

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Бойко Светлана Владимировна

**Моделирование формообразования элементов конструкций
в условиях нестационарной ползучести**

Специальность 01.02.04 — «механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Ларичкин Алексей Юрьевич

Новосибирск — 2020

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Состояния исследований	12
Выводы по первой главе	21
Глава 2. Моделирование процессов ползучести и длительной прочности с учетом поврежденности материала	23
2.1 Энергетический вариант теории ползучести	23
2.1.1 Метод определения характеристик ползучести при стационарном процессе нагружения	25
2.1.2 Получение характеристик ползучести материала с использованием программного модуля	31
2.1.3 Определение параметров ползучести для материалов при стационарном процессе нагружения	33
2.1.4 Метод определения характеристик ползучести при нестационарном процессе нагружения	38
2.2 Процесс ползучести при чистом изгибе прямоугольной балки . . .	40
2.2.1 О границах применимости теории чистого изгиба балок . .	40
2.2.2 О типах задач медленного деформирования	43

2.3	Процесс ползучести при чистом изгибе прямоугольной балки для материала с одинаковыми свойствами ползучести на растяжение и сжатие	46
2.3.1	Постановка задачи.	47
2.3.2	Численные методы решения.	50
2.3.3	Результаты численного расчета для балки прямоугольного сечения	53
2.4	Деформирование балок прямоугольного сечения в условиях ползучести с различными свойствами на растяжение и сжатие. . .	56
2.4.1	Постановка задачи.	56
2.4.2	Численный метод решения.	58
2.4.3	Результаты численного расчета для балки прямоугольного сечения.	59
2.5	Моделирование методом конечных элементов в пакете MSC.Marc Mentat.	62
2.5.1	Теория и алгоритмы решения.	62
2.5.2	Результаты трехмерного компьютерного моделирования . .	69
2.6	Учет влияния температурной выдержки и релаксации	73
2.6.1	Испытания на ползучесть и характеристики сплава АБВТ-20	74
2.6.2	Сравнение численного расчета с данными испытаний на балках	81
2.6.3	Релаксация балки	84
	Выводы по второй главе	88
	Глава 3. Решение обратной задачи для формообразования элементов конструкций	90
3.1	Решение прямой задачи	91
3.1.1	Расчет НДС балки таврового сечения	91

3.1.2	Приближенный расчет чистого изгиба тавра по характеристической точке	93
3.1.3	Оценка средней по объему мощности рассеяния	96
3.1.4	Анализ решения задачи о изгибе балки таврового сечения в условиях ползучести	98
3.2	Обратная задача формообразования элементов конструкций.	101
3.2.1	Постановка задачи.	101
3.2.2	Решение обратной задачи формообразования для балки таврового сечения в процессе ползучести.	103
3.2.3	Приближенный расчет геометрии оснастки для формообразования панелей в режиме ползучести.	104
3.2.4	Результаты численного расчета.	107
3.2.5	Компьютерное моделирование процесса формообразования оребренной панели.	111
	Выводы по третьей главе	117
	Заключение	118
	Литература	120

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Для современного развития авиа, машиностроения и кораблестроения актуальной задачей является сохранение ресурса изделия на стадии его изготовления и уменьшение веса конструкции при сохранении эксплуатационных характеристик. Обеспечение пониженного веса и прочности конструкций достигается использованием композиционных материалов и современных легких сплавов из алюминия и титана. Геометрическая оптимизация конструкций по параметрам прочности и веса требует использования алгоритмов для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) с приемлемой для практических целей точностью. Кроме того, моделирование необходимо проводить с учетом изменения остаточного ресурса изделия в случае нестационарных условий нагружения. При моделировании формообразования и эксплуатации конструкций в процессе ползучести необходимо учитывать физическую нелинейность материалов, а также изменение их свойств под действием температурной выдержки и длительного силового воздействия. Получение оптимальных параметров процессов формообразования габаритных изделий является актуальной проблемой для авиастроения и космической отрасли. Решению задач получения оптимальных параметров процессов формообразования и оценки степени поврежденности орбренных конструкций при нестационарных

режимах нагружения посвящено данное исследование.

Чаще всего в технике используются оребренные панели различной кривизны, поскольку они имеют пониженные весовые характеристики при достаточной прочности конструкции. Оребрение полотна заготовки может иметь различные профили сечения, в том числе, Г-образные, Т-образные профили.

Для моделирования формообразования элементов сложных конструкций необходимо понимать как ведут себя при нагрузках более простые детали, такие как Т-образные профили, балки. Актуальной задачей является моделирование процессов высокотемпературной ползучести и длительной прочности с учетом накопления поврежденности материала и влияния температурно-силовых факторов.

Настоящее исследование охватывает несколько типов конструкционных сплавов, свойства которых зависят от вида напряженно-деформированного состояния. Рассматриваются задачи чистого изгиба балок различного сечения в условиях ползучести с учетом различных свойств материала при растяжении и сжатии, а также влияние температурно-силовых факторов и накопленной при деформировании поврежденности материала на параметры процесса формообразования.

Степень разработанности проблемы. Задачи теории ползучести имеют непосредственное отношение к авиа и ракетостроению, атомной энергетике и судостроению. В России есть несколько школ, которые занимаются решением задач и разработкой теории ползучести: статистический подход в ползучести разрабатывает Самарская школа ак. Самарина [1], развитием классического подхода занимается школа ак. Работнова в Москве [2–5], подход с учетом уравнения сохранения массы и изменения плотности материала при накоплении повреждений занимается Санкт-Петербургская школа профессора Арутюняна Р.А. [6], в Новосибирске экспериментальные исследования проводит школа

Соснина О.В. [7–9] применительно к технологическим процессам обработки материалов давлением и разработке моделей анизотропной ползучести с учетом скалярного параметра поврежденности. За рубежом стоит отметить серию экспериментально теоретических работ prof. Hayhurst D.R. (Англия), а также группу ученых во главе с prof. Altenbach Н. (Германия), которые строят и применяют реологические модели неупругого деформирования для описания обратной ползучести и поврежденности материалов. В предлагаемой работе автор рассматривает задачи деформирования элементов конструкций в условиях ползучести с учетом влияния температурно-силовых факторов на свойства материала, а также учет накопления поврежденности при помощи энергетического подхода.

Цели и задачи.

Целью диссертационной работы является разработка методов решения прямых и обратных задач формообразования элементов конструкций с учетом физической нелинейности материала и учетом влияния поврежденности материала на процесс формообразования элементов конструкций.

Достижение поставленной цели связано с решением следующих задач:

1. формулировка системы определяющих уравнений с одним скалярным параметром поврежденности для описания процессов деформирования металлических материалов в условиях ползучести без ограничений на значения деформаций ползучести и диссипации энергии в момент разрушения;
2. разработка методов решения прямых и обратных задач формообразования элементов конструкций;
3. исследование влияния поврежденности материала на процесс формообразования элементов конструкций; получение оптимальных параметров процесса деформирования орребренной панели.

Научная новизна работы

1. Предложен вариант уточненной системы определяющих уравнений с одним скалярным параметром поврежденности для описания процессов деформирования (вплоть до разрушения) металлических материалов в условиях ползучести без ограничений на значения деформаций ползучести и диссипации энергии в момент разрушения.

2. Разработан метод решения задач знакопеременного изгиба балок различного поперечного сечения в режиме ползучести с учетом температурной выдержки без нагрузки. Численная модель учитывает различие свойств материала на растяжение и сжатие в процессе ползучести, а также наличие накопленных повреждений.

3. Введен параметр поврежденности материала в конечно-элементный пакет MSC.Marc для процессов деформирования (вплоть до разрушения) элементов конструкций в условиях ползучести.

4. Разработана методика определения оптимальных параметров процессов деформирования ребренной панели, основанная на определении и расчетно-экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния балок различного поперечного сечения в условиях ползучести с учетом поврежденности материала.

Положения, выносимые на защиту:

1. Уточненная система определяющих уравнений с одним скалярным параметром повреждаемости для описания процессов деформирования (вплоть до разрушения) металлических материалов в условиях ползучести без ограничений на значения деформаций ползучести и диссипации энергии в момент разрушения;

2. Исследование знакопеременного изгиба балок прямоугольного сечения в режиме ползучести, с учетом температурной выдержки без нагрузки, и различий свойств материала на растяжение и сжатие, а также наличие накопленных повреждений в материале в процессе ползучести. Проверка адекватности

предложенного метода экспериментальными данными.

3. Численные реализации решения прямых и обратных задач изгиба балок различного поперечного сечения в условиях ползучести с учетом поврежденности материала.

4. Методика определения оптимальных параметров процессов деформирования в условиях ползучести с учетом поврежденности материала.

Достоверность научных исследований.

Теоретическая значимость работы состоит в определении оптимальных параметров процессов формообразования элементов конструкций в условиях ползучести с учетом поврежденности и нелинейности материала.

Практическая значимость работы заключается в постановке и решении обратных задач формообразования с учетом влияния температурно-силовых факторов. Разработанные методы реализованы в виде программных модулей, позволяющие оценить остаточный ресурс изделий с учетом различных свойств материала и провести анализ влияния различных процессов на процесс формообразования конструкций.

Методология и методы исследования.

В диссертации используются подходы и методы механики деформируемого твердого тела для описания необратимых деформаций в теле с учетом упругой разгрузки. Метод решения рассматриваемых задач основывается на использовании теории энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности, а также на методе оптимизации при решении обратных задач деформирования элементов конструкций. Разработанные алгоритмы применяются в пользовательских программах MSC.Marc на языке Fortran и в отдельных программных модулях, разработанных в среде Visual Studio на языке C++.

Достоверность. Проводимые в работе результаты расчетов трехмерного

моделирования по формообразованию элементов конструкций в конечно-элементном пакете MSC.Marc сравниваются с соответствующими экспериментальными данными. Используются апробированные алгоритмы расчета НДС в режимах ползучести и пластичности. Адекватность используемых математических моделей деформирования и разрушения элементов конструкций подтверждается реальными экспериментальными данными.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации — 133 страницы. Список литературы содержит 100 источников.

Апробация результатов.

Результаты полученных научных исследований докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

- III Всероссийская конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 2014);

- IX Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», посвященная 55-летию полета Ю. А. Гагарина (Томск, 2016);

- Краевые задачи и математическое моделирование (Новокузнецк, 2016);

- Проблемы оптимального проектирования сооружений (Новосибирск, 2017);

- X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017);

- Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017);

- Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В.Овсянникова "Математические проблемы механики

сплошных сред" (Новосибирск, 2019);

- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019);

- XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2020).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 15 печатных работ, из них 2 статьи в журналах, входящих в перечень ВАК, а также 3 статьи в журнале, индексируемом в информационно-аналитической системе научного цитирования Scopus.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-07631, 16-08-00713, 16-31-00460)

Личный вклад. Задачи были поставлены научным руководителем. Соискатель разработал методы решения прямых и обратных задач формообразования элементов конструкций в процессе ползучести с учетом физической нелинейности материала, а также разработан алгоритм определения параметров ползучести материала для описания трех стадий ползучести с учетом повреждаемости. Численные расчеты и анализ результатов проведены соискателем лично.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук А. Ю. Ларичкину за постановку задач, постоянное внимание к работе, а также кандидату физико-математических наук И. В. Любашевской за постоянные консультации в работе.

Глава 1

Состояния исследований

Основной теорией для описания процессов ползучести используется подход предложенный в [2], который для случая одноосного напряженного состояния сформулирован на основе гипотезы существования уравнения состояния с системой дифференциальных уравнений для параметров, описывающих изменение структуры материала вследствие накопления в нем повреждений. Такой подход позволяет оценивать поврежденность конструкции вплоть до разрушения. В [7–9] предложен энергетический вариант, в котором за меру интенсивности процесса ползучести принята величина мощности рассеяния, а за меру накопленных повреждений величина рассеянной работы.

Актуальной задачей в авиа, машиностроении и кораблестроении является сохранение ресурса изделия на стадии изготовления и уменьшение веса конструкции при сохранении эксплуатационных характеристик [11]. Чаще всего производят формовку панелей различной кривизны [12–15]. Например, оребренные панели используются поскольку они имеют пониженные весовые характеристики при достаточной прочности конструкции [15]. Оребрение полотна заготовки может иметь Г-образные, Т-образные профили. «Вафельная» панель имеет оребрение в виде двух пересекающихся систем ребер, которая изготавливается механической обработкой из плиты. Чаще вафельную панель изготавливают при помощи фрезерования из толстых плит. Одним из применением таких панелей является изготовление корпусов ракетносителей. Получение тонкостенных

оребранных панелей методами фрезерования может привести к деформации всей панели из-за действия остаточных сжимающих напряжений [16]. В [17] показано, что на результаты расчета напряженно-деформированного состояния сетчатых анизотридных конструкций существенное влияние оказывают то, как мы задаем граничные условия.

Напряжения возникают по причине удаления фрезой металла с поверхностей плиты. В связи с этим возникают задачи о создании упреждающей оснастки для формовки изогнутой плиты в целевую форму. Однако такие задачи с начальными напряжениями являются сложными. Наиболее перспективным методом формовки с точки зрения сохранения ресурса конструкции является обработка металлов давлением в режимах старения.

Формообразование панелей в режиме ползучести при температуре старения (Creep Age Forming или сокращенно CAF), используется для получения крупногабаритных изделий, таких как панели крыла летательных аппаратов и элементов фюзеляжа [18–21]. В работе [22] подобную технологию применяли для получения элементов конструкций самолетов Airbus 330 и 340, придавая кривизну стримерам при помощи кручения и изгиба. Авторы подчеркивают, что после формовки в цилиндрическую поверхность прямоугольной пластины из алюминиевого сплава 7075 (аналог отечественного сплава В95 на базе Al-Cu-Mg) в режиме старения при температуре 180°C деталь испытывает около 70% распружинивания. Авторы показали, что распружинивание детали связано с остаточными напряжениями: в экспериментах по растяжению образцов при температуре старения остаточные напряжения не превосходят 25 МПа, по сравнению с напряжениями при холодной вытяжке (150 МПа). Авторы предлагают для создания больших оребранных панелей сложной геометрии отдельно формовать ребра и саму панель, а затем сваривать их между собой.

Исследование влияния пластической деформации и деформации ползучести

на распруживание оребренной панели с отверстием проведено в работе [22]. Рассматривается придание цилиндрической формы оребренной панели из алюминийлитиевого сплава 2297 (сплав на базе Al-Cu-Li содержание Li 0,8%). Формовка проводится методом вакуумного мешка. Были определены параметры закона ползучести и повреждаемости, в котором зависимость скорости деформации от напряжений принята в виде гиперболического синуса. Модель ползучести внедрена в конечно-элементный пакет ABAQUS через пользовательскую подпрограмму. В процессе ползучести в панели возле отверстия возникает достаточно большая область с уровнем напряжений ниже предела текучести, что, по мнению авторов, улучшает формующую способность панели. После пластической деформации распруживание панели по измеренному прогибу составило 91,1%, а после деформации ползучести - снизилось до 82,3%. Из-за максимальной толщины и формирующей кривизны вокруг отверстия возникали более высокие напряжения и большие деформация ползучести. В элементах ребер жесткости наблюдались низкие уровни напряжения и ограниченная пластическая деформация, поскольку их направление перпендикулярно направлению основной кривизны. Было показано, что размер, ориентация и положение структуры значительно влияют на окончательную форму панели.

В работе [23] рассмотрена формовка вафельных и изогридных пластин из алюминиевого сплава AA2219 (аналог сплава 1201 на базе Al-Cu) при температуре старения 175°C . Для моделирования процесса формообразования в конечноэлементном пакете ABAQUS использовалось 7 уравнений состояния, имеющие 17 констант для описания поведения материала. Закон ползучести приведен в виде гиперболического синуса. Авторы установили, что в экспериментах деталь испытывает распруживание от 12,2% (на изогридной пластине) и до 15,7% (на вафельной).

Существуют другие способы уменьшения распухания. Как предлагается в [24], получение оребренных панелей сложной геометрии может осуществляться при помощи формовки толстой плиты в режимах ползучести с помощью перестраиваемого стержневого пуансона (матрицы). Перестроение формы пуансона в процессе деформирования позволяет за один технологический цикл получать целевую форму из заготовки. После формовки толстой плиты проводится ее фрезерование для получения оребренной панели. Авторы моделируют процесс формовки толстой плиты, для которого необходимо задавать закон перемещения каждого стержня оснастки, чтобы получить упреждающую форму панели. Авторами было определено, что величина отклонения панели при разгрузке зависит от температурного режима формовки, свойств материала и способа деформирования. Варьируя эти параметры, можно уменьшить такие отклонения. Формулируется обратная задача формообразования, для определения закона перемещения стержней, создающих такую упреждающую кривизну плиты, что после распухания плита будет иметь целевую форму. В модели задаются контактные условия, исключая проникновение жесткого тела в деформируемое. В качестве заданной формы панели взята панель двойной кривизны центроплановой части самолета. Заготовка изготовлена из алюминиевого сплава АК4-1. Построен итерационный метод решения относительно неизвестных перемещений точек поверхности панели, задающей упреждающую кривизну.

В работах [24–30] подчеркивается, что расчет НДС панелей монолитных и оребренных конструкций требует больших численных затрат ввиду сложности геометрии конструкции. Для упрощения геометрии можно рассматривать отдельные части изделия и для каждой из них определять кривизны, после чего изгиб всей детали в целом [25]. В качестве методов исследования чаще всего используются приближенные, в которых учитываются геометрические

данные образцов и свойства материалов, а также численные с использованием конечно-разностных схем и метода конечных элементов (МКЭ).

Балка является простейшей конструкцией для исследования изгибных деформаций [1–3]. Численные расчеты на ползучесть и длительную прочность изгибаемого бруса прямоугольного сечения при установившейся стадии ползучести без учета и с учетом различных характеристик материала при растяжении и сжатии сводятся к решению системы дифференциальных уравнений относительно деформации, работы рассеяния [33], а также поврежденности [8], [31–40].

В [33] исследуется поведение чистого изгиба балки прямоугольного сечения на ползучесть и длительную прочность с использованием уравнений энергетического варианта теории ползучести, а также с использованием параметризованных уравнений в энергетической форме. Численный расчет проводится на основе метода Рунге-Кутты с переменным шагом интегрирования по времени. Сравнение численных методов показало, что использование метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации позволяет увеличить шаг интегрирования по времени, уменьшить количество шагов по независимой переменной и время счета.

В [34] рассматривались задачи изгиба круглых балок в режимах ползучести, где определяющие соотношения принимались в виде дробно-степенных функций. Проводилось сравнение с результатами расчета изгиба прямоугольных и квадратных балок. На эпюрах распределений безразмерных напряжений при различных значениях показателя ползучести показано, что величина напряжений по абсолютной величине больше для круглого сечения, т.к. основную часть нагрузки выдерживают волокна, наиболее удаленные от нейтральной плоскости.

В [35], [36] рассматривается задача о продольном изгибе стержня под действием постоянной нагрузки. В качестве определяющих уравнений теории

установившейся ползучести используется дробно-линейный закон ползучести. Модель ползучести учитывает максимальное предельное напряжение, характеризующее мгновенное разрушение металла при температуре испытаний, а также может учитывать наличие ненулевого предела ползучести, ограничивающего снизу диапазон напряжений, при котором развивается процесс ползучести.

Фундаментальное описание явления ползучести представлено в монографии [3]. В ней приведены решения различных задач длительной прочности с приложением к технике, в том числе задач изгиба балок, пластин, оболочек. Представлены подходы к описанию ползучести и накоплению повреждений при сложном напряженном состоянии. В частности, получены решения задачи чистого изгиба балок в режимах ползучести с учетом различных свойств на растяжение и сжатие, а также поврежденности материала. Зависимость скорости ползучести и скорости изменения сплошности от напряжений принимается в виде дробно-степенных функций. Приводится решение с учетом фронта разрушения [37].

В [38] приводится решение задачи о чистом изгибе стержня для материала АМГ-3 при температуре 200 °С, обладающего различными различными параметрами ползучести при растяжении и сжатии. Авторами получены расчетные значения скорости изменения кривизны оси балки со временем с учетом характеристик только на растяжение, только на сжатие и учет и и совокупного их влияния в условиях установившейся ползучести. Анализ полученных данных показал, что скорость изменения кривизны оси балки со временем с учетом характеристик только на растяжение выше экспериментальной, а с учетом только характеристик на сжатие - ниже. Удовлетворительное соответствие экспериментальных и численных данных было получено в решение задачи для неустановившейся ползучести по теории старения в формулировке Ю.Н. Работнова.

В [36–40], по сравнению с [7] и [30], исследуется разносопротивляющийся

материал. В [39] закон ползучести представлен в виде экспоненциальной зависимости, а в [34] в степенном виде. В [33] показано, что использование метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации позволяет продвинуться дальше по параметру поврежденности, по сравнению с непараметризованной задачей. Однако, применение метода продолжения решения по параметру усложняет исходную систему уравнений, что приводит к увеличению времени расчета. Наименьшее отклонение численных данных от экспериментальных приведено в работе [40].

Существуют и другие модели ползучести, например, в [41] предложена обобщенная стохастическая модель ползучести и длительной прочности балки в условиях чистого изгиба в терминах «обобщенная нагрузка», «обобщенное перемещение», «время». На основе аналогии между кривыми ползучести одноосного деформирования при постоянном напряжении и обобщенными кривыми ползучести балки в координатах «кривизна балки — время» при постоянном изгибающем моменте сформированы стохастические уравнения состояния балки. Разработана методика оценки показателей надежности балки при изгибе в условиях ползучести по параметрическим критериям отказа в условиях существенного разброса данных.

В [42] на примере расчета чистого изгиба балок произвольного сечения из разупрочняющегося материала показана возможность определения реальной критической нагрузки. Определены предельные несущие способности прямоугольной, круглой и двутавровой балки. Показано, что расчет по формулам из курса сопротивления материалов приводит к занижению предельных значений разрушающих напряжений.

Моделирование балок таврового сечения, основанного на суперэлементной технологии представлено в [43]. В программе ПРИНС задаются размеры образца, нагрузки на узлах стержня, которые лежат в торцевых сечениях,

модуль упругости материала и коэффициент Пуассона. Проводится сравнение максимальных и минимальных приращений, полученных с использованием написанного модуля и формул сопротивления материалов. Предложенный способ позволяет получить высокую точность результатов при небольшом увеличении числа степеней свободы конечного элемента.

Процедура численного расчета упругой балки с асимметричным поперечным сечением рассмотрена в [44]. Балка таврового сечения подвергается изгибающему моменту. Материал балки подчиняется реологической модели упруго-линейного упрочнения. Деформации описываются как функция вращения и сдвига нейтральной оси и кривизны балки. В процессе изгиба учитываются точные геометрические выражения для больших прогибов и больших поворотов, а также полная история деформирования, в том числе влияние локальной нагрузки при монотонном ее уменьшении. Результаты расчетов подтверждают сильное влияние нагрузки на конечное и упругое вращение нейтральной оси, ее смещение и кривизну балки. Показано, что относительная разница между экспериментально и теоретически прогнозируемыми результатами радиуса кривизны сформированной балки составляет 0,18%, если также учитывать влияние предварительной деформации на модуль упругости. При увеличении степени предварительной деформации модуль упругости материала монотонно уменьшается. Отметим, что свойства ползучести не учитываются.

На формообразование процесса ползучести влияют также и температурно-силовые факторы. В [45] исследовано поведение стальных конструкций, подверженных воздействию огня. Используется модель материала способных учитывать влияние ползучести при высоких температурах. Реализация произведена в комплексе TAFEL. Расчет основан на вычислении истинных значений деформаций ползучести в зависимости от уровня напряжения и температуры, действующее на поперечное сечение тавровой балки. Численный

анализ проводился с использованием двух разных наборов кривых напряжения и деформации: экспериментальные стационарные кривые, которые были определены для образца, используемые в самой конструкции, и кривые для инженерного анализа поведения стальных конструкций под действием огня. Использовалась модель ползучести (Harmathy 1970), в которой присутствует зависимость скорости ползучести от температуры.

В [46] предложена реологическая модель одноосного деформирования материала, содержащая его константы, зависящие от температуры материала. Обработка опытных данных выполнена на базе закона упрочнения и модели ползучести с начальным скачком деформации. Функции напряжений для скачка и установившейся скорости приняты степенными, а зависимости физических констант от температуры — экспоненциальными. Рассмотрен пример расчета деформированного состояния растянуто-изогнутого стержня при высокотемпературной ползучести. Рассмотренный подход к решению задач ползучести позволяет расширить круг решаемых задач при использовании ограниченного набора экспериментальных данных; рассматривать задачи при неоднородном термо-силовом воздействии.

В [47] приведены исследования деформирования и разрушения алюминиевого сплава Д16 и титанового сплава ВТ5-1 при нестационарном малоцикловом нагружении симметричным трехточечным изгибом. Показано, что накопление повреждений имеет нелинейный характер и зависит от вида пошагового изменения нагрузки (увеличение или уменьшение). В экспериментах приведена корреляция точки (начало долома образца) на графике “полный прогиб – усилие” при однократном нагружении с аналогичной точкой на графике при малоцикловом нагружении, что позволяет по однократному нагружению предсказать живучесть конструкции при малоцикловом нагружении.

Выводы по первой главе

Из представленного обзора можно сделать следующие выводы:

1. Задачам формообразования в процессе ползучести уделяется достаточно большое внимание в связи с применением в различных областях техники. Моделирование НДС панелей и оробренных конструкций при формообразовании требует больших численных затрат ввиду сложности целевых геометрий конструкций и необходимости решения контактных задач. В некоторых случаях, когда изделие состоит из однотипных элементов, геометрию панели можно упростить, рассматривая отдельные ее части и для каждой из них определить кривизны и по ним определить формоизменение всей детали в целом. В качестве методов исследования используется математическое моделирование, в том числе метод конечных элементов (МКЭ), и приближенные методы решения задач на основе упрощающих допущений, учитывающих геометрические данные образцов и свойства материалов.

2. В работах рассматриваются прямые задачи формообразования для простейших элементов конструкций - балок прямоугольного сечения с учетом и без учета разнотвердости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести, и его поврежденности. Экспериментальные исследования одноосного деформирования современных сплавов показывают различие свойств материала в процессе ползучести при смене знака напряжения, а также показывают влияние анизотропии свойств ползучести на скорость деформирования.

3. Некоторые авторы статей указывают на сохранение прочностных ресурсов элементов конструкций в процессе медленного горячего формообразования при температуре старения. Также указывается возможность сокращения количества элементов изделий сложной геометрии при получении их деформированием плоских листов в условиях ползучести или сверхпластичности.

4. Широкое использование программных комплексов инженерного анализа, основанных на МКЭ, позволяет проектировать строительные элементы конструкций, а также технологические процессы прокатки, листового и объемного формообразования. В штатный набор средств пакетов программ не включены модели материалов, учитывающие разницу свойств ползучести при растяжении и сжатии. Учет таких материалов возможен путем программирования и доработок пользовательских процедур в современных вычислительных пакетах. Стоит отметить, что современных работ по решению обратных задач формообразования достаточно мало, из авторов стоит выделить [11], [24], [26].

В результате проведенного анализа литературы можно сделать вывод об актуальности построения уточненных моделей ползучести и алгоритмов решения прямых и обратных задач формообразования элементов конструкций.

Глава 2

Моделирование процессов ползучести и длительной прочности с учетом поврежденности материала

2.1 Энергетический вариант теории ползучести

В работах [7–9] исследуется энергетический вариант теории ползучести, одним из преимуществ которого является совмещение двух следующих задач: нахождение напряженно-деформированного состояния и определение долговечности конструкции.

Энергетический вариант теории ползучести базируется на следующих гипотезах:

1. Процессы ползучести и разрушения – есть два сопутствующих и влияющих друг на друга процесса. Под разрушением понимаем разделение образца на две части, т.е. исчерпание несущей способности, которая произошла в случае достижения в какой-либо точке тела удельной энергии рассеяния критического значения A_* .

2. За меру интенсивности процесса ползучести принимается величина удельной мощности рассеяния

$$W = \sigma_{ij}\eta_{ij},$$

где σ_{ij} – компоненты напряжения, $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dt$ – компоненты скорости деформации ползучести.

За меру повреждаемости материала – величина удельной работы рассеяния

$$A = \int_0^t W dt.$$

Уравнения состояния, связывающие процессы ползучести и разрушения, по выбранным выше мерам используются в виде

$$W = F(\sigma_{\text{э}}, A, T), \quad (2.1)$$

где $\sigma_{\text{э}}$ – эквивалентное напряжение, являющееся функцией инвариантов тензора напряжений и коэффициентов анизотропии материала, T – температура.

Справедлив закон течения вплоть до разрушения в виде $\eta_{ij} = \lambda \frac{\partial \sigma_{\text{э}}}{\partial \sigma_{ij}}$.

Материал считается пластически несжимаемым вплоть до разрушения $\eta_{kl} \delta_{kl} = 0$, где δ_{kl} – символ Кронекера.

При условии подобия исходных кривых ползучести $A = A(t)$ для одноосного напряженного состояния в случае применимости энергетического варианта теории ползучести $A_* = \text{const}$ уравнение (2.1). принимает следующий вид

$$dA/dt = f(\sigma, T)\varphi(A), \quad (2.2)$$

в качестве функций $f(\sigma, T)$ могут быть использованы степенные, экспоненциальные и другие зависимости,

$$\varphi(A) = A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^{-m}. \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) получаем уравнение состояния

$$dA/dt = B\sigma^n A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^{-m}, \quad (2.4)$$

описывающие процесс деформирования материала при постоянном напряжении с учетом процессов упрочнения-разупрочнения.

В более общем случае ($A_* \neq const$) для описания процесса деформирования используется система уравнений вида

$$dA/dt = f_1(\sigma, T)/\varphi(\omega), \quad d\omega/dt = f_2(\sigma, T)/\varphi(\omega), \quad (2.5)$$

где параметр поврежденности $\omega = A/A_*$, т.ч. $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t^*) = 1$, функция $\varphi(\omega)$ описывает процесс упрочнения-разупрочнения материала.

Однако, данная модель ползучести пригодна для описания процесса ползучести при небольших деформациях. Стоит отметить, что в работе [48] представлена модель ползучести, в которой кинематика больших деформаций описывается геометрически точным образом с использованием предположения о вложенном мультипликативном расщеплении. Модель является термодинамически допустимой, объективной и w-инвариантной.

2.1.1 Метод определения характеристик ползучести при стационарном процессе нагружения

Рассмотрим метод определения характеристик неупрочняющегося материала в рамках энергетического варианта теории ползучести, когда в качестве меры интенсивности процесса ползучести принимается мощность рассеяния энергии при ползучести $W = \varepsilon_{ij}^{\dot{c}} \sigma_{ij}$ [9]. Под разупрочнением понимается процесс с нарастающей скоростью ползучести. В случае одноосной ползучести и повреждаемости со скалярным параметром поврежденности q кинетические уравнения Работнова, записанные в энергетических величинах, имеют вид [7–9]:

$$dA/dt = f(\sigma)/(1 - q)^\mu, \quad dq/dt = \Phi(\sigma)/(1 - q)^k, \quad (2.6)$$

где $A = \int_0^t W dt = \int_0^{\varepsilon^c} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c$ - диссипация работы при ползучести; функции f , Φ и коэффициенты μ , k зависят от температуры T .

При произвольном напряженном состоянии вводим приведенное время

$$\tau = (k + 1) \int_0^t \Phi(\sigma) dt$$

и переходим к новым обозначениям при условии $k + 1 > \mu$:

$$1 - \omega = (1 - q)^{k - \mu + 1} \quad (0 \leq \omega \leq 1). \quad (2.7)$$

С использованием полученного соотношения система исходных уравнений 2.6 принимает вид

$$dA/dt = f(\sigma)/\psi(\omega), \quad d\omega/dt = \varphi(\sigma)/\psi(\omega) \quad (0 \leq \omega \leq 1), \quad (2.8)$$

где $\psi(\omega) = (1 - \omega)^m$ - функция разупрочнения; $\varphi(\sigma) = (k - \mu + 1)\Phi(\omega)$ - коэффициент разупрочнения. С учетом введенных обозначений имеем уравнение единой кривой

$$(1 - \omega)^{m+1} = 1 - \tau \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad (2.9)$$

единообразно описывающее экспериментальные данные. Учитывая функциональную связь ω с исходным параметром поврежденности q (2.7), о поврежденности материала можно судить по параметру ω . Далее параметр ω рассматривается как параметр поврежденности.

Для вычисления констант, определяющих функции в системе (2.8), анализируются экспериментальные данные о ползучести при постоянных значениях напряжения и температуры. Разделив первое уравнение в (2.8) на

второе и проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение, получаем

$$A = [f(\sigma)/\psi(\omega)]\omega, \quad A_* = f(\sigma)/\psi(\omega), \quad \omega = A/A_* \quad (0 \leq \omega \leq 1).$$

Таким образом, в случае одноосного деформирования параметр поврежденности ω есть отношение текущей работы рассеяния A к ее значению в момент разрушения A_* , т.е. нормированная работа.

Проинтегрировав второе уравнение в (2.8), тогда из (2.9) получаем

$$\tau = t/t_*, \quad t_* = [(m+1)\varphi(\sigma)]^{-1}, \quad \omega = 1 - [1 - (m+1)\varphi(\sigma)t]^{1/(m+1)}.$$

Таким образом, нормированное время $\tau = 0$ ($0 \leq \tau \leq 1$) – отношение текущего времени к времени разрушения t_* .

Следует отметить, что в ряде работ [7, 8] в (2.6) полагается, что $\mu = k$ или путем замены (2.7) исходная система приводится к виду (2.8). Однако, сначала необходимо проверить справедливость гипотезы единой кривой для экспериментальных кривых ползучести, построенных в нормированных координатах $t - \omega$, а уже затем использовать систему (2.8) для определения аппроксимационных коэффициентов уравнений и выполнения расчетов.

Приведем аналогичные соотношения при постоянной температуре, в которых используются одни и те же функции при параметре поврежденности ω в уравнениях ползучести и повреждаемости для материалов с упрочнением [49].

По аналогии с [8] для материалов, имеющих три стадии ползучести, примем функцию повреждаемости в виде $\psi(\omega) = \omega^\alpha(1 - \omega^{\alpha+1})^m$, где α – параметр упрочнения.

Проинтегрировав уравнение повреждаемости при постоянных значениях

напряжения для заданной температуры, получаем

$$\int_{\omega}^1 \omega^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^m d\omega = \int_t^{t_*} \varphi(\sigma) dt,$$

следовательно $((\alpha + 1)(m + 1))^{-1}(1 - \omega^{\alpha+1})^{m+1} = \varphi(\sigma)(t_* - t)$.

При интегрировании функции повреждаемости вплоть до разрушения:

$$\int_0^1 \omega^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^m d\omega = \int_0^{t_*} \varphi(\sigma) dt,$$

получаем $t_* = [(\alpha + 1)(m + 1)\varphi(\sigma)]^{-1}$. Тогда выражение для приведенного времени имеет вид

$$\bar{\tau} = t/t_*, \quad \bar{\tau} = (\alpha + 1)(m + 1)\varphi(\sigma)t.$$

В этом случае уравнение единой кривой повреждаемости записывается следующим образом:

$$(1 - \omega^{\alpha+1})^{m+1} = 1 - \bar{\tau} \quad (2.10)$$

Таким образом, для материалов, имеющих три стадии ползучести, из решения системы кинетических уравнений ползучести и длительной прочности

$$dA/dt = f(\sigma)\omega^{\alpha}(1 - \omega^{\alpha+1})^{-m}, \quad d\omega/dt = \varphi(\sigma)\omega^{\alpha}(1 - \omega^{\alpha+1})^{-m}, \quad A = \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon}^c = 0. \quad (2.11)$$

при постоянных температурах T и напряжениях σ в условиях однородного напряженного состояния следуют аналитические выражения для определения аппроксимационных зависимостей с соответствующими параметрами для получения характеристик материала при растяжении и сжатии:

$$\omega = A/A_*, \quad \bar{\tau} = t/t_*, \quad \varepsilon^c = A/\sigma. \quad (2.12)$$

Здесь $A = (f(\sigma)/\varphi(\sigma))[1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)\varphi(\sigma)t)^{\frac{1}{m+1}}]^{\frac{1}{\alpha+1}}$, $A_* = f(\sigma)/\varphi(\sigma)$.

Полученные аналитические решения (2.2), описывающие процессы ползучести и длительной прочности материалов, имеющих три стадии ползучести, с использованием скалярного параметра поврежденности, определяемого нормированной работы рассеяния энергии при ползучести, а также проведенные в последнее время экспериментально-теоретические исследования, посвященные обоснованию энергетического варианта теории длительной прочности (ЭВТДП) [3], [5], [7–9] и его проверке в случае нарушения энергетического критерия разрушения, позволили конкретизировать кинетические уравнения Работнова в энергетической форме [2] с использованием одних и тех же функций повреждаемости в обоих уравнениях и разработать методику определения функций, входящих в определяющие уравнения ползучести и повреждаемости.

Предложенный простейший вариант кинетических уравнений в энергетической форме [8] для материалов, у которых исходные кривые ползучести при постоянных напряжениях подобны в координатах t – позволяет обобщить ЭВТДП О. В. Соснина на случай, когда энергетическое условие длительной прочности не выполняется: $A_*(\sigma) \neq const$. Для построения единой кривой ползучести при одноосном нагружении (деформировании) нормирование исходных диаграмм ползучести осуществляется путем деления текущих экспериментальных значений ε^c на экспериментальные значения в момент разрушения t_* .

Считая, что работа внутренних напряжений при деформировании в процессе ползучести затрачена на разрушение материала. Согласно [8] будем полагать, что поврежденность материала равна нормированной удельной работе рассеяния: $\omega = A/A_*$. Не выясняя, какой из механизмов (ползучесть или разрушение) является определяющим, для построения феноменологической теории примем следующие гипотезы:

1. В условиях ползучести материал считается несжимаемым вплоть до

разрушения: $\dot{\varepsilon}_{ij}^c \delta_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

2. Процессы ползучести и разрушения происходят одновременно и влияют друг на друга.

3. Интенсивность процесса ползучести оценивается величиной удельной мощности рассеяния энергии $W = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c$, в качестве меры поврежденности материала принимается величина нормированной удельной диссипации энергии

$$\omega = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c / \int_0^{t_*} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c.$$

4. Считается, что при постоянной температуре и напряженном состоянии одного вида исходные кривые ползучести, представленные в нормированных координатах, сводятся в единую кривую, т.е. подобны в координатах $t - \omega$.

5. В соответствии с ЭВДП интенсивность процесса деформирования металлических материалов определяется двумя кинетическими уравнениями с одной и той же функцией повреждаемости.

$$W \equiv dA/dt = f(\sigma_{\ast})/\psi(\omega), \quad d\omega/dt = \varphi(\sigma_{\ast})/\psi(\omega).$$

Здесь σ_{\ast} – эквивалентное напряжение, которое при различных напряженных состояниях обеспечивает постоянство мощности рассеяния энергии в начальный момент (на установившейся стадии ползучести (при ее наличии) $W_{\min} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c = const$); эквивалентное напряжение σ_{\ast} определяется как функция напряженных состояний, при которых в стационарных условиях нагружения скорость накопления повреждений и длительность до разрушения t_* одни и те же.

Условие справедливости гипотезы единой кривой для исходных кривых ползучести при одноосном нагружении, представленных в нормированных координатах $\bar{T} - \omega$, определяет область применимости кинетических уравнений

ползучести и повреждаемости с одними и теми же функциями повреждаемости в обоих уравнениях.

6. Предполагается справедливым ассоциированный закон течения вплоть до разрушения $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \lambda \partial \sigma_{\varepsilon} / \partial \sigma_{ij}$.

Следует отметить, что при постоянных напряжениях в экспериментах при одноосном нагружении $\omega = A/A_*$ ($\omega \equiv \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$), при формальной замене A на ε^c приведенные выше рассуждения справедливы для уравнений в обозначениях деформация – напряжение. Таким образом, экспериментальную проверку непротиворечивости полученных уравнений следует проводить в нормированных переменных $\omega = A/A_*$ ($\omega \equiv \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$) $\bar{\tau} = t/t_*$ [7].

2.1.2 Получение характеристик ползучести материала с использованием программного модуля

Для описания процессов ползучести материалов при фиксированных температурах используют степенные, экспоненциальные зависимости:

$$d\varepsilon/dt \equiv \dot{\varepsilon}^c = B_1 \sigma^n, \quad \dot{\varepsilon}^c = B_2 \exp(m\sigma),$$

где B_1, B_2, n, m - характеристики материала. В логарифмических координатах:

$$\ln \dot{\varepsilon}^c = \ln B_1 + n \ln \sigma, \quad \ln \dot{\varepsilon}^c = \ln B_2 + m\sigma.$$

Экспериментальные значения скоростей деформаций ползучести с должны укладываться на диаграммы, близкие к прямым линиям при любых фиксированных значениях температур. Значения скоростей деформаций при температурах, при которых проводится обработка металлов давлением, в логарифмические координатные оси $\ln \dot{\varepsilon}^c$ и $\ln \sigma$ на прямые линии могут и не ложиться. Тогда можно

использовать следующую зависимость: $\ln \dot{\varepsilon}^c = f(\sigma, T)$.

Экспериментальные данные численно обрабатывались в три этапа:

1. Экспериментальные данные деформации ползучести при всех значениях температур в логарифмических координатах выводятся на экран и по форме диаграммы выбирается одна из зависимостей (экспериментальная, степенная) с конкретизацией $f(\sigma, T)$.

2. Методом наименьших квадратов определяются все коэффициенты, входящие в выбранную зависимость. Они отражают деформационные свойства ползучести материала во всем заданном температурно-силовом диапазоне.

3. По полученным коэффициентам зависимость $f(\sigma, T)$ выводится на экран и проводится оценка совпадения расчетной диаграммы с экспериментальными данными $\ln \dot{\varepsilon}^c$.

Зная результаты экспериментов на ползучесть в виде диаграмм $\varepsilon = \varepsilon(t)$ при фиксированных значениях напряжений σ и температур T на рассматриваемом отрезке времени t_i , определяется скорость деформации ползучести с использованием метода наименьших квадратов от значений тангенса угла наклона соответствующей части диаграммы $\dot{\varepsilon}_i^c = \dot{\varepsilon}_i^c(t)$:

$$\dot{\varepsilon}_i^c = \left(\sum_{i=1}^{k_i} t_i \sum_{i=1}^{k_i} \varepsilon_i^c - k_i \sum_{i=1}^{k_i} t_i \varepsilon_i^c \right) \left[\left(\sum_{i=1}^{k_i} t_i \right)^2 - k_i \sum_{i=1}^{k_i} (t_i)^2 \right]^{-1},$$

где k_i -число данных в i -ом эксперименте.

По методу наименьших квадратов определяются параметры

$$n = \left(\sum_{i=1}^{k_i} \ln \sigma_i \sum_{i=1}^N \ln \dot{\varepsilon}_i^c - N \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i \ln \dot{\varepsilon}_i^c \right) \left[\left(\sum_{i=1}^N \ln \sigma_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^{k_i} (\ln \sigma_i)^2 \right]^{-1},$$

$$B_1 = \exp \left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \dot{\varepsilon}_i^c - n \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i \right) \right].$$

Аналогичным образом происходит поиск параметров материалов для второго уравнения ползучести с учетом повреждаемости материала.

Алгоритм реализован в виде программного модуля в пакете Visual Studio на языке C++.

2.1.3 Определение параметров ползучести для материалов при стационарном процессе нагружения

Параметры материалов для стали марки Ст. 45, титанового сплава ВТ9 [9] и ст. 09Г2С-12 определялись из экспериментов по растяжению цилиндрических образцов испытаний на ползучесть при помощи рычажных машин. Деформация измерялась при помощи систем измерений с датчиками линейного перемещения.

На рисунке 2.1 приведены результаты экспериментов на растяжение образцов из стали марки Ст. 45, вырезанных в осевом направлении из прутка диаметром 42 мм при температурах, приведенных в таблице 2.1.

Таблица 2.1. — Характеристики ползучести стали марки Ст. 45

$T, ^\circ C$	$B_A, \text{МПа}^{-n} \text{с}^{-1}$	$B_\omega, \text{МПа}^{-k} \text{с}^{-1}$	n	k	α	m
725	$7,97 \cdot 10^{-13}$	$1,78 \cdot 10^{-13}$	4,4	4,2	0	1,3
740	$2,13 \cdot 10^{-17}$	$2,74 \cdot 10^{-16}$	7,26	6,67	0	0,5
750	$1,27 \cdot 10^{-16}$	$8,26 \cdot 10^{-16}$	6,36	6,05	0,531	1,47
850	$9,97 \cdot 10^{-20}$	$9,67 \cdot 10^{-17}$	8,71	6,96	0,849	2,83

На рисунке 2.1 введены следующие обозначения: (а) $T = 725 ^\circ C$: (1) $\sigma = 40$ МПа, (2) $\sigma = 44$ МПа, (3) $\sigma = 55$ МПа, (4) $\sigma = 60$ МПа, (б) $T = 740 ^\circ C$: (1) $\sigma = 30$ МПа, (2) $\sigma = 45$ МПа, (3) $\sigma = 55$ МПа, (4) $\sigma = 60$ МПа, (в) $T =$

750 °C : (1) $\sigma = 50$ МПа, (2) $\sigma = 55$ МПа, (3) $\sigma = 60$ МПа, (4) $\sigma = 70$ МПа, (г) $T = 850$ °C : (1) $\sigma = 35$ МПа, (2) $\sigma = 40$ МПа, (3) $\sigma = 45$ МПа, (4) $\sigma = 50$ МПа; звездочки – моменты разрушения образцов.

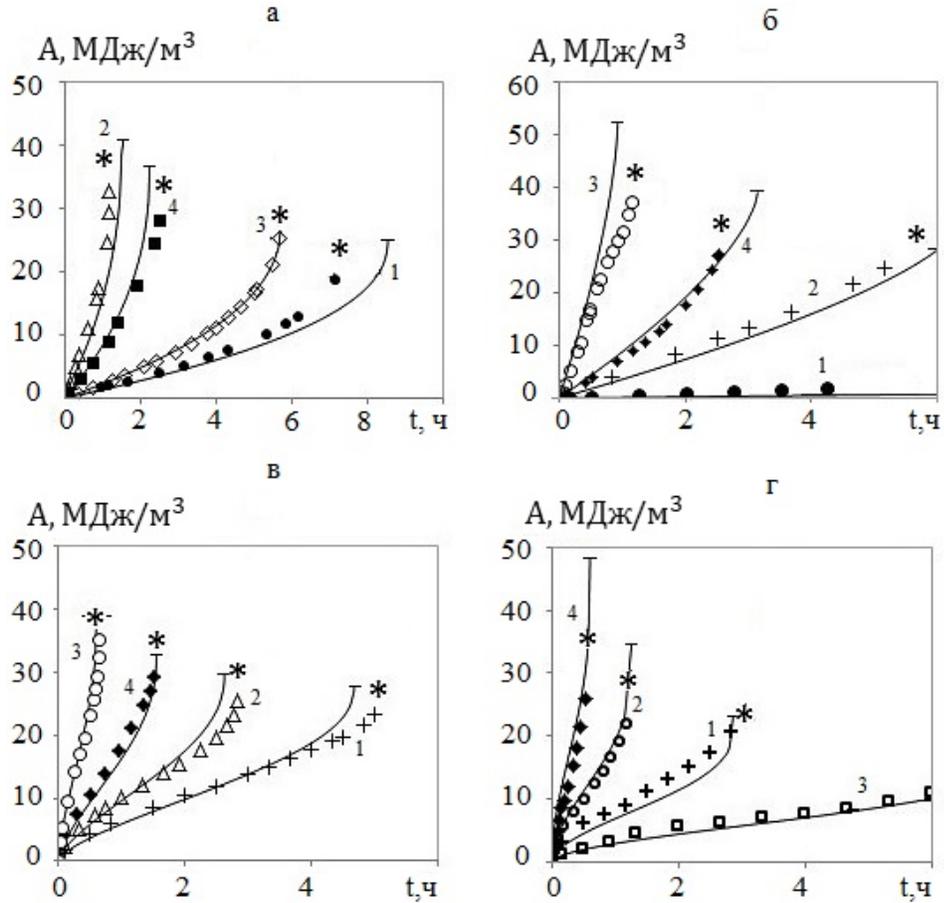


Рисунок 2.1. — Экспериментальные (значки) и аппроксимационные (линии) диаграммы ползучести при растяжении для стали марки Ст. 45 при $\sigma = const$, $T = const$.

Стоит отметить, согласно работе [49] параметр α должен удовлетворять соотношению $n + 1$, поскольку в противном случае не будет выполняться постулат устойчивости Друккера и решение задачи ползучести может быть не единственным или не физическим.

На рисунках 2.3-2.5 представлены результаты экспериментов на растяжение образцов из разупрочняющегося титанового сплава ВТ9 (Ti-6, 8Al-3, 2Mo-2, 0Zr-0,3Si) (пруток диаметром 50 мм) в диапазоне температур, близких к

температуре сверхпластичности. Точки соответствуют экспериментальным значениям, линии – результатам аппроксимации по уравнениям (2.11) при значениях параметров, приведенных в таблице 2.2 для постоянных температур.

На рисунке 2.3 введены следующие обозначения:

(а) $T = 700 \text{ }^{\circ}\text{C}$: (1) $\sigma = 200$ МПа, (2) $\sigma = 250$ МПа, (3) $\sigma = 270$ МПа, (4) $\sigma = 300$ МПа, (б) $T = 800 \text{ }^{\circ}\text{C}$: (1) $\sigma = 65$ МПа, (2) $\sigma = 80$ МПа, (3) $\sigma = 100$ МПа, (4) $\sigma = 150$ МПа, (в) $T = 900 \text{ }^{\circ}\text{C}$: (1) $\sigma = 20$ МПа, (2) $\sigma = 27$ МПа, (3) $\sigma = 35$ МПа, (4) $\sigma = 40$ МПа, (г) $T = 1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$: 1 – $\sigma = 8$ МПа, 2 – $\sigma = 10$ МПа, 3 – $\sigma = 11,5$ МПа, 4 – $\sigma = 14$ МПа; звездочки – моменты разрушения образцов.

Таблица 2.2. – Характеристики ползучести титанового сплава ВТ9

Номер рисунка	$T, \text{ }^{\circ}\text{C}$	$B_A, \text{ }^{-n}\text{c}^{-1}$	$B_{\omega}, \text{ }^{-k}\text{c}^{-1}$	n	k	α	m
2.1а	700	$1,73 \cdot 10^{-18}$	$5,7 \cdot 10^{-15}$	5,6	4,25	0	2
2.1б	800	$2,39 \cdot 10^{-14}$	$1,55 \cdot 10^{-10}$	4,58	2,9	0	2,5
2.1в	900	$1,02 \cdot 10^{-12}$	$1,99 \cdot 10^{-9}$	4,1	3,23	0	1,7
2.1г	1000	$6,12 \cdot 10^{-9}$	$1,68 \cdot 10^{-8}$	4,3	3,93	0	0,2
2.2а	750	$5,85 \cdot 10^{-15}$	$2,86 \cdot 10^{-12}$	4,6	3,4	0	2
2.2б	950	$8,78 \cdot 10^{-10}$	$7,87 \cdot 10^{-9}$	4,3	3,3	0	1,6

При больших деформациях, превышающих 2%, в экспериментах после каждого приращения осевой деформации на величину $\Delta \varepsilon \approx 0,5\%$ с использованием условия несжимаемости материала при ползучести определялась площадь сечения образца и корректировалась осевая нагрузка для поддержания напряжения постоянным.

Из приведенных на рисунках 2.3, 2.2 результатов следует, что при постоянных значениях температур T , напряжений σ и больших деформациях ε , достигающих 100%, существует единая кривая при напряжениях σ , не превышающих предела

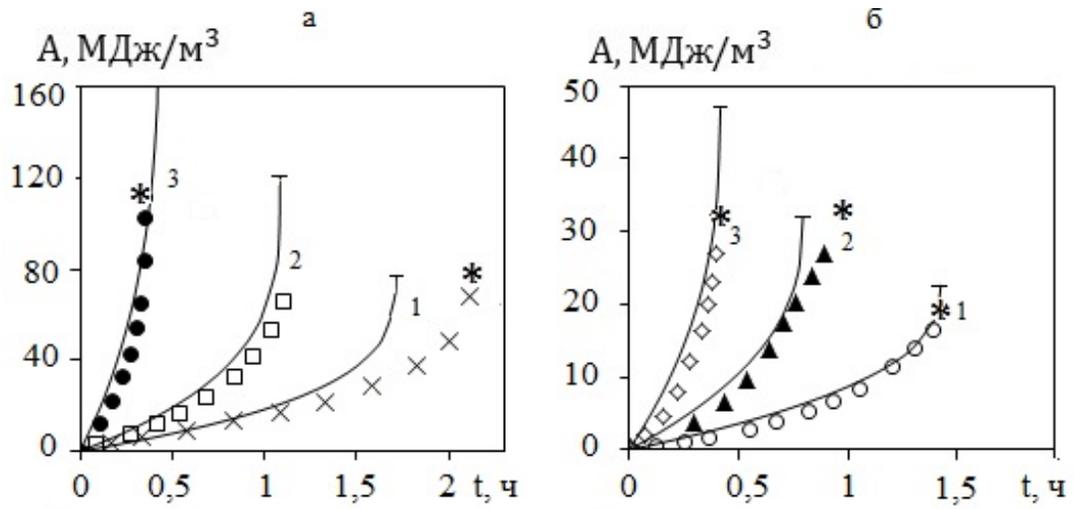


Рисунок 2.2. — Экспериментальные (значки) и аппроксимационные (линии) диаграммы ползучести при растяжении для титанового сплава ВТ9 при $\sigma = const$, $T = const$

упругости σ_e , т. е. исходные кривые ползучести подобны в координатах $t - \omega$.

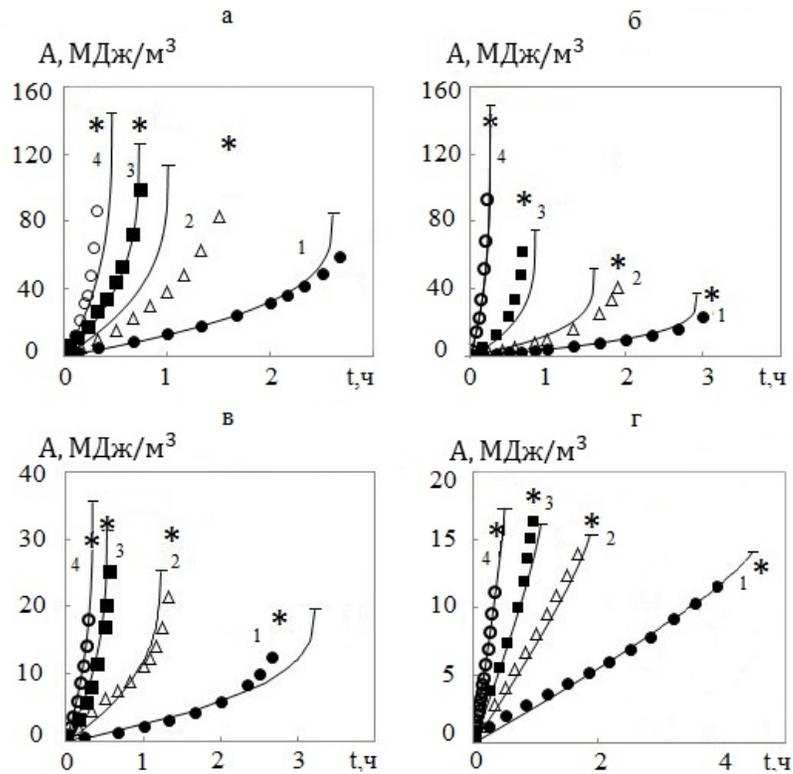


Рисунок 2.3. — Экспериментальные (значки) и аппроксимационные (линии) диаграммы ползучести при растяжении для титанового сплава ВТ-9 при $\sigma = const$, $T = const$

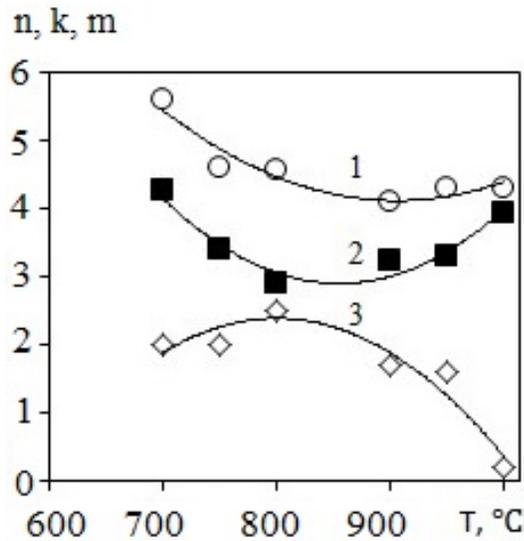


Рисунок 2.4. — Зависимости параметров n (1), k (2), m (3) от температуры для титанового сплава ВТ9.

На рисунке 2.4 точками показаны зависимости параметров n, k, m от T при постоянном значении напряжений σ .

На рисунке 2.5 приведены диаграммы испытаний на ползучесть для стали 09Г2С в виде зависимостей деформации от времени при растяжении образцов при 700, 730, 750, 770 и 800⁰С. Точками отмечены экспериментальные данные, кривые получены с использованием уравнений ЭВТП.

Из рисунка 2.5 видно, что использование характеристик материала, представленных в таблице 2.3, дает удовлетворительное соответствие численных и экспериментальных данных.

Таблица 2.3. — Характеристики ползучести стали 09Г2С

$T, ^\circ C$	$B_\varepsilon, \text{МПа}^{-n} \text{с}^{-1}$	$B_\omega, \text{МПа}^{-k} \text{с}^{-1}$	n	k	m
700	$3,12 \cdot 10^{-15}$	$2,09 \cdot 10^{-11}$	5,5	3,5	1,105
730	$1,97 \cdot 10^{-14}$	$3,97 \cdot 10^{-14}$	5,58	5,4	0,65
750	$2,97 \cdot 10^{-14}$	$6,04 \cdot 10^{-13}$	5,5	4,82	1,054
770	$5,8 \cdot 10^{-14}$	$1,39 \cdot 10^{-13}$	5,5	5,4	0,89
800	$1,12 \cdot 10^{-13}$	$2,39 \cdot 10^{-13}$	5,5	4,2	0,44

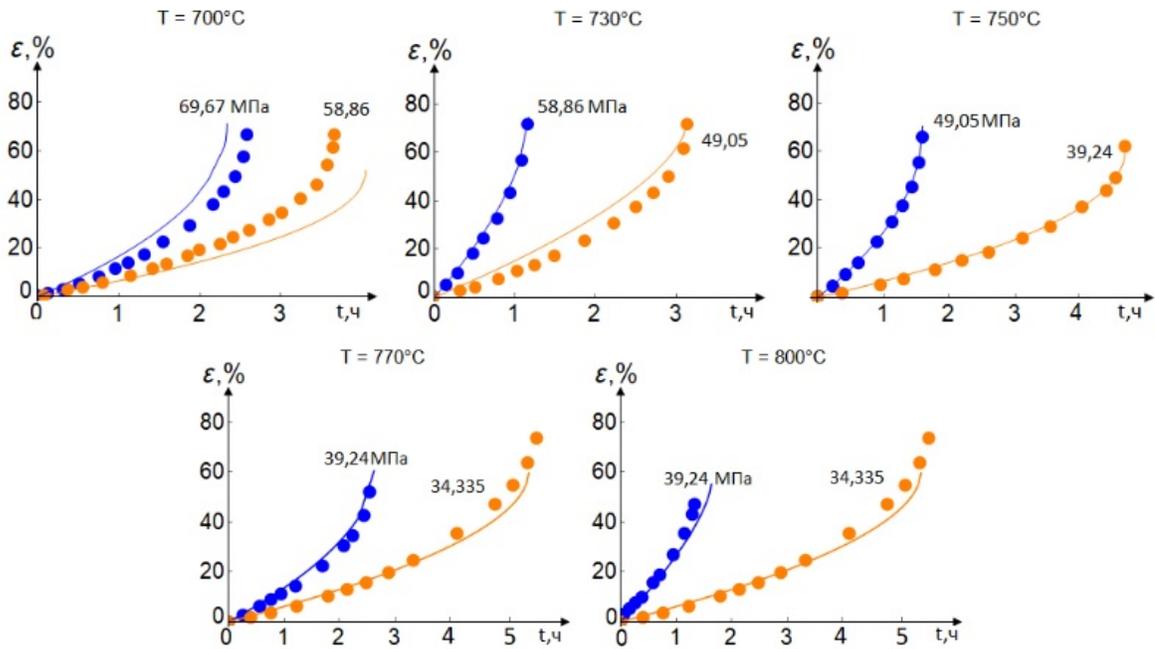


Рисунок 2.5. — Диаграммы ползучести стали при различных температурах.

2.1.4 Метод определения характеристик ползучести при нестационарном процессе нагружения

Использование энергетических параметров в кинетических уравнениях ползучести и повреждаемости было применено к описанию нестационарного процесса одноосного деформирования титанового сплава ВТ9 [9] и для стали 09Г2С [50], [52], [53].

Процесс аппроксимации кривых ползучести при перегрузке рассчитывался следующим образом: в начале процесса при заданной температуре T_1 по характеристикам разупрочняющегося материала m и времени продолжительности эксперимента

$$\tau = t(m + 1)\psi(\omega)$$

определяется параметр поврежденности $\omega_1 = 1 - (1 - \tau)^{1/(m+1)}$, по которому вычисляется работа рассеяния

$$A_1 = \omega_1 \cdot B_A(T) \cdot [B_\omega(T)\sigma_1^{n_1-k_1+1}]^{-1}.$$

Затем, при перегрузке на следующий уровень нагружения σ_2 при соответствующей температуре T_2 , отсчет начинается с накопленного уровня повреждения ω_1 и соответствующего ему времени t_1 . По аналогии с ω_1 рассчитывается параметр ω_2 и работа рассеяния для продолжения процесса.

На рисунке 2.6 приведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных в виде зависимости $A(t)$ для титанового сплава ВТ9 при различных значениях σ и T : (1) $T = 700 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 300 \text{ МПа}$, перегрузка при $t_1 = 15 \text{ мин}$ ($T = 950 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 18 \text{ МПа}$); (2) $T = 750 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 150 \text{ МПа}$, перегрузка при $t_2 = 62 \text{ мин}$ ($T = 950 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 18 \text{ МПа}$); (3) $T = 700 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 200 \text{ МПа}$, перегрузка при $t_3 = 108 \text{ мин}$ ($T = 950 \text{ }^\circ\text{C}$, $\sigma = 15 \text{ МПа}$).

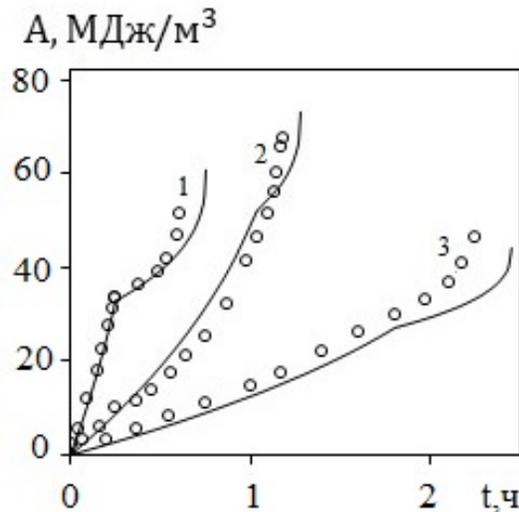


Рисунок 2.6. — Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости $A(t)$ для титанового сплава ВТ9 при различных значениях σ и T .

На рисунке 2.7 приведены результаты для серии из 5 экспериментов и сопоставление экспериментальных (точки) и численных (сплошные кривые) данных по ползучести с перегрузками на другие уровни напряжений при температурах для стали 09Г2С. Моменты перегрузок отмечены стрелками.

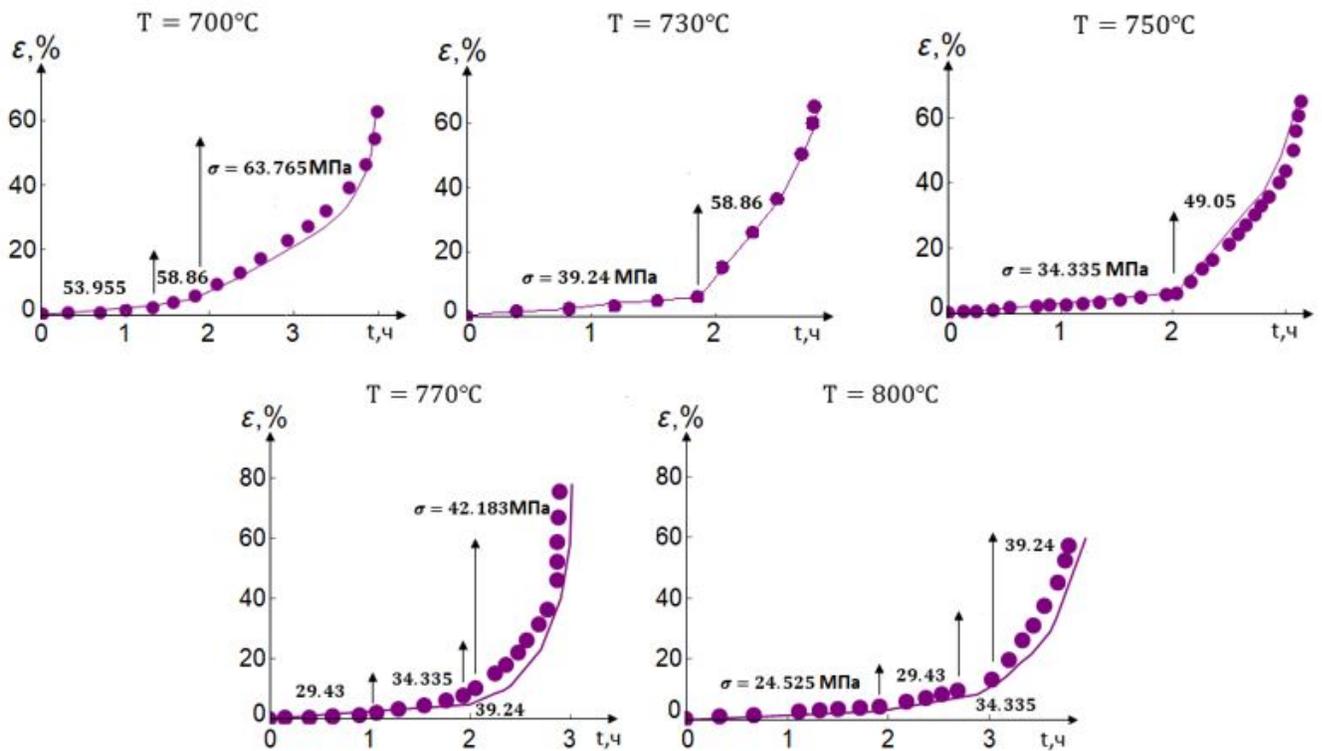


Рисунок 2.7. — Диаграммы ползучести стали при различных температурах.

Анализ рисунков 2.6, 2.7 показал, что получили удовлетворительное описание нестационарных процессов ползучести для материалов ВТ9, 09Г2С в диапазоне температур .

2.2 Процесс ползучести при чистом изгибе прямоугольной балки

2.2.1 О границах применимости теории чистого изгиба балок

Чистый изгиб - частный случай изгиба, при котором в сечениях балки поперечная сила равна нулю [54], [55]. Он может иметь место в том случае, когда собственный

вес балки настолько мал, что его влиянием можно пренебречь.

Напряжения могут быть определены на основании того, что :

1. касательные составляющие усилий по элементарным площадкам в поперечном сечении балки не могут быть приведены к паре сил, плоскость действия которой перпендикулярна к плоскости сечения. Отсюда следует, что изгибающее усилие в сечении является результатом действия по элементарным площадкам лишь нормальных усилий, а потому при чистом изгибе и напряжения сводятся только к нормальным;

2. чтобы усилия по элементарным площадкам свелись только к паре сил, среди них должны быть как положительные, так и отрицательные. Поэтому должны существовать как растянутые, так и сжатые волокна балки.

При чистом изгибе балки постоянного сечения:

1. в сечениях действуют только нормальные напряжения;

2. все сечение может быть разбито на две зоны — растянутую и сжатую; границей зон является нейтральная линия сечения, в точках которой нормальные напряжения равны нулю;

3. любой продольный элемент балки (в пределе любое волокно) подвергается осевому растяжению или сжатию, так что соседние волокна друг с другом не взаимодействуют;

4. если крайние сечения балки при деформации остаются плоскими и нормальными к оси, то и все ее поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к оси изогнутой балки.

Рассмотрим стержень, начало координат которого поместим с осями x , y в плоскости одного сечения, ось z параллельна образующей цилиндрического тела.

При изгибе балки в главной плоскости yOz (рисунок 3.1) связь кривизны

$\kappa = 1/\rho_x$ с моментом M_x представима в виде [54]:

$$1/\rho_x = -M_x/(EI_x). \quad (2.13)$$

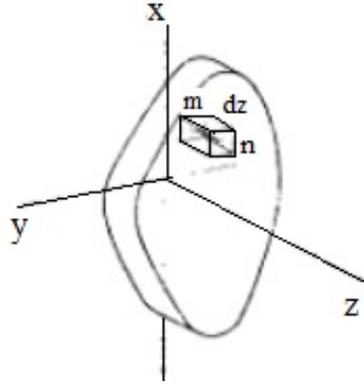


Рисунок 2.8.

Искривленная изогнутая балка - некоторая кривая в плоскости yOz . Задавая перемещение точек прямой оси балки в начальный момент времени, в виде функции $\nu(z)$, получаем $1/\rho = \pm \nu'' / (1 + \nu'^2)^{3/2}$, где штрихами обозначены производные по z .

Выпуклость изогнутой оси - вверх, означает, что ν'' положительна. Поэтому $\nu'' / (1 + \nu'^2)^{3/2} = M_x / (EI_x)$.

Поскольку балка - несущий элемент конструкции и прогибы в основном малы, то тангенс угла наклона касательной к упругой линии ν' мал. Тогда

$$EI_x \nu'' = M_x(z). \quad (2.14)$$

Определим точность приближенного уравнения 2.14. Пусть заземленная балка длиной l нагружена на конце моментом M . Из уравнения (2.13) следует, что балка изогнется по дуге окружности и прогиб на конце $f = \rho(1 - \cos l/\rho)$. Разложим

косинус в ряд с ограничением тремя членами разложения, получаем

$$f/l = \frac{1}{2} \frac{Ml}{EI_x} - \frac{1}{24} \frac{Ml^3}{EI_x} + \dots$$

Интегрируя 2.14 с учетом граничных условий $\nu(0) = nu'(0) = 0$, получаем

$$f_0/l = Ml/(2EI_x),$$

где f_0 - величина прогиба, получающаяся по приближенной теории. Тогда выражение прогиба имеет вид $f/l = f_0/l - (f_0/l)^3/3$. Относительная ошибка при определении прогиба

$$|f - f_0|/f_0 = (f_0/l)^2/3.$$

Если погрешность в определении прогиба составляет 3%, то, полагая, что $(f_0/l)^2/3 = 0,03$, находим $f_0/l = 0,3$.

Прогибы балок, применяемых в качестве несущих элементов конструкций, всегда гораздо меньше, чем 30% от длины.

2.2.2 О типах задач медленного деформирования

В задачах медленного формообразования деталей в условиях ползучести с учетом упругих деформаций рассматривается два класса задач: прямые и обратные. В прямых рассматриваются вопросы определения НДС при заданной температуре прогрева заготовки при заранее заданных в интервале времени $[0, t_m]$ силовых и других внешних воздействиях на нее. Здесь t_m - время формовки детали. Эти задачи необходимы для расчета параметров технологического оборудования. В обратных задачах внешние усилия заранее не известны, они определяются в процессе расчета НДС [56–59]. Необходимо рассчитать активный этап формоизменения заготовки под действием внешних силовых

и кинематических воздействий от исходной формы поверхности требуемой, и этап упругой разгрузки, когда после удаления деформирующих внешних усилий заготовка за счет упругого восстановления принимает требуемую форму детали.

Активный этап процесса формообразования определяется заданными параметрами: температурой, общим временем формообразования t_f , временем ускоренной релаксации t_p , скоростью нагружения заготовки и другими параметрами. Возможны дополнительные условия на перемещения заготовки в целом или на отдельные ее участки или другие условия, например, с точки зрения наименьшего накопления повреждений в наиболее нагруженных элементах заготовки за все время процесса формообразования. Или другое ограничение, например, по напряжениям, возникающим в элементах заготовки при формообразовании, напряжения не должны превосходить предела упругости, т.е. не допускается возникновения "мгновенных" пластических деформаций во все время процесса формоизменения, что фактически накладывает ограничение на скорости деформаций (кинетическое ограничение). Этот этап процесса формообразования позволяет существенно ослабить влияние начальных и граничных условий на получение конечной геометрии детали ("эффект Сен-Венана во времени"), а также существенно уменьшить "распружинивание" детали [59]. Например, в работе [60] проводится анализ распружинивания панели во время процесса формообразования при температуре старения из алюминиевого сплава 7050. Показано, что минимизировать процесс распружинивания можно путем увеличения времени формования до заданного предела текучести, требуемого для данного сплава. В орбренных панелях процент процесс распружинивания можно, например, уменьшить за счет увеличения высоты элемента жесткости и уменьшения радиуса матрицы [61]. Однако, когда материал загружается в пластическую область, испытания на ползучесть больше не подходят для характеристики эволюции деформации ползучести в сплаве, и испытания на

старение с релаксацией под напряжением (SRA) (выдерживающие постоянную деформацию при повышенной температуре) становятся более подходящим выбором. Однако, когда материал загружается в пластическую область, испытания на ползучесть больше не подходят для характеристики эволюции деформации ползучести в сплаве, и испытания на старение с релаксацией под напряжением (SRA) (выдерживающие постоянную деформацию при повышенной температуре) становятся более подходящим выбором. Время выдержки заготовки в задеформированном состоянии при температуре является существенным для определения расчетной конструкции оснастки, т.к. упругое восстановление определяется уровнем непрорелаксированных напряжений на момент снятия нагрузки.

Если производить нагрузку материала в пластической области, испытания на ползучесть больше не подходят для процесса деформации в условиях ползучести [62] и испытания проводят при температуре старения с релаксацией напряжений.

Постановки чисто релаксационных обратных задач достаточно полно обсуждаются в монографии [63], обосновывается сходимость итерационного метода решения при условии выполнения постулата устойчивости на любой момент времени.

Одним из основных условий большинства технологических процессов высокоточного формообразования крупногабаритных деталей за счет деформаций ползучести является наличие другого кинематического условия - "фиксация заготовки" перед разгрузкой с целью уменьшения упругого восстановления за счет процесса релаксации напряжений.

2.3 Процесс ползучести при чистом изгибе прямоугольной балки для материала с одинаковыми свойствами ползучести на растяжение и сжатие

Задачи чистого изгиба балок при ползучести для материалов с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие рассмотрены в работах [2, 64–69]. В качестве определяющих соотношений используются степенные и экспоненциальные функции. Учет различных свойств материала при растяжении и сжатии в процессе установившейся и неуставившейся ползучести приведен в [38–41, 69–74].

Эксперименты образца на чистый изгиб балок проводились на установке, схема которой продемонстрирована на рисунке 2.9.

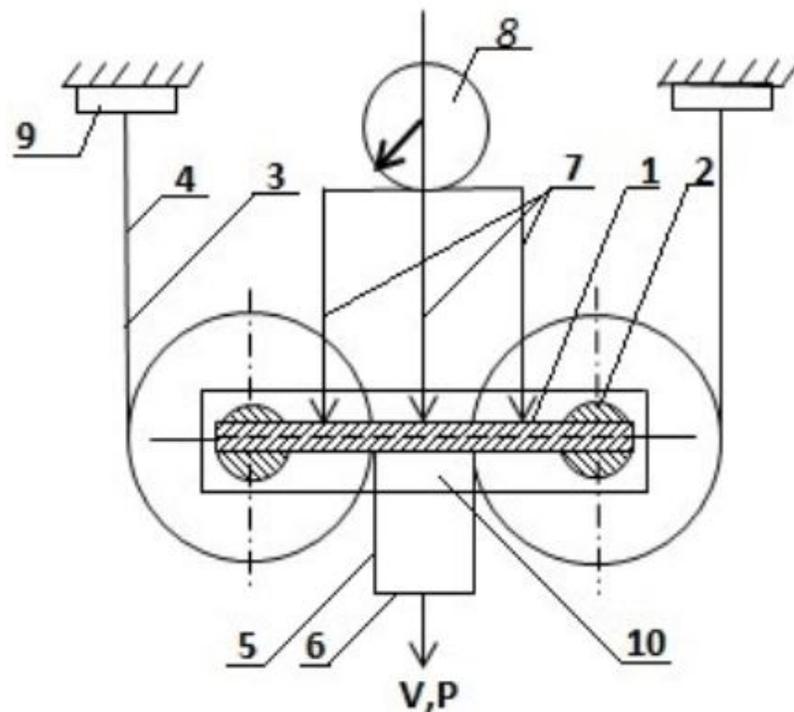


Рисунок 2.9. — Кинематическая схема установки на изгиб балки.

Траверсы 6 перемещаются с заданной скоростью, тем самым осуществляя раскручивание тросов 4–5 со шкивов 3 и осуществляя чистый изгиб балки.

С помощью гибкой подвески исключена осевая реакция, что позволяет достичь достаточно больших прогибов изгибаемой балки. В 2 представлена паза, позволяющая посредством вкладышей производить испытания образцов произвольного поперечного сечения. Действующий изгибаемый момент на любом моменте процесса деформирования определяется по показаниям датчика 9, а по показаниям индикатора 8 вычисляется кривизна, где 7 – кварцевые стержни системы замера и 10 – поперечное пространство.

2.3.1 Постановка задачи.

Рассматривается балка прямоугольного сечения. Балка подвержена чистому изгибу в процессе ползучести (рисунок 2.10) [8]. Необходимо определить кривизну балки по заданному изгибающему моменту M . Для этого надо исследовать напряженно-деформированное состояние балки и определить длительность процесса до разрушения. Данные задачи можно рассмотреть вместе с помощью кинетических уравнений ползучести [1] в энергетической форме [3].

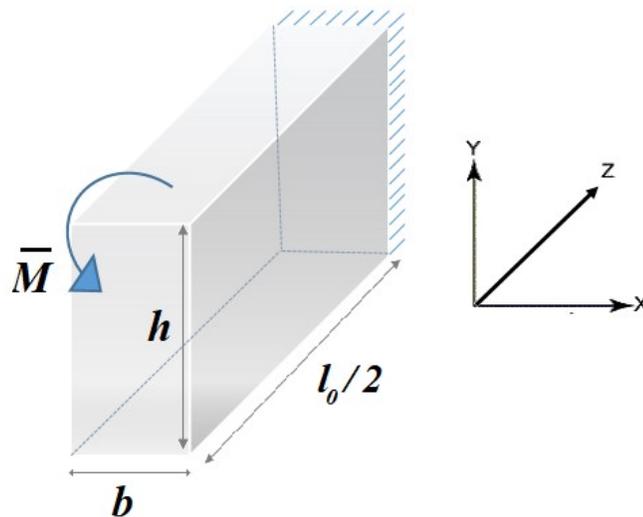


Рисунок 2.10. — Схема изгиба балки прямоугольного сечения.

Пусть x, y, z - оси декартовой системы координат, такой, что ось x направлена

поперек балки, ось z - вдоль балки. Изгибающий момент M направлен перпендикулярно плоскости симметрии.

Полная деформация в произвольной точке балки в любой момент времени равна сумме упругих деформаций и деформаций ползучести соответственно:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c(z). \quad (2.15)$$

Из гипотезы плоских сечений следует, что $\varepsilon^e = y\kappa$, где κ - кривизна балки.

В упругой области материала справедлив закон Гука. Тогда $\sigma = E y \kappa$, где E - модуль упругости материала.

При чистом изгибе балки отсутствует продольная сила

$$N_x = \int_S \sigma dS = E \kappa \int_S y dS = 0. \quad (2.16)$$

Получим уравнение равновесия, связывающее нормальные напряжения с изгибающим моментом. Момент M по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно оси вращения ($\int_S \sigma y dS = M$), тогда

$$E \kappa \int_S y^2 dS = M, \quad (2.17)$$

где $\int_S y^2 dS = J$ - изгибающий момент. Для прямоугольного сечения балки $J = bh^3/12$.

В упругой области кривизна и напряжение соответственно равны

$$\kappa = M/(EJ), \quad (2.18)$$

$$\sigma = yM/J, \quad (2.19)$$

а в области ползучести

$$\varkappa = 2/J \int_0^{h/2} b\varepsilon^c y dy \quad (2.20)$$

и

$$\sigma = y(2E/J) \int_0^{h/2} b\varepsilon^c y dy - E\varepsilon^e. \quad (2.21)$$

Рассматривая процесс деформации во всем материале, получаем выражение для определения кривизны балки \varkappa :

$$\varkappa = M/(EJ) + (2/J) \int_0^{h/2} b\varepsilon^c y dy. \quad (2.22)$$

Закон распределения напряжений по сечению балки в зависимости от накопленной деформации ползучести:

$$\sigma = yM/J + y(2E/J) \int_0^{h/2} b\varepsilon^c y dy - E\varepsilon^e. \quad (2.23)$$

Уравнения ползучести энергетического варианта (для случая $A_* = const$):

$$dA/dt = B_1 \sigma^n (A_* - A)^{-m}, \quad d\varepsilon/dt = (dA/dt)(1/\sigma). \quad (2.24)$$

Считаем, что наиболее нагруженное волокно балки – крайнее, тогда разрушение будет происходить при достижении удельной работы рассеяния A_* .

В (2.24) подставляя значение напряжений σ , получаем систему двух интегро-дифференциальных уравнений относительно деформации ε , работы рассеяния A для решения поставленной задачи - прямой задачи формообразования: определение кривизны детали по заданному изгибающему моменту.

2.3.2 Численные методы решения.

Задача решается численными методами. Сечение балки разбивается на $k-1$ отрезков интегрирования. В уравнении (2.23) проводится замена интеграла на конечную сумму по формуле Симпсона [75]:

$$\int_0^{h/2} b\varepsilon^c y dy = \frac{bh}{6k} \sum_{j=1,3,5}^{k-1} [\varepsilon^c(y_{i-1}, t)y_{j-1} + 4\varepsilon^c(y_i, t)y_j + \dots + \varepsilon^c(y_{j+1}, t)y_{j+1}].$$

Обозначая в системе уравнений (2.24) $\varepsilon^c(t) \equiv \varepsilon^c(y_i, t)$, $\sigma_i(t) \equiv \sigma(y_i, t)$, $A_i(t) \equiv A(y_i, t)$, $\varkappa(t) \equiv \varkappa(\varepsilon_1^c(t), \dots, \varepsilon_k^c(t))$, получаем систему $2k - 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} dA_i/dt &= B_1 \sigma_i^n(\varepsilon_1^c, \dots, \varepsilon_k^c)/(A_* - A)^{-m} \equiv \varphi_i(\varepsilon_1^c, \dots, \varepsilon_k^c, A_i), \\ d\varepsilon_i/dt &= B_1 \sigma_i^{n-1}(\varepsilon_1^c, \dots, \varepsilon_k^c)/(A_* - A)^{-m} \equiv \psi_i(\varepsilon_1^c, \dots, \varepsilon_k^c, A_i), \quad (i = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (2.25)$$

В качестве начального напряженно-деформированного состояния берется упругое: $\varepsilon(y_i, 0) = 0$, $A(y_i, 0) = 0$.

Тогда в начальный момент времени $\varkappa(y_i, 0) = M/(JE)$ и $\sigma(y_i, 0) = y_i(M/J)$.

Система дифференциальных уравнений (2.25) решалась следующими методами четвертого порядка точности:

1. Методом Рунге-Кутты с постоянным шагом по времени.

Для вычислительных значений деформации в i -ой точке разбиения по высоте балке и удельной работы рассеяния использовалась аппроксимация:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \sum_{i=0}^k (k_{\varepsilon 1} + 2k_{\varepsilon 2} + 2k_{\varepsilon 3} + k_{\varepsilon 4})/6,$$

где $k_{\varepsilon 1} = \Delta t \cdot \psi(\varepsilon_i)$, Δt – счётчик по времени, $k_{\varepsilon 2} = \Delta t \cdot \psi(\varepsilon_i + k_{\varepsilon} 1/2)$, $k_{\varepsilon 3} =$

$$\Delta t \cdot \psi(\varepsilon_i + k_{\varepsilon 2}/2), k_{\varepsilon 4} = \Delta t \cdot \psi(\varepsilon_i + k_{\varepsilon 2}),$$

$$A_i = A_0 + \sum_{i=0}^k (k_{A1} + 2k_{A2} + 2k_{A3} + k_{A4})/6,$$

где $k_{A1} = \Delta t \cdot \varphi(A_i)$, $k_{A2} = \Delta t \cdot \varphi(A_i + k_{A1}/2)$, $k_{A3} = \Delta t \cdot \varphi(A_i + k_{A2}/2)$, $k_{A4} = \Delta t \cdot \varphi(A_i + k_{A3})$.

2. Метод Рунге-Кутты с постоянным приращением рассеянной энергии.

Расчет можно проводить вплоть до разрушения, если задать шаг интегрирования из условия постоянства приращения величины удельной работы рассеяния на крайнем волокне [8].

Шаг по времени определяется минимизированием, после вычисления шага интегрирования dt :

$$dt = [(A_* - A^k + \Delta A^k)^{m+1} - (A_* - A^k)^{m+1}] / (m + 1) B \sigma_k^n.$$

3. Метод Рунге-Кутты-Мерсона с переменным шагом по времени.

Модифицированным методом Рунге-Кутты является метод Рунге-Кутты-Мерсона [75]. Оценка погрешности вычисляется на каждом шаге интегрирования системы, затем принимается решение об изменении шага по времени. Схема Мерсона требует на каждом шаге вычислений правых частей дифференциальных уравнений в пяти точках. Но за счет дополнительного коэффициента можно определить погрешность решения на каждом шаге:

$$err = |2k_{\varepsilon 4} - 3k_{\varepsilon 3} - k_{\varepsilon 5}|/10.$$

Для автоматического выбора шага интегрирования использовался следующий критерий: 1) если $|err| \geq eps$ (eps – допустимая заданная погрешность), то шаг уменьшался в два раза и 2) если $|err| \leq eps/32$, то шаг увеличивается в два раза.

Анализ решения поставленной задачи с помощью трех методов показал, что расчет методом Рунге-Кутты с постоянным шагом сильно проигрывает по быстродействию. Удовлетворительное соответствие экспериментальных и численных данных получено по второму методу, который требует в 4 раза меньше количество шагов по времени, чем по третьему. Огромным преимуществом третьего метода является то, что кривые пересекаются в одной характеристической точке. Это означает, что в продольном волокне в процессе ползучести не происходит перераспределения напряжений. Ниже представлены расчеты с использованием метода Рунге-Кутта-Мерсона. Решение задачи по данному методу представлена ниже на рисунке 2.11.

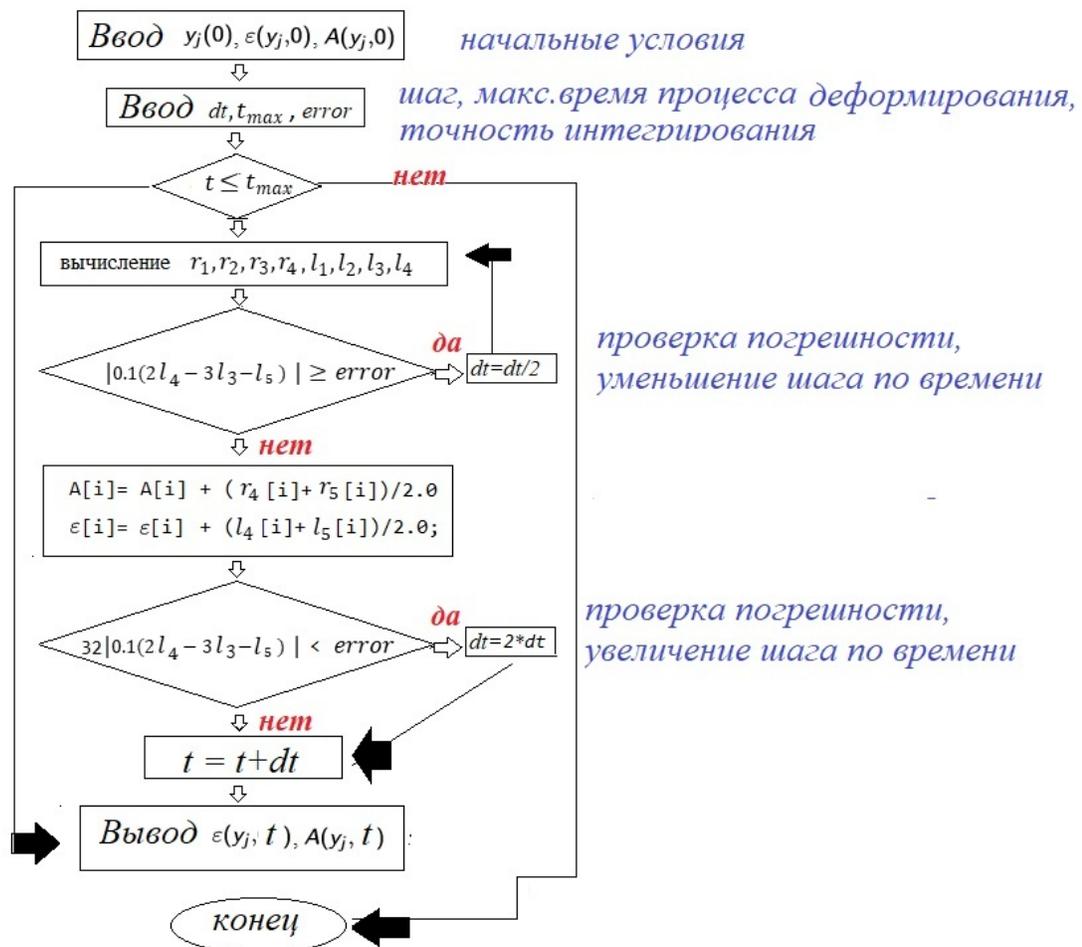


Рисунок 2.11. — Блок-схема расчета Рунге-Кутта-Мерсона.

2.3.3 Результаты численного расчета для балки прямоугольного сечения

Расчет проводился для чистого изгиба балки из сплава Д16 при температуре 250⁰С [8, 70]. Материал удовлетворяет энергетическому варианту теории ползучести [8].

Основными характеристиками балки: высота $h = 20$ мм, ширина $b = 10$ мм и длина $l = 100$ мм.

Характеристики ползучести сплава Д16 при 250⁰С: $B = 7,9 \cdot 10^{-5}$ (МПа) ^{$m-n+1$} ч⁻¹, $m = 10$, $n = 6$, $E = 56 \cdot 10^3$ МПа, $A_* = 14,7$ МПа. Изгибающий момент, приложенный к торцевой части балки $M=78.45$ Нм, для получения целевой кривизны изделия $0,006$ мм⁻¹ [8].

На рисунке 2.12 представлена эпюра распределений напряжений по высоте балки в различные моменты времени. Пересечение кривых говорит о том, что в продольном волокне в процессе ползучести не происходит процесса перераспределения напряжений. Накопление повреждений приводит к интенсивному перераспределению напряжений. Происходит разгрузка крайних волокон, а средние догружаются.

На рисунке 2.13 представлено распределение удельной энергии рассеяния по высоте балки при $\sigma(0) = 117,67$ МПа. Можно проследить, как уменьшается остаточный ресурс балки со времен. Оценка поврежденности материала в конечный момент времени в процессе ползучести достигла значения $\omega_* = \varepsilon/\varepsilon_* = 0,48$.

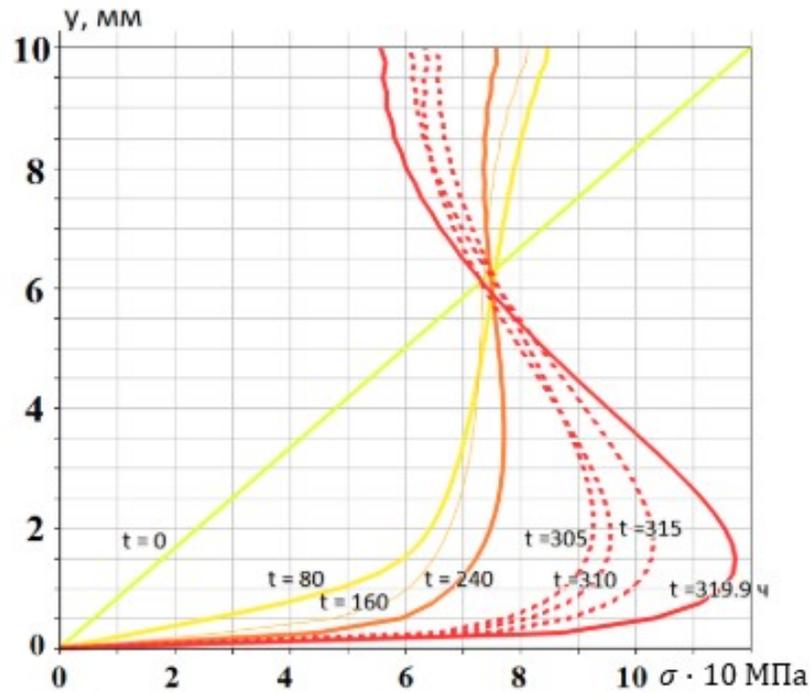


Рисунок 2.12. — Распределение напряжений в различные моменты времени по высоте балки.

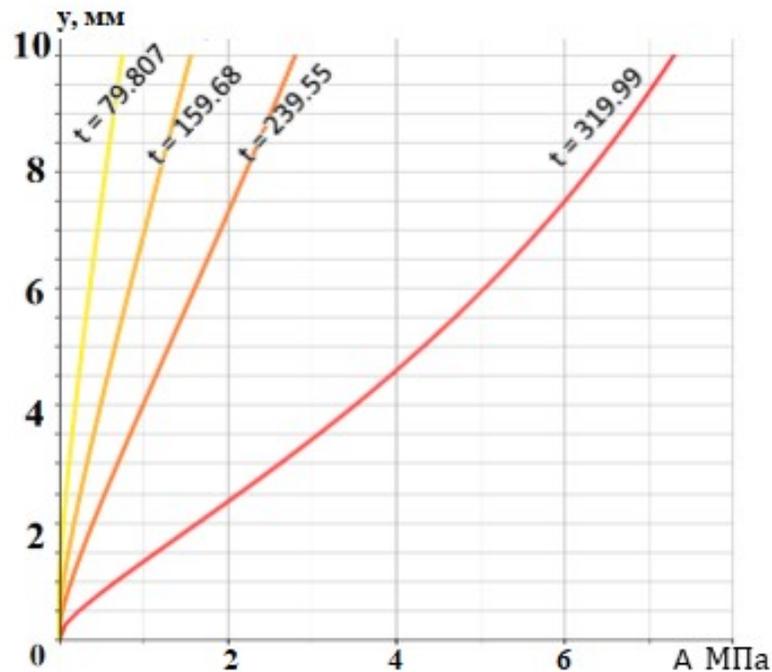


Рисунок 2.13. — Распределение удельной работы рассеяния по высоте балки.

На рисунке 2.14 представлен график зависимости кривизны в различные моменты времени. Сплошной линией представлены расчетные значения,

полученные при решении задачи, штриховая линия - расчетные значения, полученные в работе [8], точками - экспериментальные значения для величины изгибающего момента при максимальном напряжении в начальный момент времени. Результат показывает о практическом совпадении численного расчета кривизны от времени (красная кривая) с экспериментальными данными, что подтверждает правильность выбора определяющих уравнений в энергетической форме для процесса деформирования балок вплоть до разрушения.

С учетом процесса перераспределения напряжений можно достаточно точно оценить время до разрушения конструкции и при этом проследить весь процесс деформирования балки от момента нагрузки до разрушения.

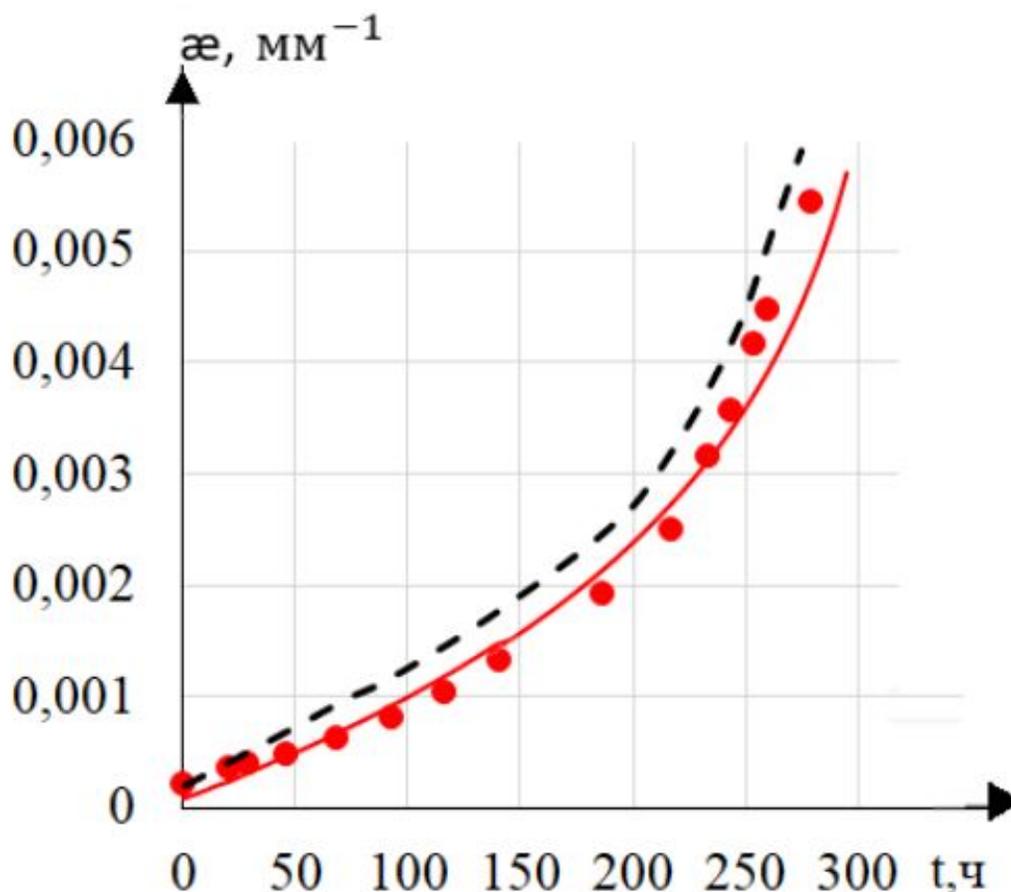


Рисунок 2.14. — Кривизна балки в различные моменты времени.

2.4 Деформирование балок прямоугольного сечения в условиях ползучести с различными свойствами на растяжение и сжатие.

2.4.1 Постановка задачи.

Данная задача отличается от предыдущей (п. 2.3) тем, что процесс деформирования рассматривается для балки из материала, обладающего различными свойствами на растяжение и сжатие в процессе ползучести.

Рассмотрим задачу о деформировании и разрушении балки прямоугольного сечения с высотой h , шириной b и длиной l_0 в условиях действия изгибающего момента. Необходимо определить кривизну балки по заданному изгибающему моменту M .

Процесс ползучести материала описывается уравнением вида

$$d\varepsilon_+/dt = (B_1|\sigma|^{n_1-1}\sigma)/(A_1^* - A)^{m_1}, \sigma > 0 \text{ — при растяжении};$$

$$d\varepsilon_-/dt = (B_2|\sigma|^{n_2-1}\sigma)/(A_2^* - A)^{m_2}, \sigma \leq 0 \text{ — при сжатии}.$$

Считая справедливой гипотезу плоских сечений и то, что в процессе ползучести изгибаемой балки происходит смещение нейтральной поверхности вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию, имеем:

$$\varepsilon(t) = \varkappa(z + \delta(t)),$$

где $\delta(t)$ – расстояние между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью в момент времени t , z – координата по высоте балки с началом в срединной поверхности.

Уравнения равновесия балки имеют вид:

$$\int_{-h/2}^{h/2} b\sigma(z + \delta)dz = M, \quad \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma dz = 0.$$

Уравнение (2.22) примет вид

$$\varkappa = M/(EJ_\delta) + \frac{1}{J_\delta} \int_{-h/2}^{h/2} b\varepsilon(z + \delta)dz,$$

где $J_\delta = b(h^3/12 + h\delta^2)$ – момент инерции балки прямоугольного сечения.

Положение между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью определяется из условия отсутствия нормальных усилий в сечении бруса:

$$\delta = -\frac{1}{\varkappa h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon dz.$$

Таким образом, полученная система уравнений сводится к двум интегро–дифференциальным уравнениям относительно деформации и удельной работы рассеяния:

$$d\varepsilon/dt = \varphi(\varepsilon), \quad dA/dt = \psi(\varepsilon). \quad (2.26)$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений первого типа. В качестве начального напряженно-деформированного состояния принимаем упругое. Значение деформации ε и работы рассеяния A в начальный момент в каждом волокне сечения принимаем нулевое.

2.4.2 Численный метод решения.

Задача из п.2.4.1 решается численным методом Рунге-Кутты-Мерсона. Сечение балки разбивается на k равных интервалов $i=0, \dots, k$:

$$dA_{+i}/dt = (B_1\sigma_i^{n_1})/(A_1^* - A_i)^{m_1}, \sigma > 0 \text{ — при растяжении;}$$

$$dA_{-i}/dt = (B_2\sigma_i^{n_2})/(A_2^* - A_i)^{m_2}, \sigma \leq 0 \text{ — при сжатии.}$$

$$d\varepsilon_i/dt = (1/\sigma_i)/(dA_i/dt). \quad (2.27)$$

Заменяя интегралы конечными суммами по формуле Симпсона [75, 76], получаем выражения для определения кривизны оси балки \varkappa и положения между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью δ :

$$\varkappa = M/[EJ_\delta] + [(bd)/(3J_\delta)][\varepsilon_{k-1}(y_{k-1} + \delta) + 4\varepsilon_k(y_k + \delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1} + \delta)], \quad (2.28)$$

$$\delta = -d/[3\varkappa h][\varepsilon_{k-1}(y_{k-1} + \delta) + 4\varepsilon_k(y_k + \delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1} + \delta)]. \quad (2.29)$$

Здесь d — длина интервала разбиения, y_i — значение высоты в i -ой точке разбиения.

Алгоритм решения задачи определения напряженно-деформирования состояния балок прямоугольного сечения для разносопротивляющегося материала с учетом повреждаемости реализован в виде программного модуля в пакете Visual Studio на языке C++.

2.4.3 Результаты численного расчета для балки прямоугольного сечения.

Численное моделирование задачи из п. 2.4.1 проводится для алюминиевого сплава АК4 - 1 при температуре 200 °С. Характеристики материала в процессе ползучести приведены в таблице 3.1 [40]. Материал изотропен. Его характеристики упругости при растяжении и сжатии: $E = 70000$ МПа. Установившаяся стадия ползучести как при растяжении, так и при сжатии описывается степенным законом Нортона.

Таблица 2.4. — Характеристики материала АК4-1Т

вид испытаний	показатель текучести (МПа) $^{m-n+1}$ ч $^{-1}$	степень напряжения	степень сингулярности	критическое значение рассеянной энергии, МПа
растяжение	$B_1 = 6,37 \cdot 10^{-13}$	$n_1 = 7$	$m_1 = 7$	$A_{*1} = 10$
сжатие	$B_1 = 2,84 \cdot 10^{-15}$	$n_2 = 8$	$m_2 = 2$	$A_{*2} = 10$

Характерной особенностью кривых ползучести для материала является отсутствие участков упрочнения $\alpha = 0$. С самого начала нагружения начинается накопление повреждений материалом, скорость деформаций постоянно нарастает в процессе испытаний вплоть до разрушения.

На рисунке 2.15 в качестве иллюстраций приведены эпюры распределения напряжения в различные моменты времени $t = 0; 136; 409; 537; 547$ ч. (кривые соответственно). Процесс перераспределения напряжения наблюдается в процессе ползучести. Видно, что происходит смещение нейтральной оси (момент обозначен стрелкой).

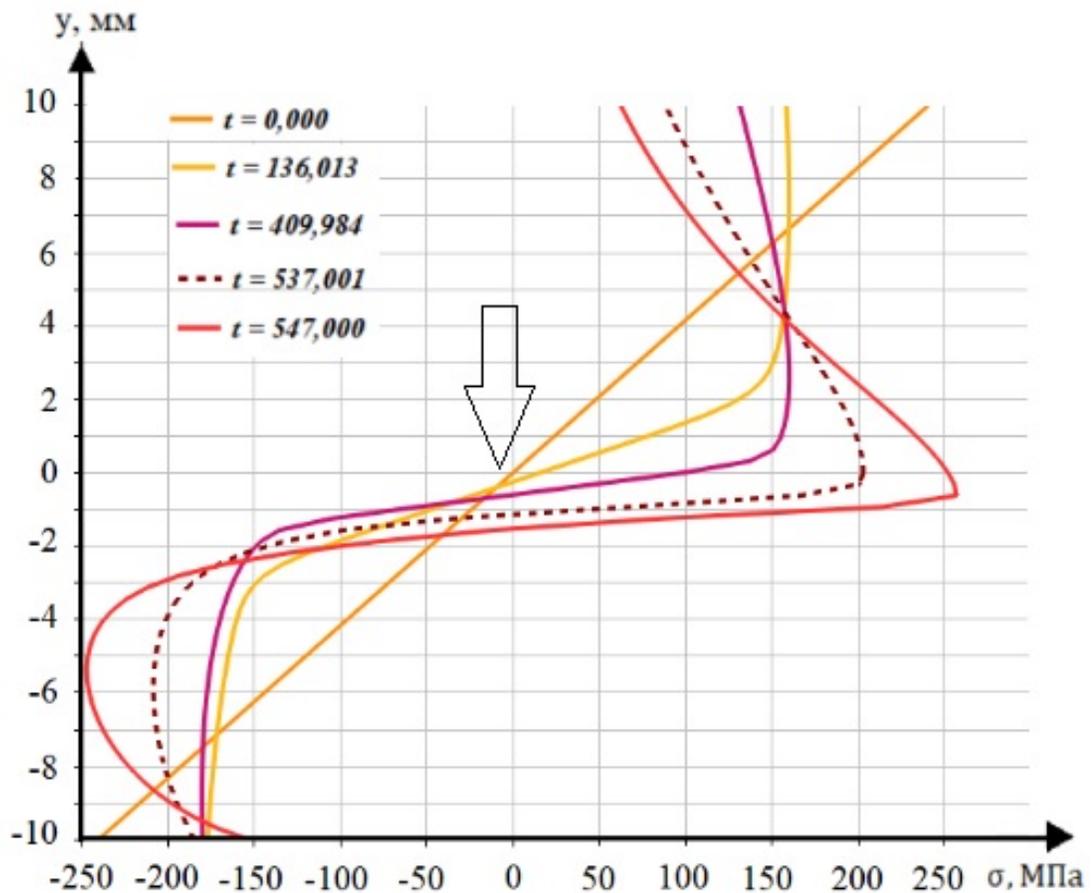


Рисунок 2.15. — Распределение напряжений σ по сечению балки.

На рисунке 2.16 представлено распределение повреждений по сечению балки y . Можно проследить, как уменьшается остаточный ресурс по сечению балки. При $A_* = 10$ МПа повреждаемость в крайнем волокне балки $\omega = A/A_* = 1$, т.е. процесс шел вплоть до разрушения.

На рисунке 2.17 показан график изменение кривизны по оси балки в различные моменты времени. Стоит отметить, что если проводить процесс моделирования деформирования балки с характеристиками ползучести на растяжение и поврежденностью (кривая 1), на сжатие с поврежденностью (кривая 2), то процесс формообразования не достоверно описывается - по времени или по скорости процесса деформирования. Кривая 4 - данные, полученные в работе [40]. Точками (5) обозначены экспериментальные значения, представленные

в работе [40]. Достаточно точно описывается процесс изгиба балки с учетом растяжения, сжатия и поврежденностью материала (кривая 4), что является подтверждением достоверности численного результата и достоверности процесса перераспределения внутренних напряжений и накопления повреждений в балке вплоть до разрушения.

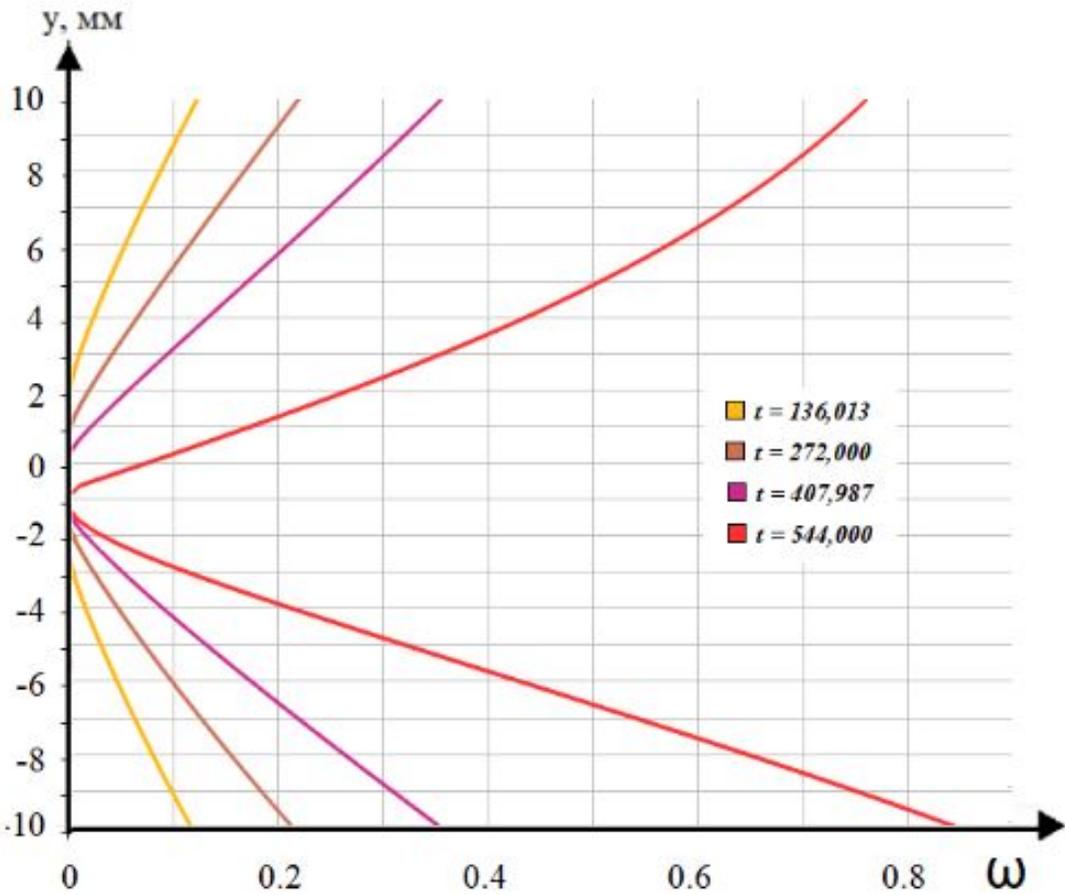


Рисунок 2.16. — Распределение повреждений по сечению балки y .

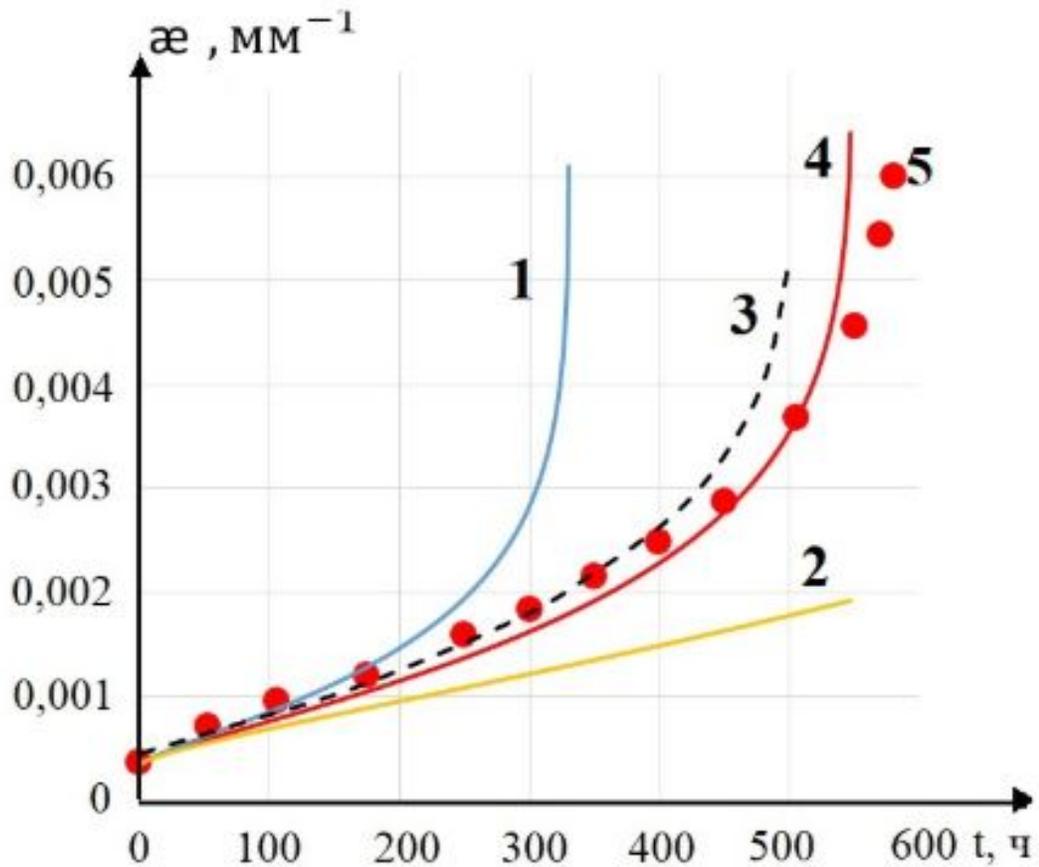


Рисунок 2.17. — Изменение кривизны оси балки κ по времени t .

2.5 Моделирование методом конечных элементов в пакете MSC.Marc Mentat.

2.5.1 Теория и алгоритмы решения.

Для более полного анализа задачи о чистом изгибе балки рассматривается трехмерная модель для формообразования балок прямоугольного сечения в процессе ползучести (п. 2.4.1) с использованием пакета MSC.Marc Mentat [77, 78].

При численном решении трехмерных задач деформирования тел в режиме ползучести проводится пространственная дискретизация и по времени уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Методом аппроксимации уравнений по пространственным координатам для произвольных форм является

метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ основан на слабой – интегральной форме дифференциальных уравнений.

Для решения систем алгебраических уравнений определяются матрицы и векторы перемещений. Вычисляя интегралы по областям, которые относятся к конечному элементу, необходимо определить компоненты тензора напряжений в точках интегрирования по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра.

В данной работе представлены алгоритмы вычисления компонент тензора напряжений при развитии процесса во времени с использованием определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении сжатии с учетом повреждаемости материала. Все эти алгоритмы реализованы в пакете MSC.Marc.

При больших деформациях, перемещениях и поворотах используются геометрически нелинейные уравнения МДТТ. Учет геометрической нелинейности различен в двух формулировках уравнений МДТТ: Полная Лагранжева формулировка (Total Lagrange или TL – формулировка), где в качестве отсчетной конфигурации выбирается начальная конфигурация тела; Модифицированная Лагранжева формулировка (Updated Lagrange или UL – формулировка) – в качестве отсчетной конфигурации – текущая (деформированная) конфигурация.

В таблице 2.5 [79] приведена краткая информация о ситуациях при анализе физической и/или геометрической нелинейности.

Таблица 2.5. — Типы формулировок уравнений МДТТ.

Тип анализа	Описание ситуации	Типы формулировок	Тензоры напряжений и деформаций
Большие параллельные перемещения, большие вращения, малые деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон - большие. Удлинения волокна и угловые изменения между волокнами - малые	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange - TL) Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrange - UL).	Второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, тензор деформации Грина-Лагранжа. Тензор напряжений Эйлера-Коши, тензор деформации Альманси. .
Большие параллельные перемещения, большие вращения, большие деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон - большие. Удлинения волокна и угловые изменения между волокнами - большие	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange - TL) Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrange - UL).	Второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, тензор деформации Грина-Лагранжа. Тензор напряжений Эйлера-Коши, тензор деформации Генки.

Рассмотрим полную систему уравнений, описывающую деформирование тела с геометрической нелинейностью.

В формулировке Total Lagrange:

1. Уравнение равновесия в слабой форме (уравнение баланса виртуальных работ) [78, 80–82]:

$$\int_{^0V} \bar{S} : \delta \bar{E} d^0V = \int_{^0V} {}^0\rho \bar{f} \cdot \delta \bar{u} d^0V + \int_{^0S_T} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} d^0S \quad (\delta \bar{u} = \bar{0} \text{ на } ^0S_u).$$

Здесь 0V – область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации; 0S – замкнутая поверхность, ограничивающая область 0V : 0S_u и 0S_T – части поверхности $^0S = ^0S_u \cup ^0S_T$ ($^0S_u \cap ^0S_T = \emptyset$), на которой заданы векторы перемещений \bar{u} и напряжений $\bar{T} = \bar{N} \cdot \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \cdot \bar{N}$ соответственно $\bar{u} = \bar{u}^*$ на 0S_u , $\bar{T} = \bar{N} \cdot \bar{\sigma}$ на 0S_T . \bar{N} – единичный вектор внешней нормали к поверхности 0S_T ; ${}^0\rho$ – массовая плотность материала

в отсчетной конфигурации; “ * ” – заданная величина, – операция внутреннего произведения или свертка по одному индексу; “ : ” – операция внутреннего произведения между тензорами – свертка по двум индексам; δ – вариация, т.ч. $\delta \bar{u} = \bar{0}$ на 0S_u .

Здесь $\bar{S} \equiv J\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{F}^{-T}$ – второй тензор напряжений Пиола Кирхгофа, $\bar{F}^{-1} \equiv \bar{g} + \nabla(\bar{u}^T)$, $J \equiv \det \bar{F}$ и \bar{g} – единичный тензор.

2. Кинематическое соотношение (связь тензора деформаций Грина-Лагранжа с тензором градиента перемещений):

$$\bar{E} = \frac{1}{2}[\bar{\nabla}(\bar{u}) + \bar{\nabla}(\bar{u})^T + \bar{\nabla}(\bar{u}) \cdot \bar{\nabla}\bar{u}^T].$$

Граничные условия $\bar{u} = u^*$ на 0S_u , $\bar{N} \cdot (\bar{S} + \bar{S} \cdot \nabla(\bar{u})) = T^*$ на 0S_T .

3. Определяющее соотношение:

$$\bar{S} = \bar{C} : \bar{E}.$$

В формулировке Updated Lagrange: линеаризуя левую часть уравнения равновесия в формулировке TL, получаем

$$\int_{{}^0V} S_{ij}(d(\delta E_{ij})) dV = \int_{V_{n+1}} \nabla \eta_{ik} \sigma_{kj} \nabla \Delta u_{ij} dV,$$

где Δu – приращение перемещения и – виртуальные перемещения, σ_{kj} – тензор напряжений Коши.

$$\int_{{}^0V} dS_{ij} \delta E_{ij} dV = \int_{V_{n+1}} \nabla^s \eta_{ij} L_{ijkl} \sigma_{kj} \nabla^s (\Delta u_{kl}) dV,$$

где ∇ – оператор градиента в текущей системе отсчета, ∇^s – симметричная часть.

Имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{im} S_{mn} F_{jn},$$

$$\delta E_{ij} = F_{im} \nabla^s \eta_{mn} F_{nj},$$

$$L_{ijkl} = \frac{1}{J} F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} D_{mnpq},$$

где D_{mnpq} и L_{ijkl} – тензор модуля упругости в отсчетной и текущей системе отсчета соответственно. Тогда

$$(K_1 + K_2) \delta u = F - R,$$

где K_1 – матрица жесткости материала, K_2 – матрица геометрической жесткости, F и R – внешние и внутренние усилия соответственно.

В рассматриваемой задаче чистого изгиба балки, деформации балки могут достигать около 6%. Для такого вида деформирования используется UL – формулировки уравнений МДТТ, где в качестве тензора напряжений используется тензор напряжений Эйлера-Коши, а для описания деформаций – тензор логарифмических деформаций Генки [80, 81].

При моделировании процессов деформирования материалов в условиях ползучести с учетом разноспротивляемости возникают трудности в алгоритме расчета и в получении устойчивого решения. MSC.Marc позволяет решить данные проблемы на основе подпрограмм пользователя. Для использования модели ползучести, где учитывается различие свойств материала на растяжение и сжатие, необходимо применять явную схему интегрирования уравнений ползучести, что влечет ограничение на размер шага по времени.

В работах [81, 82] представлены определяющие соотношения ползучести, обобщающие, закон Нортона степенной ползучести для материалов, имеющие разные свойства при растяжении и сжатии. Соотношения построены с помощью угла напряженного состояния и реализованы в пользовательской подпрограмме

srplaw.f [83].

В расчетах в начальный момент из-за нулевых деформаций ползучести возникает неустранимая особенность, которая не позволяет запустить расчет. Единственной возможностью такого моделирования является построение пользовательской подпрограммы srplaw.f для MSC.Marc. В подпрограмме задаются приращения интенсивности деформаций ползучести

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{cr} = [3B_i \bar{\sigma}^{n_j-1} / 2(\bar{\varepsilon}^{cr})^{\alpha_i}] \Delta t$$

Программа srplaw.f предназначена для реализации закона, связывающего компоненты приращения тензора деформаций ползучести e_{ij}^c с компонентами тензора-девиатора напряжений σ_{ij} в виде

$$\Delta e_{ij}^c = [(3\Delta \bar{\varepsilon}^c / 2\sigma_e)] s_{ij}. \quad (2.30)$$

Здесь $\sigma_e \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i,j=1}^3 s_{kl} s_{kl}}$ – эффективное напряжение, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii})\delta_{ij}$. Закон (2.30) реализован в явной формулировке определения деформаций ползучести в пакете MSC.Marc при пошаговом интегрировании уравнений равновесия. Требуется определить приращение эффективной деформации ползучести $\Delta \bar{\varepsilon}^c$ через известное решение задачи в момент времени t в некоторой точке интегрирования конечного элемента.

В работах [81, 82] вводится функциональная зависимость вида

$$\Delta \bar{\varepsilon}^c = f(\sigma_{ij}) \Delta t, \quad (2.31)$$

где $f(\sigma_{ij})$ – заданная скалярная функция тензорного аргумента; Δt – шаг по времени.

В рамках пакета MSC.Marc в user subroutine srplaw.f [83] реализован закон

установившейся ползучести с учетом разных свойств материала при растяжении и сжатии.

Структура и алгоритм в подпрограмме `srplaw.f`:

1. вводятся константы ползучести B_1, n_1, B_2, n_2 ;
2. определяется среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$;
3. определяются компоненты тензора-девиатора напряжений

$$s_{11} = \sigma_{11} - \sigma_m, s_{22} = \sigma_{22} - \sigma_m, s_{33} = \sigma_{33} - \sigma_m, s_{12} = \sigma_{12}, s_{13} = \sigma_{13}, s_{23} = \sigma_{23}$$

; 4. вычисляется эффективное напряжение;

5. определяется наличие или отсутствие деформаций ползучести:

если $\sigma_e \leq 10^{-16}$, то деформации ползучести отсутствуют $\Delta \bar{\epsilon}^c = 0$ и происходит выход из программы `srplaw.f`;

если $\sigma_e > 10^{-16}$, то деформации ползучести присутствуют и продолжается вычисление $\Delta \bar{\epsilon}^c$;

6. вычисляется третий инвариант тензора-девиатора напряжений

$$J_3(s_{ij}) = \det(s_{ij}) = s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{22}s_{13}^2 - s_{11}s_{23}^2 - s_{33}s_{12}^2$$

7. находится величина $\sin(3\theta)$ по формуле

$$\sin(3\theta) = -\frac{27}{2} J_3(s_{ij}) / (\sigma_e^3(s_{ij}))$$

8. находится приращение эффективной деформации ползучести

$$\Delta \bar{\epsilon}^c = [B_1 \sigma_e^{n_1} (1 - \sin 3\theta) + B_2 \sigma_e^{n_2} (1 + \sin 3\theta)]$$

Для интегрирования уравнения равновесия по времени используется пошаговая процедура. Полагая решение в момент времени t известным,

линеаризуется уравнение баланса виртуальных работ относительно этого момента времени с учетом кинематических соотношений и определяющих соотношений упругопластического материала, учитывающего деформации ползучести. Пространственная дискретизация линеаризованного уравнения проводится с использованием МКЭ. В результате, на каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений [80–82]

$${}^t K \Delta U = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F,$$

где ${}^t K$ – матрица касательной жесткости, определенная в момент времени t ; $\Delta U = {}^{t+\Delta t} U - {}^t U$, ${}^{t+\Delta t} U$, ${}^t U$ – векторы перемещений ансамбля узловых точек в моменты времени $t + \Delta t$ и t соответственно; ${}^{t+\Delta t} R$ – вектор внешних сил в момент времени $t + \Delta t$; ${}^t F$ – вектор внутренних сил в момент времени t . Полученное решение ${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + \Delta U$ на каждом шаге по времени уточняется методом Ньютона-Рафсона [80–82].

2.5.2 Результаты трехмерного компьютерного моделирования

Конечно-элементная модель содержит 2562 изопараметрических двадцатиузловых элементов в классификации пакета MSC.Marc. Балка содержит свойства материала АК4-1 и геометрические размеры, представленные в п. 2.4.3.

Для предотвращения смещения балки введены 3 стержневых элемента (зеленые стрелки) с малыми жесткостями (рисунок 2.18а).

Балка деформируется путем действия изгибающего момента $M = -156,91 \text{ Нм}$ (рисунок 2.18б). На торце балки заданы граничные условия, представленные на рисунке 2.18 б. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$.

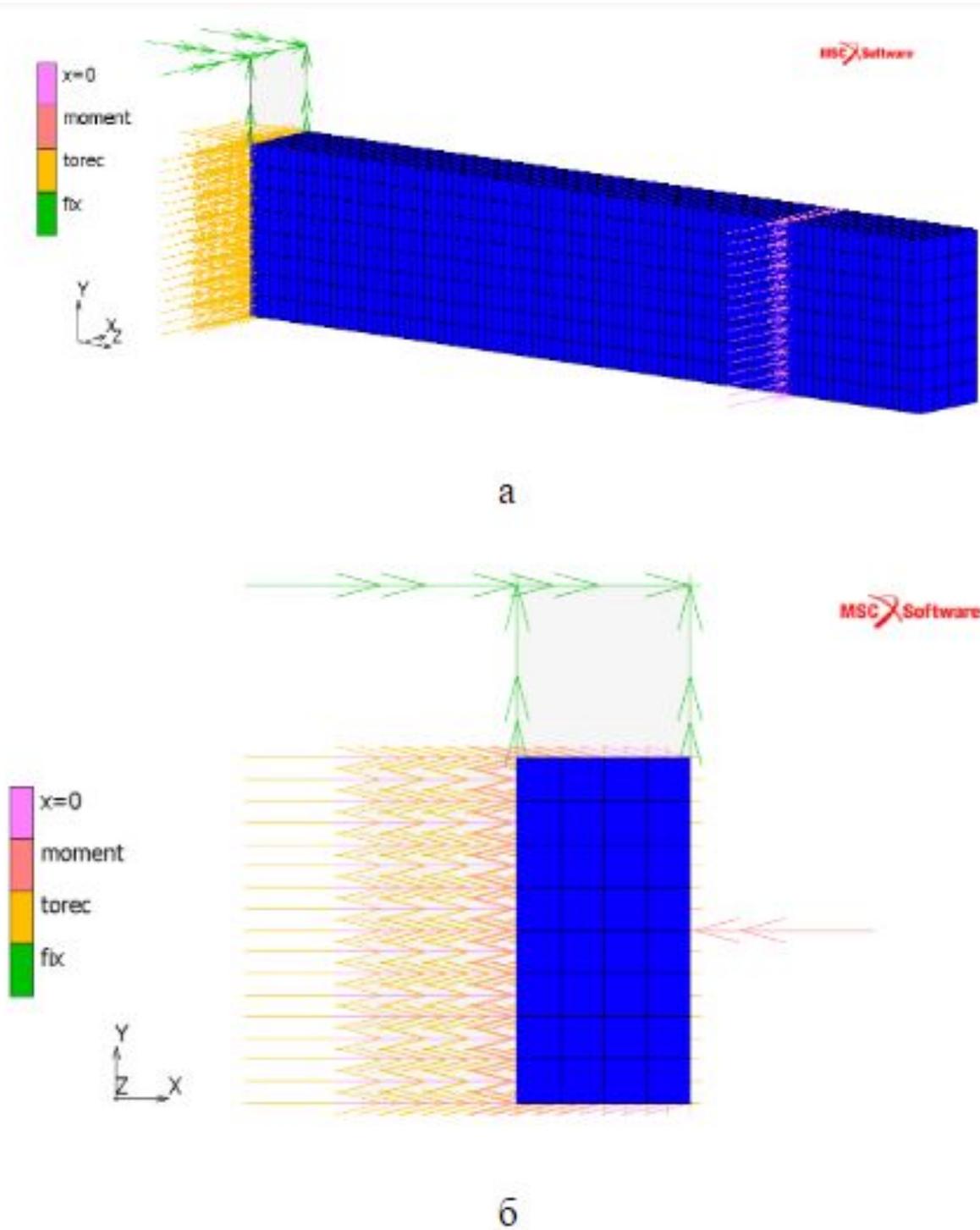


Рисунок 2.18. — Конечно-элементная модель заготовки.

На рисунке 2.19 показаны кривые кривизны от времени для разнотвердого материала, полученные в расчетах с использованием равномерной сетки трехмерных восьмиузловых гексогональных элементов hex8 (1 на рисунке 2.19)

и двадцатиузловых гексогональных элементов hex20 (2, 3 на рисунке 2.19), а также решение в общей лагранжевой формулировке уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) – TL (2 на рисунке 2.19) и текущей – UL (3 на рисунке 2.19) с адаптивным шагом по времени. Анализ показал, что для удовлетворительного описания процесса деформирования балки в процессе ползучести необходимо использовать в моделировании трехмерные восьмиузловые гексогональные элементы и искать решение в виде UL – формулировки уравнений МДТТ. Однако, учет одних различных свойств на растяжение и сжатие не дает удовлетворительного описания процесса ползучести при изгибе балки. Нет полного описания процесса изгиба балки вплоть до разрушения.

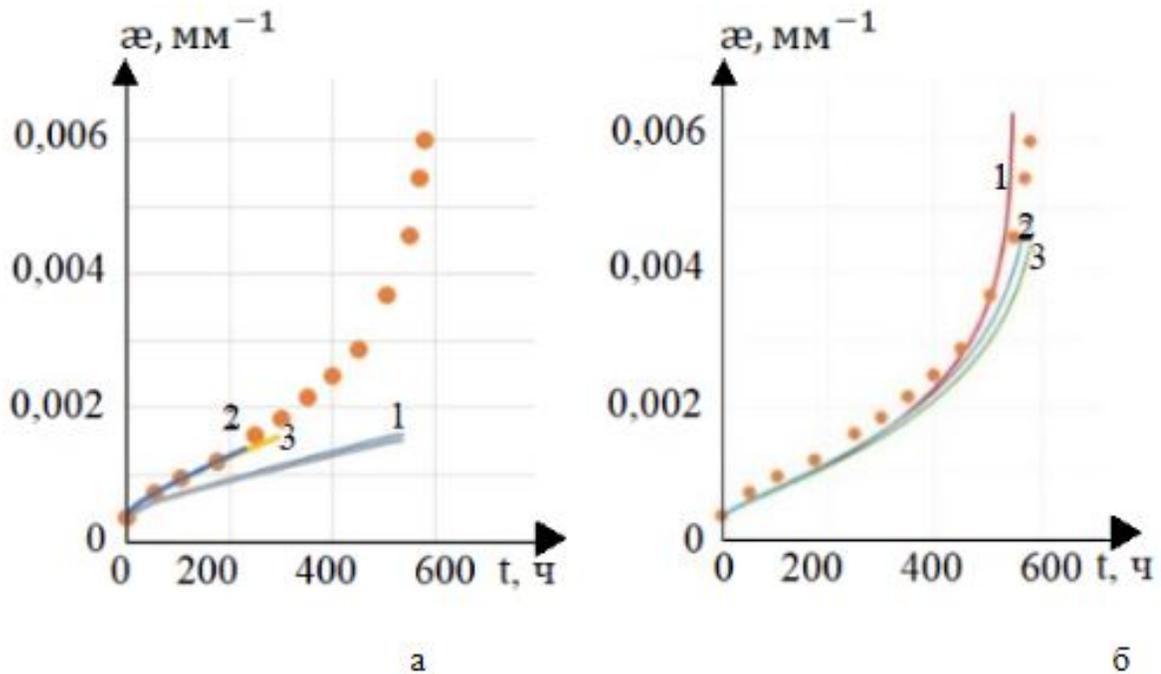


Рисунок 2.19. — Зависимость кривизны от времени: а) без учета (кривая 1) и с учетом (кривая 2, 3) разнсопротивляемости материала; б) для разнсопротивляющегося материала с учетом повреждаемости.

Для описания процесса деформирования балки вплоть до разрушения вводится скалярный параметр поврежденности $\omega = A/A_*$. Для данного материала удельная работа рассеяния в конечный момент времени $A_* = 1$. Тогда деформация в

конечный момент времени $\varepsilon_* = 1/\sigma$ и в случае одноосных испытаний имеем, что $\omega = \bar{\varepsilon}^c \cdot \sigma_e$. Таким образом, имеем следующий вид для определения приращения эффективной деформации ползучести

$$\Delta \bar{\varepsilon}^c = \frac{1}{2} [B_1 \sigma_e^{n_1} (1 - \sin 3\theta) / (1 - \bar{\varepsilon}^c \cdot \sigma_e)^{m_1} + B_2 \sigma_e^{n_2} (1 + \sin 3\theta) / (1 - \bar{\varepsilon}^c \cdot \sigma_e)^{m_2}] \Delta t$$

Вводя скалярный параметр поврежденности в пользовательскую подпрограмму `srplaw.f` и проводя расчет с адаптивным шагом по времени, были получены результаты с константами [40] и [84], представленные на рисунке 2.19б. Кривая 1 была получена в результате численного расчета в программе Visual Studio (см. п. 2.4.3), а кривые 2 и 3 - результат компьютерного трехмерного моделирования с учетом и без учета разнсопротивляемости материала при ползучести, а также повреждаемости (кривая 2) соответственно. Как видно, учет разницы свойств ползучести, а также повреждаемости дает удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными. Также стоит отметить, что алгоритм учета разнсопротивляемости в пакете MSC. Marc чувствителен по времени расчета процесса, что отображена на рисунке 2.19а. Поврежденность в конечный момент времени достигла значения 0,86, что говорит о практическом разрушении материала в процессе ползучести.

На рисунке 2.20 представлены распределения напряжений и деформаций ползучести по высоте балке.

Как видно из рисунка 2.21 при чистом изгибе балке прямоугольного сечения происходит смещение нейтральной оси (момент обозначен стрелками). Алгоритм работает идентично тому, что реализован численными методами.

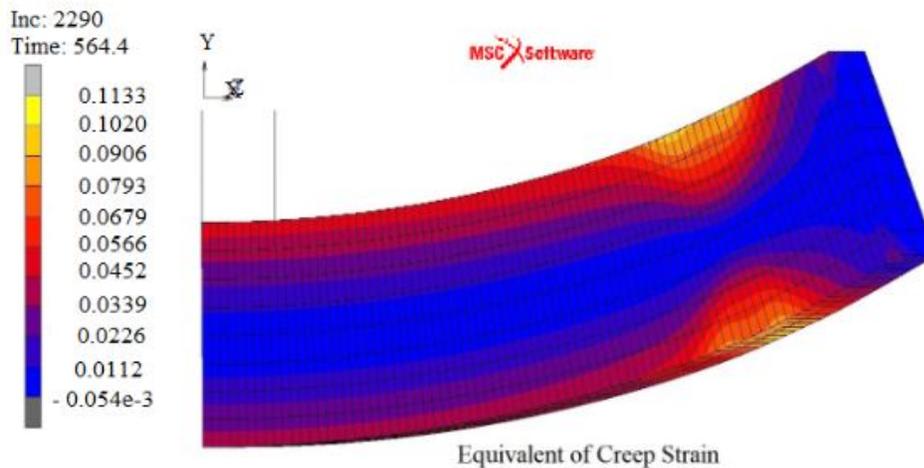


Рисунок 2.20. — Распределение напряжений и деформаций ползучести для сплава АК4-1 с учетом повреждаемости материала.

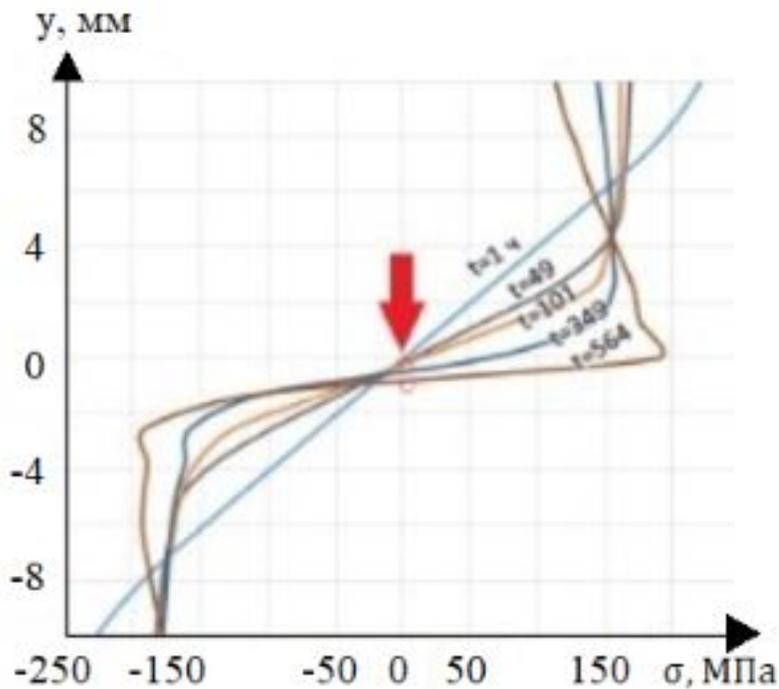


Рисунок 2.21. — Зависимость напряжения от времени по высоте балки для разносопротивляющегося материала с учетом поврежденности.

2.6 Учет влияния температурной выдержки и релаксации

Эффекты, связанные с формообразованием в режиме ползучести, часто зависят от времени выдержки при температуре. В этом разделе рассматриваются процессы

знакопеременного изгиба балок прямоугольного сечения из титанового сплава АБВТ-20 в режиме ползучести, с учетом температурной выдержки без нагрузки. Используется степенной закон ползучести с учетом поврежденности материала. В работе [3] предлагается более сложный закон ползучести, который учитывает пределы текучести на растяжение и сжатие при заданной температуре, чего не учитывает модель, представленная в данной главе. В [3] используется дробно-степенная зависимость скорости деформаций ползучести от напряжения. В этой зависимости скорость деформации стремится к бесконечности при напряжениях равных пределам текучести материала на сжатие или на растяжение.

Различны также трактовки разносопротивляемости при ползучести. В этом разделе рассматриваются различные параметры степенного закона ползучести для описания разных свойств на растяжение и сжатие, тогда как в [3] закон ползучести имеет одну и ту же форму для напряжений сжатия и растяжения. В данном разделе в параметр ползучести материала внесена зависимость от времени температурной выдержки, которая была получена из эксперимента в статье [85] и адаптирована для применения в законе ползучести [86].

2.6.1 Испытания на ползучесть и характеристики сплава АБВТ-20

Для определения характеристик ползучести материала из сплава АБВТ-20 при $T = 750^{\circ}C$ были проведены испытания по растяжению и сжатию круглых образцов. Испытания проводились в лаборатории статической прочности в ИГиЛ СО РАН. Испытательная машина - установка рычажного типа с максимальным усилием 50000 Н. Нагружение образцов проводилось путем установки грузов на длинном конце рычага.

Установки укомплектованы нагревательными системами, состоящие из

регулятора нагрева и печного пространства. Нагрев производится при помощи галогеновых ламп, регулировка температуры проводится контрольно-измерительным прибором ОВЕН посредством термопар типа хромель-копель. Нагревательная система позволяет проводить испытания на ползучесть до $T = 1000^{\circ}\text{C}$, после выхода на целевую температуру возможное отклонение не превышает $T = 3^{\circ}\text{C}$.

Измерение удлинений или укорочений образцов проводились посредством систем замеров с использованием электрических датчиков линейного перемещения, данные с которых записывались в память компьютера в виде таблиц. В силу длительности испытаний частота измерений устанавливалась один раз в три секунды.

Образцы для испытаний вырезались из плиты сплава АБВТ-20 толщиной 18,5 мм. Диаметр испытываемых образцов составлял 8 мм, длина рабочей части l_0 : 45 мм на растяжение, 16 мм на сжатие.

Образцы разделялись на два типа: первый тип – образцы, вырезанные из плиты вдоль направления проката; второй тип – образцы, вырезанные в поперечном направлении относительно проката. Образцы для испытаний изготавливались в ИГиЛ СО РАН.

При одноосном испытании к образцу прикладывалось постоянное напряжение $\sigma = P/S = \text{const}$. Значение усилий корректировалось через каждые 0,5% деформации из условия несжимаемости материала при неупругом деформировании. Несжимаемость предполагает неизменность объема образца $V_0 = l_0 S_0 = lS$, отсюда, зная его удлинение Δl в процессе испытания, можно определять текущее значение площади сечения $S = l_0 S_0 / l = l_0 S_0 / (l_0 + \Delta l)$ и поддерживать необходимое усилие P . Стоит отметить, что принимая условие несжимаемости материала мы считаем, что деформация ползучести равномерно распределена по длине образца, что в одноосных испытаниях не так. Почти

всегда при растяжении, если конечно мы не попали в температурно-скоростной режим сверхпластического деформирования, будет происходить локализация деформаций. По окончании установившейся стадии ползучести при растяжении будет возникать шейка. В процессе сжатия боковая поверхность образца будет принимать форму бочки. Кроме того, эффективная площадь поперечного сечения в процессе растяжения не равна геометрической в силу накопленных повреждений. Ряд авторов указывает на противоречивость принятия гипотезы о несжимаемости при оценке поврежденности материала и предлагают использовать закон сохранения массы $\rho_0 l_0 S_0 = \rho l S$, где ρ_0 и ρ начальная и текущая плотности материала. Закон сохранения массы переходит в условие несжимаемости при равенстве плотностей материала до и после деформирования $\rho_0 = \rho$, что наблюдается при отсутствии разрыхления материала. Однако, в данном разделе, следуя за идеями Работнова [2] и Соснина [8] для корректировки усилия в процессе деформирования мы использовали условие несжимаемости материала.

На рисунке 2.22 приведены зависимости деформации от времени для одноосных испытаний круглых образцов из сплава АБВТ-20 при $T = 750^{\circ}\text{C}$, экспериментальные данные отображены маркерами в координатах деформация $\varepsilon - t$, где $\varepsilon = \ln(1 + \Delta l/l_0)$. Стоит отметить, что для данной температуры материал проявляет слабые свойства анизотропии при ползучести, что отражается в различии скоростей деформации при одинаковых напряжениях и в характере разрушения образцов при растяжении (рисунок 2.22а,б). Здесь символом * обозначен момент разрушения образца, разделение его на две части. Также стоит отметить, что в испытаниях на растяжение при уменьшении прикладываемых напряжений имеет место рост предельных деформаций для образцов второго типа и уменьшение предельных деформаций для образцов первого типа. На рисунках 2.22в,г приведены экспериментальные данные испытаний на сжатие.

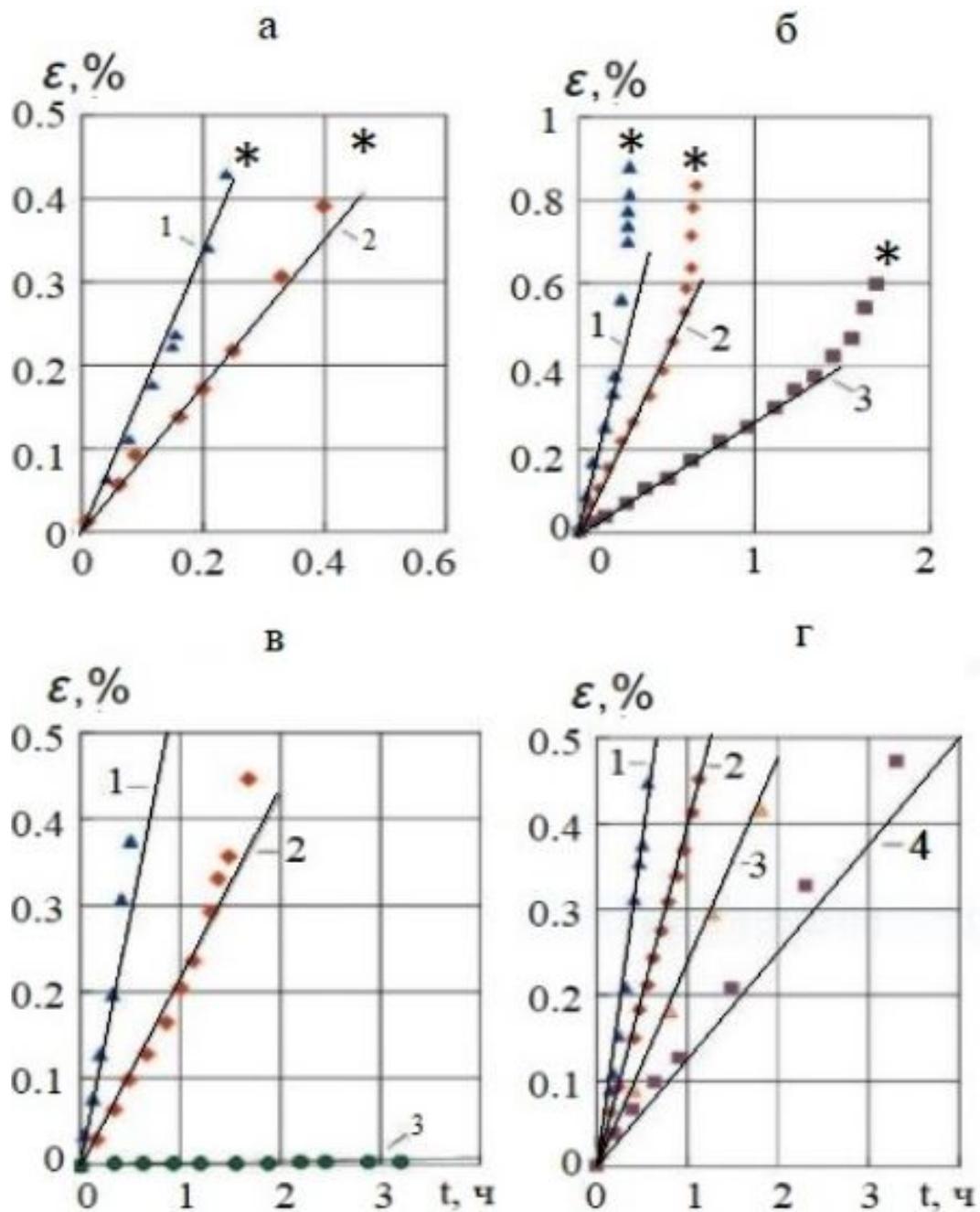


Рисунок 2.22. — Данные одноосных испытаний круглых образцов из сплава АБВТ-20 при $T = 750^{\circ}$: (а) растяжение образцов второго типа: 1) $\sigma = 150$ МПа, 2) $\sigma = 120$ МПа; (б) растяжение образцов первого типа: 1) $\sigma = 150$ МПа; 2) $\sigma = 120$ МПа, 3) $\sigma = 80$ МПа; (в) сжатие образцов второго типа: 1) $\sigma = 150$ МПа; 2) $\sigma = 120$ МПа, 3) $\sigma = 20$ МПа; (г) сжатие образцов первого типа: 1) $\sigma = 150$ МПа; 2) $\sigma = 120$ МПа, 3) $\sigma = 100$ МПа, 4) $\sigma = 80$ МПа. .

На рисунке 2.23 представлена зависимость мощности работы рассеяния от напряжения на установившейся стадии ползучести в двойных логарифмических координатах. Диаграмма построена по данным одноосных испытаний, которые обозначены маркерами. Пунктирными линиями приведены зависимости отдельно для растяжения и для сжатия, которые построены на основе степенного закона ползучести с $n = (n_1 + n_2)/2$ и соответствующими уже для этого n значениями параметров B_{A_i} .

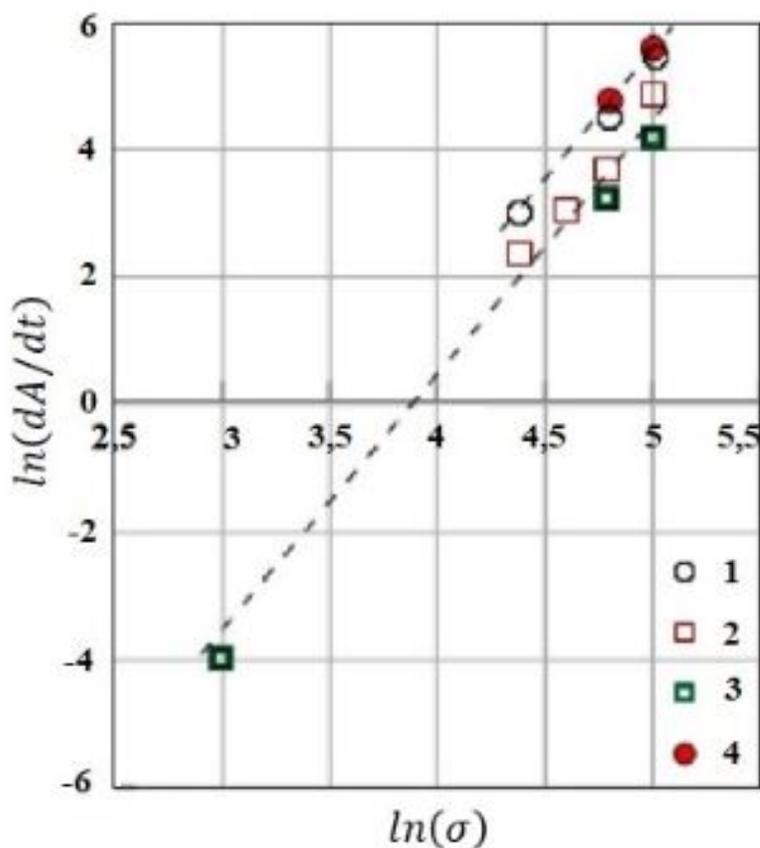


Рисунок 2.23. — Зависимость мощности работы рассеяния на установившейся стадии ползучести от напряжения в двойных логарифмических координатах: 1 – растяжение образцов вырезанных вдоль проката, 2 – сжатие образцов вдоль проката, 3 – сжатие образцов поперек проката; 4 – растяжение образцов поперек проката.

В таблицах 2.6, 2.7 приведены значения параметров модели ползучести на растяжение и сжатие соответственно, которые получены по данным

одноосных испытаний. Параметры модели ползучести определялись по алгоритму, приведенному в [74]. Из данных таблиц и рисунка 2.23 следует, что для описания поведения материала при данной температуре необходимо использовать модель ползучести, которая описывает различное сопротивление растяжению и сжатию. В работе [86] представлен вариант модели ортотропной ползучести с различными свойствами при растяжении и сжатии. Автором используется степенная форма закона ползучести без учета поврежденности материала. Учет различия свойств при растяжении и сжатии производится путем представления потенциала ползучести в виде полусуммы потенциалов для растяжения и для сжатия, а также добавления слагаемого, которое учитывает знак первого инварианта тензора напряжений. Модель (система уравнений) является частным случаем модели [86], отличие заключается в учете поврежденности материала и отсутствии учета ортотропии.

Таблица 2.6. Значения параметров степенного закона ползучести на растяжение

Направление проката	n_1	$B_{A_1} \cdot 10^7, (MPa)^{-n_1}/h$	r_1	m_1	$B_{\omega_1} \cdot 10^6, (MPa)^{-k_1}/h$
вдоль	3.82	11.08	2.72	1.34	1.55
поперек	3.46	79.29	2.92	0.81	3.56

Таблица 2.7. Значения параметров степенного закона ползучести на сжатие

Направление проката	n_2	$B_{A_2} \cdot 10^7, (MPa)^{-n_2}/h$	r_2	m_2	$B_{\omega_2} \cdot 10^7, (MPa)^{-n_2}/h$
вдоль	3.86	4.54	0	0	0
поперек	4.06	0.92	0	0	0

Были проведены два испытания на знакопеременный чистый изгиб прямоугольных балок из АБВТ-20 при температуре $T = 750$ °С. Балки вырезались поперек проката плиты и имели следующие геометрические размеры: балка I: $b = 20.77$ мм, $h = 18.44$ мм; балка II: $b = 19.60$ мм, $h = 18.40$ мм.

Испытания проводились на установке для чистого изгиба балок в ИГиЛ СО РАН, схема установки приведена в [85]. Изменение прогиба балки посредством системы замеров фиксировалось электрическим датчиком линейных перемещений, с последующей записью в память компьютера. Частота сбора данных дин раз в три секунды. База измерений прогиба составляла 100 мм.

Программы нагружений изгибающими моментами были следующими: балка I: $M_I = 52.79$ Нм, $M_{II} = -52.79$ Нм, $M_{III} = -52.79$ Нм, $M_{IV} = 52.79$ Нм, $M_V = 52.79$ Нм, $M_{VI} = -52.79$ Нм; балка II: $M_I = 36.30$ Нм, $M_{II} = -36.30$ Нм, $M_{III} = -72.59$ Нм, $M_{IV} = 72.59$ Нм, $M_V = 72.59$ Нм. Модуль упругости материала при данной температуре $E = 36400$ МПа.

На рисунке 2.24 приведена зависимость прогиба балки I при знакопеременном чистом изгибе [85]. На каждом цикле нагружения балка испытывала действие постоянного по модулю момента, после достижения прогиба $\delta_0 \approx 0$ мм производились снятие момента и дальнейшая выдержка при температуре испытания без нагрузки. После снятия нагрузки датчик прогиба записывал процесс обратной ползучести. На рисунке 2.24б представлена зависимость модуля прогиба от времени для каждого цикла. Начальные точки графиков совмещены в начало координат, поэтому можно видеть уменьшение скорости прогиба балки с ростом номера цикла нагружения. Стоит отметить, что модель ползучести, представленная в данной главе, не учитывает эффект обратной ползучести.

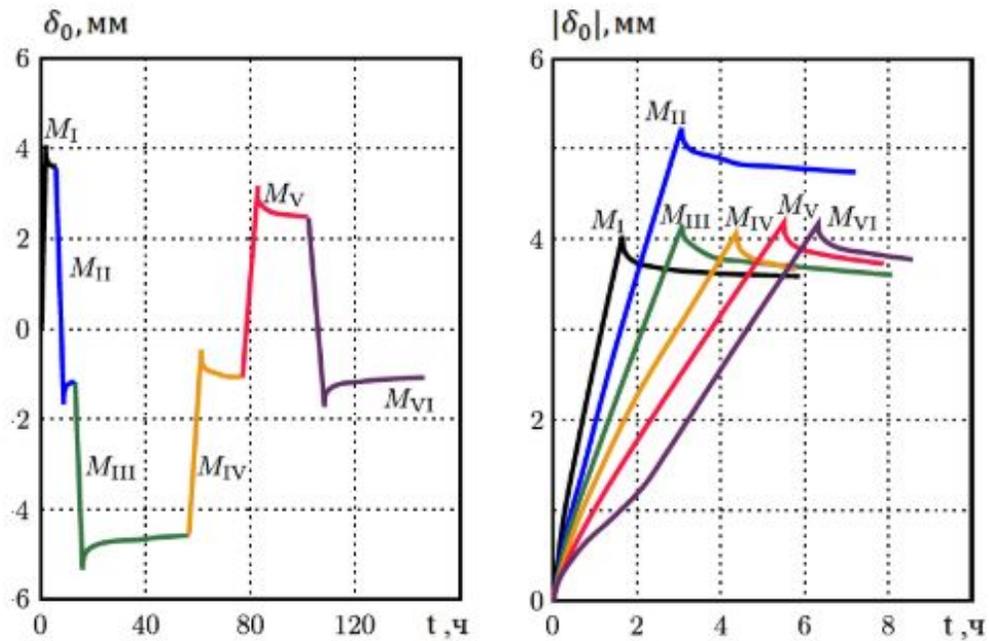


Рисунок 2.24. — Чистый знакопеременный изгиб балки I из титанового сплава АБВТ-20 при $T = 750$ °С: зависимость абсолютного прогиба от длительности эксперимента (а); зависимость прогиба от времени в каждом цикле (б). Программа испытания: $M_I = 52.79$ Нм, $M_{II} = -52.79$ Нм, $M_{III} = -52.79$ Нм, $M_{IV} = 52.79$ Нм, $M_V = 52.79$ Нм, $M_{VI} = -52.79$ Нм..

2.6.2 Сравнение численного расчета с данными испытаний на балках

Задача решается численным методом Рунге-Кутты Мерсона. Результаты численного решения сравнивались с данными испытаний знакопеременного чистого изгиба балок [85].

На рисунке 2.25 представлены результаты первых этапов нагружения балок I (а) и II (б). Точки соответствуют экспериментальным зависимостям кривизны балки от времени нагружения $\varkappa = \varkappa(t)$. Черные кривые представляют расчетные значения кривизн. Анализ данной зависимости показывает, что расчетная скорость роста кривизны больше экспериментальной.

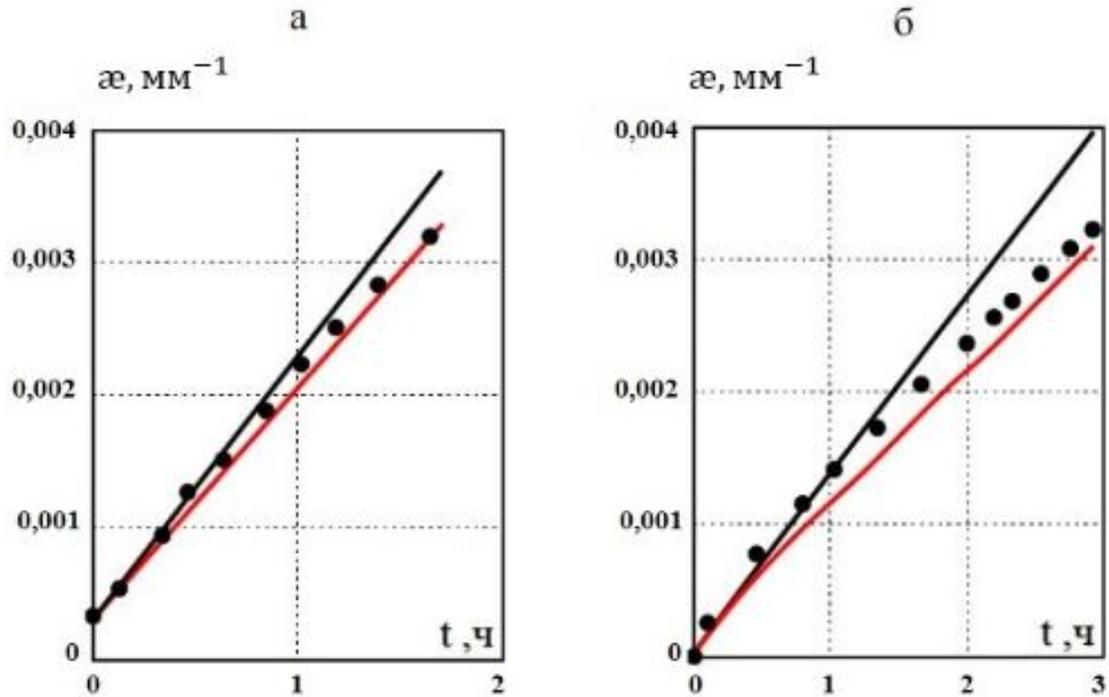


Рисунок 2.25. — Зависимость кривизны от времени для экспериментальных (точки) и расчетных данных без учета (черные линии) и с учетом (красные линии) скорости изменения прогиба от длительности эксперимента соответственно для $M = 52.79$ Нм (а), $M = 36.30$ Нм (б).

Не удовлетворившись таким описанием процесса, была проанализирована зависимость изменения скорости ползучести от времени выдержки при температуре. Такая зависимость для скорости прогиба балки приведена в [85]. Эта зависимость была использована для корректировки параметров модели ползучести. Алгоритм решения задачи реализован в программном модуле в пакете Visual Studio на языке C++.

В результате на рисунке 2.25 сплошные кривые представляют расчетные значения кривизны балки с учетом влияния выдержки при температуре. Расчет скорости деформаций ползучести производился с учетом зависимости параметра B_A от времени по зависимости:

$$B_A(t) = -0,019\ln(t) + 0,0274.$$

Данная зависимость получена аппроксимацией значений B_{A_i} в зависимости от уровня напряжений

$$B_{A_i}(t) = \exp[\ln(8\psi(t)/(L^2 h^{n_i-1})) - (n_i - 1)\ln\sigma_i],$$

где значение изменения скорости прогиба от выдержки задано выражением $\psi(t) = -0,009\ln(t) + 0,0544$, которое основано на экспериментальных данных из работы [85]; $L = 100\text{мм}$ – длина базы измерений; n_i – показатели ползучести при растяжении ($i=1$) и сжатии ($i=2$). Данная зависимость получена на основе анализа экспериментальных данных изменения скорости прогиба балки I, приведенных на рисунке 2.26. Изгибающие моменты на каждом этапе были различными: $M_I = 36.3$ Нм, $M_{II} = 72.59$ Нм, $M_{III} = -36.3$ Нм, $M_{IV} = -72.59$ Нм, $M_V = 72.59$ Нм. (рисунок 2.26), тем самым данные этого испытания являются проверочными для рассматриваемой модели ползучести. Точками обозначены экспериментальные данные, сплошными линиями – расчетные зависимости с учетом разносопротивляемости, поврежденности и влияния температурной выдержки. Из диаграмм видно, что полученная модель описывает уменьшение скорости прогиба с увеличением времени выдержки при температуре. Это позволило приблизить расчетные данные к экспериментальным (ошибка на каждом этапе нагружения не превосходит 2%) знакопеременного чистого изгиба прямоугольной балки I и II соответственно.

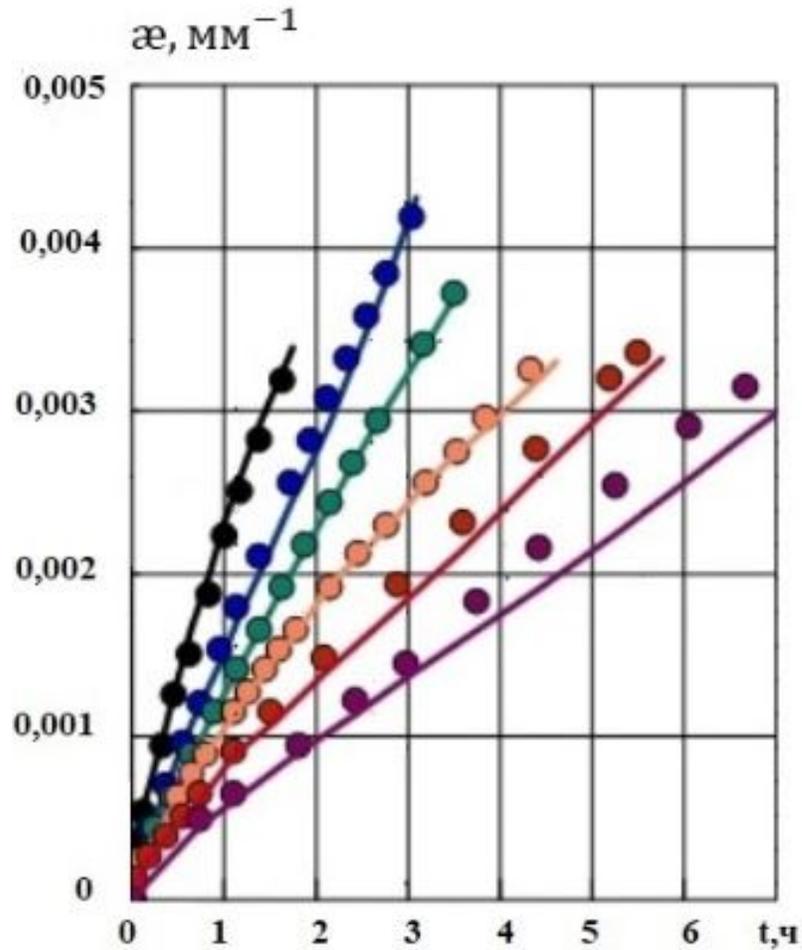


Рисунок 2.26. — Зависимость модуля прогиба от длительности испытания в виде экспериментальных (точки) и расчетных данных (сплошные линии) и под действием моментов на каждом этапею

2.6.3 Релаксация балки

Выше рассматривался учет температурной выдержки на формообразование элементов конструкций в процессе ползучести. Однако, необходимо учитывать также и процесс релаксации [88–91].

После того, как растянули образец и зафиксировали ее общую деформацию, то в течение определённого времени будет происходить уменьшение напряжений – процесс релаксации напряжений.

Полная деформация останется неизменной:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{cr} = const. \quad (2.32)$$

Дифференцируя по времени (2.32)

$$(d\sigma/dt)/E + d\varepsilon^{cr}/dt = 0$$

и принимая закон ползучести в виде

$$d\varepsilon^{cr}/dt = B\sigma^n. \quad (2.33)$$

, имеем $d\sigma/dt + EB\sigma^{n-1} = 0$. Интегрируя его, получаем уравнение релаксации напряжений:

$$\sigma(t) = (1/\sigma_0^{n-1} + EB(n-1)t)^{-1/(n-1)},$$

где $\sigma_0 = \sigma_{t=t_0(T)}$.

На рисунке 2.27 представлены релаксационные кривые для алюмолитиевого сплава В-1461 в диапазоне температур $420 - 470^{\circ}C$ [92]. Точками отмечены экспериментальные данные, а кривыми – численный расчет, полученный в результате решения задач о чистом изгибе балки прямоугольного сечения с учетом релаксации напряжений. Расчет проводился с использованием метода Рунге-Кутты-Мерсона. Алгоритм решения задачи реализован в программном модуле в пакете Visual Studio на языке C++.

Геометрические размеры и характеристики балки: высота $h=30$ мм, ширина $b = 12,5$ мм, модуль упругости $E = 19021$ МПа.

Для описания процесса ползучести использовался степенной закон Нортона: $n = 10,55$, $B = 7,64 \cdot 10^{-4}(\text{МПа})^{-n} \text{ч}^{-1}$.

В [92] для описания процесса релаксации балки рассматривается аналог модели Максвелла - модель, состоящей из тела Гука (пружины) и тела Ньютона (демпфера), соединённых последовательно. Моделирование упругого процесса происходит с использованием пружины, которая связывает напряжения и деформации в виде $\sigma = E\varepsilon^e$.

Модель Максвелла описывается уравнением (2.32). Дифференцируя его с учетом (2.33), получаем

$$d\sigma(t)/dt + E(T)BT(t)\sigma(t)^{n(T)-1} = 0.$$

Интегрируя его, имеем

$$\sigma(t) = [\sigma_0^{2n-1}(T) - [2 - n(T)]E(T)B(T)[t - t_0(T)]]^{1/(2n-1)}. \quad (2.34)$$

Значение напряжений $\sigma(t)$ вычисляется при σ_{max} .

В результате сравнений данных, представленных на рисунке 2.27, по численному методу Рунге-Кутты-Мерсона (сплошные кривые), по аналогу Максвелла (штриховая кривая) и экспериментально (точки), получено, что численный расчет максимально точно описывает процесс релаксации.

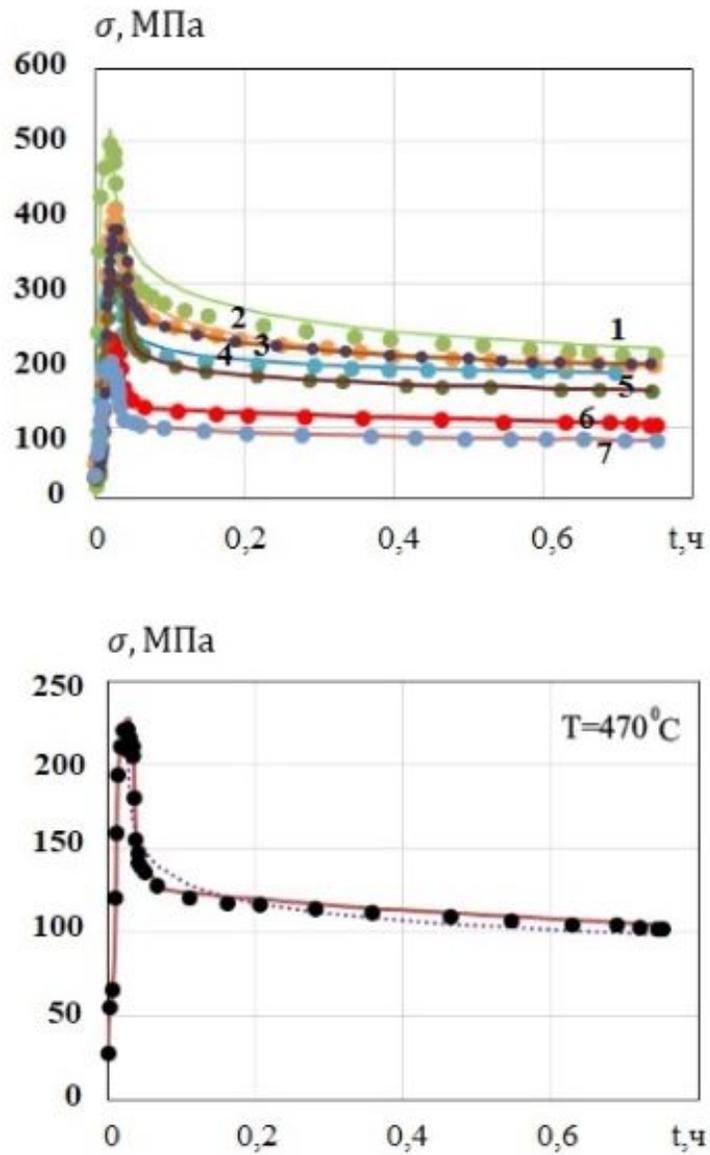


Рисунок 2.27. — Зависимость напряжений от времени алюминитиевого сплава В-1461 в диапазоне температур: 1 – $T = 420^{\circ}\text{C}$, 2 – $T = 430^{\circ}\text{C}$, 3 – $T = 440^{\circ}\text{C}$, 4 – $T = 450^{\circ}\text{C}$, 5 – $T = 460^{\circ}\text{C}$, 6 – $T = 470^{\circ}\text{C}$, 7 – $T = 480^{\circ}\text{C}$.

Выводы по второй главе

1. Получены аналитические решения, описывающие процессы ползучести и длительной прочности материалов, имеющие три стадии ползучести, с использованием скалярного параметра поврежденности. Они позволили конкретизировать кинетические уравнения Работнова в энергетической форме с использованием одних и тех же функций повреждаемости в обоих уравнениях. Была разработана методика определения функций, входящих в определяющие уравнения ползучести и повреждаемости.

2. Предложенный вариант кинетических уравнений в энергетической форме позволяет обобщить ЭВТДП О. В. Соснина на случай, когда энергетическое условие длительной прочности не выполняется: $A_*(\sigma) \neq const$.

Изложена методика идентификации параметров модели ползучести и повреждаемости материала. Выполнено сравнение результатов использования метода с экспериментальными данными по ползучести и длительной прочности для образцов из стали марки 45, титанового сплава ВТ9 и стали 09Г2С при стационарных и нестационарных условиях нагружения. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

3. Показано, что для удовлетворительного описания процесса деформирования балок прямоугольного сечения в условиях ползучести необходимо учитывать повреждаемость материала. Выполнена проверка моделирования формообразования для материалов Д16, АК4-1. Наблюдается соответствие данных расчета,

полученных при решении прямых задач формообразования, с существующими экспериментальными данными и данными расчётов из независимых источников.

4. Реализован алгоритм для учета поврежденности материала в конечно-элементном пакете MSC.Marc с использованием пользовательской подпрограммы. Разработан алгоритм вычисления компонент тензора напряжений с использованием определяющих соотношений ползучести. Модель материалов учитывает разные свойства при растяжении сжатии, а также учитывает поврежденности материала. Параметр поврежденности вводился как скалярная величина.

5. Проведено экспериментальное исследование и разработана методика моделирования знакопеременного чистого изгиба балок с учетом длительности пребывания. Выполнена проверка для материала АБВТ-20 при температуре 750°C . С использованием данных по одноосным испытаниям установлено, что материал является разносопротивляющимся растяжению и сжатию. В ходе испытаний была определена зависимость, отражающая падение скорости прогиба в зависимости от длительности пребывания при температуре. Данная зависимость была учтена при модификация параметров в модели ползучести. Это позволило с удовлетворительной погрешностью описать знакопеременный изгиб балок с учетом разносопротивляемости и поврежденности материала.

Глава 3

Решение обратной задачи для формообразования элементов конструкций

Сложность решения обратных задач с учетом деформаций ползучести применительно к формообразованию крупногабаритных деталей связана с пошаговой процедурой расчета НДС по времени и организацией итерационных процессов на каждом этапе нагружения. Для панелей больших размеров потребуется разбивка на элементы-участки (однородные по геометрии, характеру прикладываемой нагрузки и т.д.) и последующее объединение полученных решений с помощью конечно-разностной схемы или МКЭ. Это потребует значительных вычислительных затрат с использованием современных компьютеров. В этом смысле использование приближенных методов расчета позволяет проводить оценки и расчеты с меньшими затратами вычислений.

При моделировании процессов изготовления деталей в режиме ползучести рассматривают, как прямую, так и обратную задачу формообразования. При решении прямой определяют напряженно-деформированное состояние в течение заданного времени под действием заданных внешних силовых и кинематических воздействий. При обратной – внешние силовые и кинематические воздействия, под действием которых в течение заданного времени должно происходить неупругое деформирование. Таким образом, необходимо определить усилия и формы оснастки для формования заготовки, обеспечивающие заданную кривизну

изделия после снятия нагрузки. Сложность решения этих задач связана с учетом свойств материала: разнсопротивляемости растяжению и сжатию, с анизотропией свойств ползучести материала заготовки.

3.1 Решение прямой задачи

3.1.1 Расчет НДС балки таврового сечения

Для решения обратной задачи формообразования элементов конструкций проводится серия решений последовательных прямых задач - определение кривизны детали при заданных изгибающих моментах.

Математическое моделирование чистого изгиба балок таврового сечения для материала с различными свойствами ползучести на растяжение и сжатие основано на уравнениях энергетического варианта теории ползучести [8, 9]. Процесс ползучести материала с учетом его поврежденности [9,69–74] описывается системой уравнений с использованием степенного закона ползучести

$$dA_+/dt = B_{1A}\sigma^{n_1-1}(1-\omega)^{-m_1}, \sigma \geq 0; \quad dA_-/dt = B_{2A}|\sigma|^{n_2-1}(1-\omega)^{-m_2}, \sigma \leq 0.$$

$$d\varepsilon_+^{cr}/dt = B_{1\varepsilon}\sigma^{n_1-2}(1-\omega)^{-m_1}, \sigma \geq 0; \quad d\varepsilon_-^{cr}/dt = B_{2\varepsilon}|\sigma|^{n_2-2}(1-\omega)^{-m_2}, \sigma \leq 0.$$

$$d\omega_+/dt = B_{1\omega}\sigma^{k_1-1}(1-\omega)^{-m_1}, \sigma \geq 0; \quad d\omega_-/dt = B_{2\omega}|\sigma|^{k_2-1}(1-\omega)^{-m_2}, \sigma \leq 0. \quad (3.1)$$

где $d\varepsilon^{cr}/dt$ — скорость деформации при растяжении или сжатии некоторого волокна балки в момент времени t .

Деформация ползучести ε^{cr} и работа рассеяния A определяются из следующих соотношений путем подстановки значений напряжений в третье и первое

уравнение (3.1) соответственно

$$\begin{aligned} d\varepsilon_+^{cr}/dt &= B_{1\varepsilon} E^{n_1-1} |\varkappa(z - \delta) - \varepsilon^{cr}|^{n_1-2} |\varkappa(z - \delta) - \varepsilon^{cr}| (1 - \omega)^{-m_1}, \quad \sigma \geq 0; \\ d\varepsilon_-^{cr}/dt &= B_{2\varepsilon} E^{n_2-1} |\varkappa(z - \delta) - \varepsilon^{cr}|^{n_2-2} |\varkappa(z - \delta) - \varepsilon^{cr}| (1 - \omega)^{-m_2}, \quad \sigma \leq 0; \\ dA/dt &= \frac{d\varepsilon^{cr}}{dt} E(\varkappa(z - \delta) - \varepsilon^{cr}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для определения смещения нейтральной оси δ подставляем значение напряжений в уравнения равновесия $\int_{S_0} dS_0 = 0$, где $S_0 = b_1 h_1 + b_2 h_2$ — площадь сечения тавровой балки:

$$\delta(t) = \int_{S_0} \varepsilon^{cr}(z, t) dS_0 / (\varkappa(t) S_0).$$

Для численного решения системы (3.1) производим замену интегралов на конечные суммы по формулам Симпсона и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ε_i^{cr} , A_i и ω_i ($i = 0, \dots, k$) в точках разбиения по высоте тавра. По найденным величинам определяются напряжения σ_i по высоте балки в любой момент времени.

Опишем метод решения задачи, который будет применяться для моделирования изгиба тавра из разносопротивляющегося материала. Для численного решения применим метод Рунге-Кутты-Мерсона [75, 76] для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\varepsilon^{cr}/dt = \psi(\varepsilon, \omega), \quad d\omega/dt = \zeta(\varepsilon, \omega), \quad dA/dt = \phi(\varepsilon, \omega),$$

где ψ, ζ, ϕ — правые части системы уравнений (3.2). В начальный момент времени в каждом волокне сечения тавровой балки $A(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$, $\omega(0) = 0$.

Для вычислительных значений в i -ой точке разбиения по высоте тавра

использовались расчетные формулы:

$$\varepsilon_i^c = (k_{4\varepsilon} + k_{5\varepsilon})/2, \quad A_i = (k_{4A} + k_{5A})/2, \quad \omega_i = (k_4 + k_5)/2,$$

где

$$k_{1\varepsilon} = \psi \Delta t/3, \quad k_{1A} = \phi \Delta t/3, \quad k_{1\omega} = \zeta \Delta t/3;$$

$$k_{2\varepsilon} = \psi \Delta t/3, \quad k_{2A} = \phi \Delta t/3, \quad k_{2\omega} = \zeta \Delta t/3;$$

$$k_{3\varepsilon} = \psi \Delta t, \quad k_{3A} = \phi \Delta t, \quad k_{3\omega} = \zeta \Delta t;$$

$$k_{4\varepsilon} = k_{1\varepsilon} + 4\psi \Delta t/3, \quad k_{4A} = k_{1A} + 4\phi \Delta t/3, \quad k_{4\omega} = k_{1\omega} + 4\zeta \Delta t/3;$$

$$k_{5\varepsilon} = \psi \Delta t/3, \quad k_{5A} = \phi \Delta t/3, \quad k_{5\omega} = \zeta \Delta t/3.$$

Выбирая шаг по времени t , определяем значения деформаций, работу рассеяния и повреждение в точках разбиения при $t_1 = \Delta t$, $t_2 = t_1 + \Delta t$ и т.д.

Данный алгоритм применим в том числе и для балок произвольного сечения. Вид сечения повлияет на изменения выражений для величины смещения нейтральной оси, момента инерции, кривизны и напряжений.

3.1.2 Приближенный расчет чистого изгиба тавра по характеристической точке

В технологии формообразования корпусных деталей перспективными с точки зрения сохранения ресурса являются медленные процессы деформирования, в которых существенную часть составляют деформации ползучести, тем самым снижаются нагрузки формообразования, повышается точность изготовления конструкций. В технологических процессах одной из основных задач является определение формы детали после снятия нагрузки. Для оценки поведения

элементов сложного профиля может быть использован метод характеристических параметров, когда поведение конструкции оценивается величиной напряжения в характеристической точке [25].

В качестве примера подобной оценки рассматривается двухступенчатая тавровая балка с одной осью симметрии в сечении, нагружённая постоянным по длине моментом M (рисунок 3.1).

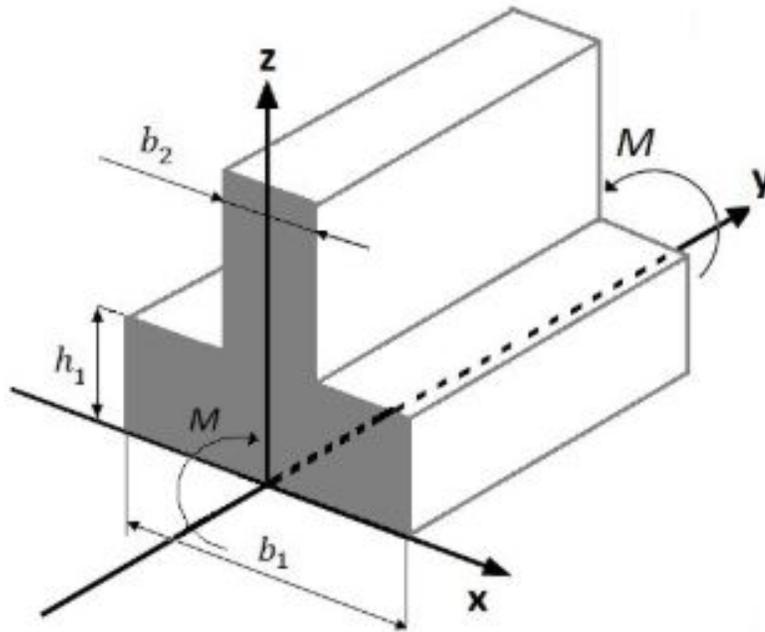


Рисунок 3.1. — Схема изгиба балки таврового сечения.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа - Лява:

$$\varepsilon(z, t) = \sigma(z, t)/E + \varepsilon^c(z, t) = \varkappa(t)(z - \delta(t)). \quad (3.3)$$

Уравнения равновесия имеют следующий вид

$$b_1 \int_0^{h_1} \sigma(z, t) dz + b_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma(z, t) dz = 0, \quad b_1 \int_0^{h_1} \sigma(z, t) z dz + b_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma(z, t) z dz = M. \quad (3.4)$$

В начальный момент времени отсутствует деформация ползучести $\varepsilon(z, 0) = 0$. Тогда из (3.3) получаем

$$\sigma(z, t) = E\chi(t)(z - \delta_0), \quad (3.5)$$

где $\delta_0 = \int_0^{h_1} b_1 z dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} b_2 z dz$ — начальное положение нейтральной оси.

Определяющие соотношения ползучести в одноосном случае без учета повреждаемости материала примем в виде степенного закона Нортона: $d\varepsilon^c/dt = B\sigma\sigma^{n-1}$, где B, n — константы материала.

Напряжения установившегося состояния в тавровой характеристической точке определяются с использованием продифференцированного по времени уравнения (3.3) и определяющего соотношения ползучести

$$\sigma(z, t) = ((d\chi(t)/dt)(1/B))^{1/n}(z - \delta)^{1/n}, \quad (3.6)$$

В характеристической точке z напряжение остается постоянным во время процесса деформирования [25]. Тогда, приравнявая выражения (3.5) и (3.6) при $z = \hat{z}$, получаем:

$$\hat{\sigma}(\hat{z}, t) = E\chi(t)(\hat{z} - \delta_0) = ((d\chi(t)/dt)(1/B))^{1/n}(\hat{z} - \delta)^{1/n} = (M/J)(\hat{z} - \delta_0).$$

Из первого уравнения равновесия 3.4 определяется установившееся положение нейтральной оси

$$b_1 \int_0^{h_1} (z - \delta(t))^{-n} dz + b_2 \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z - \delta(t))^{-n} dz = 0.$$

Координаты характеристической точки \hat{z} определяются из уравнения

$$(\hat{z} - \delta_0)^{-n} = \left[b_1 z \int_0^{h_1} (z - \delta(t))^{-n} dz + b_2 z \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z - \delta(t))^{-n} dz \right] \cdot \left[\int_0^{h_1+h_2} (b_1 + b_2) z^2 dz + (b_1 h_1 + b_2 h_2) (\delta_0)^2 \right]^{-1} (\hat{z} - \delta_0) = 0. \quad (3.7)$$

Решив нелинейное уравнение 3.7, можно определить координату характеристической точки \hat{z} , которая зависит от показателя ползучести n и геометрических размеров балки. Зная значение изгибающего момента, можно вычислить напряжение и по интенсивности процесса в этом волокне оценивать интенсивность процесса конструкции в целом.

3.1.3 Оценка средней по объему мощности рассеяния

Рассмотрим еще один приближенный подход для расчета оценки интенсивности процесса во всей конструкции. В работах [93–96] показано, что в случае ползучести при фиксированной температуре длительность процесса до разрушения t_* обратно пропорциональна мощности рассеяния W : $W t_* = const$ (надо показать это для данного материала). Считаем, что величина полной работы $A(t)$ к единице объема равна среднему значению по объему тела в общем случае нагружения:

$$A(t) = \frac{1}{V} (P \Delta l(t) + M \phi(t)),$$

где V – рабочий объем образца, P – осевая нагрузка; Δl – удлинение образца, $\phi(t)$ – закручивание образца, M – изгибающий момент.

Без учета потери механической энергии - мощности внутренних ($W = \sigma_e \eta_e$) и внешних обобщенных сил ($W = Q dq/dt$) совпадают [95], где σ_e и η_e – обобщенные напряжения и обобщенные скорости деформации ползучести, Q, q – обобщенные

силы и обобщенные перемещения соответственно.

Предполагаем, что материал несжимаем, т.е. $V = S_0 l_0$, где S_0 – исходная площадь образца, l_0 и l – исходная и текущая длина образца соответственно. Процесс ползучести для растяжения аппроксимируем в виде

$$W = BQ^n \quad (3.8)$$

При изгибе тавра под действием постоянного изгибающего момента

$$dA = Md\phi/V = (M/S)(d\phi/l_0) = Q_b dq$$

где $Q_b = M/S$ – обобщенная сила при изгибе балок, $dq = d\phi/l_0$ – обобщенное перемещение.

Пусть скорости деформации η представимы в виде линейных функций координаты по высоте балки $\eta = (d\chi/dt)z$. Из равенств $W = \sigma\eta = B\sigma^n$ получаем следующие соотношения

$$\eta = B\sigma^{n-1}, \quad \sigma = (\eta/B)^{1/(n-1)}. \quad (3.9)$$

На установившейся стадии ползучести $(d\chi/dt)$ выражение для момента $M = (d\chi/dt)(1/B)^{1/(n-1)} \int_s |z|^{n/(n-1)} dS$. Тогда скорость кривизны определяется как

$$d\chi/dt = M^{n-1} B / J^{n-1}. \quad (3.10)$$

где $J = \int_s |z|^{n/(n-1)} dS$ – момент инерции балки таврового сечения [95]. Умножая (3.10) на обобщенную силу при изгибе балок, получаем

$$W = Qdq/dt = B \left[(S/J)^{n/(n-1)} (M/S) \right]^n.$$

Таким образом, можно оценить интенсивность процесса ползучести элемента конструкций с помощью оценки средней по объему мощности рассеяния, зная параметры элемента конструкций, показатель и параметр ползучести.

3.1.4 Анализ решения задачи о изгибе балки таврового сечения в условиях ползучести

Решение прямой и обратной задачи проводится на примере балок таврового сечения для высокопрочного сплава ВТ5-1 (Ti-Al-Sn-V) при температуре, близкой к сверхпластичности ($= 700^{\circ}C$), с различной постоянной нагрузкой. Сплав ВТ5-1 (Ti-Al-Sn-V) в обработанном виде имеет огромные преимущества по снижению веса в аэрокосмической сфере, судостроении, автомобилестроении и других областях, требующих от материала хорошего соотношения показателей прочности, веса и высокой устойчивости к коррозии.

Эксперименты для ВТ5-1 (Ti-Al-Sn-V) проводились на образцах, вырезанных из плиты толщиной 60 мм, диаграммы ползучести исследуемого материала приведены в [69]. Характеристики ползучести сплава приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. — Характеристики ползучести сплава ВТ5-1 при $T = 700^{\circ}C$

вид испытаний	$B_A, \text{МПа}^{-n-1}$	$B_{\omega}, \text{МПа}^{-k-1}$	n	k	m
растяжение	$1,48 \cdot 10^{-13}$	$3,22 \cdot 10^{-11}$	3,59	2,92	1,3
сжатие	$1,37 \cdot 10^{-11}$	0	4,5	0	0

На рисунке 3.2 изображены зависимости кривизны от времени под действием постоянного изгибающего момента M для балок таврового сечения, полученные с использованием оценочных методов: 1) по характеристической точке (1); 2) по средней по объёму мощности рассеяния (2), а также численным путем с учетом комбинации свойств ползучести на растяжение и сжатие и повреждаемости

материала (3). Точками отмечены экспериментальные данные на чистый изгиб тавра с ребром на растяжение (рисунок 3.2а) и с ребром на сжатие (рисунок 3.2б).

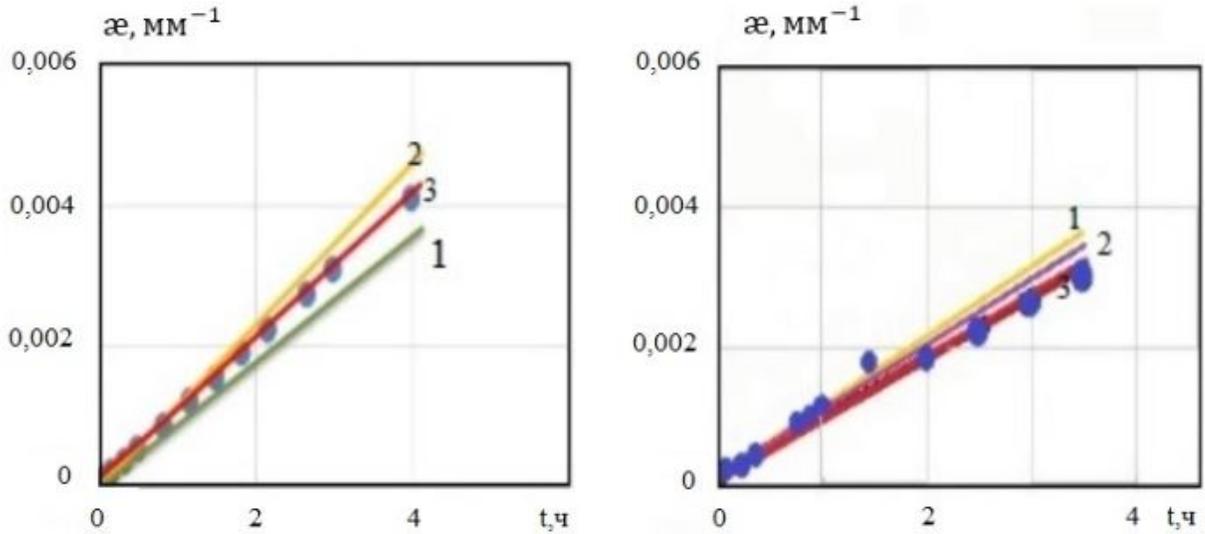


Рисунок 3.2. — Зависимости кривизны балки при установившейся ползучести от времени для балок таврового сечения — ребро на растяжение (а), ребро на сжатие (б).

В таблицах 3.2,3.3 приведены численные и экспериментальные значения кривизн κ_{exp} , в соответствующие моменты времени t_* . Для сравнения показаны абсолютные отклонения, где введены обозначения: $\Delta_1 = (\kappa_{ХТ}(t) - \kappa_{exp}(t))/\kappa_{exp}$, $\Delta_2 = (\kappa_W(t) - \kappa_{exp}(t))/\kappa_{exp}(t)$, $\Delta_3 = (\kappa_{mod}(t) - \kappa_{exp}(t))/\kappa_{exp}(t)$.

Таблица 3.2. — Результаты расчетов кривизн

ребро на	М, Нм	$t_*, \text{ч}$	$\kappa_{exp}(t) \text{ мм}^{-1}$	$\kappa_{ХТ}(t) \text{ мм}^{-1}$	$\kappa_W(t) \text{ мм}^{-1}$	$\kappa_{mod}(t) \text{ мм}^{-1}$
растяжение	75,6	4,00	$4,08 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$4,61 \cdot 10^{-3}$	$4,14 \cdot 10^{-3}$
	137,8	0,39	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$4,43 \cdot 10^{-3}$	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$3,52 \cdot 10^{-3}$
сжатие	75,6	3,50	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$
	137,8	0,5	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$6,51 \cdot 10^{-3}$	$5,81 \cdot 10^{-3}$	$5,49 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3.3. — Результаты расчетов кривизн

ребро на	M, Нм	t_* , ч	Δ_1 , %	Δ_2 , %	Δ_3 , %
растяжение	75,6	4,00	39	13	75,6
	137,8	0,39	28	10	137,8
сжатие	75,6	3,5	36	13	1,4
	137,8	0,5	24	11	0,98

Анализируя таблицу 3.3, можно сказать о том, что кривизна тавровой балки, полученная с использованием оценки по характеристической точке и оценки средней по объёму мощности рассеяния, отличается в среднем на 31,75 и 11,75% от данных эксперимента соответственно.

Абсолютное отклонение между результатами численного анализа и экспериментом составило 1,19%, что говорит о хорошем описании процесса ползучести при моделировании изгиба тавра с учетом разнотемпературности и повреждаемости материала. Однако, влияние поврежденности в данном расчете мало в силу низкого уровня накопленных деформаций ползучести, но сам параметр заложен в численном расчете.

Показано, что учет разнотемпературности материала дает наименьшее отклонение от экспериментальных данных, а также позволяет достаточно точно описывать все три стадии процесса ползучести балки. Сопоставление подходов к моделированию НДС показало, что оценочные методы можно использовать на установившейся стадии ползучести, погрешность составила 11,75%. Расчет на основе удельной мощности рассеяния позволяет удовлетворительно описывать процессы высокотемпературной ползучести вплоть до разрушения. Отметим, что в оценочных методах закладывается расчет констант только ребра на растяжении или ребра на сжатие. Для наиболее точной оценки интенсивности процесса ползучести тавровых балок, необходимо учитывать поврежденность материала и разницу свойств ползучести на растяжение и сжатие, что подтверждено результатами сравнения между экспериментальными данными и численным

моделированием (абсолютное отклонение составило 1,19%).

3.2 Обратная задача формообразования элементов конструкции

3.2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим обратную задачу: какой изгибающий момент M прикладывать к балке во время процесса деформации в ползучести, чтобы при разгрузке в момент времени t получить целевую кривизну \varkappa .

Поиск момента проводится путем решения последовательности прямых задач чистого изгиба балок таврового сечения. На каждом шаге производится сравнение полученных кривизн с требуемым экспериментальным значением. Уточнение значений кривизн проводится с использованием метода оптимизации Нелдера – Мида [97,98] с добавлением ограничений по времени формообразования элементов конструкций (рисунок ??).

Стоит отметить некоторые особенности используемого метода. Указанный выше метод Нелдера-Мида по сравнению с другими, более современными методами (например, Алгоритм Левенберга — Марквардта, генетический алгоритм оптимизации) обладает следующими достоинствами: метод нулевого порядка, наиболее быстрый и надежный из неградиентных методов оптимизации. Главным же его недостатком – отсутствие теории сходимости. Если же рабочий симплекс находится далеко от оптимальной точки, а алгоритм производит большое число итераций, при этом мало изменяя значения функции, то метод решения этой проблемы заключается в запуске алгоритма несколько раз и ограничении числа итераций.

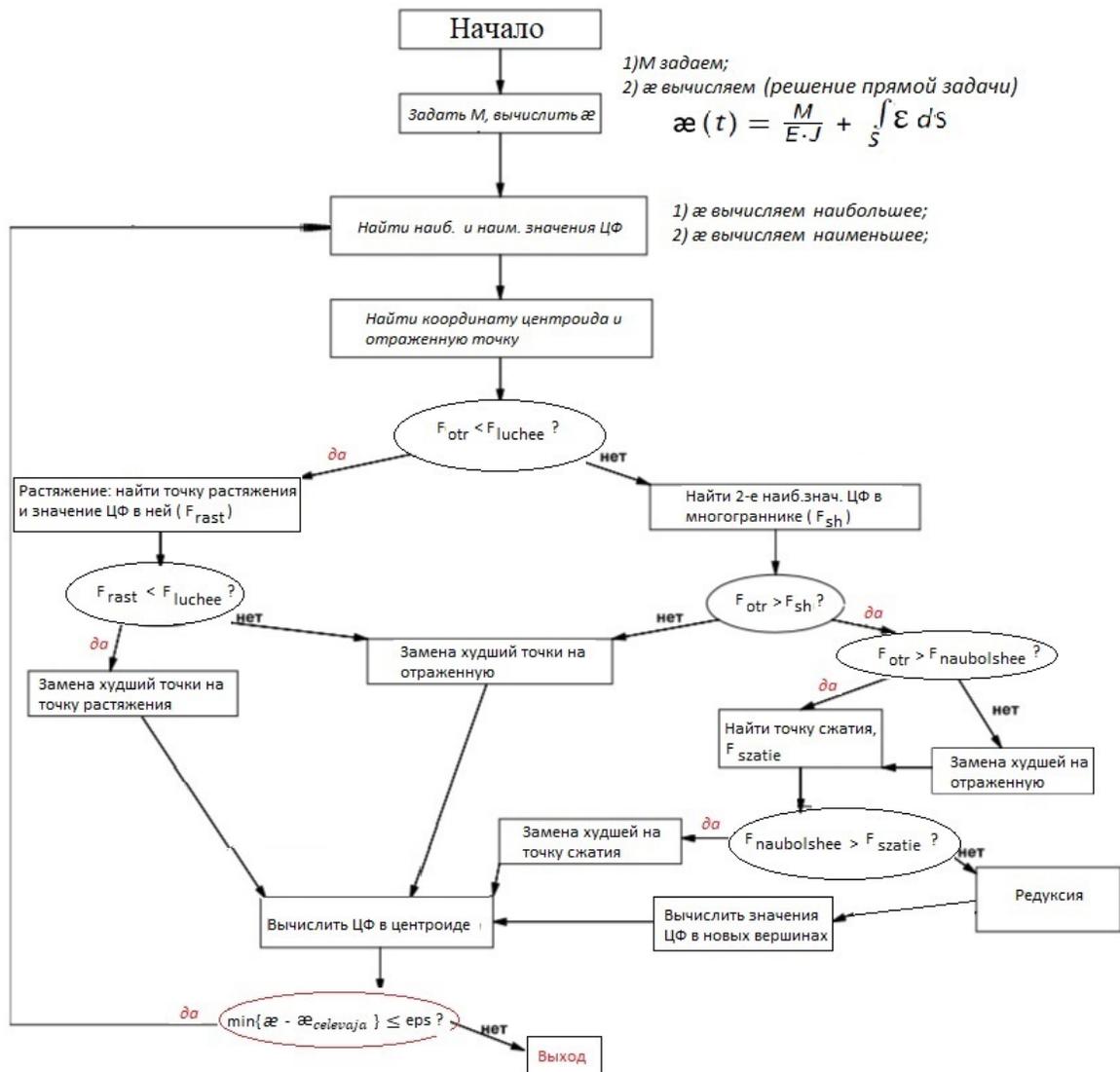


Рисунок 3.3. — Алгоритм метода обратной задачи.

Рассмотрим этапы итерации алгоритма для определения значения изгибающего момента для достижения требуемой кривизны при формообразовании элементов конструкций. На первом этапе происходит подготовка данных – задается начальный симплекс метода Нелдера – Мида с рассчитанными значениями интегрального квадратичного критерия в этих точках. На втором происходит сортировка данных. Из начального симплекса выбираются 3 изгибающий момента M : первый с максимальным значением, второй со следующим значением и третий уже с наименьшим M . Далее определяется центр тяжести. После проводим

операцию отражения, т.е. проектируем точку с максимальным значением прогиба через центр тяжести. Далее проходит операция растяжения или сжатия. Сжатие, если не проводится, то добавляется точка. Итерационный процесс завершается после того, как получили требуемое значение кривизны ребренной панели. Алгоритм реализован в программном модуле на языке C++ в программе Visual Studio .

3.2.2 Решение обратной задачи формообразования для балки таврового сечения в процессе ползучести.

Необходимо найти изгибающий момент по целевой кривизне, который необходимо приложить к балке таврового сечения для сплава ВТ5-1 (Ti-Al-Sn-V) при температуре $T = 700^{\circ}\text{C}$.

В результате были получены расчеты при изгибе ребра на растяжение, изображенные в виде трех процессов: 1 – $M = 84,07$ Нм, 2 – $M = 70,24$ Нм, 3 – $M = 77,14$ Нм (рисунок 3.4). Они соответствуют трем значениям изгибающего момента M при ребре на растяжении, полученным в результате реализации алгоритма для поиска изгибающего момента M по целевой кривизне ? балки с использованием метода оптимизации Нелдера – Мида.

В результате расчетов было получено, что расхождения между точной экспериментальной зависимостью и приближенным численным решением составляет около 2,3%.

На основе такого подхода можно переходить к моделированию формообразования ребренных конструкций и решать как прямые, так и обратные задачи.

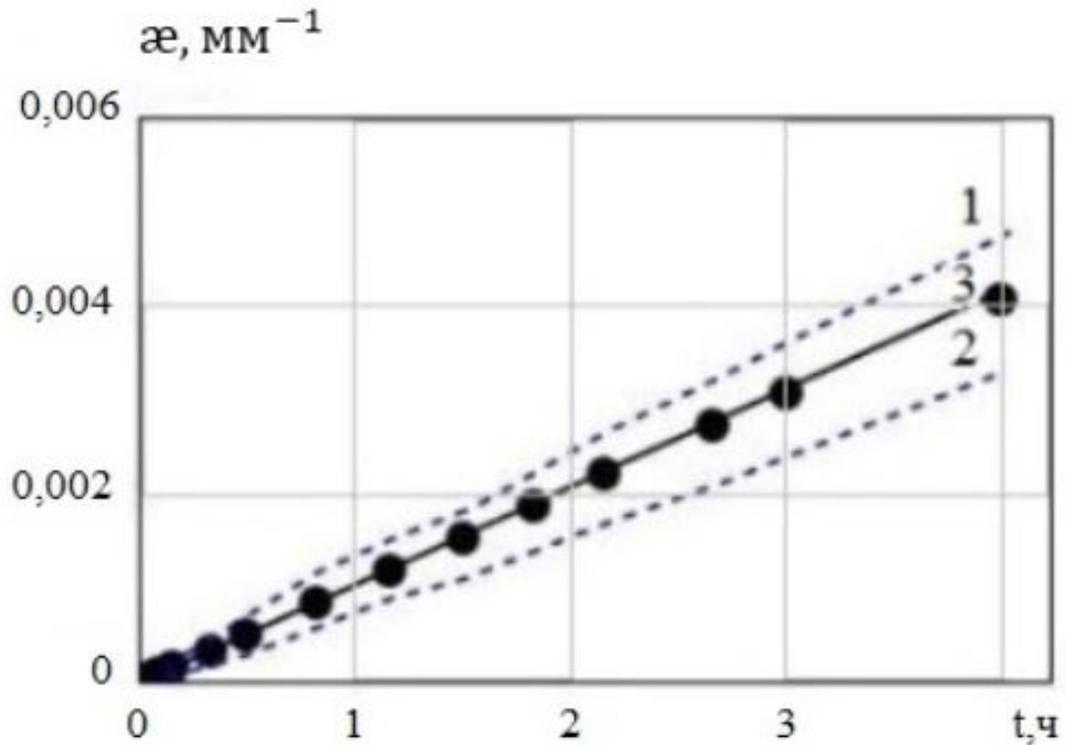


Рисунок 3.4. — График процессов моментов при численном моделировании тавра при изгибе ребра на растяжении.

3.2.3 Приближенный расчет геометрии оснастки для формообразования панелей в режиме ползучести.

Технологический процесс формообразования деталей панелей за счет ползучести материала состоит в разогреве панели до температуры формообразования, затем ее поджатия к формообразующей матрице и выдержке при температуре. При поджатии панели к матрице происходит упругопластическое деформирование ее элементов и после релаксация напряжений в них за счет ползучести материалов. Выдержка при температуре приводит к релаксации напряжений в элементах панели, упругие деформации переходят в необратимые деформации ползучести. Вследствие чего происходит уменьшение величины упругого восстановления панели.

Расчет геометрии формообразующей матрицы с учетом упреждения на величину упругого восстановления должен проводиться на расчетах упруго-пластического деформирования [99] релаксации напряжений в ней. Из-за сложности элементов панели и ее больших размеров необходимо проводить достаточно большие расчеты. Поэтому стоит проводить расчеты для участков панели, а затем основываясь на расчетах, получать геометрию формообразующей матрицы в целом для всей панели. Панель разбивается на участки - базисные элементы таврового сечения с учетом периодически повторяющегося одинакового сечения.

Расчет геометрии панели основывается на расчетах балок таврового сечения. Пусть панель изгибается в направлении поперечных ребер жесткости, а в направлении продольных имеет нулевую или близкую к ней кривизну. Тогда изгибные напряжения в продольном направлении и в их самих близки к нулю и процессы релаксации напряжений в соседних поперечных ребрах жесткости протекают независимо. Для панелей с рядом равноотстоящими друг от друга поперечными ребрами жесткости расчет формы оснастки проводится для одного базисного элемента - тавра. Произведем расчет для упругого восстановления тавровых элементов. Пусть балка прижимается нагрузкой к матрице радиуса оснастки R_0 и выдерживается в фиксированном положении при температуре формообразования. Необходимо определить величину упругого восстановления после снятия нагрузки через какое-то время.

Величина упругого восстановления определяется моментом, действующим в сечении балки на время снятия нагрузки $\Delta = M(t)/EJ$.

Расчеты релаксации изгибающего момента проводятся в предположениях для чистого изгиба балок. Общая деформация состоит из суммы упругой, пластической и деформации ползучести. Из гипотезы плоских сечений $\sigma/E + \varepsilon^p + \varepsilon^{cr} = \varkappa(z + \delta)$ и уравнения равновесия определяется напряженное

состояние в начальный момент времени - в момент поджатия к матрице.

Мгновенная пластическая деформация описывается уравнением $varepsilon^p = K|\sigma_0^{k-1}\sigma$.

По найденному напряженному состоянию определяется распределение пластических деформаций по высоте балки.

Для определения деформаций ползучести по высоте балки во времени имеем интегро-дифференциальное уравнение $d\varepsilon^{cr}/dt = f(\varepsilon^p(z), \varepsilon^{cr}(t), A, \varkappa_0, \delta)$, где $\delta = \int_S(\varepsilon^{cr} + \varepsilon^p)dS/\varkappa_0 S$ определяется из уравнения равновесия с учетом гипотезы плоских сечений.

Решение задачи проводится аналогично п.3.1.

Остаточный момент и упругое восстановление балки вычисляется как

$$M(t_\Phi) = \int_S \sigma z dS, \quad \Delta = M(t_\Phi)/EJ.$$

Изменяя начальную кривизну \varkappa_0 , имеем набор остаточных кривизн для одной и той же продолжительности процесса. По зависимости $\varkappa_0 = \varkappa_0(\varkappa_k)$ и заданию требуемой кривизны детали определяется необходимая кривизна \varkappa_0 .

При формообразовании деталей в процессе ползучести происходит непрерывное распределение напряжений. Оценка деформирования элементов конструкции, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, проводится на основе численных методов.

В [25] для оценки процесса формования конструкции, работающих в условиях ползучести, используется метод характеристических параметров. Суть метода: в нагруженном теле существует некоторая характерная точка, положение которой при заданных граничных условиях не зависит от величины прикладываемой нагрузки и температуры. Напряжение в этой точке при стационарных режимах нагружения не меняется и остается равным исходному значению во все время

процесса деформирования. При изменении нагрузки напряжения в этой точке изменяются от исходного по закону одноосного деформирования.

При снятии внешних нагрузок конструкция разгружается, напряжение в характеристической точке возвращается в ноль, а в других останутся остаточные напряжения. При ступенчатой изменяющейся внешней нагрузке напряженное состояние в характеристической точке отвечает упругому изменению напряжения в этой точке. Процесс релаксации напряжений в характеристической точке с исходным значением напряжений в ней $\hat{\sigma}_0$ проходит как и в одноосном эксперименте на релаксацию с тем же $\hat{\sigma}_0$.

Об интенсивности процесса деформированием релаксации в элементе конструкции в целом можно судить по интенсивности процесса в одной только характеристической точке.

3.2.4 Результаты численного расчета.

Задавалась следующая геометрия балки: $b_1 = 1080$ мм, $b_2 = 7,5$ мм, $h_1 = 2$ мм, $h_2 = 23$ мм. Материал АК4-1 при $T = 195^0C$. Для численного расчета методом Рунге-Кутты-Мерсона (см. п. 3.1.1) использовались зависимости и характеристики материала с разупрочняющимся участком ползучести:

$$\varepsilon = \sigma/E + K|\sigma|^{k-1}\sigma,$$

$E = 60000$ МПа; $K_1 = 1,795 \cdot 10^{-16}$ МПа $^{-m_1}$, $m_1 = 10$ – для растяжения; $K_2 = 1,01 \cdot 10^{-13}$ МПа $^{-m_2}$, m_2 – для сжатия.

Скорости деформации ползучести второго и третьего участка описываются по зависимостям в энергетической форме:

$$d\varepsilon^{cr}/dt = B|\sigma|^{n-1}\sigma/(A_* - A)^r, \quad A = \int_0^{\varepsilon^{cr}} \sigma d\varepsilon^{cr}, \quad A_* = const,$$

где $A_* = 20$ МПа; $B_1 = 8,96 \cdot 10^{-11}$ МПа $^{n_1-r_1}$ ч $^{-1}$, $n_1 = 7$, $r_1 = 7$ – для растяжения;
 $B_2 = 3,125 \cdot 10^{-11}$ МПа $^{n_2-r_2}$ ч $^{-1}$, $n_2=6$, $r_2 = 5$ – для сжатия.

Начальная кривизна тавровой балки $\kappa_0 = 0,000704$ мм $^{-1}$ определялась по методике, представленной в п. 3.1.

На рисунке 3.5 представлены эпюры прорелаксированных напряжений тавра в различные моменты времени.

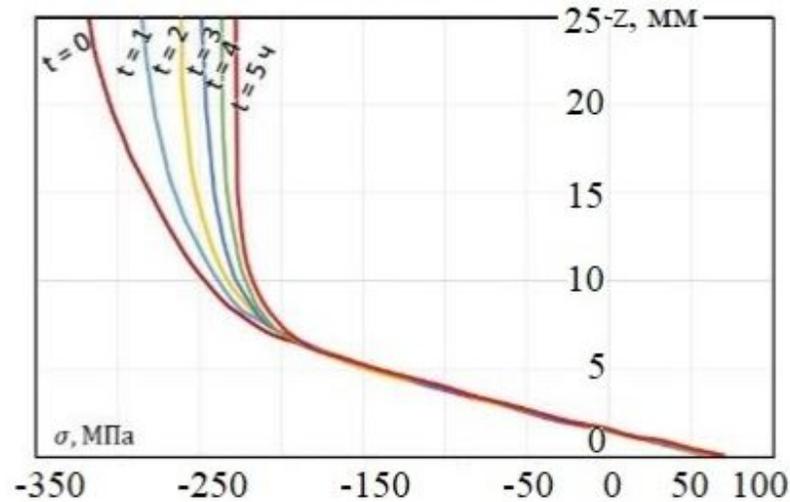


Рисунок 3.5. — Эпюры прорелаксированных напряжений по сечению тавра.

Существование характеристической точки позволяет без использование численных методов оценить упругое восстановление базисных элементов.

По напряжению в характеристической точке можно оценить остаточный момент, т.к. он равен упругому моменту

$$M(t) = \hat{\sigma}(t)/\hat{z}, \quad (3.11)$$

$\hat{\sigma}(t)$ – напряжение в характеристическом слое.

Упругое восстановление базисного элемента определяется как

$$\Delta = M(t)/EJ = \hat{\sigma}(t)/(E\hat{z}), \quad (3.12)$$

(3.12) а кривизна оснастки $\varkappa_0 - \varkappa_k + \Delta$.

Для решения задачи решаются уравнения изгиба тавра в начальный момент времени

$$\sigma_0/E + \varepsilon_p = \varkappa_0 z, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+h_1+h_2} b\sigma_0 z dz = M_0, \quad (3.13)$$

где α – координата основания тавра; σ_0 и M_0 – напряжения и изгибающий момент при $t = 0$.

Подставляя \varkappa_p в (3.13), получаем нелинейное уравнение относительно σ_0 .

Для дальнейшего решения проводилось следующее упрощение - упругопластическая диаграмма аппроксимирована двойной ломанной:

$$\varepsilon = \sigma_0/E_1, \quad \sigma \leq \sigma_*,$$

$$\varepsilon = \sigma_0/E_2 + \sigma_*(1/E_1 - 1/E_2), \quad \sigma \geq \sigma_*,$$

где E_1 – упругий модуль, E_2 – тангенс угла наклона второй ломанной, σ_* – напряжение в точке излома диаграмма.

Тогда

$$\sigma_0 = E_1 \varkappa_0 z, \quad z \leq \sigma_*/(E_1 \varkappa_0);$$

$$\sigma_0 = E_2 \varkappa_0 z + \sigma_*(1 - E_2/E_1), \quad z \geq \sigma_*/(E_1 \varkappa_0). \quad (3.14)$$

Подставляя (3.11) во второе и в третье уравнение (3.12), после интегрирования и подстановки получаем уравнение для определения координаты α и момента M_0 соответственно.

В характеристической точке должно выполняться

$$\hat{\sigma}_0/E_2 + \sigma_*(1/E_1 - 1/E_2) = \varkappa_0 \hat{z}, \quad \hat{\sigma}_0 = M \hat{z}/J. \quad (3.15)$$

Решая (3.15), получаем координату характеристической точки и напряжение в ней в начальный момент времени:

$$\hat{z} = \sigma_*(1 - E_2/E_1)/(M_0/J - \kappa_0 E_2), \quad \hat{\sigma}_0 = M_0 * (1 - E_2/E_1)/(M_0/J - \kappa_0 E_2)J$$

. Напряжения в характеристической точке на любой момент времени

$$\hat{\sigma}/E_1 + \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_c = \kappa_0 \hat{z}, \quad \hat{\sigma}_0 = B\hat{\sigma}^n.$$

Тогда, решив уравнение $\hat{\sigma}/E_1 + B\hat{\sigma}^n$, получаем уравнение с начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$, получим

$$\sigma = \sigma_0(1 + (n - 1)\hat{\sigma}(0)^{n-1}E_1 Bt)^{-1/(n-1)}.$$

Для расчета по характеристической точке упругопластические диаграммы аппроксимирована кусочно-линейной функцией с характеристиками $\sigma_* = 235$ МПа; $E_1 = 60000$ МПа; $E_2 = 8167$ МПа.

На рисунке 3.6 сплошной линией получен расчет по методу Рунге-Кутты-Мерсона, а штриховой – по характеристической точке (ХТ). Разница между численным расчетом и по ХТ составила 3

Проведенные расчеты и экспериментальное сопоставление полученных результатов подтверждают приближенные расчеты и достаточно надежны для оценки процессов ползучести и релаксации напряжений в оробранных панелях одинарной кривизны.

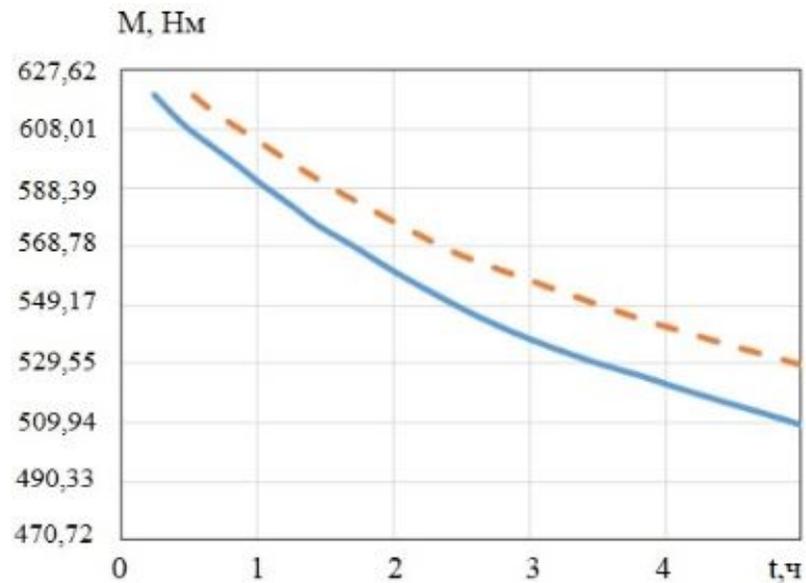


Рисунок 3.6. — Релаксация изгибающего момента.

3.2.5 Компьютерное моделирование процесса формообразования оребренной панели.

Рассмотрим оребренную панель размером 417,5 x 1073,3 мм. Панель можно условно разбить на три составляющие состоящие в виде тавровых балок (рисунок 3.7). Два тавра имеют длину основания 405 мм. Толщина ребер равняется 7,5 мм, высота вместе с основанием 25 мм. Основание имеет толщину 2 мм.

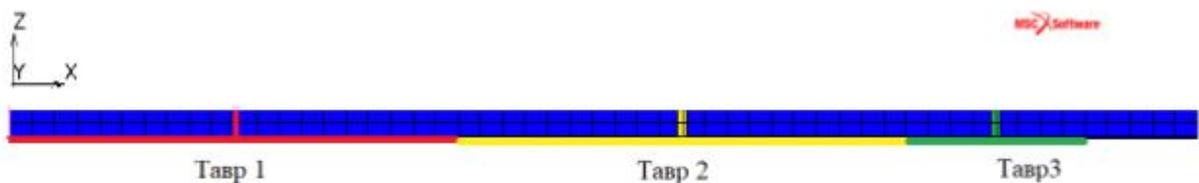


Рисунок 3.7. — Модель оребренной панели.

Необходимо определить какие изгибающие моменты надо приложить к трем балкам таврового сечения для того, чтобы получить целевую кривизну детали радиуса $R = 2000\text{мм}$.

Рассмотрим два случая достижения целевой формы панели: 1) в условиях

пластичности, что потребует приложения усилий, переводящих материал локально в состояние пластического течения, при этом сам процесс можно сделать достаточно коротким по времени; 2) в условиях ползучести, усилия потребуются в разы ниже, чем при пластичности. Однако, время до завершения формообразования в этом случае существенно увеличивается. Процесс формовки состоит из нагрева заготовки, стадии приложения нагрузки, стадии снятия нагрузки и распружинивания изделия.

В нашем случае цилиндрического изгиба оребренной панели для поиска необходимых усилий (рисунок 3.8), использовался модуль «Neldertavr.cpp».

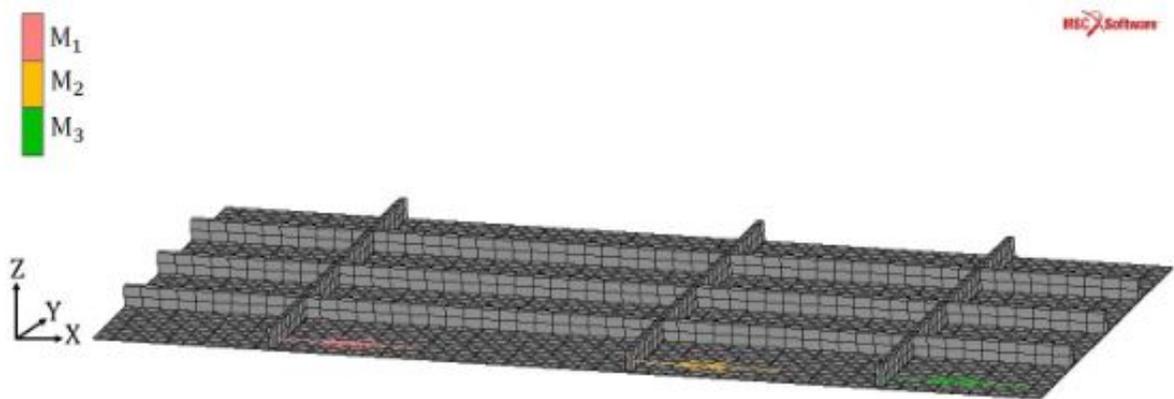


Рисунок 3.8. — Конечноэлементная сетка с квадратичными элементами HEX8.

В данном случае усилиями были изгибающие моменты. Модуль основан на алгоритме Нелдера-Мида, представленный в п. 3.2.1. Далее с найденными моментами производилось моделирование цилиндрического изгиба оребренной панели с учетом свойств пластичности и ползучести материала, на основе соотношений из пункта 3.2.3. Для задания свойств ползучести материала, не входящего в базу данных пакета MSC.Marc, применялась пользовательская подпрограмма. Моделирование формообразования пластичности в пакете MSC.Marc проводилось штатными средствами, материал считался идеально упругопластическим. В результате проводилось сравнение итоговых кривизн, полученных с использованием модуля Neldertavr.cpp и при трехмерном

моделировании.

Стоит отметить, что в процессе моделирования цилиндрического изгиба оребренной панели не проводился учет обратной ползучести [89].

В расчетах задавались следующие константы материала панели из сплава АК4-1 при температуре 200°C :

модуль упругости и коэффициент Пуассона $E = 60000$ МПа, $\nu = 0.3$;

предел текучести $\sigma_{\text{T}} = 170$ МПа;

для деформаций ползучести (см. главу 2):

$B_1 = 8,96 \cdot 10^{-11} \text{МПа}^{n_1-r_1} \text{ч}^{-1}$, $n_1 = 7$, $r_1 = 7$ – для растяжения;

$B_2 = 3,125 \cdot 10^{-11} \text{МПа}^{n_2-r_2} \text{ч}^{-1}$, $n_2 = 6$, $r_2 = 5$ – для сжатия.

В результате решения прямой задачи формообразования балок таврового сечения было получено, что для получения целевого радиуса кривизны детали при пластичности необходимо прикладывать усилия $M_1 = M_2 = -718,53$ Нм, $M_3 = -666,65$ Нм (рисунок 3.8) на протяжении 3 ч., а в случае ползучести $M_1 = M_2 = -273,47$ Нм, $M_3 = -256,4$ Нм в течении 270 ч. (рисунок 3.8) [100].

Численное решение, полученное из модуля Neldertavr.cpp (желтая кривая), для случая пластического деформирования оребренной детали с последующей разгрузкой детали, превышает расчетные данные из MSC.Marc на 4,14% (рисунок 3.9). Штрих и штрих-пунктирные кривые зависимости кривизны от времени были получены с использованием трехмерных восьмиузловых гексагональных элементов HEX8 в программе MSC.Marc.

Расчет трехмерного моделирования формообразования оребренной панели в процессе ползучести (черная штрих-пунктирная кривая), приведен на рисунке 3.10.

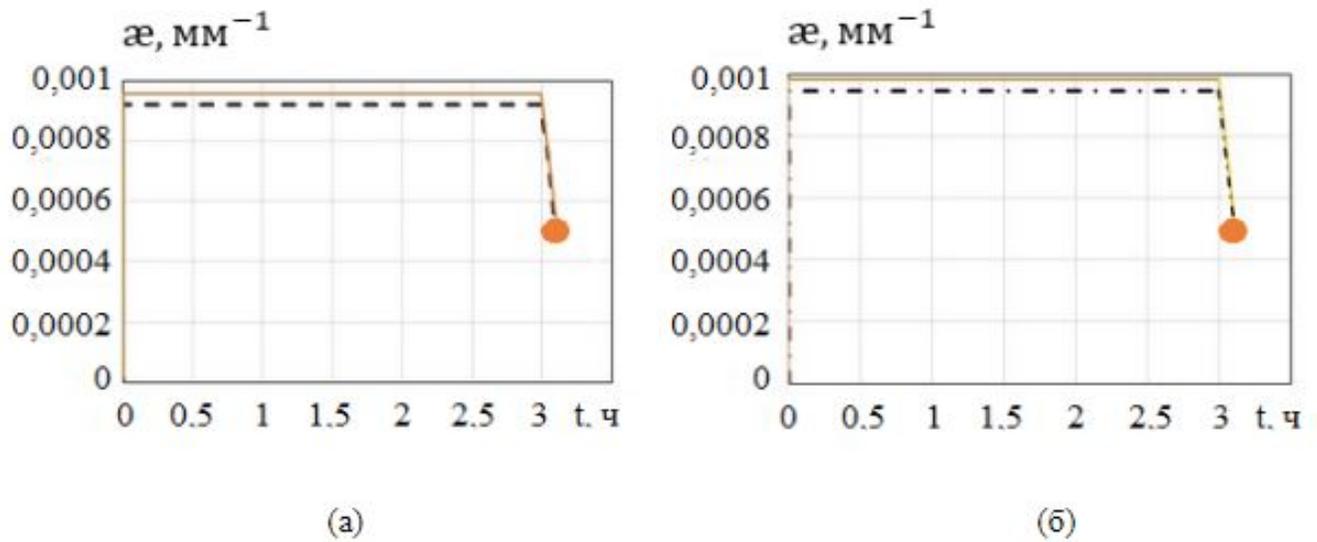


Рисунок 3.9. — Изменение кривизны с течением времени в процессе пластичности для Тавра 1 (а) и Тавра 3 (б).

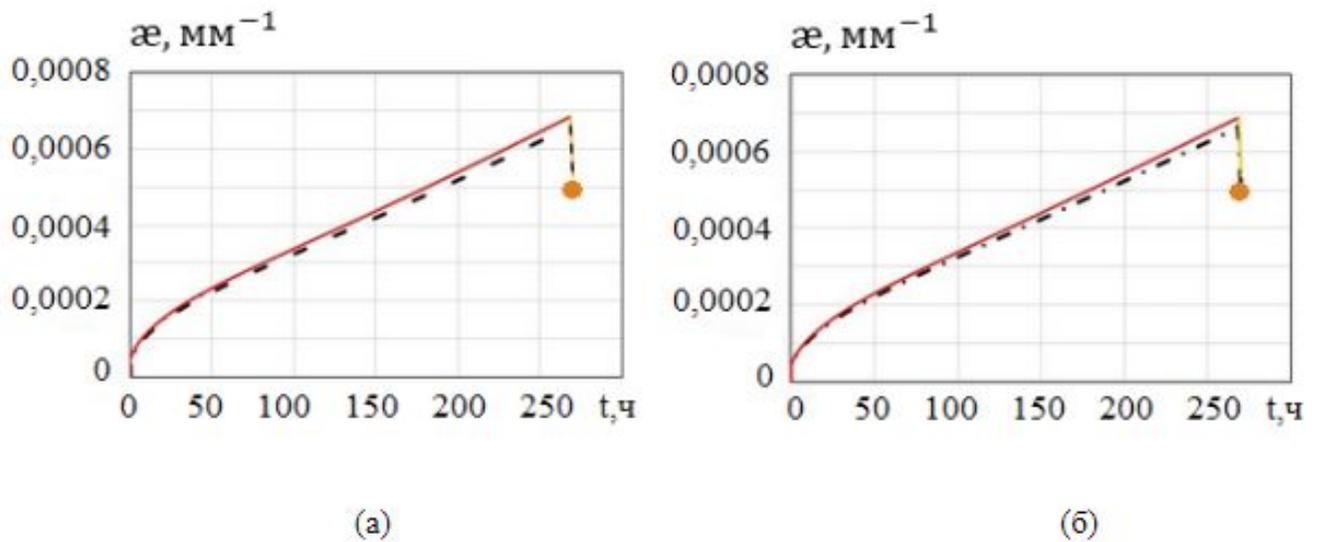


Рисунок 3.10. — Изменение кривизны с течением времени в процессе ползучести для Тавра 1 (а) и Тавра 3 (б).

Красная кривая – расчетные данные с использованием программного модуля Neldertavr.cpp. Сравнивая расчетные значения кривизн, полученных из двух программ, можно сделать вывод, что относительная погрешность между полученными данными составила 4,14%. При этом итоговая кривизна оребренной панели равняется $0,0005 \text{ мм}^{-1}$ (круглый маркер на рисунках 3.9, 3.10). При

заданных трех моментах и последующей разгрузке панели был получен требуемый радиус кривизны равный 2000 мм.

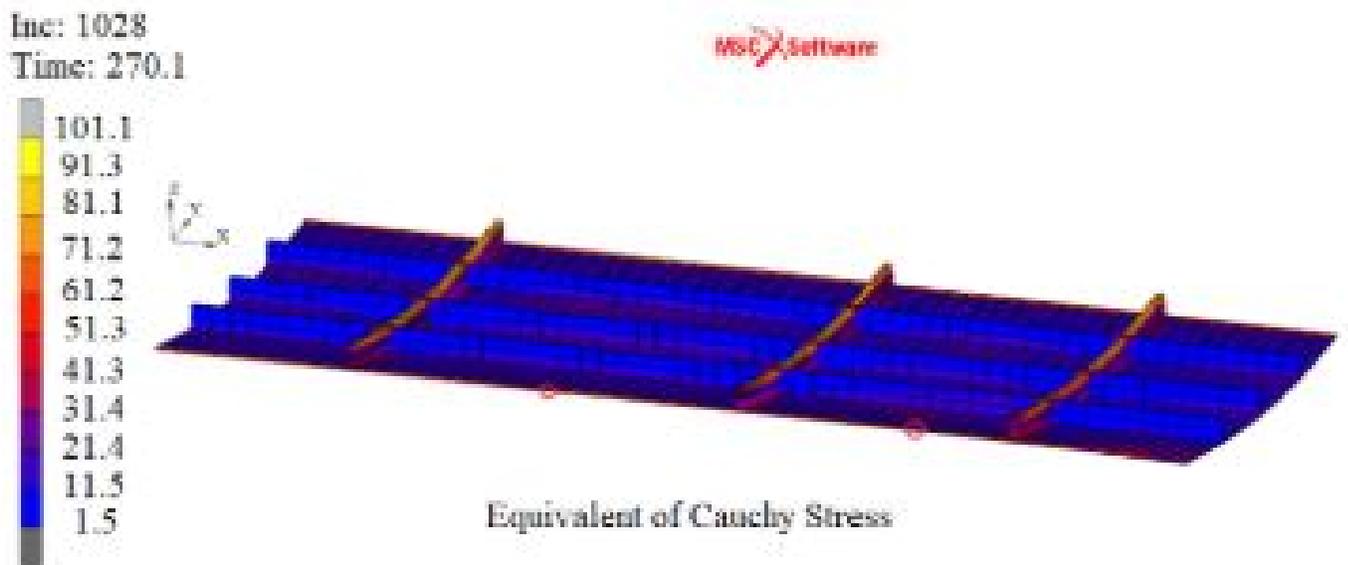
Из рисунка 3.10 видно, что при процессе ползучести с течением времени прогиб увеличивается в 4 раза при достижении времени процесса $t = 200$ ч. Стоит отметить, что был проведен процесс распружинивания панели в трехмерном моделировании (желтая кривая) и процесс разгрузки в программном модуле Neldertavr.cpp (черная штрих-пунктирная кривая).

На рисунке ?? показано, что изгибные напряжения в продольном направлении близки к нулю и процессы в соседних поперечных ребрах жесткости протекают независимо. Значения максимальных главных значений напряжений при формообразовании в режиме пластичности и ползучести представлены на диаграммах соответственно. Значения мембранных напряжений в процессе ползучести в промежутках между таврами 1 и 2, 2 и 3 соответственно равняются 57,88 МПа и 27,66 МПа.

Оценка поврежденности материала в конечный момент времени в процессе ползучести достигла значения 0,24, а при пластичности - 0,56. Значения остаточных напряжений при пластическом деформировании превосходят таковые после процесса ползучести примерно в 2,5 раза.



а



б

Рисунок 3.11. — Максимальные главные значения напряжений для оребренной панели: (а) в процессе пластичности; (б) в процессе ползучести.

Выводы по третьей главе

1. Представлено применение метода Нелдера-Мида в решение обратной задачи для формообразования элементов конструкций оребренной детали. В рассмотренном методе исходная задача (поиск усилий, которые необходимо приложить, чтобы получить требуемую кривизну детали) сводится к последовательности вспомогательных прямых задач моделирования НДС чистого изгиба балок таврового сечения. Численная модель учитывает различие свойств материала на растяжение и сжатие, а также наличие накопленных повреждений в материале в процессе ползучести.

2. Разработана методика определения оптимальных параметров процессов деформирования оребренной панели, основанная на определении и расчетно-экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния балок различного поперечного сечения в условиях ползучести с учетом поврежденности материала. При расчете учитывалось распружинивание детали при снятии нагрузки.

3. Показана возможность определения изгибающих моментов, которые позволяют достигнуть целевую форму оребренной панели при цилиндрическом изгибе как в условиях ползучести, так и при пластическом деформировании.

Заключение

Основные выводы и научные результаты, полученные в рамках диссертационной работы.

1. Предложен вариант уточненной системы определяющих уравнений с одним скалярным параметром поврежденности для описания процессов деформирования (вплоть до разрушения) металлических материалов в условиях ползучести без ограничений на значения деформаций ползучести и диссипации энергии в момент разрушения.

2. Изложена методика идентификации параметров материала. Выполнена проверка ее адекватности экспериментальными данными по ползучести и длительной прочности для образцов из стали марки 45, титанового сплава ВТ9 и стали 09Г2С при стационарных и нестационарных условиях нагружения. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Разработан метод решения прямых задач формообразования знакопеременного изгиба балок прямоугольного сечения для материала с разными свойствами на растяжение и сжатие в режиме ползучести, с учетом температурной выдержки без нагрузки и учетом поврежденности материала. Показано, что для достоверного описания формообразования деталей в условиях ползучести необходимо учитывать влияние поврежденности материала и температурной выдержки.

3. Показано, что необходимо учитывать процесс релаксации для получения

более точных моделей для описания формообразования деталей в условиях ползучести. Проведено моделирование процесса деформирования балок прямоугольного сечения в процессе ползучести с учетом процесса релаксации и повреждаемости. Выполнена проверка на алюмолитиевом сплаве В-1461.

4. Введен параметр поврежденности материала в конечно-элементный пакет MSC.Marc для процессов деформирования (вплоть до разрушения) элементов конструкций в условиях ползучести.

5. Реализованы алгоритмы для решения прямых и обратных задач формообразования элементов конструкций различного поперечного сечения для случая чистого изгиба балок в условиях пластичности и ползучести.

6. Разработан метод решения задач формообразования цилиндрического изгиба оребренной панели для получения целевой формы изделия в процессе пластичности и ползучести с учетом распружинивания детали при снятии разгрузки. Численная модель учитывает различие свойств материала на растяжение и сжатие, а также наличие накопленных повреждений в материале в процессе ползучести.

7. Разработана методика определения оптимальных параметров процессов деформирования оребренной панели, основанная на определении и расчетно-экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния балок различного поперечного сечения в условиях ползучести с учетом поврежденности материала.

Литература

- [1] Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций- М.: Машиностроение-1, 2004. — 263 с.
- [2] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М: Наука, 2014. — 752 с.
- [3] Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2016. — 504 с.
- [4] Аршакуни А.Л. , Локощенко А.М., Киселевский В.Н. и др. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под общ. ред. С. А. Шестерикова. – М. : Машиностроение, 1983. — 101 с.
- [5] Локощенко А.М. Моделирование ползучести и длительной прочности металлов. Монография. – М.: МГИУ, 2007. — 264 с.
- [6] Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести . – М.: Ленинград: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. — 324 с.
- [7] Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 1997. — 278 с.
- [8] Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1986. — 96 с.

- [9] Горев Б.В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В. Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // ПМТФ. — 2014. — Т.55, №6. — С. 132–144.
- [10] Соснин О.В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // ПМТФ. — 2010. — Т. 51, № 4. — С. 188–197.
- [11] Веричев С.Н., Горев Б.В., Банщикова И.А. Формообразование изгибом в режиме пластичности элементов самолетных конструкций // Обработка металлов. — 2014. — № 4. — С. 85–93.
- [12] Михеев В.А., Клочков Ю.С., Кузина А.А., Гречникова А.Ф., Савин Д.В. Выбор кинематической схемы формообразования обтяжкой обводообразующих оболочек сложной пространственной формы // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. — 2012. — №5. — С. 239–245.
- [13] Михеев В.А., Гречников Ф.В., Дементьев С.Г., Самохвалов В.П., Савин Д.В., Сурудин С.В. Моделирование кинематической схемы последовательной обтяжки оболочек двояковыпуклой формы на обтяжном прессе FEKD // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2014. — № 6. — С. 172–179.
- [14] Пашков Е.А. Технологический комплекс для формообразования длинномерных панелей и обшивок на базе отечественного оборудования // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2014. — Т.16, №1(5). — С. 1528–1535.

- [15] Wenchun Jiang, Shaohua Li, Yun Luo and Shugen Xu. Creep Damage Analysis of a Lattice Truss Panel Structure High Temp // Mater. Proc. — 2017. — Vol.36(1). — P. 89–96.
- [16] Александров А. В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990. — 400 с.
- [17] Бурнышева Т.В., Штейнбрехер О. А., Ульянов А. Д. Особенности задания граничных условий при моделировании сетчатых анизотридных конструкций // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2018. — Т.11, №1. — С. 137–144.
- [18] Zhan L.H., Tan S.G., Huang M.H., Niu J. Creep age-forming experiment and springback prediction for AA2524 // Advanced Materials Research. — 2012. — P. 122–129.
- [19] Zhan L., Lin J., Huang M. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // Advanced Science Letters. — 2013. — Vol. 19, № 1. — P. 75–79.
- [20] Adachi T., Kimura S., Nagayama T., Takehisa H., Shimanuki M. Age forming technology for aircraft wing skin // Materials Forum. — 2004. — Vol. 28. — P. 202–207.
- [21] Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. — 2010. — Vol.43, № 1. — P.353–536.
- [22] Luo H., Li W., Li Ch., Wan M. Investigation of creep-age forming of aluminum lithium alloy stiffened panel with complex structures and variable curvature // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2017. — Vol.91, № 9-12. — P.3265–3271.

- [23] Lam A.C.L., Shi Zh., Yang H., Li W., Davies C.M., Lin J., Zhou Sh. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: experimental and finite element studies // *J Mater Process Technol.* — 2015. — Vol.219. — P.155–163.
- [24] Бормотин К.С., Белых С.В., Аунг В. Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства // *Вычислительные методы и программирование.* — 2016. — Т. 17. — С. 258–267.
- [25] Горев Б.В., Панамарев В.А. Метод интегральных характеристик для расчета изгиба элементов конструкции // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки.* — 2013. — № 177. — С. 201-211.
- [26] Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета // *ПМТФ.* — 2010. — Т.51, № 4. — С. 155-165.
- [27] Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T.H., Becker A.A., Peravali S. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* — 2009. — Vol. 80, № 11. — P. 1406–1443.
- [28] Naumenko K., Altenbach H. Modeling high temperature materials behavior for structural analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. — Springer, 2016. — 381 p.
- [29] Naumenko K., Altenbach H. Modeling high temperature materials behavior

for structural analysis. Part II. Solution Procedures and Structural Analysis Examples. – Springer, 2019. – 224 p.

- [30] Brovman M. Ya. Creep Deformation of Beams under Compression and Bending Stresses // Mechanics of Solids. – 2017. – Vol. 52, №. 1. – P. 75–80.
- [31] Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 68–87.
- [32] Лепин Г.Ф. Бондаренко Ю.Д. Ползучесть прямого бруса при изгибе с учетом повреждаемости материала // Проблемы прочности.— 1970. – № 7.—С. 68–70.
- [33] Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести // Вестн. РУДН. Сер. Инж. исследования. – 2015. – № 1. – С. 111–122.
- [34] Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В. Чистый изгиб балки в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ. - мат. науки. – 2012. – № 1(26). – С. 66–73.
- [35] Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. – 1984. – № 1. – С. 86–92.
- [36] Шестериков С. А., Лебедев С.Ю., Юмашева М. А. О длительной прочности // Проблемы механики сплошной среды. К 60-летию со дня рождения В. П. Мясникова. – Владивосток, 1996. – С. 80–85.
- [37] Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В. Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала // Машиностроение и инженерное образование. – 2012. – № 3. – С. 29–35.

- [38] Никитенко А.Ф., Соснин О.В. Изгиб балки с разными характеристиками ползучести при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. — 1971. — № 6. — С. 67–70.
- [39] Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 4. — С. 26–38.
- [40] Горев Б.В. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие. // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. — 1973. — Вып. 14. — С. 44–51.
- [41] Радченко В.П., Шершнева М.В., Цветков В. В. Обобщённая стохастическая модель ползучести и длительной прочности балки в условиях чистого изгиба и её применение к оценке показателей надёжности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — № 4(29). — С. 72–86.
- [42] Стружанов В.В., Бахарева Е.А. К расчету предельных нагрузок балочных элементов при чистом изгибе // Транспорт Урала. — 2013. — № 3 (38). — С. 24–27.
- [43] Агапов В.П. Моделирование стержней таврового сечения в расчетах строительных конструкций методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2016. — № 2. — С. 55–59.
- [44] Sitar M., Kosel F., Brojan M. Numerical and experimental analysis of elastic–plastic pure bending and spring back of beams of asymmetric cross-sections // International Journal of Mechanical Sciences. — 2015. — Vol. 90. — P. 77–88.

- [45] Tori N., Harapin A., Boko I. Modelling of Steel Creep at High Temperatures Using an Implicit Creep Model // Key Engineering Materials. — 2013. — Vol. 553. — P. 13–22.
- [46] Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Решение задач неустановившейся ползучести для стержневых систем на основе модели с функциональными константами материалов // Известия Алтайского государственного университета. — 2014. — №1-2. — С. 52–56.
- [47] Демешкин А. Г. Карпов Е.В., Корнев В.М. Накопление повреждений в образцах с краевой трещиной в зоне предразрушения при нестационарном малоцикловом нагружении // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — №4. — С. 141–154.
- [48] Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 2017. — Vol. 97, №. 9. — P. 1083–1099.
- [49] Соснин О. В., Шокало И. К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности: Сообщ. 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением // Проблемы прочности. — 1974. — № 1. — С. 43–48.
- [50] Iyavoynen S V , Banshchikova I A , Lubashevskaya I V and Legan M A High temperature creep of steel 09G2S under non-stationary loading // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol.894. — P. 012123.
- [51] Цвелодуб И.Ю. О теории ползучести упрочняющихся материалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 3(36). — С. 106–117.

- [52] Banshchikova I A , Iyavoynen S V , Larichkin A Yu On rational modes of forming an axisymmetric shell of steel under creep // Journal of Physics: Conference Series.— 2019. – Vol. 1268. – P. 012009.
- [53] Банщикова И. А., Иявойнен С. В., Ларичкин А. Ю., Леган М. А., Любашевская И. В. Рациональные режимы формообразования полусферической оболочки из стали 09Г2С-12 в условиях ползучести // Краевые задачи и математическое моделирование : тем. сб. науч. ст. – Новокузнецк, 2017. – С. 40–47.
- [54] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988 – 712 с.
- [55] Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
- [56] Бормотин К.С. Метод решения обратных задач неупругого деформирования тонкостенных панелей. Выч. мет. программирование. – 2017. – Т.18, Вып.4. – С. 359–370.
- [57] Цвелодуб И.Ю. Обратные задачи неупругого деформирования // Изв. АН. Механ. твердого тела. – 1995. – №2. – С. 81–92.
- [58] Бормотин К.С., Вин Аунг. Метод решения обратной задачи в процессе обтяжки панели // Вестник ЧГПУ им.И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – № 3.— С. 48–58.
- [59] Горев Б.В. Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей : диссертация ... доктора технических наук : 01.02.04. – Новосибирск, 2003. – 426 с.
- [60] Brandau F.M., Delijaicov S., Bortolussi R. CAF—a simplified approach to

calculate springback in Al 7050 alloys // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2017. — Vol. 91. — P. 3273–3284.

- [61] Fenggong L., Yong L., Xia H., Zhusheng S., Yuansong Z., Jianguo L. An investigation of creep age forming of AA7B04 stiffened plates: Experiment and FE modelling // Journal of Manufacturing Processes. — 2019. — Vol.37 — P. 232–241.
- [62] Fenggong L., Yong Li, Zhusheng Shi, Xia Huang, Yuansong Zeng, Jianguo Lin. Stress and temperature dependence of stress relaxation ageing behaviour of an Al–Zn–Mg alloy // Materials Science and Engineering A. — 2020. — Vol.773 — P.138859.
- [63] Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1991. — 190 с.
- [64] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Пер. с англ. А.С. Кравчук. — М.: Мир, 1986. — 360 с.
- [65] Сорокин О.В., Самарин Ю.П., И.А. Одинг. К расчету ползучести балок при изгибе // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 157, №6. — С. 1325–1328.
- [66] Naumenko K., Altenbach H., Corash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model // Arch Appl Mech. — 2009. — №79 — P. 619–630.
- [67] Любашевская И.В., Иявойнен С.В. Исследование процесса поврежденности в стержневых элементах конструкции при их деформировании в условиях ползучести // Сборник материалов III Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова

«Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, 26 - 30 мая 2014 г. – С.61.

- [68] Еремин Ю.А., Кайдалова Л.В., Радченко В.П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материалов и элементов конструкций // *Машиноведение*. — 1983. — №2. — С. 67–74.
- [69] Иявойнен С.В., Ларичкин А.Ю., Любашевская И.В. Моделирование балок таврового сечения в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // *Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 4-й Всероссийской конференции*, Новосибирск, 11-13 апреля 2017 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 116–123.
- [70] Иявойнен С. В. Моделирование процессов изгиба балок при нестационарных условиях нагружения в рамках кинетической теории ползучести // *Материалы 53-й МНСК, Математика*, Новосибирск, 11-17 апреля 2015 г. – 2015. С.86.
- [71] Иявойнен С.В., Любашевская И.В. Описание нестационарных процессов ползучести с учетом повреждаемости материала // *IX Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики»*, посвященная 55-летию полета Ю. А. Гагарина, Томск, 21-25 сентября 2016 г. – С.279–280.
- [72] Леллеп Я. Установившаяся ползучесть балок в случае материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. // *«Tartu Ulirooli toimetised. Уч. зап. Тартус. ун-та»*. – 1975. – Вып. 355. – С. 245–252.
- [73] Рубанов В.В. О параметре повреждаемости в условиях ползучести //

Неклассические задачи упругости и пластичности. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. — 1981. — Вып. 49. — С. 151–156.

- [74] Горев Б.В., Клопотов И.Д. К описанию процесса ползучести и длительной прочности по уравнениям с одним скалярным параметром повреждаемости // ПМТФ. — 1994. — № 5. — С. 92–102.
- [75] Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. — М., 2015. — 937 с.
- [76] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert and Charles W. Clark. NIST Handbook of Mathematical Functions Paperback and CD-ROM. — Cambridge University Press, 2019. — 968 p.
- [77] Marc 2014, Vol A: Theory and User Information, MSC Software Corporation. <http://www.mssoftware.com/product/marc>.
- [78] Bathe K.J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis / K.J. Bathe. — New York: Prentice-Hall, 1982. — 765 p.
- [79] Рудаков К.Н. UGS Femap 10.2.0 Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. — К.: КПИ, 2011. — 317 с.
- [80] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 262 с.
- [81] Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2008. — Т. 9, № 1. — С. 346–365.

- [82] Бормотин, Константин Сергеевич. Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клепки тонкостенных панелей : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 - Комсомольск-на-Амуре, 2014. – 225 с. : 57 ил.
- [83] Marc 2014, Vol. D: User Subroutines and Special Routines. MSC.Software Corporation, <http://www.mssoftware.com/product/marc>.
- [84] Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В. Кручение квадратной пластинки из материала, разнсопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов: сб. тр. / Министерство речного флота РСФСР, Новосибирский институт инженеров водного транспорта. — Новосибирск. — 1976. — Вып. 117. — С. 78–88.
- [85] Колодезев В.Е., Горев Б.В., Ларичкин А.Ю., Шевцова Л.И. Чистый изгиб балки из сплава АБВТ-20 в режиме ползучести при знакопеременном нагружении // Технология машиностроения. — 2017. — № 2. — С. 11–16.
- [86] Цвелодуб И.Ю. К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. — 2012. — № 6.— С. 98–101.
- [87] Иявойнен С.В., Ларичкин А.Ю., Колодезев В.Е. Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учетом различных свойств на растяжение и сжатие // Вестник СамГТУ. — 2018. — Т.22., №3. — С.430–446.
- [88] Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочнённых конструкциях. — М.: Машиностроение, 2005. — 226 с.

- [89] Радченко В. П., Бочкова Т. И., Цветков В. В. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочнённом полупространстве в условиях ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2015. — Т. 19, № 3 (40). — С. 504–522.
- [90] Морозов А. П. Стохастические модели релаксации остаточных напряжений и кинетика микротвердости материала в поверхностно упрочненных элементах конструкций в условиях ползучести: Дис. канд. техн. наук / СамГТУ. Самара, 2017. — 206 с.
- [91] Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В. Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // ПМТФ. — 2016. — Т. 57, № 3 (337). — С. 196–207.
- [92] Raevskaya G.A., Zakharchenko K.V., Larichkin A. Yu. Determination of optimum parameters of the technological process for plates forming from V95 and V-1461 alloys in creep applied in aircrafts constructed by “Sukhoi design bureau” // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. — 2017. — Vol. 894. — P. 012078.
- [93] Астафьев В.И. О диссипативном критерии разрушения при ползучести // ПМТФ. — 1983. — №4. — С. 167–170.
- [94] Соснин О.В., Любашевская И.В., Новоселя И.В. Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // ПМТФ. — 2008. — Т. 49, № 2. — С. 261–266.
- [95] Любашевская И.В., Соснин О.В. Средняя по объему тела мощность рассеяния в оценках ползучести элементов конструкций // Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 1, Математические

модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара, 2009. – С. 147–150.

- [96] Соснин О.В., Любашевская И. В., Новоселя И. В. Обобщенные силы при описании процессов ползучести стержневых элементов конструкций // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 3. – С. 137–146.
- [97] Nelder J. A., Mead R. A simplex for function minimization // Computer Journal. – 1965. – Vol.7 (4). – P. 308–313.
- [98] Городецкий С.Ю., Гришагин В. А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 489 с.
- [99] Бормотин К.С. Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести // Интернет-журнал “Науковедение”. – 2014. – Вып. 1. – С. 1–13.
- [100] Бойко С.В., Ларичкин А.Ю. Моделирование формообразования оребренных панелей // Международной молодежной научной конференции "XLV Гагаринские чтения"(14-17 апреля 2020г., Москва, Россия): сборник трудов секции “Механика и моделирование материалов и технологий” – Москва, 2020. (принята в печать).