжатии, основанная на трансформированном пространстве напряжений

В работе [203] рассмотрена модель с использованием «трансформированного» пространства напряжений и учитывающая разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию, при этом степенные показатели в случаях растяжения и сжатия различны на стадиях установившейся ползучести и разупрочнения. В [12] модель обобщается на случай упрочняющегося при ползучести материала.

При описании процесса ползучести изотропных материалов с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии предполагается, что между интенсивностью скоростей деформаций ползучести и интенсивностью напряжений существует связь $\eta_i = f(\sigma_i)\sigma_i$. Это соотношение, обобщенное это на случай сложного напряженного состояния, в главных осях имеет вид

$$\eta_i = f_1(\sigma_i)\sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_1 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j > 0, \quad (2.1)$$

$$\eta_i = f_2(\sigma_i)\sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_2 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j \leq 0, \quad (2.2)$$

где λ_1, λ_2 выражаются через $f_1, f_2, \bar{\sigma}_j$ – компоненты девиатора напряжений в главных осях, $j = 1, 2, 3$.

В пространстве главных напряжений поверхность $\eta_i = \text{const}$ состоит из двух областей в виде соосных цилиндров. Один из цилиндров находится в

области, где все главные напряжения положительны, второй цилиндр располагается в области, где все главные напряжения соответственно отрицательны. Для переходной области, в которой главные напряжения разных знаков, вводится «трансформированное» пространство напряжений:

$$\Sigma_j^1 = \begin{cases} \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \mu_1 \sigma_j & \sigma_j \leq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где $\mu_1 > 0$ – некоторая функция главных напряжений, выбираемая таким образом, чтобы в «трансформированном» пространстве поверхности $\eta_i = \text{const}$ перешли в соосные цилиндры одинакового радиуса. В этом пространстве предполагается справедливой теория типа течения Мизеса. Таким образом, из (2.3) для любой области выполняется

$$\eta_i = f_1(\Sigma_i^1) \Sigma_i^1, \quad \eta_j = \lambda_1 \bar{\Sigma}_j^1, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

$$\Sigma_i^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Sigma_1^1 - \Sigma_2^1)^2 + (\Sigma_2^1 - \Sigma_3^1)^2 + (\Sigma_3^1 - \Sigma_1^1)^2},$$

где Σ_i^1 – интенсивность «трансформированных» напряжений;
 $\bar{\Sigma}_j^1 = \Sigma_j^1 - (\Sigma_1^1 + \Sigma_2^1 + \Sigma_3^1)/3$ – компоненты девиатора «трансформированных» напряжений.

В случае всестороннего сжатия при $\sigma_j \leq 0$ выполняется соотношение (2.2), а из (2.4) следует $\eta_i = f_1(\mu_1 \sigma_i) \mu_1 \sigma_i$. Из равенства этих выражений

$$f_2(\sigma_i) = f_1(\mu_1 \sigma_i) \mu_1 \quad (2.5)$$

определяется $\mu_1 = \mu_1(\sigma_i)$. Полагается, что такая зависимость справедлива при любой комбинации знаков главных напряжений. Соотношения, аналогичные (2.4) и (2.5) можно получить, взяв за основу параметры материала при сжатии, т.е. трансформировать пространство главных напряжений таким образом, чтобы поверхность $\eta_i = \text{const}$ имела радиус, соответствующий величине радиуса в области, где все главные напряжения отрицательны:

$$\eta_i = f_1(\Sigma_i^2) \Sigma_i^2, \quad \eta_j = \lambda_2 \bar{\Sigma}_j^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

$$\Sigma_j^2 = \begin{cases} \mu_2 \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \sigma_j & \sigma_j \leq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

$$f_1(\sigma_i) = f_2(\mu_2 \sigma_i) \mu_2. \quad (2.7)$$

Здесь Σ_i^2 – интенсивность «трансформированных» напряжений; $\bar{\Sigma}_j^2$ – компоненты девиатора «трансформированных» напряжений. При переходе от пространств Σ_j^1 , Σ_j^2 к пространству главных напряжений σ_j существует две поверхности с одной и той же интенсивностью напряжений, соответствующие состояниям (2.4), (2.6). Эти поверхности совпадают только в областях, где главные напряжения одного и того же знака. Условия эквивалентности (2.4) и (2.6) в переходных областях имеют вид:

$$\mu_1 \mu_2 = 1, \quad \Sigma_j^1 = \mu_1 \Sigma_j^2, \quad \Sigma_j^2 = \mu_2 \Sigma_j^1 \quad \text{и} \quad \Sigma_i^1 = \mu_1 \Sigma_i^2, \quad \Sigma_i^2 = \mu_2 \Sigma_i^1.$$

Теперь равенства (2.5), (2.7) для определения μ_1 и μ_2 запишутся в виде

$$\mu_1 f_1(\Sigma_i^1) = f_2\left(\frac{\Sigma_i^1}{\mu_1}\right), \quad \mu_2 f_2(\Sigma_i^2) = f_1\left(\frac{\Sigma_i^2}{\mu_2}\right). \quad (2.8)$$

В случае описания ползучести зависимостями (2.1), (2.2), где $f_1(\sigma_i) = B_+ \sigma_i^{n_+ - 1}$, $f_2(\sigma_i) = B_- \sigma_i^{n_- - 1}$, B_+, n_+ и B_-, n_- – константы материала при растяжении и сжатии соответственно, из (2.8) определяются величины μ_1 и μ_2

$$\mu_1 = \left(\frac{B_-}{B_+}\right)^{\frac{1}{n_-}} (\Sigma_i^1)^{\frac{n_- - n_+}{n_-}}, \quad \mu_2 = \left(\frac{B_+}{B_-}\right)^{\frac{1}{n_+}} (\Sigma_i^2)^{\frac{n_+ - n_-}{n_+}}. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.3), (2.4) можно обобщить на случай разнсопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести материала с учетом параметра поврежденности [99; 203], когда процессы ползучести и накопления повреждений рассматриваются как единый процесс и описываются одним уравнением со скалярным параметром поврежденности, который отождествляется с нормированной удельной работой рассеяния при ползучести [191]. В этом случае для пространственного напряженного состояния в главных осях имеем:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_+ \sigma_i^{n_++1}}{(A_* - A)^{m_+}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_+ \sigma_i^{n_++1}}{A_*^{m_++1} (1-\omega)^{m_+}}, \quad \eta_j = \lambda_1 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j > 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_- \sigma_i^{n_-+1}}{(A_* - A)^{m_-}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_- \sigma_i^{n_-+1}}{A_*^{m_-+1} (1-\omega)^{m_-}}, \quad \eta_j = \lambda_2 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j \leq 0, \quad (2.11)$$

m_+ и m_- – константы материала при растяжении и сжатии соответственно, $j=1,2,3$. После проведения преобразований аналогичных преобразованиям, изложенным выше, для одновременного учета свойств растяжения и сжатия разупрочняющегося материала получаются следующие соотношения:

$$\eta_i = \frac{B_+ (\Sigma_i^1)^{n_+}}{A_*^{m_+} (1-\omega)^{m_+}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_+ (\Sigma_i^1)^{n_++1}}{A_*^{m_++1} (1-\omega)^{m_+}}, \quad (2.12)$$

$$\eta_j = \lambda_1 \bar{\Sigma}_j^1, \quad \Sigma_j^1 = \begin{cases} \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \mu_1 \sigma_j & \sigma_j \leq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\mu_1 = \left(\frac{B_-}{B_+} \right)^{1/n_-} A_*^{(m_+ - m_-)/n_-} (1-\omega)^{(m_+ - m_-)/n_-} (\Sigma_i^1)^{(n_- - n_+)/n_-}$.

Если процесс ползучести при одноосном нагружении хорошо описывается зависимостью типа деформационного упрочнения [184]

$$\eta = \dot{\varepsilon}^c = \varepsilon^{-\alpha} B \sigma^n, \quad (2.14)$$

α – параметр упрочнения, B и n – параметры, соответствующие стадии установившейся ползучести, то можно также выписать соотношения [12], учитывающие разнсопротивляемость при растяжении и сжатии материала на основе методики, основанной на «трансформированном» пространстве напряжений. Если вместо (2.1), (2.2) выполняется

$$\eta_i = \dot{\varepsilon}_i^c = f_1(\varepsilon_i^c, \sigma_i) \sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_1 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j > 0, \quad j=1,2,3;$$

$$\eta_i = \dot{\varepsilon}_i^c = f_2(\varepsilon_i^c, \sigma_i) \sigma_i, \quad \eta_j = \lambda_2 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j \leq 0, \quad j=1,2,3.$$

то для любой области следует

$$\dot{\varepsilon}_i^c = f_1(\varepsilon_i^c, \Sigma_i^1) \Sigma_i^1, \quad \dot{\varepsilon}_j^c = \lambda_1 \bar{\Sigma}_j^1, \quad (2.15)$$

или

$$\dot{\varepsilon}_i^c = f_2(\varepsilon_i^c, \Sigma_i^2) \Sigma_i^2, \quad \dot{\varepsilon}_j^c = \lambda_2 \bar{\Sigma}_j^2.$$

Выражения (2.8) заменяются на следующие

$$\mu_1 f_1(\varepsilon_i^c, \Sigma_i^1) = f_2\left(\varepsilon_i^c, \frac{\Sigma_i^1}{\mu_1}\right), \quad \mu_2 f_2(\varepsilon_i^c, \Sigma_i^2) = f_1\left(\varepsilon_i^c, \frac{\Sigma_i^2}{\mu_2}\right). \quad (2.16)$$

Если выполняется

$$\frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \frac{B_+ \sigma_i^{n_+}}{(\varepsilon_i^c)^{\alpha_+}}, \quad \eta_j = \lambda_1 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j > 0, \quad j=1,2,3 \quad (2.17)$$

$$\frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \frac{B_- \sigma_i^{n_-}}{(\varepsilon_i^c)^{\alpha_-}}, \quad \eta_j = \lambda_2 \bar{\sigma}_j, \quad \sigma_j \leq 0, \quad j=1,2,3, \quad (2.18)$$

то из условия (2.16) находится

$$\mu_1 = \left(\frac{B_-}{B_+}\right)^{\frac{1}{n_-}} (\Sigma_i^1)^{\frac{n_- - n_+}{n_-}} (\varepsilon_i^c)^{\frac{\alpha_+ - \alpha_-}{n_-}}, \quad (2.19)$$

$$\mu_2 = \left(\frac{B_+}{B_-}\right)^{\frac{1}{n_+}} (\Sigma_i^2)^{\frac{n_+ - n_-}{n_+}} (\varepsilon_i^c)^{\frac{\alpha_- - \alpha_+}{n_+}},$$

α_+ и α_- – константы, характеризующие упрочнение материала при растяжении и сжатии соответственно. Несмотря на то, что модель рассмотренная в работе [203] давно известна, ее апробация фактически отсутствует.

2.2.1 Кручение круглого сплошного стержня в условиях установившейся ползучести

Рассматривается кручение постоянным моментом сплошного стержня с круглым поперечным сечением. В цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с осью стержня, ось r направлена вдоль радиуса поперечного сечения стержня, а ось φ совпадает с тангенциальным направлением к радиусу, напряжения равны

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = \tau. \quad (2.20)$$

В системе координат, оси которой совпадают с направлением главных напряжений, одно напряжение является растягивающим, а другое – сжимающим:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau. \quad (2.21)$$

Вектор направляющих косинусов между направлениями r, φ, z и главным направлением 1 имеет вид $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, направлением 2 – $(1, 0, 0)$, направлением 3 – $(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

На рисунке 2.1. приведена схема кручения круглого стержня постоянным моментом и указаны направления главных напряжений в элементарном объеме материала. Поскольку при кручении стержня главные напряжения имеют разные знаки, для описания деформирования необходимо использовать модели, учитывающие разнсопротивляемость растяжению и сжатию. Для сравнения рассмотрим две модели такого материала, построенных с использованием «трансформированного» пространства напряжений.

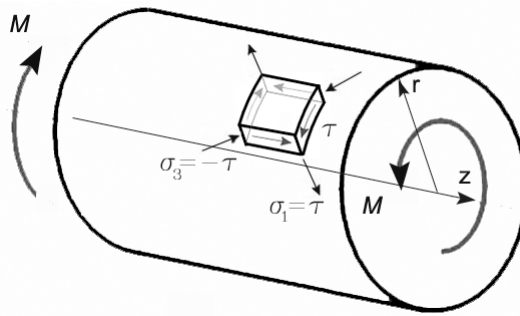


Рисунок 2.1 – Схема кручения стержня

Модель 1. Согласно модели 1 компоненты скоростей деформаций ползучести в главных осях имеют вид [69]:

$$\eta_j = \frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S_{\Delta}}{\partial \sigma_{\Delta j}}, \quad j=1,2,3. \quad (2.22)$$

Здесь $S_I = ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/6$,

$S_{\Delta} = ((\sigma_{\Delta 1} - \sigma_{\Delta 2})^2 + (\sigma_{\Delta 2} - \sigma_{\Delta 3})^2 + (\sigma_{\Delta 3} - \sigma_{\Delta 1})^2)/6$,

константа n в модели 1 не зависит от вида напряженного состояния.

Интенсивность напряжений $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}_{kl}/2)^{0,5}$, где $\bar{\sigma}_{kl}$ ($k=1,2,3, l=1,2,3$) –

компоненты девиатора напряжений, связана с S_I выражением $\sigma_i = \sqrt{3S_I}$. Для

описания среды с различными свойствами при растяжении и сжатии

рассматриваются обобщенные «трансформированные» компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{\Delta j} = \begin{cases} B_+ \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ B_- \sigma_j & \sigma_j < 0, \end{cases} \quad j=1,2,3,$$

где B_+ , B_- – константы материала при растяжении и сжатии соответственно.

Для области, в которой $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$ из (2.22) следует

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \left(\bar{\sigma}_1 + \frac{1-\nu_1}{3} \sigma_3 \right), \quad \eta_2 = (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \left(\bar{\sigma}_2 + \frac{1-\nu_1}{3} \sigma_3 \right), \\ \eta_3 &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \left(\bar{\sigma}_3 - \frac{2(1-\nu_1)}{3} \sigma_3 \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\nu_1 = B_- / B_+$; $\bar{\sigma}_j$ ($j=1,2,3$) – компоненты девиатора напряжений в главных осях. С учетом (2.21) компоненты (2.23) записываются в виде

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\sqrt{3})^{n+1} B_+ (2 + \nu_1) \tau^n / 6, \quad \eta_2 = (\sqrt{3})^{n+1} B_+ (\nu_1 - 1) \tau^n / 6, \\ \eta_3 &= -(\sqrt{3})^{n+1} B_+ (2\nu_1 + 1) \tau^n / 6. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На основе формул преобразования компонент тензоров напряжений и деформаций при переходе от одной ортогональной системы координат к другой компоненты скорости деформаций ползучести в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_r &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \left(\bar{\sigma}_r + \frac{1-\nu_1}{3} (1 - 3n_1^2) \sigma_3 \right), \\ \eta_{r\varphi} &= (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+}{2} S_I^{\frac{n-1}{2}} \left(\tau_{r\varphi} + (1-\nu_1) n_1 n_2 \sigma_3 \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $S_I = ((\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{rz}^2)) / 6$,

$$\sigma_3 = n_1^2 \sigma_r + n_2^2 \sigma_\varphi + n_3^2 \sigma_z + 2n_1 n_2 \tau_{r\varphi} + 2n_2 n_3 \tau_{\varphi z} + 2n_3 n_1 \tau_{rz},$$

n_1, n_2, n_3 – компоненты вектора направляющих косинусов между осями r, φ, z и главным направлением 3. Невыписанные соотношения (2.25) можно получить путем круговой перестановки r, φ, z и направляющих косинусов n_1, n_2, n_3 . Величины $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_z$ – компоненты девиатора

напряжений в цилиндрической системе координат. С учетом (2.20), зависимости (2.25) записываются в виде

$$\eta_r = -(\sqrt{3})^{n+1} B_+ \frac{1-\nu_1}{6} \tau^n, \quad \eta_\varphi = \eta_z = (\sqrt{3})^{n+1} B_+ \frac{1-\nu_1}{12} \tau^n, \quad (2.26)$$

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{2} \xi_{r\varphi} = 0, \quad \eta_{rz} = \frac{1}{2} \xi_{rz} = 0, \quad \eta_{\varphi z} = \frac{1}{2} \xi_{\varphi z} = (\sqrt{3})^{n+1} B_+ \frac{1+\nu_1}{4} \tau^n. \quad (2.27)$$

Из (2.26) следует, что разнсопротивляемость материала при кручении стержня приводит к возникновению деформаций растяжения вдоль оси стержня и сжатия в направлении радиуса поперечного сечения. В цилиндрической системе координат выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести $\eta_i = (2\bar{\eta}_{kl}\bar{\eta}_{kl}/3)^{0.5}$, где $\bar{\eta}_{kl}$ -компоненты девиатора скоростей деформаций ползучести, имеет вид:

$$\eta_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left((\eta_r - \eta_\varphi)^2 + (\eta_\varphi - \eta_z)^2 + (\eta_z - \eta_r)^2 + \frac{3}{2} (\xi_{r\varphi}^2 + \xi_{\varphi z}^2 + \xi_{rz}^2) \right)^{1/2}. \quad (2.28)$$

Из (2.26) – (2.28) следует

$$\eta_i = (\sqrt{3})^n B_+ \tau^n \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_1 + 1)/3}. \quad (2.29)$$

Если предположить, что несдвиговые компоненты скоростей деформаций ползучести (2.26) малы, то из (2.27), (2.28) следует

$$\eta_i^{sh} = (\sqrt{3})^n B_+ \tau^n (1 + \nu_1)/2. \quad (2.30)$$

Вклад несдвиговых компонент в процесс деформирования можно оценить, используя отношение

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^{sh}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_1 + 1}}{1 + \nu_1}. \quad (2.31)$$

Модель 2 основана на соотношениях (2.3), (2.4). Предполагается, что поведение материала при растяжении и сжатии описывается степенными функциями $f_1(\sigma_i) = B_+ \sigma_i^{n_+-1}$, $f_2(\sigma_i) = B_- \sigma_i^{n_- -1}$, B_+, n_+ и B_-, n_- – константы материала при растяжении и сжатии соответственно. В случае $n_+ \neq n_-$ решение задачи кручения стержня можно получить только численными

методами. Рассматривается случай $n_+ = n_-$, тогда выражения (2.9)

упрощаются: $\mu_1 = (B_-/B_+)^{\frac{1}{n}}$, $\mu_2 = (B_+/B_-)^{\frac{1}{n}}$. Учитывая (2.21), аналогично (2.24) для компонент скоростей деформаций ползучести (2.4) следует

$$\eta_1 = \frac{B_+}{2} \Sigma_i^{n-1} (2 + \mu_1) \tau, \quad \eta_2 = \frac{B_+}{2} \Sigma_i^{n-1} (\mu_1 - 1) \tau, \quad \eta_3 = -\frac{B_+}{2} \Sigma_i^{n-1} (1 + 2\mu_1) \tau, \quad (2.32)$$

$$\Sigma_i = \Sigma_i^1 = \tau \sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}. \quad (2.33)$$

С использованием формул преобразования для перехода от системы координат, направления осей которой совпадают с направлениями главных осей, к цилиндрической системе (r, φ, z) компоненты тензора скоростей деформаций ползучести запишутся в виде

$$\eta_r = B_+ \Sigma_i^{n-1} \frac{\mu_1 - 1}{2} \tau, \quad \eta_\varphi = \eta_z = B_+ \Sigma_i^{n-1} \frac{1 - \mu_1}{4} \tau, \quad (2.34)$$

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{2} \xi_{r\varphi} = 0, \quad \eta_{rz} = \frac{1}{2} \xi_{rz} = 0, \quad \eta_{\varphi z} = \frac{1}{2} \xi_{\varphi z} = B_+ \Sigma_i^{n-1} \frac{3(\mu_1 + 1)}{4} \tau. \quad (2.35)$$

После подстановки (2.34), (2.35) в (2.28) определяется

$$\eta_i = B_+ \tau^n \left(\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1} \right)^n. \quad (2.36)$$

Если предположить, что скорости деформаций ползучести (2.34) малы, то из (2.28), (2.35) следует

$$\eta_i^{sh} = B_+ \tau^n \sqrt{3} \left(\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1} \right)^{n-1} (1 + \mu_1) / 2. \quad (2.37)$$

Аналогично (2.31) для модели 2 из (2.36), (2.37) имеем

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^{sh}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}}{1 + \mu_1}. \quad (2.38)$$

Отношения (2.31) и (2.38) можно записать в общем виде

$$\frac{\eta_i}{\eta_i^{sh}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{(\nu_g^2 + \nu_g + 1)}}{(1 + \nu_g)}, \quad (2.39)$$

где $\nu_g = \nu_1 = B_- / B_+$ для модели 1 и $\nu_g = \mu_1 = (B_- / B_+)^{\frac{1}{n}}$ для модели 2.

Использование метода характеристических параметров в случае кручения сплошного круглого стержня. В случае кручения круглого стержня радиуса R постоянным моментом M с течением времени распределение σ_i вдоль направления r меняется. В окрестности характеристической точки $\hat{r} = 3/(4R)$ [132] значение σ_i не изменяется с течением времени и равно значению напряжения в этой точке в момент нагрузки. При кручении сплошных круглых стержней постоянным моментом выполняется

$$\xi_{\varphi z} = r\theta, \quad M = 2\pi \int_0^R \tau_{\varphi z} r^2 dr, \quad (2.40)$$

где $0 \leq r \leq R$; R – радиус поперечного сечения стержня; θ – скорость изменения погонного угла закручивания. В случае установившейся ползучести из (2.40) и (2.27) или (2.35) следует

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau = \frac{\sqrt{3}M r^{1/n}}{J_n}, \quad (2.41)$$

где $J_n = 2\pi \int_0^R r^{2+1/n} dr$ – обобщенный полярный момент инерции поперечного

сечения. Для того чтобы определить координату характеристической точки, необходимо приравнять интенсивности напряжений (2.41) при упругом нагружении ($n=1$) и в состоянии установившейся ползучести:

$$\hat{\sigma}_i = \frac{\sqrt{3}M \hat{r}^{1/n}}{J_n} = \frac{\sqrt{3}M \hat{r}}{J_1}. \quad (2.42)$$

Символ « $\cap$ » соответствует величинам в характеристической точке. Из (2.42) следует $\hat{r} = (J_1/J_n)^{n/(n-1)}$. При построении диаграмм на кручение можно использовать координату характеристической точки, которая находится в области пересечения диаграмм упругого и идеально пластического деформирования ($n \rightarrow \infty$):

$$\hat{r} = 3R/4, \quad \hat{\sigma}_i = \sqrt{3} \frac{3M}{2\pi R^3}. \quad (2.43)$$

В случае изотропного материала с одними и теми же свойствами при растяжении и сжатии ($B_+ = B_- = B$) интенсивность скоростей деформаций ползучести в характеристической точке определяется по формуле

$$\hat{\eta}_i = \hat{\xi}_{\varphi z} / \sqrt{3} = \sqrt{3} R \theta / 4, \quad (2.44)$$

причем $\hat{\eta}_i = B \hat{\sigma}_i^n$. В случае материала с различными свойствами при растяжении и сжатии интенсивность скоростей деформаций ползучести в характеристической точке для модели 1 определяется из (2.29)

$$\hat{\eta}_i = B_+ \hat{\sigma}_i^n \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_1 + 1)/3}, \quad (2.45)$$

а для модели 2 – из (2.36)

$$\hat{\eta}_i = B_+ \hat{\sigma}_i^n \left(\sqrt{(\mu_1^2 + \mu_1 + 1)/3} \right)^n. \quad (2.46)$$

Пренебрегая вкладом компонент $\eta_r, \eta_\varphi, \eta_z$ в интенсивность скоростей деформаций ползучести, с учетом (2.31), (2.37) соответственно получаем выражения для интенсивности скоростей деформаций в характеристической точке для моделей 1 и 2 соответственно

$$\hat{\eta}_i^{sh} = B_+ \hat{\sigma}_i^n (1 + \nu_1) / 2, \quad (2.47)$$

$$\hat{\eta}_i^{sh} = B_+ \hat{\sigma}_i^n \left(\sqrt{(\mu_1^2 + \mu_1 + 1)/3} \right)^{n-1} (1 + \mu_1) / 2. \quad (2.48)$$

В работе [17] представлены данные экспериментов на растяжение, сжатие и кручение при температуре $T=700$ °С сплошных круглых образцов из сплава Ti-Al-Sn-V (аналог сплава марки ВТ5-1), вырезанных из плиты толщиной 60 мм. Эксперименты на растяжение и сжатие образцов, вырезанных в различных направлениях относительно направления проката, показали, что сплав обладает незначительной анизотропией и разнсопротивляемостью растяжению и сжатию при ползучести (испытания и обработка экспериментальных данных выполнены А.Ю. Ларичкиным). Данные этих экспериментов изображены на рисунке 2.2 в виде зависимости логарифма интенсивности скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии

от логарифма интенсивности напряжений $\ln(\eta_i) - \ln(\sigma_i)$. При кручении интенсивность скоростей деформаций ползучести вычислялась по углу закручивания, определенному в эксперименте при этом деформации растяжения вдоль оси стержня и деформации сжатия вдоль радиуса поперечного сечения полагались малыми и не учитывались.

С использованием результатов каждой серии экспериментов на растяжение и сжатие образцов, вырезанных из плиты в различных направлениях, получены параметры зависимости $\dot{\epsilon} = \eta = B\sigma^n$ на установившейся стадии ползучести (таблица 2.1). Показатель ползучести при растяжении и сжатии образцов, вырезанных в различных направлениях, был осреднен и принят равным $n=3,92$. Затем с использованием метода наименьших квадратов найдены значения B для каждого направления. Анализ результатов испытаний, представленных на рисунке 2.2 и в таблице 2.1, позволяет сделать вывод, что влияние анизотропии материала на скорость установившейся ползучести сплава Ti-Al-Sn-V при $T=700\text{ }^{\circ}\text{C}$ менее значительно, чем влияние разнсопротивляемости растяжению и сжатию, поэтому значения параметра B для образцов, вырезанных из плиты в различных направлениях, были также осреднены и составили $B_+ = 4,523 \cdot 10^{-10} \text{ МПа}^{-n}/\text{ч}$ в случае растяжения и $B_- = 5,836 \cdot 10^{-11} \text{ МПа}^{-n}/\text{ч}$ в случае сжатия.

Сравнительный анализ моделей, учитывающих разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию. Для сравнительного анализа моделей 1 и 2, учитывающих разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию при ползучести, проведена серия экспериментов на кручение постоянным моментом при температуре $T=700\text{ }^{\circ}\text{C}$ сплошных круглых стержней из сплава Ti-Al-Sn-V, вырезанных в направлении нормали плиты толщиной 60 мм [17].

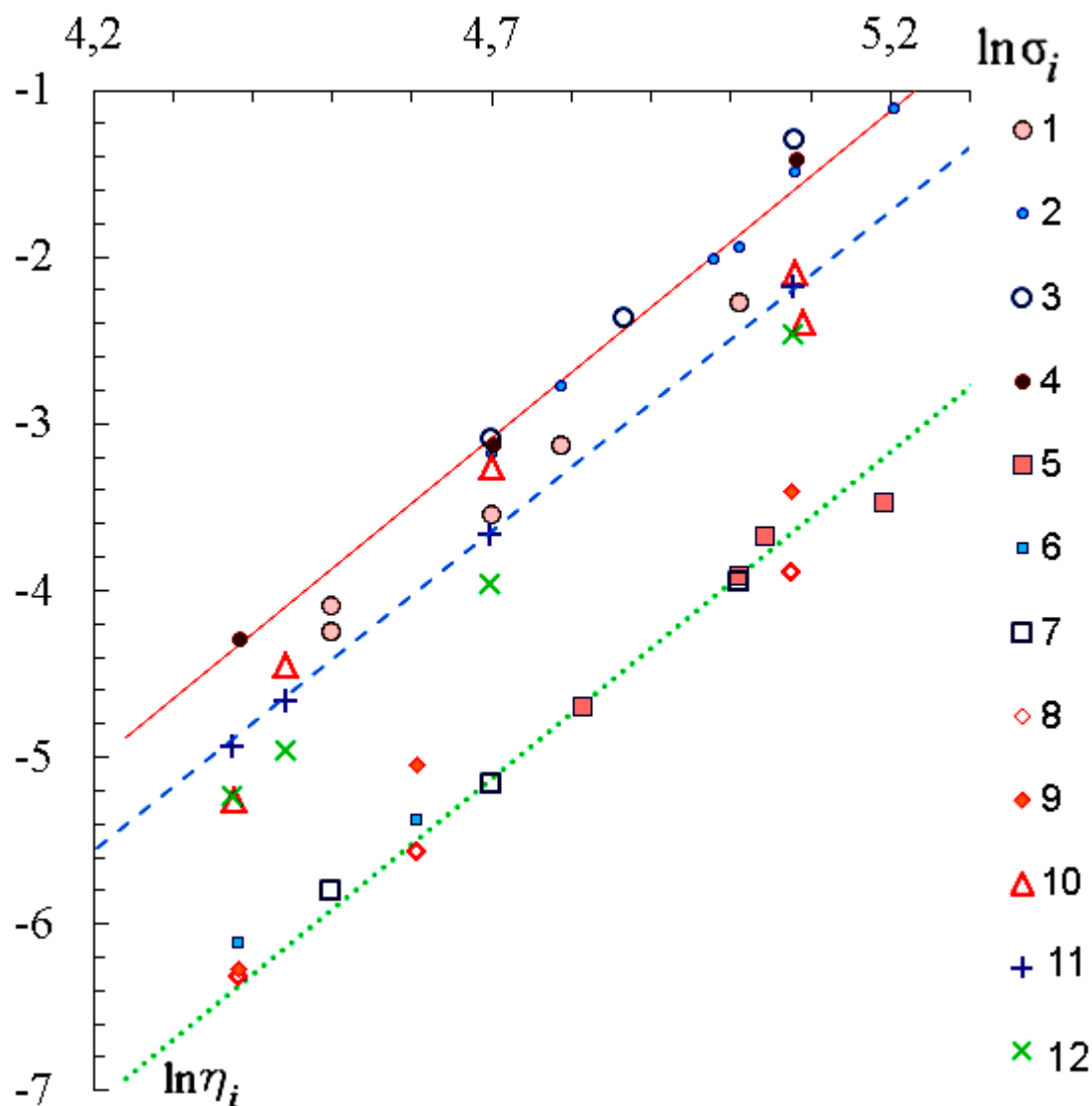


Рисунок 2.2 – Зависимость интенсивности скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии от интенсивности напряжений в двойных логарифмических координатах, которые получены по данным испытаний: 1–4 – растяжение (1 – вдоль направления проката плиты, 2 – поперек направления проката, 3 – по нормали к плите, 4 – под углом к нормали плиты 45°), 5–9 – сжатие (5 – вдоль направления проката плиты, 6 – поперек направления проката, 7 – по нормали к плите, 8 – под углом к нормали плиты 45° вдоль направления проката, 9 – под 45° к нормали плиты поперек направления проката, 10 – кручение образцов, вырезанных по нормали к плите, 11 – аппроксимация с использованием модели 1, 12 – аппроксимация с использованием модели 2; линиями показаны аппроксимации с осредненными значениями параметров B , n (сплошная линия – растяжение, пунктирная – сжатие), штриховая линия – аппроксимация экспериментов на кручение методом наименьших квадратов

Таблица 2.1 – Значения параметров модели установившейся ползучести для образцов из сплава Ti-Al-Sn-V, вырезанных из плиты толщиной $h=60$ мм в различных направлениях относительно направления проката

Тип нагружения	Направление анизотропии относительно направления проката плиты	$B \cdot 10^{10}$, МПа ⁻ⁿ /ч	n	$B_* \cdot 10^{10}$, МПа ⁻ⁿ /ч
Растяжение	По нормали	5,617	4,73	0,098
Растяжение	Поперек	3,803	4,76	0,072
Растяжение	Под углом к нормали 45°	5,617	4,12	1,921
Растяжение	Вдоль	3,052	3,83	7,227
Сжатие	Под углом к нормали 45° поперек проката	0,510	3,51	3,647
Сжатие	Под углом к нормали 45° вдоль проката	0,510	3,87	1,004
Сжатие	Вдоль	0,633	3,34	10,15
Сжатие	Поперек	0,633	3,50	17,49
Сжатие	По нормали	0,633	3,65	2,162

Примечание. B - коэффициент в зависимости $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$ при среднем значении n ; B_* - коэффициент зависимости $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$ при значениях n , соответствующих различным направлениям, в которых вырезались образцы.

На рисунке 2.3 показан вырезанный по нормали к плите образец после кручения. Следует отметить, что на поверхностях всех исследованных образцов, вырезанных по нормали к плите, имеются полосы, ортогональные оси образца. По-видимому, это обусловлено слоистостью структуры, а также свойством трансверсальной изотропии плиты, возникающей в процессе ее проката.

В таблице 2.2 для каждого образца, вырезанного по нормали к плите, приведены значения интенсивности напряжений в характеристической точке $\bar{\sigma}_i$, вычисленные по формуле (2.42), приложенного крутящего момента M , длина L и радиус R рабочей части, длительность эксперимента t_* , угол закручивания в момент завершения испытания α_{L*} . В целом, для исследуемого сплава Ti-Al-Sn-V после стадии установившейся ползучести наблюдалась стадия разупрочнения материала. На рисунке 2.4 приведены

экспериментальные зависимости угла закручивания от времени $\alpha_L = \theta L t$ на стадии установившейся ползучести материала. Номера кривых соответствуют номерам экспериментов в таблице 2.2.

На рисунке 2.2 точками 11, 12 показаны зависимости $\ln(\hat{\sigma}_i) - \ln(\hat{\eta}_i^{sh})$, вычисленные по формулам (2.47) для модели 1 и (2.48) для модели 2 соответственно. Вклад несдвиговых компонент (растяжения в направлении оси образца и сжатия в поперечном направлении) можно оценить по формуле (2.39). С учетом полученных осредненных констант ползучести при растяжении и сжатии образцов и отношения $B_+ / B_- = 7,75$, для модели 1 этот вклад составляет 9,5 %, для модели 2 – 1,1 %. Из выражения (2.39), следует, что при $B_- < B_+$ с увеличением показателя степени ($n \rightarrow \infty$) для модели 2 отношение $\eta_i / \eta_i^{sh} \rightarrow 1$. Для модели 1 отношение η_i / η_i^{sh} не зависит от n . Соответственно для модели 2 зависимости $\ln(\hat{\sigma}_i) - \ln(\hat{\eta}_i)$ и $\ln(\hat{\sigma}_i) - \ln(\hat{\eta}_i^{sh})$, рассчитанные по формулам (2.46), (2.48), различаются незначительно. При расчете по формулам (2.45), (2.47) для модели 1 указанные зависимости различаются более существенно. Оценку для компоненты скорости деформации ползучести в направлении оси z можно получить, если переписать (2.26), (2.34) с учетом (2.33), (2.41) в виде

$$\eta_z = \left(\sqrt{3}\right)^{n+1} B_+ \frac{1-\nu_1}{12} \left(\frac{M_z}{J_n}\right)^n r, \quad (2.49)$$

$$\eta_z = B_+ \left(\sqrt{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}\right)^{n_1-1} \frac{1-\mu_1}{4} \left(\frac{M_z}{J_n}\right)^n r. \quad (2.50)$$

Таблица 2.2 – Результаты испытаний на кручение образцов, вырезанных по нормали к плите при $T=700$ °C

Номер эксперимента	M , Н·м	$\hat{\sigma}_i$, МПа	t_* , ч	α_{L*} , рад	L , мм	R , мм
1	168,0	162,6	0,75	0,60	28,85	9,49
2	166,9	161,0	1,07	0,91	27,93	9,50
3	113,9	110,2	6,32	0,20	26,17	9,49
4	86,7	85,0	18,85	1,75	27,93	9,45
5	82,7	79,6	21,58	3,15	29,11	9,51

При $M_z = 166,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $t = 1 \text{ ч}$ деформация $\varepsilon_z^c = \eta_z t$ в характеристической точке и на контуре поперечного сечения, вычисленная по формуле, (2.49) составляет 2,6 % и 3,5 % соответственно, деформация, рассчитанная по формуле (2.50), – 0,7 % и 0,9 % соответственно. Следует отметить, что часть экспериментов на кручение, представленные на рисунке 2.2 более точно описывает модель 1, другую часть более точно описывает модель 2, однако измерение длины образцов после испытаний показало, что их удлинение является незначительным и более точно определяется с использованием модели 2. В целом для образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, соответствие между экспериментальными данными и результатами расчетов по моделям 1 и 2 является удовлетворительным.

На рисунке 2.5 представлен закрученный постоянным моментом образец, вырезанный вдоль направления проката плиты. Наличие на поверхности винтовых полос свидетельствует о слоистости структуры плиты, возникающей при ее прокате. Такой характер полос, появляющихся при кручении, наблюдался для всех образцов, вырезанных вдоль или поперек направления проката плиты. Винтовой характер линий также говорит о том, что в процессе кручения происходит смещение точек поперечного сечения в направлении оси стержня (депланация сечения) и материал обладает анизотропными свойствами [13; 225], которые наряду со свойствами разносопротивляемости растяжению и сжатию необходимо учитывать.



Рисунок 2.3 – Образец из сплава Ti-Al-Sn-V, вырезанный в направлении нормали из плиты толщиной 60 мм, после кручения постоянным моментом при температуре $T = 700 \text{ }^{\circ}\text{C}$

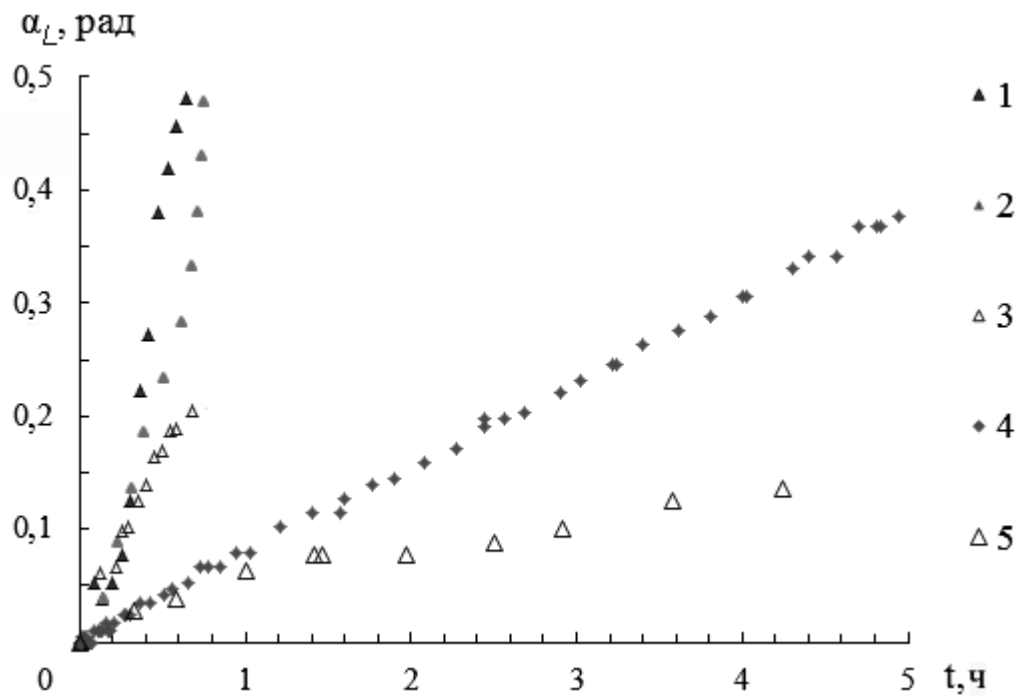


Рисунок 2.4 – Зависимость угла закручивания от времени образцов из сплава Ti-Al-Sn-V при $T=700\text{ }^{\circ}\text{C}$: 1 – 5 — номера экспериментов (см. таблице 2.2)



Рисунок 2.5 – Образец из сплава Ti-Al-Sn-V, вырезанный в продольном направлении из плиты толщиной 60 мм, после кручения постоянным моментом при температуре $T=700\text{ }^{\circ}\text{C}$

Таким образом, проведено моделирование кручения сплошных круглых образцов в предположении установившейся ползучести материала с использованием двух моделей, основанных на «трансформированном» пространстве напряжений, учитывающих разнсопротивляемость растяжению и сжатию при ползучести. Для описания поведения закручиваемого стержня развит подход с использованием характеристической точки, в которой значения напряжений не меняются в течение всего процесса деформирования. Показано, что учет

разносопротивляемости материала растяжению и сжатию приводит при кручении к удлинению вдоль оси образца и сжатию в направлении радиуса. Выполнена оценка этих деформаций. Результаты расчетов по моделям дали удовлетворительное соответствие с данными испытаний на кручение сплошных круглых стержней, вырезанных в направлении нормали плиты из сплава Ti-Al-Sn-V при температуре $T=700^{\circ}\text{C}$. Для этого сплава из испытаний на растяжение и сжатие в условиях ползучести установлено, что скорость деформирования при растяжении отличается от скорости деформирования при сжатии почти на порядок.

2.2.2 Кручение пластины из разупрочняющегося сплава

В работе [99] на примере задачи изгиба (кручения) пластины в предположении плоского напряженного состояния проводится апробация модели (2.10)–(2.13) для разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести материала с учетом параметра поврежденности [191], который отождествляется с нормированной удельной работой рассеяния при ползучести.

Задача изгиба квадратной пластины в седлообразную поверхность равномерно-распределенными моментами разных знаков $M_1 = -M_2 = M$, приложенными в двух взаимно-перпендикулярных направлениях x_1 и x_2 (рисунок 2.6) эквивалентна задаче кручения пластины внешним скручивающим моментом M , равномерно приложенным вдоль ее кромок. Такое кручение пластины можно реализовать путем приложения в углах четырех сил величиной $2M$ [15; 35; 170; 223]. Схема экспериментальной установки, реализующей кручение квадратных пластин постоянной толщины, приведена в [100].

Предполагается, что в начальный момент пластина деформируется упруго, поверхности изгиба совпадают со срединной поверхностью и прогиб

мал в сравнении с толщиной. С учетом гипотезы прямых нормалей для полных деформаций в главных осях имеем систему уравнений

$$(\sigma_1 - \nu\sigma_2)/E + \varepsilon_1^c = \chi_1(z + \delta_1), \quad (\sigma_2 - \nu\sigma_1)/E + \varepsilon_2^c = \chi_2(z + \delta_2). \quad (2.51)$$

Здесь χ_i - главные кривизны, $-h/2 \leq z \leq h/2$, δ_i - смещения поверхностей изгиба (где одно из главных напряжений обращается в нуль) от срединной поверхности вследствие разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию при ползучести, E - модуль упругости одинаков при растяжении и сжатии, ν - коэффициент Пуассона.

Интегральные уравнения для моментов

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (z + \delta_1)\sigma_1 dz, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} (z + \delta_2)\sigma_2 dz. \quad (2.52)$$

Поскольку $\varepsilon_1^c(z) = \varepsilon_2^c(-z) = \varepsilon^c(z)$, $\delta_1 = -\delta_2 = \delta$, $\chi_1 = -\chi_2 = \chi$, $\sigma_1(z) = \sigma_2(-z) = \sigma(z)$, то после ряда преобразований (2.51), интегрирования

по толщине пластины, а также учитывая, что $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz = 0$ определяются

кривизна, смещение и напряжение [188]

$$\chi = \left(M(1+\nu)/E + \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^c(z)(z + \delta) dz \right) / \left(\frac{h^3}{12} + \delta^2 h \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \right), \quad (2.53)$$

$$\delta = \frac{(1-\nu)}{\chi h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^c(z) dz, \quad (2.54)$$

$$\sigma = E((\chi(z + \delta) - \nu\chi(z - \delta) - \varepsilon^c(z) - \nu\varepsilon^c(-z))/(1-\nu^2). \quad (2.55)$$

Скорости деформаций ползучести (2.12) в случае плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$, ось z совпадает с направлением 3) перепишутся в виде

$$\frac{d\varepsilon_1^c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{B_+(\Sigma_i)^{n_+-1}}{A_*^{m_+}(1-\omega)^{m_+}} (2\Sigma_1(z) - \Sigma_2(z)), \quad \frac{d\varepsilon_2^c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{B_+(\Sigma_i)^{n_+-1}}{A_*^{m_+}(1-\omega)^{m_+}} (2\Sigma_2(z) - \Sigma_1(z)),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_+(\Sigma_i^1)^{n_++1}}{A_*^{m_++1}(1-\omega)^{m_+}}, \quad (2.56)$$

где $\Sigma_i = \Sigma_i^1 = \left((\Sigma_1(z))^2 + (\Sigma_2(z))^2 - \Sigma_1(z)\Sigma_2(z) \right)^{1/2}$, $\Sigma_j^1 = \begin{cases} \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \mu_1 \sigma_j & \sigma_j \leq 0, \end{cases}$

$$\mu_1 = \left(\frac{B_-}{B_+} \right)^{1/n_-} A_*^{(m_+ - m_-)/n_-} (1 - \omega)^{(m_+ - m_-)/n_-} (\Sigma_i)^{(n_- - n_+)/n_-}.$$

К системе (2.53) – (2.56) добавляются начальные условия, толщина пластины разбивается на равные интервалы. В точках разбиения решается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени относительно деформаций и напряжений методом Рунге-Кутты-Мерсона [146].

Расчеты проводились для пластины из сплава АК4-1 (Al-Cu-Mg-Fe-Ni) при температуре $T=200^\circ\text{C}$ с использованием следующих параметров материала: $n_+ = n_- = 8$, $m_+ = 7$, $m_- = 2$, $B_+ = 0,45 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{m_+ - n_+} / \text{ч}$, $B_- = 0,29 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{m_- - n_-} / \text{ч}$, $E = 7000 \text{ кГ/мм}^2$, $\nu = 0,4$, $A_* = 1 \text{ кГ} \cdot \text{мм/мм}^3$ [188]. Размеры пластины $200 \times 200 \text{ мм}$, толщина $h=20 \text{ мм}$, $M=925 \text{ кГ} \cdot \text{мм/мм}$ (толщина плиты, из которой вырезалась пластина – 42 мм). На рисунке 2.7 изображено распределение напряжений в диагональном направлении по толщине пластины на различные моменты времени практически вплоть до разрушения. Линии 1-6 соответствуют $t = 0; 50; 250; 500; 600; 650 \text{ ч}$. Из графиков видно, что пластина несет внешнюю нагрузку в основном за счет сжимающих волокон. На рисунке 2.8 изображены результаты расчетов кривизны в направлении диагонали до достижения $\omega \approx 0,9$ (сплошная линия) и экспериментальные данные (точки). Штриховая и пунктирная линии на рисунке 2.8 – расчет с параметрами только на растяжение и только на сжатие. Кривизна вычислялась по замерам прогиба w на базе $L = 100 \text{ мм}$ вдоль диагонали пластины на одинаковом расстоянии от центра $\chi = 8w/L^2$. На рисунке 2.9 приведены соответствующие результаты расчетов параметра поврежденности на поверхности пластины. Вполне удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных позволяет говорить о возможности описания разносопротивляющегося растяжению и сжатию при

ползучести материала с учетом параметра поврежденности [99], когда процессы ползучести и накопления повреждений рассматриваются как единый процесс и описываются одним уравнением со скалярным параметром поврежденности. Параметр поврежденности отождествляется с нормированной удельной работой рассеяния при ползучести [191], при этом интенсивность накопления повреждений при растяжении и сжатии различна: $m_+ \neq m_-$. Скалярный параметр поврежденности (рисунок 2.9), который отождествлен с нормированной удельной работой рассеяния может служить для количественной оценки живучести конструкции. Необходимо отметить, что при превышении прогиба толщины пластины ($\chi > 0,002$ 1/мм) при расчете необходимо учитывать деформации срединной поверхности.

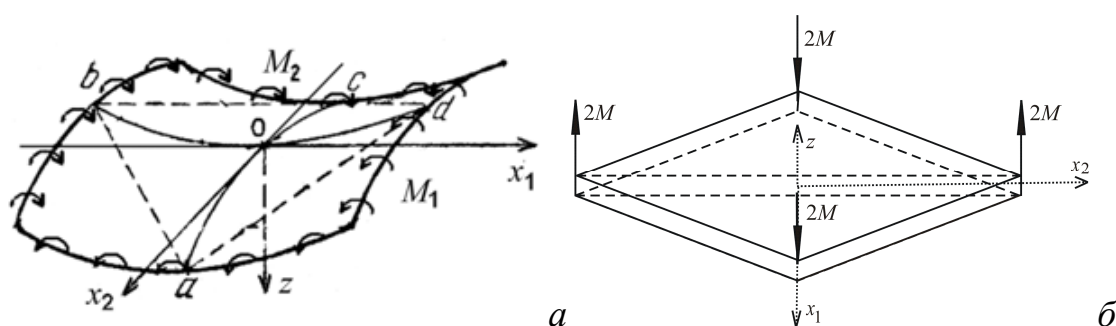


Рисунок 2.6 – Схема нагружения пластины крутящим моментом M равномерно приложенным вдоль кромок (а) эквивалентна задаче кручения пластины силами $2M$ приложенными в углах пластины (б)

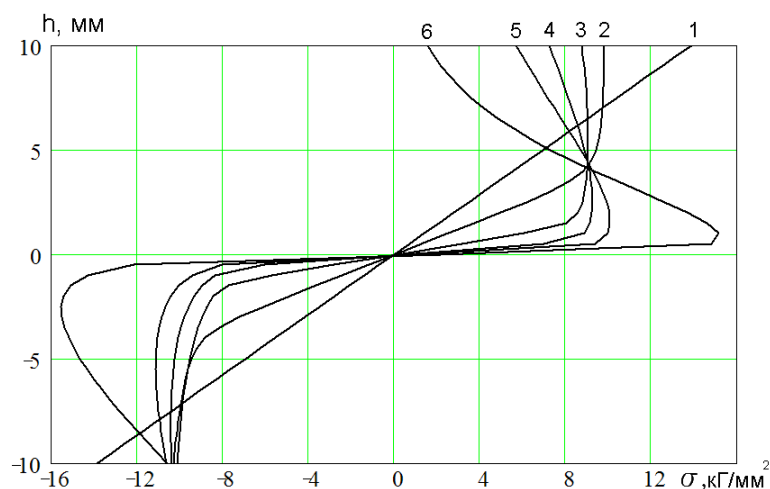


Рисунок 2.7 – Распределение напряжений в диагональном направлении по толщине пластины на различные моменты времени: линии 1-6 — $t = 0; 50; 250; 500; 600; 650$ ч

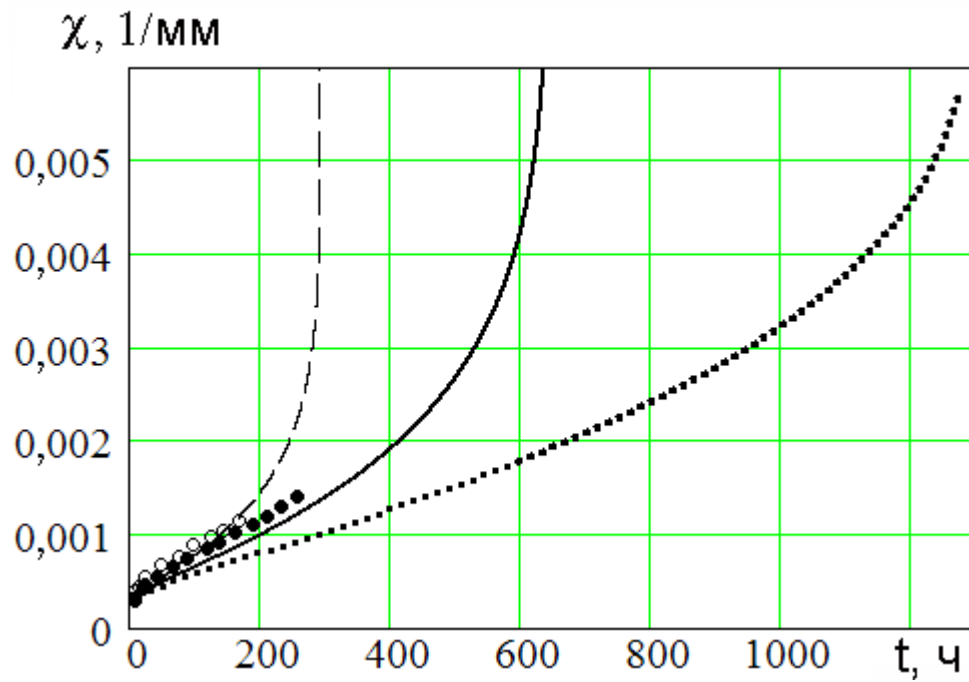


Рисунок 2.8 – Экспериментальные данные (точки) и результаты расчетов кривизны вдоль диагонали(линии); сплошная линия расчет по модели (2.12), (2.13), штриховая линия – расчет с параметрами на растяжение, пунктирная – расчет с параметрами на сжатие

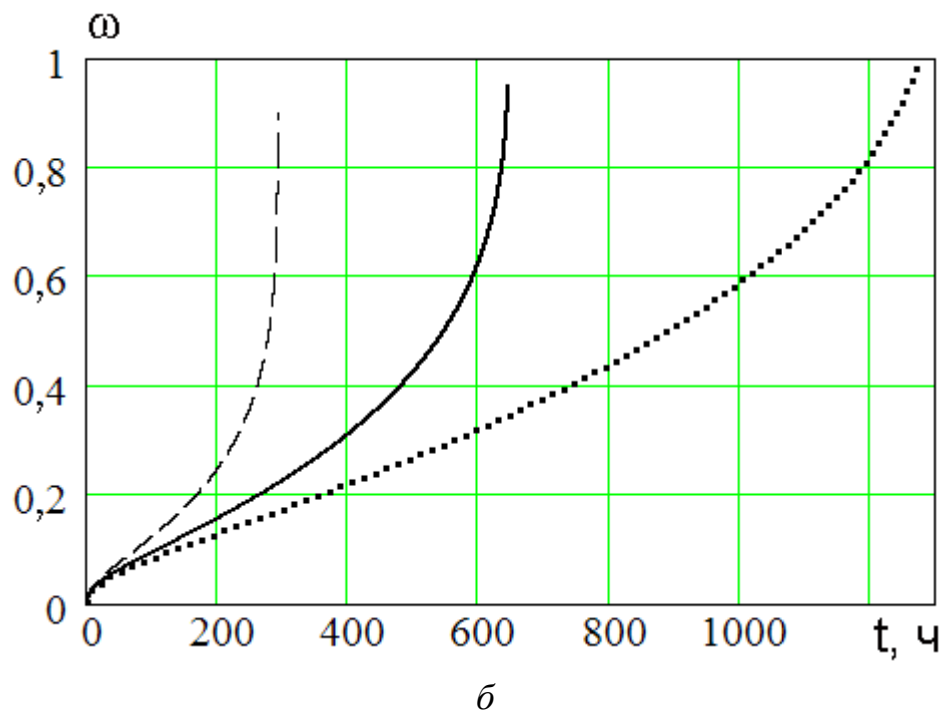


Рисунок 2.9 – Зависимость параметра поврежденности на поверхности пластины от времени: сплошная линия расчет по модели (2.12), (2.13), штриховая линия – расчет с параметрами на растяжение, пунктирная – расчет с параметрами на сжатие

2.2.3 Кручение пластины из упрочняющегося сплава

В [12] на примере задачи кручения пластины из сплава АК4-1 при $T=195^{\circ}\text{C}$ проводится апробация модели (2.15), (2.17)–(2.19), учитывающей разные свойства материала на растяжение и сжатие при наличии упрочнения. Диаграммы для сплава АК4-1 при $T=195^{\circ}\text{C}$ приведены на рисунке 1.10. При кручении гладкой пластины свойством слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали плиты (рисунок 1.10, *г*) можно пренебречь [13; 34; 36]. Наиболее существенным для этого сплава является различие свойств при растяжении и сжатии (рисунок 1.10, *а* и 1.10, *б*).

В [12] описана методика определения параметров α , B и n в уравнении (2.14) для упрочняющегося сплава, для скоростей деформаций ползучести сплава АК4-1 при $T=195^{\circ}\text{C}$ получены следующие константы:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{B_+ \sigma^{n_+}}{(\varepsilon^c)^{\alpha_+}}, B_+ = 3,7 \cdot 10^{-61} (\text{МПа}/\text{м}^2)^{-n_+} \text{с}^{-1}, n_+ = 21, \alpha_+ = 1,3 \text{ при } \sigma > 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{B_- \sigma^{n_-}}{(\varepsilon^c)^{\alpha_-}}, B_- = 4,8 \cdot 10^{-110} (\text{МПа}/\text{м}^2)^{-n_-} \text{с}^{-1}, n_- = 40, \alpha_- = 1,64 \text{ при } \sigma \leq 0. \quad (2.58)$$

На рисунке 2.10, *а* точками 1–3 изображены результаты экспериментов при $T=195^{\circ}\text{C}$ на одноосное растяжение сплошных круглых образцов при $\sigma = 280; 310; 320$ МПа, линии – соответствующие аппроксимационные зависимости (2.57). На рисунке 2.10, *б* точками 1–3 изображены результаты экспериментов при $T=195^{\circ}\text{C}$ на одноосное сжатие при $\sigma = 300; 310; 320$ МПа, линии – аппроксимационные зависимости (2.58).

На рисунке 2.11, *а* нанесены те же экспериментальные данные на растяжение, соответствующие начальному упрочняющемуся участку в логарифмических координатах; на рисунке 2.11, *б* – аналогичные данные на сжатие. Видно, что точки для каждой серии данных при $\sigma = \text{const}$ группируются вдоль прямой линии. Используя метод наименьших квадратов, определяется угол наклона $1/(1+\alpha)$ для каждой из этих линий. После

усреднения определяется α для растяжения и сжатия. Константы B и n определяются на основе экспериментальных зависимостей $\ln \Delta \varepsilon^c$ от $\ln \sigma$ для установившихся участков при растяжении и сжатии (рисунок 2.11, в) [12].

Здесь $\Delta \varepsilon^c = \frac{(\varepsilon_a^c)^{\alpha+1} - (\varepsilon_b^c)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(t_a - t_b)}$, t_a и t_b – время начала и конца установившейся

стадии, $\varepsilon_a^c, \varepsilon_b^c$ – соответствующие деформации. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что сплав обладает свойством значительного упрочнения, при этом $n_+ \neq n_-$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$.

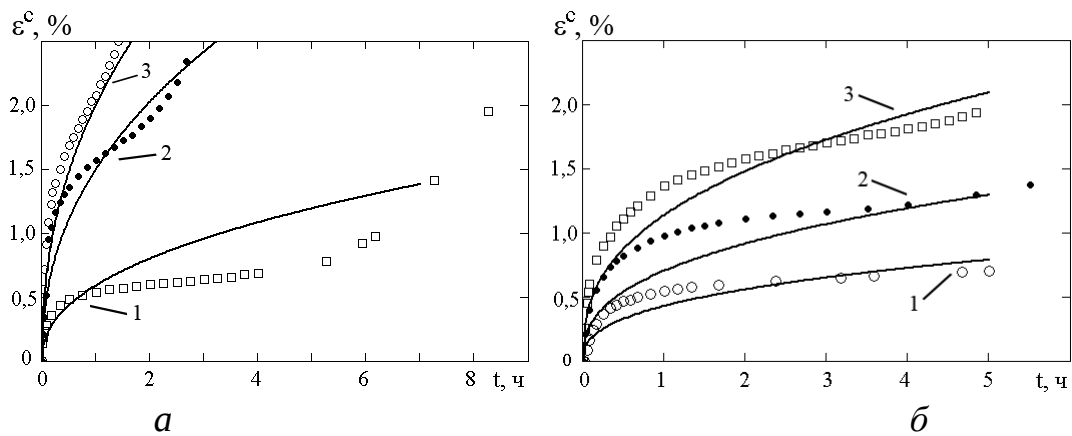


Рисунок 2.10 – Данные экспериментов (точки) и аппроксимационные кривые при одноосном растяжении (а) и сжатии (б) образцов из сплава АК4-1 при $T=195^\circ\text{C}$

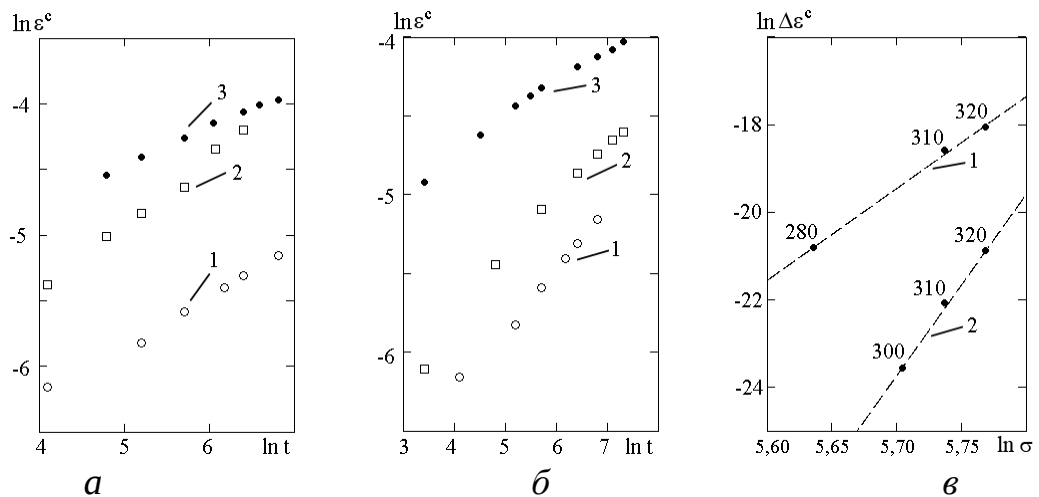


Рисунок 2.11 – Экспериментальная зависимость $\ln \varepsilon^c$ от $\ln t$ для определения α при растяжении $\sigma = 280; 310; 320$ МПа (а) и сжатии $\sigma = 300; 310; 320$ МПа (б); линии 1-2 – зависимости $\ln \Delta \varepsilon^c$ от $\ln \sigma$ для определения B, n при растяжении и сжатии соответственно (в)

Разрешающие соотношения для задачи кручения квадратной пластины в предположении плоского напряженного состояния (напряжение по нормали $\sigma_3 = 0$) и при условии, что прогиб не превосходит половину толщины пластины, совпадают с уравнениями (2.51)–(2.55). Выражения для скоростей деформаций (2.56) заменятся на соотношения, следующие из (2.15), (2.19):

$$\frac{d\varepsilon_1^c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{B_+(\Sigma_i)^{n_+-1}}{(\varepsilon_i^c)^{\alpha_+}} (2\Sigma_1(z) - \Sigma_2(z)), \quad \frac{d\varepsilon_2^c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{B_+(\Sigma_i)^{n_+-1}}{(\varepsilon_i^c)^{\alpha_+}} (2\Sigma_2(z) - \Sigma_1(z)), \quad (2.59)$$

$$\Sigma_i = \Sigma_i^1 = \left((\Sigma_1(z))^2 + (\Sigma_2(z))^2 - \Sigma_1(z)\Sigma_2(z) \right)^{1/2}, \quad \Sigma_j^1 = \begin{cases} \sigma_j, & \sigma_j > 0, \\ \mu_1 \sigma_j, & \sigma_j \leq 0, \end{cases}$$

$$\mu_1 = \left(\frac{B_-}{B_+} \right)^{\frac{1}{n_-}} (\Sigma_i^1)^{\frac{n_- - n_+}{n_-}} (\varepsilon_i^c)^{\frac{\alpha_+ - \alpha_-}{n_-}}, \quad \varepsilon_i^c = \frac{2}{\sqrt{3}} \left((\varepsilon_1^c(z))^2 + (\varepsilon_2^c(z))^2 + \varepsilon_1^c(z)\varepsilon_2^c(z) \right)^{1/2}.$$

Модуль упругости одинаков при растяжении и сжатии и равен $E = 59$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$.

К системе (2.53) – (2.55), (2.59) добавляются начальные условия упругого деформирования, толщина пластины разбивается на равные интервалы. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно деформации и напряжения в точках разбиения решается методом Рунге-Кутты-Мерсона [146].

На рисунке 2.12 изображена пластина из сплава АК4-1 после двух часов эксперимента при $T = 195^\circ\text{C}$. Точки 1 на рисунке 2.13 обозначены экспериментальные значения зависимости кривизны от времени при кручении пластины с размерами 180×180 мм, толщиной $h = 11,715$ мм и с интенсивностью напряжений в характеристической точке $\hat{\sigma}_i = 216$ МПа. Отличительной особенностью характеристических точек является то, что напряжение в течение всего времени деформирования при выполнении условий чистого изгиба остается приближенно равным одной и той же величине [100]. В условиях чистого изгиба эти точки располагаются на расстоянии $\rightarrow h/3$ по обе стороны от срединной поверхности, т.е. $\hat{z} \rightarrow \pm h/3$. Момент кручения связан с $\hat{\sigma}_i$ по формуле $M = \hat{\sigma}_i h^2 / (4\sqrt{3})$. Кривизна

вычислялась по замерам прогиба w на базе $L = 100$ мм вдоль диагонали пластины на одинаковом расстоянии от центра $\chi = 8w/L^2$. Кривая 2 на рисунке 2.13 – расчет по модели (2.59) с учетом констант на растяжение и сжатие одновременно; кривые 3 и 4 – расчет по модели (2.59) с использованием констант только на растяжение и только на сжатие соответственно. Экспериментальные данные расположены между расчетными кривыми 3 и 4. Завышенное расположение линии 2 можно объяснить тем, что в расчетах не учитываются возникающие при деформировании мембранные усилия. График кривизны на рисунке 2.13 изображен без учета упругой составляющей $\chi_0 = 0,76$ 1/м в начальный момент при $t = 0$. При превышении прогиба (вместе с упругой составляющей) половины толщины пластины, т.е. кривизны порядка 0,8 1/м в вычислениях необходимо учитывать деформации срединной поверхности. На рисунке 2.14 изображены зависимости главного напряжения (в диагональном направлении) от координаты z : линия 1 соответствует упругому деформированию при $t=0$; линия 2 – при $t= 7200$ с. На поверхности пластины получено $\sigma_1(-h/2) = -149,7$ МПа, $\sigma_1(h/2) = 145,2$ МПа. Оценка деформаций показывает, что они не превосходят 2%.

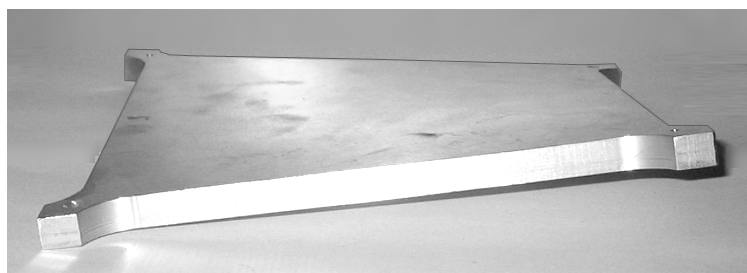


Рисунок 2.12 – Пластина из сплава АК4-1 после двух часов эксперимента при $T=195^\circ\text{C}$

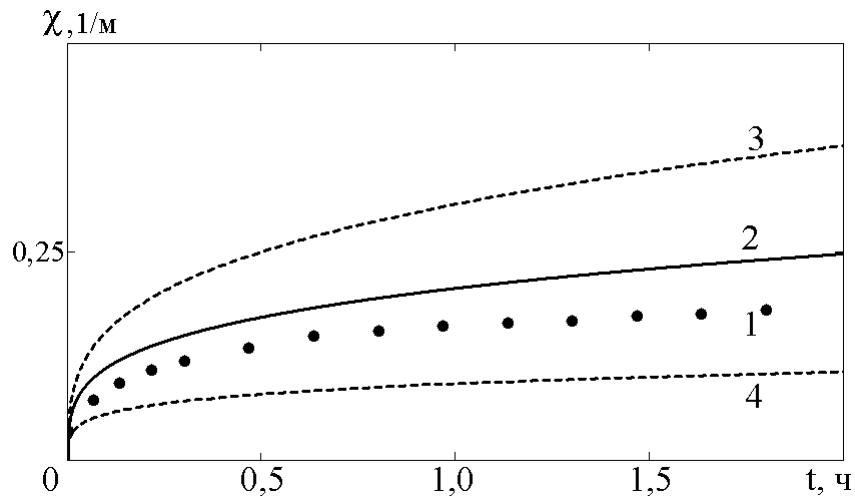


Рисунок 2.13 – Экспериментальные и расчетные зависимости кривизны от времени для пластины $h=11,715\text{ мм}$, $\hat{\sigma}_i = 216 \text{ МПа}$

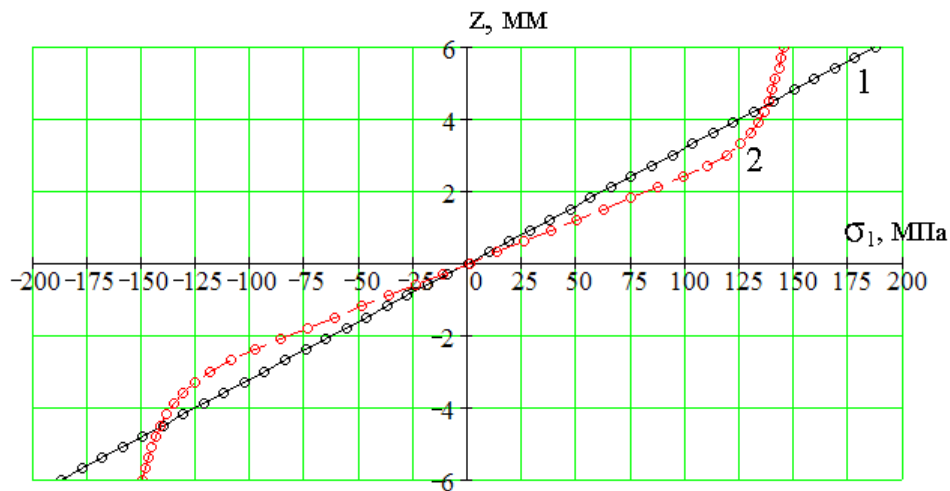


Рисунок 2.14 – Зависимости главного напряжения (в диагональном направлении) от координаты z : линия 1 – при $t=0$; линия 2 – при $t=7200 \text{ с}$

2.3 Выводы по второй главе

1. Модель Цвелодуба И.Ю. для изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие при ползучести материала, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, обобщена на случай наличия первого упрочняющего участка кривой ползучести, при этом для аппроксимации данных ползучести одноосного деформирования используются степенные функции с разными показателями, характеризующими растяжение и сжатие не только на установившейся стадии, но и на стадиях упрочнения – разупрочнения.

2. На основе модели, использующей понятие «трансформированного» пространства напряжений, в предположении установившейся ползучести материала проведено моделирование кручения сплошных круглых образцов, вырезанных из плиты толщиной 60 мм из титанового сплава, обладающего разными свойствами при растяжении и сжатии при температуре 700°C. Для описания поведения закручиваемого стержня развит подход с использованием характеристической точки (малой области), в которой значения напряжений не меняются в течение всего процесса деформирования. Показано, что при кручении учет разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию при ползучести приводит к удлинению образца вдоль оси и сжатию в радиальном направлении. Выполнена оценка этих деформаций. Результаты расчетов показали удовлетворительное соответствие с данными испытаний на кручение сплошных круглых стержней, вырезанных в направлении нормали плиты. Получено также удовлетворительное соответствие между результатами вычислений, проведенных на основе исследуемой модели и с использованием модели Горева Б.В., Никитенко А.Ф.

3. Модель для разнсопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести материала с учетом параметра поврежденности, который отождествлен с нормированной удельной работой рассеяния при ползучести, апробирована при решении задачи кручения пластины в предположении плоского напряженного состояния. Интенсивность накопления повреждений описывается степенными функциями с разными показателями для растяжения и сжатия. Получено удовлетворительное соответствие между результатами расчетов и экспериментальным данным по кручению пластины из разупрочняющегося сплава АК4-1 при $T=200^{\circ}\text{C}$.

4. Модель, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, обобщенная на случай упрочняющегося материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, была применена для решения задачи о кручении пластины из сплава АК4-1 при $T=195^{\circ}\text{C}$. Аппроксимация данных

экспериментов на одноосное растяжение и сжатие образцов из этого сплава показала, что показатели степенных зависимостей, описывающих скорости деформаций ползучести различаются не только на установившейся стадии, но и на стадии упрочнения. Разработана методика расчета для решения задач чистого кручения пластин из такого материала при плоском напряженном состоянии. Полученные результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов.

Результаты исследований опубликованы в журналах ВАК и WEB of Science [12; 17; 95] , в трудах конференций [39; 99].

ГЛАВА 3. ОРТОТРОПНЫЙ МАТЕРИАЛ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

3.1 Обзор ортотропных моделей ползучести

Большинство современных конструкционных сплавов помимо наличия различных свойств при растяжении и сжатии обладают свойствами анизотропии. Свойства материала плит и листов предназначенных для заготовок могут различаться как в плоскости листа, так и по нормали к листу, а также в направлении, составляющем угол 45° с нормалью листа. Существует ряд моделей для описания процессов деформирования таких материалов.

Модели анизотропных материалов в предположении одинаковых свойств при растяжении и сжатии предложены в работах [182; 230]. В работе [182] создана ортотропная модель с одинаковым степенным показателем для всех направлений, в ее основе лежит модель аналогичная анизотропной пластичности Хилла. В работе [230] рассматривается вариант ортотропного материала с различными степенными показателями в направлении трех основных осей ортотропии.

Модели анизотропных материалов с учетом свойств разносопротивляемости при растяжении и сжатии с одинаковым степенным показателем исследуются в [113; 205; 215; 218; 281]. Варианты анизотропных моделей, учитывающих разносопротивляемость с различными показателями при растяжении и сжатии, предложены в [2; 156; 206; 207]. Отдельно следует выделить модели с одинаковым степенным показателем [74; 91; 113; 205; 208; 231; 285], учитывающие различие свойств материала при растяжении, сжатии и кручении. Существенное отличие свойств при кручении от свойств при растяжении и сжатии может быть обусловлено анизотропией материала [13; 225].

В последние годы развитие моделей ползучести, учитывающих анизотропию и различие свойств материала при растяжении и сжатии,

связано с учетом повреждаемости материала [265], параметров микроструктуры (плотность дислокаций) [262], композитных свойств [259]. В [271] рассмотрена интегральная форма реологического закона ползучести для трехмерного напряженного состояния анизотропного материала, свойства которого зависят от температуры. В работе [264] моделируется анизотропное поведение ползучести в металле сварного шва, полученного многопроходной сваркой. Для объяснения происхождения анизотропной ползучести, вводится механическая модель для бинарной структуры, состоящей из «мелкозернистых» и «крупнозернистых» составляющих с различными свойствами ползучести.

В работах [258; 261; 277] исследуются анизотропные модели ползучести, используемые в геомеханике, сравниваются модели АСМ и Creep-SCLAY1, которые различаются формулировкой скорости деформации ползучести. В модели АСМ ползучесть формулируется с использованием концепции контуров постоянной объемной скорости деформации ползучести. Модель Creep-SCLAY1 использует концепцию постоянной скорости вязко-пластического множителя.

В данной главе рассматривается модель материала, учитывающая свойства ортотропии и разносопротивляемости растяжению, при этом используется функция с различными показателями для растяжения и сжатия. В отличие от [2; 156], где исследуется трансверсально-изотропный материал, рассматриваемая модель учитывает ортотропию. Предлагаемый потенциал не терпит разрыва [206] и хорошо описывает случаи одноосного и двухосного растяжения-сжатия несжимаемого при ползучести материала [207].

3.2 Модель ортотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на потенциальном подходе

Для учета свойств ортотропии и разносопротивляемости растяжению и сжатию рассматривается следующая модель [19]:

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad 2\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1) \sin 3\xi, \quad (3.1)$$

$$\Phi_1 = T_1^{n_++1} / (n_+ + 1), \quad \Phi_2 = T_2^{n_-+1} / (n_- + 1). \quad (3.2)$$

Здесь $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c / dt$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;

ε_{ij}^c , σ_{ij} – компоненты тензора деформаций ползучести и напряжений;

инвариант ξ – угол, который определяет вид напряженного состояния и используется для учета разных свойств при растяжении и сжатии [205]

$$\sin 3\xi = -\frac{9}{2} \frac{\bar{\sigma}_{kl} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kj}}{\sigma_i^3}, \quad (3.3)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$ – компоненты девиатора напряжений; $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}/2)^{1/2}$ интенсивность напряжений; Φ_1, Φ_2 – скалярные потенциальные функции тензора напряжений для растяжения и сжатия соответственно. T_1, T_2 – квадратичные формы компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} T_1(\sigma_{ij}) &= (A_{11}^+(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^+(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^+(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^+\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^+\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ T_2(\sigma_{ij}) &= (A_{11}^-(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^-(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^-(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^-\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^-\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{где } A_{11}^+ = \frac{1}{2} \left((B_{22}^+)^{\frac{2}{n_++1}} + (B_{33}^+)^{\frac{2}{n_++1}} - (B_{11}^+)^{\frac{2}{n_++1}} \right), \quad 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{\frac{2}{n_++1}} - A_{11}^+ - A_{22}^+,$$

$$A_{11}^- = \frac{1}{2} \left((B_{22}^-)^{\frac{2}{n_-+1}} + (B_{33}^-)^{\frac{2}{n_-+1}} - (B_{11}^-)^{\frac{2}{n_-+1}} \right), \quad 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{\frac{2}{n_-+1}} - A_{11}^- - A_{22}^-. \quad (3.5)$$

Остальные компоненты A_{ij}^+, A_{ij}^- ($i, j = 1, 2, 3$) получаются циклической перестановкой индексов. Константы B_{ii}^+, B_{ii}^- ($i = 1, 2, 3$) – характеристики процесса одномерной ползучести в предположении установившейся стадии в трех главных направлениях при растяжении и сжатии соответственно:

$$\eta_{ii} = \begin{cases} B_{ii}^+ \sigma_{ii}^{n_+}, & \sigma_{ii} > 0 \\ B_{ii}^- |\sigma_{ii}|^{n_-} \sigma_{ii}, & \sigma_{ii} < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Константы B_{ij}^+, B_{ij}^- ($i \neq j$) – аналогичные характеристики при растяжении и сжатии соответственно в трех направлениях вдоль осей системы координат,

полученной путем поворота исходной системы координат на угол, равный 45° ; n_+ , n_- – показатели одномерной ползучести при растяжении и сжатии.

Из (3.1) – (3.5) следуют частные случаи:

- ортотропный материала с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии [182];
- изотропный материал, свойства которого при растяжении и сжатии разные, причем интенсивность процессов растяжения и сжатия может описываться степенными функциями с разными показателями [9, 124].

3.3 Ортотропный материала с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие

Если $B_{ij}^+ = B_{ij}^- = B_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) и степенной показатель ползучести не зависит от знака прикладываемой нагрузки ($n_+ = n_- = n$), тогда из (3.1)–(3.5) следует $A_{ij}^+ = A_{ij}^- = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), $T_1 = T_2 = T_s$, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Для компонент скоростей деформаций ползучести имеем

$$\eta_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}, \quad \Phi = T_s^{n+1}/(n+1), \quad (3.6)$$

$$T_s(\sigma_{ij}) = (A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left(B_{22}^{\frac{2}{n+1}} + B_{33}^{\frac{2}{n+1}} - B_{11}^{\frac{2}{n+1}} \right), \quad 2A_{12} = 4B_{12}^{\frac{2}{n+1}} - A_{11} - A_{22}. \quad (3.8)$$

Остальные компоненты A_{ij} получаются циклической перестановкой индексов. Получаемые в экспериментах константы B_{11} , B_{22} , B_{33} – характеристики процесса одномерной ползучести в трех главных направлениях одинаковые при растяжении и сжатии; B_{12} , B_{23} , B_{31} – аналогичные характеристики в трех направлениях вдоль осей системы координат, полученной путем поворота исходной системы координат на

угол, равный 45° . Модель (3.6)–(3.8) предложена О. В. Сосниным для описания ортотропных свойств материала в условиях ползучести [182].

В данном случае аналогично изотропной ползучести имеет место зависимость $G_\eta = T_s^n$, где G_η^2 – квадратичная форма скоростей деформаций ползучести

$$G_\eta(\eta_{ij}) = \left(\frac{A_{11}}{\Delta} \eta_{11}^2 + \frac{A_{22}}{\Delta} \eta_{22}^2 + \frac{A_{33}}{\Delta} \eta_{33}^2 + \frac{2}{A_{12}} \eta_{12}^2 + \frac{2}{A_{23}} \eta_{23}^2 + \frac{2}{A_{31}} \eta_{31}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

где $\Delta = A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{11}A_{33}$.

Для скоростей деформаций ползучести $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c/dt$ из (3.6) следует

$$\eta_{11} = T_s^{n-1} \left((A_{22} + A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{33} \right), \quad \eta_{12} = \eta_{21} = T_s^{n-1} A_{12}\sigma_{12}. \quad (3.10)$$

Сдвиговые компоненты $\eta_{12} = \xi_{12}/2 = \dot{\gamma}_{12}^c/2$. Остальные компоненты получаются путем циклической перестановки индексов. В случае простого растяжения $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ соотношения (3.10) упрощаются

$$\eta_{11} = T_s^{n-1} (A_{22} + A_{33})\sigma, \quad \eta_{22} = -T_s^{n-1} A_{33}\sigma, \quad \eta_{33} = -T_s^{n-1} A_{22}\sigma, \quad T_s = \sqrt{A_{22} + A_{33}}\sigma.$$

В случае равномерного растяжения $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{33} = 0$ из (3.10) для скоростей деформаций ползучести получаем

$$\eta_{11} = T_s^{n-1} A_{22}\sigma, \quad \eta_{22} = T_s^{n-1} A_{11}\sigma, \quad \eta_{33} = -T_s^{n-1} (A_{11} + A_{22})\sigma, \quad T_s = \sqrt{A_{11} + A_{22}}\sigma.$$

Несмотря на то, что модель (3.6)–(3.8), предложенная О. В. Сосниным [182], хорошо известна, с ее использованием решено небольшое количество задач, экспериментальная проверка в условиях сложного напряженного состояния практически отсутствует. Это обусловлено тем, что для получения параметров модели для конкретного материала необходимо выполнить большое число экспериментов. При повышенных температурах в условиях сложного напряженного состояния такая проверка существенно затруднена, требует значительных временных и материальных затрат. Цикл работ авторов [104; 105; 116; 198; 211] посвящен моделированию процессов деформирования оболочечных конструкций с использованием соотношений

аналогичных соотношениям (3.6)–(3.8), учитывающих накопление повреждений в материале.

Один из вариантов модели (3.6)–(3.8), в котором константы A_{ij} нормированы, встроен разработчиками пакета ANSYS в конечно-элементный комплекс. Для активации модели необходимо использовать команды TB,Creep и TB,Hill [252]. В работе [274] модель (3.6)–(3.8) построена с учетом повреждений в тензорной формулировке и встроена в пакет ANSYS. Проведено сравнение результатов расчета с данными экспериментов на одноосное растяжение и показано, что они удовлетворительно согласуются.

После процессов технологической обработки, таких как прокатка или прессование, материал заготовок (листы, плиты разных толщин), применяемых для формообразования корпусных элементов конструкций, как правило, обладает существенной анизотропией. Часто в плоскости плиты свойства материала оказываются близки, а наиболее слабыми направлениями в смысле сопротивления деформированию в условиях ползучести являются направления под углом 45° к нормали к плите и по нормали к плите [37; 97; 98]. Такой материал называется трансверсально-изотропным [3, 156]. Оценим влияние трансверсально-изотропных свойств материала на процессы изгиба пластин и кручения стержней с использованием модели (3.6)–(3.8).

3.3.1 Изгиб пластин из трансверсально-изотропного материала

Рассматривается изгиб пластины из трансверсально-изотропного материала со слабым сопротивлением деформациям ползучести в направлении нормали к плите. Пусть направление η_{33} совпадает с нормалью к пластине. В случае трансверсально-изотропного материала (изотропного в плоскости пластины) $\eta_{11} = \eta_{22}$ и $\eta_{33}/\eta_{22} = k$. «Коэффициент анизотропии» по нормали к пластине k определяется путем осреднения отношения изменения размера по толщине пластины (т.е. в направлении нормали к листу) к изменению размера по ширине плоского образца при различных

степенях осевой деформации, полученных в экспериментах на растяжение [182]. Так как $\eta_{33}/\eta_{22} = A_{22}/A_{33}$ и $A_{11} = A_{22}$, $B_{11} = B_{22} = B_{12} = B$, то коэффициенты квадратичных форм (3.8) приводятся к виду

$$A_{11} = A_{22} = \frac{k}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, A_{33} = \frac{1}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, A_{12} = \frac{k+2}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, A_{13} = A_{23} = \frac{3}{2} B^{\frac{2}{n+1}}. \quad (3.11)$$

Предполагается, что полные деформации представляют собой сумму упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^c. \quad (3.12)$$

Индексы e и c соответствуют компонентам упругих деформаций и деформаций ползучести.

В зависимости от соотношения величины прогиба к толщине пластины рассматривается несколько способов решения задачи изгиба пластины [15]:

- Предполагается, что прогиб сопоставим с толщиной пластины, и реализуется плоское напряженное состояние. Мембранными усилиями в срединной поверхности пренебрегаем. Решается задача об изгибе пластины внешними моментами, равномерно приложенными вдоль кромок.

- Предполагается, что прогиб сопоставим с толщиной пластины, упругие деформации малы. В этом случае для решения задач изгиба пластин можно использовать методику расчета, основанную на интегральных величинах в предположении установившейся ползучести и можно получить выражения скоростей изменения кривизны в зависимости от моментов.

- Расчет методом конечных элементов в геометрически линейной и нелинейной постановках с использованием программной среды ANSYS.

3.3.1.1 Чистый изгиб пластин при неустановившейся ползучести

Рассматривается чистый изгиб пластины толщиной h постоянными моментами M_{ij} ($i=1,2; j=1,2$), приложенными вдоль ее кромок [1; 199].

Предполагается, что напряжение $\sigma_{33} = 0$, тогда из (3.7)-(3.10) следует

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= T_s^{n-1} \left((A_{22} + A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} \right), \quad \eta_{22} = T_s^{n-1} \left((A_{11} + A_{33})\sigma_{22} - A_{33}\sigma_{11} \right), \\ \eta_{33} &= T_s^{n-1} \left(-A_{11}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{11} \right), \quad \eta_{12} = \eta_{21} = T_s^{n-1} A_{12}\sigma_{12},\end{aligned}\quad (3.13)$$

где $T_s = \left((A_{22} + A_{33})\sigma_{11}^2 + (A_{11} + A_{33})\sigma_{22}^2 - 2A_{33}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12}\sigma_{12}^2 \right)^{1/2}$,

$$G_\eta = \left(\frac{A_{11} + A_{33}}{\Delta} \eta_{11}^2 + \frac{A_{22} + A_{33}}{\Delta} \eta_{22}^2 + \frac{2A_{33}}{\Delta} \eta_{11}\eta_{22} + \frac{2}{A_{12}} \eta_{12}^2 \right)^{1/2}.$$

С учетом (3.11) выражения для скорости деформаций (3.13) и функции $T_s(\sigma_{ij})$ записываются в виде

$$\eta_{11} = T_s^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{k+1} \sigma_{22} \right), \quad \eta_{22} = T_s^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{22} - \frac{1}{k+1} \sigma_{11} \right), \quad (3.14)$$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2} \xi_{12} = T_s^{n-1} B^{2/(n+1)} \frac{k+2}{2(k+1)} \sigma_{12}, \quad T_s^2 = B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2}{k+1} \sigma_{11}\sigma_{22} + 2 \frac{k+2}{k+1} \sigma_{12}^2 \right).$$

В начальный момент $t=0$ пластина деформируется упруго, т.е. $\varepsilon_{ij}^c = 0$.

Мембранными усилиями в срединной поверхности пренебрегаем, считая, что прогиб $w = w(x_1, x_2, t)$ сопоставим с толщиной h . С учетом гипотез Кирхгофа для полных деформаций (3.12) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})/E + \varepsilon_{11}^c &= \chi_{11}x_3, & (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})/E + \varepsilon_{22}^c &= \chi_{22}x_3, \\ \sigma_{12}(1+\nu)/E + \varepsilon_{12}^c &= \chi_{12}x_3,\end{aligned}\quad (3.15)$$

где $-h/2 \leq x_3 \leq h/2$; $\chi_{ij} = -w_{,ij}$ ($i=1,2; j=1,2$) – кривизны изгиба.

Уравнения (3.14), (3.15) с начальными и краевыми условиями (заданы постоянные изгибающие моменты M_{ij} , равномерно распределенные вдоль кромок пластины) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени относительно деформаций в точках разбиения пластины по толщине и относительно кривизн

$$\begin{aligned}\chi_{11} &= \frac{12}{h^3} \left(\frac{1}{E} (M_{11} - \nu M_{22}) + \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{11}^c x_3 dx_3 \right), \quad \chi_{22} = \frac{12}{h^3} \left(\frac{1}{E} (M_{22} - \nu M_{11}) + \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{22}^c x_3 dx_3 \right), \\ \chi_{12} &= \frac{12}{h^3} \left(\frac{1+\nu}{E} M_{12} + \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{12}^c x_3 dx_3 \right).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Здесь $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \chi_3 dx_3$. Для решения системы (3.14) – (3.16) используется метод Эйлера. Если решается задача кручения пластины в седлообразную поверхность, то на кромках пластины задается равномерно распределенный крутящий момент $M_{12} = M$, $M_{11} = M_{22} = 0$. При изгибе пластины в цилиндрическую поверхность $M_{22} = M$, $M_{12} = 0$, момент M_{11} определяется из условия $\chi_{11} = 0$. При изгибе пластины в поверхность двойной положительной кривизны задаются $M_{11} = M_1$, $M_{22} = M_2$, $M_{12} = 0$.

3.3.1.2 Чистый изгиб пластин в условиях установившейся ползучести

Для решения задач изгиба пластин можно использовать упрощенную методику расчета, основанную на интегральных величинах в предположении установившейся ползучести материала [10; 85; 183; 220]. В этом случае скорости изменения кривизн выражаются через моменты по формулам

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{11} &= DM_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(M_{11} - \frac{1}{k+1} M_{22} \right), & \dot{\chi}_{22} &= DM_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(M_{22} - \frac{1}{k+1} M_{11} \right), \\ \dot{\chi}_{12} &= DM_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \frac{k+2}{k+1} M_{12}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{где } M_0^2 = B^{2/(n+1)} \left(M_{11}^2 + M_{22}^2 - \frac{2}{k+1} M_{11} M_{22} + 2 \frac{k+2}{k+1} M_{12}^2 \right),$$

$$\dot{\chi}_0 = DM_0^n, \quad D = \left(2^{\lambda+1} \frac{\lambda+2}{h^{\lambda+2}} \right)^n, \quad \lambda = 1/n,$$

$$\dot{\chi}_0^2 = c^2 B^{-2/(n+1)} \left(\dot{\chi}_{11}^2 + \dot{\chi}_{22}^2 + \frac{2}{k+1} \dot{\chi}_{11} \dot{\chi}_{22} + \frac{2k}{k+1} \dot{\chi}_{12}^2 \right), \quad c^2 = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Точка сверху над компонентами тензора скоростей изменения кривизн $\dot{\chi}_{ij}$ означает производную по времени.

Для расчета нагрузки и оценки поведения конструкции в целом можно использовать метод характеристической точки [71]. В такой точке

напряжения близки к постоянной величине при упругом деформировании пластины и при ее деформировании в режиме ползучести. При кручении пластины постоянным моментом M_{12} в предположении установившейся ползучести из (3.14), (3.15) следует

$$\sigma_{12} = \left(\frac{2}{B} \left(2 \frac{k+2}{k+1} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \dot{\chi}_{12} x_3 \right)^\lambda. \quad (3.18)$$

После подстановки (3.18) в выражение для момента M_{12} и интегрирования по толщине пластины выражение для скорости изменения кривизны принимает вид:

$$\dot{\chi}_{12} = \frac{B}{2} \left(2 \frac{k+2}{k+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{2^{\lambda+1}(\lambda+2)M_{12}}{h^{\lambda+2}} \right)^n = DB(\sqrt{2})^{n-1} \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} M_{12}^n. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.19), выражение (3.18) приводится к виду

$$\sigma_{12} = \frac{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}{h^{\lambda+2}} M_{12} x_3^\lambda. \quad (3.20)$$

По формуле (3.20) вычисляется касательное напряжение, как для изотропного, так и для трансверсально-изотропного материала. Для определения координаты $\hat{x}_3$ характеристической точки приравняем напряжения, возникающие при упругом деформировании и при деформировании в условиях установившейся ползучести:

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{12}{h^3} M_{12} \hat{x}_3 = \frac{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}{h^{\lambda+2}} M_{12} \hat{x}_3^\lambda. \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует $\hat{x}_3 = \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda+2}{3} \right)^{1/(1-\lambda)}$ (при $n \rightarrow \infty \quad \hat{x}_3 \rightarrow h/3$).

В случае изгиба пластины в поверхность цилиндрической формы моментом $M_{22} = M$, момент M_{11} определяется из условия $\chi_{11} = 0$: $M_{11} = M_{22}/(k+1)$. Для скорости изменения кривизны χ_{22} находим

$$\dot{\chi}_{22} = DB \left(1 - 1/(k+1)^2 \right)^{(n+1)/2} M_{22}^n. \quad (3.22)$$

При изгибе пластины в поверхность двойной положительной кривизны моментами $M_{11} = M_{22} = M$, скорости изменения кривизны χ_{11}, χ_{22} определяются из соотношения:

$$\dot{\chi}_{11} = \dot{\chi}_{22} = DB(\sqrt{2})^{n-1} (1 - 1/(k+1))^{(n+1)/2} M_{22}^n. \quad (3.23)$$

3.3.1.3 Решение задачи о изгибе пластины методом конечных элементов

Для моделирования изгиба пластины из ортотропного материала можно использовать вариант модели (3.6)–(3.8) встроенный в программный конечно-элементный комплекс ANSYS. Активация модели осуществляется командами TB,Creep и TB,Hill [40; 252]. Для расчета применяется восьмиузловой объемный конечный элемент Solid45 с тремя степенями свободы. Вектор перемещений внутри элемента в любой точке аппроксимируется в виде $u = [N]\{u\}$, где $[N]$ - функции формы; $\{u\}$ – набор значений перемещений в узлах и значений дополнительных параметров. Дополнительные параметры предназначены для улучшения аппроксимации перемещений при нелинейном деформировании. Численное моделирование с помощью объемных элементов позволяет оценить влияние касательных напряжений при деформировании пластин большой толщины, а также деформации в срединной поверхности.

Метод конечных элементов основан на принципе виртуальной работы, который можно сформулировать в таком виде

$$\int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \left(d\{u\}^T \{F\} + \int_V d\{u\}^T \{f\} dV + \int_S d\{u\}^T \{p\} dS \right) = 0. \quad (3.24)$$

Здесь $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ – векторы деформаций и напряжений, $\{F\}$, $\{f\}$, $\{p\}$ – векторы сосредоточенных сил, распределенных нагрузок и поверхностных нагрузок соответственно. Напряжения связаны с упругими деформациями соотношениями $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}$, где $[D]$ – матрица упругости. Для полных деформаций имеем $\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\} = [P]\{u\}$, где $[L]$ – матрица, элементами

которой являются дифференциальные операторы. Учитывая, что $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^c\}$, выражение (3.24) записывается в виде

$$[K]\{u\} = \int_V [P]^T [D] \{\varepsilon^c\} dV + \{R\}, \quad (3.25)$$

где $[K] = \int_V [P]^T [D] [P] dV$ – матрица жесткости;

$\{R\} = \{F\} + \int_V [N]^T \{f\} dV + \int_S [N]^T \{p\} dS$ – вектор сил, обусловленных

внешними нагрузками. В скоростях (3.25) можно записать в виде:

$$\{\dot{u}\} = [K]^{-1} \left(\int_V [P]^T [D] \{\dot{\varepsilon}^c\} dV + \{\dot{R}\} \right). \quad (3.26)$$

Здесь $\{\dot{\varepsilon}^c\} = B \left(\sqrt{\{\sigma\}^T [A_*] \{\sigma\}} \right)^{n-1} [A_*] \{\sigma\}$ – вектор скоростей деформаций ползучести, $[A_*]$ – матрица:

$$[A_*] = B^{-\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} A_{22} + A_{33} & -A_{33} & -A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{33} & A_{11} + A_{33} & -A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{22} & -A_{11} & A_{11} + A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{23} \end{bmatrix}$$

В случае трансверсально-изотропного при ползучести материала коэффициенты этой матрицы определяются выражениями (3.11).

Напряжения $\{\sigma\}$ и деформации $\{\varepsilon\}$ определяются в точках, которые используются при вычислении объемных интегралов в (3.25), (3.26) с помощью квадратур Гаусса с весовыми коэффициентами, соответствующими этим точкам. Для решения уравнения (3.26) используется неявная схема численного интегрирования по времени с начальным условием $\{u_0\} = [K]^{-1} \{R_0\}$, поскольку $\{\varepsilon^c\} = 0$ при $t = 0$. Представленная в упрощенной форме схема расчета применима при решении задачи в геометрически линейной постановке [50; 170].

В случае решения геометрически нелинейной задачи матрицы элементов и векторы нагрузки получаются с использованием модифицированной формулировки Лагранжа [229]. Для уточнения перемещений $\{u\}$ на каждом временном шаге используется процедура Ньютона – Рафсона [125]. Получаемая при этом матрица жесткости преобразуется к виду $[K] = \int_V [P]^T [D] [P] dV + [S]$, где $[S]$ – матрица текущих напряжений Коши; $[P]$ – матрица в соотношениях, связывающих деформации и перемещения в деформированном состоянии. Согласно теоретическому руководству ANSYS вычисляются компоненты тензора логарифмических деформаций Генки, а для тензора напряжений Коши используется производная Яуманна.

Тестирование встроенной в пакет ANSYS модели ортотропного материала при решении задачи растяжения кубического образца с использованием элемента Solid45 показало удовлетворительное соответствие аналитическому решению [221, 223]. На рисунке 3.1 изображены изолинии перемещений u_x , u_y , u_z для куба, растягиваемого в направлении оси X для $k=1,5$ при $t=500$ ч. Оси X , Y , Z совпадают с направлением осей x_1 , x_2 , x_3 . Расчеты проводились для сплава АК4-1 ($T=200^\circ\text{C}$) в предположении более слабого деформирования материала в направлении оси Z для $k=1,0; 1,2; 1,5; 2,0$ при $n=8$, $B=0,5 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1}$. В таблице 3.1 приведены перемещения при растяжении кубического образца: упругие на момент времени $t=0$, а также при $t=500$ ч для различных значений k . Параметр R_z , вводимый командой TB,DATA после команды TB,Hill и характеризующий ортотропию материала, пересчитывался по формуле $R_z = ((k+1)/(2k))^{1/2}$. Для вычисленных перемещений видно, что выполняется условие $\Delta u_z / \Delta u_y = k$ ($\Delta u_z = u_{z/t=500} - u_{z/t=0}$, $\Delta u_y = u_{y/t=500} - u_{y/t=0}$), из условия несжимаемости при ползучести $u_x - (u_y + u_z) = 0$.

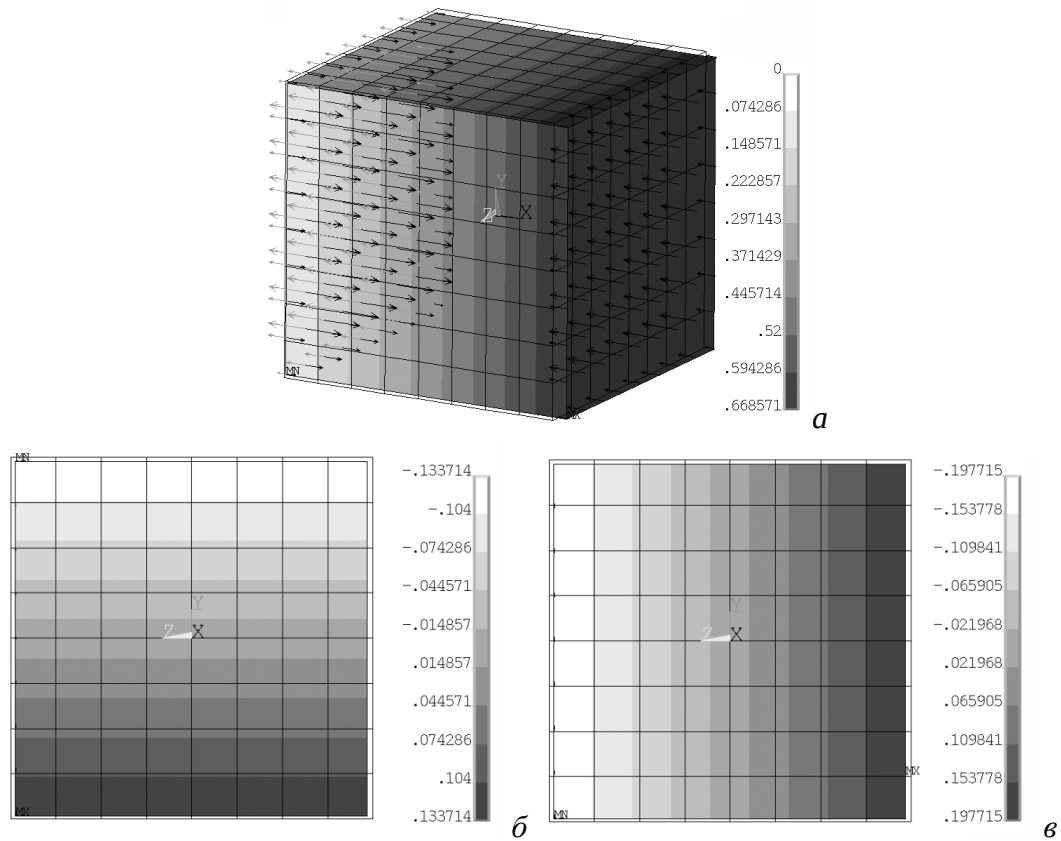


Рисунок 3.1 – Изолинии перемещений u_x – (а), u_y – (б), u_z – (в) при растяжении кубического образца силой в направлении оси X

Таблица 3.1 – Перемещения при растяжении кубического образца

тип расчета		u_x , мм	$u_y / 2$, мм	$u_z / 2$, мм
$t = 0$		0,0286	0,0057	0,0057
$t = 500$ ч	$k = 1$	0,6686	0,1657	0,1657
	$k = 1,2$	0,6686	0,1512	0,1803
	$k = 1,5$	0,6686	0,1337	0,1977
	$k = 2$	0,6686	0,1124	0,2191

3.3.1.4 Влияние трансверсально-изотропных свойств материала в направлении нормали к плите на изгиб пластины

Оценим влияние свойства слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении нормали плиты из трансверсально-изотропного материала на прогиб пластины в зависимости от формы поверхности (седлообразная, цилиндрическая и двойной положительной кривизны).

В таблицах 3.2 и 3.3 представлены результаты расчетов кривизны и скорости изменения кривизны для пластины, изгибаемой в седлообразную

поверхность моментом, равномерно распределенным вдоль кромок (рисунок 3.2, а) четырьмя методами решения: *метод 1* – оценка согласно формулам (3.19); *метод 2* – решение системы (3.14) – (3.16); *метод 3* – расчет с использованием конечно-элементной модели в трехмерной геометрически-линейной постановке в пакете ANSYS; *метод 4* – расчет с использованием конечно-элементной модели в трехмерной геометрически-нелинейной постановке [32]. Расчеты проводились с параметрами, соответствующими сплаву АК4-1 при $T=200^{\circ}\text{C}$ ($B = 0,5 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1}$, $n=8$ [188]) для пластины, занимающей в срединной плоскости область $-100 \leq x_i \leq 100$ мм ($i=1,2$). Толщина пластины $h=20$ мм, скручивающий момент $M_{12} = M = 925$ кГ·мм/мм, $E = 7000$ кГ/мм², $\nu = 0,4$, $t = 250$ ч. Предполагается что, прогиб пластины сопоставим с толщиной пластины. Для оценки влияния свойства слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении нормали плиты на прогиб расчеты были проведены в предположении $k = 1,0; 1,5; 2,0$. Это предположение согласуется с экспериментальными данными, представленными на рисунке 1.10 для сплава АК4-1 при $T=195^{\circ}\text{C}$.

При решении задачи изгиба пластины в 3D-постановке методом конечных элементов для исключения влияния краевых эффектов кривизна вычислялась вдоль диагонали в точке $x_1 = x_2 = 50$ мм ($w = \chi_{12} x_1 x_2$). Скорость изменения кривизны находилась на установившейся стадии при $150 \text{ ч} \leq t \leq 250 \text{ ч}$. На рисунке 3.2 оси X, Y, Z соответствуют осям x_i ($i=1,2,3$): $X = x_2, Z = x_1, Y = x_3$. В двух колонках справа таблицы 3.2 приведено отношение кривизны, вычисленной при значениях «коэффициента анизотропии» $k = 1,5$ и $2,0$ к кривизне, полученной при $k = 1,0$ в процентах. В таблице 3.3 приведены аналогичные результаты для скорости изменения кривизны при установившейся ползучести материала. Кривизна в таблице 3.2 приведена с учетом начальной кривизны при упругом деформировании при $t = 0$. Вычислить начальную кривизну можно по формуле

$\chi_{12} = 12(1+\nu)M_{12}/(Eh^3)$, полученной в предположении чистого изгиба аналогично (3.19) [1], или методом 2 при $t=0$. При указанных выше значениях скручивающего момента начальная кривизна составила $\chi_{k=1} = \chi_{k=1,5} = \chi_{k=2} = 2,775 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$. Начальная кривизна, вычисленная на базе точек $x_1 = x_2 = 50 \text{ мм}$ и $x_1 = x_2 = -50 \text{ мм}$ методом 3 составила $\chi_{k=1} = 2,89 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$, методом 4 $\chi_{k=1} = 2,88 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$. Для возможности приложения равномерно распределенного момента на кромках пластины использовался оболочечный элемент Shell181. При расчетах методами 3 и 4 использовалась сетка 10 на 10 элементов в плоскости пластины и 2 элемента по ее толщине. Все способы расчета свидетельствуют о том, что учет свойств анизотропии (более слабого сопротивления материала деформациям ползучести в направлении нормали плиты по сравнению с направлениями в плоскости плиты) ведет к замедлению процесса деформирования при формообразовании пластины в поверхность знакопеременной кривизны: при $k=2$ скорость изменения кривизны на установившейся стадии снижается на $\sim 40\%$.

Таблица 3.2 – Значение кривизны пластины $\chi = \chi_{12}$ при изгибе в поверхность седлообразной формы при $t = 250 \text{ ч}$

Метод	$\chi_{k=1}, 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$	$\chi_{k=1,5}, 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$	$\chi_{k=2}, 10^{-4} \text{ мм}^{-1}$	$\chi_{k=1,5}/\chi_{k=1}, \%$	$\chi_{k=2}/\chi_{k=1}, \%$
2	12,1	9,9	8,7	81,8	71,9
3	14,6	12,1	10,7	82,6	72,9
4	12,6	10,8	9,8	86,0	77,5

Таблица 3.3 – Значение скорости изменения кривизны пластины $\dot{\chi} = \dot{\chi}_{12}$ при изгибе в поверхность седлообразной формы при $150 \leq t \leq 250 \text{ ч}$

Метод	$\dot{\chi}_{k=1}, 10^{-6} \text{ мм}^{-1} \text{ ч}^{-1}$	$\dot{\chi}_{k=1,5}, 10^{-6} \text{ мм}^{-1} \text{ ч}^{-1}$	$\dot{\chi}_{k=2}, 10^{-6} \text{ мм}^{-1} \text{ ч}^{-1}$	$\dot{\chi}_{k=1,5}/\dot{\chi}_{k=1}, \%$	$\dot{\chi}_{k=2}/\dot{\chi}_{k=1}, \%$
1	3,053	2,238	1,797	73,3	58,9
2	3,307	2,453	2,004	74,2	60,6
3	3,948	2,944	2,41	74,6	61,0
4	2,844	2,326	1,996	81,8	70,2

Таблица 3.4 – Значение кривизны пластины при изгибе в поверхность цилиндрической формы при $t = 500$ ч

Метод	$\chi_{k=1}, 10^{-4}$ мм ⁻¹	$\chi_{k=1,5}, 10^{-4}$ мм ⁻¹	$\chi_{k=2}, 10^{-4}$ мм ⁻¹	$\chi_{k=1,5}/\chi_{k=1}, \%$	$\chi_{k=2}/\chi_{k=1}, \%$
2	21,21	32,07	40,07	151,2	188,9
3	24,34	32,15	37,3	132,1	153,2
4	24,42	32,42	37,8	132,8	154,8

Таблица 3.5 – Значение скорости изменения кривизны пластины при изгибе в поверхность цилиндрической формы при $400 \leq t \leq 500$ ч

Метод	$\dot{\chi}_{k=1}, 10^{-6}$ мм ⁻¹ ч ⁻¹	$\dot{\chi}_{k=1,5}, 10^{-6}$ мм ⁻¹ ч ⁻¹	$\dot{\chi}_{k=2}, 10^{-6}$ мм ⁻¹ ч ⁻¹	$\dot{\chi}_{k=1,5}/\dot{\chi}_{k=1}, \%$	$\dot{\chi}_{k=2}/\dot{\chi}_{k=1}, \%$
1	3,053	5,084	6,558	166,5	214,8
2	3,298	5,488	7,079	166,4	214,6
3	3,702	5,248	6,265	141,8	169,2
4	3,742	5,372	6,489	143,6	173,4

Аналогичные расчеты для задач изгиба квадратной пластины в поверхность цилиндрической формы с использованием всех четырех методов (рисунок 3.2, б, таблицы 3.4 и 3.5) показали ускорение процесса деформирования в сравнении с расчетом в изотропной постановке. Вычисления проводились для сплава АК4-1 ($T=200^\circ\text{C}$) с характеристиками, приведенными выше при $M_{22} = M = 1850 \text{ кГ} \cdot \text{мм/мм}$ ($\chi_{11} = 0$), $t = 500$ ч. Для исключения влияния краевых эффектов кривизна вычислялась на базе точек $x_2 = \pm 50 \text{ мм}$, $x_1 = 0$. Скорость изменения кривизны определялась на установившейся стадии при $400 \leq t \leq 500$ ч.

В работах [11, 35] приведены результаты расчетов для тонкой пластины, прогиб которой превосходит толщину пластины. На рисунке 3.3, а изображены результаты расчетов кривизны $\chi = \chi_{11} = \chi_{22}$ для квадратной пластины ($-0,09 \leq x_i \leq 0,09 \text{ м}$, $i=1, 2$, $h=8,7 \text{ мм}$), изгибаемой моментами $M_{11} = M_{22} = 5,109 \cdot 10^{-3} \text{ МПа} \cdot \text{м/м}$, $t = 2$ ч в поверхность двойной положительной кривизны (параболоид), при $k = 1$ (линии 1, 3, 5, 7) и $k = 1,5$ (линии 2, 4, 6, 8) [35] для сплава В95пч (почти чистый сплав В95).

Экспериментальные данные для этого сплава (лист толщиной 8,7 мм) при температуре 180 °С приведены в работе [97]. Расчеты были проведены при следующих значениях параметров сплава В95пч: $B = 9,5 \cdot 10^{-23} (\text{МПа})^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$, $n = 6,7$, $\nu = 0,4$, $E = 56\,500 \text{ МПа}$. Эти параметры описывают ползучесть сплава при напряжениях в диапазоне 240-280 МПа. На рисунке 3.3, а изображены линии 1, 2, полученные методом 1, линии 3, 4 – методом 2, линии 5, 6 – методом 3 и линии 7, 8 – методом 4.

Скорость изменения кривизны, вычисленная по формуле (3.23) при $k = 1,5$ составляет $\dot{\chi}_{k=1,5} = 5,834 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, при $k = 1,0$ – $\dot{\chi}_{k=1} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, отношение $\dot{\chi}_{k=1,5} / \dot{\chi}_{k=1} = 2,01$. Необходимо отметить, что методы 1, 2 и 3 не учитывают при расчете деформации срединной поверхности и дают существенно завышенные значения кривизны по сравнению со значениями, полученными методом 4 (линии 7, 8 на рисунке 3.3, а). Соотношение кривизны, вычисленной методом 4 в момент времени $t = 1 \text{ ч}$ при $k = 1,5$, к кривизне, вычисленной при $k = 1,0$, без учета кривизны в начальный момент времени ($t = 0$) составляет $\Delta\chi_{k=1,5} / \Delta\chi_{k=1} = 1,37$. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что процесс деформирования в поверхность двойной положительной кривизны пластины из трансверсально-изотропного материала с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении нормали происходит более интенсивно, по сравнению с процессом деформирования пластины в предположении, что материал изотропный.

На рисунке 3.3, б представлены результаты аналогичных расчетов для задачи изгиба пластины из того же сплава в поверхность цилиндрической формы ($\chi(t) = \chi_{22}(t)$, $M_{22} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ МПа} \cdot \text{м/м}$, $\chi_{11} = 0$) [11, 35]. В этом случае всеми способами расчета получены более близкие значения кривизны. Объяснить это можно тем, что гауссова кривизна равна нулю, и изгиб можно сопоставить с изгибом балки [167, с.98], для которой используется приближенная теория расчета при прогибах значительно превосходящих

толщину балки. Скорость изменения кривизны, вычисленная по формуле (3.22), составляет: при $k=1,5$ $\dot{\chi}_{k=1,5} = 7,756 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, при $k=1,0$ $\dot{\chi}_{k=1} = 5,023 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, отношение $\dot{\chi}_{k=1,5} / \dot{\chi}_{k=1} = 1,54$. Отношение кривизны, вычисленной методом 4 в момент времени $t=1$ ч при $k=1,5$, к кривизне, вычисленной при $k=1,0$, без учета кривизны в начальный момент времени ($t=0$) составляет $\Delta\chi_{k=1,5} / \Delta\chi_{k=1} = 1,29$.

На рисунке 3.3, в представлены результаты расчетов для задачи изгиба пластины в поверхности седлообразной формы ($M_{12} = 2,95 \cdot 10^{-3} \text{ МПа} \cdot \text{м/м}$, $\chi(t) = \chi_{12}(t)$) [11, 35]. Скорость изменения кривизны, вычисленная по формуле (3.19), составляет: при $k=1,5$ $\dot{\chi}_{k=1,5} = 3,855 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, при $k=1,0$ – $\dot{\chi}_{k=1} = 5,023 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, отношение $\dot{\chi}_{k=1,5} / \dot{\chi}_{k=1} = 0,77$. Соотношение кривизны, вычисленной методом 4 в момент времени $t=2$ ч при $k=1,5$, к кривизне, вычисленной при $k=1,0$, без учета кривизны в начальный момент времени ($t=0$) составляет $\Delta\chi_{k=1,5} / \Delta\chi_{k=1} = 0,9$. Различие значений кривизны, полученных методом 4 (линии 7, 8 на рисунке 3.3, а, в), от значений, рассчитанных другими способами, свидетельствует о том, что при деформировании достаточно тонкой пластины в сложную поверхность двойной кривизны необходим учет деформаций срединной поверхности.

Несмотря на различие в значениях полученной кривизны, все рассмотренные методики можно использовать для оценки влияния анизотропии на интенсивность процессов деформирования. Анализ всех полученных результатов подтверждает существенное влияние анизотропии по нормали к листу при изгибе. Не учет деформационно-прочностных особенностей поведения материалов при решении прикладных задач формообразования деталей и прогнозировании их дальнейшей эксплуатации может приводить к существенным ошибкам.

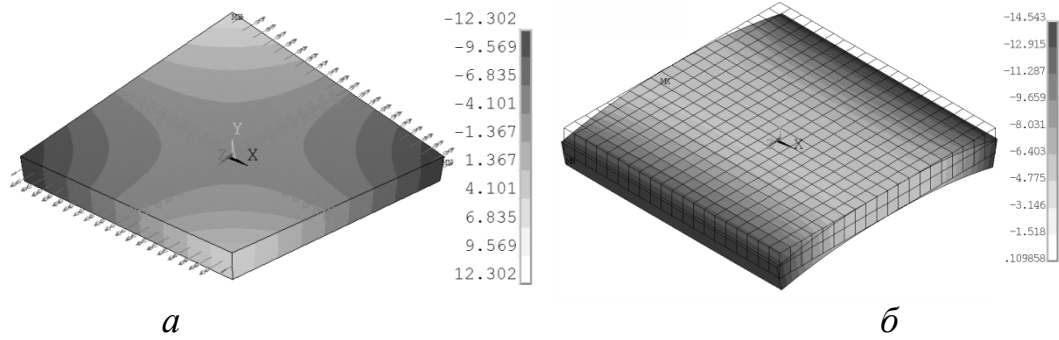


Рисунок 3.2 – Прогиб, рассчитанный методом конечных элементов в 3D постановке при $k=1,5$ для задачи изгиба пластины скручивающим моментом, равномерно распределенным вдоль кромок (а); изгиб пластины в цилиндрическую форму (б)

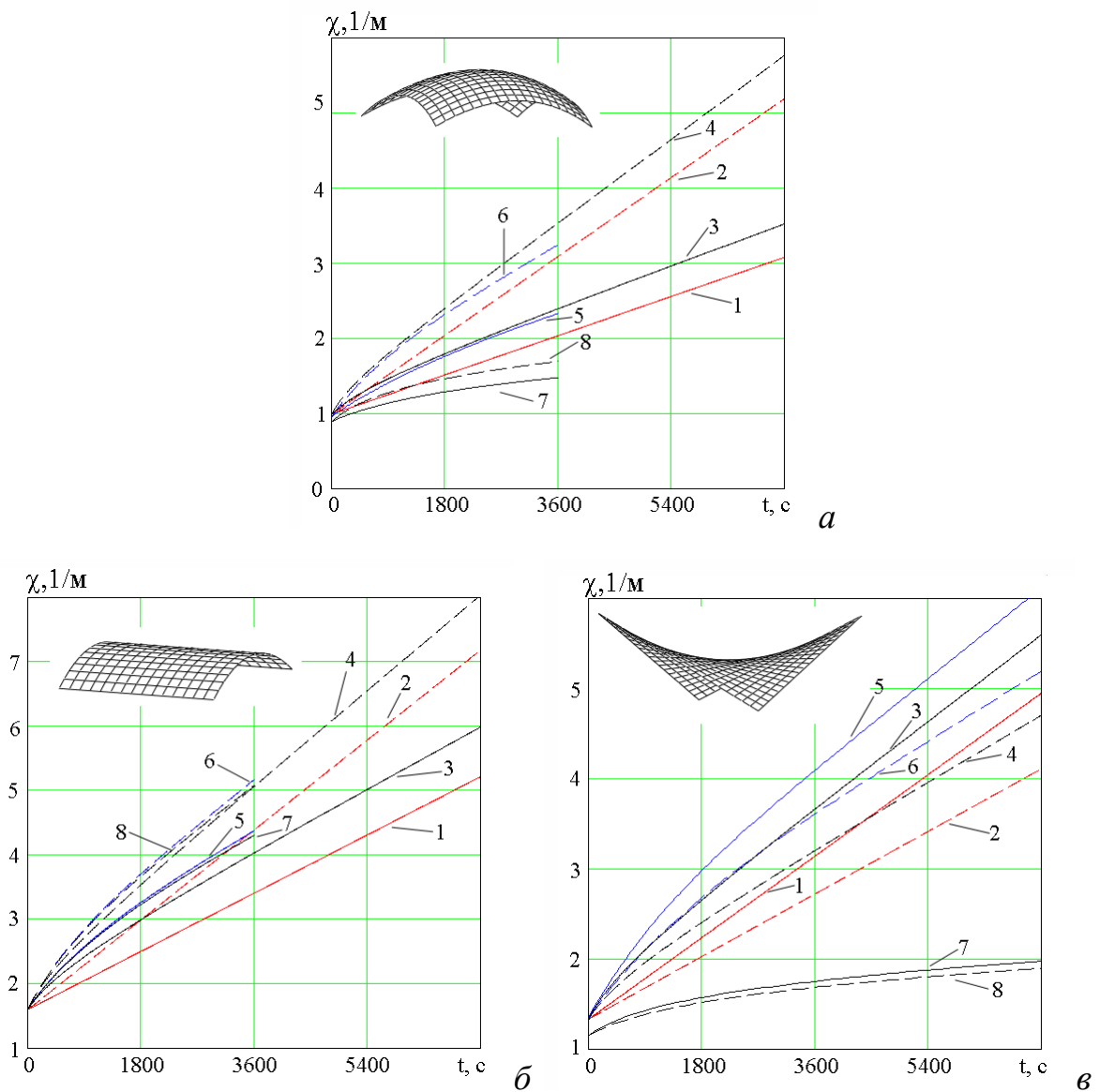


Рисунок 3.3 – Кривизна, рассчитанная для задачи изгиба пластины в поверхность двойной положительной кривизны (а); в цилиндрическую поверхность (б); в седлообразную поверхность (в); линии 1,3,5,7 – $k=1$; линии 2,4,6,8 – $k=1,5$

3.3.1.5 Экспериментальная апробация методов расчета на задаче кручения пластины из изотропного материала

В [15] проведена экспериментальная проверка рассмотренных методов расчета и модели (3.6) – (3.8) на примере решения задачи о кручении пластины. Как уже отмечалось, кручение пластины можно реализовать путем приложения четырех сил, приложенных в углах [35; 170; 223], схема экспериментальной установки приведена в [100].

Для проверки методов было рассмотрено кручение пластины из *изотропного сплава VT20 при $T=750$ °C*. Эксперименты проводились для квадратных пластин различной толщины h мм в диапазоне от 10 до 25 мм и с длинной стороны a от 170 до 200 мм [100]. На рисунке 3.4 показана пластина ($h=17$ мм, $a = 180$ мм) с характерной линейчатой формой поверхности, в случае, когда величина прогиба пластины сопоставима с ее толщиной. Линейчатая форма поверхности свидетельствует о том, что деформации в срединной поверхности незначительны, и для расчета и оценок можно использовать метод 1 – формулы (3.19) и метод 2 – решение системы (3.14), (3.15). Несложно показать, что в предположении чистого изгиба кривизна χ_{12} , совпадает с кривизной вдоль диагонали пластины χ , при этом максимальное значение прогиба можно вычислить по формуле $w = \chi a^2 / 4$. Численное моделирование выполнено при $k=1$ и следующих значениях констант: $n = 2,5$, $B = B_{11} = 8,89 \cdot 10^{-10} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$, $E = 31,5 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,4$ [100].

На рисунке 3.5 представлены экспериментальные данные и результаты численных расчетов для образцов 1, 3, 4 с размерами $h \approx 25$ мм, $a = 200$ мм и образца 2 с размерами $h=17$ мм, $a = 180$ мм. Точками показаны – экспериментальные значения кривизны диагонали пластины при кручении силами величиной $F = 2M = 2M_{12}$, приложенными в углах, сплошные линии – расчет методом 2 (решение системы (3.14) – (3.16)) , штриховые линии – расчет методом 4 (решение задачи кручения пластины силами,

приложенными в углах с использованием конечно-элементного пакета ANSYS с учетом геометрической нелинейности, схема кручения на рисунке 2.6). Кривизна вычислялась по прогибу диагонали в центре на базе 100 мм. При проведении расчетов в пакете ANSYS пластина разбивалась на шесть элементов по толщине. Экспериментальные данные и расчетные линии 1 – 4 соответствуют крутящему моменту $M = 1284; 791; 2453; 3422$ Н·м/м (толщина образцов равна $h = 25,0; 17,0; 25,2; 25,0$ мм), интенсивность напряжений в характеристической точке, вычисленная по формуле (3.21), составляет $\hat{\sigma}_i = \sqrt{3}\hat{\sigma}_{12} = 14,72; 19,62; 27,68; 39,23$ МПа соответственно. Значения кривизны, вычисленные методами 2 и 4 различаются на 5-10 %. Это объясняется тем, что для большой толщины пластин задачи кручения силами, приложенными в углах, и моментом, равномерно распределенным вдоль кромок [170], не являются эквивалентными, поскольку в условиях ползучести краевой эффект затухает медленнее, чем при упругом деформировании [7, 23]. В условиях, приближенных к чистому изгибу влиянием краевого эффекта можно пренебречь и для расчетов использовать более простой и требующий меньших затрат времени при реализации метод 2.

На рисунке 3.6 приведена зависимость интенсивности напряжений σ_i от времени, полученная методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности в узлах конечно-элементной сетки $x_1 = x_2 = 30$ мм при $F = 2M$, $M = 3422$ Н·м/м. Линиями 2, 6 показана интенсивность напряжений в окрестности характеристических точек. Осредненное значение σ_i , полученное методом 4, близко к значению $\bar{\sigma}_i = 39,23$ МПа, вычисленному по формуле (3.21). На рисунке 3.6 видно, что в процессе деформирования происходит перераспределение напряжений по толщине пластины от начального упругого состояния до состояния развитых деформаций ползучести. Наблюдается уменьшение интенсивности напряжений вблизи поверхностей $x_3 = \pm h/2$, и ее увеличение при $x_3 = 0$. Монотонное убывание

или возрастание интенсивности напряжений при больших значениях времени можно объяснить постепенным накоплением мембранных деформаций, а также смещением нейтральной поверхности.

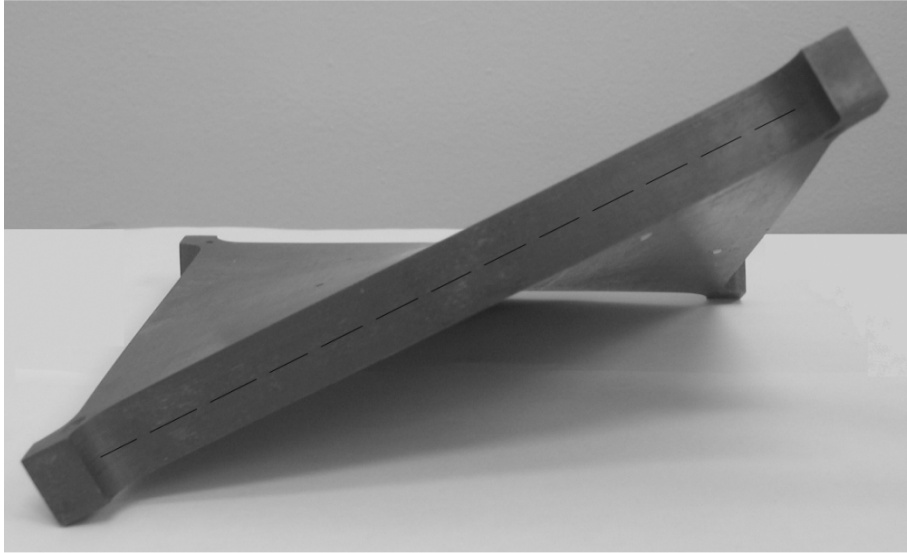


Рисунок 3.4 – Линейчатая поверхность пластины после кручения

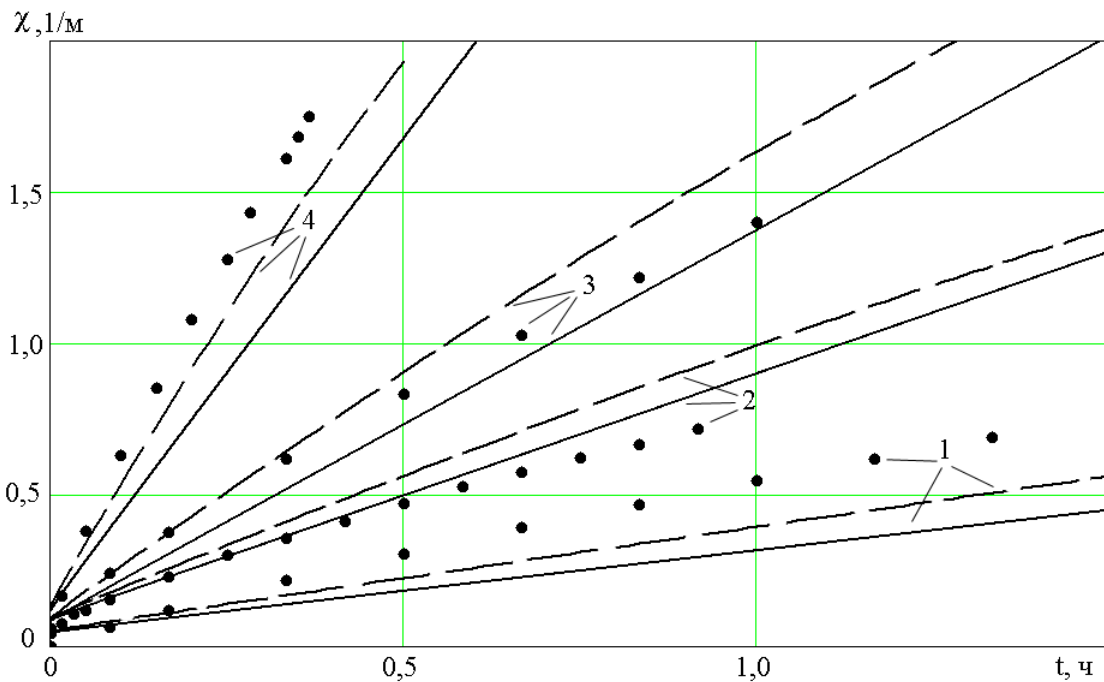


Рисунок 3.5 – Зависимость кривизны диагонали пластины от времени:

точки - экспериментальные данные; сплошные линии – расчет методом 2 (решение системы (3.14) – (3.16)); штриховые – расчет методом конечных элементов;

1 – $M = 1284 \text{ Н·м/м}$, $h = 25 \text{ мм}$, 2 – $M = 791 \text{ Н·м/м}$, $h = 17 \text{ мм}$,

3 – $M = 2453 \text{ Н·м/м}$, $h = 25,2 \text{ мм}$, 4 – $M = 3422 \text{ Н·м/м}$, $h = 25 \text{ мм}$

На рисунке 3.7 показаны изолинии интенсивности напряжений в сечении вдоль одной из диагоналей пластины, проходящей через узлы с координатами $x_1 = x_2 = 30$ мм при $t=0,5$ ч, $M=3422$ Н·м/м. Аналогичный расчет в геометрически линейной постановке в пакете ANSYS (методом 3) показал, что по мере развития деформаций ползучести интенсивность напряжений стремится к постоянной величине, зависящей от поперечной координаты $\sigma_i = C(x_3) = C(-x_3)$.

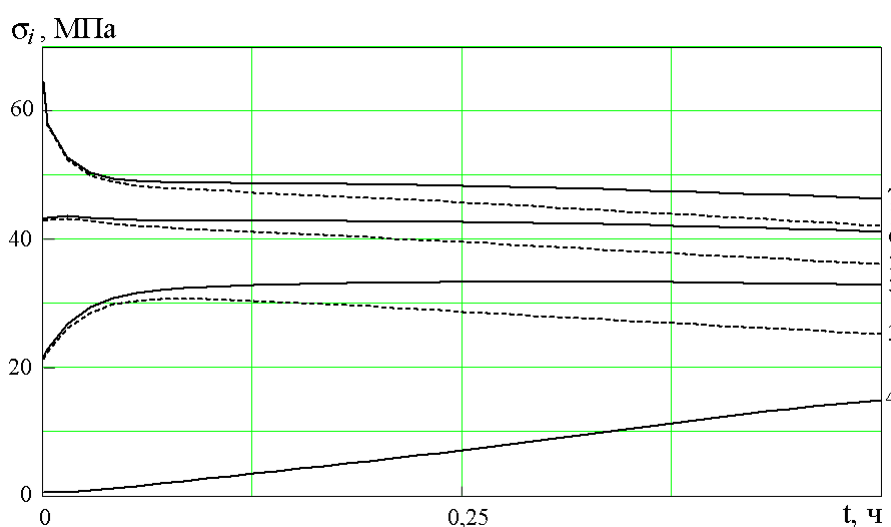


Рисунок 3.6 – Зависимость интенсивности напряжений от времени, полученная методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности при $M=3422$ Н·м/м в узлах $x_1 = x_2 = 30$ мм: 1 – $x_3 = -h/2$, 2 – $x_3 = -h/3$, 3 – $x_3 = -h/6$, 4 – $x_3 = 0$, 5 – $x_3 = h/6$, 6 – $x_3 = h/3$, 7 – $x_3 = h/2$

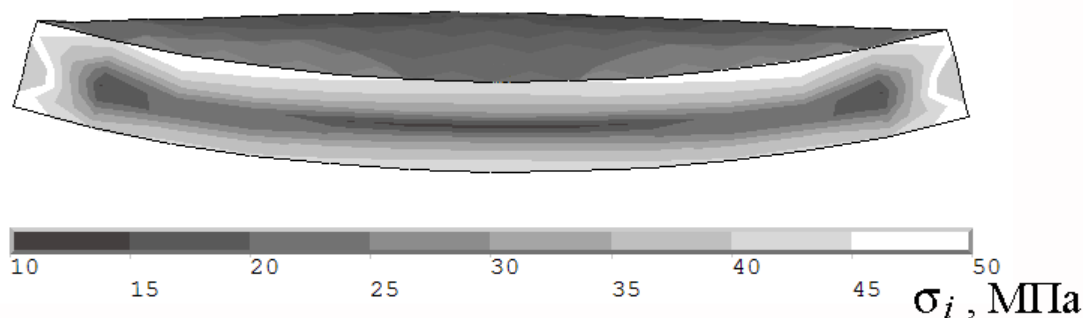


Рисунок 3.7 – Изолинии интенсивности напряжений в сечении вдоль диагонали пластины при $t=0,5$ ч

3.3.1.6 Экспериментальная апробация модели и методов расчета на задаче кручения пластины из трансверсально-изотропного материала

На рисунке 3.8, *а* изображены диаграммы ползучести и их аппроксимация на установившейся стадии при растяжении образцов, вырезанных из плиты толщиной 12мм из сплава 1163Т (Al-Cu-Mg) в направлении проката и поперек при $T=400^{\circ}\text{C}$. На рисунке 3.8, *б* для тех же диаграмм ползучести приведена зависимость $\ln(\dot{\epsilon}^c) \sim \ln(\sigma)$, на основе которой вычислены аппроксимационные коэффициенты $n=7$, $B = B_{11} = 6,57 \cdot 10^{-16} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$ [37] (эксперименты и аппроксимация выполнены Б.В. Горевым). «Коэффициент анизотропии», полученный в экспериментах, равен $k = 2,5$. Модуль Юнга $E = 55 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,4$.

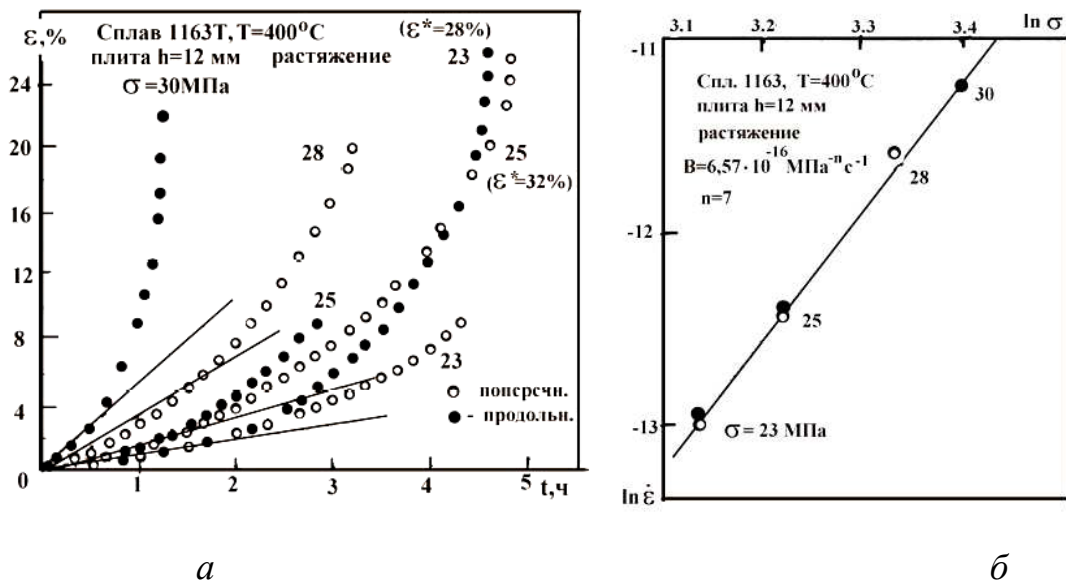


Рисунок 3.8 – Диаграммы ползучести и их аппроксимация на установившейся стадии при растяжении образцов из сплава 1163Т в направлении проката и поперек при $T=400^{\circ}\text{C}$ (*а*); зависимость $\ln(\dot{\epsilon}^c) \sim \ln(\sigma)$ (*б*).

На рисунке 3.9 показана пластина из трансверсально-изотропного сплава марки 1163Т после деформирования при $T=400^{\circ}\text{C}$ в течение 3 ч кручения четырьмя силами $F = 2M = 900 \text{ Н}$, приложенными в углах [15] (эксперименты В.А. Блинов, И.А. Банщикова). Форма пластины существенно отличается от линейчатой.

Точки 1, 2 на рисунке 3.10 – зависимость кривизны диагонали от времени для пластин из сплава 1163Т при кручении силами $F = 2M = 760$; 900 Н, приложенными в углах. Образцы были вырезаны из плиты толщиной 12 мм и имели размеры 180×180 мм, $h = 10,4$ мм. Видно, что значения кривизны $\chi < 0,8$ 1/м, полученные методами 2 и 4, различаются незначительно, при $\chi > 0,8$ 1/м форма пластины постепенно отклоняется от линейчатой формы поверхности (см. рисунок 3.9). Экспериментальные значения кривизны на участке $\chi < 0,8$ 1/м больше расчетных. Возможно, это обусловлено большей интенсивностью процесса деформирования, характеризующегося большими напряжениями при ползучести в начале процесса деформирования. Следует отметить, что определяющие соотношения с выбранными константами, достаточно точно описывают деформирование материала в диапазоне $20 \text{ МПа} < \sigma_i < 30 \text{ МПа}$ (рисунок 3.8). Аналогично высокий уровень напряжений наблюдался для сплава марки ВТ20 при $t < 0,1$ ч (кривые 1 и 7 на рисунке 3.6), при этом из результатов расчета балок при изгибе [100] следует, что определяющие соотношения с выбранными константами для сплава ВТ20, достаточно точно описывают деформирование материала в диапазоне $20 \text{ МПа} < \sigma_i < 60 \text{ МПа}$, т.е. в том числе при $t < 0,1$ ч.

На рисунке 3.11 показаны изолинии интенсивности напряжений в сечении параллельном кромке пластины, на расстоянии от центра равном 40 мм, при этом деформации при $t = 2$ ч, $F = 760$ Н, $k = 1$ не превышают 2 %. Несимметричный характер распределения изолиний подтверждает наличие мембранных деформаций. На рисунке 3.12 изображены зависимости напряжений σ_{12} (а), $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ (б) по толщине пластины в точке на диагонали $x_1 = x_2 = 35$ мм для $F = 2M = 760$ Н. Линии 1, 2, 3 соответствуют $t = 0, 900, 7200$ с. Напряжения вычислялись путем усреднения значений напряжений в точках интегрирования конечного элемента (четыре точки расположены на расстоянии 0,57735 от центра конечного элемента в локальных координатах в направлении оси x_3 , и аналогично четыре точки расположены на расстоянии $-0,57735$).

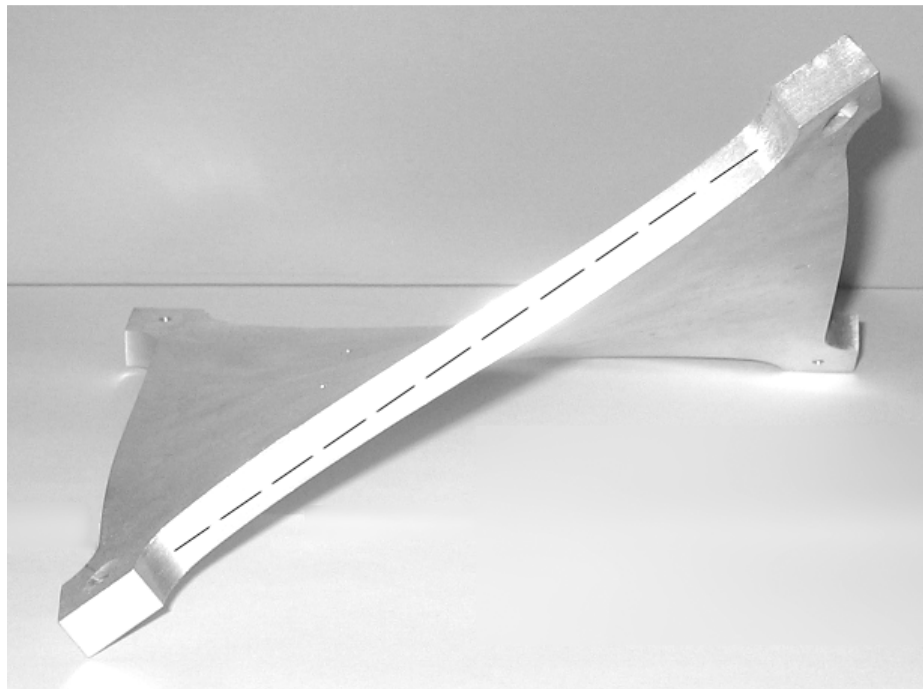


Рисунок 3.9 – Форма пластины из сплава 1163Т после деформирования в течение 3 ч

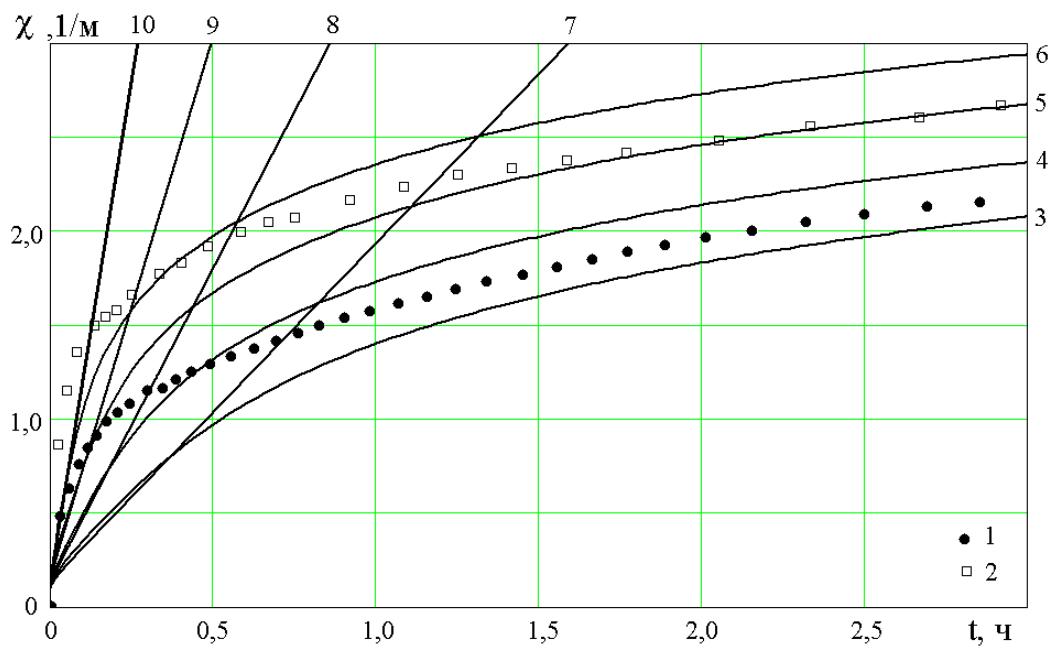


Рисунок 3.10 – Зависимость кривизны диагонали пластины из сплава марки 1163Т при кручении силами F , приложенными в углах, от времени: точки 1, 2 – экспериментальные данные, линии 3-6 – расчет конечно-элементным методом с учетом геометрической нелинейности; линии 7-10 – решение системы (3.14) – (3.16): линии 1, 3, 4, 7, 8 – $F = 760$ Н (3, 7 – $k = 2,5$, 4, 8 – $k = 1$); 2, 5, 6, 9, 10 – $F = 900$ Н (5, 9 – $k = 2,5$, 6, 10 – $k = 1$)

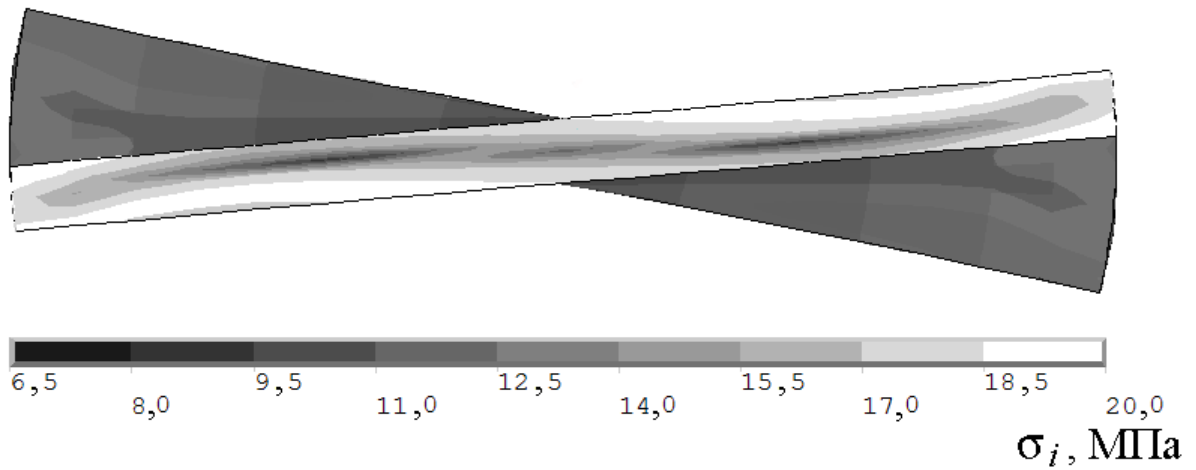


Рисунок 3.11 – Изолинии интенсивности напряжений в сечении, параллельном кромке пластины, на расстоянии от центра равном 40 мм

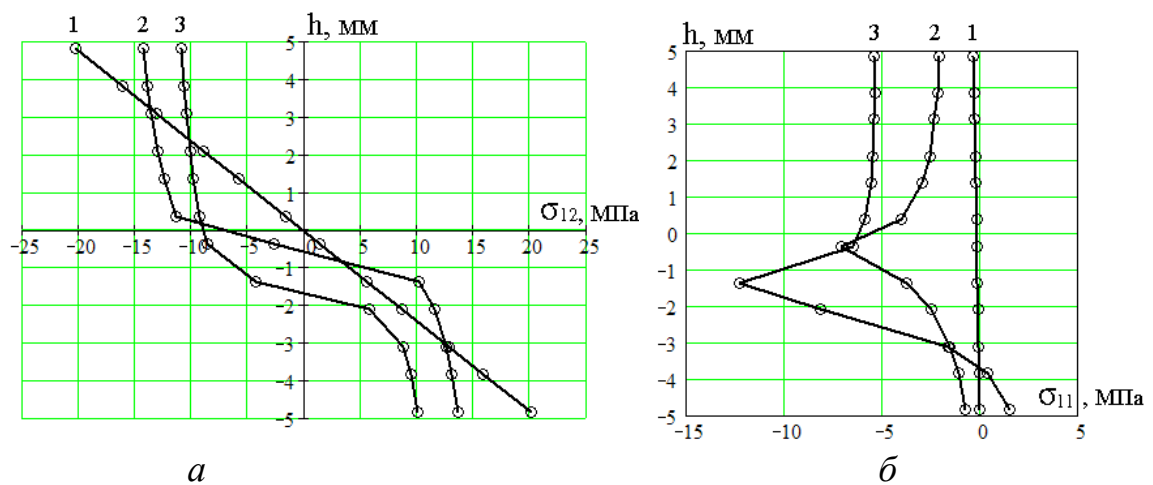


Рисунок 3.12 – Зависимости напряжений σ_{12} (а), $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ (б) по толщине пластины в точке на диагонали $x_1 = x_2 = 35$ мм для $F = 2M = 760$ Н. Линии 1, 2, 3 – соответствуют $t = 0, 900, 7200$ с.

Таблица 3.6 – Значения прогиба w в точке $x_1 = x_2 = 40$ мм, $x_3 = 0$ и кривизны диагонали пластины χ , вычисленной по этим прогибам.

Метод	h , м	M , Н·м/м	$t=0$		$k=1,0, t=2$ ч		$k=2,5, t=2$ ч		$1-\lambda_s$, %
			$w \cdot 10^4$, м	χ , 1/м	$w \cdot 10^3$, м	χ , 1/м	$w \cdot 10^3$, м	χ , 1/м	
2	0,0200	1250	–	0,048	–	1,642	–	0,916	45,5
4	0,0104	380	1,69	0,106	3,42	2,139	2,93	1,832	15,1
4	0,0040	50	3,73	0,233	1,80	1,126	1,61	1,008	13,2

В таблице 3.6 приведены расчетные значения прогиба w в точке $x_1 = x_2 = 40$ мм, $x_3 = 0$ и вычисленной по этому прогибу кривизны $\chi = \chi_{12}$ диагонали пластины при $t = 0; 2$ ч и $k = 1,0; 2,5$ для пластин различной толщины. Для сплава марки 1163Т в случае плоского напряженного состояния отношение кривизны пластины из трансверсально-изотропного материала ($k=2,5$) к кривизне пластины из изотропного материала ($k=1,0$) $\lambda_s = \chi(k)/\chi(1)$ (без учета начальной упругой составляющей) составляет 0,55, т.е. вследствие анизотропии материала в направлении нормали при чистом изгибе кривизна уменьшается на 45 %. При увеличении прогиба, уменьшении толщины пластины и, следовательно, при увеличении мембранных деформаций влияние анизотропии материала в направлении нормали при деформировании пластины в условиях нагружения пластины четырьмя силами, приложенными в углах, снижается и составляет $\lambda_s \sim 0,85$.

Поскольку в случае чистого изгиба пластины под действием постоянного момента в условиях установившейся ползучести можно считать, что выполняется $\Delta\chi(k)/\Delta\chi(1) = \dot{\chi}(k)/\dot{\chi}(1)$, ($\Delta\chi = \chi_b - \chi_a$, $\chi_b = \chi(t_b)$, $\chi_a = \chi(t_a)$) то верхнюю оценку $1 - \lambda_s < 1 - \lambda_{s*}$ можно получить из формулы (3.19), вычислив отношение скоростей изменения кривизны для трансверсально-изотропного и изотропного материалов

$$\lambda_{s*} = \frac{\dot{\chi}_{12}(k)}{\dot{\chi}_{12}(1)} = \left(\frac{2k+2}{3k+1} \right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Для сплава марки 1163Т при $k=2,5$ $\lambda_{s*} = 0,54$, т.е. скорость изменения кривизны уменьшается на 46 %. Изложенный метод расчета в предположении чистого изгиба позволяет оценить влияние трансверсальной изотропии в направлении нормали на процесс деформирования пластины при ползучести. Максимальное влияние при деформировании в другие формы поверхностей можно оценить по формулам (3.17).

3.3.1.7 Влияние трансверсально-изотропных свойств материала в направлении сдвига на изгиб гладких и оребренных пластин

Приведенные в ряде работ [95; 97; 98] результаты экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях σ на растяжение и сжатие образцов, вырезанных в различных направлениях (продольном, поперечном, по нормали к плите и под углом 45° к направлению нормали к плите), свидетельствуют, что для некоторых сплавов (В95пч, 1161, АК4-1) направление под углом 45° к направлению нормали к плите является самым слабым направлением в смысле сопротивления деформированию в условиях ползучести.

В [13; 36] с помощью модели (3.6)–(3.8) исследовано влияние пониженного сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите (т.е. в поперечно-сдвиговом направлении), по сравнению с сопротивлением деформациям ползучести в плоскости листа и по нормали, на процессы изгиба пластин и кручения стержней.

Для сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu, толщина плиты 50 мм) при $T=180^\circ\text{C}$ на основании проведенных Б.В. Горевым экспериментов на растяжение и сжатие установлена существенная анизотропия и разнсопротивляемость при ползучести, а также определено самое слабое направление под углом 45° к направлению нормали к плите [97, 193]. На рисунке 3.13 в логарифмических координатах приведены результаты этих экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях на растяжение образцов в продольном (вдоль проката), поперечном и по нормали плиты направлениям, на сжатие в продольном направлении и на растяжение образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите. При аппроксимации этих данных на установившейся стадии ползучести по степенной зависимости показатель ползучести принят одинаковым $n = 10$ для всех направлений и не зависит от

знака прикладываемой нагрузки. Получены следующие коэффициенты в формулах (3.5): $B_{11}^+ = B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_0 = 6,3 \cdot 10^{-31} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$ – для продольного, поперечного направлений и направления по нормали к плите при растяжении; $B_{23}^+ = B_{31}^+ = B_{\Delta} = 3,9 \cdot 10^{-30} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$ – для направления под углом 45° к нормали плиты при растяжении; $B_{11}^- = B_{\bullet} = 2,0 \cdot 10^{-31} (\text{МПа})^{-n} \text{с}^{-1}$ – для продольного направления плиты при сжатии [97]. Видно, что интенсивности процесса для продольного направления на растяжение и на сжатие отличаются более чем в три раза. Сравнение результатов экспериментов на растяжение для образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали плиты с результатами экспериментов на растяжение для продольного, поперечного и по нормали плиты направлений показывает увеличение интенсивности процесса ползучести почти в 6 раз. Модуль Юнга сплава В95пч равен $E = 55 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$.

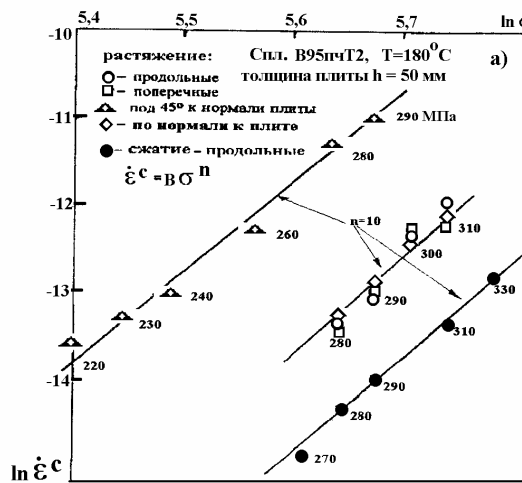


Рисунок 3.13 – Зависимости $\ln(\dot{\epsilon}_c) - \ln(\sigma)$ на установившейся стадии ползучести, полученные из испытаний на растяжение и сжатие образцов из сплава В95пч при $T=180^\circ\text{C}$ для разных направлений плиты толщиной 50 мм

Для того чтобы оценить влияние свойств в сдвиговом направлении на процесс деформирования расчеты проводились только с учетом свойств материала на растяжение в предположении, что $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0$, $B_{23} = B_{31} = B_{\Delta}$. При решении задач изгиба изотропных пластин влияние

поперечных касательных напряжений, как правило, несущественно и проявляется в краевых зонах вблизи ребер и отверстий [199]. В случае анизотропного материала это влияние может оказаться значительным [213; 283].

На рисунке 3.14, *a* представлены результаты расчетов методом конечных элементов кривизны $\chi = \chi_{12}$ для пластины толщиной $h=20$ мм с размерами $a = 0,09$ м, $-a \leq x_i \leq a$ ($i=1, 2$) скручиваемой четырьмя силами величиной $F = 3,2 \cdot 10^{-2}$ МН, приложенными в углах в течение $t=1$ ч, в знакопеременную седлообразную поверхность в предположении изотропных свойств материала (линии 1, 3) и с учетом свойства под углом 45° к направлению нормали к плите (линии 2, 4) для сплава В95пч ($T=180^\circ\text{C}$). Направление 3 совпадает с нормалью к пластине. Для сравнения приведены расчеты с использованием пакета ANSYS в геометрически линейной (линии 1, 2) и нелинейной (линии 3, 4) постановках. Результаты вычислений свидетельствуют о том, что процесс кручения пластины с учетом слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите происходит на 14 % (линии 1, 2) и 5% (линии 3, 4) интенсивнее, по сравнению с процессом деформирования пластины в предположении, что свойства материала изотропны. Вклад деформации срединной поверхности начинает оказывать существенное влияние на процесс деформирования после того, как прогиб становится сопоставим с толщиной пластины. Учет ортотропных свойств при ползучести активируется командами TB,Creep и TB,Hill. Сдвиговые коэффициенты R_{xy}, R_{yz} , вводимые командой TB,DATA связаны с коэффициентами B_{ij} соотношениями

$$R_{xy} = R_{yz} = \left(\frac{3}{4(B_{\Delta} / B_0)^{2/(n+1)} - 1} \right)^{1/2}, \quad R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = R_{xz} = 1.$$

Аналогичные результаты изображены на рисунке 3.14, *б* для пластины из того же сплава $h=12$ мм в предположении изотропных свойств материала (линии 1, 3, 5) и с учетом слабого направления под углом 45° к направлению нормали к плите (линии 2, 4, 6) [34]. Расчеты выполнены при

$F = 1,14 \cdot 10^{-2}$ МН – линии 1 – 4 ; $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$ МН – линии 5, 6. С уменьшением толщины пластины влияние свойства пониженного сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите уменьшается: 6 % – линии 1, 2 (геометрически линейная постановка) ; 3% – линии 3, 4; 2 % – линии 5, 6 (геометрически нелинейная постановка). Значительный вклад на процесс деформирования оказывают деформации срединной поверхности.

На рисунке 3.15, *а* изображены изолинии напряжения σ_{11} в системе координат $X = x_2, Z = x_1, Y = x_3$ для задачи кручения пластины толщиной 12 мм, вычисленные с учетом геометрической нелинейности. На рисунке 3.15, *б* – изолинии касательных напряжения σ_{23} на кромках пластины толщиной 20 мм. В целом, влияние свойства слабого сопротивления в направлении сдвига на прогиб гладкой пластины при изгибе незначительное.

Для оценки влияния пониженного сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите на процессы деформирования выполнены аналогичные расчеты для задач кручения в седловидную поверхность и изгиба в цилиндрическую поверхность квадратных оребренных пластин [13].

В таблице 3.7 приведены результаты расчетов с учетом геометрической нелинейности для задачи кручения в седловидную поверхность оребренной пластины четырьмя силами Q , приложенными в углах (расчеты выполнены Д.М. Петровым [13]). Размер стороны пластины равен 180 мм, ребра имеют диагональную ориентацию, ширина ребер 3 мм. Толщина пластин h и высота ребер h_r для пластин, для которых были выполнены расчеты, указаны в таблице 3.7. В этой таблице также приведены кривизна вдоль диагонали, вычисленная по прогибу в точке $x_1 = x_2 = 6,9$ мм при $t_* = 1$ ч без учета упругой составляющей в предположении изотропных свойств материала χ_{is} и свойства слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении χ_{sh} .

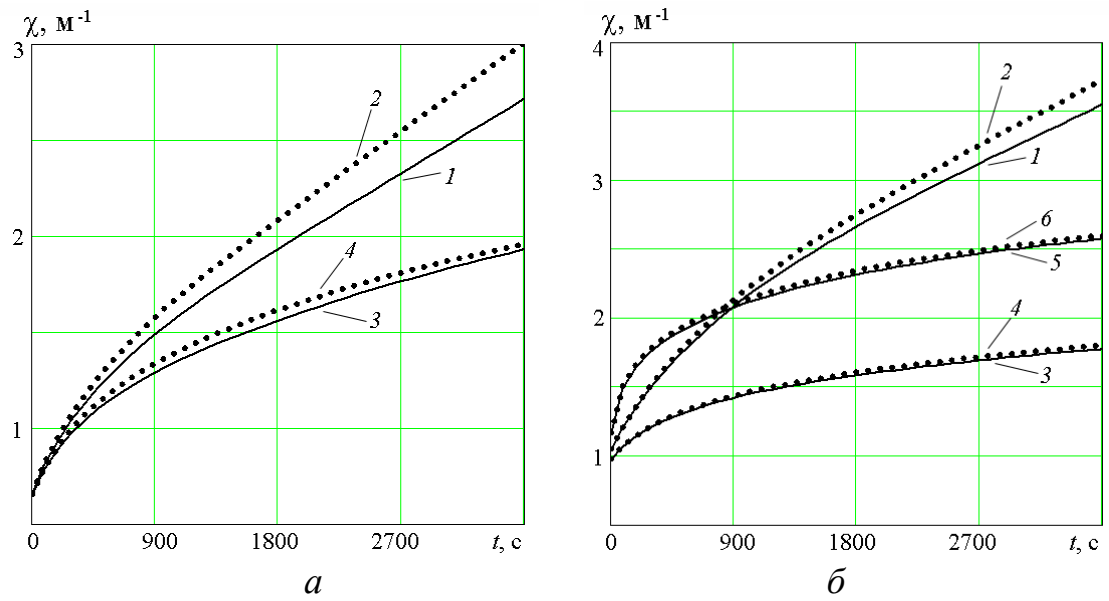


Рисунок 3.14 – Кривизна, рассчитанная для задачи кручения пластины в седлообразную поверхность при $h = 20$ мм (а); $h = 12$ мм (б)

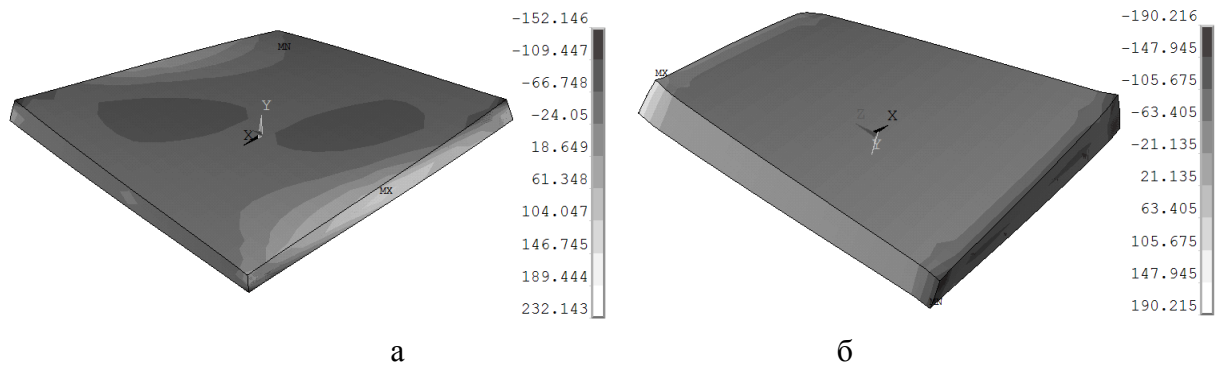


Рисунок 3.15 – Напряжения σ_{11} для задачи кручения пластины $h = 12$ мм (а); касательные напряжения σ_{23} на кромках пластины при $h = 20$ мм (б)

Таблица 3.7 – Результаты расчетов для задачи кручения в седловидную поверхность оребренной пластины

N°	h , мм	h_r , мм	F , кН	$\chi_{is}(t_*)$, 1/м	$\chi_{sh}(t_*)$, 1/м	$\chi_{sh}(t_*)/\chi_{is}(t_*)\%$
1	4	4	2,8	0,72	0,76	5,6
2	8	8	8,0	0,50	0,56	12,6
3	12	8	12,0	0,15	0,18	19,1

На рисунке 3.16 показано распределение касательных напряжений σ_{23} в оребренных пластинах. Это распределение имеет сложный характер, так как ребра подвергаются скручиванию. На рисунке 3.17, а, б, в изображены варианты разбиения сеткой конструкции на элементы; на рисунке 3.17 г – фрагмент пластины. На рисунке 3.17, д показана зависимость кривизны от времени отнесенная к кривизне $\chi_{is}(t_*)$ (в предположении изотропных свойств при $t_* = 1$ ч), полученная для разбиения на рисунке 3.17 б. Линии 1, 2 соответствуют образцу № 1 таблицы 3.7, линии 3, 4 — образцу № 2, линии 5, 6 — образцу № 3 (линии 1, 3, 5 – расчет в предположении изотропных свойств материала, линии 2, 4, 6 – расчет с учетом слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении). Из соотношения χ_{sh}/χ_{is} следует, что процесс деформирования пластин с учетом свойства слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении происходит более интенсивно, при этом прогиб растет с увеличением толщины пластины и высоты ребер.

В таблице 3.8 приведены аналогичные результаты расчетов по изгибу оребренной пластины в цилиндрическую поверхность моментом, равномерно приложенным вдоль двух кромок. На основе приведенных результатов можно сделать вывод, что в данном случае влияние свойства слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении не столь существенно и величина прогиба, наоборот, уменьшается с увеличением толщины пластины и высоты ребер.

Таблица 3.8 – Результаты расчетов для задачи изгиба оребренной пластины в цилиндрическую поверхность

№	h , мм	h_r , мм	M , кН м/м	$\chi_{is}(t_*)$, 1/м	$\chi_{sh}(t_*)$, 1/м	$\chi_{sh}(t_*)/\chi_{is}(t_*)$ %
1	4	4	0,05	0,88	0,94	7,2
2	8	8	0,17	2,43	2,58	6,2
3	12	8	0,17	1,35	1,3	4,6

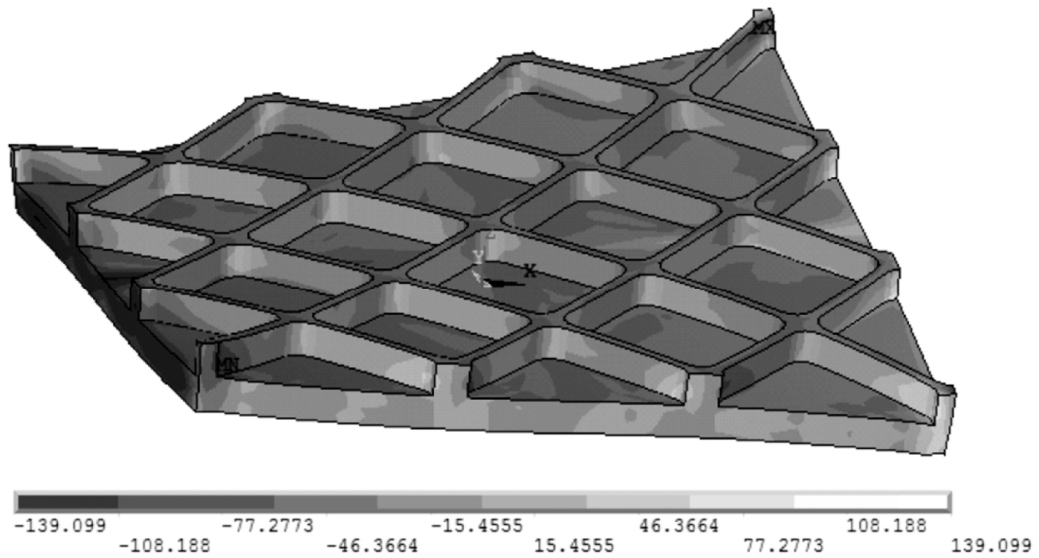


Рисунок 3.16 – Распределение касательных напряжений σ_{23} в оребренной пластине при $h=8\text{мм}$, $h_r=8\text{ мм}$

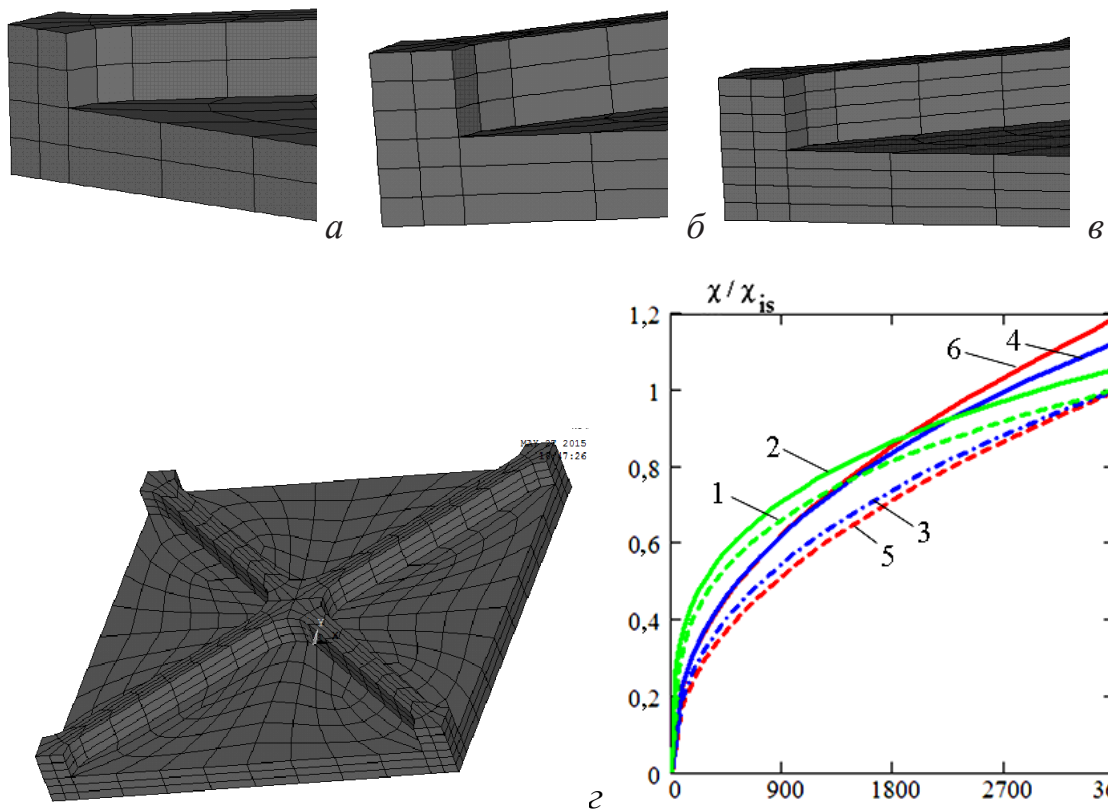


Рисунок 3.17 – Варианты разбиения конструкции на элементы: крупная (а), средняя (б), мелкая (в) сетка; фрагмент пластины (г); зависимость кривизны от времени отнесенная к кривизне $\chi_{is}(t_*)$: линии 1, 3, 5 – расчет в предположении изотропных свойств материала, линии 2, 4, 6 – расчет с учетом слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении (д)

Таким образом, свойство пониженного сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите оказывает незначительное влияние на деформирование гладких пластин, но может приводить к снижению жесткости и прочностных свойств оребренных пластин, в зависимости от размеров и ориентации ребер, что необходимо учитывать при проектировании и дальнейшей эксплуатации изделий.

3.3.2 Кручение ортотропных стержней

К экспериментам на кручение часто прибегают для определения сдвиговых параметров материала и проверки моделей. Эксперименты проводятся преимущественно на тонкостенных трубчатых образцах в условиях квазиоднородного напряженного состояния [137]. Однако в условиях повышенных температур и нелинейного деформирования тонкостенные образцы быстро теряют устойчивость [42; 82]. Поэтому проверку моделей часто проводят, используя толстостенные и сплошные образцы.

При кручении сплошного круглого стержня из изотропного материала деформация сечения (смещение точек поперечного сечения вдоль оси стержня) отсутствует, и решение в условиях установившейся ползучести материала можно получить в аналитическом виде [121]. В [5; 6; 7] получены решения задач кручения стержней произвольного поперечного сечения с использованием методов конечно-элементной дискретизации и конечно-разностной аппроксимации для изотропных сплавов. В [121] в случае произвольного поперечного сечения для изотропной среды в условиях ползучести рассмотрены различные приближенные методы, в том числе метод комбинирования решений упругой и идеально-пластической задач. Подробному анализу кручения анизотропных упругих стержней посвящена работа [134], в ней приведены также аналитическое решение для стержня эллиптического сечения, впервые полученное Сен-Венаном, методика нахождения решения с помощью функции комплексного переменного, а

также приближенные методы решения с помощью энергетических методов. Соотношения идеально-пластической анизотропии при кручении исследуются в работе авторов [115]. Ввиду физической нелинейности получение решения задачи кручения при анизотропной ползучести даже для стержня круглого поперечного сечения возможно только численно. В [232] найдено решение для ортотропного при ползучести стержня в предположении, что смещение точек поперечного сечения в направлении оси стержня (депланация сечения) аналогично смещению, возникающему при кручении упругого ортотропного стержня [134]. Необходимо отметить, что в этом случае полученные напряжения не удовлетворяют уравнению равновесия и решение является приближенным.

Оценим влияние слабого сопротивления деформациям ползучести в поперечно-сдвиговом направлении (под углом 45° к направлению нормали к плите) на процесс деформирования стержня при кручении. Для моделирования будем использовать параметры сплава В95пч при $T=180^\circ\text{C}$ на растяжение [97] (рисунок 3.13). В условиях трансверсальной изотропии необходимо рассмотреть случаи, когда стержень вырезан в направлении нормали к плите (направление 3) и в продольном направлении плиты (направление 1).

3.3.2.1 Кручение стержня, вырезанного в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите

При кручении постоянным моментом стержня произвольного поперечного сечения со свободными торцами, вырезанного в направлении нормали к плите, для компонент напряжений выполняется

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} \neq 0, \quad \sigma_{23} \neq 0.$$

Компоненты скоростей деформаций ползучести (3.10) связаны с напряжениями следующими соотношениями

$$\eta_{23} = \xi_{23} / 2 = T_s^{n-1} A_{23} \sigma_{23}, \quad \eta_{13} = \xi_{13} / 2 = T_s^{n-1} A_{31} \sigma_{13}. \quad (3.27)$$

Выражение (3.7) для $T_s(\sigma_{ij})$ преобразуется к виду $T_s = (2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{13}^2)^{0,5}$.

Учитывая (3.9), из (3.27) следует

$$\sigma_{23} = \frac{\xi_{23}}{2A_{23}} G_\eta^{(1-n)/n}, \quad \sigma_{13} = \frac{\xi_{13}}{2A_{31}} G_\eta^{(1-n)/n}, \quad (3.28)$$

где $G_\eta = (2\eta_{13}^2/A_{31} + 2\eta_{23}^2/A_{23})^{0,5} = (\xi_{13}^2/(2A_{31}) + \xi_{23}^2/(2A_{23}))^{0,5}$, $G_\eta = T_s^n$.

Упругими деформациями пренебрегаем. Из формул Коши для скоростей деформаций ползучести получаем

$$\xi_{23} = \theta x_1, \quad \xi_{13} = -\theta x_2,$$

где θ – скорость изменения погонного угла закручивания.

Уравнение равновесия

$$\partial\sigma_{13}/\partial x_1 + \partial\sigma_{23}/\partial x_2 = 0. \quad (3.29)$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения $\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$. После введения функции напряжений $F_s(x_1, x_2)$ такой, что $\sigma_{13} = \partial F_s/\partial x_2$, $\sigma_{23} = -\partial F_s/\partial x_1$, уравнение равновесия (3.29) удовлетворяется тождественно.

В случае двухсвязного контура (S_0 площадь поперечного сечения скручиваемого стержня, ограниченная внутренним C_1 и внешним C_2 контурами) через функцию напряжений крутящий момент выражается следующим образом [121]:

$$M = \iint (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{31}x_2) dx_1 dx_2 = 2 \iint F_s dx_1 dx_2 + 2F_s(C_1)S_1.$$

Здесь S_1 площадь, ограниченная контуром C_1 , $F_s(C_1)$ – значение функции напряжения на контуре C_1 . На контуре C_2 выполняется $F_s(C_2) = 0$.

Для стержня кольцевого поперечного сечения напряжения в цилиндрических координатах переписутся в виде $\sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_s}{\partial \varphi}$, $\sigma_{\varphi z} = -\frac{\partial F_s}{\partial r}$.

Ось z совпадает с осью стержня кольцевого сечения и направлением оси x_3 , r – текущий радиус, $R_1 \leq r \leq R_2$, R_2, R_1 – внешний и внутренний радиус сечения. Момент можно переписать в следующем виде

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\varphi z} r^2 dr d\varphi.$$

Поскольку для сплава В95пч при $T=180^\circ\text{C}$ (толщина плиты 50 мм) при растяжении для параметров [97] выполняется $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0$, $B_{23} = B_{31} = B_\Delta$, то из (3.8) следует, что $2A_{23} = 2A_{31} = 4B_\Delta^{\frac{2}{n+1}} - B_0^{\frac{2}{n+1}}$. В этом случае деформация сечения отсутствует, учитывая, что $\xi_{\varphi z} = \theta r$, можно получить аналитическое решение [13, 225]:

$$F_s(r) = \frac{(3+1/n)MR_2^{1+1/n} \left(1 - (r/R_2)^{1+1/n}\right)}{2\pi(1+1/n)(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} = \left(\frac{\theta}{(2A_{23})^{\frac{n+1}{2}}} \right)^{1/n} \frac{R_2^{1+1/n} - r^{1+1/n}}{1+1/n}, \quad (3.30)$$

$$\theta = (2A_{23})^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{3+1/n}{2\pi(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} M \right)^n. \quad (3.31)$$

Это решение аналогично, решению, полученному для материала в предположении изотропных свойств материала [121]. Касательное напряжение в цилиндрических координатах:

$$\tau_{\varphi z} = \sigma_{\varphi z} = -\partial F_s / \partial r = \frac{(3+1/n)Mr^{1/n}}{2\pi(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})}.$$

Для изотропного материала выполняется $B_{ij} = B_0$, $2A_{23} = 2A_{31} = 3B_0^{\frac{2}{n+1}}$ и

$$\theta = (\sqrt{3})^{n+1} B_0 \left(\frac{3+1/n}{2\pi(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} M \right)^n. \quad (3.32)$$

Функция напряжений для изотропного материала имеет тоже вид, что и в (3.30). Отсутствие деформации сечения у образцов, вырезанных в направлении нормали плиты из трансверсально-изотропного материала, подтверждается наличием ортогональных оси образца полос (см. рисунок 2.3) [17].

3.3.2.2 Кручение стержня, вырезанного в направлении плоскости трансверсально-изотропной плиты

При кручении постоянным моментом стержня произвольного поперечного сечения со свободными торцами, вырезанного в продольном направлении плиты 1, для компонент напряжений выполняется

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} \neq 0, \quad \sigma_{13} \neq 0.$$

Компоненты скоростей деформаций ползучести (3.10) связаны с напряжениями соотношениями

$$\eta_{13} = \xi_{13} / 2 = T_s^{n-1} A_{31} \sigma_{13}, \quad \eta_{12} = \xi_{12} / 2 = T_s^{n-1} A_{12} \sigma_{12}, \quad (3.33)$$

где $T_s = (2A_{31}\sigma_{13}^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2)^{0,5}$.

Учитывая (3.9) и (3.33), для компонент тензора напряжений следует

$$\sigma_{12} = \frac{\xi_{12}}{2A_{12}} G_\eta^{(1-n)/n}, \quad \sigma_{13} = \frac{\xi_{13}}{2A_{31}} G_\eta^{(1-n)/n}, \quad (3.34)$$

где $G_\eta = (\xi_{13}^2 / (2A_{31}) + \xi_{12}^2 / (2A_{12}))^{0,5}$, $G_\eta = T_s^n$.

Для скоростей деформаций ползучести имеем

$$\xi_{13} = \dot{W}_{,3} + \theta x_2, \quad \xi_{12} = \dot{W}_{,2} - \theta x_3. \quad (3.35)$$

Здесь $W(x_2, x_3)$ – смещение точек поперечного сечения (депланация) в направлении оси x_1 .

Уравнение равновесия

$$\partial \sigma_{12} / \partial x_2 + \partial \sigma_{13} / \partial x_3 = 0. \quad (3.36)$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения $\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$. После введения функции напряжений $F_s(x_2, x_3)$, такой что $\sigma_{12} = \partial F_s / \partial x_3$, $\sigma_{13} = -\partial F_s / \partial x_2$, уравнение равновесия (3.36) удовлетворяется тождественно.

Из условия совместности деформаций ползучести вытекает

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(2A_{31} T_s^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2A_{12} T_s^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial x_3} \right) = -2\theta. \quad (3.37)$$

Крутящий момент есть

$$M = \iint_{S_0} (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3)dx_2dx_3. \quad (3.38)$$

Поскольку выполняется $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0$, $B_{23} = B_{31} = B_\Delta$ и стержень вырезан в продольном направлении плиты, из (3.8) следует, что $2A_{12} = 3B_0^{\frac{2}{n+1}}$, $2A_{31} = 4B_\Delta^{\frac{2}{n+1}} - B_0^{\frac{2}{n+1}}$.

Решение задачи о кручении (3.33)–(3.38) можно получить путем сведения разрешающих соотношений к дифференциальному уравнению относительно депланации $W(x_2, x_3)$ [5; 6; 7], либо относительно функции напряжений $F_s(x_2, x_3)$ [121; 134]. После подстановки в (3.38) выражения (3.34) с учетом (3.35) для крутящего момента следует

$$M = \iint_{S_0} \left(\frac{(W_{,3} + \theta x_2)x_2}{2A_{31}} - \frac{(W_{,2} - \theta x_3)x_3}{2A_{12}} \right) \left(\frac{(W_{,3} + \theta x_2)^2}{2A_{31}} + \frac{(W_{,2} - \theta x_3)^2}{2A_{12}} \right)^{\frac{k_1}{2}} dx_2dx_3, \quad (3.39)$$

где $k_1 = (1-n)/n$. В случае двухсвязного контура через функцию напряжений крутящий момент выражается в следующем виде [121]

$$M = 2 \iint_{S_0} F_s dx_2dx_3 + 2F_s(C_1)S_1, \quad (3.40)$$

S_0 – площадь, ограниченная внутренним C_1 и внешним C_2 контурами; S_1 – площадь, ограниченная контуром C_1 ; $F_s(C_1)$ – значение функции напряжений на контуре C_1 . Для стержней произвольного поперечного сечения решение системы (3.33)–(3.38) можно получить, применяя метод конечных элементов или метод конечно-разностной аппроксимации. Для проверки этих решений можно использовать приближенные оценки [225, 226].

Метод 1. Для нижней оценки скорости изменения угла закручивания воспользуемся условием *минимума полной мощности* [121]:

$$I_1 = \iint \left(\frac{n}{n+1} G_\eta^{(n+1)/n} - \theta \left(\frac{x_2 \xi_{13}}{2A_{31}} - \frac{x_3 \xi_{12}}{2A_{12}} \right) G_\eta^{(1-n)/n} \right) dx_2dx_3 = \min. \quad (3.41)$$

Предположим, что функция депланации аналогично случаю анизотропной упругости [134] приближенно имеет вид

$$W(x_2, x_3) = \theta W_0(x_2, x_3) = \theta c_1 x_2 x_3, \quad (3.42)$$

где c_1 – константа. Функция (3.42) удовлетворяет уравнению совместности (3.37). С учетом (3.35), (3.42) выражение (3.41) преобразуется к виду

$$I_1 = \theta^{k_2} \iint_{S_0} \frac{1}{k_2} \left(\frac{x_2^2 (c_1 + 1)^2}{2A_{31}} + \frac{x_3^2 (c_1 - 1)^2}{2A_{12}} \right)^{\frac{k_2}{2}} - \\ - \left(\frac{x_2^2 (c_1 + 1)}{2A_{31}} - \frac{x_3^2 (c_1 - 1)}{2A_{12}} \right) \left(\frac{x_2^2 (c_1 + 1)^2}{2A_{31}} + \frac{x_3^2 (c_1 - 1)^2}{2A_{12}} \right)^{\frac{k_1}{2}} dx_2 dx_3. \quad (3.43)$$

Здесь $k_2 = (n+1)/n$. Найдя c_1 , при которой интеграл (3.43) достигает минимума, из (3.39) находим угловую скорость закручивания [226]

$$\theta = (M/G_1)^n, \quad (3.44)$$

$$\text{где } G_1 = \iint_{S_0} \left(\frac{x_2^2 (c_1 + 1)}{2A_{31}} - \frac{x_3^2 (c_1 - 1)}{2A_{12}} \right) \cdot \left(\frac{x_2^2 (c_1 + 1)^2}{2A_{31}} + \frac{x_3^2 (c_1 - 1)^2}{2A_{12}} \right)^{k_1/2} dx_2 dx_3.$$

Метод 2. Для верхней оценки скорости изменения угла закручивания воспользуемся условием *минимума дополнительного рассеяния* [121]:

$$I_2 = \iint_{S_0} \left(\frac{1}{n+1} T_s^{n+1} - 2\theta F_s \right) dx_2 dx_3 - 2\theta F_s(R_1) \pi R_1^2 = \min. \quad (3.45)$$

Предположим, что функция напряжений имеет вид

$$F_s(x_2, x_3) = c_2 \theta^{1/n} F_{s0}(x_2, x_3) = c_2 \theta^{1/n} \left(1 - ((x_2^2 + x_3^2)/R_2^2)^{k_2/2} \right), \quad (3.46)$$

где c_2 – константа. Функция (3.45) с точностью до множителя является решением задачи кручения стержня из изотропного материала в условиях установившегося состояния ползучести. Эта функция удовлетворяет уравнению равновесия и граничным условиям. Подставляя (3.46) в (3.45), из уравнения $dI_2/dc_2 = 0$ находим константу c_2 , при которой (3.45) достигает минимума:

$$c_2 = \left(\left(2F_{s0}(R_1) \pi R_1^2 + \iint_{S_0} 2F_{s0} dx_2 dx_3 \right) / \iint_{S_0} \left(2A_{31} F_{s0,2}^2 + 2A_{12} F_{s0,3}^2 \right)^{k_2/2} dx_2 dx_3 \right)^{1/n}. \quad (3.47)$$

Из (3.40), (3.46), (3.47) находится угловая скорость закручивания [226]:

$$\theta = (M / (c_2 G_2))^n, \quad G_2 = \left(2F_{s_0}(R_1) \pi R_1^2 + \iint_{S_0} 2F_{s_0} dx_2 dx_3 \right). \quad (3.48)$$

Метод 3. В [232] получено решение для ортотропного при ползучести цилиндра в предположении, что функция депланации аналогично случаю анизотропной упругости [134] имеет вид

$$W(x_2, x_3) = \theta W_0(x_2, x_3) = \theta c_3 x_2 x_3, \quad c_3 = \frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31} + A_{12}}.$$

Метод, развитый в работе [232] можно применить к решению задачи кручения стержня кольцевого сечения. Скорости деформаций ползучести находятся согласно (3.35). Для напряжений в цилиндрической системе координат r, φ, z , ось z которой совпадает с направлением оси x_1 , получаем

$$\tau_{\varphi z} = \frac{3n+1}{4\pi n} \cdot \frac{M}{K} \left(\cos^2 \varphi + \frac{A_{12}}{A_{31}} \sin^2 \varphi \right)^{(1-n)/(2n)} \frac{r^{1/n}}{R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n}}, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (3.49)$$

$$K = 1 - \frac{\left(\frac{1-n}{2n} \right)}{2} \left(\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}} \right) + \frac{\left(\frac{1-n}{2n} \right) \left(\frac{1-n}{2n} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}} \right)^2 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \dots.$$

Выражение для параметра K можно переписать в другом виде:

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{i=1}^k \left(\frac{1-n}{2n} - (i-1) \right)}{k!} \left(\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}} \right)^k \frac{\prod_{i=1}^k (2i-1)}{\prod_{i=1}^k (2i)}.$$

Скорость изменения погонного угла закручивания

$$\theta = \left[\frac{3n+1}{2n\pi K} \frac{1}{(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} \right]^n M^n \frac{A_{31} + A_{12}}{(2A_{31})^{(1-n)/2}}. \quad (3.50)$$

Метод 4. Для решения задачи кручения ортотропного стержня в условиях ползучести можно использовать метод конечных элементов пакета ANSYS (3.24)–(3.26). На рисунке 3.18 изображены схемы разбиения стержня сплошного круглого сечения твердотельным 3d элементом Solid45 (*а*) и балочным элементом Beam189 (*б*). При моделировании элементом Solid45, на одном из торцов для возможности приложения скручивающего момента применяется элемент Shell181.

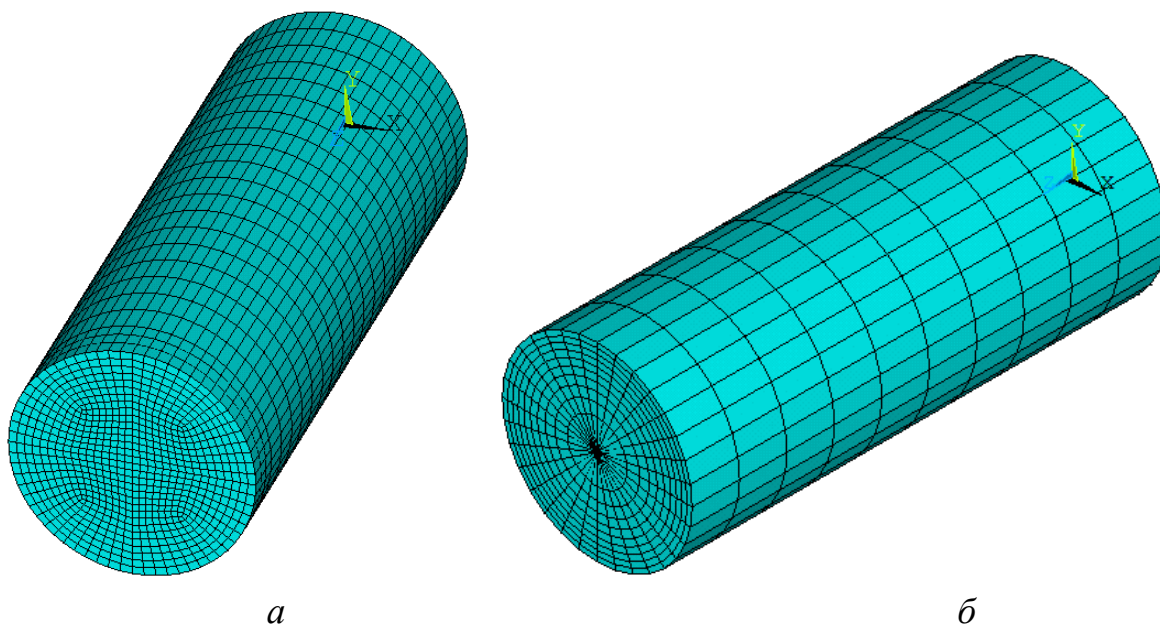


Рисунок 3.18 – Схема разбиения стержня сплошного круглого сечения в пакете ANSYS с использованием элемента Solid45 (а), Beam189 (б)

3.3.2.3 Сравнительный анализ результатов расчета кручения круглых сплошных и кольцевых стержней

В [13; 41; 46; 225; 226] представлены результаты решения задач кручения стержней круглого сплошного и кольцевого сечений с помощью элементов Beam189 и Solid45 в ANSYS.

Для моделирования сплошного стержня были использованы параметры сплава В95пч при $T=180^{\circ}\text{C}$ (рисунок 3.13), модуль Юнга $E = 55 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,4$. Радиус стержня $R_2 = 0,02 \text{ м}$, длина $L = 0.1 \text{ м}$, крутящий момент $M = 3500 \text{ Н·м}$, время закручивания 600 с .

Сплошной стержень, вырезанный в продольном направлении. Расчет с использованием элемента Solid45 показал, что при кручении круглых образцов, вырезанных в продольном направлении плиты (ось x_1 совпадает с направлением Z на рисунке 3.19) из сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите (нормаль совпадает с осью x_3 и направлением Y на рисунке 3.19), появляется депланация сечения (рисунок 3.19, а).

Визуально на поверхности экспериментальных образцов это подтверждается появлением спиралевидных линий. Такие линии можно наблюдать после кручения образца из сплава Ti-Al-Sn-V на рисунке 2.5.

В [225] приведены результаты расчета угла закручивания без учета начальной упругой составляющей для стержня, вырезанного в продольном направлении и в направлении нормали к плите, для сетки из элементов Solid45: 10 делений вдоль радиуса, 40 вдоль границы поперечного сечения (окружности), 10 вдоль оси стержня, шаг по времени 5 с на установившейся стадии ползучести. В [13] приведены аналогичные результаты для сетки из элементов Beam189 с размерами 10 делений вдоль радиуса, 32 деления по окружности, 10 вдоль оси стержня, шаг по времени 5 с на установившейся стадии.

В таблице 3.9 приведены значения угла закручивания стержня, вырезанного в продольном направлении для более мелкого разбиения сетки из элементов Solid45 (16 делений вдоль радиуса, 64 вдоль границы поперечного сечения, 20 вдоль оси стержня и шаг по времени равен 1) [226]. В этой же таблице приведены значения угла, вычисленного помощью элементов Beam189 (используется та же самая сетка, но уменьшен шаг по времени на установившейся стадии до 1), а также результаты расчета, полученные методом 1 по формуле (3.44), методом 2 по формуле (3.48) и методом 3 по формуле (3.50). При расчете методами 1, 2 и 3 угол вычислялся по формуле $\alpha = \theta L t$. Поскольку использование элемента Shell181 для приложения нагрузки в виде момента создает небольшой краевой эффект и неравномерный угол закручивания, то угол вычислялся по перемещениям вблизи торцов, где оболочечный элемент отсутствует.

Для элемента Solid45 отличие угла, полученного на более крупной сетке 0,741 от угла, вычисленного на более мелкой сетке 0,715, не превышает 4%. Расчет балочным элементом Beam189 показал, что полученный угол закручивания меньше нижней оценки угла закручивания, вычисленного методом 1. Если $c_1 = 0$ в (3.42)-(3.44), то депланация отсутствует и $\alpha = 0,51$

[225]. Угол закручивания, вычисленный с использованием балочного элемента Beam189, близок к этому значению. Можно предположить, что балочный элемент Beam189 в расчетах не учитывает депланацию сечения, возникающую при кручении при наличии ортотропных свойств. Незначительное отличие этих углов может быть связано с тем, что при расчете в пакете ANSYS учитываются упругие деформации, а при оценке по формулам (3.42)–(3.44) предполагается установившееся состояние ползучести. В таблице 3.9 также приведена скорость изменения погонного угла закручивания, полученная всеми четырьмя способами. Для метода 4 скорость вычислялась на установившейся стадии ползучести при $400 \text{ с} \leq t \leq 600 \text{ с}$. Необходимо отметить, что расчеты при уменьшении сетки и шага по времени требуют значительных временных затрат. Учитывая это, оценочные методы можно применять для предварительного анализа и прогнозирования необходимой нагрузки.

На рисунке 3.19, б, в, г изображены изолинии интенсивности напряжений по Мизесу, напряжений (МПа) $\sigma_{12} = \sigma_{xz}$ и $\sigma_{13} = \sigma_{yz}$ соответственно. На рисунке 3.19, д показаны зависимости $\sigma_{12}(t)$ (линия 1) и $\sigma_{13}(t)$ (линия 2), вычисленные с помощью элемента Solid45 в точках на контуре поперечного сечения, где эти напряжения максимальны. На рисунке 3.20, а, б напряжения показаны в цилиндрической системе координат. Видно, что напряжение $\tau_{rz} \neq 0$ (рисунок 3.20, б), однако согласно формулам (3.49) $\tau_{rz} = 0$, т.е. метод 3, предложенный в работе [232] дает приближенное решение задачи кручения ортотропного стержня. На рисунке 3.20, в изображены изолинии напряжения σ_{12} и σ_{13} , вычисленные методом 1. Изолинии на рисунке 3.19, в, г и на рисунке 3.20, в удовлетворительно согласуются. В таблице 3.10 приведены максимальные напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{xz}$, $\sigma_{13} = \sigma_{yz}$ на контуре поперечного сечения стержня, вырезанного в продольном направлении 1. Если принять, что $c_1 = 0$ в (3.42)–(3.44), т.е. депланация сечения отсутствует, то максимальные напряжения $\sigma_{12} = 240,1 \text{ МПа}$ и $\sigma_{13} = 190,4 \text{ МПа}$, рассчитанные методом 1 близки к напряжениям, полученным методом 4 элементом Beam189.

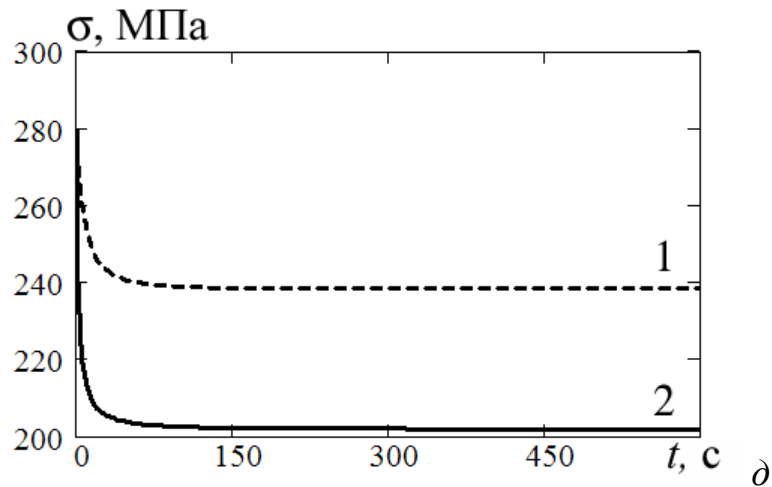
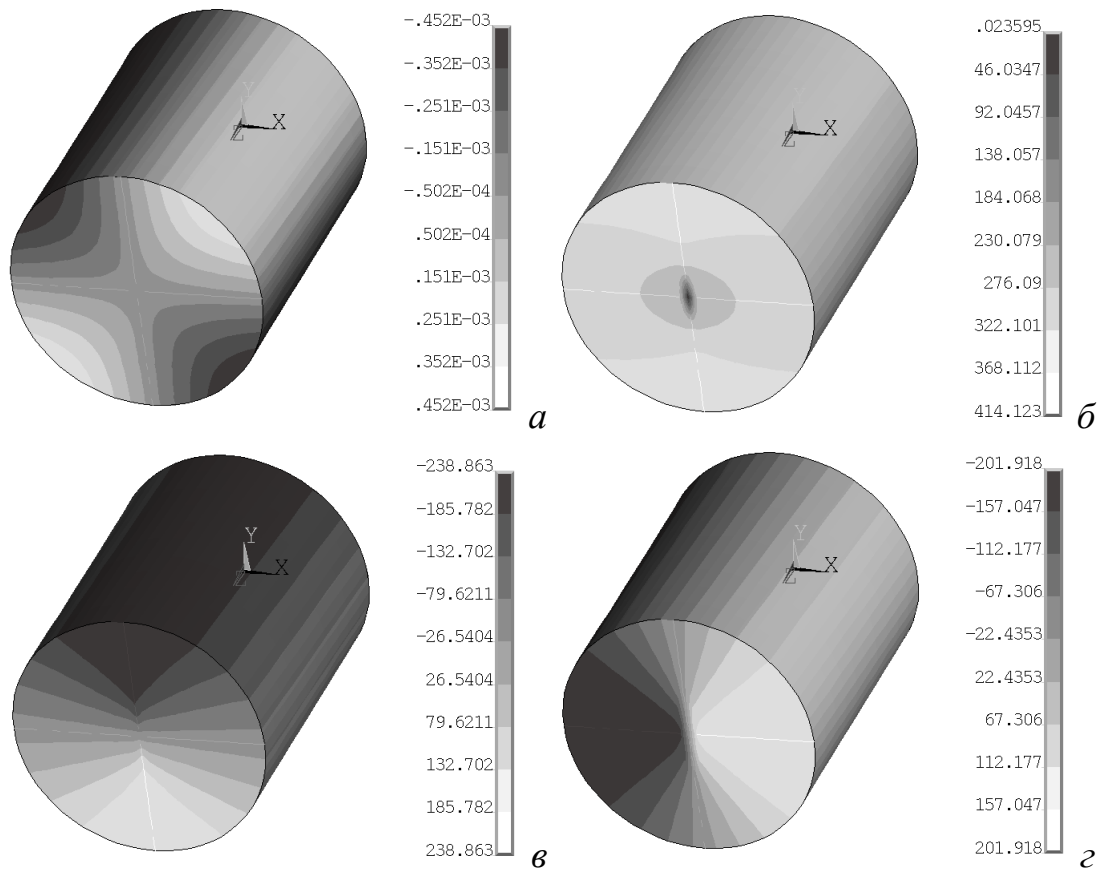


Рисунок 3.19 – Вычисленные при кручении стержня, вырезанного в продольном направлении, с использованием элемента Solid45 изолинии: перемещений (депланации сечения) в направлении оси x_1 вдоль оси стержня (а); интенсивности напряжений по Мизесу (б); напряжений (МПа) $\sigma_{12} = \sigma_{xz}$ (в) и $\sigma_{13} = \sigma_{yz}$ (г). Зависимости $\sigma_{12}(t)$ (линия 1) и $\sigma_{13}(t)$ (линия 2), вычисленные в точках на контуре поперечного сечения, где эти напряжения максимальны (д)

Таблица 3.9 – Полный угол закручивания α (рад) без учета начальной упругой составляющей и скорость изменения угла закручивания θ (рад/с) на установившейся стадии ползучести при $400 \text{ с} \leq t \leq 600 \text{ с}$ для стержня, вырезанного в продольном направлении 1

Угол закручивания	Метод 1, формула (3.44)	Метод 2, формула (3.48)	Метод 3, формула (3.50)	Метод 4, Beam189	Метод 4, Solid45
α , рад	0,54	0,80	0,59	0,53	0,72
$\theta, 10^{-3}$ рад/с	9,09	13,33	9,81	8,40	11,51

Таблица 3.10 – Максимальные напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{xz}$, $\sigma_{13} = \sigma_{yz}$ на контуре поперечного сечения стержня, вырезанного в продольном направлении 1

напряжение	Метод 1,	Метод 2	Метод 3,	Метод 4, Beam189	Метод 4, Solid45
σ_{12} , МПа	238.2	215.9	237,9	239.6	238.8
σ_{13} , МПа	194.3	215.9	197, 0	190.2	201.9

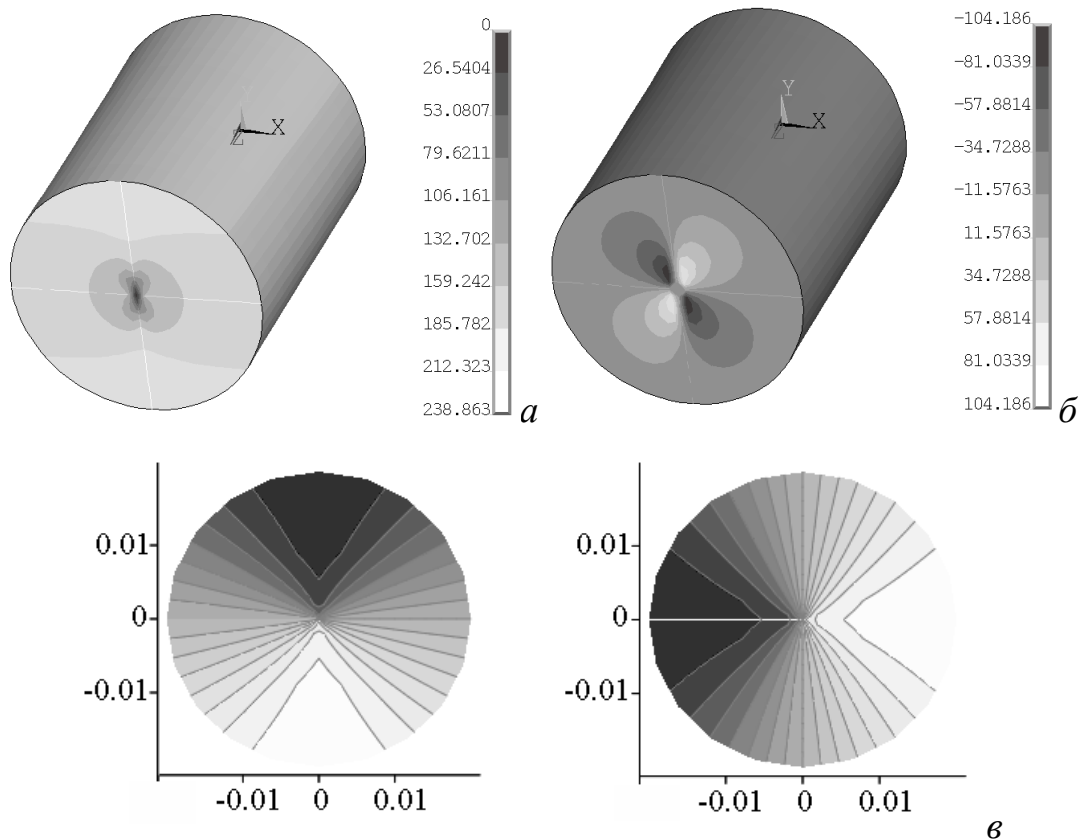


Рисунок 3.20 – Изолинии напряжений в цилиндрической системе координат $\tau_{\varphi z}$ (a) и τ_{rz} (б) вычисленные с использованием элемента Solid45 при кручении стержня, вырезанного в продольном направлении. Изолинии напряжения σ_{12} и σ_{13} , полученные методом 1 (в)

Сплошной стержень, вырезанный в направлении нормали к плите. На рисунке 3.21 изображены изолинии интенсивности напряжений по Мизесу (а), напряжений $\sigma_{13} = \sigma_{xz}$ (б) и $\sigma_{23} = \sigma_{yz}$ (в) при кручении стержня из изотропного материала. Для стержня, вырезанного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты, изолинии напряжений практически совпадают с изолиниями на рисунке 3.21. В таблице 3.11 приведены значения угла закручивания стержня, вычисленные методом конечных элементов и по формуле (3.32) в предположении изотропных свойств ($\theta = 2,91 \cdot 10^{-3}$ рад/м) и по формуле (3.31) для стержня, вырезанного в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите ($\theta = 29,5 \cdot 10^{-3}$ рад/м).

Для стержня, вырезанного из материала в предположении изотропии, максимальные напряжения составили для сетки из элементов Solid45 $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 217,7$ МПа, из элементов Beam189 – $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 215,6$ МПа, для трансверсально-изотропного материала соответственно из элементов Solid45 – $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 216,1$ МПа, из элементов Beam189 – $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 215,4$ МПа.

Таблица 3.11 – Полный угол закручивания α (рад) без учета начальной упругой составляющей для стержня в предположении изотропных свойств материала и стержня, вырезанного в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите

Тип материала	направление вырезки	Расчет по формуле	Метод 4, Beam189	Метод 4, Solid45
изотропный	произвольное	0,18	0,20	0,20
трансверсально-изотропный	по нормали	1,77	1,77	1,87

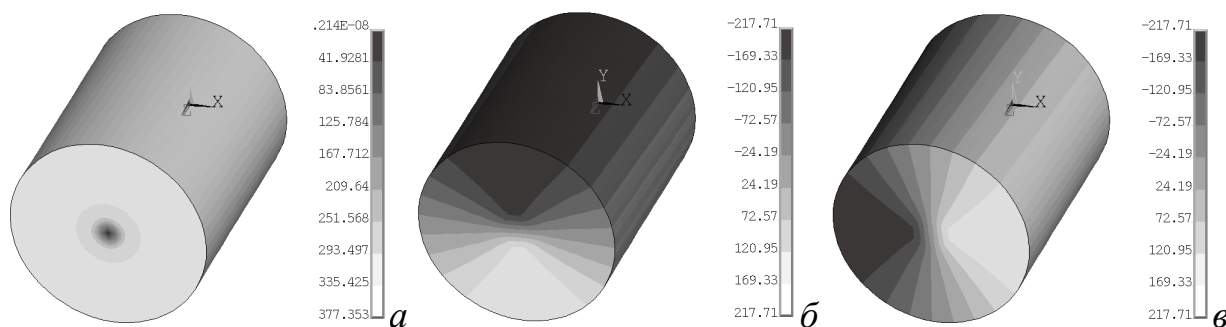


Рисунок 3.21 – Вычисленные с использованием элемента Solid45 изолинии интенсивности напряжений по Мизесу (а), напряжений (МПа) $\sigma_{13} = \sigma_{xz}$ (б) и $\sigma_{23} = \sigma_{yz}$ (в) при кручении стержня в предположении изотропных свойств материала

Аналогичные расчеты были выполнены для *стержня кольцевого сечения*, вырезанного в продольном направлении, при следующих значениях параметров [46]: радиусы $R_1 = 0,018$ м и $R_2 = 0,02$ м, длина $L = 0,1$ м, крутящий момент $M = 1000$ Н·м, время закручивания $t = 600$ с. Для приложения нагрузки в виде момента на одном из торцов твердотельной модели использовался элемент Shell181 толщиной 0,002 м, что создает небольшой краевой эффект, поэтому угловая скорость закручивания вычислялась по перемещениям точек вблизи торца, где оболочечный элемент отсутствует. В таблице 3.12 приведены скорость изменения погонного угла закручивания θ (рад/с) на установившейся стадии ползучести при $400 \text{ с} \leq t \leq 600 \text{ с}$ и максимальные напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{xz}$ в точке с координатами $x_1 = 0,02$, $x_2 = 0$, $x_3 = -0,02$ и $\sigma_{13} = \sigma_{yz}$ в точке с координатами $x_1 = 0,02$, $x_2 = 0,02$, $x_3 = 0$ на контуре поперечного сечения стержня.

На рисунке 3.22, *а, б* изображено распределение напряжений σ_{12} , σ_{13} в поперечном сечении. На рисунке 3.22, *в* показано распределение перемещения W в направлении оси x_1 (депланация сечения) при $t = 600$ с. Необходимо отметить, что скорость изменения погонного угла закручивания, полученная методом конечных элементов близка к верхней оценке.

Таблица 3.12 – Скорость изменения погонного угла закручивания θ (рад/с) на установившейся стадии ползучести при $400 \text{ с} \leq t \leq 600 \text{ с}$ и максимальные напряжения σ_{12} , σ_{13} на контуре поперечного сечения стержня

параметр	Метод 1, формула (3.44)	Метод 2, формула (3.48)	Метод 3, формула (3.50)	Метод 4, Solid45
$\theta, 10^{-2}$ рад/с	1,164	1,712	1,253	1,690
σ_{12} , МПа	244,3	221,3	244,0	231
σ_{13} , МПа	199,2	221,3	201,9	218,3

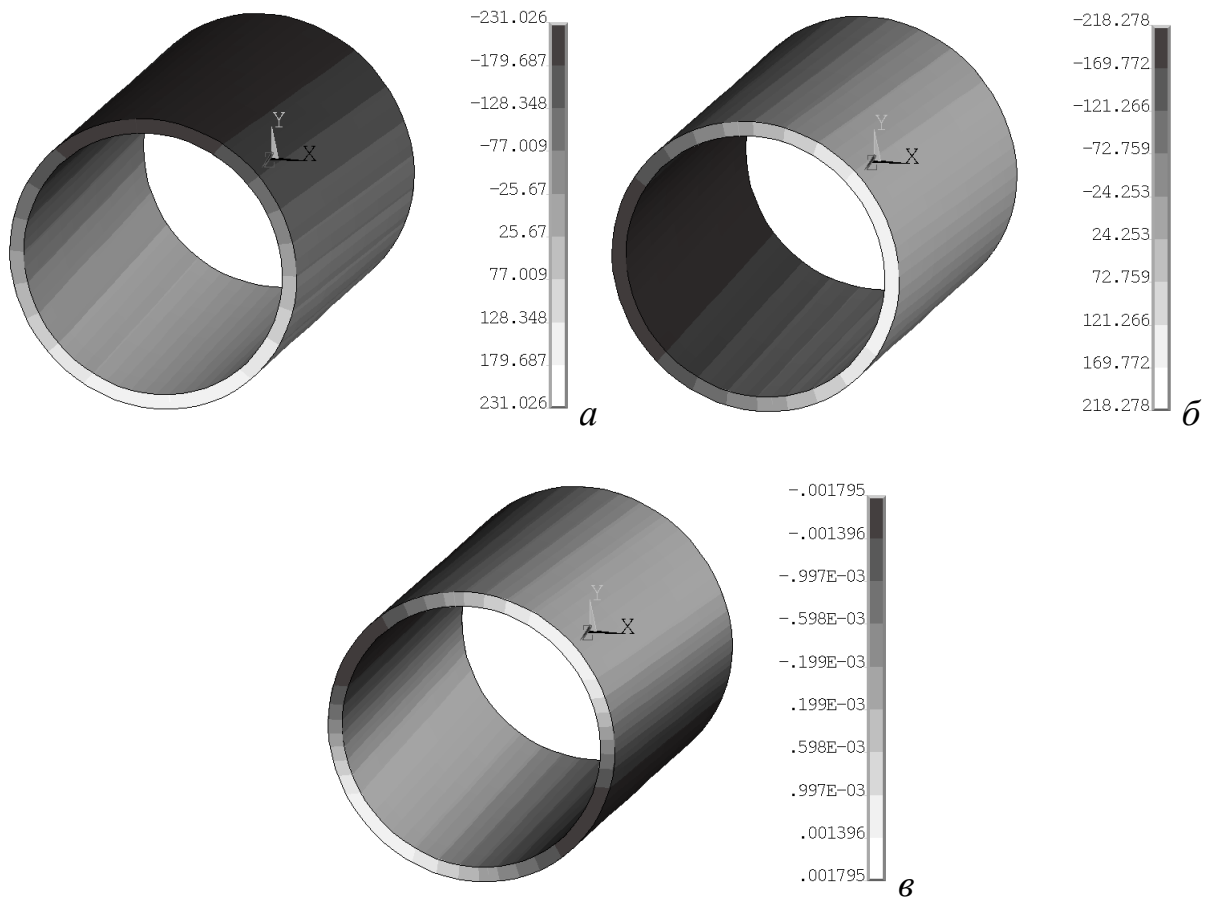


Рисунок 3.22 – Изолинии напряжений σ_{12}, σ_{13} (МПа), вычисленные методом конечных элементов соответственно (a) и (б) ; распределение перемещения W в направлении оси X_1 (депланация сечения)

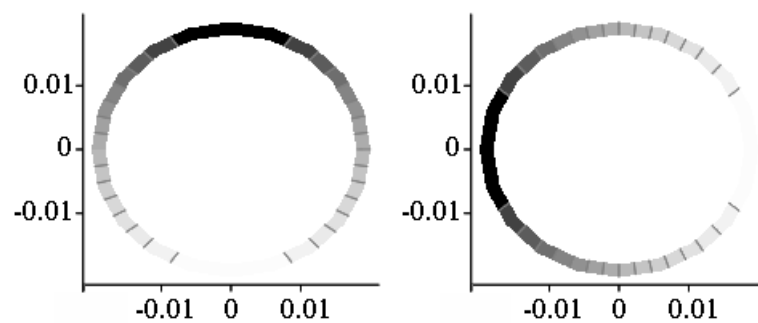


Рисунок 3.23 – Изолинии напряжений σ_{12}, σ_{13} в поперечном сечении, вычисленные методом 1 (минимум полной мощности)

Таким образом, численное моделирование показало, что при кручении круглых сплошных и кольцевых образцов, вырезанных в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты из сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, возникает депланация поперечного сечения, что визуально проявляется в виде спиралевидных линий. При кручении круглых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите депланация сечения отсутствует, при этом скорость изменения угла закручивания выше скорости изменения угла закручивания образцов, вырезанных в продольном направлении плиты, и существенно выше (на порядок) угловой скорости закручивания, вычисленной в предположении изотропных свойств материала. Полученные нижняя и верхняя оценка угловой скорости закручивания на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния удовлетворительно описывают результаты численного моделирования в конечно-элементном пакете ANSYS.

3.4 Модель изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие, основанная на потенциальном подходе

В случае изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие для коэффициентов имеем $B_{ij}^+ = B_+$, $B_{ij}^- = B_-$ ($i, j = 1, 2, 3$), $B_+ \neq B_-$, $n_+ \neq n_-$. Из (3.5) для компонент A_{ij}^+ , A_{ij}^- следует

$$2A_{12}^+ = 2A_{23}^+ = 2A_{31}^+ = 3B_+^{\frac{2}{n_++1}}, \quad 2A_{12}^- = 2A_{23}^- = 2A_{31}^- = 3B_-^{\frac{2}{n_-+1}},$$

$$A_{11}^+ + A_{22}^+ = A_{22}^+ + A_{33}^+ = A_{33}^+ + A_{11}^+ = B_+^{\frac{2}{n_++1}}, \quad A_{11}^- + A_{22}^- = A_{22}^- + A_{33}^- = A_{33}^- + A_{11}^- = B_-^{\frac{2}{n_-+1}}.$$

Соотношения (3.1)–(3.4) перепишутся в виде

$$\eta_{kl} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}}, \quad 2\Phi(\sigma_i, \xi) = \Phi_1 + \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1) \sin 3\xi, \quad (3.51)$$

где $\Phi_1 = B_+ \sigma_i^{n_++1} / (n_+ + 1)$, $\Phi_2 = B_- \sigma_i^{n_-+1} / (n_- + 1)$. Константы ползучести B_+ , n_+ и B_- , n_- могут быть получены соответственно в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие независимо от того, в каком направлении вырезался из плиты образец ($\eta = B_+ \sigma^{n_+}$ при $\sigma > 0$, $\eta = B_- |\sigma|^{n_-} \sigma$ при $\sigma < 0$). Отметим, что при $n_1 \neq n_2$ потенциал Φ из (3.51), в отличие от общепринятых потенциалов не является однородной функцией и зависит от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений.

Модель (3.51) впервые была предложена И.Ю. Цвелодубом и применена при решении задачи о чистом кручении пластины из сплава В95пч (толщина плиты, из которой вырезалась пластина – 40 мм) [9]. Исследования сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu) при температуре старения материала $T=180^\circ\text{C}$ проводились для ОАО «КнААПО» (Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение) по договору № 20/03 между КнаАГТУ («Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет») и ИГиЛ СО РАН «Математическое моделирование процесса формообразования гладких монолитных панелей одинарной и двойной кривизны в медленных режимах деформирования, разработка проектов документации на изготовление механической и гидравлической частей образца опытного оборудования для формообразования» в 2003 – 2005 г (приложение В). Исследования по этому сплаву также отражены в работах [2; 233 ; 266].

3.4.1 Определяющие соотношения в случае растяжения, сжатия и плоского напряженного состояния

При плоском напряженном состоянии, учитывая что $\sigma_{33} = 0$, выражение (3.3) преобразуется к виду $\sin 3\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\sigma_i} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{I}{\sigma_i} \right)$, где $I = \sigma_{11} + \sigma_{22}$. Интенсивность напряжений $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$.

Обозначим $\zeta = I/\sigma_i$, тогда выражения для потенциальной функции и скоростей деформаций ползучести (3.51) для изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие материала преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 2\Phi(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) &= \Phi_1(\sigma_i) + \Phi_2(\sigma_i) + [\Phi_2(\sigma_i) - \Phi_1(\sigma_i)](\zeta^3 - 3\zeta)/2, \\ \eta_{11} &= \Phi_3(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \Phi_4(\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2), \\ \eta_{22} &= \Phi_3(2\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \Phi_4(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2), \\ \eta_{12} = \eta_{21} &= 3\Phi_3\sigma_{12} - \Phi_4(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\text{Здесь } \Phi_3 = \frac{1}{4} \left(B_+ \sigma_i^{n_+ - 1} + B_- \sigma_i^{n_- - 1} \right) + \frac{1}{8} \left(B_- \sigma_i^{n_- - 1} - B_+ \sigma_i^{n_+ - 1} \right) (\zeta^3 - 3\zeta),$$

$$\Phi_4 = \frac{9}{8} \left(\frac{B_-}{n_- + 1} \sigma_i^{n_- - 2} - \frac{B_+}{n_+ + 1} \sigma_i^{n_+ - 2} \right) (\zeta^2 - 1).$$

В случае простого растяжения $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 1$ и $\eta_{11} = B_+ \sigma^{n_+}$, $\eta_{22} = \eta_{33} = -B_+ \sigma^{n_+} / 2$. При равномерном растяжении $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{33} = 0$ имеем $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 2$, и $\eta_{11} = \eta_{22} = B_- \sigma^{n_-} / 2$, $\eta_{33} = -B_- \sigma^{n_-}$. В случае сдвига $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = \sigma$ ($\sigma > 0$) интенсивность напряжений есть $\sigma_i = \sqrt{3}\sigma$, $\zeta = 0$, для скоростей деформаций ползучести (3.52) получаем

$$\begin{aligned} \eta_{11} = \eta_{22} &= \frac{(\sqrt{3})^{n_+ + 2} B_+ \sigma^{n_+}}{4(n_+ + 1)} - \frac{(\sqrt{3})^{n_- + 2} B_- \sigma^{n_-}}{4(n_- + 1)}, \\ \eta_{12} = \xi_{12} / 2 &= \left((\sqrt{3})^{n_+ + 1} B_+ \sigma^{n_+} + (\sqrt{3})^{n_- + 1} B_- \sigma^{n_-} \right) / 4. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Для изотропного разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала с показателем $n = n_+ = n_-$ и $B_+ \neq B_-$ (3.53) упростится:

$$\eta_{11} = \eta_{22} = (\sqrt{3})^{n+2} \left(\frac{B_+ - B_-}{4(n+1)} \right) \sigma^n, \quad \xi_{12} = (\sqrt{3})^{n+1} \frac{B_+ + B_-}{2} \sigma^n. \quad (3.54)$$

Следует отметить, что в этом случае выражения для скорости деформаций сдвига ξ_{12} (3.54) и (2.27) по модели [17; 69] совпадают.

3.4.2 Изгиб гладких пластин

Для определения параметров ползучести алюминиевого сплава В95пч при растяжении и сжатии и температуре $T=180^{\circ}\text{C}$ были изготовлены образцы из плит толщиной 40 мм в различных направлениях (продольное, поперечное, по нормали к плите). Эксперименты проводились при различных постоянных во времени напряжениях σ в диапазоне $250 \text{ МПа} \leq |\sigma| \leq 320 \text{ МПа}$. Результаты экспериментов позволяют считать в первом приближении материал В95пч при $T=180^{\circ}\text{C}$ изотропным, но с различными свойствами при растяжении и сжатии. Экспериментальные данные на установившейся стадии ползучести обрабатывались с использованием степенной зависимости. Получены следующие значения констант: $B_+ = 6 \cdot 10^{-55} \text{ МПа}^{-n_+} \cdot \text{с}^{-1}$, $n_+ = 20$, $B_- = 2,43 \cdot 10^{-43} \text{ МПа}^{-n_-} \cdot \text{с}^{-1}$, $n_- = 15$ (Эксперименты проведены и обработаны Б.В. Горевым) [9]. При определении мгновенных упругих характеристик исследуемого материала установлено, что при $T=180^{\circ}\text{C}$ сплав В95пч является изотропным с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии: $E = 57 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,4$.

Для апробации модели (3.51) в [9] рассмотрена изготовленная из сплава В95пч квадратная пластина с размерами $180 \times 180 \times 12 \text{ мм}$, которая находится в условиях чистого кручения при $T=180^{\circ}\text{C}$ под действием единичного крутящего момента M , эквивалентного изгибающим моментам разных знаков $M_1 = -M_2 = M$, равномерно распределенным вдоль краев пластины [15; 35; 170; 223]. В эксперименте такую схему нагружения [100] можно реализовать путем приложения в углах пластины сосредоточенных сил $F = 2M$, как это показано на рисунке 2.6. На рисунке 3.24 показана пластина, отформованная в течение двух часов.

Темными и светлыми точками на рисунке 3.25, а показаны данные двух экспериментов (кривизны $\chi = \chi_{12}$ от времени без учета начальной упругой составляющей $\chi_0 = \chi(0)$) при одной и той же величине $M = 4,843 \text{ кН} \cdot \text{м/м}$. Кривизна вычислялась по замерам прогиба w на базе $L = 100 \text{ мм}$ вдоль

диагонали пластины на одинаковом расстоянии от центра по формуле $\chi = 8w/L^2$. Для решения задачи о кручении пластины использовалась программа «CreePL» [9] (приложения А, Г), разработанная автором на языке Fortran, для расчета процесса формообразования панелей двойной кривизны в кинематической постановке в условиях, близких к условиям чистого изгиба.

Программный комплекс «CreePL» предназначен для расчета и оценки кинематических параметров процесса формообразования гладких панелей одинарной и двойной кривизны при медленных режимах деформирования, в том числе при термофиксации, с учетом разнсопротивляемости материала при растяжении и сжатии в условиях ползучести. Комплекс позволяет решать задачи расчета остаточной формы пластины (прямые задачи) и определения упреждающей геометрии оснастки (обратные задачи) при заданной продолжительности процесса формообразования с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок. Для моделирования используется метод конечных элементов [4; 112; 176]. Панель разбивается на треугольные элементы. Пластина толщины h , занимает в своей срединной плоскости Ox_1x_2 область S , ограниченную контуром, который может иметь произвольную форму. Ось Oz (совпадает с направлением оси x_3) перпендикулярна плоскости Ox_1x_2 , $|z| \leq h/2$. Прогиб w изменяется по заданному во времени закону: $w(x_1, x_2, t) = w_0(x_1, x_2) + f_w(t)w_1(x_1, x_2)$, $0 \leq t \leq t_*$, t_* – заданное время, $f_w(t)$ – заданная функция. После снятия нагрузок при $t = t_*$ и упругого восстановления пластина принимает форму $w_{**} = w_{**}(x_1, x_2)$.

Полные деформации ε_{kl} представляют собой сумму упругих деформаций ε_{kl}^e и деформаций ползучести ε_{kl}^c :

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^c = -zw_{,kl}. \quad (3.55)$$

Здесь

$$\varepsilon_{kl}^e = \frac{1-\nu}{E} \sigma_{nn} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}_{kl}, \quad \bar{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \sigma_{nn} \delta_{kl},$$

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^c = \eta_{kl} (k, l = 1, 2),$$

$\bar{\sigma}_{kl}$ и δ_{kl} - компоненты плоских девиатора напряжений и единичного тензора; индекс k после запятой означает производную по координате x_k ; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2. Скорости деформаций ползучести η_{kl} определяются согласно (3.52). При известной функции $w = w(x_1, x_2, t)$ продифференцированные по t соотношения (3.55) совместно с (3.52) в каждой точке пластины представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени для нахождения компонент напряжений $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(x_1, x_2, z, t)$. Начальные условия $\sigma_{kl}|_{t=0}$ находятся из (3.55) при $\varepsilon_{kl}^c = 0 (k, l = 1, 2)$. Указанная система решается методом Рунге - Кутты - Мерсона четвертого порядка с автоматическим выбором шага по времени [146]. По вычисленным напряжениям из решения уравнений равновесия изгиба пластины находится прогиб упругого восстановления методом Гаусса и далее остаточный прогиб [4].

В рассматриваемом случае для решения прямой задачи кручения пластины в кинематической постановке прогиб задавался в виде

$$w = (A_1 + A_2 t/t_*) x_1 x_2, \quad -0,09 \text{ м} \leq x_k \leq 0,09 \text{ м}, \quad t_* = 2 \text{ ч}.$$

Сплошная линия на рисунке 3.25, *a* – кривизна, соответствующая режиму при $A_1 = 0,95 \text{ м}^{-1}$, $A_2 = 0,5 \text{ м}^{-1}$. Эта зависимость показана без учета начальной упругой составляющей $\chi_0 = 0,8333 \text{ м}^{-1}$, соответствующей экспериментальному моменту $M = 4,843 \text{ кН} \cdot \text{м/м}$. Значения A_1 , A_2 выбраны таким образом, чтобы при $0 < t \leq t_*$ соответствующий крутящий момент (сплошная линия на рисунке 3.25, *б*) был наиболее близок к значению $M = 4,843 \text{ кН} \cdot \text{м/м}$ (штриховая линия на рисунке 3.25, *б*).

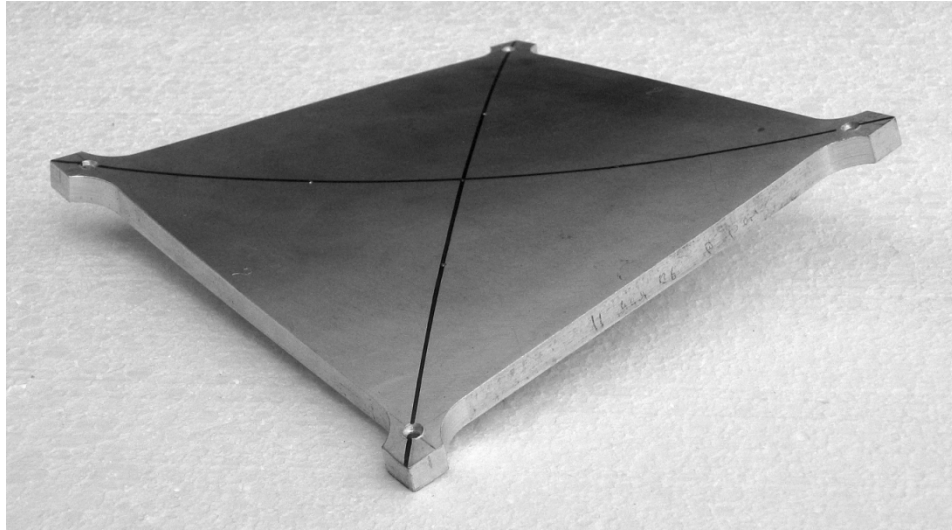


Рисунок 3.24 – Пластина, отформованная в течение двух часов

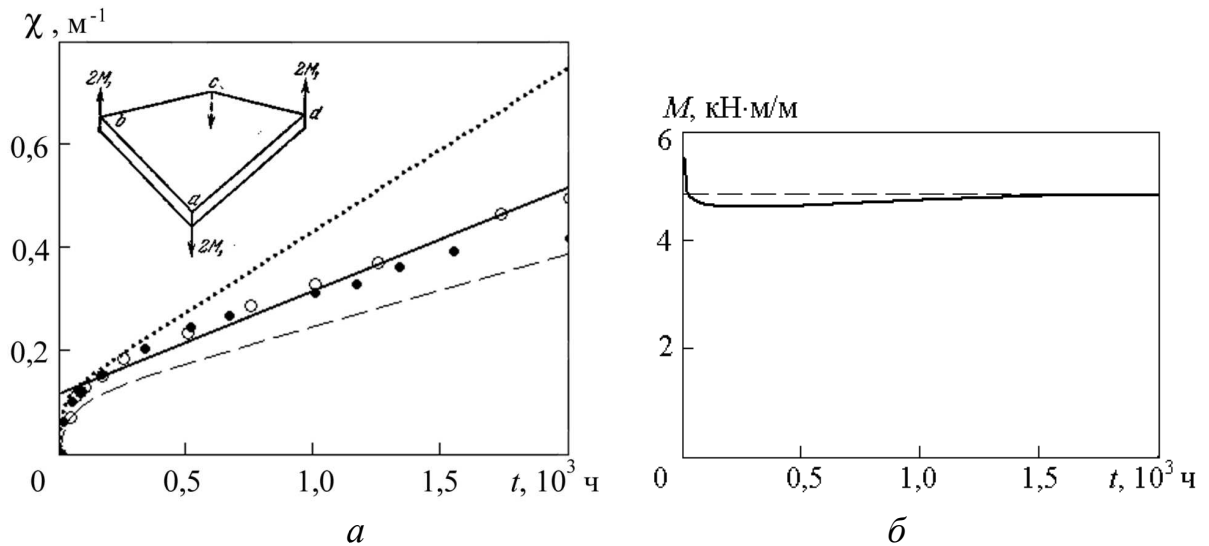


Рисунок 3.25 – Экспериментальные (точки) и теоретические (линии) зависимости кривизны пластины от времени: сплошная линия — кинематический режим формообразования ($A_1 = 0,95 \text{ м}^{-1}$, $A_2 = 0,5 \text{ м}^{-1}$); пунктирная линия – расчет, выполненный по характеристикам материала на растяжение ($n_+ = n_- = 20$, $B_+ = B_- = 6 \cdot 10^{-55} \text{ МПа}^{-n_+} \cdot \text{с}^{-1}$); штриховая линия – расчет, выполненный по характеристикам материала на сжатие ($B_+ = B_- = 2,43 \cdot 10^{-43} \text{ МПа}^{-n_-} \cdot \text{с}^{-1}$, $n_+ = n_- = 15$) (а); зависимость крутящего момента от времени: штриховая линия – постоянный момент M ; сплошная линия – расчет момента для заданного кинематического режима (б)

Пунктирная и штриховая линии на рисунке 3.25, *a* соответствуют расчетам с использованием программы ANSYS в предположении, что материал является изотропным с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие; пунктирная линия соответствует расчету, выполненному только с параметрами на растяжение; штриховая линия – расчету, выполненному только с параметрами на сжатие. Эти зависимости дают верхнюю и нижнюю оценки для эксперимента и расчета, выполненного с использованием зависимостей (3.52), (3.55). Экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с расчетными, полученными в пакете ANSYS и в комплексе «CreePL» в кинематической постановке с использованием модели, учитывающей различные свойства при растяжении и сжатии.

В [124] на основе модели (3.51) разработан, встроенный в комплекс MSC.Marc конечно-элементный алгоритм решения трехмерных задач ползучести. Результаты расчета кручения пластины из сплава АК4-1 ($T=200^{\circ}\text{C}$) хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами расчета по модели, в которой используется понятие «трансформированного» пространства напряжений [99].

3.4.3 Прямые и обратные задачи формообразования пластин

Рассмотрим примеры решения прямых и обратных задач в комплексе «CreePL». В общем виде обратная задача формулируется следующим образом: требуется найти такие силовые и кинематические параметры формообразования при $0 \leq t \leq t_*$, чтобы после снятия нагрузок и упругого восстановления в момент времени t_* получить требуемые остаточные кинематические величины, t_* – заданное время. Рассматривается класс таких воздействий, когда прогиб w пластины изменяется по заданному во времени закону $w(x_1, x_2, t) = w_0(x_1, x_2) + f_w(t)w_1(x_1, x_2)$ при $0 \leq t < t_*$, $f_w(t)$ – заданная функция, плоскость Ox_1, x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины.

После снятия нагрузок при $t=t_*$ и упругого восстановления пластина принимает форму $w_{**} = w_{**}(x_1, x_2)$. В [4] определены условия, при которых существует единственное обобщенное решение сформулированной обратной задачи.

В основе методики численного расчета параметров формообразования лежат метод конечных элементов и итерационный алгоритм [4 – 6; 112; 176; 197; 205]. Итерационный процесс строится в зависимости от режима деформирования. При расчете перемещений пластины для режима термофиксации $f_w(t) = 0$ при $0 \leq t < t_*$ по заданному остаточному прогибу $w_{**} = w_{**}(x_1, x_2)$ определяется упреждающий прогиб $w_0 = w_0(x_1, x_2)$, при этом вычисление прогиба w^{N+1} на $(N+1)$ -ой итерации проводится по формулам:

$$w^{N+1} = w_0^{N+1} = w_0^N + \Delta w^N, \quad \Delta w^N = w_{**} - w_{**}^N, \quad w_0^1 = w_{**}.$$

Верхний символ «N» означает величину на N-ой итерации. В случае линейного изменения прогиба $f_w(t) = t/t_*$ при $0 \leq t < t_*$ по заданным остаточному прогибу $w_{**} = w_{**}(x_1, x_2)$ и начальному прогибу $w_0 = w_0(x_1, x_2)$ определяется прогиб $w_1 = w_1(x_1, x_2)$ в соответствии с алгоритмом:

$$w_1^{N+1} = w_1^N + \Delta w^N, \quad \Delta w^N = w_{**} - w_{**}^N, \quad w_1^1 = w_{**}.$$

На рисунке 3.26 изображено окно программы «CreePL» для ввода параметров модели. На рисунке 3.27 приведены примеры решения прямой и обратной задач кручения квадратных пластин из сплава АК4-1 для режима термофиксации; на рисунке 3.28 – примеры решения прямой и обратной задачи для режима с линейным изменением прогиба $f_w(t) = t/t_*$. Расчеты проводились для пластины с размерами 200×200 мм, толщиной $h=20$ мм из сплава АК4-1 при температуре $T=200^\circ\text{C}$ с использованием следующих параметров: $B_+ = 0,5 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_+} \text{ч}^{-1}$, $B_- = 0,25 \cdot 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_-} \text{ч}^{-1}$, $n_+ = n_- = 8$ без учета повреждаемости, $E = 7000 \text{ кГ/мм}^2$, $\nu = 0,4$, $M=925 \text{ кГ} \cdot \text{мм/мм}$ [188]. Время формообразования $t_*=250$ ч.

ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ CreePL 1.0

Количество элементов: 800 Количество узлов: 441
 Толщина пластины: 20.00000 Количество итераций: 1
 Время формообразования: 250.0000 Режим формообразования: 1
 Погрешность вычисления: 9.999997E-05 Погрешность метода Рунге: 9.999997E-06
 Модуль Юнга: 7000.000 Коэффициент Пуассона: 0.4000000
 Параметр формирования матрицы жесткости: 1

Коэффициенты на растяжение при пластичности:
 PB1: 331.0590 B1: 5.000000000000000E-015
 PN1: 157.5240 N1: 8.000000

Коэффициенты на сжатие при пластичности:
 PB2: 331.0590 B2: 2.500000000000000E-015
 PN2: 157.5240 N2: 8.000000

РАСЧЕТ ПОМОЩЬ ВЫХОД

Рисунок 3.26 – Окно программы «CreePL» для ввода параметров модели

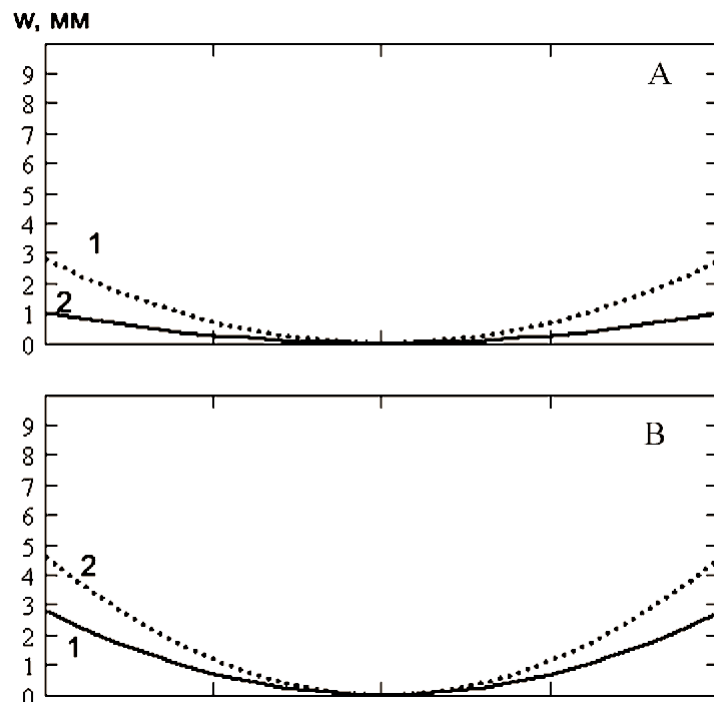


Рисунок 3.27 – Прогиб вдоль диагонали при кручении пластины в режиме термофиксации: линия 1 – заданный начальный прогиб $w_0(x_1, x_2) = 2,775 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$, 2 – полученный остаточный прогиб после упругого восстановления (А); линия 1 – заданный остаточный прогиб $w_{**}(x_1, x_2) = 2,775 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$ мм, 2 – полученный упреждающий прогиб $w_0(x_1, x_2)$ (В)

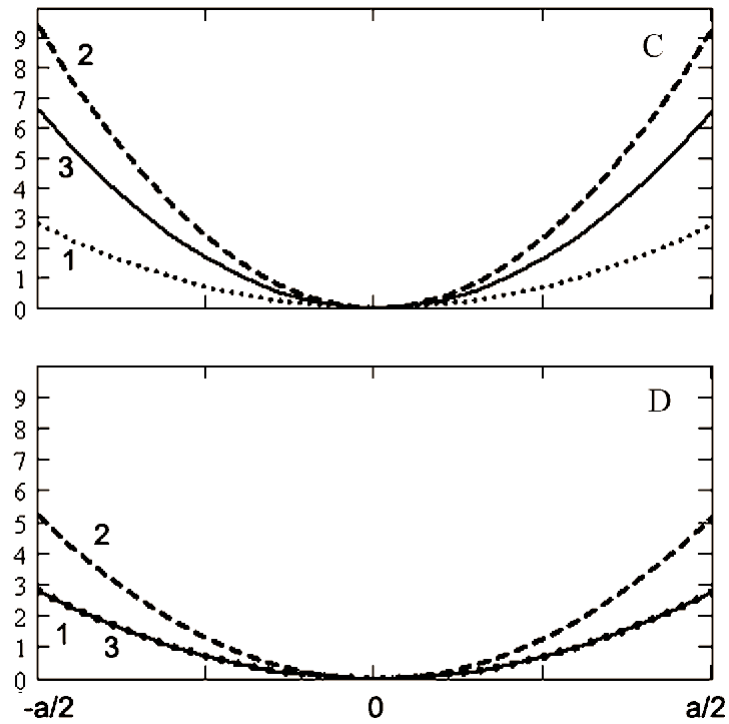


Рисунок 3.28 – Прогиб вдоль диагонали при кручении пластины в режиме с линейным изменением прогиба $f_w(t) = t/t_*$: линия 1 – заданный начальный $w_0(x_1, x_2) = 2,775 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$, 2 – заданный прогиб $(w_0(x_1, x_2) + w_1(x_1, x_2))$, $w_1(x_1, x_2) = 6,6 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$, 3 – полученный остаточный прогиб (C); 1 – заданный начальный прогиб $w_0(x_1, x_2) = 2,775 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$, 2 – рассчитанный искомый прогиб $w_0(x_1, x_2) + w_1(x_1, x_2)$, линия 3, совпадающая с линией 1 – заданный остаточный прогиб $w_{**}(x_1, x_2) = w_0(x_1, x_2) = 2,775 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 x_2$ (D)

3.5 Ползучесть ортотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие

Ортотропный материал, обладающий разными свойствами на растяжение и сжатие в случае сложного напряженного состояния, описывается соотношениями (3.1)-(3.5). Рассмотрим эти соотношения для некоторых частных случаев: растяжения, простого сдвига, плоского напряженного состояния, кручения.

3.5.1 Определяющие соотношения в случае растяжения, сдвига и плоского напряженного состояния

При плоском напряженном состоянии $\sigma_{33} = 0$, выражение (3.3)

преобразуется к виду $\sin 3\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\sigma_i} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{I}{\sigma_i} \right)$, где $I = \sigma_{11} + \sigma_{22}$,

$\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$ – интенсивность напряжений. Тогда выражения для потенциальной функции (3.1) и квадратичных форм (3.4) запишутся в виде

$$2\Phi = \Phi_1(T_1) + \Phi_2(T_2) + [\Phi_2(T_2) - \Phi_1(T_1)](\zeta^3 - 3\zeta)/2, \quad (3.56)$$

$$T_1 = ((A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma_{11}^2 + (A_{11}^+ + A_{33}^+)\sigma_{22}^2 - 2A_{33}^+\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$T_2 = ((A_{22}^- + A_{33}^-)\sigma_{11}^2 + (A_{11}^- + A_{33}^-)\sigma_{22}^2 - 2A_{33}^-\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Для компонент скоростей деформаций ползучести из (3.1) следует

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \lambda_1 T_1^{n_+-1} ((A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma_{11} - A_{33}^+\sigma_{22}) + \lambda_2 T_2^{n_--1} ((A_{22}^- + A_{33}^-)\sigma_{11} - A_{33}^-\sigma_{22}) + \\ &+ \lambda_3 \left(T_2^{n_++1}/(n_+ + 1) - T_1^{n_++1}/(n_+ + 1) \right) (\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)/\sigma_i^3, \\ \eta_{22} &= \lambda_1 T_1^{n_+-1} ((A_{33}^+ + A_{11}^+)\sigma_{22} - A_{33}^+\sigma_{11}) + \lambda_2 T_2^{n_--1} ((A_{33}^- + A_{11}^-)\sigma_{22} - A_{33}^-\sigma_{11}) + \\ &+ \lambda_3 \left(T_2^{n_++1}/(n_+ + 1) - T_1^{n_++1}/(n_+ + 1) \right) (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2)/\sigma_i^3, \\ \xi_{12} &= 2\eta_{12} = \lambda_1 T_1^{n_+-1} (2A_{12}^+\sigma_{12}) + \lambda_2 T_2^{n_--1} (2A_{12}^-\sigma_{12}) - \\ &- \lambda_3 \left(T_2^{n_++1}/(n_+ + 1) - T_1^{n_++1}/(n_+ + 1) \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{12}/\sigma_i^3, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где $\zeta = I/\sigma_i$, $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\zeta^3 - 3\zeta}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\zeta^3 - 3\zeta}{4}$, $\lambda_3 = \frac{9}{4}(\zeta^2 - 1)$.

В случае простого растяжения $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и из (3.57) получается

$$\eta_{11} = T_1^{n_+-1} (A_{22}^+ + A_{33}^+)\sigma, \quad \eta_{22} = -T_1^{n_+-1} A_{33}^+\sigma, \quad \eta_{33} = -T_1^{n_+-1} A_{22}^+\sigma, \quad T_1 = \sqrt{A_{22}^+ + A_{33}^+} \sigma.$$

В случае равномерного растяжения $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{33} = 0$ интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma$, $\zeta = 2$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и

$$\eta_{11} = T_2^{n_- - 1} A_{22}^- \sigma, \quad \eta_{22} = T_2^{n_- - 1} A_{11}^- \sigma, \quad \eta_{33} = -T_2^{n_- - 1} (A_{11}^- + A_{22}^-) \sigma, \quad T_2 = \sqrt{A_{11}^- + A_{22}^-} \sigma.$$

Равномерное растяжение с напряжением σ в направлении осей x_1, x_2 будет эквивалентно сжатию с напряжением σ в направлении x_3 .

В случае сдвига $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{12} = \sigma$ ($\sigma > 0$) интенсивность напряжений есть $\sigma_i = \sqrt{3}\sigma, \zeta = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -9/4$,

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \left(\frac{T_1^{n_+ + 1}}{n_+ + 1} - \frac{T_2^{n_- + 1}}{n_- + 1} \right) \frac{\sqrt{3}}{4\sigma}, \quad \xi_{12} = 2\eta_{12} = (T_1^{n_+ - 1} A_{12}^+ + T_2^{n_- - 1} A_{12}^-) \sigma, \quad (3.58)$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{12}^+} \sigma, \quad T_2 = \sqrt{2A_{12}^-} \sigma$. Анализируя (3.58) можно отметить, что деформации в направлениях 1, 2 и 3 при сдвиге возникают за счет различия свойств материала при растяжении и сжатии.

3.5.2 Кручение стержня, вырезанного из трансверсально-изотропной плиты с разными свойствами материала на растяжение и сжатие

Апробацию модели (3.1)–(3.5) проведем на задаче о кручении стержня кольцевого сечения, вырезанного из трансверсально-изотропного материала с разными свойствами на растяжение и сжатие. Данные экспериментов на растяжение и сжатие сплошных круглых цилиндрических образцов, а также на кручение тонкостенных трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите толщиной 42 мм из сплава АК4-1 и в продольном направлении, при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ приведены в работе [97].

На рисунке 3.29 представлены экспериментальные зависимости деформаций ползучести от времени при растяжении при постоянных напряжениях $\sigma = 156,96; 166,77; 176,58$ МПа для круглых образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите (точки 1–3), в продольном (точки 4–6) и поперечном (точки 7,8) направлениях, а также в направлении нормали к плите (точки 9, 10). Видно, что свойства сплава (скорость деформаций ползучести) при растяжении в плоскости плиты в

продольном, поперечном направлениях, а также в направлении нормали к плите практически одинаковые.

На рисунке 3.30 представлены экспериментальные зависимости деформаций ползучести от времени при сжатии при постоянных напряжениях $\sigma = 176,58; 186,36; 196,20$ МПа для образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите (точки 1–3), в продольном (точки 4) и поперечном (точки 5) направлениях, в направлении под углом 45° к продольному направлению (точки 6) и по нормали к плите (точки 7–9). При сжатии, так же как и при растяжении, значения скорости деформаций ползучести образцов, вырезанных в различных направлениях в плоскости плиты (продольное, поперечное, под углом 45° к продольному направлению) и в направлении нормали к плите, близки. При этом скорость деформаций ползучести для одного и того же значения напряжения $\sigma = 176,58$ МПа при сжатии в плоскости плиты и в направлении нормали к ней (точки 5, 7 на рисунке 3.30) в четыре раза меньше, чем при растяжении (точки 6, 8, 10 на рисунке 3.29). Наибольшая скорость деформаций ползучести и при растяжении, и при сжатии имеет место для образцов, вырезанных под углом 45° к направлению нормали к плите, при растяжении скорость ползучести больше, чем при сжатии.

Для определения параметров B_{ij}^+ , n_+ и B_{ij}^- , n_- используется методика, описанная в работе [191]. Экспериментальные зависимости, приведенные на рисунках 3.29, 3.30 представлены в логарифмических координатах « $\ln(\dot{\eta}) - \ln(\sigma)$ » на рисунке 3.31. Видно, что экспериментальные точки группируются вдоль четырех линий 1–4. Полученные методом наименьших квадратов значения n_+ для линий 1 и 2 и значения n_- для линий 3 и 4 были осреднены: $n_+ = 11,8$, $n_- = 12,3$. Для решения задачи о кручении стержней с использованием модели (3.1)–(3.5) при $n_+ \neq n_-$ необходимо использовать численные методы.

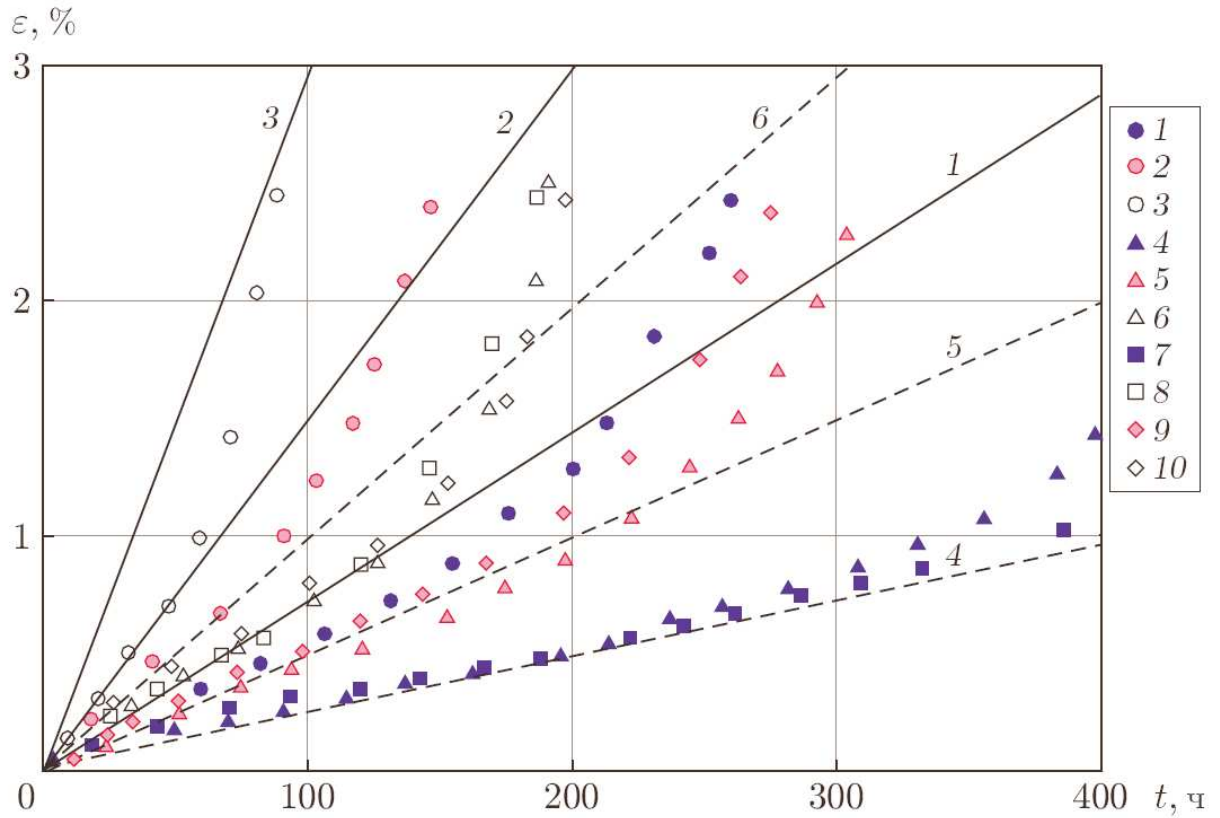


Рисунок 3.29 – Зависимости деформаций ползучести от времени при растяжении при постоянном напряжении образцов из сплава АК4-1 при $T = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$:

точки – экспериментальные данные (1–3 – образцы, вырезанные под углом 45° к направлению нормали к плите, 4–6 – образцы, вырезанные в продольном направлении, 7, 8 – образцы, вырезанные в поперечном направлении, 9, 10 – образцы, вырезанные в направлении нормали к плите); точки 1, 4, 7 – $\sigma = 156,96\text{ МПа}$, 2, 5, 9 – $\sigma = 166,77\text{ МПа}$, 3, 6, 8, 10 – $\sigma = 176,58\text{ МПа}$; линии – результаты расчетов (1–3 – аппроксимация данных с параметрами (3.59) и $n_+ = 12$, полученных при растяжении образцов, вырезанных в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, линии 4–6 – аппроксимация данных с параметрами (3.60) и $n_+ = 12$, полученных при растяжении образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); линии 1, 4 – $\sigma = 156,96\text{ МПа}$, 2, 5 – $\sigma = 166,77\text{ МПа}$, 3, 6 – $\sigma = 176,58\text{ МПа}$

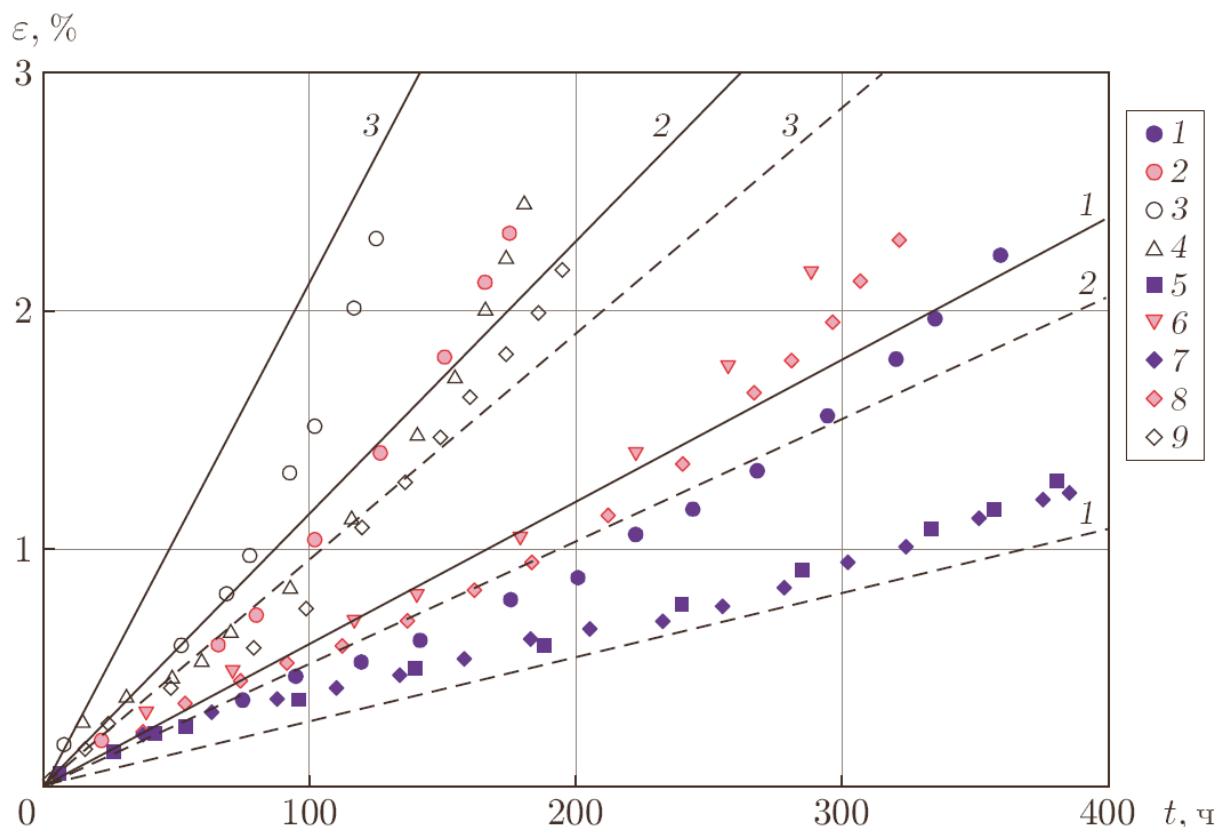


Рисунок 3.30 – Зависимости деформаций ползучести от времени при сжатии при постоянном напряжении образцов из сплава АК4-1 при $T = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$:

точки – экспериментальные данные (1–3 – образцы, вырезанные под углом 45° к направлению нормали к плите, 4 – образцы, вырезанные в продольном направлении, 5 – образцы, вырезанные в поперечном направлении, 6 – образцы, вырезанные в направлении под углом 45° к продольному направлению в плоскости плиты, 7–9 – образцы, вырезанные в направлении нормали к плите); точки 1, 5, 7 – $\sigma = 176,58\text{ МПа}$, 2, 6, 8 – $\sigma = 186,36\text{ МПа}$, 3, 4, 9 – $\sigma = 196,2\text{ МПа}$; линии – результаты расчетов (1–3 – аппроксимация данных с параметрами (3.61) и $n_- = 12$, полученных при сжатии образцов, вырезанных в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, линии 4–6 – аппроксимация данных с параметрами (3.62) и $n_- = 12$, полученных при сжатии образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); линии 1, 4 – $\sigma = 176,58\text{ МПа}$, 2, 5 – $\sigma = 186,36\text{ МПа}$, 3, 6 – $\sigma = 196,2\text{ МПа}$

При $n_+ = n_-$ в ряде случаев можно получить аналитические решения или оценки. Поскольку значения показателей ползучести при растяжении и сжатии практически равны: $n_+ \approx n_-$, далее принимается $n = n_+ = n_- = 12$. На основе аппроксимации данных, приведенных на рисунке 3.31, получены следующие значения параметров:

$$B_{23}^+ = B_{31}^+ = 2,976 \cdot 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (линия 1),} \quad (3.59)$$

$$B_{11}^+ = B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 8,935 \cdot 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (линия 2),} \quad (3.60)$$

$$B_{23}^- = B_{31}^- = 0,811 \cdot 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (линия 3),} \quad (3.61)$$

$$B_{11}^- = B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 1,805 \cdot 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (линия 4).} \quad (3.62)$$

Аппроксимационные прямые, полученные при данных значениях констант, приведены на рисунках 3.29, 3.30.

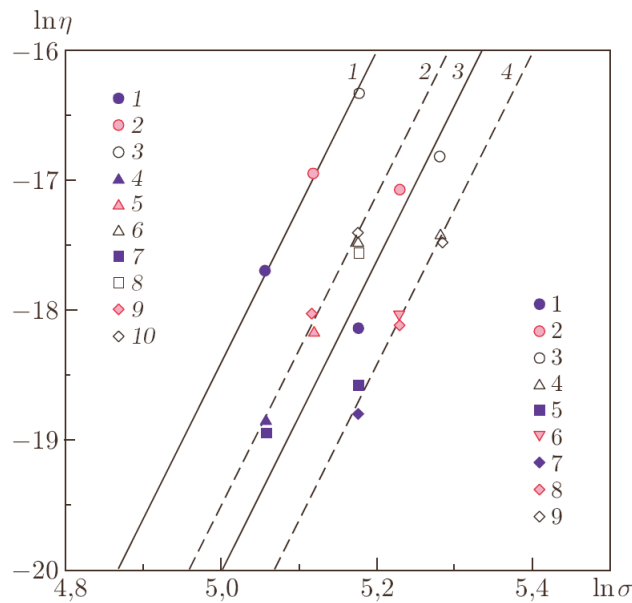


Рисунок 3.31 – Зависимости скоростей деформаций от напряжения в логарифмических координатах $\ln(\eta) - \ln(\sigma)$: линии – результаты расчетов (1, 3 – аппроксимации данных, полученных при растяжении и сжатии образцов, вырезанных в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите; линии 2, 4 – аппроксимация данных, полученных при растяжении и сжатии образцов, вырезанных в направлениях в плоскости плиты и по нормали к плите); точки – экспериментальные данные (1 – 10 – экспериментальные данные, соответствующие точкам 1 – 10 на рисунке 3.29, 1 – 9 – экспериментальные данные, соответствующие точкам 1 – 9 на рисунке 3.30)

3.5.2.1 Кручение стержня кольцевого сечения, вырезанного в направлении нормали к плите

При кручении стержней, вырезанных в направлении нормали к плите, постоянным моментом для напряжений выполняется $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} \neq 0$, $\sigma_{23} \neq 0$. Упругими деформациями пренебрегаем. Для компонент скоростей деформаций ползучести из (3.1)–(3.5) следует

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^3, \\ \eta_{22} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{23}^2 - 2\sigma_{13}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^3, \\ \eta_{33} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^3,\end{aligned}$$

$$\xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = \left(A_{13}^+ T_1^{n_+-1} + A_{13}^- T_2^{n_-+1} \right) \sigma_{13}, \quad \xi_{23} = \left(A_{23}^+ T_1^{n_+-1} + A_{23}^- T_2^{n_-+1} \right) \sigma_{23}, \quad (3.63)$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{31}^+ \sigma_{13}^2 + 2A_{23}^+ \sigma_{23}^2}$; $T_2 = \sqrt{2A_{31}^- \sigma_{13}^2 + 2A_{23}^- \sigma_{23}^2}$.

С учетом (3.5), (3.59)–(3.62) для коэффициентов выполняется $A_{13}^+ = A_{23}^+$, $A_{13}^- = A_{23}^-$, $n_+ = n_- = n$, $T_1 = \sqrt{2A_{31}^+} \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}$, $T_2 = \sqrt{2A_{31}^-} \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}$. Тогда выражения (3.63) упрощаются:

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= D_1 (\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2) \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^{n-2}, \quad \eta_{22} = D_1 (\sigma_{23}^2 - 2\sigma_{13}^2) \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^{n-2}, \\ \eta_{33} &= D_1 \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^n, \quad \xi_{12} = 2\eta_{12} = 0, \\ \xi_{13} &= 2\eta_{13} = D_2 \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^{n-1} \sigma_{13}, \quad \xi_{23} = 2\eta_{23} = D_2 \left(\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \right)^{n-1} \sigma_{23},\end{aligned}$$

где

$$D_1 = \frac{\sqrt{3}}{4(n+1)} \left(\left(\sqrt{2A_{31}^+} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{2A_{31}^-} \right)^{n+1} \right); \quad D_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2A_{31}^+} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{2A_{31}^-} \right)^{n+1} \right).$$

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) , ось z которой совпадает с нормалью к плите, выражения для скоростей деформаций сдвига принимают вид

$$\xi_{r\varphi} = \xi_{rz} = 0, \quad \xi_{\varphi z} = D_2 \tau_{\varphi z}^n. \quad (3.64)$$

Крутящий момент цилиндрического стержня с кольцевым сечением с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 ($R_1 \leq r \leq R_2$) равен

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} r^2 dr d\varphi. \quad (3.65)$$

Из (3.64), (3.65) с учетом равенства $\xi_{\varphi z} = \theta r$ выражение для скорости изменения погонного угла закручивания стержня θ получается в виде аналогичном, приведенному в [225]

$$\theta = D_2 \left(\frac{3+1/n}{2\pi} \frac{M}{R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n}} \right)^n. \quad (3.66)$$

Функция напряжений, такая что $\tau_{\varphi z} = -\partial F_s / \partial r$, определяется по формуле

$$F_s(r) = \frac{(3+1/n)MR_2^{1+1/n} \left(1 - (r/R_2)^{1+1/n}\right)}{2\pi(1+1/n)(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})} = (\theta/D_2)^{1/n} \frac{1}{1+1/n} (R_2^{1+1/n} - r^{1+1/n}). \quad (3.67)$$

Касательное напряжение имеет вид

$$\tau_{\varphi z} = \frac{(3+1/n)Mr^{1/n}}{2\pi(R_2^{3+1/n} - R_1^{3+1/n})}. \quad (3.68)$$

3.5.2.2 Кручение стержня кольцевого сечения, вырезанного в направлении плоскости плиты

При кручении постоянным моментом стержня, вырезанного в продольном направлении, для напряжений выполняется $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{12} \neq 0$, $\sigma_{13} \neq 0$. Для компонент скоростей деформаций ползучести из (3.1)–(3.5) следует

$$\eta_{11} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \right)^3,$$

$$\eta_{22} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{13}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \right)^3,$$

$$\eta_{33} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{T_1^{n_++1}}{n_++1} - \frac{T_2^{n_-+1}}{n_-+1} \right) (\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{12}^2) / \left(\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \right)^3,$$

$$\xi_{12} = (A_{12}^+ T_1^{n_+-1} + A_{12}^- T_2^{n_-+1}) \sigma_{12}, \quad \xi_{13} = (A_{31}^+ T_1^{n_+-1} + A_{31}^- T_2^{n_-+1}) \sigma_{13}, \quad \xi_{23} = 0, \quad (3.69)$$

где $T_1 = \sqrt{2A_{12}^+ \sigma_{12}^2 + 2A_{31}^+ \sigma_{13}^2}$; $T_2 = \sqrt{2A_{12}^- \sigma_{12}^2 + 2A_{31}^- \sigma_{13}^2}$.

С учетом (3.5), (3.59)–(3.62) для коэффициентов выполняется $A_{12}^+ \neq A_{31}^+$, $A_{12}^- \neq A_{31}^-$. При $n_+ = n_- = n$ соотношения для скоростей деформаций ползучести в направлении сдвига (3.69) запишутся в виде

$$\xi_{12} = 2\eta_{12} = (A_{12}^+ T_1^{n-1} + A_{12}^- T_2^{n-1}) \sigma_{12}, \quad \xi_{13} = 2\eta_{13} = (A_{31}^+ T_1^{n-1} + A_{31}^- T_2^{n-1}) \sigma_{13}. \quad (3.70)$$

В предположении отсутствия стеснения торцов из трех уравнений равновесия подвергаемого кручению стержня остается одно

$$\partial \sigma_{13} / \partial x_3 + \partial \sigma_{12} / \partial x_2 = 0. \quad (3.71)$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{13} n_3 + \sigma_{12} n_2 = 0. \quad (3.72)$$

Крутящий момент определяется из (3.38) или (3.40)

В данном случае при решении задачи о кручении стержня, вырезанного в продольном направлении, необходимо учитывать, что деформации сдвига зависят от смещения точек поперечного сечения вдоль оси стержня (депланации сечения), возникающего из-за наличия ортотропных свойств, и решение задачи можно получить, используя численные методы расчета. Однако скорость изменения угла закручивания можно оценить с помощью метода, изложенного в [226]. В работе [226] для сплошного, ортотропного при ползучести стержня с круглым поперечным сечением проведено

сравнение результатов расчета, выполненных методом конечных элементов с использованием пакета ANSYS, и оценок, полученных из условий минимума дополнительного рассеяния и минимума полной мощности. Отличие угла закручивания, полученного из условия минимума дополнительного рассеяния (оценка сверху), от угла закручивания, вычисленного методом конечных элементов, составляет порядка 10 %. Расчеты показывают, что для тонкостенного стержня это различие уменьшается [46].

Численное решение задачи о кручении стержня с произвольным поперечным сечением (3.38), (3.70)–(3.72) можно найти, сводя разрешающие соотношения к дифференциальному уравнению относительно депланации $W(x_2, x_3)$, либо относительно функции напряжений $F_s(x_2, x_3)$, такой что $\sigma_{12} = \partial F_s / \partial x_3$, $\sigma_{13} = -\partial F_s / \partial x_2$.

Верхнюю оценку скорости изменения угла закручивания можно получить из условия минимума дополнительного рассеяния [121; 226]. С учетом (3.1), (3.40), (3.70) это условие записывается в виде

$$I = \iint_{S_0} \left(\frac{1}{2(n+1)} (T_1^{n+1} + T_2^{n+1}) - 2\theta F_s \right) dx_2 dx_3 - 2\theta F_s(R_1) \pi R_1^2 = \min. \quad (3.73)$$

Предположим, что функция напряжений имеет вид, подобный (3.67):

$$F_s(x_2, x_3) = c\theta^{1/n} F_{s0}(x_2, x_3) = c\theta^{1/n} \left(1 - \left(\sqrt{x_2^2 + x_3^2} / R_2 \right)^{1+1/n} \right),$$

или

$$F_s(r) = c\theta^{1/n} \left(1 - \left(r / R_2 \right)^{1+1/n} \right), \quad (3.74)$$

(c – здесь константа, подлежащая определению). Ось z цилиндрической системы координат совпадает с направлением оси x_1 . Функция (3.74) с точностью до множителя является решением задачи о кручении стержня из изотропного материала в условиях установившегося состояния ползучести. Эта функция удовлетворяет уравнению равновесия (3.71) и на внешнем

контуре при $r = R_2$ равна нулю. Подставляя (3.74) в (3.73), из уравнения $dI/dc = 0$ находим константу c , при которой (3.73) достигает минимума:

$$c = (J_1/J_2)^{1/n}, \quad J_1 = 2F_{s0}(R_1)\pi R_1^2 + \iint_{S_0} 2F_{s0} dx_1 dx_2, \quad (3.75)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \left(\left(\sqrt{2A_{12}^+ F_{s0,3}^2 + 2A_{31}^+ F_{s0,2}^2} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{2A_{12}^- F_{s0,3}^2 + 2A_{31}^- F_{s0,2}^2} \right)^{n+1} \right) dx_2 dx_3.$$

Здесь $F_{s0,3} = \partial F_{s0} / \partial x_3$; $F_{s0,2} = \partial F_{s0} / \partial x_2$.

Из (3.40), (3.74), (3.75) находится угловая скорость закручивания

$$\theta = (M/(cJ_1))^n. \quad (3.76)$$

Значение напряжения можно оценить приближенно по формуле

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{\partial F_s}{\partial r} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{M}{J_1 R_2} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{1/n}. \quad (3.77)$$

При наличии у материала разных свойств на растяжение и сжатие выразить напряжения через скорости деформации ползучести в явном виде, аналогично (3.34) не представляется возможным. Для получения нижней оценки скорости изменения угла закручивания, можно вычислить среднее значение скорости изменения угла закручивания, рассчитанное по формуле (3.44) с использованием параметров сначала на растяжение и затем на сжатие.

3.5.2.3 Анализ результатов расчетов и экспериментов на кручение стержней кольцевого сечения

На рисунке 3.32 приведены экспериментальные зависимости погонного угла закручивания $\alpha = \theta t$ от времени [97] при кручении под действием постоянного момента при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ цилиндрических трубчатых образцов из сплава АК4-1, вырезанных в продольном направлении и в направлении нормали к плите. В таблице 3.13 для образцов 1–3, вырезанных в направлении нормали к плите, указаны приложенный крутящий момент, внутренний и внешний диаметры, угловая скорость закручивания,

вычисленная по формуле (3.66). В таблице 3.14 для образцов 4–6, вырезанных в продольном направлении указаны крутящий момент и размеры. В таблице 3.15 для образцов 4–6 приведены оценка скорости изменения угла закручивания сверху, вычисленная по формуле (3.76), а также оценка скорости изменения угла закручивания снизу, полученная с использованием метода 1 по формуле (3.44) и метода 3 по формуле (3.50). Для оценки снизу выполнено усреднение скорости изменения угла закручивания, вычисленной с использованием параметров только на растяжение и только на сжатие.

При растяжении и сжатии скорость деформаций ползучести наибольшая у образцов рассмотренного сплава АК4-1, вырезанных в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите. Вследствие этого скорость изменения угла закручивания образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, выше, чем скорость изменения угла закручивания образцов, вырезанных в продольном направлении. Этот результат подтверждается экспериментальными данными. Интенсивность напряжений $\sigma_i = \sqrt{3}\tau_{\varphi z}$, вычисленная при $r = (R_1 + R_2)/2$ для образца 1 по формуле (3.68) и для образца 4 по формуле (3.77), составляет 170 МПа, при этом углы закручивания для этих двух образцов различаются в два раза.

Таблица 3.13 – Результаты расчета скорости изменения угла закручивания для образцов с кольцевым поперечным сечением, вырезанных в направлении нормали к плите из сплава АК4-1 при $T=200^\circ\text{C}$

Номер образца	Направление, в котором вырезан образец	$M, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2R_1, \text{мм}$	$2R_2, \text{мм}$	$\theta \cdot 10^6, \text{рад/с}^{-1}$
1	3	55,67	18,013	20,01	7,845
2	3	41,00	18,220	19,938	1,117
3	3	180,03	10,03	19,980	10,14

Таблица 3.14 – Нагрузка и размеры образцов с кольцевым поперечным сечением, вырезанных в продольном направлении плиты из сплава АК4-1 при T=200 °C

Номер образца	Направление, в котором вырезан образец	$M, \text{Н}\cdot\text{м}$	$2R_1, \text{мм}$	$2R_2, \text{мм}$	$\theta \cdot 10^6, \text{рад/с}^{-1}$
4	1	56,12	17,985	20,002	4,511
5	1	50,30	17,992	20,000	1,274
6	1	47,32	18,000	20,000	0,640

Таблица 3.15 – Результаты расчета скорости изменения угла закручивания для образцов с кольцевым поперечным сечением, вырезанных в продольном направлении плиты из сплава АК4-1 при T=200 °C

Номер образца	Метод 1 сжатие, растяжение, среднее $\theta \cdot 10^6$, рад/с ⁻¹		Метод 3 сжатие, растяжение, среднее $\theta \cdot 10^6$, рад/с ⁻¹		по формуле (3.76) $\theta \cdot 10^6$, рад/с ⁻¹
4	1,484	6,375	1,516	6,587	4,511
	3,93		4,051		
5	0,419	1,8	0,428	1,86	1,274
	1.109		1,144		
6	0,210	0,904	0,215	0,934	0,64
	0,557		0,575		

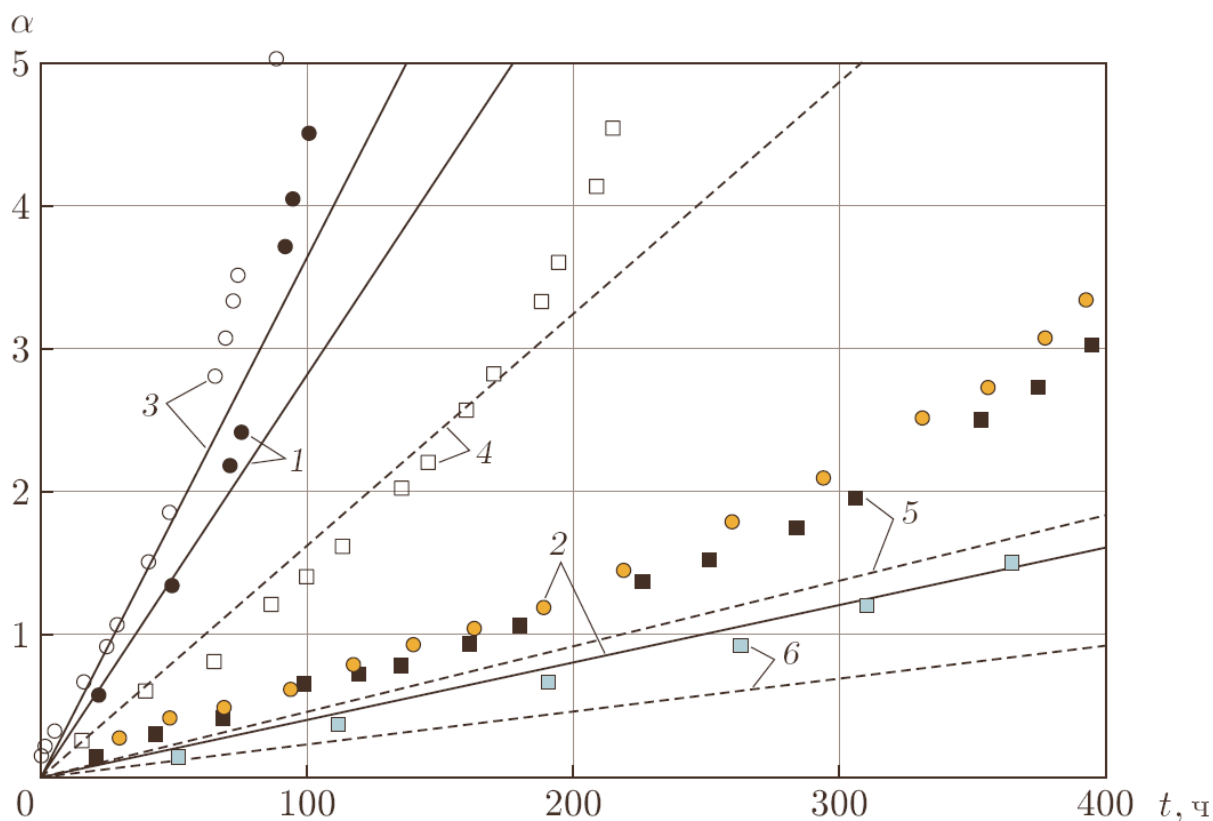


Рисунок 3.32 – Зависимости угла закручивания от времени $\alpha(t)$ для цилиндрических трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите (1 – 3) и в продольном направлении (4 – 6): точки – экспериментальные данные (1, 2 – образцы 1, 2 (см. таблицу 3.13) с толщиной стенки 1 мм, 3 – образец 3 с толщиной стенки 5 мм, 4–6 – образцы 4–6 с толщиной стенки 1 мм (см. таблицу 3.14)) ; линии – результаты расчета (1–3 – расчет по формуле (3.66), линии 4–6 – расчет по формуле (3.76))

Таким образом, предложенная модель ортотропного и разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала апробирована на задаче кручения постоянным моментом при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ цилиндрических трубчатых стержней, вырезанных в направлении нормали к плите и в продольном направлении плиты из трансверсально-изотропного сплава АК4-1. Выписаны определяющие уравнения при кручении. Значения параметров модели найдены из испытаний на одноосное растяжение и сжатие сплошных круглых образцов. В случае одинакового степенного показателя при растяжении и сжатии получено аналитическое решение для скорости изменения угла закручивания для стержня, вырезанного в

направлении нормали плиты. Для стержня, вырезанного в продольном направлении, получены оценки скорости изменения угла закручивания. Результаты расчетов, вычисленные с помощью предложенной модели, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

3.6 Выводы по третьей главе

1. Развита модель установившейся ползучести на основе скалярного потенциала тензора напряжений для ортотропного материала, свойства которого на растяжение и сжатие различны, при этом интенсивность процессов деформирования в условиях одноосного растяжения и сжатия описывается функциями с разными степенными показателями при растяжении и сжатии.

2. Получены определяющие соотношения в случае плоского напряженного состояния, рассмотрены случаи одноосного и двухосного растяжения для несжимаемого при ползучести материала. Модель апробирована при решении ряда задач в условиях сложного напряженного состояния: изгиб гладких и оребренных пластин, кручение круглых сплошных и трубчатых стержней из изотропного и трансверсально-изотропного материалов с одинаковыми и разными свойствами при растяжении и сжатии.

3. С использованием развитой модели в предположении одинаковых свойств при растяжении и сжатии численно решены задачи изгиба пластин из трансверсально-изотропного сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении толщины. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных тремя способами: методом конечных элементов с использованием пакета ANSYS; в предположении установившейся ползучести материала; путем сведения разрешающих уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени в точках разбиения по толщине пластины.

Получена оценка влияния на процессы изгиба пластин свойства более слабого сопротивления деформированию в направлении нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости плиты. Расчет с учетом такого типа трансверсальной изотропии показал уменьшение прогиба при деформировании в знакопеременную седлообразную поверхность и увеличение прогиба при деформировании в поверхность цилиндрической формы и в поверхность двойной положительной кривизны, по сравнению с прогибом, вычисленным в предположении изотропных свойств материала.

Для задачи кручения пластины из изотропного сплава ВТ20 при $T=750^{\circ}\text{C}$ и трансверсально-изотропного сплава 1163Т с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении толщины при $T=400^{\circ}\text{C}$ получено удовлетворительное соответствие экспериментальных данных и результатов расчета.

4. В предположении одинаковых свойств при растяжении и сжатии исследовано влияние свойства более слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к трансверсально-изотропной плите (т.е. в поперечно-сдвиговом направлении), по сравнению с сопротивлением деформациям ползучести в плоскости плиты и по нормали, на процесс деформирования пластин. Получено незначительное влияние этого свойства при деформировании гладких пластин. При деформировании ребренных пластин влияние свойства пониженной сопротивляемости в поперечно-сдвиговом направлении может быть существенным и зависит от высоты, толщины и ориентации ребер.

5. С использованием развитой модели в предположении различных свойств при растяжении и сжатии численно решены задачи изгиба пластин из изотропного сплава, при этом интенсивность процессов при растяжении и сжатии описывается функциями с различными степенными показателями при растяжении и сжатии. Разработан программный комплекс «CreePL» (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613572), предназначенный для расчета и оценки кинематических параметров процесса

формообразования гладких панелей одинарной и двойной кривизны при медленных режимах деформирования, в том числе при термофиксации, с учетом разных свойств материала при растяжении и сжатии в условиях ползучести. Комплекс позволяет решать задачи расчета остаточной формы пластины (прямые задачи) и определения упреждающей геометрии оснастки (обратные задачи) при заданной продолжительности процесса формообразования с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок. Программный комплекс «CreePL» применен для решения задачи о чистом кручении пластины из сплава В95пч при температуре 180 °С. Получено удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных. Исследования сплава В95пч получили практическое применение при изготовлении технологической оснастки на ОАО КнААПО («Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение им. Ю. А. Гагарина», в настоящее время Филиал ПАО «Компания Сухой» «Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю. А. Гагарина»).

6. В предположении одинаковых и разных свойств материала на растяжение и сжатие исследовано кручение круглых сплошных и кольцевых стержней, вырезанных в продольном направлении плиты и в направлении нормали к плите из трансверсально-изотропного сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали плиты. Полученные новые аналитические решения, нижняя и верхняя оценка скорости изменения угла закручивания на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния удовлетворительно согласуются с результатами численного моделирования в программе ANSYS в случае, когда степенной показатель для растяжения и сжатия одинаков.

Численное моделирование показало, что при кручении круглых образцов, вырезанных в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты, возникает депланация поперечного сечения, что визуально проявляется в виде спиралевидных линий. При кручении образцов,

вырезанных в направлении нормали к плите, скорость изменения угла закручивания больше, чем для стержней, вырезанных в продольном направлении и существенно больше, чем для стержней в предположении изотропных свойств материала.

Показано, что экспериментальные данные кручения при температуре $T = 200$ °С цилиндрических трубчатых стержней, вырезанных в направлении нормали к плите и в продольном направлении плиты из трансверсально-изотропного сплава АК4-1 с разными свойствами на растяжение и сжатие удовлетворительно согласуются с результатами расчета по развитой модели.

Результаты исследований опубликованы в журналах ВАК и WEB of Science [6; 7; 9; 10; 11; 13; 15; 19; 225; 226] , в трудах конференций [21; 23, 28– 38; 40– 43; 46; 130; 131; 163; 164; 220– 223].

ГЛАВА 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

4.1 Выбор режимов формования и оценка эксплуатационного ресурса по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности при одноосном растяжении стержней

При выборе того или иного температурно-скоростного режима формообразования могут одновременно решаться несколько задач:

- Получение необходимой формы и параметров конструкции за заданное время (обратные задачи) [4; 6; 51; 52; 56; 60; 68; 175; 205].
- Накопление минимальной поврежденности материала после изготовления, что может дать существенное отличие в длительности эксплуатации деталей в холодном состоянии при низких уровнях напряжений [51; 52; 56; 205].
- Получение минимального уровня остаточных напряжений после снятия всех нагрузок и упругого восстановления, так как остаточные напряжения могут приводить к короблению в процессе эксплуатации [4; 6].
- Отсутствие пластических деформаций в процессе нагружения.

В [4; 6] для задач изгиба пластин и кручения профиля уголкового сечения получено, что минимальный уровень остаточных напряжений соответствует релаксационному режиму деформирования, т.е. режиму термофиксации.

Задачи определения оптимального пути деформирования обеспечивающего минимальный уровень повреждений рассмотрены в [51; 52; 56; 205]. В [51; 52; 56] исследованы ряд задач оптимального проектирования в рамках энергетического варианта теории ползучести [101; 191]. В [205] получено, что для материалов, ползучесть которых описывается кинетическими уравнениями Ю.Н. Работного с учетом повреждаемости в виде

$$\eta_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma_e^n}{(1-q)^{\kappa_1}} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{B_q \sigma_e^g}{(1-q)^{\kappa_2}}, \quad i, j=1, 2, 3, \quad (4.1)$$

оптимальным путем, при котором достигается минимальный уровень повреждений, будет путь, когда скорость деформаций ползучести постоянна, при этом на значения параметров ползучести наложено ограничение $g \geq n$. Здесь $B_\varepsilon, B_q, n, g, \kappa_1, \kappa_2$ – константы ползучести; $\varepsilon_{ij}, \eta_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций, скоростей деформаций ползучести и напряжений; σ_ε – однородная относительно напряжений функция первой степени; параметр q ($0 \leq q \leq 1$) описывает с феноменологических позиций накопление повреждений в материале.

В [81; 101] показано, что с помощью замены $(1 - \omega) = (1 - q)^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$ кинетические уравнения (4.1) можно конкретизировать в виде соотношений с одинаковыми функциями в знаменателе. (1.12) – (1.14).

В [95] применительно к оценке остаточного эксплуатационного ресурса после процесса формообразования приведены результаты численных расчетов по деформированию сплошных круглых стержней на одноосное растяжение из упрочняющегося ($\alpha \neq 0$) титанового сплава ЗВ при комнатной температуре по зависимостям (1.12) – (1.14), где $f_c(\sigma_\varepsilon, T) = B_A \sigma_i^{n+1}$, $\varphi_c(\sigma_{\varepsilon^*}, T) = B_\omega \sigma_i^g$. Для этого сплава на основе графиков выполнено сравнение накопления повреждений в стержнях при деформировании для двух режимов: при постоянных напряжениях ($\sigma_i = \sigma_0 = \text{const}$) и при постоянных скоростях деформаций, равных скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений ($\eta_i = \eta_0 = B_A \sigma_0^n = \text{const}$). Получено, что на стадии изготовления деталей, работающих в условиях, близких к растяжению формование до необходимой величины деформации ε_0 с заданной кинематикой процесса деформирования предпочтительнее, чем формообразование под действием постоянных напряжений. Необходимо отметить, что сплав ЗВ описывается энергетическим вариантом теории ползучести $A^* = \text{const}$ [191] и выполняется условие $g \geq n$. В [18] проводится сравнение этих двух процессов деформирования в зависимости от значений

параметров в уравнениях (1.12) – (1.14) в случае степенных функций $f_c(\sigma) = B_A \sigma^{n+1}$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$.

4.1.1 Анализ режимов деформирования при постоянных напряжениях и с заданной кинематикой

Исследуем в зависимости от значений параметров ползучести в уравнениях (1.12) – (1.14) два режима одноосного деформирования – при постоянных напряжениях и при постоянных скоростях деформаций, равных скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений. Упругими деформациями пренебрегаем. Пусть $f_c(\sigma) = B_A \sigma^{n+1}$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$, тогда из (1.12) – (1.14) выражение для скорости деформаций ползучести примет вид:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{B_A \sigma^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \quad (4.2)$$

В случае *режима 1*, при котором напряжения постоянны $\sigma_i = \sigma_0 = \text{const}$, аналогично [101], после интегрирования (1.13), для параметра поврежденности следует $\omega = \left(1 - (1 - (m+1)(\alpha+1) B_\omega \sigma_0^g t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$. Подставляя полученное выражение для ω в (4.2) и интегрируя по t , находим

$$\varepsilon^c(t) = \frac{B_A}{B_\omega} \sigma_0^{n-g} \left(1 - (1 - (m+1)(\alpha+1) B_\omega \sigma_0^g t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{B_A}{B_\omega} \sigma_0^{n-g} \omega(t). \quad (4.3)$$

В случае *режима 2*, при котором скорость деформаций ползучести постоянна $\dot{\varepsilon} = \eta_0 = \text{const}$, причем $\eta_0 = B_A \sigma_0^n$, из (4.2) следует $\sigma = \left((1 - \omega^{\alpha+1})^m \omega^\alpha \eta_0 / B_A \right)^{1/n}$. Подставляя σ в (1.13), для параметра поврежденности получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = B_\omega \left(\frac{\eta_0}{B_A} \right)^{g/n} \omega^{\alpha \left(\frac{g-1}{n} \right)} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m \left(\frac{g-1}{n} \right)}. \quad (4.4)$$

После интегрирования (4.4) выражение для t принимает вид

$$t = \frac{1}{B_{\omega} \sigma_0^g} \int_0^{\omega} \omega^{\alpha \left(1 - \frac{g}{n}\right)} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m \left(1 - \frac{g}{n}\right)} d\omega. \quad (4.5)$$

При $\alpha \neq 0$ интеграл (4.5) допускает численное интегрирование приближенными методами. В случае, когда упрочнение отсутствует, т.е. $\alpha = 0$, параметр поврежденности запишется в виде

$$\omega(t) = 1 - \left(1 - \left(m + 1 - \frac{mg}{n} \right) B_{\omega} \sigma_0^g t \right)^{\frac{1}{m+1 - \frac{mg}{n}}}. \quad (4.6)$$

Сравним параметр поврежденности (4.3) и (4.6) при деформировании до необходимой величины деформации ε_0 . Из (4.3) для режима 1 следует:

$$\omega = \omega_{\sigma} = \frac{B_{\omega}}{B_A} \sigma_0^{g-n} \varepsilon_0. \quad (4.7)$$

Для режима 2, подставляя время $t = \frac{\varepsilon_0}{\eta_0} = \frac{\varepsilon_0}{B_A \sigma_0^n}$ в (4.6), получаем

$$\omega = \omega_{\eta} = 1 - \left(1 - \left(m + 1 - \frac{mg}{n} \right) \varepsilon_0 \frac{B_{\omega}}{B_A} \sigma_0^{g-n} \right)^{\frac{1}{m+1 - \frac{mg}{n}}}. \quad (4.8)$$

Обозначим $\gamma = 1 / \left(m + 1 - \frac{mg}{n} \right)$. При сравнении (4.7) и (4.8) необходимо рассмотреть несколько случаев: а) $\gamma < 0$; б) $0 < \gamma < 1$; в) $\gamma > 1$.

В случае б) после ряда несложных преобразований можно получить, что $\omega_{\sigma} < \omega_{\eta}$, при этом должно выполняться условие $g < n$, $m > 0$. Условие $g < n$ выполняется для материалов, для которых деформация при разрушении $\varepsilon_*^c = \frac{B_A}{B_{\omega}} \sigma_0^{n-g}$ увеличивается при увеличении σ_0 , т.е. $\varepsilon_*^c(\sigma_0)$ монотонно возрастает.

В случаях а) и в) $\omega_{\sigma} > \omega_{\eta}$, при этом должно выполняться условие $g > n$. В случае а) на значения параметров ползучести необходимо наложить ограничение $\frac{1}{m} + 1 < \frac{g}{n}$, в случае в) соответственно $\frac{1}{m} + 1 > \frac{g}{n}$. Условие $g > n$ характерно для материалов, для которых деформация при разрушении ε_*^c увеличивается при уменьшении σ_0 , т.е. $\varepsilon_*^c(\sigma_0)$ монотонно убывает. Как

частный случай к последним материалам относятся сплавы, свойства которых можно описать энергетическим вариантом ползучести $A_* = \text{const}$ [191], при этом $g = n + 1$ и для выполнения условий а) и в) необходимо $m > n$ и $m < n$ соответственно.

Для материалов, у которых $g = n$, имеем $\varepsilon_*^c(\sigma_0) = \text{const}$ и $\omega_\sigma = \omega_\eta$.

Накопление повреждений для сплавов с немонотонной зависимостью $\varepsilon_*^c(\sigma_0)$ [59; 86; 136] представляет более сложный процесс. Пусть в уравнениях (1.12) – (1.14) $f_c(\sigma) = B_A \sigma \cdot \text{sh}(\sigma/c)$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$. Тогда в случае режима 1, при котором напряжения постоянны $\sigma_i = \sigma_0 = \text{const}$, вместо (4.3) выражение для деформации ползучести примет вид

$$\varepsilon^c(t) = \frac{B_A}{B_\omega} \frac{\text{sh}(\sigma_0/c)}{\sigma_0^g} \left(1 - \left(1 - (m+1)(\alpha+1) B_\omega \sigma_0^g t \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{B_A}{B_\omega} \frac{\text{sh}(\sigma_0/c)}{\sigma_0^g} \omega(t). \quad (4.9)$$

Предельная деформация $\varepsilon_*^c = \frac{B_A}{B_\omega} \cdot \frac{\text{sh}(\sigma_0/c)}{\sigma_0^g}$.

В случае режима 2, при котором скорость деформаций ползучести постоянна $\eta_0 = B_A \text{sh}(\sigma_0/c) = \text{const}$, из (1.12) следует

$$\text{sh}(\sigma/c) = (1 - \omega^{\alpha+1})^m \omega^\alpha \eta_0 / B_A, \quad \text{откуда} \quad \sigma = c \ln \left(F_n + \sqrt{F_n^2 + 1} \right), \quad \text{где}$$

$$F_n(\omega) = (1 - \omega^{\alpha+1})^m \omega^\alpha \eta_0 / B_A = (1 - \omega^{\alpha+1})^m \omega^\alpha \text{sh}(\sigma_0/c).$$

После подстановки выражение для σ в (1.12) для нахождения параметра поврежденности получается уравнение аналогичное (4.4):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \left(c \ln \left(F_n(\omega) + \sqrt{F_n(\omega)^2 + 1} \right) \right)^g. \quad (4.10)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.10) можно получить численно, например, методом Рунге-Кутты-Мерсона.

В качестве примеров выполним сравнительный анализ накопления повреждений при деформировании в режимах 1 и 2 для нескольких сплавов. Экспериментальные исследования этих сплавов были проведены в

лаборатории статической прочности Института гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН. При обработке экспериментальных данных и получении первичных кривых ползучести деформация определялась, как $\varepsilon = \ln(1 + \Delta L / L_0)$, L, L_0 – конечная и исходная длина образца при растяжении, т.е. вычислялась деформация Генки. Величина нагрузки P пересчитывалась и прикладывалась с учетом условия $\sigma = P(1 + \Delta L / L_0) / S_0 = \text{const}$, где S_0 исходная площадь поперечного сечения образца.

4.1.2 Результаты численных расчетов для разных сплавов

Сплав АК4-1 при температуре $T = 250^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести для сплава АК4-1 (Al-Cu-Mg-Fe-Ni) приведены в (1.17), упрочнение отсутствует $\alpha = 0$. Значения параметров удовлетворяют условию $0 < \gamma < 1$.

На рисунке 4.1, *а* линиями 1-6 изображены аппроксимационные зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma_0 = 170; 180; 190; 200; 210; 230$ МПа. Деформации при разрушении, т.е. когда $\omega = 1$, вычисленные согласно (4.3), составляют соответственно $\varepsilon_*^c = 5,3; 6,4; 7,8; 9,3; 11; 15,2$ % (отмечены символом «*» на рисунке 4.1, *а*). Первичные кривые ползучести представлены на рисунке 1.3, *в*. Для рассматриваемого сплава АК4-1 ε_*^c монотонно возрастает при увеличении напряжения σ_0 . На рисунке 4.1, *б* приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$ в диапазоне $140 \leq \sigma_0 \leq 240$ МПа: сплошные линии 1, 3 рассчитаны согласно (4.7); штриховые линии 2, 4 – согласно (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 5\%$ и линии 3, 4 $\varepsilon_0 = 2\%$. Поскольку получено, что $\omega_\sigma < \omega_\eta$, то при выборе режимов на стадии изготовления деталей, формование до необходимой величины деформации ε_0 для сплава АК4-1 под действием постоянных напряжений предпочтительнее, чем формование с заданной кинематикой процесса деформирования.

Сплав Д16Т при температуре $T = 250^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести для сплава Д16Т (Al-Mg-Cu) при температуре $T = 250^\circ\text{C}$ приведены в [191, С.33] $\alpha = 0$; $m = 10$; $g = 6$; $n = 5$; $B_A = 4,317 \cdot 10^{-18} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$; $B_\omega = 2,936 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$ (значения пересчитаны при переводе из системы единиц измерения кгс в СИ). Данные значения получены в рамках энергетического варианта теории ползучести [191] – удельная работа рассеяния $A_* = 14,7 \text{ МДж/м}^3$. В данном случае выполняется условие $\gamma < 0$.

На рисунке 4.2. а линиями 1-4 изображены зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma_0 = 68,6; 78,4; 88,2; 98 \text{ МПа}$. Деформации при разрушении составляют соответственно $\varepsilon_*^c = 21,4; 18,7; 16,7; 15 \%$. Для сплава Д16Т ε_*^c монотонно убывает при увеличении напряжения σ_0 . На рисунке 4.2, б приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$: сплошные линии 1, 3 рассчитаны исходя из (4.7); штриховые линии 2, 4 –согласно (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 15\%$ и линии 3, 4 $\varepsilon_0 = 5\%$. Для сплава Д16Т при температуре $T = 250^\circ\text{C}$ получено, что $\omega_\eta < \omega_\sigma$. Таким образом формование до необходимой величины деформации ε_0 с заданной кинематикой процесса деформирования предпочтительнее, чем формообразование под действием постоянных напряжений.

Сплав ВТ9 при температуре $T = 600^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести для сплава ВТ9 (Ti-Al-Mo-Zr) при температуре $T = 600^\circ\text{C}$ [191]: $m = 2,33$; $g = 4$; $n = 3$; $B_A = 2,379 \cdot 10^{-13} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$; $B_\omega = 1,055 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 0$ (значения пересчитаны при переводе из системы единиц измерения кгс в СИ). Работа рассеяния при разрушении $A_* = 225,4 \text{ МДж/м}^3$, значения параметров удовлетворяют условию $\gamma > 1$.

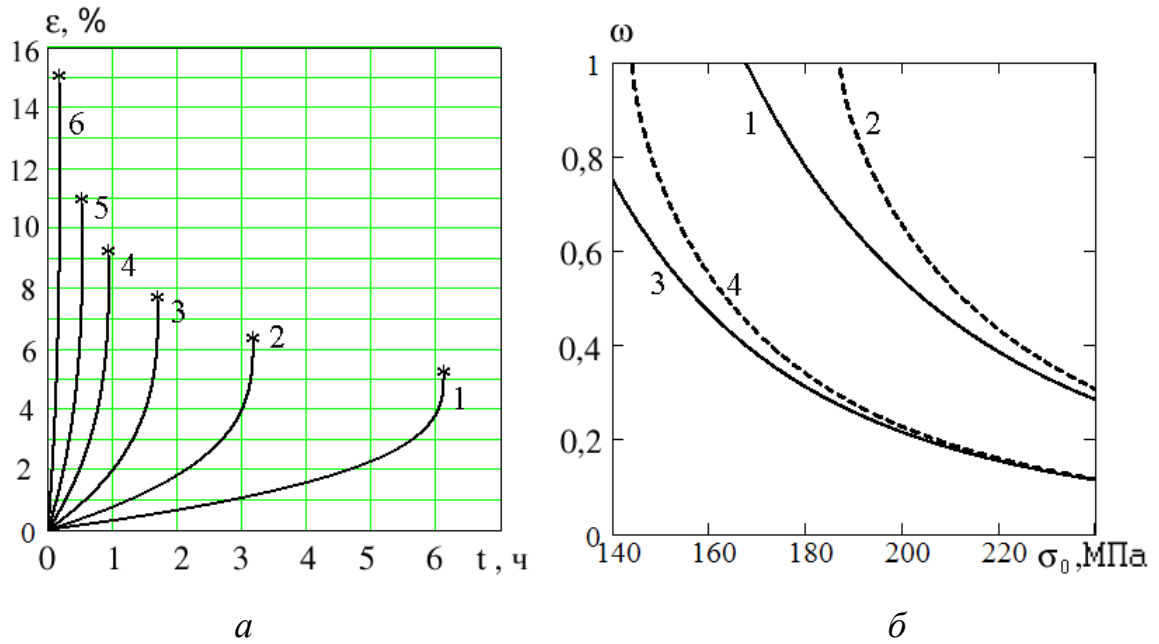


Рисунок 4.1 – Аппроксимационные зависимости для сплава АК4-1: $\varepsilon^c(t)$, линии 1-6 соответствуют напряжениям $\sigma_0 = 170; 180; 190; 200; 210; 230$ МПа (а); $\omega(\sigma_0)$, сплошные линии 1, 3 – расчет по формуле (4.7); штриховые линии 2, 4 – (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 5\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 2\%$ (б)

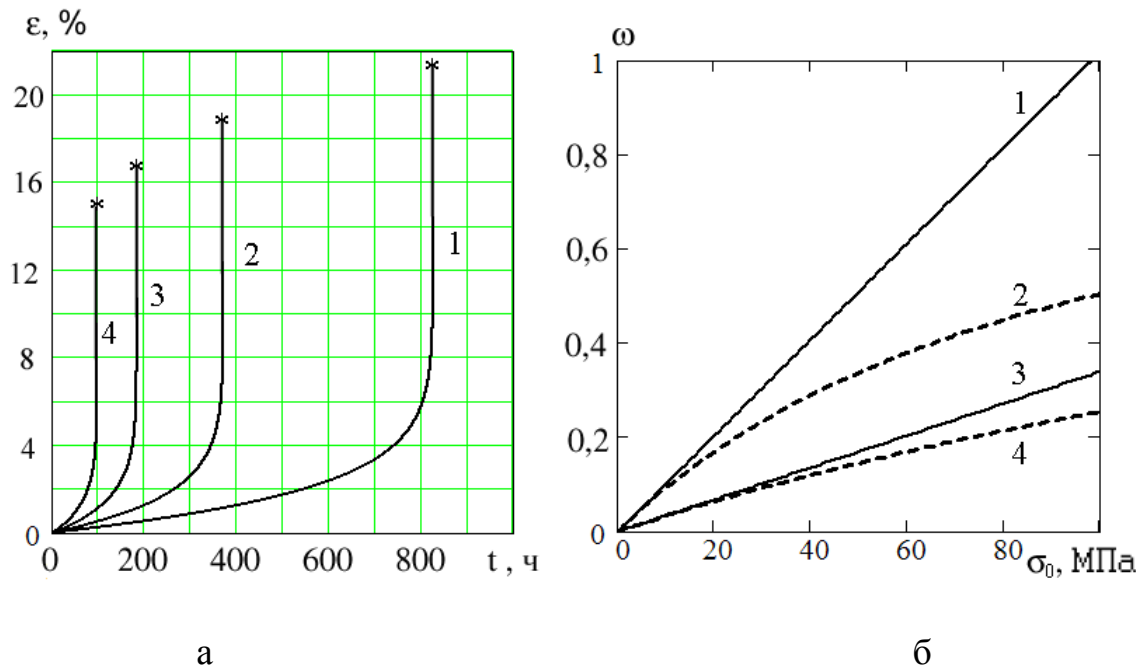


Рисунок 4.2 – Зависимости для сплава Д16Т: $\varepsilon^c(t)$, линии 1-4 соответствуют напряжениям $\sigma_0 = 68,6; 78,4; 88,2; 98$ МПа (а); $\omega(\sigma_0)$, сплошные линии 1, 3 расчет по формуле (4.7); штриховые линии 2, 4 – (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 15\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 5\%$ (б)

На рисунке 4.3, *а* линиями 1-5 изображены аппроксимационные зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma_0 = 245; 294; 343; 392; 441$ МПа. Деформации при разрушении составляют соответственно $\varepsilon_*^c = 92; 76,7; 65,7; 57,5; 51,1$ %. Для сплава ВТ9 при температуре $T = 600^\circ\text{C}$ деформация при разрушении ε_*^c монотонно убывает при увеличении напряжения σ_0 . На рисунке 4.3, *б* приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$: сплошные линии 1, 3 рассчитаны исходя из (4.7); штриховые линии 2, 4 – согласно (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 30\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 10\%$.

Для сплава ВТ9 получено $\omega_\eta < \omega_\sigma$, т.е. деформирование до необходимой величины ε_0 с заданной кинематикой процесса предпочтительнее, чем под действием постоянных напряжений.

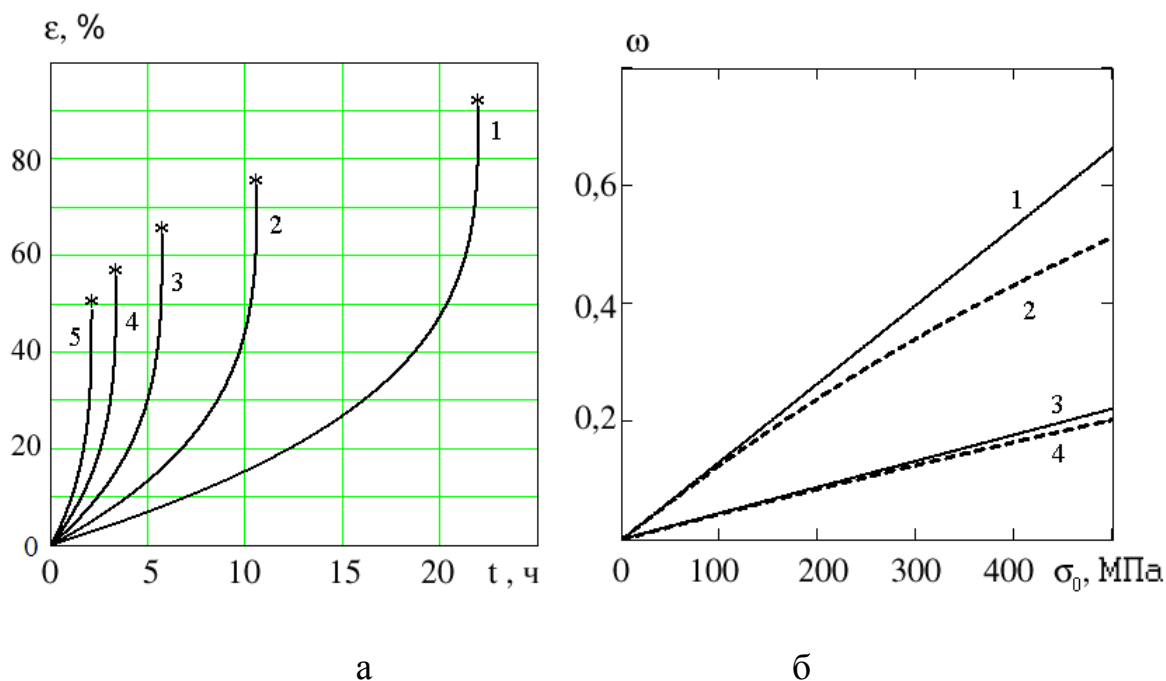


Рисунок 4.3 – Зависимости для сплава ВТ9: $\varepsilon^c(t)$, линии 1-5 соответствуют напряжениям $\sigma_0 = 245; 294; 343; 392; 441$ МПа (а); $\omega(\sigma_0)$, сплошные линии 1, 3 расчет по формуле (4.7); штриховые линии 2, 4 – (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 30\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 10\%$ (б)

Сталь марки 09Г2С-12 при температуре $T = 730^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести стали 09Г2С-12 (Fe-Si-Cu-Cr-Ni-C) при температуре $T = 730^\circ\text{C}$ следующие [256]: $B_A = B_\varepsilon = 1,97 \cdot 10^{-14} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$, $B_\omega = 3,97 \cdot 10^{-14} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$, $n = 5,5$, $g = 5,4$, $m = 0,65$. Выполняется условие $\gamma = 0,988 \approx 1$.

На рисунке 4.4, а линиями 1-5 изображены зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma_0 = 40; 50; 60; 70; 80 \text{ МПа}$. Деформации при разрушении соответственно $\varepsilon_*^c = 71,8; 73,4; 74,7; 75,9; 76,9 \%$. Для стали 09Г2С-12 при температуре $T = 730^\circ\text{C}$ деформация ε^c при увеличении σ_0 возрастает незначительно. На рисунке 4.4, б приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$ в диапазоне $40 \leq \sigma_0 \leq 80 \text{ МПа}$: сплошные линии 1, 3 рассчитаны исходя из (4.7); штриховые линии 2, 4 (совпадают со сплошными линиями) получены согласно (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 40\%$ и линии 3, 4 $\varepsilon_0 = 20\%$.

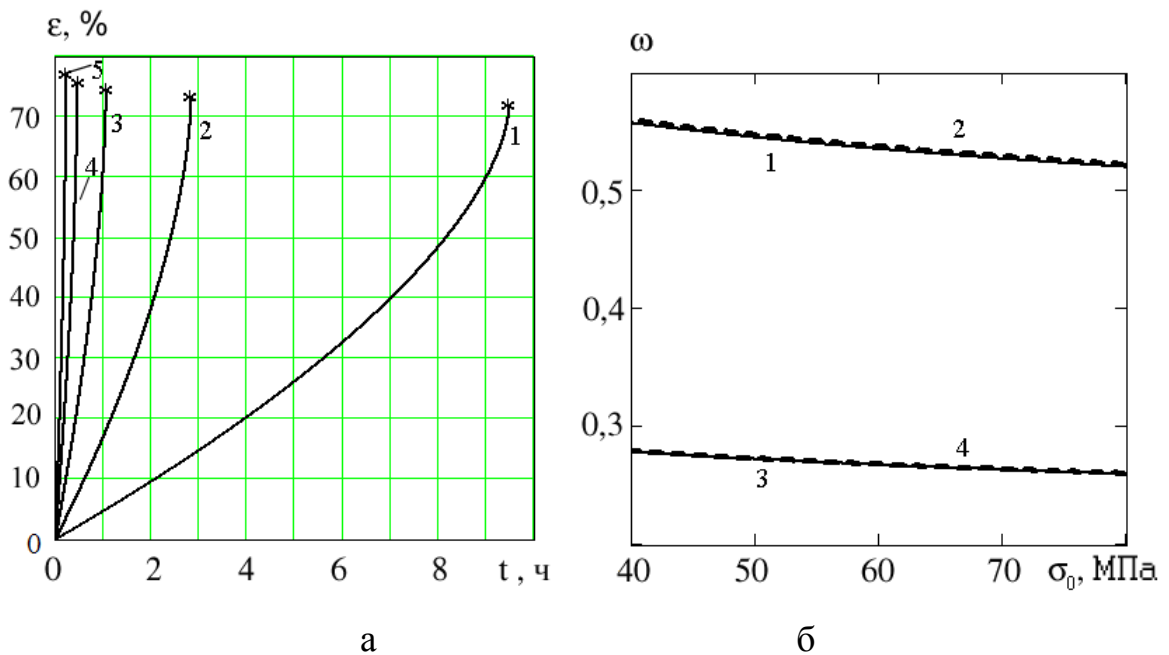


Рисунок 4.4 – Зависимости для стали 09Г2С-12: $\varepsilon^c(t)$, линии 1-5 соответствуют напряжениям $\sigma_0 = 40; 50; 60; 70; 80 \text{ МПа}$ (а); $\omega(\sigma_0)$, сплошные линии 1, 3 расчет по формуле (4.7); штриховые линии 2, 4 – (4.8); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 40\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 20\%$ (б)

Для стали 09Г2С-12 при температуре $T = 730^\circ\text{C}$ получено, что формование до необходимой величины деформации ε_0 с заданной кинематикой процесса деформирования ($\eta_0 = B_A \sigma_0^n = \text{const}$) и под действием постоянных напряжений (σ_0) приводит к одинаковому уровню накопления повреждений в материале $\omega_\eta \approx \omega_\sigma$.

Сплав 3В при комнатной температуре. Сравним также уровень накопления повреждений для двух режимов деформирования для упрочняющегося ($\alpha \neq 0$) сплава 3В (Ti–Al–V). Значения параметров ползучести сплава 3В при комнатной температуре следующие [95]: $\alpha = 2,5$; $m = 7$; $g = 51,8$; $n = 50,8$; $B_A = 1,46 \cdot 10^{-151} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$; $B_\omega = 2,205 \cdot 10^{-153} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$.

Свойства данного сплава также могут быть описаны в рамках энергетического варианта теории ползучести – работа рассеяния при разрушении $A_* = 66,2 \text{ МДж/м}^3$. Однако в данном случае значение повреждаемости $\omega(\sigma_0)$ можно получить, решая дифференциальное уравнение (4.4) при $0 \leq t \leq \varepsilon_0 / (B_A \sigma_0^n)$.

На рисунке 4.5, а линиями 1-4 изображены аппроксимационные зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma_0 = 589; 603; 618; 638 \text{ МПа}$. Деформации при разрушении составляют соответственно $\varepsilon_*^c = 11,2; 11; 10,7; 10,4 \%$. Для сплава 3В ε_*^c монотонно убывает при увеличении напряжения σ_0 . Следует отметить, что убывание это незначительное. На рисунке 4.5, б приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$ в диапазоне $550 \leq \sigma_0 \leq 650 \text{ МПа}$: сплошные линии 1, 3 рассчитаны исходя из (4.7); штриховые линии 2, 4 получены из решения дифференциального уравнения (4.4); для сравнения на график нанесены штриховые линии 5, 6 вычисленные по формуле (4.8), т.е. в предположении $\alpha = 0$. Линии 1, 2, 5 соответствуют $\varepsilon_0 = 5\%$ и линии 3, 4, 6 $\varepsilon_0 = 3\%$. Свойство упрочнения

($\alpha = 2,5$) для данного сплава оказывает заметное влияние в сторону увеличения разницы между значениями параметра поврежденности для двух рассматриваемых режимов. Таким образом, расчеты показали, что для сплава 3В на стадии изготовления деталей, работающих в условиях, близких к растяжению формование до необходимой величины деформации ε_0 с заданной кинематикой процесса деформирования предпочтительнее, чем формообразование под действием постоянных напряжений ($\omega_\eta < \omega_\sigma$).

Сталь марки X18H10T при температуре 850°C. Значения параметров ползучести для стали марки X18H10T (Al-Mg-Cu) при температуре 850°C получены в подразделе 1.3.3: $B_A = 2,183 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1}$; $c = 18,6 \text{ МПа}$; $m = 1,8$; $g = 3,165$; $B_\omega = 2,936 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$. В данном случае имеем сплав с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения. В уравнениях (1.12) – (1.14) принято $f_c(\sigma) = B_A \sigma \cdot \text{sh}(\sigma/c)$ и $\varphi_c(\sigma) = B_\omega \sigma^g$.

На рисунке 1.5, а линиями 1-4 изображены зависимости $\varepsilon^c(t)$ (4.3), соответствующие напряжениям $\sigma = 39,2; 49; 58,8; 78,4 \text{ МПа}$. Деформации при разрушении составляют соответственно $\varepsilon_*^c = 12,9; 10,9; 10,4; 12 \%$. Для стали марки X18H10T ε_*^c при увеличении напряжения σ_0 сначала монотонно убывает, а при $\sigma_0 \approx 60 \text{ МПа}$ начинает монотонно возрастать в диапазоне напряжений $40 \leq \sigma_0 \leq 80 \text{ МПа}$. На рисунке 4.6 приведены зависимости $\omega(\sigma_0)$: сплошные линии 1, 3 рассчитаны исходя из (4.9); штриховые линии 2, 4 –согласно (4.10); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 6\%$ и линии 3, 4 $\varepsilon_0 = 2\%$. Для стали X18H10T при температуре $T = 850^\circ\text{C}$ получено, что при напряжении $\sigma_0 \approx 60 - 70 \text{ МПа}$ оба режима приводят к практически одинаковому уровню накопления повреждений, ниже этих значений предпочтительней режим 2, поскольку $\omega_\eta < \omega_\sigma$, а выше этих значений при режиме 1 выполняется $\omega_\sigma < \omega_\eta$.

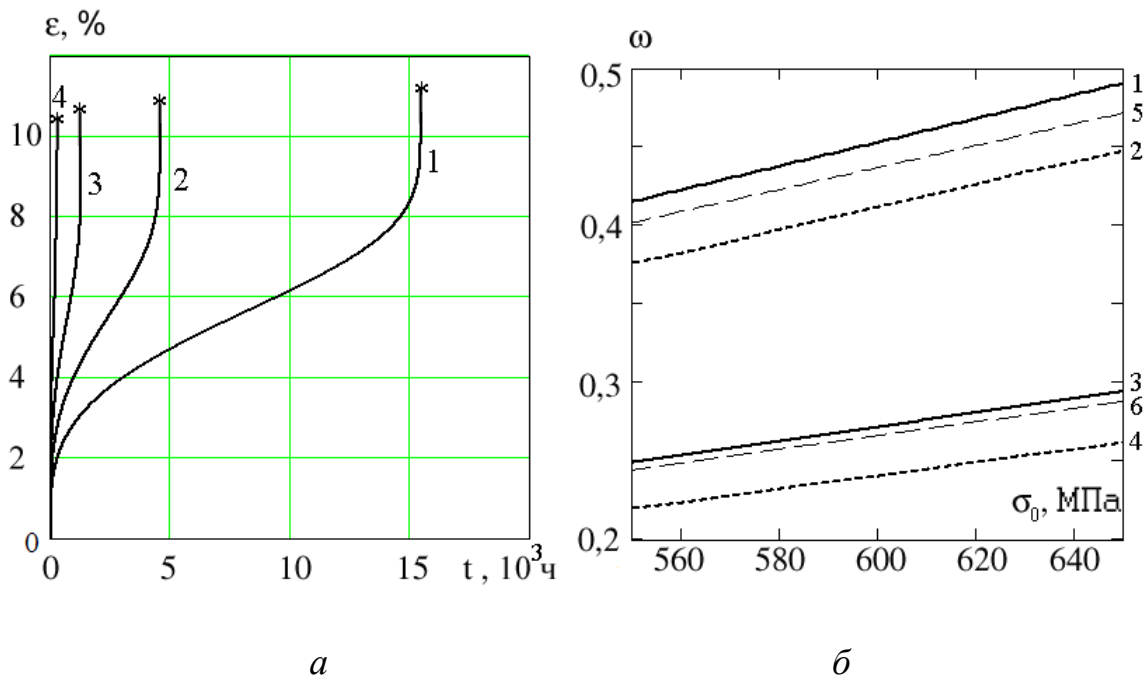


Рисунок 4.5 – Зависимости для сплава 3В: $\varepsilon^c(t)$, линии 1-4 соответствуют напряжениям $\sigma_0 = 589; 603; 618; 638$ МПа (а); $\omega(\sigma_0)$, сплошные линии 1, 3 расчет по формуле (4.7); штриховые линии 2, 4 – (4.4); линии 5, 6 – (4.8), линии 1, 2, 5 соответствуют $\varepsilon_0 = 5\%$ и линии 3, 4, 6 – $\varepsilon_0 = 3\%$ (б)

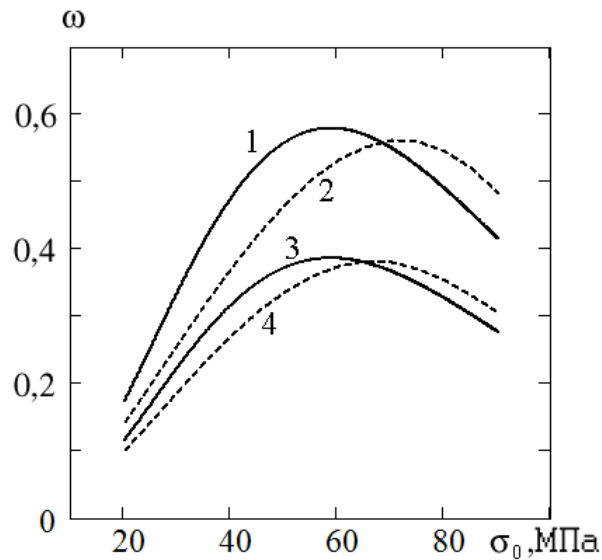


Рисунок 4.6 – Зависимости $\omega(\sigma_0)$ для стали марки X18H10T: сплошные линии 1, 3 расчет по формуле (4.9); штриховые линии 2, 4 – (4.10); линии 1, 2 соответствуют $\varepsilon_0 = 6\%$ и линии 3, 4 – $\varepsilon_0 = 2\%$

Таким образом, проведенное сравнение накопления повреждений при статическом (режим 1, $\sigma_0 = \text{const}$) и кинематическом (режим 2, $\eta_0 = B_A \sigma_0^n = \text{const}$) режимах деформирования показало:

- Для сплавов, у которых на диаграмме кривых «деформация-время» предельная деформация монотонно уменьшается при увеличении напряжения, формование с заданной кинематикой дает меньший уровень накопления повреждений.

- Для сплавов, у которых предельная деформация монотонно возрастает, предпочтительней оказывается формование при постоянном напряжении.

- В случаях немонотонной зависимости деформации при разрушении от напряжений существует диапазон напряжений, когда оба режима приводят к практически одинаковому уровню накопления повреждений. На выбор способа формования влияет тип немонотонности. Для стали марки X18H10T при температуре 850 °С, у которой зависимость предельной деформации от напряжений имеет минимум при напряжениях $\sigma_0 \approx 60 - 70$ МПа, при напряжениях ниже этих значений предпочтительней режим 2, а выше этих значений режим 1 приводит к меньшему уровню накопления повреждений. Для сплавов, у которых существует диапазон скоростей деформирования (напряжений), когда деформация при разрушении, наоборот, максимальна (ОТ-4 при $T=500^\circ\text{C}$, В95очТ1 при $T=165^\circ\text{C}$, 1561 при $T=165^\circ\text{C}$) [102; 194; 224], предпочтительными будут режимы со скоростями деформирования, соответствующими напряжениям из этого диапазона, так как достигается максимальная деформируемость материала при минимальном уровне накопления повреждений.

Отметим, что все результаты получены в предположении, что материал является изотропным и проявляет одинаковые свойства при растяжении и сжатии. При наличии анизотропных и разных свойств материала на растяжение и сжатие в ряде случаев можно спрогнозировать преимущество

того или иного режима формования. Необходимо также учитывать вид сложного напряженного состояния, при котором это формование происходит (условия близкие к растяжению, растяжение и сжатие при изгибе и т.д.). В сложных случаях необходимо проводить расчеты с применением моделей, учитывающих накопление повреждений в векторном или тензорном виде [142; 274].

4.2 Формообразование полусферической оболочки в условиях ползучести

В качестве примера формования элементов конструкций в условиях, при которых напряженно-деформированное состояние близко к состоянию растяжения, рассмотрим задачу формообразования полусферической оболочки. В связи с появлением новых малопластичных материалов актуальность вопросов, связанных с усовершенствованием методов штамповки полусферических или эллипсоидных деталей в условиях пластичности и ползучести не снижается. Развиваются методы численного моделирования и оптимизации процессов формообразования с использованием современных конечно-элементных программных комплексов [64; 65; 122; 180; 181; 210; 219; 243 – 246]. В частности во многих работах рассматриваются вопросы оптимизации формы заготовки. В основе упрощенных аналитических методов расчета, как правило, лежит безмоментная теория оболочек. В зависимости от граничных условий (шарнирное опирание, защемление без проскальзывания или с проскальзыванием по поверхности матрицы) авторы вводят различные зависимости изменения толщины оболочки вдоль меридиана [106; 109; 214; 238; 242; 278].

4.2.1 Разрешающие соотношения, основанные на безмоментной теории оболочек

Рассматривается задача о деформировании в условиях ползучести круглой листовой заготовки в часть полусферической оболочки нагрузкой $P(t)$, равномерно распределенной по всей площади. Предполагается, что толщина h_0 заготовки много меньше ее диаметра (радиуса R), условие закрепления по внешнему контуру – шарнирное опирание. Радиус кривизны ρ срединной поверхности оболочки (рисунок 4.7) связан с прогибом f в центре купола соотношением [214; 278]

$$\rho_s = (R^2 + f^2) / (2f) . \quad (4.11)$$

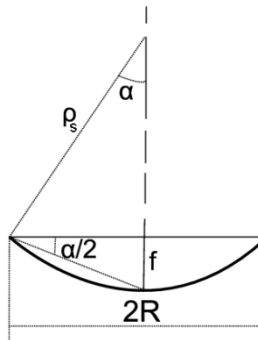


Рисунок 4.7 – Схема деформирования заготовки в полусферическую оболочку в разрезе

В [278] получены выражения для деформаций в меридиональном, тангенциальном направлениях и в направлении нормали к срединной поверхности, а также для толщины оболочки в зависимости от текущего радиуса $0 \leq r \leq R$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = -\varepsilon_z / 2 = \ln \left(\frac{R^2(R^2 + f^2)}{R^4 + f^2 r^2} \right), \quad h = h_0 \left(\frac{R^4 + f^2 r^2}{R^2(R^2 + f^2)} \right)^2 .$$

Толщина оболочки h в центре сферического купола

$$h = h_0 / \left(1 + f^2 / R^2 \right)^2 . \quad (4.12)$$

Скорости деформаций ползучести в центре сферического купола

$$\eta_r = \eta_t = 2 \dot{f} f / (R^2 + f^2), \quad \eta_z = \dot{h} / h. \quad (4.13)$$

Из уравнения равновесия безмоментной оболочки, нагруженной равномерным давлением в окрестности центральной точки купола следует [214; 278]

$$\sigma_t = \sigma_r = P \rho_s / (2h). \quad (4.14)$$

Если интенсивность скоростей деформаций ползучести $\eta_i = 2\eta_r$ не зависит от повреждаемости и связана с интенсивностью напряжений $\sigma_i = \sigma_r$ зависимостью $\eta_i = B_\varepsilon \sigma_i^n$ ($B_\varepsilon = B_A$), то с учетом (4.13), (4.14) получаем

$$4 \dot{f} f / (R^2 + f^2) = B_\varepsilon (P \rho_s / (2h))^n. \quad (4.15)$$

В случае если интенсивность скоростей деформаций ползучести $\eta_i = d\varepsilon_i / dt$ зависит от повреждаемости

$$\eta_i = \frac{B_\varepsilon \sigma_i^n}{(1-\omega)^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_i^g}{(1-\omega)^m}, \quad (4.16)$$

то (4.15) заменится системой из двух дифференциальных уравнений

$$4 \dot{f} f / (R^2 + f^2) = B_\varepsilon \left(\frac{P \rho_s}{2h} \right)^n \frac{1}{(1-\omega)^m}, \quad (4.17)$$

$$\dot{\omega} = B_\omega \left(\frac{P \rho_s}{2h} \right)^g \frac{1}{(1-\omega)^m}. \quad (4.18)$$

Далее аналогично [4] рассматривается обратная задача деформирования за заданное время $t = t_*$ круглой листовой заготовки в часть полусферической оболочки с заданным прогибом $f = f_*$ в центральной точке купола. Исследуется влияние выбора режима деформирования на напряженно-деформированное состояние и накопление повреждений в материале конструкции. Упругими деформациями пренебрегаем.

Режим 1: давление $P(t) = P_C = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_*$. Из (4.15) с учетом выражения для радиуса кривизны (4.11) и толщины (4.12) следует дифференциальное уравнение

$$P_C^n dt = \frac{(4f)^{n+1} h_0^n}{B_\varepsilon (R^2 + f^2)^{n+1} (1 + f^2/R^2)^{2n}} df = J(f) df. \quad (4.19)$$

Интегрируя (4.19), можно найти решение следующей задачи (без учета повреждаемости): какое постоянное давление P_C нужно прикладывать к заготовке в течение заданного времени t_* , чтобы получить необходимый прогиб f_* :

$$P_C = \left(\frac{I}{t_*} \right)^{1/n}, \quad I = \frac{h_0^n}{B_\varepsilon} \int_0^{f_*} \frac{(4f)^{n+1}}{(R^2 + f^2)^{n+1} (1 + f^2/R^2)^{2n}} df. \quad (4.20)$$

Прогиб $f(t)$ в любой момент времени вычисляется из решения уравнение (4.19) переписанного в виде $df/dt = P_C^n / J(f)$ методом Рунге-Кутты.

При учете накопления повреждений необходимо решать систему из двух дифференциальных уравнений, полученных из (4.17), (4.18) после подстановки выражений (4.11), (4.12):

$$\dot{f} = B_\varepsilon \frac{P_C^n (R^2 + f^2)^{n+1} (1 + f^2/R^2)^{2n}}{(4f)^{n+1} h_0^n} \frac{1}{(1-\omega)^m}, \quad (4.21)$$

$$\dot{\omega} = B_\omega \frac{P_C^g (R^2 + f^2)^g (1 + f^2/R^2)^{2g}}{(4f)^g h_0^g} \frac{1}{(1-\omega)^m}. \quad (4.22)$$

Сначала после интегрирования системы (4.21), (4.22) методом последовательных приближений вычисляется давление P_C , необходимое для получения заданного прогиба f_* за время t_* . Затем при известном P_C из

решения системы (4.21), (4.22) находятся зависимости $\omega(t)$, прогиб $f(t)$ и

$$\text{напряжение в центре купола } \sigma_i(t) = P_C \frac{(R^2 + f^2)(1 + f^2/R^2)^2}{4 f h_0}.$$

Режим 2: скорость изменения давления $dP(t)/dt = V_p = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_*$ или возможно наличие нескольких временных участков с разными значениями V_p на каждом. Пусть $V_p = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_*$, тогда для решения задачи без учета повреждаемости из решения (4.19) находится скорость $V_p = (I(n+1)/t_*^{n+1})^{1/n}$, необходимая для получения в течение заданного времени t_* необходимого прогиба f_* . Прогиб $f(t)$ в любой момент времени определяется из решения дифференциального уравнения

$$df/dt = V_C^n t^n / J(f). \quad (4.23)$$

С учетом повреждаемости решается система уравнений (4.21), (4.22), в которой $P_C = V_p t$.

Режим 3: в центре купола $\eta_i = \eta_C = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_*$. Учитывая, что $\eta_i = 2\eta_r$, из (4.13) следует

$$\eta_C = \frac{1}{t_*} \ln \left(1 + \frac{f_*^2}{R^2} \right)^2.$$

Из (4.11) – (4.15) находится решение без учета повреждаемости в любой момент времени при $0 \leq t \leq t_*$:

$$f(t) = R \left(\exp \left(\frac{\eta_C t}{2} \right) - 1 \right)^{0.5}, \quad P(t) = \frac{4h_0 f(t) R^4}{(R^2 + (f(t))^2)^3} \left(\frac{\eta_C}{B_\varepsilon} \right)^{1/n}. \quad (4.24)$$

При решении с учетом повреждаемости выразим из первого уравнения (4.16) интенсивность напряжений

$$\sigma_i = (1 - \omega)^{m/n} (\eta_C / B_\varepsilon)^{1/n}. \quad (4.25)$$

После подстановки (4.25) во второе уравнение (4.16) получается дифференциальное уравнение для параметра поврежденности в виде

$$\dot{\omega} = B_{\omega} (\eta_C / B_{\varepsilon})^{g/n} (1 - \omega)^{m(g/n-1)}.$$

Откуда после интегрирования имеем

$$\omega(t) = 1 - \left(1 - \left(m + 1 - \frac{mg}{n} \right) B_{\omega} (\eta_C / B_{\varepsilon})^{g/n} t \right)^{1/\left(m+1-\frac{mg}{n}\right)}. \quad (4.26)$$

Далее из (4.25) определяется $\sigma_i(t)$, из (4.24) – $f(t)$, из (4.11), (4.12) – $\rho_s(t)$, $h(t)$, из (4.14) – $P(t) = 2\sigma_i h / \rho_s$.

Режим 4 : в центре купола $f = f_*(t/t_*)^a$, $a > 0$ при $0 \leq t \leq t_*$. Из (4.11), (4.12), (4.15) следует

$$P(t) = \left(\frac{af_* t^{a-1}}{t_*^a B_{\varepsilon}} \right)^{1/n} \frac{(4f_* t^a / t_*^a)^{1+1/n} h_0}{\left(R^2 + (f_* t^a / t_*^a)^2 \right)^{1+1/n} \left(1 + (f_* t^a / (R t_*^a))^2 \right)^2}. \quad (4.27)$$

Далее из (4.14), принимая во внимание (4.11), (4.12), определяется $\sigma_i(t)$. При учете повреждаемости из (4.11), (4.12), (4.17) находится давление

$$P(t) = \left(\frac{\dot{f}}{B_{\varepsilon}} \right)^{1/n} \frac{(4f)^{1+1/n} h_0}{\left(R^2 + f^2 \right)^{1+1/n} \left(1 + (f/R)^2 \right)^2} (1 - \omega)^{m/n}. \quad (4.28)$$

Подставляя $P(t)$ в (4.18), приходим к дифференциальному уравнению для параметра поврежденности

$$\dot{\omega} = B_{\omega} \left(\frac{\dot{f}}{B_{\varepsilon}} \right)^{g/n} \left(\frac{4f}{R^2 + f^2} \right)^{g/n} (1 - \omega)^{m\left(\frac{g}{n}-1\right)}. \quad (4.29)$$

Из (4.29) следует

$$\omega(t, a) = 1 - \left(1 - \frac{m(n-g)+n}{n} I(t, a) \right)^{\frac{n}{m(n-g)+n}}, \quad (4.30)$$

где $I(t, a) = \int_0^t B_\omega \left(\frac{\dot{f}}{B_\varepsilon} \right)^{g/n} \left(\frac{4f}{R^2 + f^2} \right)^{g/n} dt$.

Далее из (4.28) находится $P(t)$ и $\sigma(t) = \frac{P\rho_s}{2h} = P \frac{(R^2 + f^2)(1 + f^2/R^2)^2}{4fh_0}$.

Режим 5: в центре купола $\sigma_i = \sigma_c = \text{const}$ при $0 \leq t \leq t_*$. Без учета повреждаемости режим 5 становится эквивалентным режиму 3, при котором $\eta_i = \eta_c = B_\varepsilon \sigma_c^n = \text{const}$. Решая систему (4.17), (4.18) с учетом повреждаемости, и учитывая, что $\sigma_c = P\rho_s/(2h)$, получаем

$$\omega(t) = 1 - \left(1 - (m+1)B_\omega \sigma_c^g t \right)^{1/(m+1)}, \quad \varepsilon_i(t) = \frac{B_\varepsilon}{B_\omega} \sigma_c^{n-g} \omega(t). \quad (4.31)$$

С другой стороны

$$\varepsilon_i = 2 \ln \left(1 + f^2/R^2 \right). \quad (4.32)$$

Из (4.31), (4.32) следует уравнение

$$2 \ln \left(1 + \frac{f^2}{R^2} \right) = \frac{B_\varepsilon}{B_\omega} \sigma_c^{n-g} \left(1 - \left(1 - (m+1)B_\omega \sigma_c^g t \right)^{1/(m+1)} \right), \quad \text{откуда при известных}$$

значениях t_* , f_* , определяются $\sigma_c = \text{const}$, $\omega(t)$, $\varepsilon_i(t)$, прогиб

$$f(t) = R \left(\exp(\varepsilon_i(t)/2) - 1 \right)^{0.5} \text{ и давление } P = \sigma_c \frac{4fh_0}{(R^2 + f^2)(1 + f^2/R^2)^2}.$$

4.2.2 Решение задачи формообразования без учета накопления повреждений

С целью нахождения рациональных силовых и кинематических режимов формообразования осесимметричной оболочки из плоской стальной заготовки были проведены испытания на цилиндрических образцах стандартных размеров с длиной рабочей части 50 мм по определению упругопластических свойств и свойств ползучести стали марки 09Г2С-12 в

температурном диапазоне 600–850 °С (испытания – М.А. Леган, И.В. Любашевская, аппроксимация экспериментальных данных – С.В. Иявойнен, А.Ю. Ларичкин) [179; 228]. Эта сталь использовалась для изготовления сосудов отстойников на Жамбылском заводе металлоконструкций.

Эксперименты на пластичность показали, что наиболее приемлемый диапазон температур, при котором следует осуществлять деформирование с точки зрения деформационно-прочностных особенностей материала, это 700–800 °С. Для описания пластичности использовалась зависимость $\sigma(\varepsilon) = A_p \cdot \arctg(D_p \varepsilon)$, $D_p = 2000$.

В [256] найден диапазон температур 730–750 °С, который наиболее целесообразен при деформировании в режиме ползучести с точки зрения величины «ресурса пластичности», т.е. достижения максимальной предельной деформации (деформации при разрушении). Для температур в диапазоне 730–750 °С эксперименты по определения упругопластических свойств не проводились, константы были получены путем усреднения данных, соответствующих $T = 700$ и 800 °С (рисунок 4.8). Для температуры 730 °С найдены следующие значения $E = 100$ ГПа, $A_p = 73$ МПа.

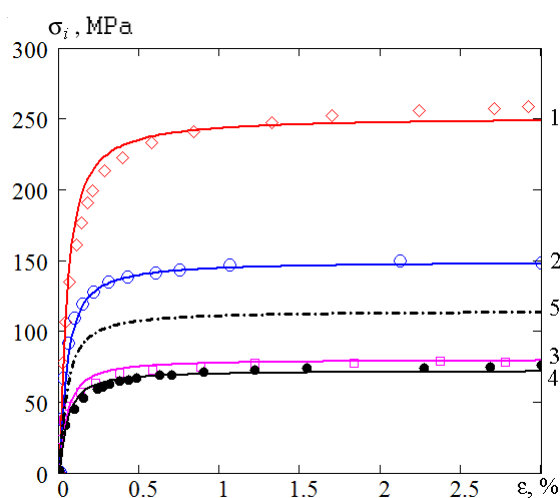


Рисунок 4.8 – Экспериментальные упругопластические диаграммы деформирования материала сталь 09Г2С12 (точки) и аппроксимационные зависимости: линии 1–5 соответствуют температуре 600, 700, 800, 850 и 730 °С

Для определения констант ползучести стали марки 09Г2С12 были проанализированы данные экспериментов по растяжению образцов при постоянных значениях напряжений [256]. Математическое описание процесса деформирования строилось на записи кинетических уравнений ползучести и повреждаемости Ю.Н. Работнова в виде (4.16). Параметр поврежденности ω определялся как отношение деформации в процессе ползучести материала к соответствующему ее значению в момент разрушения в экспериментах, т.е. $\omega = \varepsilon / \varepsilon_*$ [93; 95]. В [256] приведены значения параметров, полученные для материала при температурах 700, 730, 750, 770 и 800°C. С их использованием проведено моделирование стационарных и нестационарных процессов деформирования с учетом повреждаемости. Получено удовлетворительное соответствие численных и экспериментальных данных. Значения параметров ползучести стали марки 09Г2С-12 (Fe-Si-Cu-Cr-Ni-C) при температуре $T = 730^\circ\text{C}$ приведены в п. 4.1.2.

Анализ экспериментальных данных показал также, что до величины деформации $\varepsilon \approx 10\%$ можно считать, что скорость деформирования есть функция только напряжения и температуры $\dot{\varepsilon} = f_c(\sigma, T)$. При $\varepsilon > 10\%$ наблюдается разупрочнение материала, т.е. в расчетах необходимо использовать уравнения в виде (4.16) с учетом параметра поврежденности ω . Оценить максимальную величину прогиба, при котором деформация не будет превосходить 10% можно исходя из (4.32). Если $\varepsilon_i = 0,1$, то прогиб составит $f \approx 0,23R$. Выполним оценку нагрузки, которая необходима для деформирования в условиях ползучести при температуре $T = 730^\circ\text{C}$ круглой листовой заготовки из стали 09Г2С-12 радиуса $R = 1,7$ м и толщиной $h_0 = 0,016$ м в часть полусферической оболочки. Прогиб при деформации до $\varepsilon_i = 0,1$ не должен превышать $f \approx 0,4$ м.

На рисунке 4.9 изображены результаты расчетов прогиба в предположении установившейся ползучести материала (без учета повреждаемости) (а), интенсивности напряжений (б) и давления (в) при $t_* = 1800$ с, $f_* = 0,35$ м. Линии 1–3 соответствуют режимам 1, 2, 3, линии 4, 5 – расчет для режима деформирования 4 при $a = 1,0; 0,5$.

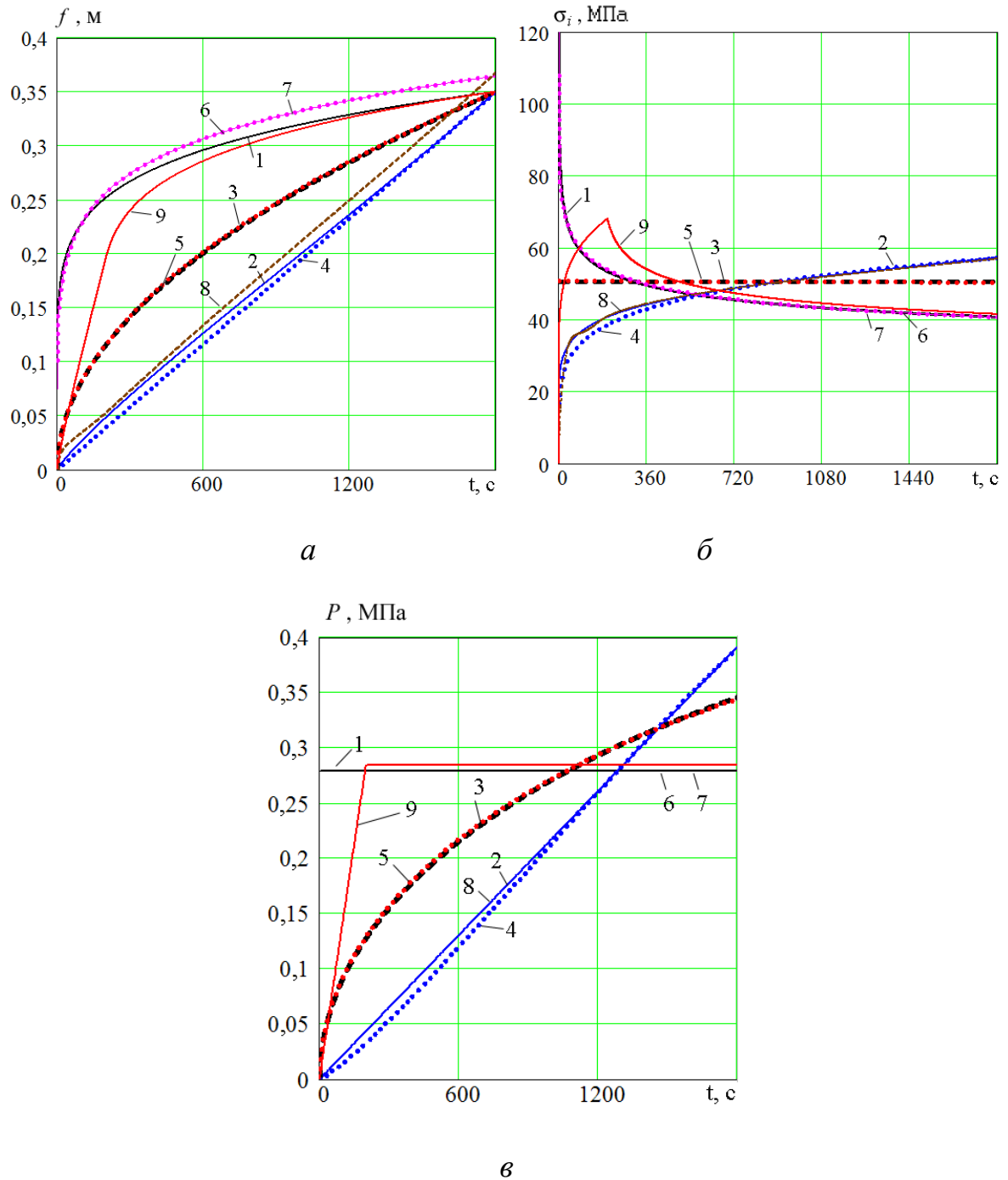


Рисунок 4.9 – Зависимость прогиба (*a*), интенсивности напряжений (*б*) и давления (*в*) от времени в центре купола оболочки из стали 09Г2С12 при $T = 730^\circ\text{C}$: линии 1–3 соответствуют режимам 1, 2, 3; линии 4, 5 – режим деформирования 4 при $a = 1, 0; 0, 5$; линии 6–8 – расчет в пакете ANSYS; линии 6, 7 – деформирование при постоянном давлении $P(t) = P_C = \text{const}$ в упругой и упругопластической постановке соответственно; линия 8 – режим деформирования $V_p = \text{const}$; линия 9 – режим 2, когда сначала приложенное давление плавно растет, а затем остается постоянным

Для сравнения был также выполнен расчет с учетом геометрической нелинейности в конечно-элементном пакете ANSYS: линии 6 и 7 – результаты расчета без учета и с учетом пластических деформаций для режима 1 ($P(t) = P_c = 0,279$ МПа). Для моделирования пластических свойств материала в комплексе ANSYS использовалась модель MESO (рисунок 4.10, а) аппроксимирующая линию 5 на рисунке 4.8. Линии 1, 6 и 7 на рисунке 4.9, в совпадают. Прогиб на рисунке 4.9, а, вычисленный методом конечных элементов (линии 6, 7) близок к прогибу (линия 1), вычисленному методом, основанным на безмоментной теории оболочек. Интенсивность напряжений (линии 1, 6 и 7 на рисунке 4.9, б) практически совпадает на всем временном промежутке $0 \leq t \leq t_*$ за исключением области вблизи $t = 0$. При $t = 0$ $\sigma_i = 249,2$ МПа для линии 6 и $\sigma_i = 107,7$ МПа для линии 7, однако, как показывают расчеты, это различие значений интенсивности напряжений в начальный момент (σ_{i0}, f_0) при последующем деформировании в режиме ползучести практически не влияет на прогиб перед разгрузкой (σ_{i*}, f_*) и на конечный прогиб после упругого восстановления (σ_{i**}, f_{**}) (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Результаты расчета прогиба и интенсивности напряжений в центре купола при $t = 0$, перед разгрузкой и после нее при $t = t_*$ с использованием метода конечных элементов ANSYS и теории безмоментных оболочек

Тип расчета	f_0 , м	f_* , м	f_{**} , м	σ_{i0} , МПа	σ_{i*} , МПа	σ_{i**} , МПа
ANSYS, режим 1, упругая постановка	0,07564	0,36496	0,36354	249,22	40,70	1,8
ANSYS, режим 1, упругопластичность	0,10158	0,36498	0,36355	107,72	40,71	1,8
Режим 1, Безмоментная теория	—	0,35	—	—	40,74	—
ANSYS, режим 2, упругая постановка	0	0,36789	0,36594	0	56,49	2,0
Режим 2, Безмоментная теория	—	0,35	—	—	57,26	—

Для уменьшения объема вычислений в силу осесимметрии вместо целого сегмента оболочки расчет проводился для сектора с углом 5° (рисунок 4.10, б и в). Для расчетов в ANSYS использовался оболочечный элемент Shell181.

Оценить начальные упругие напряжения, соответствующие чистому изгибу в крайнем волокне и в срединной поверхности, можно по методике, приведенной в [199] для круглой равномерно нагруженной пластинки с различными условиями закрепления. В случае шарнирного опирания и неподвижного контура для прогиба $f_0 \approx 0,075$ м (прогиб можно оценить по графику [199]) в центре пластины значения радиальных и окружных (тангенциальных) напряжений в срединной плоскости ($\sigma_r = \sigma_t = b_0 (f_0 / R)^2$, $b_0 = 0,905$) и значения напряжений изгиба в крайнем волокне ($\sigma_r^b = \sigma_t^b = c_0 E f_0 h_0 / R^2$, $c_0 = 1,778$) равны $\sigma_r = 176,2$ МПа и $\sigma_r^b = 73,8$ МПа. Соответственно максимальное напряжение на поверхности пластины составит $\sigma_r + \sigma_r^b = 250$ МПа. Полученное значение хорошо согласуется со значением σ_{i0} , приведенным в таблице 4.2, вычисленным с использованием пакета ANSYS в упругой постановке задачи.

Быстрое деформирование в условиях пластичности часто ведет к повреждению материала, к образованию микротрещин. Для полусферических оболочек, как правило, это происходит в центральной части купола и в области крепления оболочки по контуру при защемлении края. Чтобы исключить превышение напряжениями предела текучести материала в процессе деформирования следует использовать режимы с постепенным увеличением нагрузки (*режимы 2-5*).

На рисунке 4.9 видно, что *режим 3* при котором $\eta_i = \eta_c = \text{const}$ (линия 3) практически совпадает с *режимом 4* при $a = 0,5$ (линия 5). В [228] показано, что эти режимы близки. *Режим 2* (линия 2) и *режим 4* при $a = 1$ (линия 4) на рис 4.9 также совпадают. Из (4.27) при $a = 1$ следует

$$P(t) = \left(\frac{f_*}{t_* B_\varepsilon} \right)^{1/n} \frac{\left(4 f_* t / t_* \right)^{1+1/n} h_0}{\left(R^2 + \left(f_* t / t_* \right)^2 \right)^{1+1/n} \left(1 + \left(f_* t / (R t_*) \right)^2 \right)^2}. \quad (4.33)$$

Из (4.33) для давление выполняется $P(t) \sim t^{1+1/n} \cdot h_0 / \left(1 + \left(f_* t / (R t_*) \right)^2 \right)^{3+1/n}$. При больших значениях n и при малых деформациях давление $P(t) \sim t$.

Линии 8 расчет в конечно-элементном пакете ANSYS для режима 2 ($V_p = 2,177 \cdot 10^{-4}$ МПа/с при $0 \leq t \leq t_*$), линии 2 и 8 на рисунке 4.9, *в* совпадают. Как и в случае с режимом $P = \text{const}$, полученные прогиб и интенсивность напряжений близки к прогибу и интенсивности напряжений, вычисленных с использованием безмоментной теории оболочек (линия 8 и 2 на рисунке 4.9, *а*, *б*).

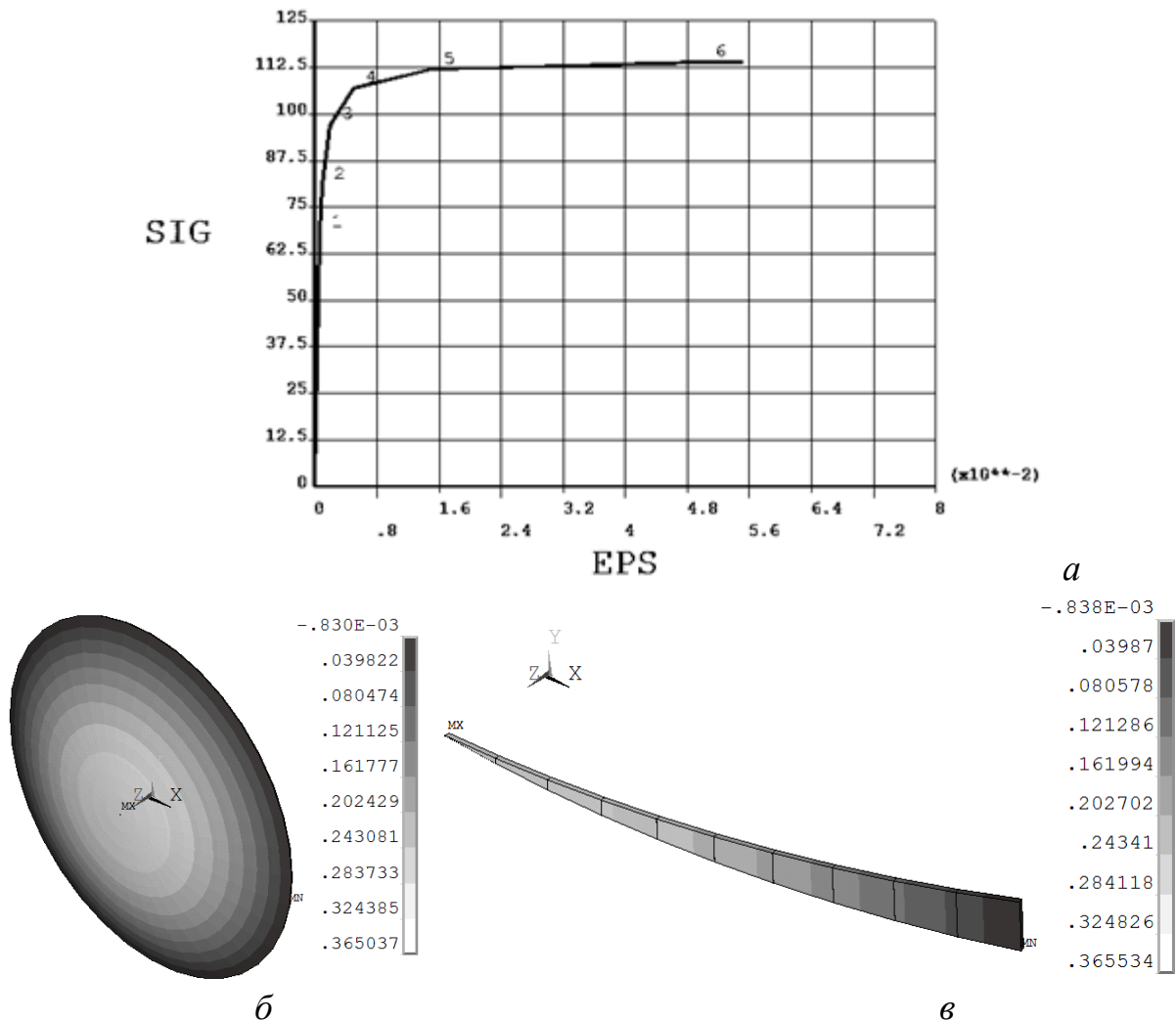


Рисунок 4.10 – Модель MESO для моделирования пластических свойств материала в комплексе ANSYS (*а*), сегмент сферической оболочки в программе ANSYS, прогиб (*б*), сектор оболочки с углом 5° (*в*)

Чтобы исключить при нагружении в начальный момент пластическое деформирование можно использовать режимы, когда сначала приложенное давление линейно растет, а затем остается постоянным вплоть до разгрузки (линии 9 на рисунке 4.9).

4.2.3 Расчет параметров процесса формообразования оболочки с учетом накопления повреждений

На рисунке 4.11 изображены результаты расчетов уравнений (4.17), (4.18) с учетом повреждаемости для листовой заготовки радиуса $R = 1,7$ м и толщиной $h_0 = 0,016$ м из стали марки 09Г2С-12 при $T = 730$ °С, $f_* = 0,85$ м, $t_* = 7200$ с: прогиб в центральной части купола (а), давление (б), интенсивность напряжений (в) и параметр поврежденности (г) в центральной части купола. На рисунке 4.11 линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_c = \text{const}$); линии 2 – 6 — расчет для режима 4 ($f = f_*(t/t_*)^a$, $a = 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$); линии 7 — режим 3 ($\eta_i = \eta_c = \text{const}$); линии 8 — режим 5 ($\sigma_i = \sigma_c = \text{const}$); линии 9 — режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля. На основе диаграмм, изображенных на рисунке 4.11, г можно сделать вывод, что все режимы приводят к практически одинаковому уровню накопления повреждений. Исходя из диаграмм на рисунке 4.11, в следует, что для режимов, при которых в начальный момент времени прикладывается значительное давление (линии 1, 2, 3) напряжения могут превысить предел текучести материала, что может привести к образованию микротрещин.

Поскольку в моделях ползучести, встроенных в пакет ANSYS отсутствует учет третьей стадии ползучести, для реализации кинетической модели (1.12) – (1.14), где $f_c(\sigma_e, T) = B_A \sigma_i^{n+1}$, $\varphi_c(\sigma_e, T) = B_\omega \sigma_i^g$ и $\alpha = 0$, был разработан пользовательский код на языке Fortran на основе подпрограммы Usercreep.f (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №

2020613159; приложения Б, Д). Применение такой подпрограммы требует процедуры компиляции пакета. Рекомендации по вводу пользовательских моделей можно найти в окне с программной документацией ANSYS Release Documentation. Для активации подпрограммы в основном программном коде необходимо воспользоваться командой TB,CREEP с параметром TBOPT=100. С помощью команды TBDATA вводятся константы материала для модели (1.12) – (1.14). Для расчета значений интенсивности деформаций ползучести и параметра поврежденности в каждой точке разбиения по толщине элемента в подпрограмму Usercreep.f встроена следующая схема:

$$(\varepsilon_i^c)^{N+1} = (\varepsilon_i^c)^N + (\Delta\varepsilon_i^c)^{N+1}, (\Delta\varepsilon_i^{cr})^{N+1} = \frac{B_A(\sigma_i^N)^n}{(1-\omega^N)^m} \Delta t^{N+1},$$

$$\omega^{N+1} = \omega^N + \frac{B_\omega(\sigma_i^N)^g}{(1-\omega^N)^m} \Delta t^{N+1}.$$

Здесь символ N относится к величинам на N -ой итерации равновесия, Δt – шаг по времени на итерации равновесия.

На рисунке 4.12, в изображены изолинии напряжений и прогиба полученные с использованием программного комплекса ANSYS при деформировании в режиме 1 ($P(t) = P_c = 0,45 \text{ МПа}$) в упругой и упругопластической постановке.

Сравнительный анализ изолиний на рисунке 4.12 показывает, что учет пластичности практически не влияет на напряжения и остаточный прогиб перед разгрузкой и после нее. На рисунке 4.13, а изображены линии 1, 2, соответствующие прогибу в центральной точке купола, вычисленному с использованием безмоментной теории оболочек и методом конечных элементов при $0 \leq t \leq t_*$ для режима 1 $P(t) = P_c = 0,45 \text{ МПа}$ для стали марки 09Г2С12, линии 3, 4 – соответственно параметр поврежденности для двух методов расчета.

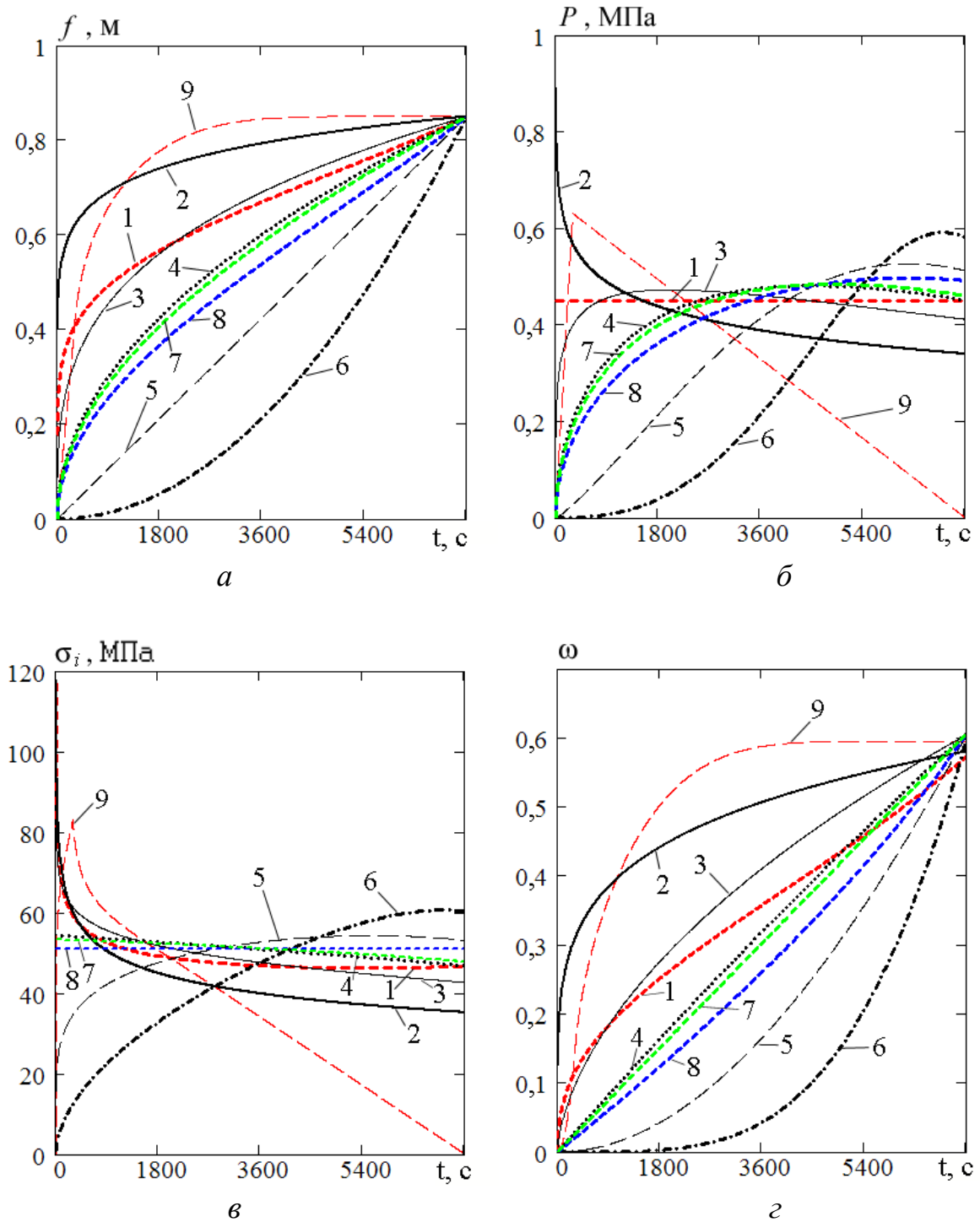


Рисунок 4.11 – Зависимость прогиба (*a*), давления (*б*), интенсивности напряжений (*в*) и параметра поврежденности (*г*) от времени в центре купола оболочки из стали 09Г2С12 при $T = 730^{\circ}\text{C}$: линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_C = \text{const}$); линии 2 – 6 — режим 4 $f = f_*(t/t_*)^a$ при $a = 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$; линии 7 — режим 3 ($\eta_i = \eta_C = \text{const}$); линии 8 — режим 5 ($\sigma_i = \sigma_C = \text{const}$); линии 9 — режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля

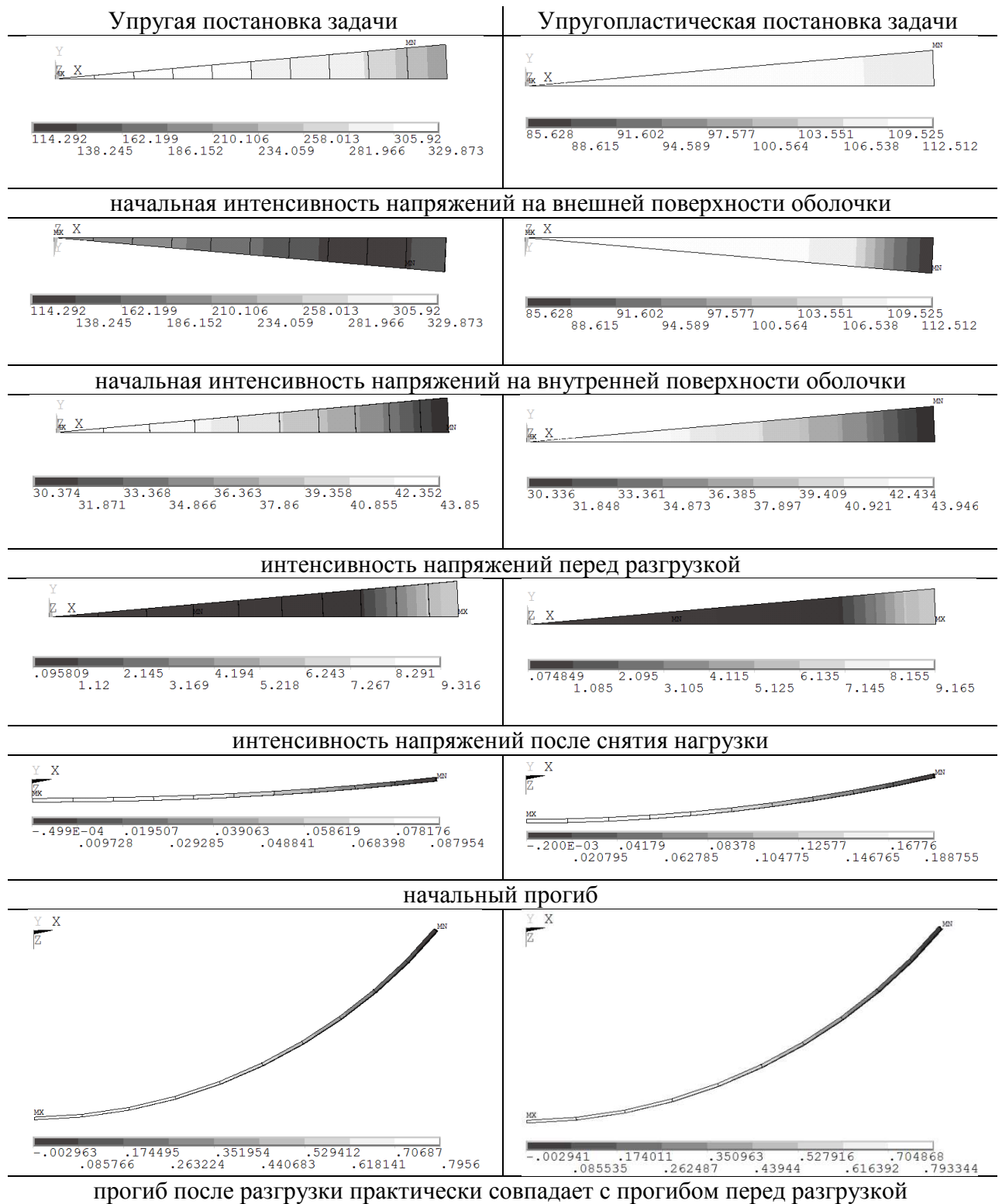


Рисунок 4.12 – Изолинии интенсивности напряжений (МПа) и прогиба (м), соответствующие режиму $P = \text{const}$ вычисленные в пакет ANSYS в упругой и уругопластической постановке задачи формообразования

Решение методом конечных элементов требует значительных временных затрат. Метод на основе безмоментной теории оболочек позволяет оценить нагрузку и выбрать подходящие режимы формообразования для конечно-элементного расчета. Для неперевышения напряжения предела текучести следует использовать режимы с плавным повышением давления на начальной стадии формообразования (линия 9 на рисунке 4.11). На рисунке 4.13, б изображен график зависимости интенсивности напряжений, полученный в программе ANSYS для режима 2, когда давление линейно растёт до значения $P_C = 0,475$ МПа и затем остается постоянным вплоть до разгрузки, прогиб при этом $f_* = 0,86$ м и $\omega = 0,5$ при $t = t_*$.

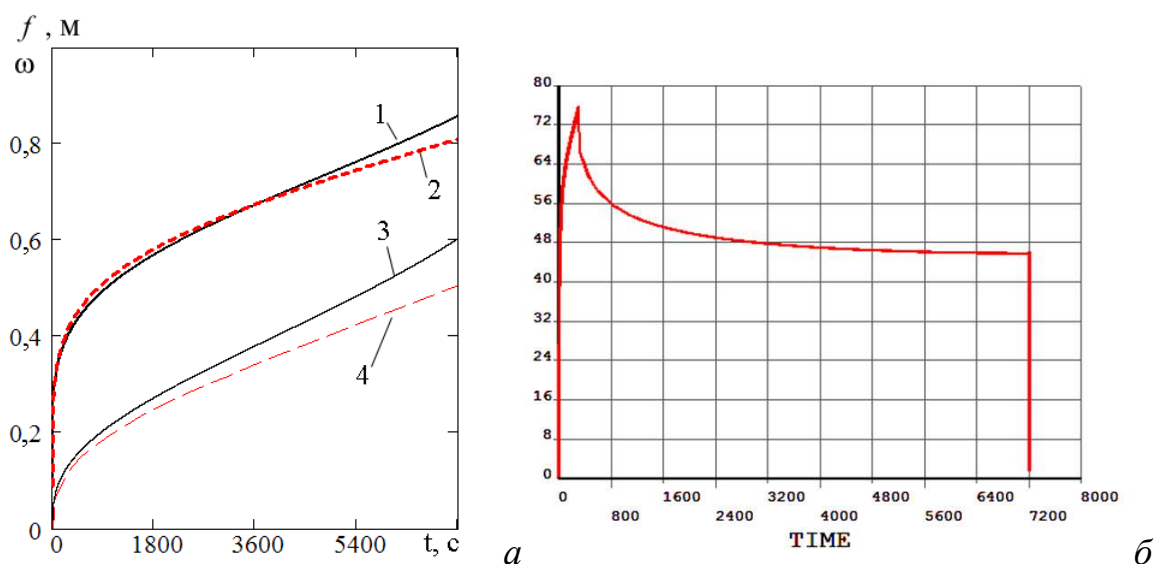


Рисунок 4.13 – Зависимость прогиба $f(t)$ (линии 1, 2) и повреждаемости $\omega(t)$ (линии 3, 4) в центральной точке купола при формообразовании полусферической оболочки в режиме 1 $P(t) = P_C = 0,45$ МПа, вычисленные с использованием безмоментной теории оболочек (линии 1, 3) и методом конечных элементов с учетом параметра поврежденности (линии 2, 4) (а); зависимость интенсивности напряжений от времени, вычисленная в ANSYS для режима 2, когда давление линейно растёт до значения $P_C = 0,475$ МПа и затем остается постоянным вплоть до разгрузки

4.2.4 Сравнительный анализ накопления повреждений для оболочек из разных сплавов

На рисунке 4.14 изображена зависимость параметра поврежденности $\omega(a)$ в центре купола при деформировании в режиме 4 (задан прогиб

$f = f_*(t/t_*)^a$) круглой заготовки в полусферическую форму: линия 1 – сталь марки 09Г2С12 ($f_* = 0,85$ м), линия 2 – сплав АК4-1 ($f_* = 0,25$ м), линия 3 – сплав ВТ9 ($f_* = 0,35$ м). Параметры функциональных зависимостей ползучести и повреждаемости (4.16) для этих сплавов приведены в п. 4.1.2. Из анализа кривых $\omega(a)$ на рисунке 4.14, можно сделать вывод, что режим деформирования, обеспечивающий наименьшее накопление повреждений, связан с видом зависимости деформации при разрушении от напряжения на исходных диаграммах ползучести «деформация- время» [18]. Для сплава АК4-1 режим формообразования при $a = 0,5$ является самым неблагоприятным, поскольку достигается наибольшее значение параметра поврежденности (рис.4.15). Для сплава ВТ9, наоборот, минимальное значение параметра поврежденности достигается при $a = 0,5$, что совпадает с режимом 3, при котором скорость деформаций ползучести постоянна (рисунок 4.15). Формообразование оболочки из стали марки 09Г2С12 при значениях a больше $\approx 0,2$ приводит приблизительно к одному и тому уровню накопления повреждений (см. рисунок 4.13). Если $a < 0,3$, то нагрузка прикладывается достаточно быстро, в результате чего напряжения на начальном этапе деформирования могут значительно превосходить предел текучести и материал может деформироваться упругопластически.

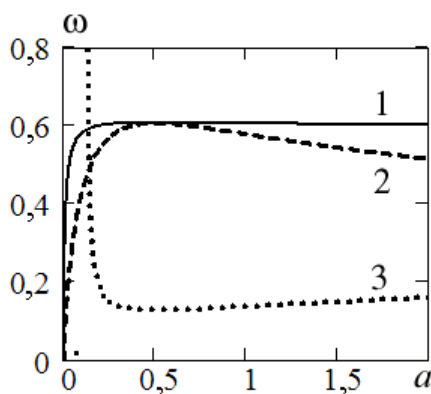


Рисунок 4.14 – Зависимость $\omega(a)$ при деформировании в режиме 4 ($f = f_*(t/t_*)^a$) круглой заготовки в полусферическую форму: линия 1 – сталь марки 09Г2С12, линия 2 – сплав АК4-1, линия 3 – сплав ВТ9

На рисунке 4.15 изображены диаграммы деформирования заготовки ($R = 1,7$ м, $h_0 = 0,016$ м) из сплава АК4-1 при $T = 250^\circ\text{C}$ в сегмент полусферической оболочки $f_* = 0,25$ м, $t_* = 7200$ с. Параметры ползучести сплава АК4-1 приведены в (1.17) [84; 93], эти параметры удовлетворяют условиям $n > g$, $0 < \gamma < 1$.

На рисунке 4.15 линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_C = \text{const}$); линии 2 – 6 — расчет для режима 4 ($f = f_*(t/t_*)^a$ при $a = 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$); линии 7 — режим 3 ($\eta_i = \eta_C = \text{const}$); линии 8 — режим 5 ($\sigma_i = \sigma_C = \text{const}$); линии 9 — режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля. Из анализа диаграмм на рисунке 4.15, *г* следует, что наиболее низкий уровень накопления повреждений показывают режимы 1, 4 (при $a = 0,1; 2$) и 2 (линии 1, 2, 6, 9). Однако из диаграмм на рисунке 4.15, *в* следует, что для режимов 1 и 4 при $a = 0,1$ в начальный момент времени напряжения превышают предел текучести материала. Наилучший режим, позволяющий не превысить предел текучести и получить минимальный уровень накопления повреждений — это режим, соответствующий линиям 9 с кусочно-линейным изменением давления. Следует также отметить, что режим 5 при $a = 0,5$ (линии 4), который совпадает с режимом 3 ($\eta_i = \eta_C = \text{const}$, линии 7), дает максимальный уровень накопления повреждений в материале. Такой же вывод сделан из анализа зависимости $\omega(a)$ для линии 2 на рисунке 4.14.

На рисунке 4.16 приведены результаты аналогичных расчетов параметров процессов деформирования заготовки ($R = 1,7$ м, $h_0 = 0,016$ м) из сплава ВТ9 при $T = 600^\circ\text{C}$ в часть полусферической оболочки $f_* = 0,35$ м, $t_* = 7200$ с. Параметры ползучести сплава ВТ9 приведены в [191]. Для сплава ВТ9 при $T = 600^\circ\text{C}$ функция $\varepsilon_*^c(\sigma)$ монотонно убывает с увеличением напряжения.

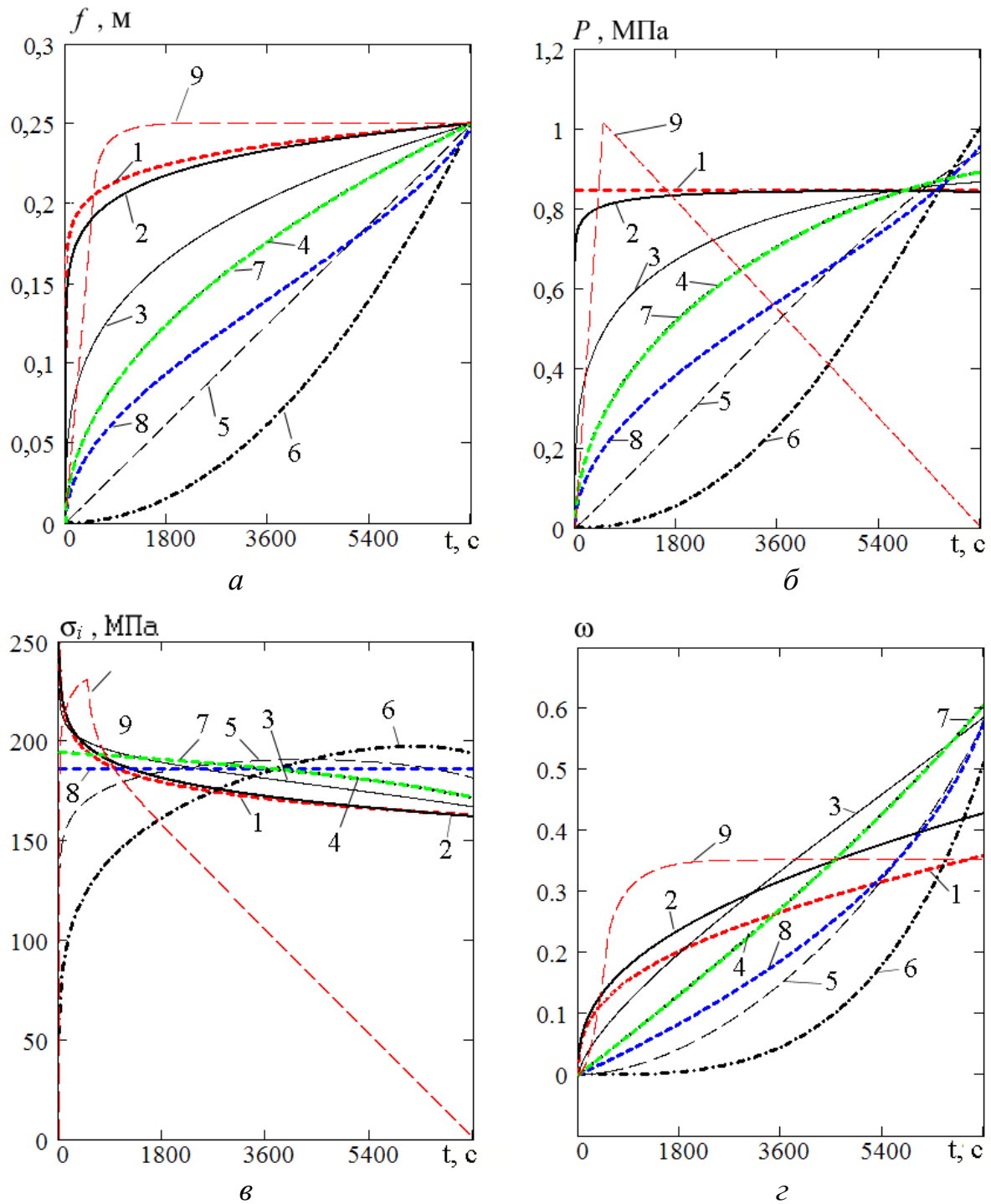


Рисунок 4.15 – Зависимость прогиба (*a*), давления (*б*), интенсивности напряжений (*в*) и параметра поврежденности (*г*) от времени в центре купола оболочки из сплава АК4-1 при $T = 250\text{ }^{\circ}\text{C}$: линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_C = \text{const}$); линии 2 – 6 — режим 4 при $a = 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$; линии 7 — режим 3 ($\eta_i = \eta_C = \text{const}$); линии 8 — режим 5 ($\sigma_i = \sigma_C = \text{const}$); линии 9 — режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля

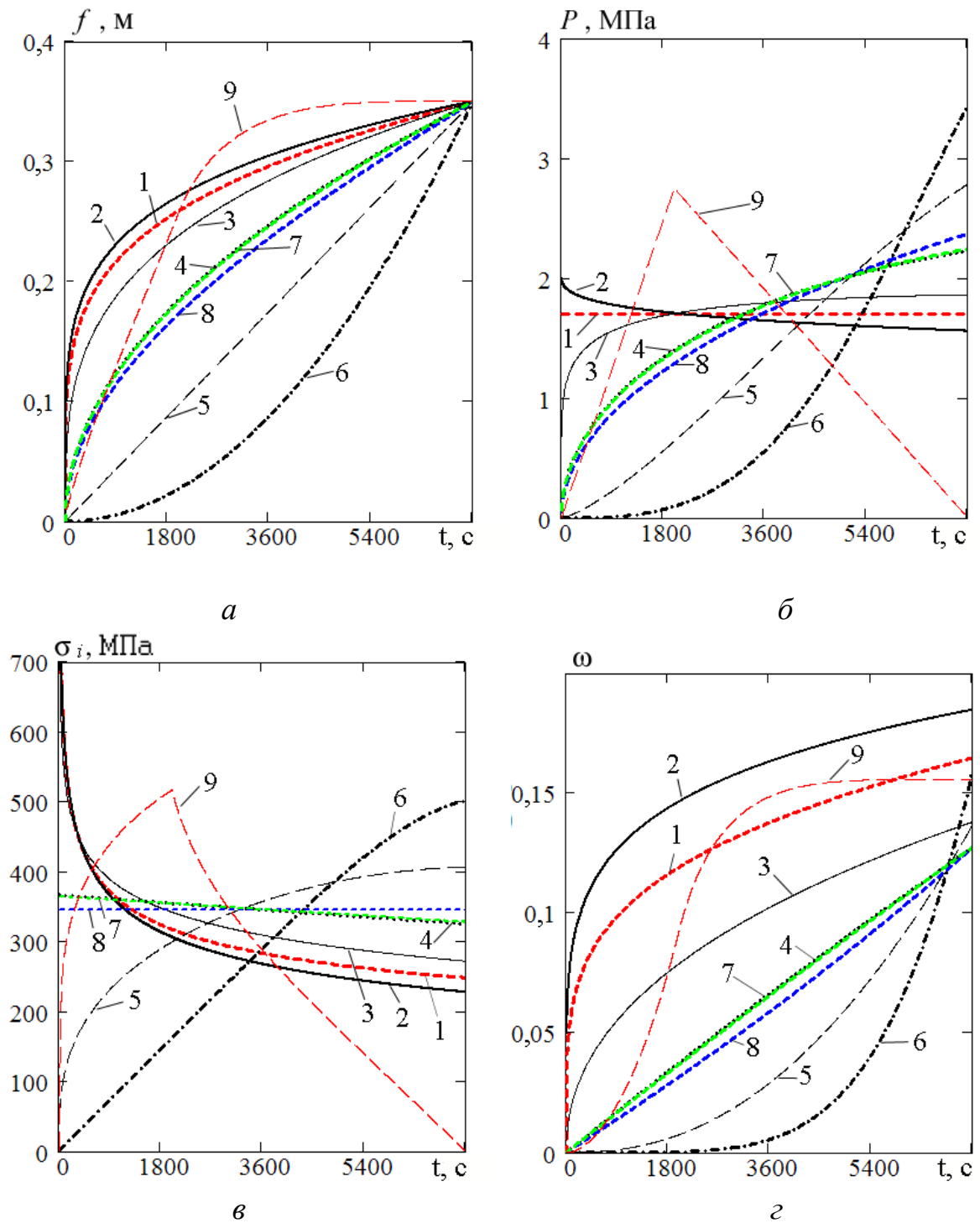


Рисунок 4.16 – Зависимость прогиба (*a*), давления (*б*), интенсивности напряжений (*в*) и параметра поврежденности (*г*) от времени в центре купола оболочки из сплава ВТ9 при $T=600^\circ\text{C}$: линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_C = \text{const}$); линии 2 – 6 — режим 4 при $a = 0,2; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$; линии 7 — режим 3 ($\eta_i = \eta_C = \text{const}$); линии 8 — режим 5 ($\sigma_i = \sigma_C = \text{const}$); линии 9 — режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля

На рисунке 4.16 линии 1 соответствуют режиму 1 ($P_c = \text{const}$); линии 2 – 6 —режим 4 ($f = f_*(t/t_*)^a$ при $a = 0,2; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$); линии 7 —режим 3 ($\eta_i = \eta_c = \text{const}$); линии 8 —режим 5 ($\sigma_i = \sigma_c = \text{const}$); линии 9 —режим 2, при котором сначала приложенное давление линейно растет, а затем линейно уменьшается до нуля. Из диаграмм на рисунке 4.16, ε следует, что самый низкий уровень накопления повреждений наблюдается в режиме 4 при $a = 0,5$, который совпадает с режимом 3 ($\eta_i = \eta_c = \text{const}$). Такой же вывод сделан из анализа зависимости $\omega(a)$ для линии 3 на рисунке 4.14. Отметим, что в данном случае значение параметра поврежденности в режиме 5 ($\sigma_i = \sigma_c = \text{const}$) превосходит значение параметра поврежденности в режиме 4 при $a = 0,5$ незначительно.

4.3 Выводы по четвертой главе

1. В предположении изотропных свойств материала проведено сравнение накопления повреждений при растяжении стержней на основе кинетических уравнений ползучести для двух режимов деформирования: под действием постоянных напряжений и при постоянных скоростях деформаций, соответствующих скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений. Аналитически и численно показано, что для сплавов, у которых на исходных диаграммах ползучести «деформация-время» деформация при разрушении монотонно убывает с увеличением напряжения, наименьшее накопление повреждений происходит в кинематических режимах при постоянных скоростях деформаций. Для сплавов, у которых на исходных диаграммах ползучести «деформация-время» деформация при разрушении монотонно возрастает, к меньшему уровню накопления повреждений приводит статические режимы под действием постоянных напряжений. Для сплавов с немонотонной зависимостью деформации при разрушении, имеющей максимум или минимум на диаграммах ползучести, оба режима деформирования в смысле

накопления повреждений будут практически эквивалентны для напряжений близких к значению, при котором этот минимум или максимум достигается.

2. С целью нахождения рациональных режимов деформирования, обеспечивающих максимальное сохранения остаточного эксплуатационного ресурса на стадии изготовления конструкций, проведено исследование процесса формообразования из плоской заготовки полусферической оболочки. Рассмотрены разные кинематические и статические режимы формообразования за заданное время с учетом пластичности и упругого восстановления после снятия нагрузки. Разработана учитывающая накопление повреждений подпрограмма на языке Fortran, которая встроена в пакет ANSYS (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613159). Показана возможность оценки нагрузки по методике, основанной на решении уравнения равновесия безмоментной оболочки. Установлено, что вид зависимости деформации при разрушении от напряжения на исходных диаграммах ползучести «деформация – время» влияет на режим деформирования, обеспечивающий минимальный уровень накопления повреждений. Для сплавов, у которых деформация при разрушении монотонно уменьшается, минимальный уровень повреждений обеспечивают кинематические режимы с постоянной скоростью деформаций. Для сплавов, у которых деформация при разрушении монотонно возрастает, предпочтительными оказываются статические режимы с постоянной нагрузкой, при этом для исключения возникновения пластических деформаций на начальном этапе нагрузку следует увеличивать постепенно.

Результаты исследований главы 4 опубликованы в журналах ВАК и WEB of Science [6; 18; 224; 228; 256] , в трудах конференций [45; 47; 179].

ГЛАВА 5. ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Оценка срока эксплуатационного ресурса элементов конструкций остается актуальной проблемой в энергетике. Одним из механизмов разрушения является ползучесть. По механизму ползучести могут разрушаться детали турбин, котлов, паропроводов, ректификационных колонн в условиях агрессивной среды. При диагностике степени разрушения необходимо проводить исследования таких физических макро- и микропараметров, как остаточная деформация, изменение плотности материала, изменение скорости ультразвуковых волн, появление микропористости, изменение дислокационной структуры. Применяемые в настоящее время неразрушающие методы дефектоскопии позволяют обнаруживать только макродефекты. При этом промежуток времени, в течение которого происходит развитие дефектов от зарождения трещин до разрушения, может быть значительно меньше планового межремонтного периода. Часто нормативный срок эксплуатации элементов конструкций отождествляют со временем начала их разрушения. Отличие в оценках этого времени обусловлено использованием в расчетах разных вариантов теории ползучести и механизмов разрушения, различных критериев длительной прочности и объектов исследования [111; 113; 121; 140; 150; 151; 170; 215 – 217; 272]. Среди основных механизмов разрушения выделяют хрупкое, вязкое и смешанное хрупко-вязкое.

Простейшей одномерной моделью вязкого разрушения является модель Н. Хоффа [118; 253]. В случае вязкого разрушения удлинение образца происходит равномерно или с образованием шейки с существенным изменением размеров, при этом развиваются большие деформации, для описания которых используется логарифмическая мера деформаций.

В случае хрупкого разрушения в образце накапливаются внутренние повреждения в виде пор, за счет которых происходит уменьшение площади поперечного сечения несущего нагрузку. Деформации обычно при этом предполагаются малыми. Параметр повреждений впервые был введен в работах Л.М. Качанова [119; 120] и Ю.Н. Работнова [168; 170]. Обычно временем начала разрушения конструкции считается достижение параметром поврежденности в какой-либо точке критического значения. Очевидно, что это время не полностью определяет долговечность. Конструкция от начала до полного разрушения может работать достаточно продолжительный период [67; 107; 162; 177; 195]. Определение дополнительного срока эксплуатации представляет важную задачу. Различие в оценках времени разрушения полученных разными исследователями объясняется использованием разных вариантов теории ползучести и механизмов разрушения, различных критериев длительной прочности.

В [67] для выбора периодичности проведения контроля поврежденности рекомендуется использовать теоретические оценки, с учетом распространения фронта разрушения на основе решений Качанова-Работнова [120]. При таком подходе временем начала разрушения считается момент, когда в некоторой области конструкции накопленные повреждения достигают критического значения – первая стадия скрытого разрушения. Вторая стадия это распространение фронта разрушения и полное разрушение тела. В [236; 237] обосновывается применимость такого подхода к расчету напряженно-деформированного состояния катализаторных трубок реформера, при этом распространение фронта разрушения связывается с развитием плотной сети параллельных трещин аналогичного размера, направленных вдоль радиуса и развивающихся от внутреннего к внешнему радиусу поперечного сечения трубок. В [254] рассматривается расчет гнутых труб под действием внутреннего давления с применением метода конечных элементов. Время разрушения в этом случае определяется достижением параметром поврежденности в большинстве точек Гаусса конечных

элементов поперечного сечения значения, равного 0,99. Методы расчета движения линии фронта разрушения в зависимости от времени в рамках модели Ю.Н. Работнова обсуждаются в [50]. В [269] представлен обзор исследований по анализу деформирования и разрушения при ползучести труб, с использованием различных моделей, в том числе модели Качанова-Работнова. Подходы для расчета стержней и оболочек в условиях агрессивной среды рассмотрены А.М. Локощенко [140; 141].

Среди публикаций по расчету напряженно-деформированного состояния гибких пластин с учетом повреждаемости, можно отметить работы [113; 215–217; 272]. В [272] конечно-разностным методом исследуются пластины в геометрически линейной постановке и повреждаемостью в виде тензора второго ранга. В [113; 215 – 217] приведены расчеты с учетом геометрической нелинейности методами конечно-элементной дискретизации и R-функций в сочетании с методом Ритца.

Плоские вращающиеся диски и растягиваемые пластины исследуются в работах Хейхерста [201; 202], при этом для моделировании фронта разрушения используется подход, при котором параметр поврежденности ограничивается значением порядка 0,7. Применение метода конечных элементов для расчета плоского вращающегося диска до начала разрушения рассмотрено в [282]. В [272] моделируется разрушение плоского вращающегося диска с учетом двухстадийности в условиях ортотропного накопления повреждений. Отметим также, что исследование вращающихся дисков вплоть до начала разрушения в геометрически нелинейной постановке с использованием моделей Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова методами численной аппроксимации можно найти в работах [185; 191; 279; 280]. Развитие методов нейросетевого моделирования для определения установившегося напряженного состояния в сплошном вращающемся диске рассмотрено в [127]. В [48] изучается деформирование вращающегося диска с изменяющейся скоростью в условиях ползучести.

В настоящей главе с использованием кинетической теории ползучести Работнова, учитывающей накопление повреждений в материале, на примере изгиба кольцевых пластин и вращающихся дисков показывается возможность нахождения времени разрушения с использованием метода, при котором задача неустановившейся ползучести с учетом накопления повреждений сводится к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала [8; 14; 16; 25; 110]. Аналогичный способ расчета времени разрушения используется для толстостенных сосудов (труб), нагруженных внутренним давлением в работах [153 – 155].

При расчете кольцевых пластин в определяющих уравнениях критерий Мизеса линеаризуется, что, по сути, эквивалентно использованию критерия Треска – Сен-Венана. Чтобы получить истинное решение, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени, для которых выводится система уравнений. Найденное решение сравнивается с решением, полученным с использованием метода конечных элементов комплекса ANSYS, при этом в определяющих уравнениях применяется критерий Мизеса [14]. Предполагается, что деформации малы и разрушение имеет хрупкий характер. Такой вид разрушения наблюдается для большей части деталей энергооборудования, работающих в условиях ползучести [67; 177].

Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения вращающегося диска с гиперболической формой поверхности исследуется с учетом двухстадийности в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести. Сравниваются два подхода в формулировке Ю.Н. Работнова и в формулировке Л.М. Качанова [16; 227]. Для диска исследуется продолжительность стадий в зависимости от приложенных нагрузок, формы диска, а также от размера внутреннего отверстия. Метод апробируется на примере растягиваемых пластин с круговым отверстием [44].

5.1 Механизмы разрушения в условиях ползучести

Концепция *вязкого разрушения* по модели Хоффа [253] имеет ограниченный характер, например, ее невозможно использовать для расчетов времени разрушения стержней при кручении. Однако при решении целого ряда практических задач эта модель дает результаты, хорошо согласующиеся с опытными данными.

Рассматривается растяжение цилиндрического стержня длины l и поперечного сечения S постоянным усилием F . В начальный момент времени $t = 0$ длина $l = l_0$ и площадь $S = S_0$. Согласно модели Н. Хоффа из условия несжимаемости $lS = l_0S_0$. Предполагается, что скорость деформации $\dot{\epsilon}^c = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ связана с напряжением $\sigma = F/S$ степенной зависимостью $\dot{\epsilon}^c = B_\epsilon \sigma^n$, где B_ϵ , n – коэффициенты ползучести. После интегрирования последнего уравнения с учетом начальных условий следует

$$l(t) = \frac{l_0}{(1 - tB_\epsilon n \sigma_0^n)^{1/n}}, \quad \sigma_0 = F/S_0. \quad (5.1)$$

Время вязкого разрушения $t_* = t_{RV}$ определяется из условия $S = 0$ (или $l = \infty$).

Очевидно, что

$$t_{RV} = \frac{1}{B_\epsilon n \sigma_0^n}. \quad (5.2)$$

На рисунке 5.1 приведено решение задачи растяжения стержня постоянным усилием по формуле (5.1) и методом конечных элементов в программе ANSYS в трехмерной постановке для стержня с размерами поперечного сечения 10 мм×20 мм длиной $l_0 = 40$ мм из сплава АК4-1. Константы ползучести на растяжение $B = 0,5 \cdot 10^{-14} ((\text{кгс}/\text{мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1})$, $n = 8$ соответствуют температуре $T = 200^\circ\text{C}$ [188]. Растягивающее усилие $F = 3000$ кгс.

При моделировании в программном комплексе ANSYS с помощью элемента Solid45 было исследовано два вида граничных условий на торцах

растягиваемого стержня: точки торцов свободно смещаются и точки торцов заземлены в плоскости поперечного сечения стержня. В случае свободных торцов точки свободно смещаются в направлениях X и Y (ось Z направлена вдоль оси стержня, оси X и Y лежат в плоскости поперечного сечения). Перемещения в направлении оси Z на одном из торцов нулевые $u_z(X, Y, 0) = 0$, а точки другого торца смещаются в направлении Z компланарно $u_z(X, Y, l) = \text{const}(t)$. Этот случай эквивалентен модели Хоффа, когда длина бесконечно увеличивается, а площадь поперечного сечения по всей длине стремится к нулю. Изменение формы представлено на рисунке 5.1, б (каркасный вид стержня соответствует начальному моменту времени). В реальном эксперименте растягиваемый стержень не может удлиняться бесконечно. Как правило, разрушение происходит с утонением образца или образованием «шейки». С некоторым приближением такое деформирование можно смоделировать растяжением стержня с заземленными торцами (рисунок 5.1, в), при этом перемещения точек на торцах в направлениях X и Y равны нулю $u_x(X, Y, 0) = u_x(X, Y, l) = 0$, $u_y(X, Y, 0) = u_y(X, Y, l) = 0$ в любой момент времени. Перемещения в направлении оси Z такие же, как и в случае свободных торцов $u_z(X, Y, 0) = 0$, $u_z(X, Y, l) = \text{const}(t)$.

На рисунке 5.1, а сплошная линия 1 соответствует зависимости, определяемой формулой (5.1), пунктирная линия 2 и штриховая линия 3 – численный расчет методом конечных элементов в трехмерной постановке с граничными условиями свободные и заземленные торцы соответственно. Различие времени разрушения вычисленного по формуле (5.2) от времени разрушения, полученного для моделей в трехмерной постановке, составляет не более 3%. Линия 4 на рисунке 3 соответствует решению задачи растяжения стержня с указанными выше характеристиками и размерами в геометрически линейной постановке. На рисунке 5.1, в изображены изолинии интенсивности напряжений. Полученные результаты демонстрируют возможность получать оценку времени разрушения с использованием модели Хоффа.

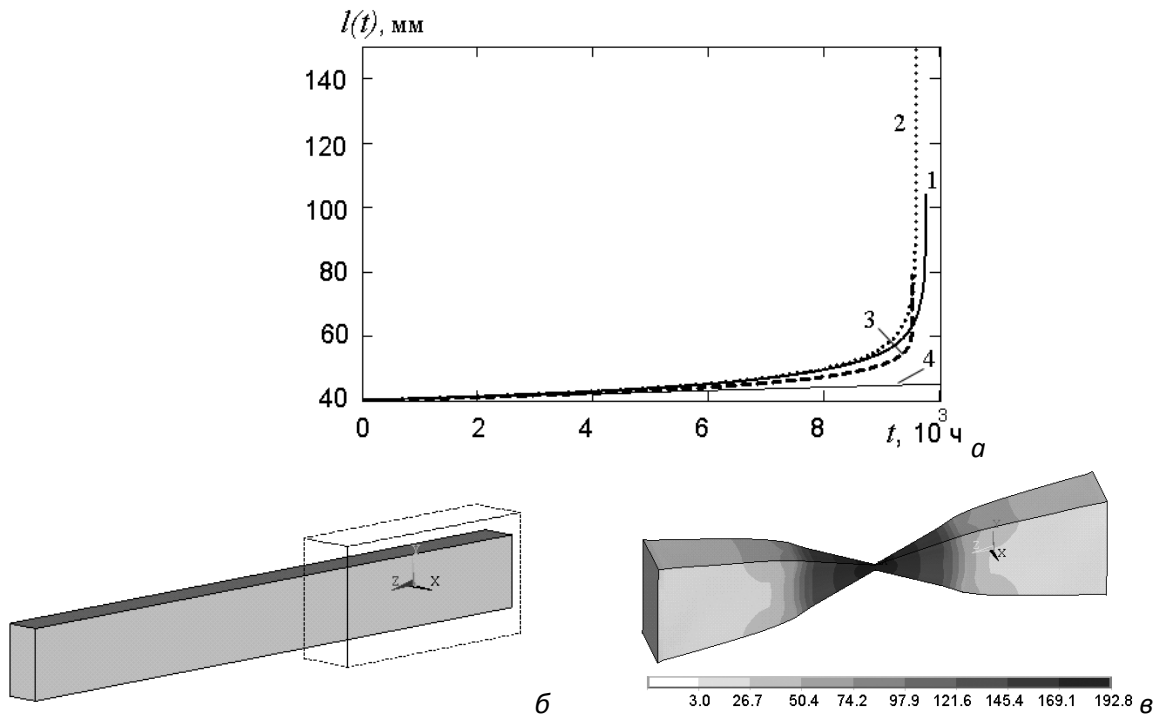


Рисунок 5.1 – Зависимость длины стержня от времени: сплошная линия 1 – расчет по формуле (5.1), пунктирная линия 2 и штриховая линия 3 – расчет методом конечных элементов с граничными условиями свободные и защемленные торцы соответственно (а); изменение формы стержня со свободными торцами (начальный каркасный вид и деформированный вид) (б); изолинии интенсивности напряжений стержня с защемленными торцами (в)

Для расчета времени хрупкого и хрупко-вязкого разрушения может использоваться кинетическая теория Ю.Н. Работнова, описывающая с все три стадии ползучести соотношениями (1.2) или (1.12)–(1.14). Будем считать, что $f_c(\sigma, T)$, $\varphi_c(\sigma, T)$ – степенные функции. Запишем уравнения (1.2) в виде:

$$\eta_{ij} = \frac{W_A}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B_A \sigma_e^{n+1}}{\phi_1(\omega)}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (5.3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_e^g}{\phi(\omega)}, \quad \omega(x_j, 0) = 0, \quad \omega(x_j^*, t_*) = 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.4)$$

Здесь обозначения те же, что и ранее: η_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений; σ_e , σ_{e*} – эквивалентные напряжения, являющиеся однородными относительно напряжений

функциями первой степени; $W_A = \sigma_{ij} \eta_{ij}$. Через $B_A = B_\varepsilon$, n , B_ω , g обозначены характеристики ползучести и длительной прочности материала; ω – параметр, описывающий с феноменологических позиций накопление повреждений в процессе ползучести материала. Для неповрежденного материала во всех точках элемента конструкции с координатами x_j ($j=1, 2, 3$) $\omega=0$; если в момент времени $t = t_*$ в какой-то точке с координатами x_j^* параметр $\omega=1$, то будем говорить, что в этой точке тела произошло разрушение. Время $t = t_*$ – время начала разрушения тела. Функции ϕ и ϕ_1 , зависят от параметра поврежденности ω . В зависимости от выбора этих функций и констант материала система (5.3), (5.4) может представлять различные варианты теории ползучести. Если $\phi_1(\omega) = \phi(\omega)$, то мы имеем вариант кинетической теории, из которой вытекают частные случаи: теория кратковременной ползучести [171]; энергетический вариант ползучести и длительной прочности [93; 101; 191]; теория упрочнения с различными ее модификациями [14; 95; 150; 170]. В случае если $\phi_1(\omega) = 1$, то из (5.3), (5.4) следует вариант кинетической теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова [118; 120]. При отсутствии стадии упрочнения для функций $\phi(\omega)$, $\phi_1(\omega)$ можно принять $\phi_1(\omega) = (1 - \omega)^{m_1}$, $\phi(\omega) = (1 - \omega)^m$, $0 \leq m_1 \leq m$.

Для задачи одноосного растяжения стержня после интегрирования (5.4) время хрупкого разрушения $t_* = t_{RB}$ определяется как

$$t_{RB} = 1 / (B_\omega (1 + m) \sigma_0^g) . \quad (5.5)$$

Совместное решение системы уравнений (5.3), (5.4) в предположении, что деформации конечны, позволяет вычислить время при смешанном хрупко-вязком разрушении. В [120] приведено решение задачи растяжения стержня постоянным усилием при смешанном хрупко-вязком разрушении в случае $n > g$ и $m \neq m_1$. Рассмотрим вариант уравнений ползучести в виде (5.3), (5.4) с одинаковыми функциями в знаменателе $\phi_1(\omega) = \phi(\omega)$, $m = m_1$ и

$\alpha=0$ (отсутствует упрочнение). При одноосном растяжении $\sigma_e = \sigma_{e^*} = \sigma$ в нормированных координатах $\omega = \varepsilon / \varepsilon_*^c$. В случае больших деформаций $\sigma = \sigma_0 \exp(\varepsilon^c)$. Подставляя выражения для напряжения в (5.3) и (5.4), имеем

$$\eta = \frac{d\varepsilon^c}{dt} = B_A \sigma_0^n \frac{\exp(n\varepsilon^c)}{(1-\omega)^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B_\omega \sigma_0^g \frac{\exp(g\varepsilon^c)}{(1-\omega)^m}. \quad (5.6)$$

Разделив первое уравнение на второе, после интегрирования следует

$$\varepsilon = \frac{1}{g-n} \ln \left(1 - (n-g) \frac{B_A}{B_\omega} \sigma_0^{n-g} \omega \right). \quad (5.7)$$

После интегрирования второго уравнения (5.6) с учетом (5.7) определяется время разрушения. В случае $n > g$ при конечном удлинении условие хрупкого разрушения $\omega = 1$ достигается при

$$t_* = \frac{1}{B_\omega \sigma_0^g} \int_0^1 (1-\omega)^m (1-\rho\omega)^{\frac{g}{n-g}} d\omega, \quad (5.8)$$

где $\rho = (n-g) \frac{B_A}{B_\omega} \sigma_0^{n-g}$, при этом выполняется условие $\rho < 1$. При $n > g$ и

вязком разрушении $\varepsilon^c \rightarrow \infty$, из (5.7) следует, что параметр поврежденности достигает значения $\omega = 1/\rho$ ($\rho \geq 1$) и время разрушения определяется следующим образом:

$$t_* = \frac{1}{B_\omega \sigma_0^g} \int_1^{1/\rho} (1-\omega)^m (1-\rho\omega)^{\frac{g}{n-g}} d\omega. \quad (5.9)$$

Как было показано в п. 4.1 условие $n > g$ выполняется для материалов, для которых на диаграмме кривых ползучести «деформация-время» деформация при разрушении ε_*^c монотонно возрастает при увеличении σ_0 .

На рисунке 5.2, а сплошной линией 1 и штриховой линией 2 изображены кривые длительной прочности « $\ln(\sigma_0) - \ln(t_*)$ » построенные согласно формулам (5.2) и (5.5) соответственно для сплава ВТ9 (Ti–Al–Mo–

Zr) при температуре $T = 800^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести для этого сплава в диапазоне напряжений 65-150 МПа следующие: $m = 2,5$; $g = 2,9$; $n = 4,58$; $B_A = 2,39 \cdot 10^{-14} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$; $B_\omega = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$ [101]. Точки на рисунке 5.2, а – расчет по формулам (5.8), (5.9) при $\sigma_0 = 40; 50; 65; 80; 100; 150; 170$ МПа. Видно, что кривые 1 и 2 являются асимптотами при уменьшении и увеличении напряжений, для $\sigma_0 = 150; 170$ МПа получено $\rho > 1$.

При $g > n$ (см. п. 4.1) на диаграмме кривых ползучести «деформация-время» деформация при разрушении ε_*^c монотонно убывает при увеличении σ_0 . К таким материалам, например, относятся сплавы, описываемые энергетическим вариантом ползучести $A_* = \text{const}$, $g = n + 1$ [191]. Для таких сплавов выполняется условие $\rho < 0$ и время разрушения можно вычислить согласно (5.8). В качестве примера рассмотрим сплав ВТ9 при температуре $T = 600^\circ\text{C}$. Значения параметров ползучести для этого сплава в диапазоне напряжений 245-440 МПа приведены в [191]: $\alpha = 0$; $m = 2,33$; $g = 4$; $n = 3$; $B_A = 2,379 \cdot 10^{-13} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}$; $B_\omega = 1,055 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-g} \text{ с}^{-1}$.

На рисунке 5.2, б сплошной линией 1 и штриховой линией 2 изображены кривые длительной прочности « $\ln(\sigma_0) - \ln(t_*)$ » построенные по формулам (5.2) и (5.5) соответственно. Точки на рисунке 5.2, б – расчет по формуле (5.8), при $\sigma_0 = 100; 200; 250; 300; 350; 400; 450$ МПа. Кривые 1 и 2 также являются асимптотами при уменьшении и увеличении напряжений. Так как $g = n + 1$, (5.8) преобразуется к виду

$$t_* = \frac{1}{B_\omega \sigma_0^{n+1}} \int_0^1 (1 - \omega)^m / (1 + \omega B_A / (B_\omega \sigma_0))^{n+1} d\omega.$$

Заметим, что в этом случае для небольших значений напряжений время разрушения ограничивается асимптотой (5.2), т.е. линией 1 на рисунке 5.2, б:

$$t_* < \frac{1}{B_\omega \sigma_0^{n+1}} \int_0^1 (1 + \omega B_A / (B_\omega \sigma_0))^{-(n+1)} d\omega = \frac{1}{B_A n \sigma_0^n} \left(1 - \left(1 + \frac{B_A}{B_\omega \sigma_0} \right)^{-n} \right) < \frac{1}{B_A n \sigma_0^n}.$$

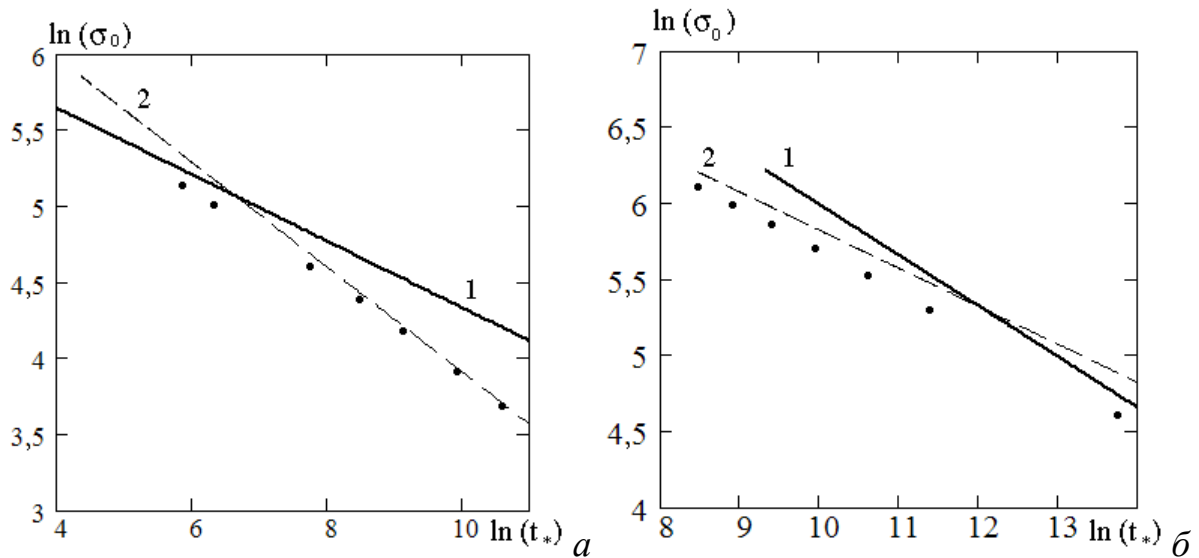


Рисунок 5.2 – Кривые длительной прочности для сплава ВТ9 при $T=800^\circ\text{C}$ (а) и $T=600^\circ\text{C}$ (б): точки – расчет по модели хрупко-вязкого разрушения, линии 1 – расчет по модели вязкого разрушения, линии 2 – расчет по модели хрупкого разрушения

Таким образом, по формулам (5.8), (5.9) можно вычислить время разрушения при смешанном хрупко-вязком деформировании материала, поведение которого описывается степенными функциями, а выражения (5.2) и (5.5) могут быть полезны расчета времени разрушения при преимущественно хрупком или вязком характере, и для оценки времени смешанного разрушения. Далее в расчетах предполагается, что деформации малы и разрушение имеет хрупкий характер. Такой вид разрушения наблюдается для большей части деталей энергооборудования, работающих в условиях ползучести [67; 177].

5.2 Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения осесимметрично нагруженных пластин

Методы расчета напряженно-деформированного состояния равномерно нагретых круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин в

предположении установившейся ползучести их материала широко известны [144; 165; 170]. Исследуем напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных пластин с использованием кинетической теории Ю.Н. Работнова (5.3), (5.4), описывающей все три стадии ползучести материала.

В условиях сложного напряженного состояния в качестве эквивалентного напряжения σ_e в (5.3) может использоваться интенсивность напряжений σ_i (критерий Мизеса), либо максимальное касательное напряжение (критерий Треска) и т.д. В качестве эквивалентного напряжения σ_{e*} в (5.4) можно принять интенсивность напряжений σ_i (критерий длительной прочности Каца), либо максимальное нормальное напряжение (критерий длительной прочности Джонсона) и другие критерии [138]. Выбор критерия разрушения при многоосном напряженном состоянии, в том числе длительность до разрушения валов с выточками при растяжении рассматривается в [240; 257; 275]. Выбор критерия разрушения в условиях сдвига при кручении сплошных валов и трубчатых образцов обсуждается в [143; 251].

Предположим, что $\phi_1(\omega) = \phi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$. Для упрощения математических преобразований с помощью замены $\mu = 1 - \omega^{\alpha+1}$, соотношения (5.3), (5.4) преобразуются к виду [14, 155]

$$\eta_{kl} = \frac{W_A}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{kl}}, \quad W = \frac{B_A \sigma_e^{n+1}}{\phi(\mu)}, \quad \phi(\mu) = \mu^m (1 - \mu)^{\alpha(\alpha+1)}, \quad (5.10)$$

$$k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{(\alpha+1)B_\omega \sigma_{e*}^g}{\mu^m}, \quad \mu(x_k, 0) = 1, \quad \mu(x_k^*, t_*) = 0. \quad (5.11)$$

Параметр μ для неповрежденного материала во всех точках тела (элемента конструкции) с координатами x_k ($k = 1, 2, 3$) равен единице. Если в момент времени $t = t_*$ в какой-либо точке с координатами x_k^* параметр μ достигает критического значения, равного нулю, то считается, что в этой точке тела

произошло разрушение. Выведем основные уравнения, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние кольцевых осесимметрично нагруженных пластин и накопленные повреждения в их материале.

Предположим, что в пластине реализуется плоское напряженное состояние и касательные напряжения в кольцевом сечении пластины малы. Пусть $\sigma_e = \sigma_{e*} = \sigma_i$. Окружное (тангенциальное) напряжение σ_{11} обозначим через σ_ϕ , радиальное σ_{22} – через σ_r , напряжение $\sigma_{33} = \sigma_z = 0$. При сделанных предположениях система уравнений (5.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\eta_\phi &= \frac{B_A}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (2\sigma_\phi - \sigma_r), & \eta_r &= \frac{B_A}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (2\sigma_r - \sigma_\phi), \\ \eta_z &= -\frac{B_A}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (\sigma_\phi + \sigma_r),\end{aligned}\quad (5.12)$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_r^2}. \quad (5.13)$$

Согласно (5.10) $W_A = B_A \sigma_i^{n+1} / \phi(\mu)$, в то же время $W_A = \sigma_i \eta_i$. Для интенсивности скоростей деформаций ползучести следует

$$\eta_i = B_A \sigma_i^n / \phi(\mu). \quad (5.14)$$

С учетом несжимаемости материала ($\eta_r + \eta_\phi + \eta_z = 0$) интенсивность η_i выражается через компоненты тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\eta_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\eta_\phi^2 + \eta_\phi \eta_r + \eta_r^2}. \quad (5.15)$$

Из (5.12) с учетом (5.13)–(5.15) можно выразить σ_ϕ , σ_r через η_ϕ , η_r

$$\sigma_\phi = \frac{4}{3} \frac{\eta_i^{(1-n)/n}}{B_A^{1/n}} \left(\eta_\phi + \frac{1}{2} \eta_r \right) [\phi(\mu)]^{1/n}, \quad \sigma_r = \frac{4}{3} \frac{\eta_i^{(1-n)/n}}{B_A^{1/n}} \left(\eta_r + \frac{1}{2} \eta_\phi \right) [\phi(\mu)]^{1/n}. \quad (5.16)$$

Прогиб w пластины толщиной h ($-h/2 \leq z \leq h/2$), изгибаемой осесимметричной нагрузкой связан с углом поворота нормали пластины ν_n выражением $dw/dr = -\nu_n$. Если ψ есть скорость поворота нормали, т.е.

$\dot{V}_n = \dot{\psi}$, то $d\dot{w}/dr = -\dot{\psi}$ ($\dot{w}$ - скорость прогиба срединной плоскости пластины). Считается, что прогибы пластины малы по сравнению с ее толщиной, выполняются гипотезы Кирхгофа – Лява, что соответствует состоянию чистого изгиба. Тогда, если u – перемещение любой точки пластины в радиальном направлении, то $u(r) = z\nu_n(r)$. Учитывая, что при осесимметричной деформации $\eta_r = d\dot{u}/dr$, $\eta_\phi = \dot{u}/r$, получаем

$$\eta_r = z \frac{d\dot{\psi}}{dr} = -z \frac{d^2\dot{w}}{dr^2}, \quad \eta_\phi = z \frac{\dot{\psi}}{r} = -z \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr}. \quad (5.17)$$

Интенсивность скорости деформаций ползучести (5.15) с учетом (5.17) записывается в виде

$$\eta_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\dot{\psi}}{r}\right)^2 + \frac{\dot{\psi}}{r} \frac{d\dot{\psi}}{dr} + \left(\frac{d\dot{\psi}}{dr}\right)^2} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa |z|. \quad (5.18)$$

Используя (5.17) и (5.18), компоненты напряжений (5.16) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_\phi = [\phi(\mu)]^{1/n} \alpha_t \kappa^{(1-n)/n} \alpha_\phi |z|^{(1-n)/n} z, \quad \sigma_r = [\phi(\mu)]^{1/n} \alpha_t \kappa^{(1-n)/n} \alpha_r |z|^{(1-n)/n} z. \quad (5.19)$$

Здесь

$$\alpha_t = \frac{(2/\sqrt{3})^{(n+1)/n}}{(B_A)^{1/n}}, \quad \alpha_\phi = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\psi}}{dr} + \frac{\dot{\psi}}{r}, \quad \alpha_r = \frac{d\dot{\psi}}{dr} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{r}, \quad \psi = \psi(r, t). \quad (5.20)$$

Подстановка (5.19) в (5.13) приводит к выражению

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} [\phi(\mu)]^{1/n} \alpha_t \kappa^{1/n} |z|^{1/n}. \quad (5.21)$$

Интенсивности окружного и радиального изгибающих моментов в радиальном и кольцевом сечениях пластины связаны с окружным и радиальным напряжениями известными соотношениями [144; 165; 170]

$$M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi z dz, \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz.$$

Соотношения (5.19) можно привести к виду [144, 170]

$$\sigma_\varphi = [\phi(\mu)]^{1/n} \frac{\alpha_t}{D} |z|^{(1-n)/n} z M_\varphi = l M_\varphi, \quad \sigma_r = [\phi(\mu)]^{1/n} \frac{\alpha_t}{D} |z|^{(1-n)/n} z M_r = l M_r, \quad (5.22)$$

где

$$D(r, t) = 2\alpha_t \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz. \quad (5.23)$$

Уравнения равновесия имеют вид [144; 165; 170]

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q, \quad \frac{d}{dr}(Qr) = -pr. \quad (5.24)$$

Здесь $Q(r, t) = Q(r)$ – интенсивность поперечной силы; p – интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки; граничные условия для $M_r(r, t)$ на внутреннем $r = a_0$ и наружном $r = b_0$ радиусах пластины при $0 \leq t \leq t_*$: $M_r(a_0, t) = M_r(a_0)$, $M_r(b_0, t) = M_r(b_0)$, где $M_r(a_0)$, $M_r(b_0)$ – заданные значения.

Используя (5.13) и (5.22), в соотношениях (5.10) компоненты скорости деформаций ползучести можно выразить через интенсивности изгибающих моментов:

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_\varphi}, \quad \eta_r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_r}. \quad (5.25)$$

Здесь $M_i = \sqrt{M_\varphi^2 - M_\varphi M_r + M_r^2}$; $\sigma_i = l M_i$.

Система уравнений (5.12)–(5.25) позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных кольцевых пластин в любой момент времени вплоть до начала разрушения.

5.2.1 Метод расчета на основе решения установившейся ползучести материала

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния равномерно нагретых кольцевых осесимметрично нагруженных пластин в

предположении установившейся ползучести их материала достаточно хорошо известны. Решение с использованием критерия Мизеса ($\sigma_e = \sigma_i$) вызывает затруднения и в общем случае возможно только численными методами, например методом конечных элементов. Для упрощения соответствующих вычислений квадратичный критерий Мизеса можно линеаризовать. При постоянной величине M_i графиком зависимости между интенсивностями изгибающих моментов M_r и M_φ является эллипс, главные оси которого наклонены к осям координат под углом, равным 45° , и который отсекает на этих осях отрезки, равные M_i (рисунок 5.3). Этот эллипс может быть заменен шестиугольником $ABCDEF$. Тогда величина M_i может быть приближенно выражена через интенсивности M_r и M_φ [144; 170], что эквивалентно линеаризации критерия Мизеса и переходу к критерию Треска в определяющих уравнениях (5.10) и соответственно в (5.25). Например, при $M_\varphi > M_r > 0$ точка (M_φ, M_r) принадлежит области AOB и $M_i = M_\varphi$; при $M_\varphi > 0, M_r < 0$ точка (M_φ, M_r) принадлежит области BOC и $M_i = M_\varphi - M_r$ и т.д.

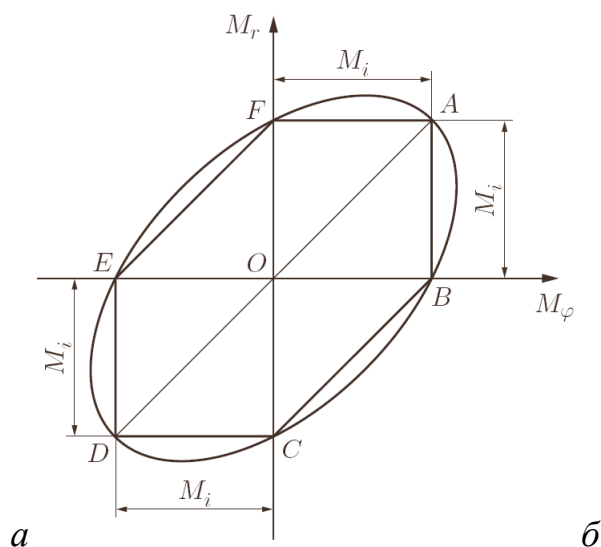


Рисунок 5.3 – Зависимость между интенсивностями изгибающих моментов M_r и M_φ

Рассмотрим случай, когда $M_i = M_\varphi - M_r$. Согласно (5.25)

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n, \quad \eta_r = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n. \quad (5.26)$$

Из (5.26) следует, что $\eta_\varphi + \eta_r = 0$, тогда с учетом (5.17)

$$\psi(r, t) = C(t)/r, \quad (5.27)$$

где $C(t)$ – константа интегрирования. В дальнейшем вместо $C(t)$ будем рассматривать функцию $X(t)$, введенную соотношением

$$[C(t)]^{1/n} = (C^0)^{1/n} [X(t)]^{-1} = \frac{B_A^{1/n}}{JJ_1} [M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)] [X(t)]^{-1}. \quad (5.28)$$

Здесь $J = 2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz$, $J_1 = \int_{a_0}^{b_0} r^{-1-2/n} dr$, $M_r(a_0)$, $M_r(b_0)$ – значения

$M_r(r)$ на внутреннем ($r = a_0$) и внешнем ($r = b_0$) радиусах пластины;

$\bar{Q}(r) = \int_{a_0}^r Q(\zeta) d\zeta$, соответственно тогда $\bar{Q}(b_0) = \int_{a_0}^{b_0} Q(\zeta) d\zeta$. В этом случае

(5.27) с учетом (5.28) принимает вид

$$\psi(r, t) = \frac{C^0}{r} [X(t)]^{-n} = \psi^0 [X(t)]^{-n}. \quad (5.29)$$

Из (5.29) следует, что переход от $C(t)$ к $X(t)$ выполнен на основании гипотезы о том, что поле $\psi(r, t)$ подобно некоторому стационарному полю $\psi^0(r)$. Более того, константа C^0 в (5.28) выбрана так, что поле ψ^0 совпадает с аналогичным, следующим из решения рассматриваемой задачи в предположении установившейся ползучести материала. Поэтому оно считается известным и является кинематически возможным [144; 165; 170].

С использованием (5.27) из (5.17) определяются скорости деформаций ползучести. Их сопоставление с (5.26) приводит к выражению

$$M_i = M_\varphi - M_r = \left(\sqrt{3}/2\right)^{(n+1)/n} (C^0)^{1/n} D(r, t) r^{-2/n} [X(t)]^{-1}. \quad (5.30)$$

Из первого уравнения равновесия с учетом заданных граничных условий для M_r на внутреннем и внешнем радиусах пластины с использованием (5.30) следует

$$M_r(r, t) = M_r(a_0) + \left(\sqrt{3}/2\right)^{(n+1)/n} (C^0)^{1/n} [X(t)]^{-1} \int_{a_0}^r D(\zeta, t) \zeta^{-1-2/n} d\zeta + \bar{Q}(r). \quad (5.31)$$

Из (5.31) с учетом граничного условия при $r = b_0$ и (5.28) получаем

$$\int_{a_0}^{b_0} D(r, t) r^{-1-2/n} dr = \left(2/\sqrt{3}\right)^{(n+1)/n} JJ_1 X(t) / B_A^{1/n}.$$

С учетом выражений (5.23) для $D(r, t)$ и (5.20) для α_t окончательно следует

$$\int_{a_0}^{b_0} \left(2 \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz \right) r^{-1-2/n} dr = JJ_1 X(t). \quad (5.32)$$

В дальнейшем потребуется выражение $\sigma_i = lM_i$, где l вычисляется согласно (5.22), а M_i – согласно (5.30). С учетом выражения (5.28) для $(C^0)^{1/n}$ получаем

$$lM_i = \frac{[\phi(\mu)]^{1/n}}{X(t)} \frac{M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)}{JJ_1} r^{-2/n} |z|^{(1-n)/n} z. \quad (5.33)$$

Введем в рассмотрение функцию $t^0(r, z)$:

$$t^0 = \left[(\alpha + 1)(m + 1) B_\omega(\sigma_i^0)^g \right]^{-1}, \quad (5.34)$$

где верхний индекс «0» при соответствующей функции обозначает, что она зависит только от координат точек тела. Иными словами σ_i^0 есть выражение интенсивности напряжений в аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала, и $\sigma_i^0 = l^0 M_i^0$ [144]. С учетом выражений

$$l^0 = \frac{|z|^{(1-n)/n} z}{J}, \quad M_i^0 = \frac{M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)}{J_1} r^{-2/n}$$

находим

$$l^0 M_i^0 = \frac{M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)}{JJ_1} r^{-2/n} |z|^{(1-n)/n} z. \quad (5.35)$$

Выражение (5.33), учитывая (5.35), приводится к виду

$$\sigma_i = l M_i = l^0 M_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t). \quad (5.36)$$

В качестве критерия длительной прочности выберем критерий Каца. В этом случае $\sigma_{e*} = \sigma_i$. Из (5.11) с учетом (5.34), (5.36) и выражения (5.10) для функции $\phi(\mu)$ следует

$$\int_1^\mu \Psi(z) dz = -[(m+1)t^0]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-g} d\tau, \quad (5.37)$$

где $\Psi(z) = z^{m(n-g)/n} (1-z)^{-\alpha g/(n(\alpha+1))}$.

Уравнения (5.32), (5.37) есть система уравнений для определения функции времени $X(t)$ и параметра повреждаемости $\mu(r, z, t)$, зная которые, можно рассчитать напряженно-деформированное состояние пластины в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Действительно, из (5.29) получаем зависимость $\psi(r, t) = \psi^0 [X(t)]^{-n}$, с использованием которой из (5.17) находится поле скоростей деформаций ползучести $\eta_\varphi(r, z, t) = \eta_\varphi^0 [X(t)]^{-n}$, $\eta_r(r, z, t) = \eta_r^0 [X(t)]^{-n}$ ($\eta_\varphi^0 = z\psi^0 / r$, $\eta_r^0 = z d\psi^0 / dr$),

скорость прогиба срединной плоскости и сам прогиб $w(r, t)$ при известных условиях закрепления пластины, а из (5.18) – интенсивность скоростей деформации ползучести $\eta_i(r, z, t) = \eta_i^0 [X(t)]^{-n}$. Из (5.23) вычисляется $D(r, t)$, и далее с использованием (5.20) и (5.28) из (5.30) находится интенсивность изгибающих моментов

$$M_i = M_\varphi - M_r = \frac{M_i^0}{\alpha_t J} \frac{D(r, t)}{X(t)}, \quad (5.38)$$

из (5.31) – интенсивность радиального изгибающего момента $M_r(r, t)$ на единицу длины кольцевого сечения пластины, из (5.31) и (5.38) – $M_\varphi(r, t) = M_r(r, t) + M_i(r, t)$. По известным величинам M_i , M_φ , M_r из (5.36)

находим интенсивность напряжений $\sigma_i(r, z, t) = \sigma_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t)$, а из (5.22) – компоненты напряжений $\sigma_\varphi(r, z, t)$ и $\sigma_r(r, z, t)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия.

Время начала разрушения определяется из условия $\mu(r^*, z^*, t_*) = 0$. Очевидно, что по известной функции μ можно найти не только t_* , но и координаты r^* , z^* точки, в которой μ впервые обращается в нуль.

Следует отметить, что интеграл в левой части (5.37) в зависимости от характеристик материала может представлять собой несобственный интеграл от неограниченной функции при $\mu = 1$ (нижний предел интегрирования) и $\mu = 0$ (верхний предел интегрирования). Для сходимости интеграла на характеристики материала необходимо наложить ограничения [153], которые не являются жесткими и согласуются с имеющимися экспериментальными данными [111].

Очевидно, что в общем случае система (5.32), (5.37) допускает только численное решение. Поэтому целесообразно рассмотреть варианты, когда в (5.37) $\alpha \neq 0$, $m = 0$, что характерно для упрочняющихся в процессе ползучести материалов, или $\alpha = 0$, $m \neq 0$, что характерно для многих конструкционных сплавов [150; 170]. Можно показать, что при $\alpha \neq 0$, $m = 0$ система уравнений (5.32), (5.37) имеет аналитическое решение. В случае $\alpha = 0$, $m \neq 0$ из (5.37) следует

$$\mu^{m/n} = \left(1 - \frac{\beta_2}{t^0} \int_0^t X^{-g} d\tau \right)^{\beta_1}, \quad (5.39)$$

где

$$\beta_1 = \frac{m}{n + m(n - g)}, \quad \beta_2 = \frac{n + m(n - g)}{n(m + 1)}. \quad (5.40)$$

Согласно (5.10) $\phi(\mu) = \mu^m$ при $\alpha = 0$, $m \neq 0$, поэтому $\phi(\mu)^{1/n} = \mu^{m/n}$. Из (5.32) и (5.39):

$$\int_{a_0}^{b_0} \left(2 \int_0^{h/2} \left(1 - \frac{\beta_2}{t^0} \int_0^t X^{-g} d\tau \right)^{\beta_1} z^{(n+1)/n} dz \right) r^{-1-2/n} dr = JJ_1 X(t). \quad (5.41)$$

Практический интерес представляет случай $\beta_1=1$. При $\beta_1=1$ уравнение (5.41) принимает вид $1 - \frac{\beta_2}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-g} d\tau = X(t)$ и имеет решение

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+1)}, \quad (5.42)$$

где величина $\bar{t}^0$ получена с использованием теоремы о среднем

$$\int_{a_0}^{b_0} \left(2 \int_0^{h/2} (z^{(n+1)/n}/t^0(r, z)) dz \right) r^{-1-2/n} dr = JJ_1/\bar{t}^0, \quad \bar{t}^0 = t^0(\bar{r}, \bar{z}),$$

$\bar{r}, \bar{z}$ - координаты «средней» точки при $a_0 \leq r \leq b_0$, $0 \leq z \leq h/2$. Подставляя (5.42) в (5.39), находим:

$$[\mu(r, z, t)]^{m/n} = \left\{ 1 - \frac{t^0(\bar{r}, \bar{z})}{t^0(r, z)} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0} \right)^{1/(g+1)} \right] \right\}. \quad (5.43)$$

Из условия $\mu(r^*, z^*, t_*)$ с использованием (5.43) определяется

$$t_* = \bar{t}^0 [1 - (1 - t^0/\bar{t}^0)^{g+1}]. \quad (5.44)$$

Здесь $t_*^0 = t^0(r^*, z^*)$ - время начала разрушения, соответствующее решению рассматриваемой задачи в предположении установившейся ползучести материала. При $\beta_1 \neq 1$, решение уравнения (5.41) можно получить численно любым из известных методов.

Если переписать систему уравнений (5.32), (5.37) в ином виде, то это позволит сделать вывод о применимости предложенной методики для расчета напряженно-деформированного состояния других элементов конструкций (трубы под действием внутреннего давления, балки в условиях изгиба и т.д.). Очевидно, что уравнение (5.37), полученное на основе уравнения (5.11), справедливо для любой конструкции. Рассмотрим уравнение (5.32). Прежде всего вычислим мощность диссипируемой энергии пластины $W_A^0 = \eta_{ij}^0 \sigma_{ij}^0$ в предположении установившейся ползучести ее

материала. Известно, что $\eta_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = \eta_i^0 \sigma_i^0 = B_A (\sigma_i^0)^n \sigma_i^0$ [170]. Учитывая, что $\sigma_i^0 = l^0 M_i^0$, из (5.35) следует

$$W_A^0 = B_A \left(\frac{M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)}{JJ_1} \right)^{n+1} z^{(n+1)/n} r^{-2(n+1)/n}.$$

Мощность диссипируемой энергии всей пластины есть

$$\int_V W_A^0 dV = A_q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a_0}^{b_0} \left(2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz \right) r^{-1-2/n} dr = 2\pi A_q JJ_1. \quad (5.45)$$

Здесь коэффициент $A_q = B_A \left[(M_r(b_0) - M_r(a_0) - \bar{Q}(b_0)) / (JJ_1) \right]^{n+1}$. Уравнение (5.32) с использованием (5.45) записывается в виде

$$\int_V W_A^0 [\phi(\mu)]^{1/n} dV = X(t) \int_V W_A^0 dV. \quad (5.46)$$

Очевидно, что уравнение (5.46) выполняется не только для пластины, нагруженной изгибающим моментом или давлением, но и для других элементов конструкций с различными условиями нагружения и закрепления, при этом уже W_A^0 есть мощность диссипируемой энергии рассматриваемого элемента конструкции, а V – его объем. Методика может быть применена к расчету не только пластин, но и других конструкций при различных граничных условиях и прикладываемых нагрузках.

Проведем анализ полученного решения. Как отмечено выше, поле и интенсивность скоростей деформации ползучести находятся из (5.17), (5.18), с использованием (5.27) и (5.28): $\eta_\varphi(r, z, t) = \eta_\varphi^0 [X(t)]^{-n}$, $\eta_r(r, z, t) = \eta_r^0 [X(t)]^{-n}$, $\eta_i(r, z, t) = \eta_i^0 [X(t)]^{-n}$, где $\eta_\varphi^0 = z\psi^0/r$, $\eta_r^0 = z d\psi^0/dr$. Из (5.28) для константы C^0 и выражения $\psi^0 = C^0/r$ следует, что величины η_φ^0 , η_r^0 , η_i^0 совпадают с теми же величинами, вычисленными в задаче установившейся ползучести [144; 165; 170]. Поэтому величины η_φ^0 , η_r^0 , η_i^0 считаются известными, причем они являются кинематически возможными. Данному полю скоростей

деформаций ползучести соответствует поле напряжений, с которым оно связано законом установившейся ползучести. Указанное поле напряжений может не удовлетворять уравнениям равновесия. В данном случае таким полем напряжений является поле, определяемое соотношениями (5.19), которые с использованием (5.20), (5.27), (5.28) можно представить в виде

$$\sigma_{\varphi}(r, z, t) = \sigma_{\varphi}^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \quad \sigma_r(r, z, t) = \sigma_r^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t). \quad (5.47)$$

Здесь σ_{φ}^0 , σ_r^0 – компоненты напряжений, соответствующие решению задачи установившейся ползучести [144; 165; 170]; следовательно σ_{φ}^0 , σ_r^0 являются статически допустимыми [144]. Компоненты напряжений в (5.47) не являются статически допустимыми, так как не удовлетворяют уравнениям равновесия. Статически допустимыми являются напряжения σ_{φ} , σ_r , определяемые соотношениями (5.22), где M_{φ} и M_r удовлетворяют уравнениям равновесия (5.24) (M_r находится из (5.31), а M_{φ} – из (5.30) с использованием (5.31)). Учитывая, что $\sigma_i = lM_i$, из (5.33) с использованием (5.35) получаем

$$\sigma_i(r, z, t) = \sigma_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \quad (5.48)$$

где σ_i^0 – интенсивность напряжений в задаче установившейся ползучести.

Отметим, что если (5.47) подставить в выражение для интенсивности напряжений (5.13), то получим соотношение (5.48). Отсюда следует, что поле (5.47) можно сделать статически допустимым. Положим

$$\sigma_{\varphi}(r, z, t) = \sigma_{\varphi}^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + C_p, \quad \sigma_r(r, z, t) = \sigma_r^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + C_p. \quad (5.49)$$

Гидростатическая составляющая C_p вычисляется из условия удовлетворения компонент напряжений (40) (5.49) уравнениям равновесия. Уравнение для величины C_p приведено в [14].

На основе вышеизложенного можно сделать следующий вывод: решение задачи о напряженно- деформированном состоянии кольцевых

пластин с учетом накопления повреждений в материале в процессе его ползучести можно свести к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести. Для того, чтобы получить решение неустановившейся ползучести, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на функции от $\mu(r,z,t)$ и $X(t)$, которые являются решением системы уравнений (5.37), (5.46). Методы решения задач в предположении установившейся ползучести материала достаточно полно разработаны [144; 165; 170]. Рассмотренный метод может быть применен для расчета других элементов конструкций, в том числе неравномерно нагретых тел: толстостенных труб и сосудов, нагруженных внутренним давлением, изгибаемых балок, вращающихся дисков и других.

5.2.2 Расчет методом конечных элементов в программе ANSYS

Альтернативный способ решения задачи изгиба кольцевой пластины – расчет методом конечных элементов. В этом случае в качестве σ_e и σ_{e*} в (5.10), (5.11) используется интенсивность напряжений σ_i , т.е. критерии Мизеса и Каца. Для расчетов применяется четырехузловой оболочечный конечный элемент Shell181 пакета ANSYS. В силу осесимметрии рассматривается сегмент кольца в один градус с разбивкой 50 элементов вдоль радиуса и с одиннадцатиточечным разбиением элемента по толщине. Для решения системы дифференциальных уравнений по времени используется неявная схема численного интегрирования [50], а также процедура автоматического деления шага пополам. Задача решается в геометрически линейной постановке. Для расчетов используется описанная в четвертой главе подпрограмма на языке Fortran, встроенная в пакет ANSYS, учитывающая накопление повреждений в режиме ползучести (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613159; приложения Б, Д). Активация подпрограммы в основном программном коде осуществляется

командой TB,CREEP с параметром TBOPT=100. С помощью команды TBDATA вводятся константы материала для модели.

5.2.3 Сравнительный анализ решений

На рисунке 5.4 представлены результаты расчетов для кольцевой пластины, нагруженной по внутреннему радиусу изгибающим моментом $M_r(a_0) = -M = -600 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рисунок 5.4, а), на внешнем радиусе $M_r(b_0) = 0$, $Q = 0$, $p = 0$. Толщина пластины $h = 0,01 \text{ м}$, радиусы $a_0 = 0,05 \text{ м}$ и $b_0 = 0,1 \text{ м}$, безразмерный радиус $\rho = r/a_0$ изменяется в интервале $1 \leq \rho \leq 2$. На внешнем контуре $\rho = 2$ пластина шарнирно оперта, внутренний контур $\rho = 1$ не закреплен. Для вычислений использованы константы материала: $\alpha = 0$, $n = 6$, $g = 5,75$, $m = 8$, $B_A = 3,5172 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-n}/\text{ч}$, $B_\omega = 2,7563 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-g}/\text{ч}$, $E = 60 \text{ ГПа}$ [150; 187]. В рассматриваемом случае согласно (5.40) $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,148$ поэтому функции $X(t)$, $\mu(r, z, t)$ и время начала разрушения t_* находятся из (5.42)–(5.44). Линиями 1-3 на рисунке 5.4, б представлены распределения функций M_i/M , M_ϕ/M и M_r/M в зависимости от ρ в сечениях пластины $\phi = \text{const}$. Расчет выполнен согласно (5.30), (5.31). Сплошные, пунктирные и штриховые линии соответствуют трем фиксированным значениям времени $\tau = t/t_*^0$: начальному $\tau_0 = 0$, промежуточному $\tau_2 = t_2/t_*^0 = 2,1$ и времени начала разрушения $\tau_* = t_*/t_*^0 \approx 2,456$ ($t_*^0 = 1,867 \cdot 10^4 \text{ ч}$). Очевидно, что в процессе ползучести в пластине происходит непрерывное перераспределение изгибающих моментов, которым нельзя пренебрегать даже на стадии проектирования. Изгибающие моменты M_ϕ , M_r и интенсивность M_i существенно отличаются от M_ϕ^0, M_r^0, M_i^0 (сплошные линии на рисунке 5.4, б), полученных из решения задачи установившейся ползучести.

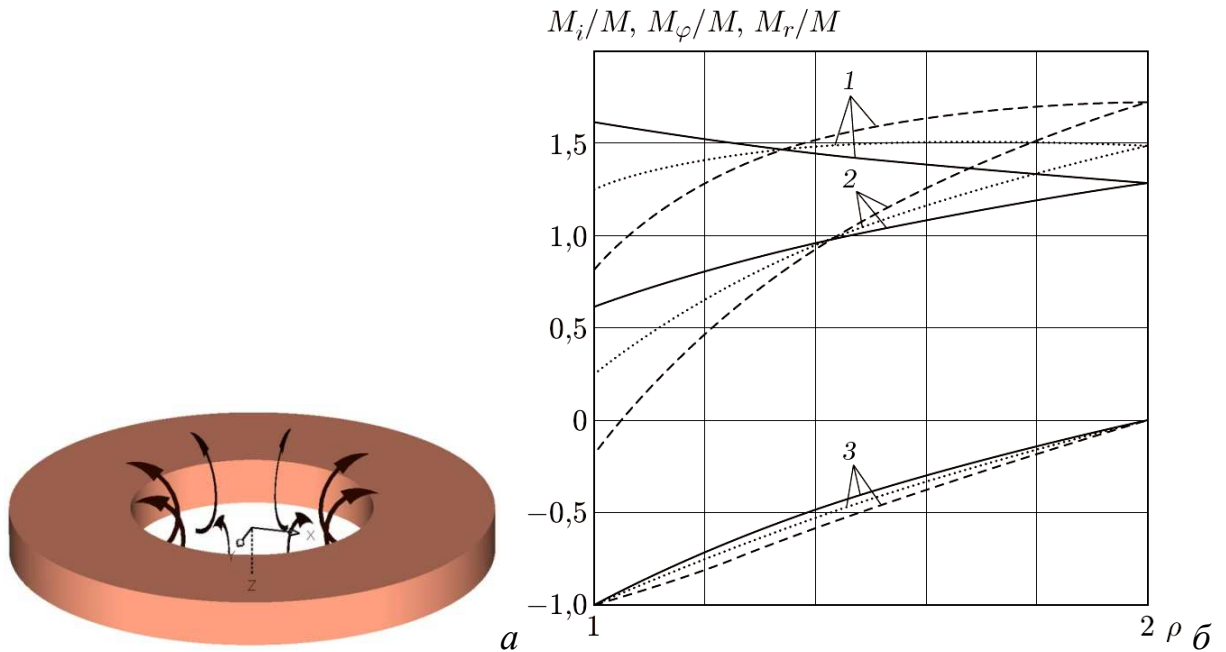


Рисунок 5.4 – Кольцевая пластина нагруженная моментом, приложенным на внутреннем контуре (а); зависимости функций M_i/M , M_φ/M и M_r/M от ρ и $\varphi = \text{const}$: 1 — $M_i/M(\rho)$; 2 — $M_\varphi/M(\rho)$; 3 — $M_r/M(\rho)$; сплошные линии — $\tau_0 = 0$; пунктирные — $\tau_2 = 2,1$; штриховые — $\tau_* \approx 2,456$ (б)

На рисунке 5.5 представлены изолинии интенсивности напряжений $\sigma_i = lM_i$ в сечении ($\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$) для тех же моментов времени, что и на рисунке 5.4. Величина lM_i вычисляется по формуле (5.33) или (5.36). На рисунке 5.6 приведены изолинии функции повреждаемости $\mu(\rho, z, \tau)$ (5.34) в моменты времени τ_2 и τ_* . При $\tau = \tau_0$ выполняется $\mu = 1$ во всем сечении. Изолинии, представленные на рисунке 5.5, 5.6, свидетельствуют о накоплении повреждений в материале пластины в различных ее сечениях. Очевидно, что опасные, области есть ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho^* = 1$, $z^* = \pm h/2$). Именно отсюда при $\tau_* > t_*/t_*^0$ начинает распространяться фронт разрушения. В рассматриваемом случае значение t_* превышает t_*^0 более чем в 2,4 раза. Это свидетельствует о том, что t_*^0 представляет собой одну из нижних оценок времени t_* , т. е. это приближенное время начала разрушения пластины. На рисунке 5.7 представлены изолинии

интенсивности напряжений σ_i в сечениях ($\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$): для $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ ч, полученные методом конечных элементов.

На рис 5.8, *a* и *б* сплошными линиями показаны распределения компонентов σ_φ , σ_r в сечении ($1 \leq \rho \leq 2$, $z = h/2$), рассчитанных с использованием соотношений (5.22), (5.30), (5.31); штриховые линии – расчет согласно (5.47). Цифрам 1, 2 и 3 на рисунке обозначены линии для $t = 0$; $4,0 \cdot 10^4$ и $t_* = 4,59 \cdot 10^4$ ч соответственно (линия 1 штриховая совпадает со сплошной). Поле напряжений (5.47), связанное с кинематически возможным полем скоростей деформаций ползучести, можно использовать в качестве верхней оценки. На том же рисунке пунктирными линиями 1, 2 и 3 изображены аналогичные результаты для компонентов напряжений, рассчитанных методом конечных элементов на момент времени вблизи $t = 0$, соответствующее установившемуся состоянию ползучести; при $t = 7,0 \cdot 10^4$ ч и $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ ч. На рис 5.9, *a* сплошными и пунктирными линиями показаны зависимости интенсивности напряжений σ_i от ρ при $z = h/2$, вычисленные согласно (5.36) и методом конечных элементов соответственно. В целом, картина распределения напряжений, полученных первым способом, близка к расчету методом конечных элементов. На рисунке 5.9, *б* показана рассчитанная методом конечных элементов зависимость интенсивности напряжений при $\{\rho = 1, z = h/2\}$ от времени для максимального шага интегрирования на установившейся стадии 5, 2, 1 ч – линии 1, 2, 3 соответственно. Отличие интенсивности напряжений на момент времени $t = 10^4$ ч для линий 1 и 3 составляет 0,7 %, а для линий 2 и 3 – 0,1%, при этом отличие времени до разрушения t_* составило 18 и 3% соответственно. При уменьшении максимального шага интегрирования время t_* уменьшается и стремится к некоторому предельному значению, однако при этом существенно возрастает машинное время расчета. На всех рисунках, за исключением рисунок 5.9, *б*, представлены результаты расчетов методом конечных элементов для максимального шага интегрирования 2 ч.

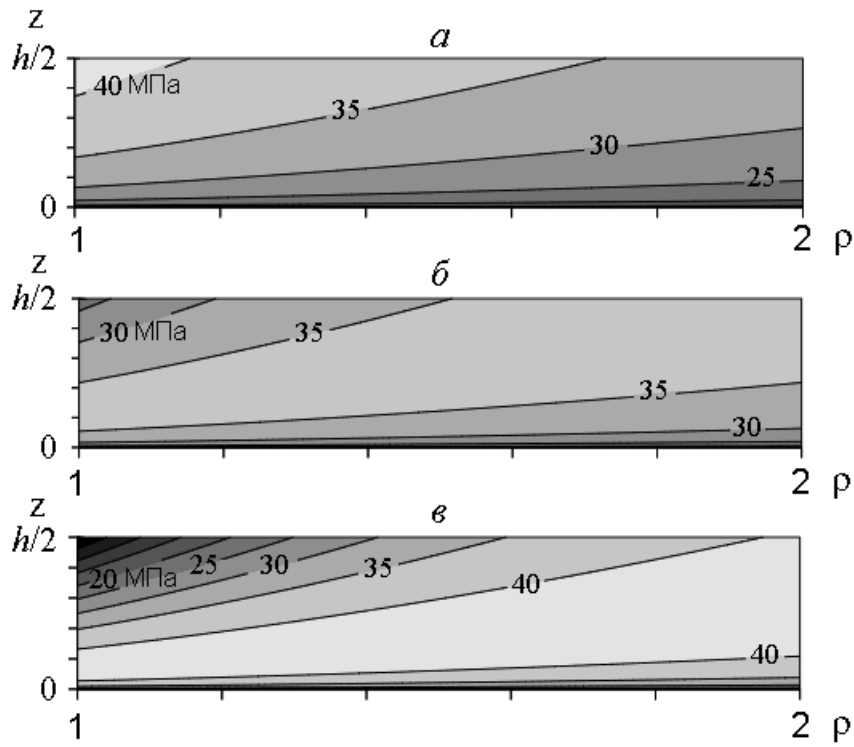


Рисунок 5.5 – Изолинии интенсивности напряжений σ_i в сечении $\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$: $\tau_0 = 0$ (а); $\tau_2 = 2,1$ (б); $\tau_* \approx 2,456$ (в)

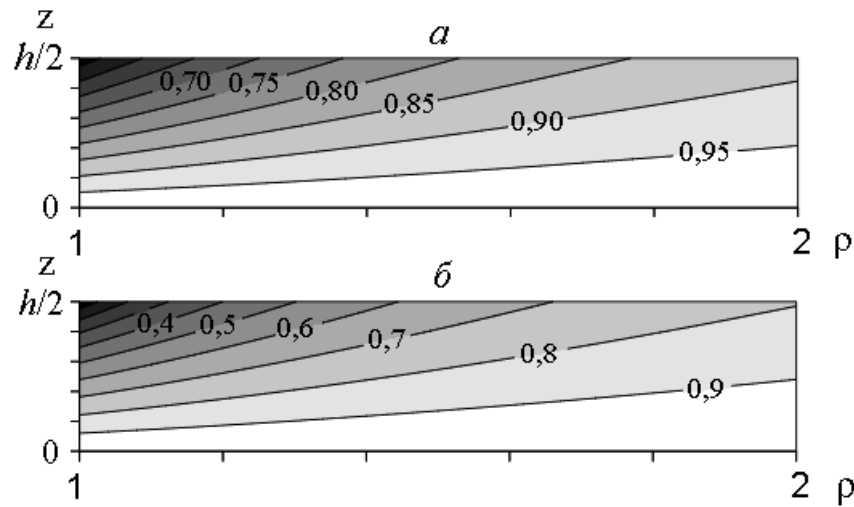


Рисунок 5.6 – Изолинии функции повреждаемости $\mu(\rho, z, \tau)$: $\tau_2 = 2,1$ (а); $\tau_* \approx 2,456$ (б)

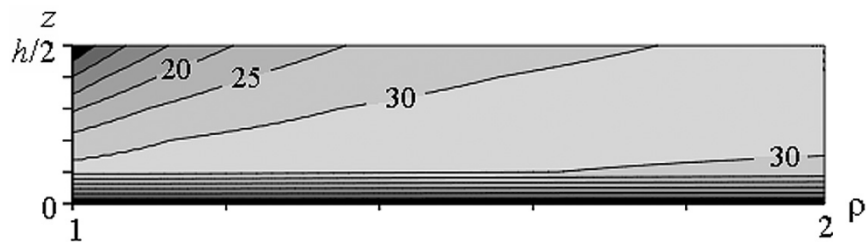


Рисунок 5.7 – Изолинии интенсивности напряжений σ_i (МПа) в сечении ($\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$); $t_* = 8,46 \cdot 10^4$ ч, вычисленные методом конечных элементов

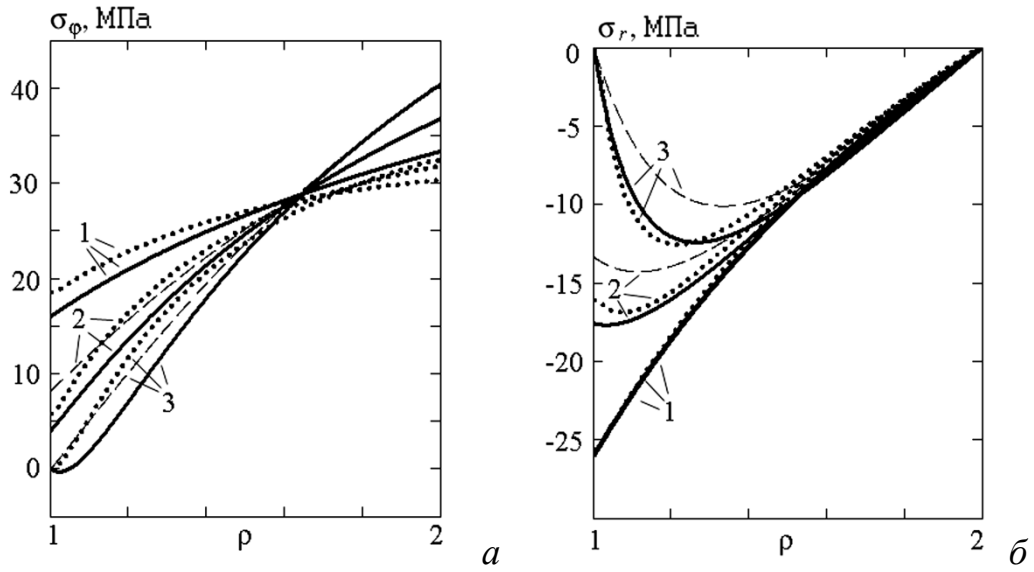


Рисунок 5.8 – Зависимость $\sigma_\varphi(a)$ и $\sigma_r(b)$ от ρ при $z = h/2$: сплошные и штриховые линии – расчет по (5.22) и (5.47) соответственно; пунктирные – расчет методом конечных элементов

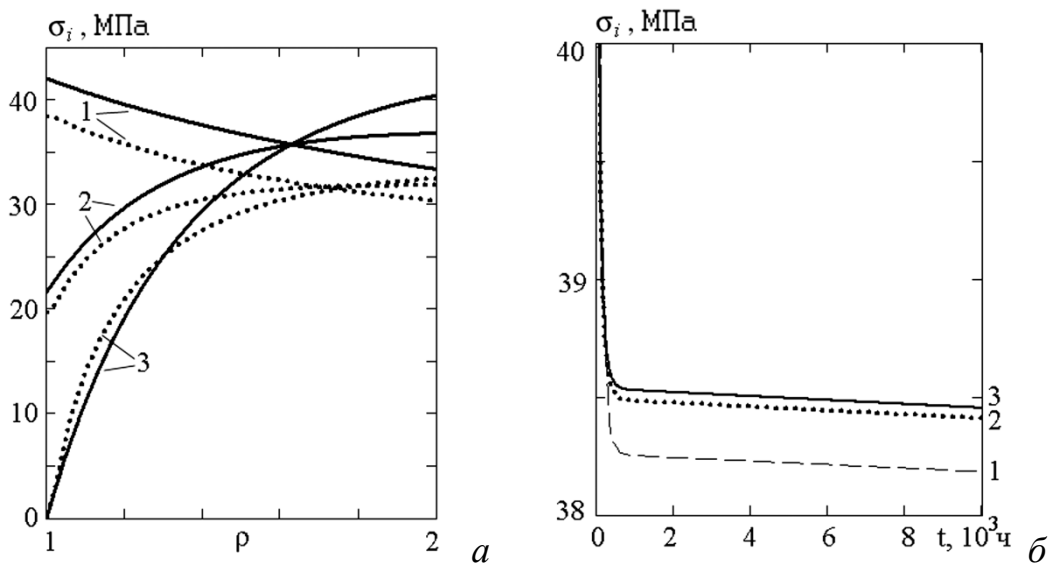


Рисунок 5.9 – Зависимость σ_i от ρ при $z = h/2$: сплошные линии – расчет по (5.36); пунктирные – расчет методом конечных элементов (a); зависимость интенсивности напряжений σ_i от времени при $(\rho = 1, z = h/2)$ для максимального шага интегрирования 5, 2, 1 ч – линии 1, 2, 3 соответственно (б)

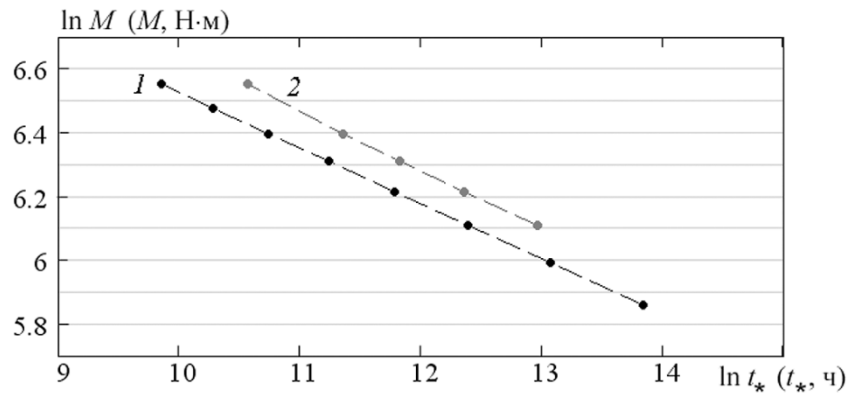


Рисунок 5.10 – Зависимость времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного на внутреннем радиусе пластины в логарифмических координатах: линии 1 и 2 расчет по (5.36) и методом конечных элементов соответственно

На рисунке 5.10 построены зависимости времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного на внутреннем радиусе пластины в логарифмических координатах. Линии 1 и 2 относятся к результатам, полученным первым и вторым способом соответственно. Используя эти прямые линии или их продолжение, можно прогнозировать время начала разрушения при различных значениях приложенной нагрузки. На диаграмме видно, что применение критерия Треска–Сен-Венана (линия 1) дает нижнюю оценку времени начала разрушения конструкции.

Таким образом, полученное время начала разрушения при изгибе кольцевой пластины моментом, вычисленное с применением критерия Мизеса, почти в два раза больше времени, полученного с использованием критерия Треска–Сен-Венана. Метод расчета, основанный на сведении задачи неустановившейся ползучести к задаче установившейся ползучести, позволяет прогнозировать зачастую интересующую расчетчиков нижнюю оценку времени начала разрушения. Показано также, что этот метод может быть применен для расчета других элементов конструкций с различными условиями нагружения и закрепления. Окончательный выбор критерия должен определяться в результате экспериментальных исследований.

5.3 Длительность до разрушения вращающихся и растягиваемых дисков с учетом стадии распространения фронта разрушения

Конструкция от начала до полного разрушения может работать достаточно длительное время. Оценка этого дополнительного срока службы является важной задачей. Стадия распространения фронта разрушения (от начала его распространения до полного разрушения тела), в зависимости от используемого варианта теории ползучести, критерия длительной прочности, самого объекта исследования и других параметров, может быть сопоставима со временем начала разрушения. На примере вращающегося диска с гиперболической формой поверхности исследуется напряженно-деформированное состояние и длительности до разрушения с учетом двухстадийности в зависимости от выбора варианта кинетической теории ползучести и геометрических размеров диска. Сравниваются два подхода в формулировке Ю.Н. Работнова и в формулировке Л.М. Качанова. Для решения используется метод, примененный для расчета осесимметричных кольцевых пластин: упругие деформации не учитываются и решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Для упрощения в определяющих уравнениях в качестве эквивалентного напряжения используется максимальное касательное напряжение.

5.3.1 Расчет длительности первой стадии до начала разрушения

Для описания физических свойств материала будем использовать кинетическую теорию Ю.Н. Работнова в виде (5.3), (5.4). Пусть $\phi_1(\omega) = (1 - \omega)^{m_1}$, $\phi(\omega) = (1 - \omega)^m$, m, m_1 – константы ползучести. После замены $\mu = 1 - \omega$ соотношения (5.3), (5.4) преобразуются к виду [16]

$$\eta_{ij} = \frac{W}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B_A \sigma_e^{n+1}}{\phi_1(\mu)}, \quad \phi_1(\mu) = \mu^{m_1}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.50)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{B_\omega \sigma_e^g}{\phi(\mu)}, \quad \phi(\mu) = \mu^m, \quad \mu(x_k, 0) = 1, \quad \mu(x_k^*, t_*) = 0. \quad (5.51)$$

Если $\phi_1(\mu) = 1$, то получаем вариант кинетической теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова [120]. Для сравнительного анализа подходов Л.М. Качанова и Ю.Н. Работного в дальнейшем принимается, что $0 \leq m_1 \leq m$.

Рассматривается равномерно нагретый тонкий диск, внутренний, наружный и текущий радиус которого есть a_0, b_0, r , $a_0 \leq r \leq b_0$, толщина диска $h = h(r)$, причем $h = h_0 \cdot r^{-k}$, $k \geq 0$, h_0 – константа (рисунок 5.11). Ось z направлена перпендикулярно плоскости диска, а оси r, φ как обычно [120].

Касательными напряжениями и напряжениями в направлении оси z пренебрегаем, т.е. предполагается, что в диске реализуется плоское напряженное состояние ($\sigma_z = \sigma_{rz} = 0$). Материал считаем несжимаемым $\eta_\varphi + \eta_r + \eta_z = 0$ и из уравнений Коши следует $\eta_r = dv_r/dr$; $\eta_\varphi = v_r/r$. Здесь $v_r(r, t)$ – радиальная скорость перемещения произвольной точки диска, $\eta_\varphi, \eta_r, \eta_z$ – окружная, радиальная и осевая компоненты тензора скоростей деформаций ползучести.

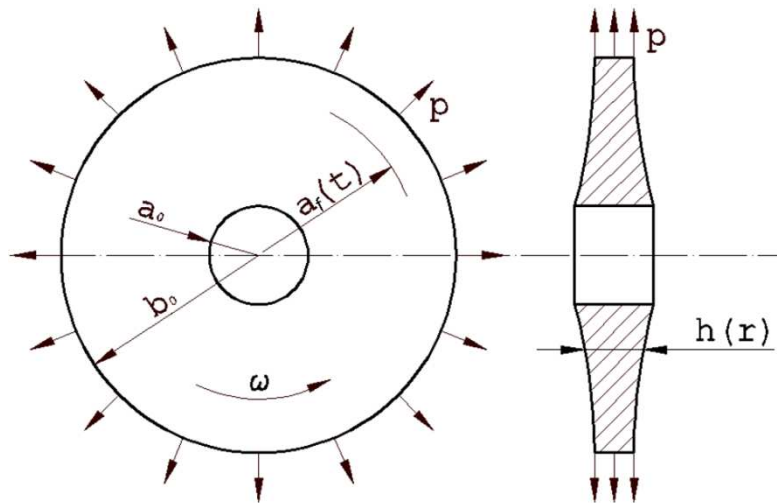


Рисунок 5.11 – Схема диска

Напряжения σ_φ , σ_r в любой момент времени при $0 \leq t \leq t_*$ удовлетворяют уравнению равновесия

$$d(hr\sigma_r)/dr - h\sigma_\varphi + h\Omega^2 r^2 = 0. \quad (5.52)$$

Граничные условия на внутреннем и наружном радиусах диска: $\sigma_r(a_0) = 0$, $\sigma_r(b_0) = p$, где p – равномерное растягивающее усилие у внешнего обода диска; $\Omega^2 = \gamma\omega^2$, γ – плотность материала диска, ω – его угловая скорость. Интегрируя уравнение (5.52) с учетом зависимости толщины диска от радиуса и граничных условий, находим

$$\sigma_r(r, t) = \left(\frac{\Omega^2}{3-k} a_0^{3-k} + \int_{a_0}^r \sigma_\varphi r^{-k} dr \right) r^{k-1} - \frac{\Omega^2}{3-k} r^2, \quad (5.53)$$

$$\int_{a_0}^{b_0} \sigma_\varphi r^{-k} dr = P, \quad P = pb_0^{1-k} + \frac{\Omega^2}{3-k} (b_0^{3-k} - a_0^{3-k}). \quad (5.54)$$

Выберем в (5.51), (5.52) в качестве σ_e и σ_{e*} максимальное касательное напряжение и ограничимся случаем, когда в каждой точке диска в любой момент времени вплоть до разрушения $\sigma_\varphi > \sigma_r > \sigma_z = 0$. Тогда $\sigma_e = \sigma_{e*} = \sigma_\varphi / 2$ и система (5.51), (5.52) принимает вид:

$$\eta_\varphi = \bar{B}_A \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_z = -\bar{B}_A \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \bar{B}_A = B_A / 2^{n+1}, \quad (5.55)$$

$$\mu^m d\mu = -\bar{B}_2 \sigma_\varphi^g, \quad \mu(r, 0) = 1, \quad \mu(r^*, t_*) = 0, \quad \bar{B}_\omega = B_\omega / 2^g. \quad (5.56)$$

Так как $\eta_r = 0$, то $dv_r/dr = 0$, отсюда следует, что $v_r(r, t)$ является функцией только времени, т.е. $v_r = C(t)$. Тогда

$$\eta_\varphi = C(t)/r, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_z = -C(t)/r. \quad (5.57)$$

Учитывая (5.54), (5.55) и (5.57), для окружного напряжения находим

$$\sigma_\varphi(r, t) = \frac{P}{J_1} \cdot \frac{[\mu(r, t)]^{m_1/n}}{X(t)} \cdot r^{-1/n}, \quad (5.58)$$

где обозначено

$$J_1 = \int_{a_0}^{b_0} r^{-(k+1/n)} dr, \quad \left[\frac{C(t)}{\bar{B}_A} \right]^{1/n} = \frac{P}{J_1} \cdot [X(t)]^{-1}. \quad (5.59)$$

Подстановка (5.58) в уравнение для параметра поврежденности (5.56) и в (5.54) приводит к системе

$$\int_1^\mu [\mu(r, t)]^{(mn-m_1g)/n} d\mu = -[(m+1)t^0(r)]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-g} d\tau, \quad (5.60)$$

$$\int_{a_0}^{b_0} [\mu(r, t)]^{m_1/n} r^{-(k+1/n)} dr = J_1 X(t), \quad (5.61)$$

$$t^0(r) = \left[(m+1) \bar{B}_\omega (P/J_1)^g r^{-g/n} \right]^{-1}. \quad (5.62)$$

Таким образом, задача о расчете напряженно-деформируемого состояния диска и времени начала его разрушения свелась к решению системы уравнений (5.60), (5.61). После интегрирования (5.60), имеем

$$\mu^{m_1/n} = \left[1 - \frac{\beta_2}{t^0(r)} \int_0^t X^{-g} d\tau \right]^{\beta_1}, \quad (5.63)$$

$$\text{где } \beta_1 = \frac{m_1}{n + mn - m_1g}, \quad \beta_2 = \frac{n + mn - m_1g}{n(m+1)}.$$

После подстановки (5.63) в (5.61) для определения $X(t)$ получается уравнение

$$\int_{a_0}^{b_0} \left[1 - \frac{\beta_2}{t^0(r)} \int_0^t X^{-g} d\tau \right]^{\beta_1} r^{-(k+1/n)} dr = J_1 X(t). \quad (5.64)$$

Начальные условия $X(0) = 1$.

В случае, когда $\beta_1 = 1$, решение системы (5.63), (5.64) можно записать в аналитическом виде

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+1)}, \quad \bar{t}^0 = J_1 / \int_{a_0}^{b_0} (r^{-(k+1/n)} / t^0(r)) dr,$$

$$[\mu(r, t)]^{m_1/n} = \left\{ 1 - (\bar{t}^0/t^0) \left[1 - (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+1)} \right] \right\}, \quad t_* = \bar{t}^0 [1 - (1 - t_*^0/\bar{t}^0)^{g+1}]. \quad (5.65)$$

Здесь $t_*^0 = t^0(r^*)$ время начала разрушения определенное согласно (5.62).

Если $\beta_1 \neq 1$, то решение уравнения (5.64) можно получить численно.

После замены $Y(t) = \int_0^t X^{-g} d\tau$ уравнение (5.64) перепишется в виде

$$\int_{a_0}^{b_0} \left[1 - \frac{\beta_2}{t^0(r)} Y(t) \right]^{\beta_1} r^{-(k+1/n)} dr = J_1 \left(\frac{dY(t)}{dt} \right)^{-1/g}. \quad (5.66)$$

Для решения уравнения (5.66) с начальными условиями $Y(0) = 0$ можно применить любой из известных методов, предназначенных для решения дифференциальных уравнений, например, Рунге–Кутты–Мерсона. Решая (5.66), найдем $Y(t)$ и соответственно $X(t)$, а затем из (5.63) – $\mu(r, t)$. Далее вычисляются из (5.58) σ_φ , из (5.53) – σ_r , из (5.57), (5.59) – η_φ и η_r . Учитывая предположение $\sigma_\varphi > \sigma_r$, напряжение $\sigma_\varphi(r, 0) = P \cdot r^{-1/n} / J_1$, соответствующее решению в предположении установившейся ползучести материала, достигает максимального значения на внутренней стороне диска. Время начала разрушения диска определяется из условия $\mu(r^*, t_*) = 0$. Из (5.62), (5.63) следует, что разрушение начинается при $r^* = a_0$. В [155] рассмотрены условия, наложенные на константы материала, для того чтобы интеграл, стоящий в левой части равенства (5.60), имел смысл в случае $\mu = 0$.

Пусть $m_1 = 0$. Тогда согласно (5.63) $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, а система (5.50), (5.51) есть вариант кинетической теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова [120]. Из (5.64) получаем, что $X(t) = 1$, а из (5.53), (5.57)–(5.59) следует, что напряженно-деформированное состояние является стационарным. Из (5.63) находится функция повреждаемости

$$\mu(r, t) = \left[1 - (t/t_*^0) (a_0/r)^{g/n} \right]^{1/(m+1)}, \quad t_*^0 = \left[(m+1) \bar{B}_\omega (P/J_1)^{g+1} a_0^{-g/n} \right]^{-1}. \quad (5.67)$$

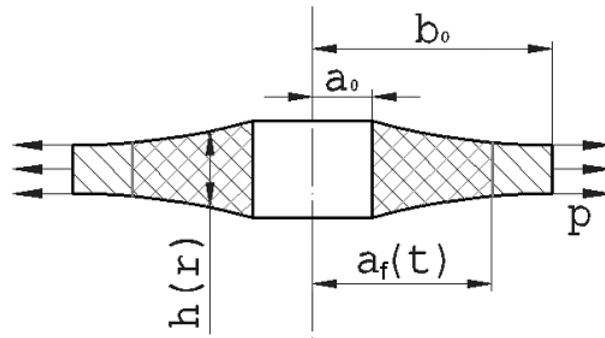


Рисунок 5.12 – Схема распространения фронта разрушения

Согласно (5.62) $t_*^0 = t^0(a_0)$ представляет собой время начала разрушения диска и $r^* = a_0$.

5.3.2 Расчет продолжительности стадии распространения фронта разрушения

В зависимости от типа решаемой задачи (например, при учете температурного поля) и используемого уравнения накопления повреждений, разрушение может начинаться на внешней поверхности конструкции или даже в некоторой внутренней точке. Применительно к рассматриваемой задаче в момент времени $t = t_*$ разрушается внутренняя поверхность диска. В дальнейшем фронт разрушения, граница которого представляет окружность радиусом $r = a_f(t)$, перемещается в сторону наружной поверхности диска $r = b_0$ (рисунок 5.12). Для $a_f(t)$ выполняется условие $a_0 < a_f(t) < b_0$, причем $a_f(t_*) = a_0$, $a_f(t_{*f}) = b_0$, t_{*f} – время разрушения диска. Индексом «f» помечаются соответствующие параметры и функции, относящиеся к фронту разрушения. В любой момент времени $\tau > t_*$ величины $J_1(\tau) = J_{1f}$ и $P(\tau) = P_f$ вычисляются согласно (5.54), (5.59), (5.62) с заменой a_0 на $a_f(\tau)$. Напряжения σ_r и σ_φ по-прежнему вычисляются по формулам (5.53) и (5.58). Выполняя те же преобразования, что и раньше, на момент времени t вместо (5.60), (5.61) получаем

$$\int_1^{\mu(t)} [\mu(r, t)]^{(mn-m_1g)/n} d\mu = - \int_0^t [(m+1)t^0(r, \tau)]^{-1} [X(\tau)]^{-g} d\tau, \quad (5.68)$$

$$\int_{a_f(t)}^{b_0} [\mu(r, t)]^{m_1/n} r^{-(k+1/n)} dr = J_{1f}(t) X(t), \quad (5.69)$$

$$t^0(r, t) = \left[(m+1) \bar{B}_\omega (P_f / J_{1f})^g r^{-g/n} \right]^{-1}.$$

После интегрирования (5.68) вместо (5.63) имеем:

$$\mu(r, t)^{m_1/n} = \left[1 - \beta_2 \int_0^t [t^0(r, \tau)]^{-1} X^{-g} d\tau \right]^{\beta_1}.$$

На линии фронта $r = a_f(t)$ выполняется $\mu(a_f(t), t) = 0$, т.е. с учетом (5.62)

$$1 - \beta_2 \int_0^t \left[(m+1) \bar{B}_\omega [P_f(\tau) / J_{1f}(\tau)]^g a_f^{-g/n} \right] \cdot [X(\tau)]^{-g} d\tau = 0. \quad (5.70)$$

Используя (5.70), для функции повреждения находим

$$\mu(r, t)^{m_1/n} = \left[1 - (r/a_f(t))^{-g/n} \right]^{\beta_1}, \text{ если } a_f(t) < r < b_0 \quad (5.71)$$

и (5.69) приводится к виду

$$\int_{a_f(t)}^{b_0} \left[1 - (r/a_f(t))^{-g/n} \right]^{\beta_1} r^{-(k+1/n)} dr = J_{1f}(t) X(t). \quad (5.72)$$

Для получения уравнение движения фронта разрушения необходимо продифференцировать выражение (5.70) по t , применяя правило дифференцирования интеграла по параметру. В данном случае в роли параметра здесь выступает t . После ряда операций получаем

$$a_f^{-1+g/n} da_f/dt = \frac{n\beta_2(m+1)\bar{B}_\omega}{g} \left(\frac{P_f(t)}{J_{1f}(t)X(t)} \right)^g. \quad (5.73)$$

Дифференциальное уравнение (5.73), учитывая (5.72), можно привести к виду

$$a_f^{-1+\frac{g}{n}}[P_f(a_f)]^{-g} \left(\int_{a_f(t)}^{b_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a_f(t)} \right)^{-\frac{g}{n}} \right]^{\beta_1} r^{-\left(k+\frac{1}{n}\right)} dr \right)^g da_f = \left(\frac{n\beta_2(m+1)\bar{B}_\omega}{g} \right) dt, \quad (5.74)$$

где $P_f(a_f) = pb_0^{1-k} + \frac{\Omega^2}{3-k}(b_0^{3-k} - a_f^{3-k})$.

Проинтегрировав (5.74), получаем уравнение для определения $a_f(t)$ и продолжительности распространения фронта разрушения $\Delta t_* = t_{*f} - t_*$:

$$\int_{a_0}^{a_f(t)} a_f^{-1+\frac{g}{n}}[P_f(a_f)]^{-g} \left(\int_{a_f(t)}^{b_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a_f(t)} \right)^{-\frac{g}{n}} \right]^{\beta_1} r^{-\left(k+\frac{1}{n}\right)} dr \right)^g da_f = \left(\frac{n\beta_2(m+1)\bar{B}_\omega}{g} \right) t,$$

$$\Delta t_* = \left(\frac{g}{n\beta_2(m+1)\bar{B}_\omega} \right) \int_{a_0}^{b_0} a_f^{-1+\frac{g}{n}}[P_f(a_f)]^{-g} \left(\int_{a_f(t)}^{b_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a_f(t)} \right)^{-\frac{g}{n}} \right]^{\beta_1} r^{-\left(k+\frac{1}{n}\right)} dr \right)^g da_f. \quad (5.75)$$

При $m_1 = 0$ для функции повреждения и продолжительности распространения фронта разрушения следует

$$\mu(r, t) = \left[1 - \left(r/a_f(t) \right)^{-g/n} \right]^{1/(1+m)}, \text{ если } a_f(t) < r < b_0,$$

$$\Delta t_* = \frac{g}{n\bar{B}_\omega(m+1)} \int_{a_0}^{b_0} a_f^{-1+g/n}[P_f(a_f)]^{-g} \left(n \frac{b_0^{1-k-1/n} - a_f^{1-k-1/n}}{n - nk - 1} \right)^g da_f. \quad (5.76)$$

5.3.3 Влияние выбора формы диска и моделей теории ползучести на продолжительность стадий разрушения

Исследуем влияние выбора варианта кинетической теории ползучести и геометрических размеров диска на продолжительность первой и второй стадий. Для вычислений используются следующие константы материала:

$B_A = 3,5172 \cdot 10^{-17}$ МПа⁻ⁿ/ч, $n = 6$, $m = 14$, $g = 5,75$, $B_\omega = 2,7563 \cdot 10^{-15}$ МПа^{-g}/ч [14, 155].

На рисунке 5.13 при $m_1 = 10$ и на рисунке 5.14 при $m_1 = 0$ приведены результаты расчета по формулам (5.53), (5.58), (5.63) и (5.72) функции повреждения μ и напряжений σ_φ , σ_r в сечении $a_0 \leq r \leq b_0$ на некоторые моменты времени. Размеры диска: $a_0 = 0,025$ м, $b_0 = 0,1$ м, $k = 0,5$ ($h(a_0)/h(b_0) = 2$). На наружном контуре диск нагружен растягивающим усилием $p = 20$ МПа, для вращения принято $\Omega = 70$ МПа^{1/2}/м.

На рисунке 5.13 линии 1-4 соответствуют стадии скрытого разрушения при $t = 0$; $0,5 \cdot t_*$; $0,85 \cdot t_*$; t_* , где $t_* = 3,095 \cdot 10^4$ ч. Линии 5-7 на рисунке 5.13 — достижение линией фронта значений $a_f(t) = 0,04$; $0,06$; $0,08$ м, что соответствует моментам времени $t = t_* + 0,907 \cdot \Delta t_*$; $t_* + 0,997 \cdot \Delta t_*$; $t_* + 0,9999 \cdot \Delta t_*$, где $\Delta t_* = 2,814 \cdot 10^3$ ч.

Аналогично на рисунке 5.14 (вариант теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова, $m_1 = 0$) линии 1-4 (для напряжений совпадают) соответствуют $t = 0$; $0,5 \cdot t_*$; $0,85 \cdot t_*$; t_* , где $t_* = 1,901 \cdot 10^4$ ч. Линии 5-7 на рисунке 5.14 — достижение линией фронта значений $a_f(t) = 0,04$; $0,06$; $0,08$ м, при $t = t_* + 0,833 \cdot \Delta t_*$; $t_* + 0,989 \cdot \Delta t_*$; $t_* + 0,9998 \cdot \Delta t_*$ соответственно, $\Delta t_* = 6,09 \cdot 10^3$ ч. В этом случае, перераспределение напряжений σ_φ , σ_r вплоть до начала разрушения отсутствует, т.е. состояние стационарно, что согласуется с выводами, сделанными в [120, С. 170], при этом вид функции $\mu(r, t)$ на рис 5.13, а подобен виду этой функции на рисунке 5.14, а.

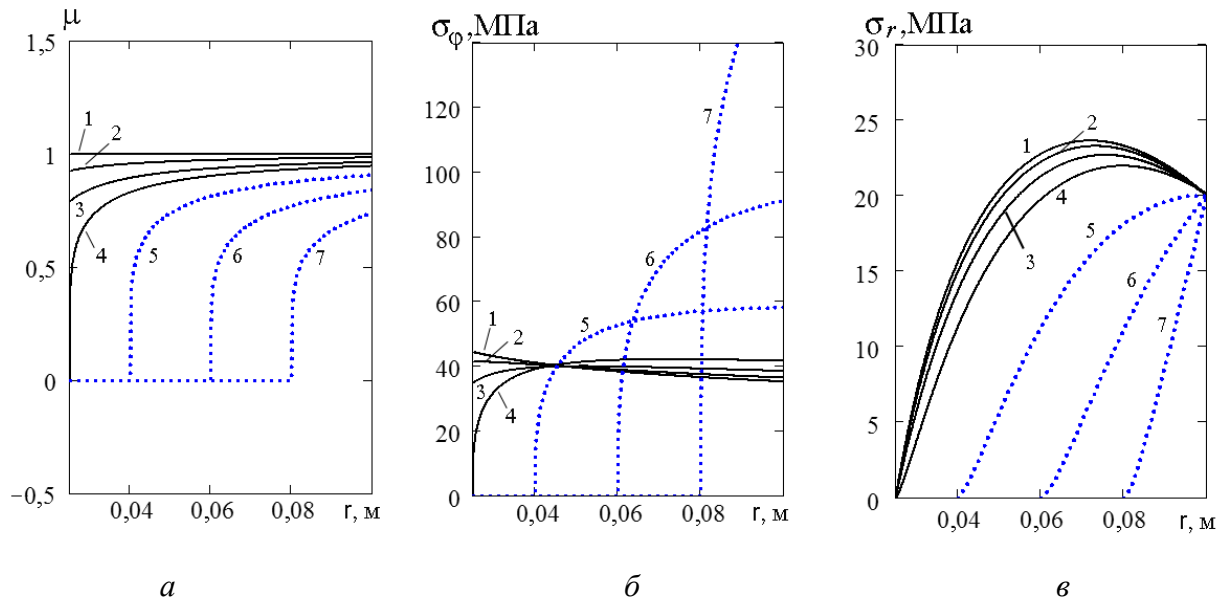


Рисунок 5.13 – Зависимости μ – (а), σ_ϕ – (б) и σ_r – (в) при $m_1 = 10$;

линии 1-4 соответствуют моментам времени $t = 0; 0,5 \cdot t_*; 0,85 \cdot t_*; t_*$;

линии 5-7 — $t = t_* + 0,907 \cdot \Delta t_*; t_* + 0,997 \cdot \Delta t_*; t_* + 0,9999 \cdot \Delta t_*$

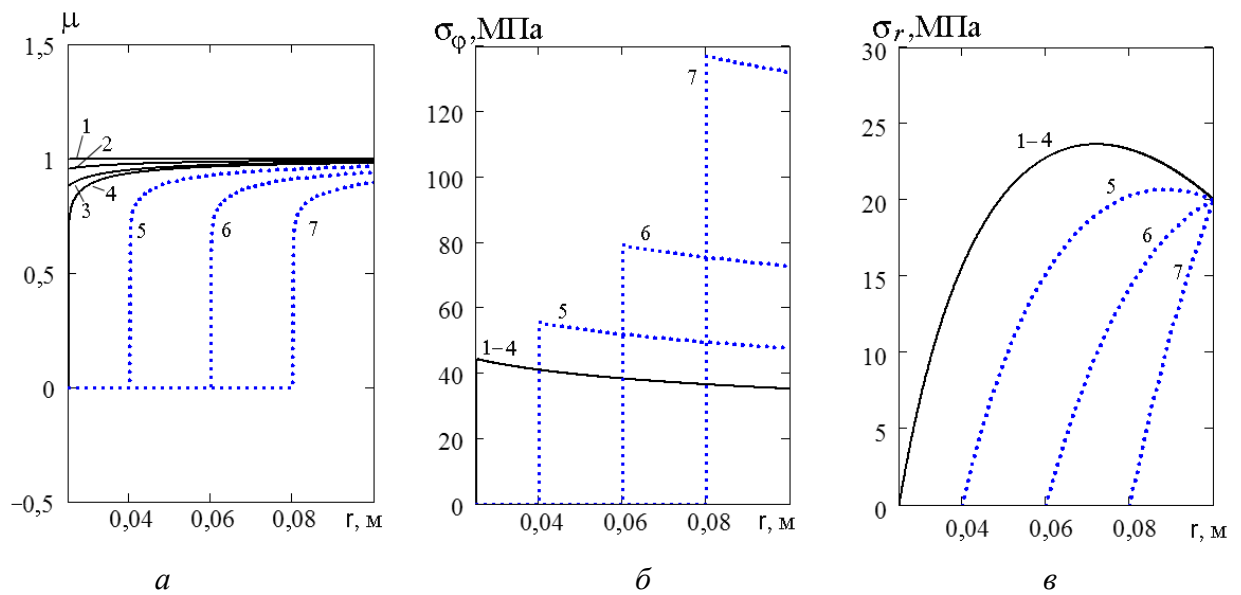


Рисунок 5.14 – Зависимости μ – (а), σ_ϕ – (б) и σ_r – (в) при $m_1 = 0$. Линии 1-4

совпадают для напряжений и соответствуют моментам времени $t = 0; 0,5 \cdot t_*; 0,85 \cdot t_*; t_*$.

Линии 5-7 — $t = t_* + 0,833 \cdot \Delta t_*; t_* + 0,989 \cdot \Delta t_*; t_* + 0,9998 \cdot \Delta t_*$

В таблицах 5.1-5.4 представлены результаты расчетов продолжительности первой стадии t_*^i , общее время двух стадий $t_{*f}^i = t_*^i + \Delta t_*^i$, а также отношение

$\Delta t_*^i / t_*^i$ в зависимости от a_0, k, Ω и p ($b_0 = 0,1\text{м}$). Символ « i » равный 1 означает, что величины относятся к расчету в предположении кинетической теории Ю.Н. Работнова ($m_1 = 10$); $i = 2$ – расчет с использованием теории Л.М. Качанова ($m_1 = 0$).

Анализируя приведенные в таблице 5.1 результаты расчетов, полученные для двух дисков с плоской ($b_0/a_0 = 4, k = 0$) и с гиперболической формой поверхности ($b_0/a_0 = 2, k = 0,5$), видим, что с увеличением скорости вращения продолжительность стадий меняется на порядок, при этом $\Delta t_*^i / t_*^i$ почти не изменяется. Для диска с гиперболической формой поверхности ($b_0/a_0 = 2, k = 0,5$) расчет с использованием теории Ю.Н. Работнова показал, что вторая стадия составляет всего порядка 2% продолжительности первой стадии, т.е. фактически отсутствует.

В таблице 5.2 приведены результаты расчета в зависимости от формы поверхности диска, т.е. в зависимости от константы k когда $b_0/a_0 = 2; 4$. При $b_0/a_0 = 4$ и $k = 0; 0,5; 1; 1,5$ отношение $h(a_0)/h(b_0) = 1; 2; 4; 8$ соответственно, аналогично при $b_0/a_0 = 2, k = 0; 0,5; 1,5$ отношение $h(a_0)/h(b_0) = 1; 1,42; 2,83$. В обоих случаях можно сделать вывод, что с увеличением k время t_*^i увеличивается на порядок, при этом $\Delta t_*^i / t_*^i$ уменьшается. Следует отметить, что для диска $b_0/a_0 = 4$ из таблицы 5.2 при $k \approx 1,5$ и более начинает нарушаться условие $\sigma_\varphi > \sigma_r$ ($a_0 < r < b_0$) при $t = 0$, т.е. в предположении установившейся ползучести материала напряжение σ_r вблизи внешнего обода диска начинает превосходить окружное (тангенциальное) напряжение σ_φ . С увеличением p и уменьшением Ω эта разница растет. В этом случае более интенсивный процесс накопления повреждений и соответственно разрушения может начаться с внешней стороны диска и потребуются анализ с учетом иного характера напряженно-деформированного состояния.

Таблица 5.1 – Продолжительность стадий в зависимости от угловой скорости вращения, $p = 20$ МПа

N_2	b_0/a_0	k	Ω , МПа ^{1/2} /м	t_* , 10 ³ ч	t_{*f}^1 , 10 ³ ч	$\Delta t_*^1/t_*^1$, %	t_*^2 , 10 ³ ч	t_{*f}^2 , 10 ³ ч	$\Delta t_*^2/t_*^2$, %	t_{*f}^2/t_{*f}^1 , %
1	4	0	0	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
2	4	0	30	120,77	135,42	12,1	71,05	98,97	39,3	73
3	4	0	70	8,97	10,10	12,7	5,28	7,49	42,0	74
4	2	0,5	0	79,32	80,57	1,57	59,59	66,61	11,8	83
5	2	0,5	30	35,84	36,43	1,64	26,92	30,27	12,4	83
6	2	0,5	70	2,64	2,69	1,84	1,99	2,27	14,5	84

Таблица 5.2 – Продолжительность стадий в зависимости от формы поверхности диска, $p = 20$ МПа

N_2	b_0/a_0	k	Ω , МПа ^{1/2} /м	t_* , 10 ³ ч	t_{*f}^1 , 10 ³ ч	$\Delta t_*^1/t_*^1$, %	t_*^2 , 10 ³ ч	t_{*f}^2 , 10 ³ ч	$\Delta t_*^2/t_*^2$, %	t_{*f}^2/t_{*f}^1 , %
1	4	1,5	70	499,82	507,64	1,6	336,02	399,45	18,9	79
2	4	1	70	119,40	126,96	6,3	76,72	95,44	24,4	75
3	4	0,5	70	30,95	33,76	9,1	19,01	25,1	32,1	74
4	4	0	70	8,97	10,10	12,7	5,28	7,49	42,0	74
5	2	1,5	0	586,39	592,48	1,04	454,23	494,92	9,0	84
6	2	0,5	0	79,32	80,57	1,57	59,59	66,61	11,8	83
7	2	0	0	31,80	32,40	1,9	23,52	26,70	13,5	82

Необходимое условие выполнения неравенства $\sigma_\phi > \sigma_r$ для плоского растягиваемого диска ($\Omega = 0, k = 0$) приведено в [120, стр.170]: $b_0/a_0 < n^{n/(n-1)}$. В нашем случае $n = 6$ и при $\Omega = 0, k = 0$ должно выполняться $b_0/a_0 < 8,58$. При $\Omega \neq 0, k \neq 0$ условие для констант, при которых $\sigma_\phi > \sigma_r$, можно получить исходя из (5.53), (5.58):

$$\frac{n}{n-nk-1} \left(1 - \left(\frac{a_0}{r} \right)^{1-k-1/n} \right) + \frac{J_1}{P} \frac{\Omega^2}{3-k} (a_0^{3-k} r^{k-1} - r^2) r^{1/n} < 1 \quad \text{при} \quad a_0 \leq r \leq b_0.$$

Если $\Omega = 0, k \neq 0$, то должно выполняться $b_0/a_0 < (n/(nk+1))^{n/(n-nk-1)}$.

Из сравнения результатов расчета, приведенных в таблице 5.3 для плоского растягиваемого диска ($b_0/a_0 = 4, k = 0$) и вращающегося диска с гиперболической формой поверхности ($b_0/a_0 = 2, k = 0,5$) следует, что варьирование внутреннего радиуса существенно влияет на время начала разрушения t_*^i и на отношение $\Delta t_*^i/t_*^i$. Расчет по модели Л.М. Качанова показывает, что продолжительность второй стадии для плоского растягиваемого диска может быть сопоставима с продолжительностью первой скрытой стадии разрушения.

Таблица 5.3 – Продолжительность стадий в зависимости от радиуса внутреннего отверстия, $p = 20$ МПа

$N_{\text{д}}$	b_0/a_0	k	$\Omega,$ МПа ^{1/2} /м	$t_*^1,$ 10 ³ ч	$t_{*f}^1,$ 10 ³ ч	$\Delta t_*^1/t_*^1,$ %	$t_*^2,$ 10 ³ ч	$t_{*f}^2,$ 10 ³ ч	$\Delta t_*^2/t_*^2,$ %	$t_{*f}^2/t_{*f}^1,$ %
Плоский растягиваемый диск										
1	8,55	0	0	472,39	660,47	39,8	232,80	444,15	90,8	67
2	5	0	0	351,86	414,69	17,9	195,08	293,10	50,2	71
3	4	0	0	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
4	2	0	0	31,80	32,40	1,9	23,52	26,70	13,5	82
5	1,67	0	0	9,09	9,17	0,85	7,23	7,89	9,1	86
Вращающийся диск										
6	5	0,5	70	49,05	55,31	12,8	28,63	39,79	39,0	72
7	4	0,5	70	30,95	33,76	9,1	19,01	25,10	32,1	74
8	2	0,5	70	2,64	2,69	1,84	1,99	2,27	14,5	84

Таблица 5.4 – Продолжительность стадий в зависимости от растягивающего усилия p , $\Omega = 0$

N_2	b_0/a_0	k	p , МПа	t_* , 10^3 ч	t_{*f}^1 , 10^3 ч	$\Delta t_*^1/t_*^1$, %	t_*^2 , 10^3 ч	t_{*f}^2 , 10^3 ч	$\Delta t_*^2/t_*^2$, %	t_{*f}^2/t_{*f}^1 , %
1	4	0	20	266,60	298,45	11,9	156,85	217,03	38,4	73
2	4	0	30	25,90	28,99	11,9	15,24	21,09	38,4	73
3	4	0	40	4,95	5,55	11,9	2,91	4,03	38,4	73

В таблице 5.4 для плоского растягиваемого диска ($b_0/a_0 = 4$, $k = 0$, $\Omega = 0$) приведены результаты расчетов при варьировании усилия p , приложенного к внешнему ободу диска. Как видно из таблицы с увеличением p время t_*^i уменьшается на порядок, при этом отношение $\Delta t_*^i/t_*^i$ не меняется.

Анализ данных таблиц показывает, что во всех случаях $t_*^1 > t_*^2$, при этом $\Delta t_*^1/t_*^1 < \Delta t_*^2/t_*^2$. Общее время продолжительности двух стадий при расчете по теории Ю.Н. Работнова больше, чем при расчете по теории Л.М. Качанова, отношение t_{*f}^2/t_{*f}^1 составляет 65–85%. Расчет по модели Качанова дает заниженную оценку времени разрушения. Эта модель не учитывает перераспределение напряжений на стадии скрытого разрушения [120]. В пользу теории учитывающей перераспределение напряжений указывает характер распределения замеренных остаточных напряжений в охрупченном диске после эксперимента [169]. Однако, величины $\bar{t}^0$, t_*^0 определяемые согласно (5.65), (5.67) могут быть полезны при получении оценок времени t_* снизу и сверху [151; 154], не прибегая к большому объему вычислений.

На рисунке 5.15 для трех дисков № 1 таблицы 5.3 (штриховые линии 1 и 2), № 7 таблицы 5.3 (сплошные линии 3 и 4) и № 6 таблицы 5.1 (пунктирные линии 5 и 6) изображено движение линии фронта разрушения в зависимости от времени в относительных координатах « $\tau - \delta$ », где $\tau = t/\Delta t_*$, $\delta = (a - a_0)/(b_0 - a_0)$. Кривые 1, 3, 5, расположенные ниже,

соответствуют расчету с использованием варианта теории ползучести в формулировке Л.М. Качанова. Верхние кривые 2, 4, 6 – расчет в предположении теории Ю.Н. Работнова. Основное время второй стадии порядка 75–85% по модели Л.М. Качанова и 85–90% по модели Ю.Н. Работнова приходится всего на 20% рабочей части радиуса диска ($b_0 - a_0$).

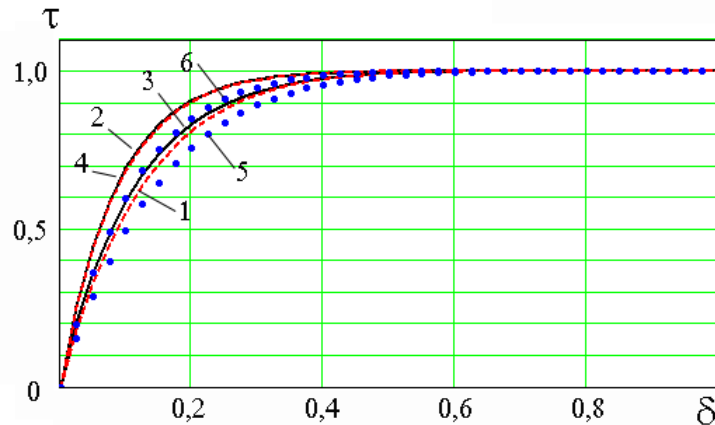


Рисунок 5.15 – Движения линии фронта разрушения в зависимости от времени в относительных координатах « $\tau - \delta$ »

На основе полученных результатов можно сделать выводы:

- Отношение продолжительности второй стадии распространения фронта разрушения к продолжительности первой стадии скрытого разрушения, может составлять от десятых процента до нескольких десятков процентов.
- При уменьшении размера радиуса внутреннего отверстия диска продолжительность второй стадии может быть сопоставима с продолжительностью первой стадии, при этом общее время разрушения увеличивается на порядок.
- Увеличение степени гиперболичности формы поверхности уменьшает отношение продолжительности второй стадии к продолжительности первой стадии.
- Изменение нагрузки слабо влияет на отношение продолжительности второй стадии к продолжительности первой стадии, при этом сама длительность стадий может увеличиваться на порядок.
- Во всех рассмотренных случаях получено, что продолжительность первой скрытой стадии разрушения по модели Ю.Н. Работнова больше, чем по

модели Л.М. Качанова при этом отношение длительности второй стадии к длительности первой стадии по модели Ю.Н. Работнова меньше, чем по модели Л.М. Качанова. Суммарное время двух стадий при расчете по модели Ю.Н. Работнова больше, чем при расчете по модели Л.М. Качанова.

– Анализ движения фронта разрушения показал, что основное время второй стадии (порядка 75–85% по модели Л.М. Качанова и 85–90% по модели Ю.Н. Работнова) приходится всего на 20% рабочей части радиуса диска.

5.4 Апробация метода расчета длительности до разрушения на примере растягиваемой пластины с круговым отверстием

В работе Хейхерста [202] опубликованы результаты двух испытаний на двухосное растяжение в условиях постоянного нагружения пластин с круговым отверстием из алюминиевого сплава Al-Mg-Si при температуре $200 \pm 1^\circ\text{C}$. Испытуемые образцы имели крестообразную форму. Предполагается, что такая конструкция обеспечивает в центральной части образца участок с равномерным нагружением с размерам этого участка не менее чем 57×57 мм, диаметр центрального отверстия 9,5 мм. В расчетах полагаем, что $b_0 = 28,5$ мм и $a_0 = 4,75$ мм. Угловая скорость $\dot{\varpi} = 0$, толщина растягиваемой пластины (диска) постоянна и не зависит от радиуса, $k = 0$. В первом и втором испытании на внешнем контуре приложено давление $p = 48,3; 47,6$ МПа, экспериментальное время до полного разрушения соответственно $t_{*f}^{\text{exp}} = 410; 480$ ч.

Для растягиваемой пластины ограничимся случаем, когда в каждой точке диска в любой момент времени вплоть до разрушения $\sigma_\varphi > \sigma_r > \sigma_z = 0$. Примем, что в (5.51) $\sigma_e = \sigma_\varphi$ [120], для определения σ_{e*} в (5.52) воспользуемся вариантом критерия Хейхерста [250; 251], согласно которому $\sigma_{e*} = [\alpha_h \sigma_1 + (1 - \alpha_h) \tau_m]$, где σ_1 – максимальное главное напряжение и τ_m – максимальное касательное напряжение. В нашем случае имеем $\sigma_1 = \sigma_\varphi$, а

максимальное касательное напряжение есть $\tau_m = \sigma_\varphi / 2$, тогда $\sigma_{e^*} = (1 + \alpha_h) \sigma_\varphi / 2$. Соотношения (5.55) запишутся в виде

$$\eta_\varphi = \bar{B}_A \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_z = -\bar{B}_A \sigma_\varphi^n / \mu^{m_1}, \quad \bar{B}_A = B_A, \quad (5.77)$$

уравнение для параметра поврежденности будет отличаться от (5.56) только коэффициентом:

$$\mu^m d\mu = -\bar{B}_\omega \sigma_\varphi^g, \quad \mu(r, 0) = 1, \quad \mu(r^*, t_*) = 0, \quad \bar{B}_\omega = B_\omega (1 + \alpha_h)^g / 2^g. \quad (5.78)$$

Решение разрешающих уравнений для растягиваемой пластины сводится к системе (5.60), (5.61) с учетом (5.77), (5.78).

На рисунке 5.16 точками различной формы 1–6 изображены опубликованные в [202] экспериментальные данные по одноосному растяжению в условиях ползучести образцов из алюминиевого сплава Al-Mg-Si при температуре $200 \pm 1^\circ\text{C}$ и $\sigma = 35; 52; 55; 59; 62; 69$ МН/м² соответственно. Сплошные линии на этом рисунке – аппроксимационные кривые по уравнениям (5.10), (5.11). Для нахождения параметров уравнений ползучести и повреждаемости (5.77), (5.78) была использована методика «единой кривой». Получены следующие параметры материала: $B_A = 1,728 \cdot 10^{-20}$ МПа⁻ⁿ/ч, $n = 8,3$, $m = m_1 = 0,8$, $g = 8,76$, $\alpha = 0$, $B_\omega = 3,36 \cdot 10^{-19}$ МПа^{-g}/ч. Константы в (5.63) соответственно $\beta_1 = 0,101$ и $\beta_2 = 0,531$.

Коэффициент α_h определялся методом последовательных приближений из условия достижения суммарной продолжительности двух стадий разрушения, найденных из решения (5.60), (5.61) и (5.75), значения равного t_{*f}^{exp} . Для испытаний 1 и 2 ($t_{*f}^{\text{exp}} = 410; 480$ ч) он составил $\alpha_h = 0,978$ и $0,971$ соответственно. В таблице 5.5 представлены результаты расчетов при усредненном значении $\alpha_h = 0,9745$: длительность первой и второй стадии t_* , Δt_* , отношение $\Delta t_* / t_*$, полное расчетное время до разрушения t_{*f} ,

экспериментальное время t_{*f}^{exp} и отношение $t_{*f}/t_{*f}^{\text{exp}}$. Вычисления при $\alpha_h = 0,9745$ показали, что расчетное значение t_{*f} отличается от экспериментального значения t_{*f}^{exp} на 1,5 %. Получено удовлетворительное соответствие результатов вычислений и экспериментальных данных.

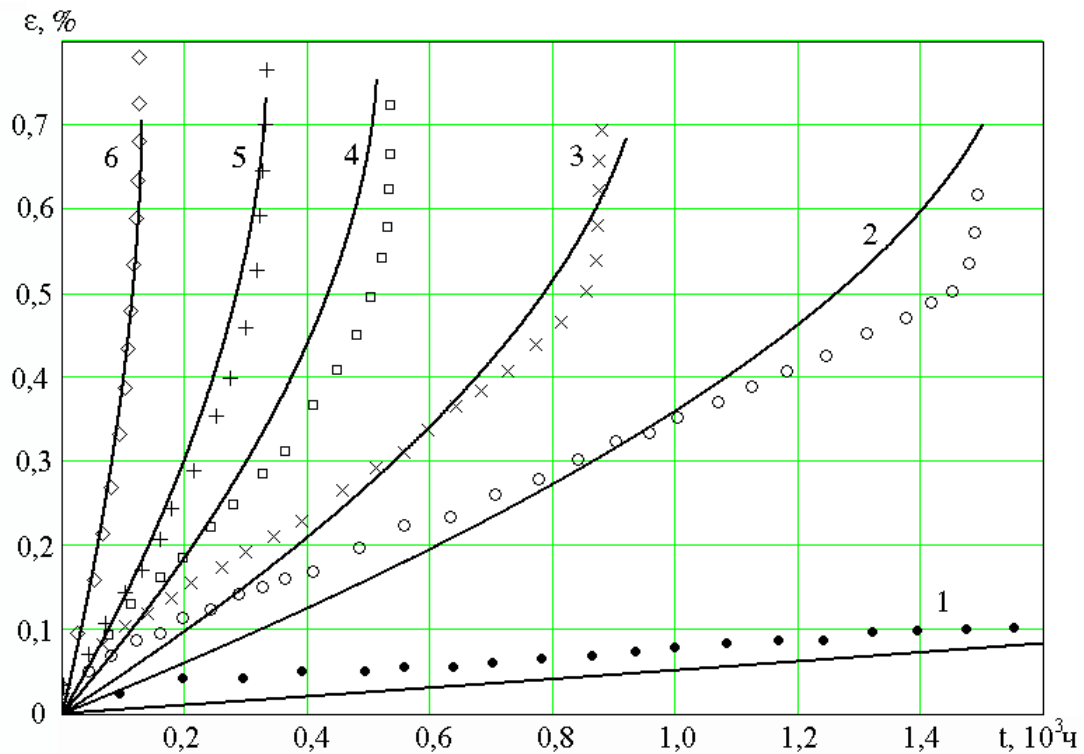


Рисунок 5.16 – Точки 1–6 экспериментальные данные по одноосному растяжению в условиях ползучести и аппроксимационные кривые для образцов из алюминиевого сплава при температуре $200 \pm 1^\circ\text{C}$ и $\sigma = 35, 52, 55, 59, 62, 69 \text{ МН/м}^2$

Таблица 5.5 – Продолжительность стадий и время до разрушения в зависимости от растягивающего усилия p для модели Ю.Н. Работнова

№	p , МПа	t_* , ч	Δt_* , ч	$\Delta t_* / t_*$, %	t_{*f} , ч	t_{*f}^{exp} , ч	$t_{*f}/t_{*f}^{\text{exp}}$
1	48,3	313,3	102,9	32,83	416,2	410	1,015
2	47,6	356,1	116,9	32,83	473,0	480	0,985

Таблица 5.6 – Продолжительность стадий и время до разрушения в зависимости от растягивающего усилия p для модели Л.М. Качанова

N_2	p , МПа	t_* , ч	Δt_* , ч	$\Delta t_* / t_*$, %	t_{*f} , ч	t_{*f}^{exp} , ч	$t_{*f} / t_{*f}^{\text{exp}}$
1	48,3	277,6	138,5	49,9	416,1	410	1,015
2	47,6	315,4	157,4	49,9	472,9	480	0,985

Аналогично вычислены время продолжительности стадий разрушения из решения (5.67) и (5.76) для модели Л.М. Качанова. Для испытаний 1 и 2 ($t_{*f}^{\text{exp}} = 410; 480$ ч) получено $\alpha_h = 0,9054$ и $0,899$, усредненный параметр составил $\alpha_h = 0,902$. В таблице 5.6 представлены результаты расчетов.

Для рассматриваемого сплава и геометрических размеров растягиваемой пластины получено $\Delta t_* / t_* = 32,8$ % (таблица 5.5) по модели Ю.Н. Работнова и $49,9$ % (таблица 5.6) по модели Л.М. Качанова, т.е. продолжительность второй стадии сопоставима с продолжительностью первой стадии скрытого разрушения. Модель Качанова занижает продолжительность первой стадии скрытого разрушения.

Таким образом, предложенный метод расчета позволяет предсказывать окончание стадии скрытого разрушения и переход к стадии распространения фронта разрушения. Эксплуатация конструкций на второй стадии, когда разрушение может носить стремительный характер, требует более жесткого контроля.

5.5 Выводы по пятой главе

1. В рамках кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова с учетом накопления повреждений исследовано напряженно-деформированное состояние кольцевых нагруженных осесимметрично пластин в любой момент

времени вплоть до начала разрушения. Временем начала разрушения считается момент, когда в какой-либо точке пластины параметр поврежденности достигает критического значения, равного единице, неповрежденному материалу отвечает нулевая величина этого параметра. Для расчета использовано два способа. В первом случае задача неустановившейся ползучести с учетом повреждаемости сводится к аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала пластины, в определяющих уравнениях используется критерий Треска–Сен-Венана. Чтобы найти истинное решение, необходимо известное решение при установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени. Для нахождения этих функций получена соответствующая система уравнений. В основе другого способа расчета лежит метод конечных элементов комплекса ANSYS, при этом в определяющих уравнениях входит критерий Мизеса. Для моделирования накопления повреждений в пакете активируется пользовательская подпрограмма на языке Fortran (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613159). Диаграммы длительной прочности, полученные двумя способами, показали, что применение критерия Треска–Сен-Венана дает нижнюю оценку времени начала разрушения конструкции.

Показано также, что метод прогнозирования длительности разрушения, опирающийся на решение в предположении установившейся ползучести материала, может быть применен к другим конструкциям с разными условиями нагружения и закрепления.

2. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения в условиях ползучести тонкого вращающегося и растягиваемого диска с гиперболической формой поверхности с учетом двухстадийности. На первой стадии деформирования происходит накопление повреждений и начало разрушения диска в области, где накопленные повреждения достигают критического значения, вторая стадия – распространение фронта разрушения и полное разрушение диска. Для

расчета использован метод, при котором решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Получено, что отношение продолжительности второй стадии распространения фронта разрушения к продолжительности первой стадии скрытого разрушения, может составлять от десятых процента до нескольких десятков процентов в зависимости от геометрических размеров конструкции. Сравнение двух подходов в формулировке Ю.Н. Работнова и в формулировке Л.М. Качанова, показало, что расчет по модели Л.М. Качанова дает заниженную оценку продолжительности первой стадии и заниженную оценку времени разрушения по сумме двух стадий. Продолжительность второй стадии по модели Л.М. Качанова больше, чем по модели Ю.Н. Работнова. Показано, что увеличение степени гиперболичности формы поверхности и увеличение размера радиуса внутреннего отверстия уменьшает отношение продолжительности второй стадии к продолжительности первой стадии.

Метод апробирован на примере растягиваемых плоских пластин с круговым отверстием, получено удовлетворительное соответствие результатов расчета с использованием смешанного критерия типа Хейхерста и экспериментальных данных.

Результаты исследований опубликованы в журналах ВАК и WEB of Science [8; 14; 16; 227], в трудах конференций [22; 24 – 27; 44; 152].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты научно-исследовательской работы позволят активнее внедрять в производство технологические процессы обработки материалов давлением, основанные на медленных температурно-скоростных режимах деформирования в условиях ползучести и сверхпластичности с целью уменьшения повреждаемости и сбережения ресурса изделий на стадии изготовления. Для описания процессов деформирования материалов в медленных режимах обоснована возможность использования кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией. Использование нормированной деформации дает возможность связать параметры функциональных зависимостей ползучести и повреждаемости с измеряемой в эксперименте величиной деформации при разрушении. Величина нормированной деформации перехода в третью — разупрочняющуюся стадию ползучести может служить количественным показателем для оценки живучести элементов конструкций, т.е. способности сохранять эксплуатационные свойства на стадиях накопления повреждений и макроскопического разрушения.

Показано, что при выборе режима формообразования, обеспечивающего минимальный уровень накопления повреждений необходимо учитывать вид зависимости деформации при разрушении от напряжения на экспериментальных диаграммах ползучести. Необходимо отметить, что в стандартной версии конечно-элементного пакета ANSYS отсутствует возможность учета третьей стадии ползучести, поэтому для моделирования процессов деформирования с учетом повреждаемости была разработана пользовательская подпрограмма на языке Fortran. Для использования этой подпрограммы выполняется процедура ее компиляции в основной исполняемый файл.

В условиях повышенных температур усложненные свойства материалов проявляются значительно интенсивнее и требуют применения в расчетах соответствующих моделей. Развитые новые модели для изотропных и ортотропных материалов, обладающих разными свойствами на растяжение и сжатие в условиях ползучести, позволяют описать более сложное поведение материала и расширяют класс используемых конструкционных сплавов при решении технологических задач обработки материалов давлением. Выводы о влиянии этих свойств должны учитываться при выборе и корректировке нагрузки при формообразовании. Проверка моделей была проведена на типовых элементах конструкций в условиях сложного напряженного состояния (при кручении стержней, изгибе пластин), были решены соответствующие задачи. Полученные новые аналитические решения и оценки могут применяться при планировании экспериментов на ползучесть, при получении параметров функциональных зависимостей ползучести и повреждаемости, при верификации численных методов расчета.

Применение новых облегченных высокопрочных материалов в авиа- и машиностроении диктует также необходимость проведения исследований напряженно-деформированного состояния изделий в условиях длительной эксплуатации. Предложенный на основе кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности метод расчета длительности до разрушения с учетом стадии распространения фронта разрушения может использоваться для прогнозирования дополнительного срока эксплуатации конструкции.

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы на предприятиях аэрокосмической области, судостроения, общего машиностроения (АО «НовосибНИАТ», филиалы ПАО "Компания "Сухой" Новосибирский авиационный завод им. В.П. Чкалова и Комсомольский-на-Амуре авиационный завод им. Ю.А. Гагарина, научно-технический центр «НТЦ-Ползучесть»).

Основные результаты диссертационной работы:

1. Экспериментально и теоретически обоснована возможность описания процессов деформирования упрочняющихся и разупрочняющихся материалов вплоть до разрушения с использованием кинетических уравнений ползучести со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией (отношение деформации в текущий момент времени к деформации на момент разрушения) для материалов с непостоянной величиной деформации при разрушении на диаграммах ползучести «деформация–время» при постоянном напряжении. Для нахождения параметров функциональных зависимостей для материалов с любой зависимостью деформации при разрушении от напряжения проверяется подобие исходных экспериментальных кривых ползучести в нормированных координатах «нормированная деформациях – нормированное время».

2. Модель для изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие при ползучести материала, основанная на «трансформированном» пространстве напряжений, обобщена на случай упрочняющегося материала, при этом данные ползучести одноосного деформирования описываются функциональными зависимостями с разными степенными показателями при растяжении и сжатии не только для установившейся стадии, но и для стадий упрочнения и разупрочнения.

— Модель апробирована на задаче кручения сплошных круглых образцов в предположении установившейся ползучести. Для описания поведения закручиваемого стержня из материала с разными свойствами на растяжение и сжатие развит подход характеристических параметров – малой области, в которой значения напряжений не меняются в течение всего процесса деформирования. Показано, что за счет разных свойств материала при растяжении и сжатии происходит удлинение образца при кручении. Выполнена оценка деформации растяжения вдоль оси стержня при кручении по двум моделям. Получено удовлетворительное соответствие между

результатами расчета и данными испытаний на кручение сплошных круглых стержней из титанового сплава, обладающего разными свойствами на растяжение и сжатие при температуре 700°C.

— Модель апробирована на задачах изгиба в седловидную поверхность пластин из алюминиевых сплавов со свойствами упрочнения и разупрочнения. Разработана методика расчета для решения задач чистого изгиба пластин из такого материала при плоском напряженном состоянии.

3. Развита модель в предположении установившейся ползучести на основе скалярного потенциала тензора напряжений для ортотропного материала, свойства которого при растяжении и сжатии различны и который в условиях одноосного деформирования описывается функциями с разными степенными показателями при растяжении и сжатии. Модель численно и экспериментально апробирована при решении ряда задач изгиба гладких и оребренных пластин, кручения круглых сплошных и трубчатых стержней из изотропного и трансверсально-изотропного материалов, с одинаковыми и разными свойствами при растяжении и сжатии.

— В предположении одинаковых свойств на растяжение и сжатие получена оценка влияния трансверсально-изотропного свойства более слабого сопротивления деформированию в направлении нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости плиты, на процессы изгиба пластин. Расчет показал уменьшение прогиба при деформировании в знакопеременную седлообразную поверхность и увеличение прогиба при деформировании в поверхность цилиндрической формы и в поверхность двойной положительной кривизны, по сравнению с расчетом в предположении изотропных свойств материала. Для задачи кручения пластины из изотропного титанового сплава при $T=750^\circ\text{C}$ и трансверсально-изотропного алюминиевого сплава с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении толщины при $T=400^\circ\text{C}$ получено удовлетворительное соответствие экспериментальных данных и результатов расчета.

— Получено незначительное влияние свойства более слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости трансверсально-изотропной плиты и в направлении ее нормали, на процессы деформирования гладких пластин. Влияние этого свойства при деформировании ребренных пластин может быть существенным и зависит от высоты, толщины и ориентации ребер.

— Разработан программный конечно-элементный комплекс «CreePL» (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613572), предназначенный для решения прямых и обратных задач расчета остаточной и упреждающей геометрии оснастки гладких панелей одинарной и двойной кривизны из изотропного с разными свойствами на растяжение и сжатие материала при деформировании в медленных кинематических режимах ползучести, в том числе при термофиксации, с заданной продолжительностью процесса формообразования и с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок. Комплекс «CreePL» применен для решения задачи о чистом кручении пластины из алюминиевого сплава В95пч при температуре 180°C , ползучесть которого в условиях одноосного деформирования описывается функциями с разными степенными показателями при растяжении и сжатии. Получено удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных. Результаты исследования получили практическое применение при изготовлении технологической оснастки на ОАО «Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение им. Ю. А. Гагарина».

— Для скорости изменения угла закручивания круглых сплошных и кольцевых стержней, вырезанных из трансверсально-изотропного материала с одинаковыми и разными свойствами на растяжение и сжатие, получены новые аналитические решения, нижняя и верхняя оценки на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, согласующиеся с результатами численного моделирования в среде ANSYS.

— Оценка влияния свойства более слабого сопротивления деформированию в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформированию в плоскости трансверсально-изотропной плиты и в направлении ее нормали, на процессы кручения круглых сплошных и кольцевых стержней показала, что при кручении образцов, вырезанных в направлении нормали к плите, скорость угла закручивания больше, чем для стержней, вырезанных в продольном направлении плиты и на порядок больше, чем для стержней в предположении изотропных свойств материала. Показано, что у стержней, вырезанных в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты, возникает депланация поперечного сечения.

— Модель апробирована на задаче кручения цилиндрических круглых трубчатых стержней, вырезанных из трансверсально-изотропного алюминиевого сплава с разными свойствами на растяжение и сжатие. Как при растяжении, так и при сжатии этот сплав при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ обладает свойством более слабого сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом 45° к направлению нормали к плите, по сравнению с сопротивлением деформациям ползучести в плоскости плиты и в направлении ее нормали. Показано, что экспериментальные данные кручения круглых трубчатых стержней, вырезанных в направлении нормали к плите и в продольном направлении плиты, удовлетворительно согласуются с результатами расчета по развитой модели.

4. С целью нахождения рациональных режимов деформирования, обеспечивающих максимальное сохранения остаточного эксплуатационного ресурса на стадии изготовления конструкций, проведен анализ кинематических и статических режимов деформирования при растяжении стержней и режимов формообразования полусферических оболочек для ряда сплавов.

— При растяжении стержней на основе кинетических уравнений ползучести исследовано два режима деформирования: под действием

постоянных напряжений и при постоянных скоростях деформаций, соответствующих скоростям на установившейся стадии ползучести для тех же напряжений. Аналитически и численно показано, что для сплавов, у которых на исходных диаграммах ползучести «деформация- время» деформация при разрушении монотонно убывает с увеличением напряжения, наименьшее накопление повреждений происходит в кинематических режимах при постоянных скоростях деформаций. Для сплавов, у которых на исходных диаграммах ползучести «деформация- время» деформация при разрушении монотонно возрастает, к меньшему уровню накопления повреждений приводит статические режимы под действием постоянных напряжений. Для сплавов с немонотонной зависимостью деформации при разрушении, имеющей максимум или минимум на диаграммах ползучести, оба режима деформирования в смысле накопления повреждений будут практически эквивалентны для напряжений близких к значению, при котором этот минимум или максимум достигается.

— Рассмотрены разные кинематические и статические режимы формообразования из плоской заготовки полусферической оболочки за заданное время. Разработана учитывающая накопление повреждений подпрограмма на языке Fortran, которая встроена в пакет ANSYS (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020613159). Показано, что учет деформаций пластичности, возникающих в начале деформирования, практически не оказывает влияния на остаточную форму поверхности, и прогиб упругого восстановления после снятия нагрузки мал. Проиллюстрирована возможность оценки нагрузки по методике, основанной на решении уравнения равновесия безмоментной оболочки. Установлено, что вид зависимости деформации при разрушении от напряжения на исходных диаграммах ползучести «деформация – время» влияет на режим деформирования, обеспечивающий минимальный уровень накопления повреждений. Для сплавов, у которых деформация при разрушении монотонно уменьшается, минимальный уровень накопления повреждений

обеспечивают кинематические режимы с постоянной скоростью деформаций. Для сплавов, у которых деформация при разрушении монотонно возрастает, предпочтительными оказываются статические режимы с постоянной нагрузкой, при этом для исключения возникновения пластических деформаций на начальном этапе нагрузку следует увеличивать постепенно.

5. На основе кинетических уравнений ползучести и повреждаемости разработан численный метод для расчета напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения конструкций с учетом стадии распространения фронта разрушения, при этом решение задачи неустановившейся ползучести сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Метод апробирован при решении задач изгиба кольцевых пластин, вращающихся дисков и растягиваемых пластин с круговым отверстием.

— Для изгибаемых кольцевых пластин проведено сравнение результатов расчета полученных двумя способами: с использованием разработанного метода на основе критерия Треска–Сен-Венана и методом конечных элементов комплекса ANSYS с учетом повреждаемости, при этом в определяющих уравнениях входит критерий Мизеса. Диаграммы длительной прочности показали, что применение критерия Треска–Сен-Венана дает нижнюю оценку времени начала разрушения конструкции.

— Для вращающихся дисков с гиперболической формой поверхности получено, что отношение продолжительности второй стадии распространения фронта разрушения к продолжительности первой стадии скрытого разрушения, может составлять от десятых процента до нескольких десятков процентов в зависимости от геометрических размеров конструкции. Сравнение двух подходов в формулировке Ю.Н. Работнова и в формулировке Л.М. Качанова, показало, что расчет по модели Л.М. Качанова дает заниженную оценку времени разрушения по сумме двух стадий, при этом продолжительность второй стадии по модели Л.М. Качанова больше, чем по модели Ю.Н. Работнова.

— Метод расчета длительности до разрушения с учетом двухстадийности апробирован на примере растягиваемых пластин с круговым отверстием: сначала по диаграммам ползучести на одноосное растяжение стержней по методике «единой кривой» получены параметры кинетических уравнений ползучести и повреждаемости, а затем выполнен расчет длительности до разрушения растягиваемых пластин. В качестве критерия длительной прочности использован смешанный критерий типа Хейхерста. Получено удовлетворительное соответствие результатов расчета с экспериментальным данным на двухосное растяжение пластин с круговым отверстием.

Материалы диссертационного исследования опубликованы в 62 научных работах, из них 23 статьи в журналах, входящих в список ВАК, базы данных WEB of Science и Scopus (список работ включен в общий список литературы) [6 – 19; 60; 93; 95; 224 – 228; 256]; 39 публикаций в материалах и трудах конференций [21– 39; 41; 43– 47; 94; 96; 99; 102; 130; 131; 152; 163; 164; 179; 220 – 223]. Опубликовано два учебных пособия, в которых изложено применение метода конечных элементов для расчета конструкций на прочность в программной среде ANSYS [40, 42].

Получено два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ:

1. Свид. о регистр. программы для ЭВМ № 2020613159. Программа «CreepDmg» для моделирования формообразования оболочки в режиме ползучести с учетом повреждаемости в системе ANSYS/ Банщикова И.А. Зарегистр.: 11.03.2020.
2. Свид. о регистр. программы для ЭВМ № 2020613572. Программный комплекс «CreepPL» для расчета параметров формообразования и изменяемой геометрии оснастки панелей при медленных режимах деформирования / Банщикова И.А. Зарегистр.: 18.03.2020.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высш. шк. , 1990. – 400 с.
2. Аннин Б.Д. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100/ Б.Д. Аннин, А.И. Олейников, К.С. Бормотин // Прикладная механика и техническая физика.– 2010. – Т. 51, № 4. – Р. 579-589.
3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов./ Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: «Машиностроение», 1972.
4. Банщикова И.А. Об одном классе обратных задач формоизменения вязкоупругих пластин / И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика.– 1996.– Т. 37, № 6. – С. 122-131.
5. Банщикова И.А. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести / И.А. Банщикова, Б.В. Горев, И.В. Сухоруков // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 3. – С. 129-139.
6. Банщикова И.А. Двумерные задачи кручения и изгиба профилей в условиях ползучести / И.А. Банщикова, И.В. Сухоруков // Вычислительные технологии. – 2003.– Т.8. – С.104-110 / Регион. Вестн. Востока. – 2003. – Т. 8, № 3. – С. 104-110.
7. Банщикова И.А, Стесненное кручение стержней при ползучести / И.А. Банщикова, И.В. Сухоруков, Юань Бяо // Вычислительные технологии. – 2004. – Т.9. – С. 248-253 / Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика. – 2004. – № 3(42). – С. 248-253.
8. Банщикова И.А. Ползучесть осесимметрично нагруженных пластин с учетом накопления повреждений в их материале / И.А. Банщикова, А.Ф. Никитенко // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 5. – С. 156-168.
9. Банщикова И.А. О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе / И.А. Банщикова, Б.В. Горев, И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика

и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 156–159.

10. Банщикова И.А. Формообразование панелей из неоднородных материалов в режиме ползучести / И.А. Банщикова // Вычисл. Технологии. – 2008. – Т.13. – С.203-205 / Вестн. КазНУ. – 2008. – № 3(58). – С. 203-205.

11. Банщикова И. А. Расчет пластин двойной кривизны из анизотропных сплавов при ползучести / И.А. Банщикова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2011. – № 4, ч. 4. – С. 1385-1387.

12. Банщикова И.А. Расчет пластин из упрочняющегося материала, разнсопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести / И.А. Банщикова, А.Е. Муравьева, И.Ю. Цвелодуб // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2014. – №4(65). – С. 68-77.

13. Банщикова И.А. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении / И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб, Д.М. Петров // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, № 3. – С. 34-41.

14. Банщикова И.А. Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения кольцевых пластин в условиях ползучести / И.А. Банщикова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 359-368.

15. Банщикова И.А. Экспериментально-теоретический анализ деформирования трансверсально-изотропных пластин при ползучести / И.А. Банщикова, В.А. Блинов // Прикладная механика и техническая физика. – 2016.– Т. 57, № 3 (337). – С. 129-138.

16. Банщикова И.А. Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения вращающихся дисков при ползучести/ И.А. Банщикова // Вестник ПНИТУ. Механика. – 2018. – № 4. – С. 20-32.

17. Банщикова И.А. Кручение круглых стержней с учетом разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести / И.А. Банщикова, А.Ю. Ларичкин // Прикладная механика и

техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6 (352). – С.123-134.

18. Банщикова И.А. Выбор режимов формования и оценка эксплуатационного ресурса с использованием кинетических уравнений со скалярным параметром поврежденности / И.А. Банщикова // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – № 6. – С. 139-148.

19. Банщикова И.А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии / И.А. Банщикова // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – № 1. – С. 102-117.

20. Банщикова И.А. Обратная задача для вязкоупругой пластины/ И.А. Банщикова // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. – 1998. – Вып. 113. – С. 13-18.

21. Банщикова И.А. Обратные задачи изгиба и кручения профилей в условиях ползучести / И.А. Банщикова, И.Ж. Масанов // Всероссийская школа-семинар по современным проблемам механики деформируемого твердого тела; Новосибирск, 13-17 окт., 2003. – М.: Изд-во НГТУ, 2003. – С. 16-20.

22. Банщикова И.А. Вязкое разрушение стержней в условиях ползучести / И.А. Банщикова // Тез. науч. конф. «Актуальные проблемы механики сплошных сред», 1-2 ноября, 2005 г. Пермь. – Екатеринбург. УрО РАН, 2005. – С. 17-19.

23. Банщикова И.А. Краевой эффект Сен-Венана в условиях ползучести / И.А. Банщикова // Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. тр. 8-ой Всероссийской научной конференции. 1-3 декабря 2006г., Новокузнецк, Т.1. / НФИ КемГУ; Под общ.ред. В.О.Каледина. – Новокузнецк, 2006. – С. 18-24.

24. Банщикова И.А. Расчет длительности до разрушения элементов конструкций в условиях ползучести / И.А. Банщикова / IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотация докладов. Т.III (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006). – Нижний Новгород: Изд-во

Нижегородского госуниверситета им. Н.И.Лобачевского, 2006. – С. 28.

25. Банщикова И.А. Расчет напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения элементов конструкций при ползучести / И.А. Банщикова, А.Ф. Никитенко // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Вып. 125. / Ин-т гидродинамики; Под ред. чл.-корр. РАН Б.Д. Аннина, д-ра техн. наук М.А. Легана.– Новосибирск, 2007. – С. 14-19.

26. Банщикова И.А. Моделирование разрушения при ползучести / И.А. Банщикова / Безопасность и живучесть технических систем: Труды II Всероссийской конференции. / Научн. ред. В.В.Москвичев. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007. – С. 115-118.

27. Банщикова И.А. Расчет длительности до разрушения вращающихся дисков в условиях ползучести / И.А. Банщикова, А.Ф. Никитенко // Тр. 20-я Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности; 2 по 6 июля 2007 г., г. Кемерово.

28. Банщикова И.А. Об особенностях формообразования и расчета пластин в условиях ползучести / И.А. Банщикова // Тезисы Всерос.конф. «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», посвященной 50-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН , 17–22 сентября 2007 г. – Новосибирск, 2007. – С. 33-34.

29. Банщикова И.А. Деформирование листовых деталей из анизотропных сплавов при ползучести / И.А. Банщикова // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 48-51.

30. Банщикова И.А. Деформирование листовых деталей двойной кривизны в условиях анизотропной ползучести / И.А. Банщикова // Всерос. конф. «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», 23-28 апр. 2009 г. Тезисы. – Новосибирск, 2009. – С. 26-27.

31. Банщикова И.А. Моделирование ползучести с учетом особых свойств

поведения металлических сплавов применительно к формообразованию панелей / И.А. Банщикова // Сб.тр. 21-я Всеросс. конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Кемерово, 30 июня-2 июля 2009 г.– Новосибирск. Параллель, 2009. – С. 33-38.

32. Банщикова И.А. Деформирование металлических пластин при анизотропной ползучести / И.А. Банщикова // Краевые задачи и математическое моделирование: тематич. Сб. науч. Ст.: в 3 т. Т.1./ НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2010. – С. 32-36.

33. Банщикова И.А. О расчете трансверсально-изотропных пластин при ползучести / И.А. Банщикова / Тр. восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 26-29.

34. Банщикова И. А. Кручение пластин с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в поперечном касательном направлении / И.А. Банщикова // «Современные проблемы механики сплошной среды»: Тр. Междунар. науч. конф. / Под ред. Б.А. Рычкова, М.К. Чыныбаева; НАН КР.– Бишкек: Изд-во «Илим», 2012. – С. 105-109.

35. Банщикова И.А. О формообразовании и расчете пластин двойной кривизны при анизотропной ползучести / И.А. Банщикова // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. под ред. акад. РАН Аннина Б.Д., д.т.н. Легана М.А., к.ф.-м.н. Любашевской И.В. / Ин-т гидродинамики СО РАН. – Новосибирск, 2012. – Вып. 127: Механика структурно-неоднородных сред и конструкций. – С. 15-18.

36. Банщикова И.А. Деформирование транстропных пластин с пониженной сопротивляемостью ползучести в поперечно-сдвиговом направлении / И.А. Банщикова // V-я Межд. конф. «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Москва, 26-29 ноября 2013 г. / Сборник материалов. – М: ИМЕТ РАН, 2013. – С. 38-40.

37. Банщикова И. А. Кручение пластин с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении толщины / И.А. Банщикова, Б.В. Горев // Труды конференции «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова»; Москва, 24-26 февр. 2014 г. – М.: Ин-т машиноведения, 2014. – С. 23-28.
38. Банщикова И.А. Экспериментально-теоретический анализ деформирования трансформных при ползучести пластин / И.А. Банщикова // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15-17 апреля, 2014 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. – С. 40-48.
39. Банщикова И.А. Изгиб пластин из упрочняющегося материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести / И.А. Банщикова, А.Е. Муравьева // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15-17 апреля, 2014 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). – 2014. – С. 34-40.
40. Банщикова И.А. Комплекс ANSYS: нелинейный прочностной анализ конструкций: учебное пособие / И.А. Банщикова, Г.И. Расторгуев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – 94 с.
41. Банщикова И.А. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении / И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб, Д.М. Петров // XI Всероссийский Съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов; Казань, 20-24 августа 2015 г.) / Сост. Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров, под ред. Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачева. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – С. 329-331.
42. Банщикова И.А. Комплекс ANSYS: анализ устойчивости конструкций: учебное пособие / И.А. Банщикова, М.А. Леган, К.А. Матвеев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 66 с.

43. Банщикова И.А. Оценка напряженно-деформированного состояния скручиваемого при ползучести стержня из анизотропного материала в направлении сдвига / И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции; Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С 39-44.
44. Банщикова И.А. Длительность до разрушения вращающихся дисков в условиях ползучести / И.А. Банщикова // Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем: материалы и доклады / VI Всероссийская конференция (Красноярск, 18-21 сент.2018) науч. ред. В.В. Москвичев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. – С. 141-146.
45. Банщикова И.А. К оценке эксплуатационного ресурса по кинетическим уравнениям со скалярным параметром повреждённости / И.А. Банщикова // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики; Уфа, 19-24 авг. 2019 г.: сборник трудов в 4 томах. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 254-256.
46. Банщикова И.А. Кручение ортотропного тонкостенного круглого стержня при ползучести / И.А. Банщикова // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики; Уфа, 19-24 авг. 2019 г.: сборник трудов в 4 томах. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 251-253.
47. Банщикова И.А. Моделирование процесса формообразования полусферической оболочки на основе кинетических уравнений ползучести и повреждаемости/ И.А. Банщикова // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. науч. тр. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. Е.А. Вячкиной, В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2020. – С. 7-10.
48. Бегун А.С. Расчет напряжений, деформаций и перемещений во вращающемся диске в условиях ползучести / А.С. Бегун, Л.В. Ковтанюк // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.

И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2019. – № 1 (39). – С. 84-93.

49. Бегун А.С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их визкозиметрического деформирования / А.С. Бегун, Л.В. Ковтанюк, Лемза А.О. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.

50. Бойл Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

51. Бормотин К.С. Обратные задачи оптимального управления в теории ползучести / К.С. Бормотин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 2 (50). – С. 33-42.

52. Бормотин К.С. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести / К.С. Бормотин, А.И. Олейников // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 5 (315). – С. 136-146.

53. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести / К.С. Бормотин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 12. – С. 145-153.

54. Бормотин К. С. Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клепки тонкостенных панелей: дис. ... док. физ.-мат. наук: 05.13.18 / К.С. Бормотин; Комсомольск-на-Амуре гос. техн. ун-т. – Комсомольск-на-Амуре, 2014. – 282 с.

55. Бормотин К. С. Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства / К.С. Бормотин, С.В. Белых, А. Вин // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17, вып. 3. – С. 258-267.

56. Бормотин К.С. Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести / К.С. Бормотин,

- А. Вин // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19, № 4. – С. 470-478.
57. Бормотин К.С. Математическое моделирование обратных задач формообразования с учетом неполной обратимости деформаций ползучести / К.С. Бормотин, Н.А. Тарануха // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – № 1. – С. 161-171.
58. Буренин А.А. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии / Буренин А.А., Панченко Г.Л., Ковтанюк Л.В., Галимзянова К.Н. // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 482, № 4. – С. 403-406.
59. Веклич Н. А.. Моделирование ресурса деформационной способности материала / Н. А. Веклич, А.М. Локощенко, П. Н. Веклич // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 183-188.
60. Веричев С.Н. Формообразование изгибом в режиме пластичности элементов самолётных конструкций / С.Н. Веричев, Б.В. Горев, И.А. Банщикова // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2014. – №4(65). – С. 85-93.
61. Волегов П. С. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории / П.С. Волегов, Д.С. Грибов, П.В. Трусков // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 68-87.
62. Волков С. Д. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С. Д. Волков, Ю. П. Гуськов, В.И. Кривоспицкая и др. // Проблемы прочности. – 1979. – № 1. – С. 3-6.
63. Волков С. Д. К механике разрушения. Сообщение 2 / С. Д. Волков, Г.И. Дубровина // Проблемы прочности. – 1980. – № 9. – С. 41-45.
64. Гаврюшина Н.Т. Ползучесть круглой мембраны / Н.Т. Гаврюшина // Машиностроение. – 1982. – № 3. – С. 29-33.
65. Гаврюшина Н.Т. Сверхпластическое деформирование круглой мембраны / В кн. «Расчеты на прочность» / Н.Т. Гаврюшина. – М.: Машиностроение, 1984. – вып. 25. – С. 163-174.

66. Гермези Масуд. Совершенствование методов расчета предельного формоизменения тонкостенных заготовок при изготовлении деталей летательных аппаратов : дис. ... канд. техн. наук : 05.07.02. / Масуд Гермези; Рос. гос. технол. ун-т им. К.Э. Циолковского (МАТИ). – Москва, 2008. – 120 с.
67. Гладштейн В.И. Диагностика микроповрежденности металла деталей энергооборудования, работающего в условиях ползучести. В 3-х частях./ В.И. Гладштейн. – М.: НТФ «Энергопрогресс», «Энергетик», 2013.
68. Голушко С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
69. Горев Б.В. К ползучести материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие / Б.В. Горев, А.Ф. Никитенко // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1970.– Вып. 6. – С. 105-110.
70. Горев Б.В. К определению координат характеристической точки в элементах конструкций при ползучести / Б.В. Горев, В.В. Заев // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. – 1977. – Вып. 28. – С. 143-151.
71. Горев Б. В. К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. Сообщение 1 / Б.В. Горев // Проблемы прочности. – 1979. – № 4. – С. 30-36.
72. Горев Б.В. К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. Сообщение 2 / Б.В. Горев // Проблемы прочности. – 1979. – № 8. – С. 68-73.
73. Горев Б.В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / Б.В. Горев, В.В. Рубанов, О.В. Соснин // Прикладная механика и техническая физика. – 1979. – № 4. – С. 121-128.
74. Горев Б.В. О ползучести материалов с разными свойствами при

растяжении и сжатии / Б.В. Горев, В.В. Рубанов, О.В. Соснин // Проблемы прочности. – 1979. – № 7. – С. 62-67.

75. Горев Б.В. К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести / Б.В. Горев, О.В. Соснин, И.Д. Клопотов, Г.А. Раевская // Прикладная механика и техническая физика. – 1980. – № 5. – С. 185-191.

76. Горев Б.В. Технологические рекомендации «Формообразование монолитных панелей из алюминиевых сплавов 1201, В95 и 1420 в режиме ползучести» / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Г.А. Раевская и др. // ДСП. Тр.1.4, 1163-83.– М.: НИАТ, 1984. – 21 с.

77. Горев Б.В. Технологические рекомендации «Автоматизированное проектирование рабочего контура оснастки для формообразования монолитных панелей одинарной и двойной кривизны в режиме ползучести» / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Г.А. Раевская и др. // ДСП. Тр. 1.4. 1444-85. – М.: НИАТ, 1986. – 17 с.

78. Горев Б.В. Закономерности деформирования материалов в условиях, близких к сверхпластичности. Сообщение 1. Одноосное напряженное состояние / Б.В. Горев, А.А. Ратничкин, О.В. Соснин // Проблемы прочности. – 1987. – № 11. – С. 36-41.

79. Горев Б.В. Технология формообразования крупногабаритных деталей из сплава 1561 в режиме сверхпластичности / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, И.А. Шавров, А.Л. Кузнецовский // Сб: Судостроительная промышленность. Серия: Технология и организация производства. – 1989. – Вып. 14. – Стр. 11-23.

80. Горев Б.В. К анализу формообразования оребренных панелей при медленных режимах деформирования/ Б.В. Горев, С.Н. Веричев, Г.А. Раевская // Авиационная промышленность. – 1990. – № 2. – С. 8-10.

81. Горев Б. В. К описанию процесса ползучести и длительной прочности по уравнениям с одним скалярным параметром повреждаемости / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 35, № 5. – С. 92-102.

82. Горев Б.В. Методика построения кривых деформирования на кручение при больших деформациях / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов // Заводская лаборатория. – 1995. – № 12. – С. 50-53.
83. Горев Б.В. Методика описания процесса деформирования материалов вплоть до разрушения в режимах, близких к сверхпластичности / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Т.Э. Захарова // Прикладная механика и техническая физика. – 1995 – № 1. – С. 149-157.
84. Горев Б.В. Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок и кручении валов уравнениями со скалярным параметром повреждаемости / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 6. – С. 157-162.
85. Горев Б.В. К обоснованию метода изгибных характеристик для расчетов на ползучесть изгиба элементов конструкций / Б.В. Горев// Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН. – 2001. – Вып. 119. – С. 36-42.
86. Горев Б. В. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств / Б.В. Горев, И.Д. Клопотов, Т.Э. Захарова // Физическая мезомеханика. – 2002.– Т. 5, № 2. – С. 17-22.
87. Горев Б. В. Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей : диссертация ... доктора технических наук : 01.02.04. / Б.В. Горев; Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН – Новосибирск, 2003. – 426 с.
88. Горев Б.В. Технология процесса формообразования деталей двойной знакопеременной кривизны в режиме ползучести и устройство для его осуществления / Б.В. Горев, О.В. Соснин, Ю.В. Загарин // Материалы III Междунар. технологического конгресса «Военная техника, вооружение и технологии двойного применения». – Омск: ОмГУ, 2005. – С. 117-119.
89. Горев Б. В. О подобии диаграмм ползучести / Б.В. Горев // В сб.: IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотация

докладов. – Н. Новгород: ННГУ, 2006. – С. 28.

90. Горев Б.В. К расчету процесса деформирования листовых деталей двойной кривизны из сплавов с разными свойствами на растяжение и сжатие в условиях ползучести / Б.В. Горев, И.А. Банщикова, А.И. Олейников, А.И. Пекарш // Материалы XII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». – М.: МАИ, 2006. – С. 41-43.

91. Горев Б.В. К вопросу о ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / Б.В. Горев, О.В. Соснин, И.В. Любашевская // Тр. 4-й Всерос. конф. с Междунар. участием (29–31 мая 2007г.). Часть 1. Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Матем. моделирование и краев. задачи. – СамГТУ, Самара, 2007. – С. 77-81.

92. Горев Б.В. Технология формообразования крупногабаритных деталей из листа и плит в режиме ползучести / Б.В. Горев // Технология машиностроения. – 2008. – № 2. – С. 11-17.

93. Горев Б. В. К описанию ниспадающего участка кривой деформирования «напряжение-деформация» по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности / Б.В. Горев, И.А. Банщикова / Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2008. – № 2 (17). – С. 110-117.

94. Горев Б.В. О соответствии ниспадающей ветви кривой деформирования «напряжение – деформация» разупрочняющемуся участку кривой ползучести / Б. В. Горев, И. А. Банщикова / Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тез. докладов V-ой Всерос. конф. – Екатеринбург, 2008. – С. 94.

95. Горев Б.В. К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности / Б.В. Горев, И.А. Банщикова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – № 2 (19). – С. 90-98.

96. Горев Б.В. К описанию процессов ползучести и разрушения материалов при обработке и эксплуатации по кинетическим уравнениям в

энергетической форме / Б.В. Горев, И.А. Банщикова, Е.В. Карпов // IV Российская научно-техническая конференция «Ресурс и диагностика материалов и конструкций»: Тезисы. Екатеринбург. – 2009. – С.79.

97. Горев Б. В. Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести / Б.В. Горев, И.Ж. Масанов // Технология машиностроения. – 2009. – № 7. – С. 13-20.

98. Горев Б. В. Технологические процессы обработки металлов давлением в режимах ползучести и их моделирование / Б.В. Горев, О.В. Соснин // В сб.: Современные металлические материалы и технологии СММТ'2009: Тр. Междунар. научн. техн. конф. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – С. 257-268.

99. Горев Б.В. К использованию определяющих уравнений в энергетической форме для оценки живучести и разрушения элементов конструкций / Б.В. Горев, И.А. Банщикова / Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 109-112.

100. Горев Б.В. Метод интегральных характеристик для расчетов изгиба элементов конструкций / Б.В. Горев, В.А. Панамарев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия «Физико-математические науки». – 2013. – Вып. 3(177). – С. 202-211.

101. Горев Б.В. Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме / Б.В. Горев, И.В. Любашевская, В.А. Панамарев, С.В. Иявойнен // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 132-144.

102. Горев Б.В. О рациональных режимах деформирования металлических материалов в условиях ползучести / Б.В. Горев, И.А. Банщикова // Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем: материалы и доклады / VI Всероссийская конференция (Красноярск, 18-21 сент. 2018 г.)

- науч.ред. В.В.Москвичев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. – С. 165-170.
103. Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов и сплавов / Ф. Гарофало. – Москва: Издательство «Металлургия», 1968. – С. 304.
104. Грязев М.В. Оценка влияния анизотропии механических свойств заготовки на предельные возможности изотермического деформирования полусферических деталей в режиме ползучести / М.В. Грязев, С.Н. Ларин, С.С. Яковлев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 394-398.
105. Грязев М.В. Влияние исходной анизотропии механических свойств заготовки на энергосиловые параметры при раздаче коническим пуансоном / М.В. Грязев, А.А. Пасынков, С.Н. Ларин // Вестник машиностроения. – 2018. – № 2. – С. 68-72.
106. Грязев М.В. Математическая модель изотермического деформирования полусферических деталей из трансверсально-изотропных материалов в режиме ползучести / М.В. Грязев, С.С. Яковлев, С.Н. Ларин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 1. – С. 27-36.
107. Добрушкин Л.С. Определение остаточного ресурса металла паропроводов высокого давления по результатам контроля микроповрежденности / Л.С. Добрушкин // Сборник докладов конференции «Металл оборудования ТЭС. Проблемы и перспективы». – М.: ОАО «ВТИ». – 2006. – С. 113 – 115.
108. Дубровина Г. И. К теории накопления повреждений / Г. И. Дубровина, Ю. П. Соковнин, Ю.П. Гуськов, П. С. Соколов, С. Д. Волков // Проблемы прочности. –1975. – № 12. – С. 21-24.
109. Еникеев Ф.У. Определение сверхпластических свойств алюминиевых сплавов по результатам тестовых формовок круглых мембран при постоянном давлении / Ф.У. Еникеев, О.П. Тулупова, В.Р. Ганиева, А.К. Шмаков, А.В. Колесников // Кузнечно-штамповочное производство.

Обработка материалов давлением. – 2015. – № 11. – С. 7-11.

110. Заев В.А. Расчет напряженно-деформированного состояния изгибаемых кольцевых пластин с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести / В.А. Заев, А.Ф. Никитенко // Прикладная механика и техническая физика. – 1993. – Т. 34, № 3. – С. 142-146.

111. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник // Под общ. ред. С.А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.

112. Зенкевич О. Методы конечных элементов / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975.

113. Золочевский А.А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Склепус, С.Н. Склепус. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.

114. Жуков М. Б. Исследование процессов изготовления деталей летательных аппаратов гибкой листовых и профильных заготовок с дополнительным нагружением: дис. ... канд. техн. наук : 05.07.02. / М. Б. Жуков.- Рос. гос. технол. ун-т им. К. Э. Циолковского (МАТИ). – Москва, 2003. – 158 с.

115. Ивлев Д.Д. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д.Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 576-579.

116. Изотермическая пневмоформовка анизотропных высокопрочных листовых материалов / С.С. Яковлев и др. – М.: Машиностроение, 2009. – 352 с.

117. Каледин В.О. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов / В.О. Каледин, С.М. Аульченко, А.Б. Миткевич, Е.В. Решетникова, Е.А. Седова, Ю.В. Шпакова. – М.: Физматлит, 2014. – 196 с.

118. Качанов Л.М. Время разрушения в условиях ползучести / Л.М. Качанов// Проблемы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / М.: Изд-во

АН СССР, 1961. – С. 186-201.

119. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР . Отд. техн. наук. – 1958. – № 8. – С. 26-31.

120. Качанов Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.

121. Качанов Л.М. Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.

122. Келлер И.Э. Диаграмма предельных деформаций при горячей листовой штамповке металлов. Обзор моделей материала, критериев вязкого разрушения и стандартных испытаний/ И.Э. Келлер, Д.С. Петухов, А.В. Казанцев, В.Н. Трофимов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 447-486.

123. Ковпак В. И. Прогнозирование длительной работоспособности металлических материалов в условиях ползучести / В.И. Ковпак. – Препр. Киев ИПП. Ин-т пробл. прочности АН УССР, 1990. – 37 с.

124. Коробейников С.Н. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии / С.Н. Коробейников, А.И. Олейников, Б.В. Горев, К.С. Бормотин // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2008. – Т. 9, № 1. – С. 346-365.

125. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел / С.Н. Коробейников. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.

126. Кривенок А.А. Использование режима термомодеформационного старения при изготовлении деталей летательных аппаратов из алюминиевого сплава В95 : дис. ... канд. техн. наук: 05.07.02./ Кривенок Антон Александрович; Комсомольск-на-Амуре гос. техн. ун-т. – Комсомольск-на-Амуре, 2013. – 156 с.

127. Кузнецов Е.Б. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков / Е.Б. Кузнецов, С.С. Леонов // Материалы XIX Международной

конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – Алушта, 24-31 мая 2015 г. – М: МАИ. – С. 292-294.

128. Кузнецов Е. Б. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности / Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов // Прикладная механика и техническая физика, 2016. – Т. 57, № 2. – С. 202-211.

129. Ларичкин А.Ю. Физическое и численное моделирование деформирования материалов с учетом больших деформаций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ларичкин Алексей Юрьевич; Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН – Новосибирск, 2013. – 166 с.

130. Ларичкин А.Ю. Ползучесть круглых стержней из анизотропного материала / А.Ю. Ларичкин, И. А. Банщикова // В сборнике трудов конференции: XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2018). – 2019. – С. 132-136.

131. Ларичкин А. Ю. Учет свойств разнсопротивляемости растяжению и сжатию в условиях ползучести при кручении круглых стержней / А.Ю. Ларичкин, И. А. Банщикова // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18-22 сентября 2017 г., Самара): Т. 2 – Самара: СамГТУ, 2017 – С. 57-59.

132. Ларичкин А.Ю. Построение сдвиговых деформаций ползучести из чистого кручения сплошных круглых валов / А.Ю. Ларичкин, Б.В. Горев // Науч.-техн. вед. С.-Петер. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 4, вып. 177. – С. 212-219.

133. Ларичкин А.Ю. Физическое моделирование технологического процесса формообразования элементов конструкций из алюминиевого сплава В95 в условиях ползучести / А.Ю. Ларичкин, К.В. Захарченко, Б.В. Горев, В.И. Капустин // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2016. – №1 (70). – С. 6-15.

134. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней/

С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1971.– 240 с.

135. Локощенко А.М. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении / А.М. Локощенко, С.А. Шестериков // Прикладная механика и техническая физика. – 1980. – № 3. – С. 155-159.

136. Локощенко А.М. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения / А.М. Локощенко, С.А. Шестериков // Прикладная механика и техническая физика. – 1982. – № 1. – С. 160-163.

137. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А.М. Локощенко. – М.: Моск. гос. индустр. ун-т., 2007. – 263 с.

138. Локощенко А.М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) / А.М. Локощенко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2012. – № 3. – С. 116-136.

139. Локощенко А.М. Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разнсопротивляемости материала / А.М. Локощенко, К.А. Агахи, Л.В. Фомин // Машиностроение и инженерное образование. – 2012. – № 3. – с. 29-35.

140. Локощенко А.М. Ползучесть и длительное разрушение цилиндрической оболочки под внешним давлением в присутствии агрессивной среды / А.М. Локощенко, А.В. Соколов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 65-76.

141. Локощенко А.М. Влияние формы поперечного сечения растягиваемых стержней на длительную прочность при наличии агрессивной окружающей среды / А.М. Локощенко, Л.В. Фомин // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5.– С. 35-44.

142. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов / А.М. Локощенко. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.

143. Локощенко А.М. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии / А.М. Локощенко //

Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82, № 1. – С. 84-97.

144. Малинин Н.Н. Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин / Н.Н. Малинин // Расчеты на прочность. – М.: Машгиз, 1963. – Вып. 9. – С. 173-195.

145. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1986. – 225 с.

146. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. / А.Е. Мудров. – Томск. МП «Раско». – 1991. – 272 с.

147. Немировский Ю.В. Расчет продольно-поперечного изгиба сложно армированных металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Конструкции из композиц. материалов. – 2009. – № 3. – С. 5-22.

148. Никитенко А.Ф. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / А.Ф. Никитенко, О.В. Соснин, Н.Г. Торшенов, И.К. Шокало // Прикладная механика и техническая физика. – 1971. – № 2. – С. 118-121.

149. Никитенко А. Ф. О прочностных особенностях титановых сплавов / А.Ф. Никитенко, О.В. Соснин, Н. Г. Торшенов, И. К. Шокало // Прикладная механика и техническая физика. – 1976. – № 6. – С. 118-122.

150. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов / А.Ф. Никитенко. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 1997. – 278 с.

151. Никитенко А.Ф. Нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения элементов конструкций / А.Ф. Никитенко // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 164-169.

152. Никитенко А.Ф. Расчет напряженно-деформируемого состояния и длительности до разрушения осесимметрично нагруженных пластин в условиях ползучести / А.Ф. Никитенко, И.А. Банщикова // Сб.тр. 19-я Всеросс. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности; Бийск, 29-31 августа 2005 г. – Издательский центр: Параллель, 2005. – С. 22-27.

153. Никитенко А.Ф. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб / А.Ф. Никитенко, И.В. Любашевская // Проблемы прочности. – 2005. – № 5. – С. 30-44.
154. Никитенко А.Ф. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 3. Верхняя и нижняя оценки времени начала разрушения неравномерно нагретых элементов конструкций / А.Ф. Никитенко, И.В. Любашевская // Проблемы прочности. – 2006. – № 1. – С. 32-40.
155. Никитенко А.Ф. Долговечность сосудов высокого давления / А.Ф. Никитенко, И.В. Любашевская // Прикладная механика и техническая физика – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 173-182.
156. Олейников А.И. Модели установившейся ползучести трансверсально-изотропных материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие / А.И. Олейников // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. XIII, № 3 (43). – С. 113-116.
157. Патент РФ №2076010, В 21 D 11/20. Устройство для формообразования: заявл. 19-12-1994: опубл. 27-03-1997 / Л.Л. Рублевский, О.В. Соснин, Б.В. Горев, М.И. Бондаренко – Бюл. изобр. 1997. – № 9. – С. 136.
158. Патент РФ. № 2251464 Устройство формования : заявл. 22-07-2002: опубл. 10.05.2005 / И.Д. Клопотов, И.В. Любашевская, Г.А. Раевская, Л.Л. Рублевский, О.В. Соснин. – 42 с.
159. Патент РФ. № 2336966. Формообразующее устройство : заявл. 04-04-2006: опубл. 27.10.2008 / Любашевская И.В., Рублевский Л.Л. – 15 с.
160. Патент РФ № 2396367. Способ получения изделия из высокопрочного алюминиевого сплава: заявл. 16.10.2008 : опубл. 10.08.2010 / Сенаторова О.Г., Ткаченко Е.А., Сидельников В.В., Антипов В.В., Блинова Н.Е., Шестов В.В., Красова Е.В., Гирш Р.И. – 7 с.

161. Патент РФ RU №2475322 Способ формообразования деталей : заявл. 31.05.2011: опубл. 20.02.2013 / Пекарш А. И., Сарыков С. Э., Крупский Р. Ф., Физулаков Р. А., Станкевич А. В., Олейников А. И., Бойко В. М., Кривенок А.А. – 10 с.
162. Пермикин В.С. О диагностике ползучести теплостойких сталей II. О расчете остаточного ресурса металла, эксплуатирующегося в условиях ползучести, по результатам контроля эксплуатационной микроповрежденности / В.С. Пермикин // Дефектоскопия. – 2011. – № 3. – С. 66-73.
163. Петров Д.М. Изгиб оребренных пластин из трансверсально-изотропных материалов с пониженной сопротивляемостью в сдвиговом направлении при ползучести / Д.М. Петров, И.А. Банщикова // Наука. Промышленность. Оборона: Тр. XVI Всерос. науч.-техн. конф. / Под ред. К.А. Матвеева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – С. 629-633.
164. Петров Д.М. Моделирование кручения анизотропных стержней круглого сечения при ползучести / Д.М. Петров, И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб // Наука, промышленность, оборона: Труды XVII Всерос. науч.-техн. конф. / Под ред. С.Д. Саленко. – Новосибирск, 2016. – Т. 1. – С. 168-173.
165. Писаренко Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. Пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский – Киев: Наук. думка, 1981.
166. Поздеев А.А. Применение теории ползучести при обработке металлов давлением / А.А. Поздеев, В.И. Тарковский, В.И. Еремеев, В.С. Баакашвили. – М.: Металлургия, 1973. – 222 с.
167. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 752 с.
168. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения / Ю.Н. Работнов // Вопросы прочности материалов и конструкций. М: Изд-во АН СССР. – 1959. – С. 5-7.

169. Работнов Ю.Н. О прочности дисков в условиях ползучести / Ю.Н. Работнов, В.П. Рабинович // Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук, Механика и машиностроение. – 1959. – № 4. – С. 93-100.
170. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М: Наука, 1966. – 752 с.
171. Работнов Ю.Н. Кратковременная ползучесть / Ю.Н. Работнов, С.Т. Милейко. – М.: Наука, 1970. – 224 с.
172. Радченко В.П. Математическое моделирование влияния скорости нагружения на полную диаграмму растяжения материала в условиях ползучести / В.П. Радченко, Е.В. Небогина, Е.А. Андреева / Матем. моделирование и краевые задачи: Тр. V-й Всерос. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 2008. – Ч. 1. – С. 250-255.
173. Радченко В.П. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций / В.П. Радченко, Ю.А. Ерёмин. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 264 с.
174. Радченко В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях/ В.П. Радченко, М.Н. Саушкин. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.
175. Развитие пакета программ математического моделирования сопряженных задач механики неоднородных конструкций / Т. В. Бурнышева, В. О. Каледин, И. В. Равковская, С. В. Эптешев // Вестник Кемеровского государственного университета.– 2010. – № 1. – С. 3-8.
176. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник/ М.И. Мяченков, В.И. Мальцев и др. – М.: Машиностроение. – 1989. – 520 с.
177. Резинских В.Ф. Исследование изломов. Методические рекомендации и атлас повреждений деталей проточной части турбин / В.Ф. Резинских, Э.С. Гинзбург, А.М. Клыпина, М.М. Меламед, А.В. Качанов, В.А. Харчевников / Мин-во топлива и энерг. Рос. Федерации. М.: Всероссийск. теплотехнич. науч.-исслед. ин-т (ВТИ). – 1993. – 131 с.

178. Романов К.И. Механика горячего формоизменения металлов / К.И. Романов. – М.: Машиностроение, 1993. – 241 с.
179. Рациональные режимы формообразования полусферической оболочки из стали 09Г2С-12 в условиях ползучести / И. А. Банщикова, С. В. Иявойнен, А. Ю. Ларичкин, М. А. Леган, И. В. Любашевская // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. тр. – Новокузнецк, 2017. – С. 40-47.
180. Самойлова А.Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния в очаге деформации при сверхпластической формовке круглой мембраны. Часть I. Проблемы моделирования процесса сверхпластической формовки / А.Ю. Самойлова, Т.М. Загиров, Ф.У. Еникеев, А.А. Круглов // Письма о материалах. – 2013. – Т. 3, № 1. – С. 41-44.
181. Самойлова А.Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния в очаге деформации при сверхпластической формовке круглой мембраны Часть II. Моделирование процесса сверхпластической формовки / А.Ю. Самойлова, В.Р. Ганиева, Ф.У. Еникеев, А.А. Круглов // Письма о материалах. – 2013. – Т. 3, № 3. – С. 252-256.
182. Соснин О. В. Об анизотропной ползучести материалов / О.В. Соснин // Прикладная механика и техническая физика. – 1965. – № 6. – С. 99-104.
183. Соснин О.В. О некоторых особенностях ползучести листовых материалов / О.В. Соснин, Б.В. Горев // Сб. научн. тр.: Динамика сплошной среды. Новосибирск. – 1970. – Вып. 4. – С. 5-10.
184. Соснин О.В. К вопросу о существовании потенциала ползучести / О.В. Соснин // Механика твердого тела. – 1971. – № 5. – С. 85-89.
185. Соснин О.В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 3. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков/ О.В. Соснин, Б.В. Горев / Проблемы прочности. – 1974. – № 3. – С. 3-6.
186. Соснин О.В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным

упрочнением / О.В. Соснин, И. К. Шокало // Проблемы прочности. Наукова думка. Киев. – 1974. – № 1. – С. 43-48.

187. Соснин О.В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1. Основные гипотезы и экспериментальная проверка / О.В. Соснин, Б.В. Горев, А.Ф. Никитенко // Проблемы прочности. – 1976. – № 11. – С. 3-8.

188. Соснин О.В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести / О.В. Соснин, Б.В. Горев, В.В. Рубанов // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов: Сб.тр. Министерство речного флота РСФСР, Новосибирский институт инженеров водного транспорта. Новосибирск. – 1976. – Вып. 117. – С. 78-88.

189. Соснин О.В. Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов / О.В. Соснин, Б.В. Горев, И.В. Любашевская // Прикл. механика и техн. физика. – 1997. – Т. 38, № 2. – С. 140-145.

190. Соснин О.В. Определение параметров кривых ползучести при наличии всех стадий процесса ползучести / О.В. Соснин, А.Ф. Никитенко, Б.В. Горев, // Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении. Метод. рекомендации. – М.: ВНИИНМАШ, 1982. – С. 49-54.

191. Соснин О.В. Энергетический вариант теории ползучести / О.В. Соснин, Б.В. Горев, А.Ф. Никитенко. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1986. – 96 с.

192. Соснин О.В. Обработка материалов давлением при медленных режимах деформирования / О.В. Соснин, Б.В. Горев, Г.А. Раевская // Новые материалы и технологии: Теория и практика упрочнения материалов в экстремальных процессах. – Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992. – С. 168-181.

193. Соснин О.В. Высокотемпературное деформирование конструкционных материалов в приложении к технологическим задачам по ОМД /

О.В. Соснин, Б.В. Горев // Сб.статей к 75-летию проф. Зубчанинова В.Г. «Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости». – ТГТУ, 2007. – С. 284-293.

194. Соснин О.В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов / О.В. Соснин, А.Ф. Никитенко, Б.В. Горев // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – №4. – С. 188-197.

195. Страхов В.А. Контроль состояния металла гибов трубопроводов Ижевской ТЭЦ-2, работающих в условиях высоких температур / В.А. Страхов, В.М. Голиков, В.С. Пермикин, Л.С. Добрушкин, Т.И. Бархатова // Теплоэнергетика. – 1999. – № 8. – С. 76-78.

196. Стрижало В. А. Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур / В. А. Стрижало. – Киев: Наукова думка, 1978. – 238 с.

197. Сухоруков И.В. Итерационный метод решения релаксационных обратных задач/ И.В. Сухоруков, И.Ю. Цвелодуб // Изв.АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 3. – С. 93-101.

198. Теория и технология штамповки анизотропных материалов / С.С. Яковлев, В. Д. Кухарь, В. И. Трегубов; под ред. С. С. Яковлева; Российская акад. ракетных и артиллерийских наук, Тульский гос. ун-т. – Москва : Машиностроение, 2012. – 399 с.

199. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский – Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

200. Ушков С.С. Термин «Сверхпластичность» в широком и узком значениях / С.С. Ушков, Д.И. Чашников // Судостроительная промышленность. Сер. Металловедение. Металлургия. – 1990. – Вып. 13. – С. 11-21.

201. Хейхерст Д. Р. Определение времени до разрушения для вращающихся дисков в условиях ползучести с использованием уравнений повреждаемости при двухосном напряженном состоянии / Д.Р. Хейхерст // Тр. ASME, серия E.

Прикладная механика. – 1973. – № 4. – С. 88-95.

202. Хейхерст Д. Р. Перераспределение напряжений и разрушение при ползучести равномерно растягиваемых тонких пластин с круглым отверстием / Д.Р. Хейхерст // Тр. ASME, серия E. Прикладная механика. – 1973. – № 1. – С. 253-260.

203. Цвелодуб И.Ю. О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие/ И.Ю. Цвелодуб // Динамика сплошной среды. – СО АН СССР. Ин-т гидродинамики, 1974. – Вып. 19-20. – С. 147-155.

204. Цвелодуб И. Ю. Обратная задача о деформировании мембраны в условиях ползучести / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 1985. – № 5. – С. 158-163.

205. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов/ И.Ю. Цвелодуб. – Новосибирск. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1991. – 202 с.

206. Цвелодуб И.Ю. Об анизотропной ползучести металлических материалов / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 4.– С. 672-674.

207. Цвелодуб И.Ю. К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 98-101.

208. Цветков В. В. Краевые задачи ползучести поверхностно упрочнённых цилиндров при различных видах квазистатического нагружения : автореф. дис .. канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / В. В. Цветков. – Самара: Изд-во СНИГУ, 2018. – 20 с.

209. Шестериков С.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести / С.А. Шестериков, М.А. Юмашева // Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1984. – №1. – С.86-92.

210. Шитиков А.А. Совершенствование технологии пневмотермической

формовки в состоянии сверхпластичности деталей типа «полусфера»: : автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.09 / Шитиков Андрей Андреевич. – Москва, 2016. – 16 с.

211. Яковлев С.С. Силовые режимы и предельные возможности деформирования на последующих операциях изотермической вытяжки осесимметричных деталей в условиях вязкого течения анизотропного материала/ С.С. Яковлев, А.А. Пасынков, Ю.В. Бессмертная, В.А. Булычев В.А. / Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2015. – № 1. – С. 61-71.

212. Янковский А.П. Установившаяся ползучесть сложно армированных пологих металлокомпозитных оболочек / А.П. Янковский // Механика композит. материалов. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 121-138.

213. Янковский А.П. Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования / А.П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 279-302.

214. Aksenov S.A. Determination of optimal gas forming conditions from free bulging tests at constant pressure/ S.A. Aksenov, E.N. Chumachenko, A.V. Kolesnikov, S.A. Osipov // Journal of Materials Processing Technology. – 2015. – 217. – С. 158-164.

215. Altenbach H. Topical problems and applications of creep theory / H. Altenbach // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, No. 6. – P. 631-655.

216. Altenbach H. On the prediction of creep damage by bending of thin-walled structures/ H. Altenbach, J. Altenbach, K. Naumenko // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1997. – Vol. 1 – No. 2. – P. 181-193.

217. Altenbach H. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Arch. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 67, No. 5. – P. 339-352.

218. Anisotropic Behaviour of Damaged Materials. Part of the Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics book series (LNACM, volume 9) / Jacek J. Skrzypek, Artur W. Ganczarski (Editors) – Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003. – 366 p.
219. Banabic D. Sheet metal forming processes. Constitutive modelling and numerical simulation / D. Banabic – Springer, 2010. – 301 p.
220. Banshchikova I.A. Calculation of deformation process of sheet details of double curvature from anisotropic alloys at creep/ I.A. Banshchikova // Proceedings of The Intern. Conference. – SPb.: Polytechnic University Publishing, 2008. – Vol. 1. – P. 34-38.
221. Banshchikova I. A. Modeling of anisotropic creep by using Hill's theory / I.A. Banshchikova / Zbornik radova konferencije MIT 2009. na Kopaoniku od 27 aug. – 1. sep. , Budvi 1 – 5 sep. 2009. – Izdavač: Univerzitet u Prištini Prirodno-matematički fakultet Kosovska Mitrovica, 2009. – P. 33-37.
222. Banshchikova I. A. Deformation of plates from alloys with different properties on tension and compression at creep / I.A. Banshchikova, I.V. Lyubashevskaya / Zbornik radova konferencije MIT 2009. na Kopaoniku od 27 aug. – 1. sep. , Budvi 1 – 5 sep. 2009. – Izdavač: Univerzitet u Prištini Prirodno-matematički fakultet Kosovska Mitrovica, 2009. – P. 29-32.
223. Banshchikova I.A. Shaping of panels in view of behaviour features of metal alloys at creep / I.A. Banshchikova // Topical problems of continuum mechanics: Proceedings of the Second International Conference 4-8 October 2010, Dilijan, Armenia. – Yerevan: YSUAC. – 2010.– Vol. 2.– P. 247-250.
224. Banshchikova I.A. Laws of the creep of metallic materials at high temperatures / I.A. Banshchikova, B.V. Gorev, M.A. Legan // Journal of Physics: Conf. Series. – 2016. – 754. – 082001.
225. Banshchikova I.A. Torsion of circular rods at anisotropic creep / I.A. Banshchikova, D.M. Petrov, I.Yu. Tsvlodub // Journal of Physics: Conf. Series.– 2016.– 722. – No. 1. – 012004.
226. Banshchikova I.A. Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from

- an anisotropic material in the shear direction at creep / I.A. Banshchikova // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – 894. – 012006.
227. Banshchikova I.A. The time of creep fracture of the axisymmetrically loaded structures / I.A. Banshchikova, I.V. Lyubashevskaya // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017.– 894 .– 012007.
228. Banshchikova I. A. On rational modes of forming an axisymmetric steel shell under creep / I.A. Banshchikova, S. V. Iyavoynen, A. Yu. Larichkin // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019.– 1268. – 012009.
229. Bathe K. J. Finite Element Procedures/ K. J. Bathe. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs., 1996.
230. Betten J. Creep Mechanics / J. Betten. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
231. Betten J. A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression / J. Betten, S. Sklepus, A. Zolochovsky // Engineering Fracture Mechanics. – 1998. – Vol. 59, No. 5. – P. 623-641.
232. Bhatnagar N.S. The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep/ N.S. Bhatnagar, S.K. Gupta, R.P. Gupta // Wood Science and Technology. – 1969. – Vol. 3, Iss. 2. – P. 167-174.
233. Bormotin K., Belykh S., Aung V. Simulation and estimation of parameters in reconfigurable multipoint forming processes of plates in the creep mode / K. Bormotin, S. Belykh, V. Aung // MATEC Web of Conferences «International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment, ICMTMTE 2017», 2017. – 05004.
234. Bourdin J.P. Shape and thickness optimization of an aeronautical structure manufactured using age creep forming process/ J.P. Bourdin, J.P. Bonnafé, J. Delmotte, E. Grosjean, J.M. Roelandt // Proceedings of the 2nd IDMME Conference held in Compiègne, Integrated design and manufacturing in Mechanical Engineering, France, 27–29 May, 1998. – Springer Science and Business Media Dordrecht. – 1999. – P. 315-322.

235. Blond E. Modeling of high temperature asymmetric creep behavior of ceramics / Eric Blond, Nicolas Schmitt, François Hild, Philippe Blumenfeld, Jacques Poirier // *Journal of the European Ceramic Society*. – Elsevier, 2005. – 25 (11). – P. 1819-1827.
236. Brear J. M. Creep damage and strain accumulation in steam-methane reformer catalyst tubes / J. M. Brear, J. Williamson // *Book of Abstracts. 14th International Conference on Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures (Creep2017)*; June 19-21, 2017. – Saint Petersburg, 2017. – P. 163-164.
237. Brear J.M. Life assessment of steam reformer radiant catalyst tubes — the use of damage front propagation methods / J. M. Brear, J.M. Church, D.R. Humphrey, M.S. Zanjani // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. – 2001. – Vol. 78, No. 11–12. – P. 985-994.
238. Cheng J.H. The determination of material parameters from superplastic inflation tests / J.H. Cheng // *Journal of Materials Processing Technology*. – 1996. – Vol. 58. – P. 233-246.
239. Constitutive equations of creep under changing multiaxial stresses for materials with different behavior in tension and compression / A. Zolochovsky, S. Sklepus, Yu. Kozmin, A. Kozmin, D. Zolochovsky, J. Betten // *Forschung im Ingenieurwesen*. – 2004. – Vol. 68, Iss. 4. – P. 182-196.
240. Effect of Multiaxiality on the Creep Rupture Properties of 316L(N) SS / S.R. Charde, M.L. Prasad, A.R. Ballal, D.R. Peshwe, M.D. Mathew, R.K. Paretkar // *Procedia Engineering*. – 2013. – Vol. 55. – P. 474-480.
241. Enikeev F. U. Mathematical modeling of processes of pressure treatment of industrial titanium alloys in the superplasticity state/ F. U. Enikeev // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. – 2008. – Vol. 49(1). – P. 34-41
242. Enikeev, F.U. 1995. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm / F. U. Enikeev, A.A. Kruglov // *International Journal of Mechanical Sciences*. – Vol. 37, Iss. 5. – P. 473-483.
243. Evolutionary forging preform design optimization using strain-based criterion/ Y. Shao, B. Lu, H. Ou, F. Ren, J. Chen // *International Journal of*

Advanced Manufacturing Technology. – 2014. – Vol. 71. – P. 69-80.

244. FE simulation and experimental considerations on Ti alloy superplastic forming for aerospace applications / L. Filice, F. Gagliardi, S. Lazzaro, C. Rocco // Int. J. Mater. Form. – 2010. – Vol. 3. – P. 41-46.

245. Finite element analysis of superplastic blow-forming of Ti-6Al-4V sheet into closed ellip-cylindrical die / D.C. Chen, W.J. Chen, J.Y. Lin, M.W. Jheng, J.M. Chen // Int. J. Simul. Model. – 2010. – Vol. 10. – P.17-27.

246. Finite element simulation for superplastic blow forming of toroidal Ti-6Al-4V fuel tank / J.H. Yoon, H.S. Lee, Y.M. Yi, J.T. Yoo // Materials Science forum. – 2013. – Vol. 735. – P. 240-245.

247. Golushko S. Mathematical modeling and numerical Optimization of composite structures / S. K Golushko // Optimum Composite Structures London, 2019. – P. 13-34.

248. Gorev B. V. Creep and damage behavior of AK41T and VT9 alloy under different stress states / B.V. Gorev, I.D. Klopotov, I. V. Lyubashevskaya // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 1998. – Vol. 29 , No. 1. – P. 1-10.

249. Guines D. Numerical modeling of integrally stiffened structures forming from creep age forming technique/ D. Guines, A. Gavrus, E. Ragneau // International Journal of Material Forming. – 2008. – Vol. 1, No. 1 – P. 1071-1074.

250. Hayhurst D. R. Creep rupture under multi-axial states of stress / D.R. Hayhurst // J. Mech. Phys. Solids. – 1972. – Vol. 20. – P. 381-390.

251. Hayhurst D.R. The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar/ D.R. Hayhurst, F. A. Leckie // J. Mech. Phys. Solids. – 1973. – Vol. 21. – P. 431-446.

252. Hill's potential / Sheldon Imaoka – ANSYS release: 11.0. 2008.

253. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads // J. Appl. Mech. – 1953. – Vol. 20, No. 1. – P. 105-108.

254. Hyde T.H. Finite element creep continuum damage mechanics analysis of pressurized pipe bends with ovality/ T.H. Hyde, A. Yaghi, A. A. Becker, P.G. Earl // JSME International Journal. Ser. A. – 2002. – Vol. 45, No. 1. – P. 84-89.

255. Influence of the creep ageing process on the fatigue properties of components from V95pchT2 (analog 7175T76) and V95ochT2 (analog 7475) aluminium alloys / A. Yu. Larichkin, K. Zakharchenko, B.V. Gorev, V. Kapustin, E. Maksimovskiy // *Journal of Physics: Conf. Series.* – 2017. – 894 – 012050.
256. Iyavoynen S.V. High temperature creep of steel 09G2S under non-stationary loading / S. V. Iyavoynen, I.A. Banshchikova, I. V. Lubashevskaya, M.A. Legan // *Journal of Physics: Conf. Series.* – 2017. – 894. – 012123.
257. Kobayashi H. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / H. Kobayashi, R. Ohki, T. Itoh, M. Sakane // *Engineering Fracture Mechanics.*– 2017. –Vol. 174. – P. 30-43.
258. Karstunen M. N. Comparison of anisotropic rate-dependent models at element level / M. Karstunen, M. Rezaia, N. Sivasithamparam // *Constitutive Modeling of Geomaterials.* – 2013. – P. 115-119.
259. Kobelev V. Design and Analysis of Composite Structures for Automotive Applications: Chassis and Drivetrain. / V. Kobelev. – John Wiley & Sons, 2019. – 392 p.
260. Lam A. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: Experimental and finite element studies / A. Lam, Zh. Shi, H. Yang, etc // *J. Materials Process. Technol.* – 2015. – Vol. 219. – P.155-163.
261. Leoni M. Anisotropic creep model for soft soils / M. Leoni, M. Karstunen, P.A. Vermeer // *Geotechnique.* – 2008. – Vol. 58, No. 3. – P.215-226.
262. Li Y. A unified constitutive model for asymmetric tension and compression creep-ageing behaviour of naturally aged Al-Cu-Li alloy / Yong Li , Zhusheng Shi , Jianguo Lin, Yo-Lun Yang, Qi Rong, Bo-Ming Huang, Tsai-Fu Chung, Cheng-Si Tsao, Jer-Ren Yang, Daniel S. Balint // *International Journal of Plasticity.* – 2017. – Vol. 89. – P. 130-149
263. Lihua Z. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets / Z. Lihua, L. Jianguo, H. Minghui // *Advanced Science Letters.* – 2013. – Vol. 19, No. 1. – P. 75-79.

264. Naumenko K. A phenomenological model for anisotropic creep in a multipass weld metal / K. Naumenko, H. Altenbach // *Archive of Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 74(11). – P. 808-819.
265. Naumenko K. Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models / K. Naumenko, H. Altenbach – Springer International Publishing Switzerland, 2016. – 371 p.
266. Numerical and experimental study of multi-point forming of thick double-curvature plates from aluminum alloy 7075 / S. Belykh, A. Krivenok, K. Bormotin, A. Stankevich, R. Krupskiy, V. Mishagin, A. Burenin // IV Sino-Russian ASRTU Symposium on Advanced Materials and Materials and Processing Technology. – KnE Materials Science, 2016. – P. 17-23.
267. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions / A. Zolochovsky, S. Sklepus, T. H. Hyde, A. A. Becker, S. Peravali // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 80, No 11. – P. 1406-1436.
268. Padmanabhan K.A. Superplastic flow: phenomenology and mechanics / K.A. Padmanabhan, R.A. Vasin, F. U. Enikeev. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001 –363 p.
269. Meng Q. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review/ Q. Meng , Z. Wang // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 205. – P. 547-576. Available online 20 August 2016.
270. Raevskaya G. A. Determination of optimum parameters of the technological process for plates forming from V95 and V-1461 alloys in creep applied in aircrafts constructed by «Sukhoi design bureau» / G. A. Raevskaya, K. Zakharchenko, A. Yu. Larichkin // *Journal of Physics: Conf. Series*. – 2017. – 894. – 012078.
271. Razdolsky L. Probability Based High Temperature Engineering. Creep and Structural Fire Resistance / L. Razdolsky – Springer International Publishing

Switzerland, 2017.

272. Skrzypek J.J. Modeling of material damage and failure of structures. Theory and applications / J.J. Skrzypek, A.W. Ganczarski. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 326 p.

273. Sosnin O.V. Fundamentals of near superplasticity process mechanics / O.V. Sosnin, B.V. Gorev // Superplasticity in advanced materials: Proc. 1994 Intern. conf., Moscow, 1994. – Aedermannsdorf: Trans.Tech. Publ., 1994. – P. 621-626.

274. Stewart C.M. An anisotropic tertiary creep damage constitutive model for anisotropic materials/ C. M. Stewart, A. P. Gordon, Y.W. Ma, R. W. Neu // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2011. – Vol. 88. – P. 356-364.

275. Goyal S. Creep life prediction of 9Cr–1Mo steel under multiaxial state of stress / S. Goyal, K. Laha // Materials Science and Engineering: A. – 2014. – Vol. 615. – P. 348-360.

276. Tsuno N. Tension/Compression Asymmetry in Yield and Creep Strengths of Ni-Based Superalloys / N. Tsuno, S. Shimabayashi, K. Takehi, C.M.F. Rae, R.C. Reed// Conference Paper by The Minerals, Metals and Materials Society. Superalloys, 2008. – P. 433-442.

277. Sivasithamparam N. Modelling creep behaviour of anisotropic soft soils / N. Sivasithamparam, M. Karstunen, P. Bonnier // Computers and Geotechnics. – 2015. – Vol. 69. – P. 46-57.

278. Song YuQuan. A mechanical analysis of the superplastic free bulging of metal sheet/ Yu-Q. Song, J. Zhao // Materials Science and Engineering. – 1986. – Vol. 84. – P. 111-125.

279. Szuwalski K. Mathematical and numerical modelling of large creep deformations for annular rotating disks / K. Szuwalski, A. Ustrzycka // Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 36, No. 11. – P. 1441-1448.

280. Ustrzycka A. Annular rotating disks optimal with respect to mixed creep rupture / A. Ustrzycka, K. Szuwalski // Journal of Theoretical and Applied

Mechanics. – Warsaw, 2018. – Vol. 56, No. 1. – P. 57-69.

281. Voyiadjis G. Z. Modeling of secondary creep behavior for anisotropic materials with different properties in tension and compression / G. Z. Voyiadjis, A. Zolochovsky // International Journal of Plasticity. – 1998. – Vol. 14, No. 10-11. – P. 1059-1083.

282. Walczak J. On the analysis of creep stability and rupture / J. Walczak, J. Sieniawski, K.J. Bathe // Computers & Structures. – 1983. – Vol. 17, No. 5-6. – P. 783-792.

283. Yankovskii A.P. Steady-state creep of bent reinforced metal-composite plates with consideration of their reduced resistance to transverse shear. 2. Analysis of calculated results / A.P. Yankovskii // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2014. – Vol. 55, No. 4. – P. 701-708.

284. Zolochovsky A. Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branched shells from materials with different behavior in tension and compression / A. Zolochovsky, A. Galishin, S. Sklepus, G.Z. Voyiadjis // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 5075-5100.

285. Zolochovsky A. Structural benchmark creep and creep damage testing for finite element analysis with material tension–compression asymmetry and symmetry / A. Zolochovsky, A. Martynenko, A. Kuhhorn // Computers and Structures. – 2012. – Vol. 100-101. – P. 27-38.

286. Watanabe H. Tension-Compression Asymmetry Under Superplastic Flow in Magnesium Alloys / H. Watanabe, M. Fukusumi // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2014. – Vol. 23(10). – P. 3551-3557.

Приложение А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2020613572**

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):
2020613572

Дата регистрации: **18.03.2020**

Номер и дата поступления заявки:
2020612471 06.03.2020

Дата публикации и номер бюллетеня:
18.03.2020 Бюл. № 3

Контактные реквизиты:
нет

Автор(ы):

Банщикова Инна Анатольевна (RU)

Правообладатель(и):

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) (RU)

Название программы для ЭВМ:

Программный комплекс «SgeePL» для расчёта параметров формообразования и изменяемой геометрии оснастки панелей при медленных режимах деформирования

Реферат:

Программный комплекс предназначен для расчета и оценки кинематических параметров процесса формообразования гладких панелей одинарной и двойной кривизны при медленных режимах деформирования, в том числе при термофиксации, с учетом разных свойств материала на растяжение и сжатие при ползучести. Программный комплекс позволяет решать задачи расчета остаточной формы пластины (прямые задачи) и определения упреждающей геометрии оснастки (обратные задачи) при заданной продолжительности процесса формообразования с учетом упругого восстановления после снятия нагрузок в условиях чистого изгиба. Параллельно могут решаться задачи подбора рационального режима и продолжительности процесса деформирования, оценки уровня напряжений в конструкции. Для моделирования используется метод конечных элементов. Панель разбивается на треугольные элементы. Контур панели может иметь произвольную форму. Результаты расчёта выдаются в виде текстовых файлов.

Язык программирования:

FORTTRAN

Объем программы для ЭВМ:

6 Мб

Приложение Б

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2020613159

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2020613159

Дата регистрации: 11.03.2020

Номер и дата поступления заявки:
2020611873 21.02.2020

Дата публикации и номер бюллетеня:
11.03.2020 Бюл. № 3

Контактные реквизиты:
нет

Автор(ы):

Банщикова Инна Анатольевна (RU)

Правообладатель(и):

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения
Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН)
(RU)

Название программы для ЭВМ:

Программа «CreepDmg» для моделирования формообразования оболочки в режиме ползучести с учетом повреждаемости в системе ANSYS

Реферат:

Программа предназначена для моделирования в пакете ANSYS процесса формообразования сегмента полусферической оболочки из плоской заготовки постоянным давлением в режиме ползучести с учетом накопления повреждений и упругого восстановления после снятия нагрузок. В начальный момент нагружения деформирование материала описывается упругопластической моделью. Программный код для моделирования накопления повреждений встроен в подпрограмму usercreep.f на языке Fortran, входящую в комплект пакета ANSYS и предназначенную для создания пользовательских моделей ползучести. Ползучесть описывается кинетическими уравнениями со скалярным параметром поврежденности, который отождествлен с нормированной деформацией. Подпрограмма для расчета накопления повреждений может применяться самостоятельно для оценки эксплуатационного ресурса при деформировании в режимах ползучести других элементов конструкций.

Язык программирования:

APDL, Fortran

Объем программы для ЭВМ:

11 Кб

Приложение В

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре

государственный университет»

Дмитриев Э.А.

2020 г.



АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Банщиковой Инны Анатольевны на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Настоящим актом подтверждается, что исследования по деформированию гладких монолитных панелей одинарной и двойной кривизны в процессе ползучести с учетом различного сопротивления конструкционных сплавов растяжению и сжатию, содержащиеся в диссертационной работе Банщиковой Инны Анатольевны, проводились для Филиала ПАО «Компания «Сухой» «Комсомольский-на-Амуре авиационный завод имени Ю.А. Гагарина» в рамках договора на выполнение научно-исследовательских работ между ГОУВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» и ОАО «Комсомольское-на-Амуре авиационное производственное объединение имени Ю.А. Гагарина» №64172/03 от 15 декабря 2003 г. и договора на выполнение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ между НИУ «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева» СО РАН и ГОУВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» №20/03 от 15 декабря 2003 г.

При нахождении упреждающей геометрии оснастки, меняющейся в течение активной фазы формообразования, учитывалась величина упругого восстановления панели после снятия нагрузок. Полученные результаты расчета применялись при принятии решений о дальнейшем выборе рациональных режимов формообразования изделий из алюминиевого сплава В95.

Проректор по науке и инновационной работе,
д.т.н., профессор

А.В. Космынин

Заведующий кафедрой «Авиастроение»
д.т.н.

С.Б. Марьин

Профессор кафедры «Авиастроение»
д.ф.-м.н., исполнитель НИР №64172/03

К.С. Бормотин

Приложение Г

```

C*****
c ***Алгоритмы программы CreePL на языке Fortran**
C*****

```

PROGRAM BASE

```

REAL U[ALLOCATABLE](:),d[ALLOCATABLE](:)
INTEGER I[ALLOCATABLE](:),nnh[ALLOCATABLE](:,:)
REAL*8 A[ALLOCATABLE](:)

```

```

CHARACTER SKAN

```

```

OPEN (20,FILE='in-data')
OPEN (21,FILE='in-topology')
OPEN (22,FILE='in-coordinate')
OPEN (23,FILE='in-fixed')
OPEN (24,FILE='in-displacement0')
OPEN (25,FILE='in-displacement1')
open (1,file='out-result')
READ (20,*) SKAN,SKAN,KEL,SKAN,KY
kyg=10
KELD=KEL*6
NSMAX=KY*6
ALLOCATE(nnh(kel,4))
read (21,*) ((nnh(j,k),k=1,3),j=1,kel)
do j=1,kel
nnh(j,4)=1
enddo

```

```

CALL WIDTH(MW,NB,1000000,KEL,KY,NnH)
MM=MW*2+1
mm1=mw+1
kyg1=kyg+1
k1=4*nsmax
I1=11*keld+5*kel
I2=I1+2*nsmax
l1=(mm+mm1)*nb
l2=l1+3*keld
l3=l2+nsmax*6
m1=9*kel+kyg+3
m2=m1+kel*4
m3=m2+3*nsmax

```

```

c      print 101,k1
c      write (1,101) k1
c 101  format(' размерность массива u ',i6)
c      write (1,104) i2
c      print 104,i2
c      write (1,102) l3
c      print 102,l3
c 104  format(' размерность массива d ',i6)
c 102  format(' размерность массива a ',i10)
c      write (1,103) m3
c      print 103,m3
c 103  format(' размерность массива i ',i6)

```

```

c      write(*,*) nsmax

      ALLOCATE(u(k1),d(i2),i(m3),a(l3))
c      write(*,*) nsmax,keld,ky,kel
c      write(*,*) mw,mm,mm1,nb
      write(1,*) 'размерность задачи ',(k1+i2+l3+m3)
c      write(*,*) k1,i2,l3,m3
      write(*,*) 'размерность матрицы жесткости',l3

      CALL MAPL(U(1),U(NSMAX+1),U(2*NSMAX+1),u(3*nsmax+1),
      *d(1),d(KELD+1),d(2*KELD+1),d(3*KELD+1),
      *d(4*KELD+1),d(5*KELD+1),d(6*KELD+1),d(7*KELD+1),
      *d(8*KELD+1),d(9*keld+1),
      *d(10*keld+1),d(11*keld+kel+1),
      *d(i1+1),d(i1+3*ky+1),d(i1+6*ky+1),
      *A(1),A(NB*MM1+1),a(l1+1),a(l1+keld+1),a(l1+2*keld+1),
      *a(l2+1),a(l2+nsmax+1),a(l2+2*nsmax+1),
      *a(l2+3*nsmax+1),a(l2+4*nsmax+1),a(l2+5*nsmax+1),
      *I(1),i(kel+1),i(4*kel+1),i(9*kel+2),
      *I(m1+1),I(m2+1),i(m2+nsmax+1),i(m2+2*nsmax+1),
      *KEL,KELD,KY,NSMAX,kyg,kyg1,MW,mm1,MM,NB,NnH)
10     continue
      END
C*****
      SUBROUTINE MAPL(U,U1,U2,u0,
      *KR1,KR2,KR3,DF01,DZI,dzim,DEFZ,CV,M,me,H,xnor,X,XX,Y,
      *A,B,SN,QP,EP,W,W1,F1,F2,f3,FN, *ITIP,IJK,ian,igr,NH,NL,nl1,nl2,
      *KEL,KELD,KY,NSMAX,kyg,kyg1,MW,mm1,MM,NB,NNH)
      * ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ.
      REAL U(NSMAX),U1(NSMAX),U2(NSMAX),u0(nsmax),
      *KR1(KELD),KR2(KELD),KR3(KELD),me(keld),
      *DF01(KELD),DZI(KELD),DEFZ(KELD),CV(KELD),
      *M(KELD),H(KEL,7),nv,xnor(4,kel),dzim(keld),T(3)
      REAL*8 FN(KY,6),SN(KEL,6),QP(KEL,6),EP(KEL,6),W(NSMAX),
      *W1(KY,6),F1(NSMAX),F2(NSMAX),A(NB,MM1),B(NB,MM),f3(nsmax),bv(2)
      DIMENSION X(KY,3),Y(6,KY),NH(KEL,4),GS(4),NL(6,KY),
      *XX(3,KY),nl1(nsmax),nl2(nsmax),ian(5,kel), *ev(2),pbv(2),pnv(2),nv(2),cvv(2),NNH(KEL,4)
      CHARACTER SKAN
      INTEGER ITIP(KEL),IJK(3,KEL),igr(0:kyg1)
      BETTA=1.
C      READ (20,*) SKAN,(IGR(i),i=1,kyg)
      igr(0)=igr(kyg)
      igr(kyg1)=igr(1)
      read (22,*) ((XX(j,k),j=1,3),k=1,KY)
c      READ (22,*) SKAN
c      READ (22,*) (H(I,1),I=1,KEL)
      read (23,*) ((NL(i,j),i=1,6),j=1,ky)
      READ      (20,*) SKAN,GS(1)
      READ      (20,*) SKAN
      read (20,*) ev(1),GS(3)
      read (20,*) skan
      read (20,*) skan
      read (20,*) pbv(1),pnv(1),bv(1),nv(1)

```

```

      read (20,*) skan
      read (20,*) skan
      read (20,*) pbv(2),pnv(2),bv(2),nv(2)
      GS(2)=ev(1)
      READ (20,*) SKAN,EPS,MAXIT
      READ (20,*) SKAN,KP
      read (20,*) skan,T(1)
      READ (20,*) SKAN,eps1
c      GS(1)=H(1,1)
c      DO I=1,KEL
c      H(I,7)=-H(I,1)/2.
c      enddo
      DO I=1,KEL
      H(I,1)=GS(1)
      H(I,7)=-H(I,1)/2.
      enddo

      CALL ZID(KY,KEL,X,XX,NH,NNH,ITIP,IJK)
      CALL MGEN(KEL,KY,NSMAX,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,NH,X,GS,
* NL,Y,NB,MW,MM1,MM,U0)
      if(kp.eq.1) then
      CALL PRC1(KEL,EPS,MAXIT,maxip,U1,U2,u0,KR1,KR2,KR3,
* U,KY,NSMAX,DZI,dzim,DF01,H,M,me,CV,
* DEFZ,KELD,ITIP,ijk,igr,kyg,kyg1,ian,xnor,
* KP,BETTA,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,F2,f3,W,NH,
* X,GS,NL,nl1,nl2,Y,NB,MW,MM1,MM,ev,pbv,pnv,bv,nv,cvv,t,eps1)
      else if(kp.eq.2) then
      CALL PRC2(KEL,EPS,MAXIT,maxip,U1,U2,u0,KR1,KR2,KR3,
* U,KY,NSMAX,DZI,dzim,DF01,H,M,me,CV,
* DEFZ,KELD,ITIP,ijk,igr,kyg,kyg1,ian,xnor,
* KP,BETTA,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,F2,f3,W,NH,
* X,GS,NL,nl1,nl2,Y,NB,MW,MM1,MM,ev,pbv,pnv,bv,nv,cvv,t,eps1)
      else
      endif
1000 continue
      END

C*****
      SUBROUTINE TGEN(KELD,KEL,KY,NSMAX,M,DZI,U,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,
* F1,F2,F3,W,NH,X,GS,NL,Y,NB,MW,MM1,MM)
      REAL M(KELD),DZI(KELD),U(NSMAX)
      REAL*8 FN,SN,QP,EP,W1
      REAL*8 A,B,F1,F2,W,F3
      DIMENSION FN(KY,6),SN(KEL,6),QP(KEL,6),EP(KEL,6),W1(KY,6),
* A(NB,MM1),B(NB,MM),F1(NSMAX),F2(NSMAX),F3(NSMAX),W(NSMAX),
* NH(KEL,4),X(KY,3),GS(1,4),
* NL(6,KY),Y(6,KY)
      CALL SNAPR(KELD,KEL,M,SN)
      CALL MT10(MW,KEL,KY,NH,X,GS,SN,W1,FN,EP,QP,2)
C  УЧЕТ ЗАКРЕПЛЕНИЙ
      DO 4,I=1,KY
      DO 4,J=1,6
4      F1((I-1)*6+J)=FN(I,J)

```

```

      CALL GARR(NSMAX,KY,MW,NL,Y,2,B,NB,MM,F1)
C      WRITE(*,*) ' РЕАКЦИИ'
C      WRITE(*, '(6G10.3)') (F1(I),I=1,NSMAX)
C      НАХОЖДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНОГО ВЕКТОРА НАГРУЗОК
      CALL GA2(NB,MW,NSMAX,B,A,MM,MM1,F1,F2,F3)
C      ОБРАТНЫЙ ХОД МЕТОДА ГАУСА, НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ
      CALL GA3(NB,NSMAX,MW,B,MM,MM1,W,F1)
C      НАХОЖДЕНИЕ КОНЕЧНОГО РЕШЕНИЯ С УЧЕТОМ ЗАКРЕПЛЕНИЙ
      DO 12,I=1,KY
      DO 12,J=1,6
      W1(I,J)=W((I-1)*6+J)
12      W1(I,J)=W1(I,J)+Y(J,I)
      CALL SPER(NSMAX,KY,W1,U)
C      WRITE(*,*) 'НАХОЖДЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ'
      CALL MT10(MW,KEL,KY,NH,X,GS,SN,W1,FN,EP,QP,1)
      CALL SDEF(KELD,KEL,DZI,EP)
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE MGEN(KEL,KY,NSMAX,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,
* NH,X,GS,NL,Y,NB,MW,MM1,MM,U0)
      REAL *8 FN,SN,QP,EP,W1
      REAL *8 A,B,F1
      real U0(NSMAX)
      DIMENSION FN(KY,6),SN(KEL,6),QP(KEL,6),EP(KEL,6),W1(KY,6),
* A(NB,MM1),B(NB,MM),F1(NSMAX),
* NH(KEL,4),X(KY,3),GS(1,4),
* NL(6,KY),Y(6,KY)
C ***** ФАЙЛЫ *****
C datamatrix - ЗАПИСЫВАЕТСЯ ИСХ. ЛЕНТОЧНАЯ МАТРИЦА - ВЕРХНЕТРЕУГ;
C datamatrix0 - матрица, сформированная с учетом закрепления;
C      если координаты узлов, толщина элементов, нумерация узлов
C      не меняются- файл datamatrix остается неизменным;
C      если изменяются только закрепления - то корректируется файл datamatrix0

      MRE=MM*8
      OPEN(9,FILE='datamatrix',ACCESS='DIRECT',
* FORM='UNFORMATTED',RECL=8,IOSTAT=KW,ERR=10,BLANK='ZERO')
      OPEN(12,FILE='out-rezultstress',FORM='FORMATTED',IOSTAT=KW3)

      read (24,*) U0
      do j=1,ky
      do i=1,6
      if (nl(i,j).eq.0) THEN
      Y(i,j)=0
      ELSE IF(NL(i,j).eq.1) THEN
      Y(i,j)=u0((j-1)*6+i)
      else
      endif
      enddo
      enddo
      READ (20,*) SKAN,LP
      IF (LP-2) 201,202,203

```

```

201  WRITE(*,*) 'НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ'
      CALL MT10(MW,KEL,KY,NH,X,GS,SN,W1,FN,EP,QP,3)
202  CONTINUE
      IF(NB.NE.NSMAX) THEN
        OPEN(10,FILE='datamatrix0',ACCESS='DIRECT',
          * FORM='UNFORMATTED',RECL=8,IOSTAT=KW,ERR=10,BLANK='ZERO')
        DO 7,I=1,NSMAX
          DO 2,J=1,MM
            N=(I-1)*MM+J
            READ(9,REC=N) B(1,J)
2      WRITE(10,REC=N) B(1,J)
7      CONTINUE
C    УЧЕТ ЗАКРЕПЛЕНИЙ
        CALL GARR(NSMAX,KY,MW,NL,Y,1,B,NB,MM,F1)
        ELSE
          DO 12,I=1,NSMAX
            DO 13,J=1,MM
              N=(I-1)*MM+J
13      READ(9,REC=N) B(I,J)
12      CONTINUE
C    УЧЕТ ЗАКРЕПЛЕНИЙ
        CALL GARR(NSMAX,KY,MW,NL,Y,3,B,NB,MM,F1)
        END IF
        CLOSE(10,ERR=10,STATUS='KEEP')
        OPEN(15,FILE='datamatrix0',ACCESS='DIRECT',
          * FORM='UNFORMATTED',RECL=MRE,IOSTAT=KW,ERR=10,BLANK='ZERO')
C ***** МЕТОД ГАУССА ДЛЯ ЛЕНТОЧНОЙ МАТРИЦЫ *****
C    NB -МАКСИМАЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО СТРОК, КОТОРЫЕ
C    ОБРАБАТЫВАЮТСЯ    ОДНОВРЕМЕННО
C    НАХОЖДЕНИЕ ЛЕНТОЧНОЙ МАТРИЦЫ
        CALL GA1(NB,MW,NSMAX,A,B,MM,MM1)
        GO TO 20
10      WRITE(*,*) 'error'
20      CONTINUE
        GO TO 80
203  OPEN(15,FILE='datamatrix0',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
      * FORM='UNFORMATTED',RECL=MRE,IOSTAT=KW,ERR=10,BLANK='ZERO')
        IF(NB.EQ.NSMAX) THEN
          DO 60,I=1,NSMAX
60      READ(15,REC=I) (B(i,j),j=1,mm)
          ELSE
            END IF
80      CONTINUE
          return
        END
C*****
      SUBROUTINE PRC1(KEL,EPS,MAXIT,maxip,U1,U2,u0,KR1,KR2,KR3,
        *U,KY,NSMAX,DZI,dzim,DF01,H,M,me,CV, *DEFZ,KELD,ITIP,ijk,igr,kyg,kyg1,ian,xnor,
        *KP,BETTA,FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,F2,f3,W,NH,
        *X,GS,NL,nl1,nl2,Y,NB,MW,MM1,MM,ev,pbv,pnv,bv,nv,cvv,t,eps1)

        REAL  U(NSMAX),DZI(KELD),DF01(KELD),u0(nsmx)
        REAL CV(KELD),U1(NSMAX),U2(NSMAX),ev(2),pbv(2),pnv(2), *nv(2),cvv(2),xnor(4,kel),T(3)

```

```

REAL DEFZ(KELD),M(KELD),MAXE,me(6,kel),dzim(keld)
REAL KR1(KELD),KR2(KELD),KR3(KELD),kr33(KELD),H(KEL,7)
REAL *8 FN(KY,6),SN(KEL,6),QP(KEL,6),EP(KEL,6),W(NSMAX),
*W1(KY,6),F1(NSMAX),F2(NSMAX),A(NB,MM1),B(NB,MM),f3(nsmx),bv(2)
DIMENSION X(KY,3),Y(6,KY),NH(KEL,4),GS(4),NL(6,KY), *nl1(nsmx),nl2(nsmx),ian(5,kel)
INTEGER ITIP(KEL),ijk(3,kel),igr(0:kyg1)
CHARACTER SKAN
C процедура организации итераций
C KEL – число элементов
C LEL – число деформаций в элементе
C EPS – максимальная вычислительная погрешность (по перемещениям)
C MAXIT – максимальное число итераций
C U,U1,U2 - перемещения
C KR1,KR2,KR3 - деформации
C KY – число узлов
C NSMAX= KY* число степеней свободы в узле
C KELD = KEL* число деформаций в элементе
C ITIP – тип элемента
C KP – режим деформирования
C*****
22   FORMAT(3X,6G11.4)
24   FORMAT(3X,6G11.4)
      DO I=1,KY
      DO J=1,6
      W1(I,J)=U0((I-1)*6+J)
      ENDDO
      ENDDO
      CALL MT10(MW,KEL,KY,NH,X,GS,SN,W1,FN,EP,QP,1) CALL
      SDEF(KELD,KEL,KR33,EP)
      CALL SDEF(KELD,KEL,m,QP)
C*****печать*****
      write (1,*) 'входные данные'

C*****печать*****
      IF (MAXIT.EQ.1) THEN
      write (1,*) '----НАЧАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ----'
      write (1,24) (u0(i),i=1,nsmx)
      write (1,*) '----НАЧАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ-----'
      write (1,22) (KR33(i),i=1,keld)
      write (1,*) '----НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ-----'
      write (1,22) (M(i),i=1,keld)
      ELSE
      write (1,*) '----ЗАДАННЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ----'
      write (1,24) (u0(i),i=1,nsmx)
      write (1,*) '----ЗАДАННЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ-----'
      write (1,22) (KR33(i),i=1,keld)
      ENDIF
      NITER=0
      KIT=0
      ICON=0
      T3=2
      R2=1
      R1=1

```

```

DO 10 I=1,KELD
10  DEFZ(I)=kr33(I)
100  NITER=NITER+1
      PRINT 21,NITER
      write (1,21) niter
      write (12,21) niter
21  FORMAT(/,5X,'_____ ИТЕРАЦИЯ НОМЕР _____',I5/)
      write (1,*) ' МОМЕНТЫ В ЭЛЕМЕНТАХ ПЕРЕД РАЗГРУЗКОЙ '
      call sm(itip,kr3,KR33,dzi,def,m,kp,h,kel,keld,ev,pbv,pnv,bv,nv,
*  cv,t,R1,R2,T3,GS,niter,eps1)
      write (1,24) m
      CALL TGEN(KELD,KEL,KY,NSMAX,M,DZI,U, *FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,F2,f3,W,NH, *
X,GS,NL,Y,NB,MW,MM1,MM)
      write (1,*) ' ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УПРУГОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ'
      write (1,24) (u(i),i=1,nsmax)
      DO 904 I=1,KELD
904  DZI(I)=KR33(I)-DZI(I)
      do 907 i=1,keld
907  kr33(i)=kr33(i)+beta*(defz(i)-dzi(i))
C    ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ОКОНЧАНИЯ ИТЕРАЦИЙ
      CALL CONTW(EPS,U,U2,NSMAX,MAXE,ICON)
      PRINT 1720,MAXE
      write (1,1720) maxe
1720 FORMAT (' МАКСИМАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ',G20.8/)
      DO 112 I=1,NSMAX
112  U2(I)=U(I)
      IF(NITER.GE.MAXIT) ICON=1
      IF(ICON.EQ.0) GO TO 100
C***** REZALTS*****
      WRITE(1,*) '***** РЕЗУЛЬТАТЫ *****'
      IF (MAXIT.EQ.1) THEN
C    прямая задача
      DO I=1,NSMAX
      U1(I)=U0(I)-U(I)
      ENDDO
      WRITE(1,*) 'ПРОГИБ РАСПРУЖИНИВАНИЯ '
      WRITE(1,24) (U(I),I=1,nsmax)
      write (1,*) 'ОСТАТОЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ'
      write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
      write(1,*) 'остаточные деформации'
      write(1,24) DZI

      ELSE
C    обратная задача
      DO I=1,NSMAX
      U1(I)=U(I)+U0(I)
      enddo
      WRITE(1,*) 'ПРОГИБ РАСПРУЖИНИВАНИЯ '
      WRITE(1,24) (U(I),I=1,nsmax)
      write (1,*) 'НАЧАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ'
      write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
      write(1,*) 'НАЧАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ'
      write(1,24) kr33

```

ENDIF

1000 CONTINUE

stop

END

C*****

SUBROUTINE PRC2(KEL, EPS, MAXIT, maxip, U1, U2, u0, KR1, KR2, KR3,

*U, KY, NSMAX, DZI, dzim, DF01, H, M, me, CV, *DEFZ, KELD, ITIP, ijk, igr, kyg, kyg1, ian, xnor,

*KP, BETTA, FN, SN, QP, EP, W1, A, B, F1, F2, f3, W, NH,

*X, GS, NL, nl1, nl2, Y, NB, MW, MM1, MM, ev, pbv, pnv, bv, nv, cvv, t, eps1)

REAL U(NSMAX), DZI(KELD), DF01(KELD), u0(nsmax)

REAL CV(KELD), U1(NSMAX), U2(NSMAX), ev(2), pbv(2), pnv(2), *nv(2), cvv(2), xnor(4, kel), T(3)

REAL DEFZ(KELD), M(KELD), MAXE, me(6, kel), dzim(keld)

REAL KR1(KELD), KR2(KELD), KR3(KELD), kr33(KELD), H(KEL, 7)

REAL *8 FN(KY, 6), SN(KEL, 6), QP(KEL, 6), EP(KEL, 6), W(NSMAX),

*W1(KY, 6), F1(NSMAX), F2(NSMAX), A(NB, MM1), B(NB, MM), f3(nsmax), bv(2)

DIMENSION X(KY, 3), Y(6, KY), NH(KEL, 4), GS(4), NL(6, KY), *nl1(nsmax), nl2(nsmax), ian(5, kel)

INTEGER ITIP(KEL), ijk(3, kel), igr(0:kyg1)

CHARACTER SKAN

C процедура организации итераций

C KEL – число элементов

C LEL – число деформаций в элементе

C EPS – максимальная вычислительная погрешность (по перемещениям)

C MAXIT – максимальное число итераций

C U, U1, U2 - перемещения

C KR1, KR2, KR3 - деформации

C KY – число узлов

C NSMAX= KY* число степеней свободы в узле

C KELD = KEL* число деформаций в элементе

C ITIP – тип элемента

C KP – режим деформирования

C*****

22 FORMAT(3X, 6G11.4)

24 FORMAT(3X, 6G11.4)

read (25, *) U1

DO I=1, KY

DO J=1, 6

W1(I, J)=U0((I-1)*6+J)

ENDDO

ENDDO

CALL MT10(MW, KEL, KY, NH, X, GS, SN, W1, FN, EP, QP, 1)

CALL SDEF(KELD, KEL, KR33, EP)

CALL SDEF(KELD, KEL, m, QP)

C*****печать*****

write (1, *) 'входные данные'

write (1, *) '-----НАЧАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ-----'

write (1, 24) (u0(i), i=1, nsmax)

write (1, *) '-----НАЧАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ-----'

write (1, 22) (KR33(i), i=1, keld)

write (1, *) '-----НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ-----'

write (1, 22) (M(i), i=1, keld)

C*****

```

DO I=1,KY
DO J=1,6
W1(I,J)=U1((I-1)*6+J)
ENDDO
ENDDO
CALL MT10(MW,KEL,KY,NH,X,GS,SN,W1,FN,EP,QP,1)
CALL SDEF(KELD,KEL,KR3,EP)
CALL SDEF(KELD,KEL,m,QP)
с*****печать*****
IF (MAXIT.EQ.1) THEN
write (1,*) '-----ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ-----'
write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
write (1,*) '-----ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ-----'
write (1,22) (KR3(i),i=1,keld)
ELSE
write (1,*) '-----ЗАДАННЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ-----'
write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
write (1,*) '-----ЗАДАННЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ-----'
write (1,22) (KR3(i),i=1,keld)
ENDIF
NITER=0
KIT=0
ICON=0
T3=2
R2=1
R1=1
DO 10 I=1,KELD
10 DEFZ(I)=kr3(I)
100 NITER=NITER+1
PRINT 21,NITER
write (1,21) niter
write (12,21) niter
21 FORMAT(/,5X,'_____ ИТЕРАЦИЯ НОМЕР _____',I5/)
write (1,*) ' МОМЕНТЫ В ЭЛЕМЕНТАХ ПЕРЕД РАЗГРУЗКОЙ '
call sm(itip,kr3,KR33,dzi,def,m,kp,h,kel,keld,ev,pbv,pnv,bv,nv,
* cv,t,R1,R2,T3,GS,niter,eps1) write (1,24) m
CALL TGEN(KELD,KEL,KY,NSMAX,M,DZI,U, *FN,SN,QP,EP,W1,A,B,F1,F2,f3,W,NH, *
X,GS,NL,Y,NB,MW,MM1,MM)
write (1,*) ' ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УПРУГОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ'
write (1,24) (u(i),i=1,nsmax)

DO 904 I=1,KELD
904 DZI(I)=KR33(I)+KR3(I)-DZI(I)
do 907 i=1,keld
907 kr3(i)=kr3(i)+betta*(defz(i)-dzi(i))
CC ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ОКОНЧАНИЯ ИТЕРАЦИЙ
CALL CONTW(EPS,U,U2,NSMAX,MAXE,ICON)
PRINT 1720,MAXE
write (1,1720) maxe
1720 FORMAT (' МАКСИМАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ',G20.8/)
DO 112 I=1,NSMAX
112 U2(I)=U(I)
IF(NITER.GE.MAXIT) ICON=1

```

```

      IF(ICON.EQ.0) GO TO 100
C***** REZALTS*****
      WRITE(1,*) '***** РЕЗУЛЬТАТЫ *****'
      IF (MAXIT.EQ.1) THEN
C      прямая задача
      DO I=1,NSMAX
      U1(I)=U0(I)+U1(I)-U(I)
      ENDDO
      WRITE(1,*) 'ПРОГИБ РАСПРУЖИНИВАНИЯ '
      WRITE(1,24) (U(I),I=1,nsmax)
      write (1,*) 'ОСТАТОЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ'
      write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
      write(1,*) 'остаточные деформации'
      write(1,24) DZI

      ELSE
C      обратная задача
      DO I=1,NSMAX
      U1(I)=U1(I)+U(I)-U0(I)
      enddo
      WRITE(1,*) 'ПРОГИБ РАСПРУЖИНИВАНИЯ '
      WRITE(1,24) (U(I),I=1,nsmax)
      write (1,*) 'ДОБАВОЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ'
      write (1,24) (u1(i),i=1,nsmax)
      write(1,*) 'ДОБАВОЧНЫЕ деформации'
      write(1,24) kR3
      ENDIF

1000  CONTINUE
      stop
      END
C*****
      SUBROUTINE SM(ELTIP,KR3,KR33,dZI,def,M,KP,
      *H,KEL,KELD,ev,pbv,pnv,bv,nv,cv,t1,R1,R2,T3,GS,niter,eps1)
C ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ, ВЫЗЫВАЮЩИХ РАЗГРУЗКУ
C      IT - НОМЕР ИТЕРАЦИИ.
C      M(KELD,6) - МОМЕНТЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ РАЗГРУЗКУ.
C      KR3(KELD) - ДЕФОРМАЦИИ.
C      DEF(6,KEL) - ДЕФОРМАЦИИ,
C      H(KEL,1) - ТОЛЩИНА ПЛАСТИНЫ
C      КР - ТИП ЗАДАЧИ
      REAL M(KELD),Z(13),Y1(13),Y2(13),Y3(13),H(KEL,7),
      * ZB1(13),ZB2(13),ZB3(13),ZZ1(13),ZZ2(13),ZZ3(13),
      * YB1(13),YB2(13),YB3(13),YYB1(13),YYB2(13),YYB3(13),
      * SB1(13,13),SB2(13,13),SB3(13,13),EV(2),PBV(2),PNV(2),
      * NV(2),CV(2),KR3(KELD),def(6,kel),KR33(keld),
      * YS1(13),YS2(13),YS3(13),DZI(6,KEL),S0mx,Smx,T1(3),
      * S0xr,Sxr
      DIMENSION GS(4)
      INTEGER ELTIP(KEL)
      DOUBLE PRECISION D3,BV(2),C,D2
      CHARACTER SKAN
      T=T1(1)

```

```

EH=0.0001
C=-EV(1)/(1.-GS(3)**2)
D3=R1*EV(1)*R2/(1.-GS(3)**2)/T**R2
D2=(R1-1)*EV(1)/(1.-GS(3)**2)/T
R3=R2-1
LH=13
LB=13
S0mx=0
Smx=0
S0xr=0
Sxr=0

DO 1 NEL=1,KEL
WRITE(*,*) NEL
DO 1112 I=1,6
1112  M((NEL-1)*6+i)=0.
1111  D=H(NEL,1)/(LH-1)
      DO 3 J=1,LH
      Z(J)=H(NEL,7)+(J-1)*D
3      IF( ABS(Z(J)).LE.(H(NEL,1)*.001) ) Z(J)=0.
C      СЛУЧАЙ ДЕФ-ЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ.
      DO 715 J=1,LH
      H0=1.E-20

      if(kp.eq.1) then
      EE1=KR33((NEL-1)*6+4)*Z(J) + KR33((NEL-1)*6+1)
      EE2=KR33((NEL-1)*6+5)*Z(J) + KR33((NEL-1)*6+2)
      EE12=KR33((NEL-1)*6+6)*Z(J)/2. + KR33((NEL-1)*6+3)/2.
      S1=EV(1)*(EE1+EE2*GS(3))/(1-GS(3)**2)
      S2=EV(1)*(EE2+EE1*GS(3))/(1-GS(3)**2)
      S12=EV(1)*EE12/(1+GS(3))
      SI=(S1**2+S2**2-S1*S2+3*S12**2)**0.5

      if (SI.gt.S0mx) then
      EII=SI*(1+GS(3))/EV(1)
      S0mx=SI
      N0mx=NEL
      ENDIF

      if (J.eq.11) then
      if (SI.gt.S0xr) then
      S0xr=SI
      Nxr=NEL
      ENDIF
      endif
      CALL RKM11(H0,T,EPS1,EH,E1,E2,E12,S1,S2,S12,C,bv,D3,nv,R3,
* NEL,Nmx,J,kp,GS(3))

      else if(kp.eq.2) then
      E1=KR3((NEL-1)*6+4)*Z(J) + KR3((NEL-1)*6+1)
      E2=KR3((NEL-1)*6+5)*Z(J) + KR3((NEL-1)*6+2)
      E12=KR3((NEL-1)*6+6)*Z(J)/2. + KR3((NEL-1)*6+3)/2.
      EI=SQRT( E1**2+E2**2+E1*E2+E12**2 )**2./SQRT(3.)

```

```

EE1=KR33((NEL-1)*6+4)*Z(J) + KR33((NEL-1)*6+1)
EE2=KR33((NEL-1)*6+5)*Z(J) + KR33((NEL-1)*6+2)
EE12=KR33((NEL-1)*6+6)*Z(J)/2. + KR33((NEL-1)*6+3)/2.

```

```

S1=EV(1)*(EE1+EE2*GS(3))/(1-GS(3)**2)
S2=EV(1)*(EE2+EE1*GS(3))/(1-GS(3)**2)
S12=EV(1)*EE12/(1+GS(3))
SI=(S1**2+S2**2-S1*S2+3*S12**2)**0.5

```

```

if (SI.gt.S0mx) then
  EII=SI*(1+GS(3))/EV(1)
  S0mx=SI
  N0mx=NEL
ENDIF

```

```

if (J.eq.11) then
  if (SI.gt.S0xr) then
    S0xr=SI
    Nxr=NEL
  ENDIF
endif
CALL RKM11(H0,T,EPS1,EH,E1,E2,E12,S1,S2,S12,C,bv,D3,nv,R3,
* NEL,Nmx,J,kp,GS(3))
endif
continue

```

```

716   GOTO 717
      S1=0.
      S2=0.
      S12=0.
717   SI=(S1**2+S2**2-S1*S2+3*S12**2)**0.5
      if (SI.gt.Smx) then
        Smx=SI
        Nmx=NEL
      ENDIF

```

```

if ((J.eq.11).and.(Nxr.eq.nel)) then
  Sxr=SI
endif

```

```

      Y1(J)=S1*Z(J)
      Y2(J)=S2*Z(J)
      Y3(J)=S12*Z(J)
715   CONTINUE
      m((NEL-1)*6+4)=SIMPS(LH,D,Y1)
      M((NEL-1)*6+5)=SIMPS(LH,D,Y2)
      M((NEL-1)*6+6)=SIMPS(LH,D,Y3)
1     CONTINUE
      Write(12,*) 'Nmx',Nmx,' S0mx',S0mx,' EII',EII
      Write(12,*) 'N0mx',N0mx,' Smx',Smx
      Write(12,*) 'Nxr',Nxr,' S0xr',S0xr,' Sxr',Sxr
      RETURN
      END

```

C*****

```

      SUBROUTINE RKM11(H0,H,EPS,EH,E1,E2,E12,S1,S2,S12,C,bv,D,nv,R3,
      * NEL,Nmx,J,kp,v)
C  МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ-МЕРСОНА
      DOUBLE PRECISION Y(3),D,C,bv(2)
      real nv(2)
30    X=1.E-20
      Y(1)=S1
      Y(2)=S2
      Y(3)=S12
2     X1=X
3     CALL RKM(3,X,H0,EPS,Y,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,H,kp,v)
      H0=SIGN(H0,H)
      D1=X1+H-X
      IF(ABS(D1).LE.EH*ABS(X)) GO TO 4
      IF((D1.LT.0).and.(H.GT.0)) H0=D1
      GO TO 3
4     S1=Y(1)
      S2=Y(2)
      S12=Y(3)
20    CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      subroutine RKM(N,X,H,EPS,Y,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      DOUBLE PRECISION Y(3),Z(3),F(3),K1(3),K3(3),D,bv,C
      real nv(2)
      CALL RP(X,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      DO 11,I=1,N
11     Z(I)=Y(I)
12     H3=H/3
      H4=H3*4
      DO 13,I=1,N
13     K1(I)=H3*F(I)
      Y(I)=Z(I)+K1(I)
      CALL RP(X+H3,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      DO 14,I=1,N
14     Y(I)=Z(I)+(K1(I)+H3*F(I))/2
      CALL RP(X+H3,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      DO 15,I=1,N
      K3(I)=H*F(I)
15     Y(I)=Z(I)+0.375*(K1(I)+K3(I))
      CALL RP(X+H/2,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      DO 16,I=1,N
      K1(I)=K1(I)+H4*F(I)
16     Y(I)=Z(I)+1.5*(K1(I)-K3(I))
      CALL RP(X+H,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,v)
      R=0.
      DO 17,I=1,N
      A=H3*F(I)
      Y(I)=Z(I)+(K1(I)+A)/2
      A=2*K1(I)-3.*K3(I)-A
      IF(Y(I).NE.0.) A=A/Y(I)
17     IF(ABS(A).GT.R) R=ABS(A)

```

```

      IF(R.LE.EPS) GO TO 18
      H=H/2
      GO TO 12
18    X=X+H
      IF(32*R.LT.EPS) H=2*H
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE RP(X,Y,F,E1,E2,E12,C,bv,D,nv,R3,T0,kp,V)
      DOUBLE PRECISION Y(3),F(3),S(7),FI(10),XX,C,D,bv(2)
      real nv(2)
      S(1)=(Y(1)**2+Y(2)**2-Y(1)*Y(2)+3*Y(3)**2)**0.5
      if(S(1).eq.0) THEN
        FI(5)=0
        FI(6)=0
        FI(7)=0
      ELSE
        S(2)=(Y(1)+Y(2))/S(1)
        FI(1)=bv(1)*S(1)**(nv(1)-1)
        FI(2)=bv(2)*S(1)**(nv(2)-1)
        FI(3)=0.25*(FI(1)+FI(2))+0.125*(FI(1)-FI(2))*(S(2)**3-3*S(2))
        FI(4)=1.125*(bv(2)*S(1)**(nv(2)-2)/(nv(2)+1)-
* bv(1)*S(1)**(nv(1)-2)/(nv(1)+1))*(S(2)**2-1)
        S(3)=2*Y(1)-Y(2)
        S(4)=Y(2)**2-Y(1)*Y(2)+2*Y(3)**2
        S(5)=2*Y(2)-Y(1)
        S(6)=Y(1)**2-Y(1)*Y(2)+2*Y(3)**2
        S(7)=(Y(1)+Y(2))*Y(3)

        FI(5)=FI(3)*S(3)+FI(4)*S(4)
        FI(6)=FI(3)*S(5)+FI(4)*S(6)
        FI(7)=3*FI(3)*Y(3)-FI(4)*S(7)
      END IF
      C3=1-V
      IF(X.EQ.0) THEN
        XX=0.
      ELSE
        XX=(T0-X)**R3
      END IF
      if(kp.eq.1) then
        F(1)=C*(FI(5)+V*FI(6))
        F(2)=C*(FI(6)+V*FI(5))
        F(3)=C*C3*FI(7)
      else if(kp.eq.2) then
        F(1)=C*(FI(5)+V*FI(6))+D*XX*(E1+V*E2)
        F(2)=C*(FI(6)+V*FI(5))+D*XX*(E2+V*E1)
        F(3)=C*C3*FI(7)+D*XX*C3*E12
      Endif
      RETURN
      END

```

Приложение Д

```

С*****
с ***Алгоритмы программы CreepDmg на языке APDL
с*** для моделирования в пакете ANSYS процесса формообразования
с***полусферической оболочки из плоской заготовки постоянным
с***давлением с учетом пластичности в режиме ползучести с учетом
с***накопления повреждений.
с *** Для моделирования накопления повреждений необходимо
с***использование пользовательской подпрограммы usercreep.F на
с***языке Fortan с ее компиляцией в пакет ANSYS
С*****
FINISH
/CLEAR
/CONFIG,Nres,100000
/PREP7
ANTYPE,STATIC
NLGEOM,On           ! активация опции нелинейной задачи
ET,1,SHELL181       ! оболочечный элемент
R,1,0.016           ! толщина пластины
MP,EX,1,100000      ! модуль Юнга
MP,NUXY,1,0.30      ! коэффициент Пуассона
SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,0.016, 1, , 11
TB,MISO,1,1,6       ! активация модели пластичности
TBPT,DEFI,0.00068,68 ! данные для кривой пластичности
TBPT,DEFI,0.001,81
TBPT,DEFI,0.002,97
TBPT,DEFI,0.005,107
TBPT,DEFI,0.015,112
TBPT,DEFI,0.05,114
TBPLLOT,MISO,1      ! график кривой пластичности
! активация модели ползучести, без учета повреждаемости
! параметры ползучести установившейся стадии для степенного закона
!TB,CREEP,1,1,3,10
!TBDATA,,1.97e-14,5.5
! активация пользовательской модели ползучести
! с учетом повреждаемости
! параметры ползучести
TB,CREEP,1,1,5,100
TBTEMP,250
TBDATA,,1.97e-14, 5.5 , 3.97e-14, 0.65, 5.4
TB,STATE,1,,2
! построение конечно-элементной сетки
CSYS,1              ! переход к цилиндрической системе координат
N,1,0.001           ! задание местонахождения первого узла
N,11,1.7            ! местоположение одиннадцатого узла
FILL,,,,,,,,1       ! заполнение узлами отрезка между узлами 1 и 11
NGEN,2,11,1,11,1,,5 ! генерация остальных узлов
NROTAT,ALL          ! сектор оболочки в силу симметрии

```

```

E,1,2,13,12          ! создание элемента по узлам
EGEN,10,1,1          ! генерация остальных элементов

nrotat,all
! закрепление перемещение на контуре
! отсутствие смещений в направлении оси Z и вдоль радиуса,
! шарнирное опирание
D,11,UX,,,22,11,UY,UZ,ROTX,ROTZ
! закрепление боковых сторон сектора в силу симметрии
D,1,UY,,,10,,ROTX,ROTZ
D,12,UY,,,21,,ROTX,ROTZ
! закрепление центральной точки
D,12,UX
D,12,UY
D,1,UX
D,1,UY
ESEL,ALL
PM=0.4508             ! константа PM -давление
! цикл из 10 шагов для приложения давления в каждом элементе
*DO,I,1,10
SFE, I,,PRESS,,PM
*ENDDO
FINISH                ! окончание работы в предпроцессоре
/SOLU                 ! активация решателя
/UIS,MSGPOP,3
/NERR, 5,100000
ERESX, No
ALLSEL
! задача - деформирование оболочки при постоянном давлении PM
RATE,OFF              ! в начале расчет по упругопластической модели
TIME,1.0E-8
SOLVE                 ! решение при упругом нагружении
OUTRES,ALL,all
RATE,ON               ! активация расчета с учетом ползучести
DELTIM,0.001,0.001,0.2
TIME,7200             ! время деформирования 2 ч
OUTRES,ALL,100
SOLVE                 ! решение с учетом ползучести
/COPY, FILE, IST, , F1, 1,
! начало этапа снятия нагрузки и упругого распружинивания
! цикл для задания давления в каждом элементе равным нулю
*DO,I,1,10            ! цикл 10 элементов
SFE, I,,PRESS,,0
*ENDDO
RATE,OFF              ! отключение учета ползучести, упругая разгрузка
TIME,7200+1.0E-8
SOLVE                 ! расчет остаточного прогиба и напряжений
OUTRES,ALL,all
FINISH

```

```
/POST1 ! вход в постпроцессор для просмотра решения
CSYS,1
DSYS,1
RSYS,1
```

```
C*****
c ***Программа на языке Fortran**
c *** код для пользовательской подпрограммы
c ***usercreep.F, входящей в пакет Ansys для моделирования
c*** накопления повреждений при ползучести
c***
C*****
```

```
*deck,usercreep      parallel user                        gal
      SUBROUTINE usercreep (impflg, ldstep, isubst, matId , elemId,
&          kDInPt, kLayer, kSecPt, nstatv, nprop,
&          prop , time , dtime , temp , dtemp ,
&          tofst, statev, creqv , pres , seqv ,
&          delcr , dcrda)
```

```
C*****
c      *** primary function ***
c      Define creep laws when creep table options are
c      TB,CREEP with TBOPT=100.
C*****
```

```
#include "impcom.inc"
```

```
      DOUBLE PRECISION ZERO
      PARAMETER      (ZERO = 0.0d0)
c
c --- argument list
c
      INTEGER      ldstep, isubst, matId , elemId,
&          kDInPt, kLayer, kSecPt, nstatv,
&          impflg, nprop
      DOUBLE PRECISION dtime , time , temp , dtemp , tofst,
&          creqv , seqv , pres
      DOUBLE PRECISION prop(*), dcrda(*), statev(nstatv)
c
c --- local variables
c
      DOUBLE PRECISION c1 , c2 , c3 , c4 , c5,
&          con1 , delcr , t
c
C*****
```

```
      if(isubst.eq.1) statev(1)=0.
```

```

c *** skip when stress and creep strain are all zero
  if (seqv.LE.ZERO.AND.creqv.LE.ZERO) GO TO 990
c *** add temperature off set
  t      = temp + tofst
c *** Primary creep function
  c1      = prop(1)
  c2      = prop(2)
  c3      = prop(3)
  c4      = prop(4)
  c5      = prop(5)
c *** calculate incremental creep strain
  if (creqv .le. TINY) creqv = sqrt(TINY)
  delcr   = ZERO
  IF(c1.gt.ZERO) delcr = (exp( log(c1) + c2 * log(seqv) -
&                c4 * log(1-statev(1)))) * dtime

c *** derivative of incremental creep strain to effective stress
  dcrda(1)= c2 * delcr / seqv
c *** derivative of incremental creep strain to effective creep strain
  dcrda(2)= c4*delcr/(1.-statev(1))
c *** write the effective creep strain to last state variable for verification
  statev(2) = ((c3*seqv**c5)/(1-statev(1))**c4)*dtime
  statev(1) = statev(1)+statev(2)

990 continue
  if ((ksecpt.eq.1).and.(elemId.eq.1)) then
    write (10,*) '-----'
    write (10,*) 'time',time,statev
    write (10,*) 'elm',elemId, kdinpt,ksecpt,isubst
  end if

C 2000 format (/' ***** CALL TO ANSYS,INC DUMMY USER01 *****'/)
c10 write (10,*) ' error of writing'
  return
end

```