

УТВЕРЖДАЮ

Директор  
Федерального государственного  
бюджетного научного учреждения  
«Федеральный исследовательский  
центр «Красноярский научный  
центр Сибирского отделения  
Российской академии наук»  
доктор физико-математических  
наук



  
Н. В. Волков

«30» ноября 2018 г.

### О Т З Ы В

ведущей организации на диссертационную работу Токаревой Маргариты Андреевны «Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В диссертации Токаревой М. А. изучаются вопросы существования и единственности начально-краевых задач о движении жидкости в пористой деформируемой среде. Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02 – механика жидкости, газа и плазмы.

1. Актуальность теоретического исследования задач фильтрации в пористых средах связана с их широким применением в решении важных практических задач. В настоящее время существует множество различных моделей пористых сред. Однако в большинстве из них принимается, что твёрдый пористый скелет неподвижен, т. е. пористость является заданной функцией. Классическим примером таких моделей служит модель фильтрации Маскета – Леверетта. Математическая теория процесса для двухфазного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде построена в работах С. Н. Антонцева, В. Н. Монахова, численные решения – в работе А. Н. Коновалова. Вопросам обоснования начально-краевых задач двухфазной фильтрации в недеформируемой пористой среде также посвящены работы Г. В. Алексева и Н. В. Хуснутдиновой, А. В. Доманоского, С. Н. Кружкова. Особенностью рассматриваемой в данной работе модели фильтрации жидкости в пористой среде является учёт подвижности твёрдого скелета и его пороупругих свойств. Поэтому проблема корректности начально-краевых задач для уравнений модели двухфазной смеси чрезвычайно актуальна – она и является основной для темы диссертации М. А. Токаревой.

2. Содержание работы. Диссертация Токаревой М. А. изложена на 104 страницах и состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 88 наименований.

Во **введении** даётся обзор современного состояния изучаемых проблем, приведены основные моменты построения замкнутой системы уравнений движения вязкой жидкости в пороупругой среде. Среди них диссертант выделил изучаемые им подмодели и определил цель работы: математическое исследование проблемы разрешимости начально-краевых задач для систем уравнений движения вязкой жидкости в пороупругих средах. Кроме того, дана краткая сводка результатов диссертации по главам, обсуждаются научная новизна, теоретическая и практическая значимость и достоверность проведённых исследований.

В **первой главе** рассматривается одномерная задача о неизотермическом движении жидкости в пороупругой среде. В начале каждого пункта главы 1 приводятся основные результаты, см. теоремы 1.1.1–1.4.2, а затем даётся их достаточно подробное доказательство. Для сжимаемой жидкости доказывалось существование и единственность локального решения в гельдеровских классах, а для несжимаемой – существование и единственность глобального классического решения.

Во **второй главе** изучены свойства решений системы уравнений одномерной задачи фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде. В п. 2.1 методом интегральных энергетических оценок установлено свойство конечной скорости распространения возмущений. В п. 2.2 определены свойства метастабильной локализации. Конечное время стабилизации решения получено в п. 2.3.

В **третьей главе** проведено исследование системы уравнений фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругой деформируемой пористой среде. В п. 3.1 доказана глобальная по времени теорема существования и единственности автомодельного решения задачи. В п. 3.2 рассмотрена задача фильтрации в тонком пороупругом слое, построены решения в квадратурах. В п. 3.3 приведён пример моделирования тающего ледового покрова на основе модели движения вязкой жидкости в вязкоупругой пористой среде с учётом фазовых переходов.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

### 3. Научные результаты и их новизна.

В диссертационной работе Токаревой М. А.:

1) доказана локальная по времени однозначная разрешимость в пространствах Гельдера для задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;

2) доказана классическая разрешимость «в целом» для задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;

3) изучены свойства решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде. Установлено свойство конечного времени стабилизации решения, а также свойство конечной скорости распространения возмущений;

4) для начально-краевой задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде: а) доказано существование автомодельного решения (одномерное движение); б) построено решение в квадратурах на основе выделения малого параметра (двумерное движение).

4. Достоверность и обоснованность результатов. Обоснованность и достоверность результатов диссертации основывается на: использовании общих методов решения эволюционных краевых задач; полученных априорных оценках, на основе которых доказана разрешимость начально-краевых задач; построенных локальных энергетических оценках, с помощью которых установлена конечная скорость распространения возмущений и локализация решений задач. Для всех теорем приведены строгие математические доказательства.

5. Значимость для науки и практики выводов и рекомендаций диссертанта. Результаты диссертации имеют теоретическую значимость и представляют интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений. Тем не менее они дают условия на входные данные, при которых рассматриваемая математическая модель корректна, а значит, могут служить обоснованием применения численных методов решения начально-краевых задач для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах.

6. Соответствие автореферата содержанию диссертации. Автореферат диссертации соответствует её содержанию.

7. Подтверждение опубликованных основных результатов диссертации в научной печати. Основные результаты диссертации доложены на всероссийских и международных конференциях и напечатаны в виде полнотекстовых публикаций докладов, опубликованы в 24 печатных изданиях, которые соответствуют теме диссертации и с достаточной полнотой отражают содержание, выводы и заключение диссертации. Двенадцать статей напечатаны в журналах из списка ВАК РФ для представления результатов кандидатской диссертации.

8. Недостатки по содержанию и оформлению диссертации.

1. На с. 13 диссертации автор ошибочно «приписала» себе работы [73-83]. На с. 22 после неравенств (1.1.16) есть неверная ссылка на (1.3.12) (с. 39).

2. В теореме 1.1.1 (и других) наложены очень жёсткие условия на входные данные, но нет ссылок на работы, подтверждающие такое подведение заданных функций для конкретной среды. Если такие жидкие среды есть, то хотелось бы иметь оценки времени существования решения. времени стабилизации решения (с. 72) и т. д. Они реальные?

3. На с. 20 написано: «... если  $V$  – компактное выпуклое замкнутое множество...». Здесь требование замкнутости является излишним.

4. На с. 21 (см. также с. 31, 46) отсутствует описание действия оператора  $\Lambda$  из  $V$  в  $V$ . Будет ли это правая часть (1.1.15)? Всюду, где используется теорема Тихонова – Шаудера, нет упоминания (доказательства) компактности множества  $V$ . Применима ли здесь лемма Арцела?

5. Заметим также, что большая часть материала диссертации написана очень кратко, как статьи в журналах. Приводятся громоздкие выражения, как на с. 26, 27, и объявляется, что они есть ограниченные функции и т. д. без всяких пояснений.

9. Соответствие работы требованиям, предъявляемым к диссертациям.

Замечания из п. 8 не являются существенными. В целом после изучения диссертации и автореферата к ней можно сделать следующие выводы: она является завершённым исследованием, выполненным на высоком научном уровне, все теоретические результаты обоснованы соответствующими доказательствами; степень апробации результатов и их опубликованность достаточны; содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02; автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Считаю, что в диссертации «Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах» новые научные результаты, полученные диссертантом, имеют существенное значение для развития качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также для обоснования моделей фильтрации жидкостей в пороупругих средах, имеющих важные приложения в природных и технологических процессах. Работа удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК России о порядке присуждения учёных степеней, а её автор Маргарита Андреевна Токарева заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен заведующим отделом дифференциальных уравнений механики Института вычислительного моделирования СО РАН д.ф.-м.н., профессором Андреевым Виктором Константиновичем.

Диссертация, автореферат и отзыв на диссертацию обсуждены составом отдела дифференциальных уравнений механики Института вычислительного моделирования СО РАН на семинаре «Математическое моделирование в механике» под руководством д.ф.-м.н., профессора Андреева В. К. 30 ноября 2018 года.

Заведующий отделом  
дифференциальных уравнений  
механики ИВМ СО РАН –  
обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН  
д.ф.-м.н., профессор

В. К. Андреев

30 ноября 2018 г.

Подпись В. К. Андреева удостоверяю:

Учёный секретарь ИВМ СО РАН –  
обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН  
к.ф.-м.н.

А. В. Вяткин

Адрес: 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44, ИВМ СО РАН  
Тел.: (391)290-75-94  
E-mail: andr@icm.krasn.ru