

УТВЕРЖДАЮ

Проректор на научной
и инновационной работе БашГУ
д.х.н., проф. В.П. Захаров



2020 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет» на диссертационную работу Сираевой Дилары Тахировны «Подмодели уравнений гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Актуальность темы диссертационной работы

Квазилинейные дифференциальные уравнения гидродинамического типа возникают в газовой динамике, гидродинамике, многофазных системах механики сплошной среды и других физико-математических науках в качестве асимптотического приближения. Численные методы решения этих уравнений не имеют строгого доказательства сходимости к точному решению. Актуальной задачей является нахождение точных решений в качестве тестов численных расчетов. Некоторые решения уравнений газовой динамики были получены Л.И. Седовым, Г.И. Баренблаттом и др. Симметричные или групповые методы позволяют систематически находить точные решения дифференциальных уравнений.

Обширные исследования уравнений газовой динамики методами группового анализа были начаты в XX в. Овсянниковым Л.В. [Овсянников Л.В. Программа Подмодели. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30-55]. Им и его учениками (С.В. Головин, С.В. Мелешко, Е.В. Мамонтов, С.В. Хабиров, А.А. Черевко, Ю.А. Чиркунов, А.П. Чупахин и др.) были получены следующие результаты: получена классификация системы по уравнению состояния, описаны

оптимальные системы подалгебр, исследованы различные инвариантные, частично инвариантные подмодели. На сегодняшний день данные исследования не потеряли своей актуальности. Диссертационная работа Д.Т. Сираевой реализует часть Программы «Подмодели» для квазилинейных дифференциальных уравнений гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии.

Таким образом, выбранная автором тема исследования является актуальной.

Оценка содержания диссертационной работы

Диссертационная работа Д.Т. Сираевой состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации составляет 136 страниц текста с 13 рисунками и 18 таблицами. Список литературы содержит 106 наименований.

Во **введении** приведены краткий обзор литературы, актуальность темы, цель и задачи исследования, представлены научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, степень достоверности, апробация результатов. Также сформулированы основные положения, выносимые на защиту и перечислены все публикации автора по теме диссертации.

В **первой главе** приводится математическая постановка задачи. Рассматриваются квазилинейные дифференциальные уравнения гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии. Отмечено, что система допускает 12-мерную алгебру Ли. Специфика алгебры заключена в добавлении оператора дифференцирования по давлению. Предложен алгоритм получения подалгебр 12-мерной алгебры Ли. По алгоритму построена оптимальная система неподобных подалгебр 12-мерной алгебры (приводится в приложении). По полученным подалгебрам из оптимальной системы построены три подграфа вложенных подалгебр. Для выделенной цепочки вложенных подалгебр одного подграфа показано вложение решений подмоделей.

Во **второй главе** по подалгебрам 12-мерной алгебры Ли построены инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Для двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 доказана редукция к инвариантным подмоделям. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, по которым построены все инвариантные подмодели ранга 1 и получены

новые точные решения. Инвариантные подмодели ранга 1 приведены в приложении.

Третья глава посвящена изучению инвариантной подмодели ранга 2 эволюционного типа 12-мерной алгебры Ли. Для данной системы вычислены интегралы, преобразования эквивалентности. В случае системы не типа Коши выяснено условие задания начальных данных. Получены два типа точных решений в случае переопределенной системы. Дается описание движения частиц в пространстве в целом. В простейшем случае первый тип решений описывает изобарическое движение вдоль траекторий с неменяющейся величиной движущегося объема из одних и тех же частиц. При этом дозвуковая область движения исчезает со временем. Второй тип решений описывает движение частиц под действием поршня.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Содержание диссертации изложено достаточно четко и ясно.

Достоверность результатов

Система уравнений гидродинамического типа базируется на фундаментальных законах механики сплошных сред и термодинамики. В диссертационной работе Д.Т. Сираевой при исследовании данной системы уравнений используются хорошо себя зарекомендовавшие методы группового анализа дифференциальных уравнений. Также применяются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Система компьютерной математики Maple используется в работе для проверки и визуализации отдельных результатов. Основные положения и выводы диссертации обоснованы.

Научная новизна работы

В диссертационной работе Д.Т. Сираевой впервые применены методы группового анализа к уравнениям гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии. Получены следующие новые результаты:

1. Построена оптимальная система неподобных подалгебр для 12-мерной алгебры Ли, базисные операторы которой содержат оператор дифференцирования по давлению.

2. Построены 39 инвариантных подмоделей ранга 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Полученные подмодели

отличаются от известных подмоделей уравнений газовой динамики тем, что коэффициенты подмоделей содержат функцию плотности; в уравнении для энтропии правая часть не равна нулю.

3. К инвариантной подмодели ранга 2 (квазилинейной системе дифференциальных уравнений гидродинамического типа) применена качественная теория дифференциальных уравнений: найдены интегралы системы, представлен ее симметрический характеристический вид; найдены преобразования эквивалентности системы; поставлены начальные условия в случае системы не типа Коши.

4. Исследованы движения частиц для решений одной переопределенной подмодели ранга 2 (системы дифференциальных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными). В одном случае величина движущегося объема из одних и тех же частиц постоянна, дозвуковая область движения исчезает со временем. В другом случае решение описывает движение частиц без особенностей в полупространстве под действиемдвигающегося поршня.

Научная и практическая ценность работы

Результаты диссертационной работы Д.Т. Сираевой носят теоретический характер, вносят вклад в развитие изучения подмоделей уравнений гидродинамического типа и служат источником получения новых точных решений рассматриваемых уравнений.

В работе не только выполнены элементы группового анализа к изучаемой системе, но также удалось получить новые точные решения. Новые решения позволяют описывать движение частиц в целом, проводить тестирование численных расчетов гидродинамических задач, создавать новые численные схемы расчетов специальных краевых задач.

Апробация результатов и публикации

Содержание диссертационной работы Д.Т. Сираевой достаточно полно отражено в 21 публикации: в 10 статьях, в тезисах 11 докладов, 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ, в том числе переводные версии двух работ входят в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus.

Основные результаты диссертационной работы Д.Т. Сираевой докладывались на международных и всероссийских конференциях.

Замечания и рекомендации

Имеются следующие замечания:

1. На с. 17 необходимо уточнить для чего введен постоянный множитель у базисного оператора 12-мерной алгебры Ли.
2. На с. 74 приведены новые точные решения 4-х инвариантных подмоделей ранга 1, но отсутствует математическое исследование их физических свойств.
3. В приложении В приведены инвариантные подмодели ранга 1, но не проведено исследование этих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Указанные замечания не влияют на **общую положительную оценку диссертации и не снижают ее научной ценности.**

Заключение по диссертационной работе

Диссертационная работа Д.Т. Сираевой «Подмодели уравнений гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии» представляет собой завершенную научно-квалификационную работу, выполненную на высоком научном уровне. В ней получены новые результаты: построена оптимальная система неподобных подалгебр ранее не рассмотренной 12-мерной алгебры Ли; построены в каноническом виде подмодели трех и двух независимых переменных с отличающимися коэффициентами от коэффициентов известных подмоделей 11-мерной алгебры Ли; вычислены инвариантные подмодели ранга 1, получены новые точные решения; получено точное решение одной переопределенной подмодели двух независимых переменных; описано движение частиц в целом; предложен алгоритм построения оптимальной системы подалгебр при добавлении абелевого идеала к алгебре Ли с известной оптимальной системой; предложено правило группового исследования инвариантных подмоделей ранга 2. Перечисленные результаты являются вкладом в развитие группового анализа квазилинейных дифференциальных уравнений.

Диссертационная работа Д.Т. Сираевой соответствует паспорту специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Автореферат верно отображает содержание диссертации.

Диссертационная работа Д.Т. Сираевой удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ №842 от 24.09.2013,

предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Сираева Дилара Тахировна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен д.ф.-м.н. (специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), проф. Калиевым И.А.

Отзыв обсужден и рекомендован к утверждению на заседании кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета от 10 февраля 2020 г., протокол №7.

Заведующий кафедрой
математического анализа СФ БашГУ,
д.ф.-м.н. (спец. 01.01.02 – дифференциальные
уравнения, динамические системы
и оптимальное управление)
проф., чл.-корр. АИГРБ



Сабитов К.Б.

Подпись		заверяю
(должность)	Заместитель ректора по правовому и кадровому обеспечению	
(подпись)		(расшифровка подписи)