

Шадрина Наталья Николаевна

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЯМИ
СОПРЯЖЕНИЯ**

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова»

Научный руководитель:

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»

Официальные оппоненты:

Имомназаров Холматжон Худайназарович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительных задач геофизики Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук»

Попов Сергей Вячеславович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа института математики и информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет»

Защита состоится 2020 г. в часов минут на заседании диссертационного совета Д 003.054.02 при Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д003.054.04
доктор физ.-мат. наук, профессор

Рудой Е.М.

1. Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению задач сопряжения (дифракции) для эллиптических уравнений. Задачи дифракции возникают в ситуациях, когда необходимо рассмотреть определенные процессы, происходящие в двух и более соприкасающихся средах различной структуры. Если данные процессы рассматриваются без учета изменений во времени (так называемые установившиеся процессы), то для моделирования таких задач принято использовать эллиптические уравнения.

Задачи с условиями сопряжения рассматривались для различных классов дифференциальных уравнений еще в начале прошлого века. Основы исследовательской работы с указанными задачами были заложены О.А. Ладыженской, О.А. Олейник, В.А. Ильиным, М. Schechter. Данными авторами изучены классические задачи дифракции для дифференциальных уравнений эллиптического, параболического, гиперболического типов. Полученные ими результаты являются фундаментальными в теории и практике изучения задач дифракции для различных классов дифференциальных уравнений.

Большой интерес вызывают также задачи для уравнений с разрывными коэффициентами. Так, задача Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и первая краевая задача для общего параболического уравнения с разрывными коэффициентами изучены в работах О.А. Олейник. Вопросы о разрешимости задач Дирихле и Неймана для общего линейного самосопряженного эллиптического оператора 2-го порядка с разрывными коэффициентами, гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами рассматриваются в статьях В.А. Ильина. В большинстве случаев получены обобщенные решения рассматриваемых задач в пространстве $W_2^1(Q)$.

В теории уравнений смешанного и смешанно-составного типа также изучались задачи с условиями сопряжения. В работах А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова, Т.Д. Джураева, Е.И. Моисеева и во многих других получены решения некоторых краевых задач с условиями сопряжения для уравнений смешанного типа.

Задачи с условиями сопряжения рассматривались и в теории упругости. В работах А.М.Хлуднева, Т.С.Поповой, Л.Фарелли изучены задачи, связанные с контактным взаимодействием упругих тел.

Задачи дифракции, возникающие при математическом моделировании процессов тепломассообмена в многофазных средах рассматриваются в статьях В.А. Белоногова, А.Р. Манаповой, С.Г. Пяткова и многих других авторов.

Ещё одним источником появления задач с условиями сопряжения (склейки) является теория краевых задач для дифференциальных уравнений с меняющимся направлением эволюции. Большое внимание указанным задачам уделили в своих работах С.А.Терсенов, С.Г.Пятков, С.В. Попов.

В последнее время задачи сопряжения стали изучаться и для неклассических дифференциальных уравнений. Решению таких задач посвящены исследования А.И.Кожанова, Е. Ф. Шарина, С.В. Потаповой, В.В. Шубина. Разрешимость задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка изучена в работах А.И.Кожанова, Е. Ф. Шарина; задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками со знакопостоянной и со знакопеременной функцией при старшей производной описана в работах А.И. Кожанова, С.В. Потаповой; краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции рассматриваются в работе В.В. Шубина.

Решению краевых задач с условиями сопряжения посвящены работы С.Е. Холодовского. В его работах выведены обобщенные граничные условия на многослойных пленках, ограничивающих полупространство и состоящих из чередующихся бесконечно тонких сильно- и слабо проницаемых прослоек. Получены формулы, выражающие в однократных квадратурах решение задачи для уравнения Лапласа в полуплоскости D , ограниченной трехслойной пленкой, через решение классической задачи Дирихле в D без пленки.

Таким образом, построение решений новых классов краевых задач в кусочно-однородных областях является актуальной задачей.

Цель работы:

1) исследование разрешимости краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, изучение зависимости существования и единственности решения от граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред;

2) исследование влияния параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), исследование разрешимости задач сопряжения для оператора Лапласа со спектральным параметром в составной области при задании на поверхности раздела специальных условий сопряжения (склейки);

3) решение различных классов краевых задач в кусочно-однородных полуклиндрах и полупространствах, в том числе содержащих пленочные включения, с использованием метода свертывания разложений Фурье.

Методы исследования.

В данной работе для нахождения решений и доказательства теорем использовались метод спектральных разложений, метод продолжения по параметру, метод априорных оценок, метод свертывания разложений Фурье, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях, семинарах:

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», (Улан-Удэ 2015) [21];
- Международный семинар «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа», (Улан-Удэ 2014, 2015) [20, 22];
- V Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование», (Улан-Удэ 2014) [17];
- VII Международная конференция по математическому моделированию, (г. Якутск 2014) [18];
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений, посвященной 100-летию, 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева» (Новосибирск 2008, 2013) [8, 14];
- Международная научная конференция «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей», посвященной 85-летию со дня рождения А.С. Алексеева (Новосибирск 2013) [15];
- V Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск 2013) [16];
- VIII и IX Всероссийские симпозиумы по прикладной и промышленной математике (Адлер 2007, Кисловодск 2008, 2009) [3, 7, 9];
- VII Всероссийская научно-практическая конференция «Кулагинские чтения» (Чита 2007) [4];
- Межвузовские научные конференции в ЗабГПУ (Чита 2005-2011) [1, 2, 5, 6, 10, 12, 13];
- Семинар Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева «Неклассические дифференциальные уравнения» под руководством профессора А. И. Кожанова;
- Семинар Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета «Обратные задачи» под руководством профессора Ю. Я. Белова;
- Семинар Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева «Избранные вопросы математического анализа» под руководством профессора Г. В. Демиденко;
- Семинар Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН «Математические модели механики сплошных сред» под руководством члена-корреспондента РАН П. И. Плотникова, профессора В.И.Старовойтова.

Публикации.

По материалам диссертации опубликованы 23 работы [1]-[23], из них 9 статей и тезисов [3, 7], [9] - [13], [19, 23] в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Остальные результаты опубликованы в сборниках трудов и тезисов научных конференций, том числе всероссийских и международных. Статья [23] опубликована в издании, включенном в международную базу цитирования Scopus. Работы [1, 10, 11] опубликованы в соавторстве. Соавтору в данных случаях принадлежат постановки задач.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф. – м. н., профессору А.И. Кожанову за содержательные лекции, ответственное руководство и постоянное участие, помощь в постановке задач, а так же д. ф. – м. н., профессору С.Е. Холодовскому за помощь и полезные советы при работе над диссертацией.

2. Краткое содержание работы

Первая часть диссертации посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, доказательству теорем существования и единственности решения, при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред. А также исследуется влияние параметров на единственность и неединственность регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), устанавливается существование собственных чисел и собственных функций для оператора Лапласа при задании на некоторой внутренней поверхности специальных условий сопряжения.

Известно, что классическая задача дифракции соответствует ситуации, в которой то или иное дифференциальное уравнение (возможно, с разрывными коэффициентами) рассматривается в двух областях с общим участком границы, и при этом на общем участке границы задаются условия непрерывности решения и потока (или же условия, обеспечивающие заданный скачок решения и потока) при переходе через поверхность раздела. Учитывая это обстоятельство, обобщенной задачей дифракции (задачей сопряжения), назовем такую задачу, в которой вместо условий непрерывности задаются условия сопряжения (склейки) с произвольными коэффициентами. Несмотря на то, что для уравнения второго порядка задачи дифракции изучаются давно, вопрос о влиянии на разрешимость задачи параметров — например, коэффициентов условий сопряжения — представляется на сегодняшний день изученным не полностью.

Как следует из обзора литературы, задачи сопряжения с теми или иными условиями, отличными от условий непрерывности, ранее изучались и как математические задачи, и как задачи, связанные с математическим моделированием. В настоящей работе задачи сопряжения рассматриваются с мате-

матической точки зрения.

В § 1.1 изучается разрешимость краевой задачи для линейного эллиптического уравнения, доказываются теоремы существования и единственности решения, при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (-1, 1)$, Q^- и Q^+ — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0)$, $Q^+ = \Omega \times (0, 1)$. Далее, пусть $p(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ($i = \overline{1, 4}$) — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, причем функция $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \bar{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \bar{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 есть линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$ (свойства которых будут описаны позже). Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)v_y) + c(x, y)v,$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x, y)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S(S = \Gamma \times (-1, 1))$

$$u(x, y)|_S = 0,$$

на основаниях

$$u(x, -1) = 0, u(x, 1) = 0, x \in \Omega;$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+ :

$$\begin{aligned} \alpha_1(x)u(x, -0) + \alpha_2(x)u(x, +0) + \alpha_3(x)u_y(x, -0) + \alpha_4(x)u_y(x, +0) + \\ + (B_1 u)(x) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1(x)u(x, -0) + \beta_2(x)u(x, +0) + \beta_3(x)u_y(x, -0) + \beta_4(x)u_y(x, +0) + \\ + (B_2 u)(x) = 0. \end{aligned}$$

Вследствие линейной независимости векторов $(\alpha_i(x))$, $(\beta_i(x))$ ($i = \overline{1, 4}$) данную задачу можно переформулировать как три отдельные задачи:

Задача I.

$$\begin{aligned} u_y(x, -0) &= a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u(x, +0) + a_3(x)(B_1u)(x) + a_4(x)(B_2u)(x), \\ u_y(x, +0) &= b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u(x, +0) + b_3(x)(B_1u)(x) + b_4(x)(B_2u)(x), \\ x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Задача II.

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= a_1(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)(B_1u)(x) + a_4(x)(B_2u)(x), \\ u(x, +0) &= b_1(x)u_y(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)(B_1u)(x) + b_4(x)(B_2u)(x), \\ x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Задача III.

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= a_1(x)u(x, +0) + a_2(x)u_y(x, -0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)(B_2u)(x), \\ u_y(x, +0) &= b_1(x)u(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)(B_2u)(x), \\ x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Для каждой из этих задач доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения. Доказательства теорем построены на получении априорных оценок, использовании метода продолжения по параметру, метода регуляризации и теорем вложения.

В § 1.2 исследуется влияние параметров на единственность и неединственность регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции), устанавливается существование собственных чисел и собственных функций для оператора Лапласа при задании на некоторой внутренней поверхности специальных условий сопряжения.

Рассматривается ограниченная область Ω из пространства $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемой границей Γ , x - точка Ω , y есть точка интервала $(a, 1)$, $-\infty < a < 0$, Q есть цилиндр $\Omega \times (a, 1)$, $S = \Gamma \times (a, 1)$ есть боковая граница Q , α, β - есть заданные действительные числа. Обозначим $Q_1 = \Omega \times (a, 0)$, $Q_2 = \Omega \times (0, 1)$.

Задача на собственные значения с условиями сопряжения: найти функцию $u(x, y)$ и число λ такие, что в цилиндрах Q_1 и Q_2 выполняется уравнение

$$\Delta u = \lambda u \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x, y)$ условий

$$u(x, y)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x, a) = u(x, 1) = 0, x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0), u_y(x, +0) = \beta u_y(x, -0), x \in \Omega. \tag{4}$$

В доказанных в ходе исследования теоремах описаны все действительные собственные числа и все отвечающие конкретному собственному числу собственные функции задачи (1) – (4). А также определены условия единственности и неединственности, существования и несуществования решений неоднородной задачи.

Следующая часть работы посвящена решению краевых задач для уравнения Лапласа в полуцилиндрах и полупространствах с классическими и обобщенными условиями сопряжения на трещинах и завесах. Применяемый метод позволяет выражать решения рассматриваемых задач в виде достаточно простых формул непосредственно через решения классических краевых задач в соответствующих полуцилиндрах (без условий сопряжения).

Во второй главе решены краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах D с классическими условиями сопряжения. В §§ 2.1-2.3 данной главы решены краевые задачи с граничными условиями 1-го, 2-го и 3-го рода на основании Q полуцилиндров при произвольных однородных условиях на боковой поверхности, когда плоскость разрыва проницаемости (плоскость сопряжения) параллельна основанию Q . В § 2.4 решены аналогичные краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах, когда плоскость сопряжения перпендикулярна основанию Q полуцилиндров, при этом полуцилиндры симметричны относительно указанной плоскости. В § 2.5 решены краевые задачи в кусочно-однородных полуцилиндрах, состоящих из четырех зон с двумя пересекающимися плоскостями сопряжения, рассмотренными в предыдущих параграфах. Решения всех рассмотренных задач выражены через решения классических задач в соответствующем однородном полуцилиндре с условием Дирихле или Неймана на его основании Q .

В § 2.1 рассмотрен двухслойный полуцилиндр $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$, кусочно-постоянной проницаемости k_i в D_i . В данном полуцилиндре рассмотрены краевые задачи с условием Дирихле (1-го рода) на его основании:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= 0, \quad u_{2|y=0} = f(x), \\ y = -l : \quad u_1 &= u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \\ G[u_i]_{|S} &= 0, \end{aligned}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{m-1} \partial_{x_i}^2 + \partial_y^2$ — оператор Лапласа, $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, $S = (x \in \partial Q) \times (y < 0)$ — боковая поверхность полуцилиндра D , оператор $G[u] = \alpha \partial_n u + \beta u$, $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности S . Так как $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y , то на поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках. При этом функция u_1 при $y \rightarrow -\infty$ удовлетворяет условию, обеспечивающему

единственность соответствующей задачи Дирихле: в R^2 $u_1 = O(1)$ при $y \rightarrow -\infty$, в R^3 $u_1 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. В частном случае $Q = R^{m-1}$ область D является двухслойным полупространством, при этом граничные условия на боковой поверхности отсутствуют.

Решение данной задачи получено в виде

$$u_1(x, y) = (1 - \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n F(x, y - 2nl), \quad y < -l,$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [F(x, y - 2nl) - \nu F(x, -y - 2l(n+1))], \quad -l < y < 0,$$

где постоянная $\nu = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, функция $F(x, y)$ является решением соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на основании при сохранении граничной функции $f(x)$:

$$\Delta F = 0, \quad F|_{y=0} = f(x),$$

$$G[F]|_S = 0.$$

В § 2.2 рассмотрен класс краевых задач с граничным условием второго рода на основании двухслойного полуцилиндра $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$:

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_2|_{y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2,$$

$$G[u_i]|_S = 0,$$

где k_i - проницаемость зоны D_i , оператор G определен в § 2.1, S - боковая поверхность полуцилиндра D . Решение получено в виде:

$$u_1(x, y) = (1 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n F(x, y - 2nl),$$

$$u_2(x, y) = F(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n [F(x, y - 2nl) + F(x, -y - 2nl)],$$

где $\mu = (k_2 - k_1)/(k_1 + k_2)$, ($|\mu| < 1$), функция $F(x, y)$ является решением соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с граничной функцией $f(x)$:

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F|_{y=0} = f(x),$$

$$G[F]|_S = 0.$$

В § 2.3 в двухслойном полуцилиндре $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ рассмотрен класс краевых задач вида:

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= 0, \quad \partial_y u_2 + \gamma u_2|_{y=0} = f(x), \\ y = -l : \quad u_1 &= u_2, \quad k_1 \partial_y u_1 = k_2 \partial_y u_2, \\ G[u_i]|_S &= 0,\end{aligned}$$

где $\gamma > 0$ - постоянная, оператор G определен в § 2.1, S - боковая поверхность полуцилиндра D .

Решение получено в виде

$$\begin{aligned}u_1 &= (1 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{p=0}^n C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p F(x, y - 2nl - z) dz, \\ u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{p=0}^n C_n^p \frac{(-2\gamma)^p}{p!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^p [F(x, y - 2nl - z) + \\ &\quad + \mu F(x, -y - 2l(n+1) - z)] dz,\end{aligned}$$

где постоянная $\mu = (k_2 - k_1)/(k_1 + k_2)$, C_n^p — биномиальные коэффициенты, функция $F(x, y)$ является решением краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с условием Дирихле на его основании при сохранении граничной функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta F &= 0, \quad F|_{y=0} = f(x), \\ G[F]|_S &= 0.\end{aligned}$$

.

В § 2.4 рассмотрен в пространстве $\mathbb{R}^m$ кусочно-однородный полуцилиндр $D = D^- \cup D^+$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$, $D^- = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, y < 0\}$, $D^+ = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), y < 0\}$, где $r(\xi) \geq 0$ — заданная непрерывная функция. В данном случае полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$ разрыва проницаемости, при этом уравнение боковой поверхности $S^\pm$ полуцилиндра D имеет вид $x = \pm r(\xi)$. Рассмотрим в данном полуцилиндре $D = D^- \cup D^+$ класс краевых задач

$$\begin{aligned}\Delta \varphi^\pm &= 0, \quad G[\varphi^\pm]|_{x=\pm r(\xi)} = 0, \\ G_0[\varphi^-]|_{y=0} &= 0, \quad G_0[\varphi^+]|_{y=0} = f(x, \xi), \\ x = 0 : \quad \varphi^- &= \varphi^+, \quad k^- \partial_x \varphi^- = k^+ \partial_x \varphi^+,\end{aligned}$$

где $G[\varphi^\pm] = \varphi^\pm$, $G[\varphi^\pm] = \partial_{n^\pm} \varphi^\pm$ или $G[\varphi^\pm] = \partial_{n^\pm} \varphi^\pm + \gamma_1 \varphi^\pm$, $\gamma_1 = \text{const} > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на боковой

поверхности S полуцилиндра D . Аналогично $G_0[\varphi^\pm] = \varphi^\pm$, $G_0[\varphi^\pm] = \partial_y \varphi^\pm$ или $G_0[\varphi^\pm] = \partial_y \varphi^\pm + \gamma \varphi^\pm$, $\gamma = \text{const} > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на основании $y = 0$ полуцилиндра D . Уравнение Лапласа выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, \dots, \xi_{m-2}$. Решение данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi^- &= \frac{2k^+}{k^- + k^+} F(x, y), \quad x < 0, \\ \varphi^+ &= F(x, y) + \frac{k^+ - k^-}{k^+ + k^-} F(-x, y), \quad x > 0,\end{aligned}$$

где $F(x, y)$ — решение задачи Дирихле в однородной полуплоскости с сохранением граничной функции:

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad F|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ f(x), & x > 0. \end{cases}$$

В § 2.5 рассмотрен полуцилиндр D предыдущего пункта, состоящий из четырех зон: $D = D_1^- \cup D_2^- \cup D_1^+ \cup D_2^+$, разделенных плоскостями $x = 0$ и $y = -l$ на зоны $D_i^\pm$ проницаемости k_i в D_i^+ и $k_i p$ в D_i^- , где постоянная $p > 0$, $D_1^- = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, y < -l\}$, $D_1^+ = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), y < -l\}$, $D_2^- = \{(x, y, \xi) : -r(\xi) < x < 0, -l < y < 0\}$, $D_2^+ = \{(x, y, \xi) : 0 < x < r(\xi), -l < y < 0\}$ (полуцилиндр D симметричен относительно плоскости $x = 0$).

Для потенциалов $\varphi_i^\pm$ в $D_i^\pm$ рассмотрены задачи в полуцилиндре D с граничным условием 1-го, 2-го или 3-го рода при $y = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_i^\pm &= 0, \quad G[\varphi_i^\pm]|_{x=\pm r(\xi)} = 0, \\ y = -l : \quad \varphi_1^\pm &= \varphi_2^\pm, \quad k_1 \partial_y \varphi_1^\pm = k_2 \partial_y \varphi_2^\pm, \\ x = 0 : \quad \varphi_i^- &= \varphi_i^+, \quad p \partial_x \varphi_i^- = \partial_x \varphi_i^+, \end{aligned}$$

с одним из граничных условий на основании полуцилиндра D :

$$\varphi_{2|y=0}^- = 0, \quad \varphi_{2|y=0}^+ = f(x, \xi),$$

или

$$\partial_y \varphi_{2|y=0}^- = 0, \quad \partial_y \varphi_{2|y=0}^+ = f(x, \xi),$$

или

$$\partial_y \varphi_2^- + \gamma \varphi_{2|y=0}^- = 0, \quad \partial_y \varphi_2^+ + \gamma \varphi_{2|y=0}^+ = f(x, \xi).$$

Решения данных задач получены в виде композиции операторов

$$\varphi_i^- = \frac{2}{1+p} u_i(x, y, \xi), \quad \varphi_i^+ = u_i(x, y, \xi) + \frac{1-p}{1+p} u_i(-x, y, \xi),$$

где функции $u_i(x, y, \xi)$, в зависимости от граничных условий на основании полуцилиндра, строятся по соответствующим итоговым формулам предыдущих параграфов.

Третья глава посвящена решению задач в полуцилиндрах с сильно и слабо-проницаемыми пленочными включениями, параллельными основанию. Сильно проницаемые пленки названы трещинами, а слабо проницаемые пленки - завесами, при этом трещины моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой проницаемостью, завесы - бесконечно тонкими слоями с бесконечно малой проницаемостью.

В § 3.1 приведен вывод обобщенных условий сопряжения на трещинах и завесах.

В § 3.2 рассмотрен однородный полуцилиндр $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ с сильно проницаемой трещиной $y = -l$, разделяющей область D на две зоны $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$. В полуцилиндре D рассмотрена задача

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= 0, \quad u_{2|y=0} = f(x), \\ y = -l : \quad u_2 &= u_1, \quad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A \partial_y^2 u_1, \\ G[u_i]_{|S} &= 0,\end{aligned}$$

где $A > 0$ — параметр трещины, S — боковая поверхность полуцилиндра D , оператор $G[u] = \alpha \partial_n u + \beta u$, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S , u_i — искомые потенциалы в D_i . На поверхности S могут быть заданы однородные граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода на различных участках, так как $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ — в общем случае функции, не зависящие от y . В данном случае проницаемость зон D_i одинаковая, т. е. $k_1 = k_2 = 1$.

Решение данной задачи получено в виде

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) dz, \\ u_2 &= F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) \\ &\quad - F(x, -y - 2nl - z)] dz,\end{aligned}$$

где $\gamma = 2/A > 0$, $F(x, y)$ — решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без трещины:

$$\begin{aligned}\Delta F &= 0 \quad F|_{y=0} = f(x), \\ G[F]_{|S} &= 0.\end{aligned}$$

В § 3.3 решена задача в полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ со слабопроницаемой завесой $y = -l$, разделяющей область

D на две зоны $D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$ с условиями Дирихле на основании вида:

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= 0, \quad u_{2|y=0} = f(x), \\ y = -l : \quad u_2 - u_1 &= B \partial_y u_1, \quad \partial_y u_2 = \partial_y u_1, \\ G[u_i]_{|S} &= 0.\end{aligned}$$

где B - параметр завесы, характеризующий ее малую толщину ($l \rightarrow 0$) и малую проницаемость ($k_0 \rightarrow 0$), при этом $B = \lim_{k_0 \rightarrow 0, l \rightarrow 0} k_0/l$.

Решение данной задачи получено в виде:

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^n \partial_y^n F(x, y - 2nl - z) dz, \\ u_2 &= F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} z^{n-1} \partial_y^n [F(x, y - 2nl - z) - \\ &\quad - F(x, -y - 2nl - z)] dz,\end{aligned}$$

где $\gamma = 2/B > 0$, $F(x, y)$ - решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без завесы:

$$\begin{aligned}\Delta F &= 0, \quad F|_{y=0} = f(x), \\ G[F]_{|S} &= 0.\end{aligned}$$

В § 3.4 в полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$, где зоны D_i ($D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$) разделены трещиной $y = -l$, с условиями Неймана на основании, рассмотрена задача вида

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= 0, \quad \partial_y u_{2|y=0} = f(x), \\ y = -l : \quad u_2 &= u_1, \quad \partial_y u_2 - \partial_y u_1 = A \partial_y^2 u_1, \\ G[u_i]_{|S} &= 0,\end{aligned}$$

где $A > 0$ - параметр трещины, S - боковая поверхность полуцилиндра D , оператор $G[u]$ определен в § 3.3.

Решение получено в виде:

$$\begin{aligned}u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^n C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl), \\ u_2 &= F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k [\Phi_k(x, y - 2nl) + \Phi_k(x, -y - 2nl)],\end{aligned}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x, y) = F(x, y)$,

$$\Phi_k(x, y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y-z) dz \quad k = 1, 2, \dots, y < 0,$$

$F(x, y)$ — решение соответствующей краевой задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$ без трещины

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F|_{y=0} = f(x),$$

$$G[F]|_S = 0.$$

В § 3.5 рассмотрена задача в полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$, где зоны D_i ($D_1 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < -l\}$, $D_2 = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, -l < y < 0\}$) разделены слабо проницаемой завесой $y = -l$ с параметром B . Для потенциалов u_i в D_i решена задача

$$\Delta u_i = 0, \quad \partial_y u_2|_{y=0} = f(x),$$

$$y = -l : \quad u_2 - u_1 = B \partial_y u_1, \quad \partial_y u_2 = \partial_y u_1,$$

$$G[u_i]|_S = 0.$$

Решение задачи имеет вид:

$$u_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \Phi_{k+1}(x, y - 2nl),$$

$$u_2 = F(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k [\Phi_k(x, y - 2nl) + \Phi_k(x, -y - 2nl)],$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, $\Phi_0(x, y) = F(x, y)$,

$$\Phi_k(x, y) = \frac{(-\gamma)^k}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^{k-1} F(x, y-z) dz \quad k = 1, 2, \dots, y < 0,$$

$F(x, y)$ — решение аналогичной задачи в однородном полуцилиндре $D = \{(x, y) : x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in Q \subseteq R^{m-1}, y < 0\}$:

$$\Delta F = 0, \quad \partial_y F|_{y=0} = f(x),$$

$$G[F]|_S = 0.$$

В четвертой главе решены краевые задачи в кусочно-однородном пространстве (частный случай полуцилиндра) с трещиной (§ 4.1) и завесой (§ 4.2) перпендикулярной границе полупространства, когда на границе заданы

условия 1-го, 2-го или 3-го рода. В § 4.3 решены краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве с произвольной комбинацией двух пересекающихся трещин и завес, рассмотренных в § 4.1, § 4.2, при этом решения имеют вид композиции соответствующих операторов, полученных в §§ 3.2-3.5 и § 4.1, § 4.2.

В § 4.1 рассмотрена в полупространстве $D = \{(x, y, \xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ трещина в виде плоскости $x = 0$, разделяющей D на две зоны $D^- \{(x, y, \xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ и $D^+ \{(x, y, \xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. На границе D (при $y = 0$) заданы произвольные граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$, что не умаляет общности. Для потенциалов $\varphi^\pm(x, y, \xi)$ в $D^\pm$ рассмотрен класс краевых задач вида

$$\begin{aligned}\Delta\varphi^\pm &= 0, \\ G[\varphi^-]_{|y=0} &= 0, \quad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x, \xi), \\ x = 0 : \quad \varphi^+ &= \varphi^-, \quad k^+ \partial_x \varphi^+ - k^- \partial_x \varphi^- = A \partial_x^2 \varphi^-, \end{aligned}$$

где A — параметр трещины, оператор $G[\varphi^\pm] = \varphi^\pm$, $G[\varphi^\pm] = \partial_y \varphi^\pm$ или $G[\varphi^\pm] = \partial_y \varphi^\pm + h \varphi^\pm$, $h = \text{const} > 0$ соответственно в случае граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода, уравнение Лапласа выполняется по всем переменным $x, y, \xi_1, \dots, \xi_{m-2}$. Решение имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi^- &= \frac{2k^+}{A} \int_0^\infty e^{-\beta t} F(x-t, y, \xi) dt, \quad x \leq 0, \\ \varphi^+ &= F(x, y, \xi) - F(-x, y, \xi) + \frac{2k^+}{A} \int_0^\infty e^{-\beta t} F(-x-t, y, \xi) dt, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

где $\beta = (k^+ + k^-)/A$, $r < \beta$, $F(x, y, \xi)$ — решение соответствующей задачи в однородном полупространстве (без трещины и при $k^+ = k^-$):

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ f(x, \xi), & x > 0. \end{cases}$$

В § 4.2 рассмотрена в полупространстве $D = \{(x, y, \xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ завеса $x = 0$, разделяющая D на зоны $D^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ и $D^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$. На границе ∂D , как и выше, заданы граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода, однородные при $x < 0$. Для потенциалов $\varphi^\pm(x, y, \xi)$ в $D^\pm$ решены краевые задачи вида

$$\Delta\varphi^\pm = 0,$$

$$G[\varphi^-]_{|y=0} = 0, \quad G[\varphi^+]_{|y=0} = f(x, \xi),$$

$$x = 0 : \quad \varphi^+ - \varphi^- = Bk^- \partial_x \varphi^-, \quad k^+ \partial_x \varphi^+ = k^- \partial_x \varphi^-,$$

где B — параметр завесы, оператор G определен в § 4.1.

Решение получено в виде:

$$\varphi^- = \frac{2}{Bk^-} \int_0^\infty e^{-\beta t} F(x-t, y, \xi) dt, \quad x \leq 0,$$

$$\varphi^+ = F(x, y, \xi) + F(-x, y, \xi) - \frac{2}{Bk^+} \int_0^\infty e^{-\beta t} F(-x-t, y, \xi) dt, \quad x \geq 0,$$

где $\beta = (k^+ + k^-)/(Bk^-k^+)$, $r < \beta$, где $F(x, y, \xi)$ — решение соответствующей задачи в однородном полупространстве:

$$\Delta F = 0, \quad y < 0; \quad G[F]_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ f(x, \xi), & x > 0. \end{cases}$$

В § 4.3 решены краевые задачи в однородном полупространстве $D = \{(x, y, \xi) : x \in R, y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, состоящем из четырех зон: $D = D_1^- \cup D_2^- \cup D_1^+ \cup D_2^+$, где $D_1^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, y < -l, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_1^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, y < -l, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_2^- = \{(x, y, \xi) : x < 0, -l < y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$, $D_2^+ = \{(x, y, \xi) : x > 0, -l < y < 0, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-2}) \in Q \subseteq R^{m-2}\}$ разделенных пересекающимися трещинами $x = 0$ и $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и A_2 . На внешней границе D имеет место граничное условие 1-го рода, однородное при $x < 0$. Для потенциалов $\varphi_i^\pm(x, y, \xi)$ в $D_i^\pm$ задача примет вид

$$\Delta \varphi_i^\pm = 0, \quad \varphi_{2|y=0}^- = 0, \quad \varphi_{2|y=0}^+ = f(x, \xi),$$

$$x = 0 : \quad \varphi_i^+ = \varphi_i^-, \quad \partial_x \varphi_i^+ - \partial_x \varphi_i^- = A_1 \partial_x^2 \varphi_i^-,$$

$$y = -l : \quad \varphi_2^\pm = \varphi_1^\pm, \quad \partial_y \varphi_2^\pm - \partial_y \varphi_1^\pm = A_2 \partial_y^\pm \varphi_1^\pm.$$

Если зоны $D_i^\pm$ разделены трещиной $x = 0$ и завесой $y = -l$ с параметрами соответственно A_1 и B_2 , то условия сопряжения заменяются условиями вида

$$y = -l : \quad \varphi_2^\pm - \varphi_1^\pm = B_2 \partial_y \varphi_2^\pm, \quad \partial_y \varphi_2^\pm = \partial_y \varphi_1^\pm.$$

Если зоны $D_i^\pm$ разделены завесой $x = 0$ и трещиной $y = -l$ с параметрами соответственно B_1 и A_2 , то условия сопряжения заменяются условиями вида

$$x = 0 : \quad \varphi_i^+ - \varphi_i^- = B_1 \partial_x \varphi_i^-, \quad \partial_x \varphi_i^+ = \partial_x \varphi_i^-.$$

Решение всех вышеперечисленных задач получено в виде композиции соответствующих операторов, полученных в главе 3.

Решения всех рассмотренных во второй, третьей и четвертой главах данной работы задач в кусочно-однородных полуцилиндрах D с трещинами и завесами при граничных условиях 1-го, 2-го или 3-го рода на основании Q выражены через решения классических краевых задач в соответствующих однородных полуцилиндрах Q с условиями Дирихле или Неймана на Q (на плоскости x, y область Q является полосой, квадрантом или полуплоскостью). Другими словами, решив некоторую классическую краевую задачу в однородном полуцилиндре D с условием Дирихле или Неймана на основании Q , по найденным формулам автоматически получаем решения серии краевых задач в кусочно-однородных полуцилиндрах D с комбинациями трещин и завес и при различных комбинациях граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода на Q . С другой стороны, каждая полученная формула также дает решения серии краевых задач для произвольных полуцилиндров с соответствующими условиями сопряжения на поверхностях разрыва проницаемости, на трещинах и завесах.

В "Заключении" перечислены основные результаты данной работы.

Основные результаты работы опубликованы в 23 статьях. Работы, выделенные жирным шрифтом, опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Список литературы

1. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в неоднородной полуплоскости / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГПУ. Чита. — 2007. — Вып. 7. — С. 58 - 62.
2. Шадрина, Н.Н. Об эффективном решении третьей краевой задачи в кусочно-однородной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГПУ. Чита. — 2007. — Вып. 7. — С. 62 - 65.
3. **Шадрина, Н.Н. О решении задачи Дирихле в неоднородной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14. — Вып. 4. М. — С. 764 - 765.**
4. Шадрина, Н.Н. Об эффективном решении первой краевой задачи в неоднородной полосе / Н.Н. Шадрина // VII Всероссийская научно-практическая конференция «Кулагинские чтения». Чита, ЧГУ. — 2007. — Ч. 1. — С. 148 - 150.
5. Шадрина, Н.Н. Решении третьей краевой задачи в двухслойной анизотропной полуплоскости / Н.Н. Шадрина // Математический анализ и его приложения. Заб.ГГПУ. Чита, —2008. — Вып. 8. — С. 60 - 64.
6. Шадрина, Н.Н. О решении смешанных краевых задач типа (II, III) в двухслойной анизотропной полосе // Математический анализ и его приложения. Заб.ГГПУ. Чита, —2008. — Вып. 8. — С. 64 - 71.
7. **Шадрина, Н.Н. О решении граничных задач в кусочно-неоднородной полуплоскости с линией сопряжения, пересекающей границу / Н.Н. Шадрина // Обзорение прикладной и про-**

- мышленной математики. — 2008. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 537 - 538.
8. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородной анизотропной полосе / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск, —2008. — С. 233.
 9. Шадрина, Н.Н. О математической модели линейных динамических процессов в неоднородных анизотропных средах / Н.Н. Шадрина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16. — Вып. 3. М. — С. 571 - 572.
 10. Шадрина, Н.Н. Решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе с трещиной (завесой) / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического ун-та. Серия Физика, математика, техника, технология. Чита. — 2010. — № 2(31). — С. 141 - 144.
 11. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения типа трещины (завесы) / С.Е. Холодовский, Н.Н. Шадрина // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 6. — С. 100 - 106.
 12. Шадрина, Н.Н. О решении задачи Неймана в полуплоскости с трещиной (завесой) // Ученые записки ЗабГГПУ. Серия "Физика, математика, техника, технология" Чита. — 2011.— № 3(38). — С. 217 - 220.
 13. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородной полуплоскости с трещиной (завесой) / Н.Н. Шадрина // Ученые записки ЗабГГПУ. Серия "Физика, математика, техника, технология Чита. — № 3(44). — 2012. — С. 157 - 160.
 14. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородном полупространстве, содержащем трещину, перпендикулярную границе / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск. — 2013. — С. 294.
 15. Шадрина, Н.Н. О решении краевых задач в кусочно-однородном полупространстве, содержащем завесу, перпендикулярную границе / Н.Н. Шадрина //Международная научная конференция «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей» посвященная 85-летию со дня рождения А.С. Алексеева. Новосибирск. — 2013. — С. 98.
 16. Шадрина, Н.Н. О разрешимости задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Пятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск. — 2013. — С. 101.
 17. Шадрина, Н.Н. Существование решения некоторой задачи сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // V международная конференция “Математика, ее приложения и математическое образование”, Улан-Удэ. — 2014. — С. 345.

18. Шадрина, Н.Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // VII Международная конференция по математическому моделированию, Якутск. — 2014. — С. 82 - 83.
19. **Шадрина, Н.Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21. — № 1(81). — С. 75 - 89.**
20. Шадрина, Н.Н. Единственность решения некоторой задачи сопряжения для уравнения эллиптического типа / Н.Н. Шадрина // Международный семинар "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа Улан-Удэ. — 2014. — С. 149 - 152.
21. Шадрина, Н.Н. Единственность и неединственность решений, собственные значения и собственные функции некоторых задач сопряжения для эллиптических операторов / Н.Н. Шадрина // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование Улан-Удэ, —2015. — С. 322 - 323.
22. Шадрина, Н.Н. Краевые задачи в кусочно-однородном полупространстве, разделенном сильнопроницаемой пленкой / Н.Н. Шадрина // Международный семинар "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа г. Улан-Удэ. — 2015. — С. 143 - 146.
23. **Шадрина, Н.Н. О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений / Н.Н. Шадрина // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2016. — Т. 13. — С. 411 - 425.**