ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

НЕУСТРОЕВА ЛЮБОВЬ ВЛАДИМИРОВНА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертационная работа

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Пятков С.Г.

Ханты-Мансийск — 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть E – банахово пространство и G – область в $\mathbb{R}^n$. Через $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначим пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E и конечной нормой $\big\|\|u(x)\|_E\big\|_{L_p(G)}$ [1]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G};E)$, состоящие из функций со значениями в E, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Определение пространств Соболева $W_p^s(G;E)$ также стандартное ([1],[2],[3]). Для данного интервала $J=(0,T)$ и цилиндра $Q=G\times J$ положим

$$W_p^{s,r}(Q)=W_p^s\big(J;L_p(G)\big)\cap L_p\big(J;W_p^r(G)\big),$$

соответственно

$$W_p^{s,r}(S)=W_p^s\big(J;L_p(\Gamma)\big)\cap L_p\big(J;W_p^r(\Gamma)\big).$$

Кроме анизотропных пространств Соболева мы также используем и анизотропные пространства Гельдера $C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q})$, $C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{S})$ (см. определения в [4]).

Если Γ,S некоторые множества, то символ $\rho(\Gamma,S)$ обозначает далее расстояние между этими множествами, а символ $diam\,S=sup_{x,y\in S}|x-y|$ – диаметр множества S. Через $D(L)$ обозначим область определения оператора L. Символ $B_r(x_0)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x_0.

Через $L(X,Y)$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов определенных на пространстве X со значениями в пространстве Y. Символы $\sigma(L),\rho(L),D(L)$ обозначают спектр, резольвентное множество и область определения оператора L.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи.

Данная работа посвящена исследованию обратных задач об определении точечных источников в математических моделях тепломассопереноса с использованием точечных условий переопределения. Основное внимание уделено моделям основанным на параболических уравнениях второго порядка, возникающим при описании процессов конвенции-диффузии, фильтрации, тепло- и массопереноса и в самых разных других областях. Большое количество приложений таких уравнений и необходимая библиография имеются, например, в работе [5].

Результаты основаны на асимптотических представлениях функции Грина эллиптических краевых задач с параметром, полученным в диссертационной работе. Соответствующее эллиптическое уравнение имеет вид

$$L = L_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ n = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $L_0 u = -\Delta u + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u$ в случае $n = 2, 3$ и $L_0 u = -a(x) u_{xx} + b(x) u_x + c(x) u$ в случае $n = 1$. Краевые условия записываются в виде

$$Bu|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial G,\ n = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u$, ν – единичная внешняя нормаль к Γ и δ — дельта-функция Дирака. Область G совпадает с $\mathbb{R}^n$, полупространством $\mathbb{R}^n_+$, или областью в $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ с компактной границей $\Gamma \in C^2$. Предполагается, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|arg\,\lambda| \le \pi - \delta_0$, $\delta_0 \in (0, \pi)$. Полученные асимптотические представления решений близки к стандартным для уравнения Гельмгольца. Эти асимптотические представления затем используются при исследования вопросов существования и единственности решений обратных задач об определении точечным источников по точечным данным переопределения. Основные результаты работы связаны вопросом об определении вместе с решением правой части специального вида в уравнении

$$u_t + L_0 u = \sum_{i=1}^m N_i(t) \delta(x - x_i) + f_0(t, x) = F(t, x), \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = (0,T) \times G$, область G при $n = 2,3$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, полупространством $\mathbb{R}^n_+$, или областью в $\mathbb{R}^n$ с компактной границей $\Gamma \in C^2$. В случае $n = 1$ $G = (a,b)$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. Уравнение (3) дополняется краевыми и начальными условиями

$$Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = (0,T) \times \Gamma, \tag{4}$$

где либо $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$, либо $Bu = u$ (ν единичная внешняя нормаль к Γ). Заданы также условия переопределения

$$u(y_j,t) = \psi_j(t), \ j = 1,2,\ldots,s. \tag{5}$$

В самой общей постановке задача состоит в нахождении решения u уравнения (3), неизвестных точек $\{x_i\}$, числа m, и функций $\{N_i(t)\}$ по начально-краевыми условиями (4) и условиями переопределения (5). Отметим, что стандартные подходы к численному решению таких задач часто приводят к неверным результатам, поскольку очень часто в приведенных постановках нет единственности решений и сама задача является некорректной по Адамару. В нашей работе в случае известного местоположения точек замеров $\{y_i\}$ мы приведем теоремы существования и единственности решений обратных задач (3)-(5), где находим минимальные условия гладкости на данные, гарантирующие, что решение этой обратной задачи принадлежит некоторому пространству Соболева. В случае самой общей постановки, но в модельной ситуации (в случае $\mathbb{R}^n$) мы опишем условия единственности решений и приведем примеры неединственности. Кроме того, в некоторых простейших ситуациях мы опишем и некоторые алгоритмы определения точек источников. В случае $n = 1$ в работе получены асимптотические формулы, которые могут быть использованы при нахождении координат неизвестных источников $\{x_i\}$. Кроме того, в работе мы описываем и некоторые качественные свойства решений.

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Задачи (1), (2) об асимптотике решений являются классическими. Подобные задачи возникают, например, при построении асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для соответствующего гиперболического уравнения [6–8], в задачах рассеивания, при построении коротковолновой асимптотики в задачах диффракции (см. [8], [9]) и других областях. В связи с этими задачами основное внимание уделялось случаю $\lambda = -k^2$, $k \in \mathbb{R}$ или случаю $|Re\, k| \to \infty$. Например, в работе [10] рассмотрена задача о построении асимптотического представления при $k \to +\infty$ для решения задачи

$$-\Delta u - k^2 n(x) u = \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

удовлетворяющего принципу предельного поглощения, а в работе [11] рассмотрен вопрос о построении асимптотического представления при $k \to +\infty$ решения задачи рассеивания

$$-\Delta u - k^2 n(x) u = \delta(x - x_0),\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = 0,\ \sqrt{r}(\frac{\partial u}{\partial r} - iku) \to 0,\ r \to \infty.$$

Можно сослаться также на работы [12, 13] и многих других авторов. В работах Вайнберга Б.П. [14]-[15] и ряда других авторов показано, что решение достаточно широкого класса задач вида (1), (2) является мероморфной функцией параметра k в области с разрезом $arg\, k = -\pi/2$ при четном n и мероморфной функцией k на всей плоскости при n нечетном и получен ряд асимптотических представлений резольвенты. В частности, им рассмотрены аналитические свойства решений задачи (1) для произвольных эллиптических операторов второго порядка с переменными коэффициентами [15] и для некоторых классов операторов высокого порядка. В асимптотических представлениях основное внимание было также уделено случаю $k \to +\infty$. В работе [16] также рассмотрено общее эллиптическое уравнение второго порядка вида (1), к которому были добавлены дополнительные слагаемые вида $k^2 d(x) u + ib(x) k u$ ($|d(x)| < 1$) и построено асимптотическое представление решений в области $Im\, k \geq \alpha$ при $|Re\, k| \to \infty$. Исключением является работа [8] (§2, гл.1), где рассмотрена задача об асимптотическом представлении решения задачи (2.7) при $|k| \to \infty$ уже в области $0 < arg\, k < \pi$. В этой работе построено формальное асимптотическое решение уравнения (1) в окрестности начала координат. Случай краевой задачи не рассмотрен. В качестве приложений рассматриваются гиперболические задачи. Имеется значительное количество недавних обобщений этих результатов, возникающих в при описании распространения электромагнитных волн, в теории упругости и т.д. Мы можем сослаться на монографии [9, 17], где также можно найти ряд результатов и библиографию. Отметим, что практически во всех вышеупомянутых работах считалось что все коэффициенты соответствующих уравнений бесконечно дифференцируемы. В наших результатах в отличие от вышеприведенных построены асимптотические представления решений в областях вида $k = i\lambda$, $|\arg\lambda| \le \pi - \delta_0$, $\delta_0 > 0$, которые возникают при построении решений параболических уравнений и систем после применения преобразования Лапласа. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) имеют некоторою естественную фиксированную гладкость. Кроме того, наши результаты имеют немного другой характер, вместо асимптотических рядов, сходимость которых вообще говоря полностью не исследуется, рассматривается некоторые асимптотические представления главного члена разложения решения с оценкой остатка.

Обратные задачи возникают при исследовании многих прикладных задач и имеют постоянно расширяющиеся области приложения, среди которых можно выделить задачи сейсморазведки (например, определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых), определения свойств материалов (механических, теплофизических), идентификации полимерных и композитных материалов, задачи рентгеновской и акустической томографии и ряд других задач. В настоящее время существует множество различных постановок обратных задач и некоторые классы обратных задач хорошо изучены, имеются теоремы единственности, разрешимости или, по крайней мере, оценки устойчивости. Выделим основные направления исследований. Среди работ, посвящённых параболическим уравнениям и системам можно выделить классические работы Лаврентьева М.М., Прилепко А.И., Орловского Д.Г., Денисова А.М., Камынина В.Л., Исакова В., Кабанихина С.И., M. Yamomoto, Кожанова А.И., Lorenzi A., Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. и многих других авторов. Можно сослаться на известные монографии [18–22], где можно найти библиографию и необходимые ссылки. Имеется большое количество работ, посвященных различным обобщениям, в том числе обратным задачам для абстрактных эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Можно сослаться на работы Орловского Д.Г., Фавини А., Горбачук М.Л., Бухгейма А.Л., Федорова В.Е. и других (см. [23], [24], [25], [26], [27]). Основные классы исследуемых задач отличаются по виду условий переопределения: интегральные условия с данными зависящими от времени и (или) пространственных переменных, условие финального переопределения (в этом случае решение задаётся в финальный момент времени), оператор Дирихле-Неймана или Неймана-Дирихле, эволюционные данные переопределения (в этом случае данные зависят от времени, как правило решение или его производные задаются на некоторых пространственных многообразиях или в отдельных точках). Как раз к этому классу задач относятся рассматриваемые в диссертации задачи. Стоит отметить большое количество работ Новосибирской школы по обратным задачам (это в основном работы, посвящённые гиперболическим уравнениям и системам): Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Яхно В., Аниконов Ю.Е., Бухгейм А.Л., Кабанихин С.И., а также работы Белишева М.И., Клибанова М.И., Uhlman G., Пестова Л.Н. Отметим ряд недавних монографий, где можно найти постановки и подробную библиографию: [28], [29], [20]. Среди последних монографий, посвящённых численным методам решения обратных задач, можно выделить, например, монографии [30], [31], [32]. Сошлемся также на монографии [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], где имеется значительное количество постановок обратных задач и ряд результатов, связанных в основном с численным решением обратных задач.

Обратным задачам с финальным переопределением посвящены, в частности, работы Прилепко А.И., Орловского Д.Г., Васина И.А., Гольдман Н.А., Камынина В.Л. и ряда других авторов. Подобные задачи были рассмотрены и для некоторых систем уравнений, включая систему уравнений Навье-Стокса. Большое количество результатов и библиография могут быть найдены в известной монографии [18]. Второй класс задач, возникающих прежде всего в геофизике – это задачи восстановления параметров среды (коэффициентов уравнения) по данным Коши на боковой поверхности цилиндра или по оператору Неймана-Дирихле (Дирихле-Неймана) (см. недавние обзорную работу [41] или работу [42]). Теорем существования в случае, если условия переопределения типа данных Коши задаются на боковой поверхности или ее части в литературе не имеется (прямым задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра посвящена, например, монография [43]), за исключением некоторых самых простых модельных ситуаций. В этом случае основные результаты – теоремы единственности и оценки устойчивости задачи. Ряд результатов по обратным задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра и по задачам с заданным оператором Дирихле-Неймана, (Неймана-Дирихле) изложен в монографиях Исакова В. и Рамма А.Г. ([20], [44]). В этих монографиях, кроме ряда результатов, имеется также и подробная библиография, касающаяся оценок устойчивости в случае, когда неизвестный коэффициент уравнения или правая часть зависят от пространственных переменных и не зависят от времени. Другие классы обратных задач – это задачи с условиями переопределения интегрального характера. Можно отметить, например, работы Камынина В.Л. (см., например, [45], [46] и имеющуюся там библиографию) и ряда других авторов: [47], [48], [49], [50], [51], [52].

Проблемы вида (3)-(5) возникают в задачах тепломассопереноса, диффузии, фильтрации и во многих других областях (см. [33, 35, 53]). В теории тепломассопереноса функция u - концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует объемную плотность источников (стоков) [53] и их расположение. В самой общей постановке задачи (3)-(5) определению подлежат как сами мощности точечных источников $N_i(t)$, так и их местоположение x_i и их число m. Описание моделей такого сорта можно найти, например, в [53]. Отметим, что обратные задачи об определении источников делается на два класса. Типичной является ситуация, когда в качестве правой части берется функция вида $\sum_{i=1}^{s}\delta(x-x_i)q_i(t)+f_0$, где $\delta(x-x_i)$ — дельта-функция Дирака, т.е. первое слагаемое есть сумма точечных источников (загрязнения в жидкости или атмосфере) с мощностями q_i (см. библиографию и результаты в [54], [55], [56], [57], [58], [59]). Однако, рассматриваются и случаи распределённых источников, в этом случае можно считать, что правая часть параболической системы для концентраций достаточно гладкая функция, а само решение u достаточно регулярно (в пространствах Соболева или Гельдера). Имеются результаты, полученные как для некоторых модельных уравнений, так и в достаточно общей ситуации [18], [47]-[52], [60]-[61], [62]-[63]. Здесь имеются теоремы существования и единственности решений, а также и оценки устойчивости. Можно также отметить работы Cannon J.R. [64] (в работе источники не зависят от времени t: $F(x,t)=f(x)$), Engl H. W., Scherzer O., Yamamoto M. [65], также работы [66], [67] (источники вида $F(x,t)=\alpha(t)f(x)$, где $f\in L^2$, $\alpha\in C^1[0,T]$ – известная функция и удовлетворяет условию $\alpha(0)\neq 0$. Hettlich F. и Rundell W. в [68] рассматривают двумерную задачу для уравнения теплопроводности при $F(x,t)=\chi D(x)$, где D есть подмножество диска, доказано, что D может быть определено по замерам в двух точках на границе и приводится численный метод для решения задачи. Задачи с нелинейным источником вида $F(x,t) = G(u(x,t))$ рассматривается в работах [69], [70]. В одномерном случае можно сослаться на большое количество результатов по разрешимости как задач по определению распределенной функции источников, так и коэффициентых обратных задач, приведенных в книге [60]. Стоит отметить, что в случае распределенных источников очень часто обратная задача является корректной в классах конечной гладкости. В случае задач (3)-(5) это утверждение места не имеет. И поэтому практически нет и результатов посвященных каким-либо теоремам существования и единственности решений. Тем не менее, обратных задачам (3)-(5) посвящено огромное количество работ, в связи с большим количеств ом приложений (см., например, [33, 53]). Однако, основные результаты связаны с методами численного решения подобных задач, причем многие из них далеко не всегда обоснованы. Очень часто численные методы основаны на сведении обратной задачи к некоторой задаче оптимального управления и в конечном счёте решение строится при помощи регуляризации и минимизации некоторого функционала. Отметим, однако, что функционал в нелинейном случае не является выпуклым, и фактически не очень понятно даёт ли его минимизация решение искомой задачи. Это относится, например, и к простейшей модельной задаче об определении точечного источника, например, источника загрязнения в водоеме или атмосфере. Поэтому теоретическое исследование задачи и построение на основе новых теоретических результатов надежных численных методов имеет большое значение. Более того, можно строить примеры, когда постановки оказываются некорректными в том смысле что имеет место несуществование решений или их неединственность. Ряд из них построен в настоящей диссертации. Отметим также что решение соответствующей задачи управления и минимизации соответствующего функционала, как правило, требует больших вычислительных возможностей (см. примеры в [35, 57, 71–73]). Отметим, что в монографии [35] рассмотрены вопросы численного построения решений в одномерном случае практически для всех известных постановок обратных задач для параболических уравнений. Поэтому теоретическое исследование задачи и построение на этой основе новых теоретических результатов надежных численных методов имеет большое значение.

Некоторые теоретические результаты по исследованию задачи (3)-(5) или близкой к ней имеются в работах в работах [54, 56, 74–76]. Стоит выделить работу [54], где в одномерном случае получена теорема единственности в задаче определения одного точечного источника и предложен обоснованный численный метод его определения по двум точечным замерам. В работе [76] рассматривается стационарный случай и граничные условия переопределения (данные Коши), что позволяет, используя наборы тестовых функций и алгоритмы типа Прони, полностью решить задачу определения числа источников, их местоположения и интенсивности. Аналогичные результаты были получены в работе [75] уже в параболическом случае. В работе [56] рассматривалась модельная задача (3)-(5) (уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^n$), с помощью явного представления решений прямой задачи и использованием вспомогательной вариационной задачи авторы смогли определили величины $\sum_i N_i r_{ij}^l$ (здесь $N_i(t) = const$ для всех i и $r_{ij} = |x_i - y_j|$), что позволило решить задачу при помощи алгоритма из работы [76] (см. теорему 2). Однако, как оказалось, можно решить задачу и при помощи асимптотических представлений решений стационарных задач, приведенных выше. В одномерном случае некоторые подобные результаты на эту тему приведены в [77] (асимптотическая формула определения источника и численный алгоритм).

В целом, стоит отметить, что на данный момент имеется сравнительно небольшое количество работ, посвящённых вопросам корректности рассматриваемых обратных задач, основные полученные ранее результаты связаны с некоторыми модельными ситуациями и, в основном, в одномерном случае, с численными методами решения подобных задач и с оценками устойчивости. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Цели и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решений в задачах об определении точечных источников с условиями переопределения точечного типа на основе асимптотических представлений функции Грина эллиптических задач с параметром.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Построение асимптотических представлений функции Грина эллиптических задач с параметром. Исследование свойств функции Грина в смысле принадлежности определенным функциональным классам.

2. Доказательство теорем существования и единственности решений различных классов обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения. Получение оценок устойчивости.
3. Исследование вопросов единственности решений в модельных ситуациях. Построение примеров неединственности. Описание свойств решений и методов их построения в задачах об определении точечных источников по точечным условиям переопределения.

Методы исследования.

При исследовании обратных параболических задач в основном использовались методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, использовались классические результаты о разрешимости параболических задач (L_p-теория), теория интегральных уравнений, методы основанные на преобразовании Лапласа, методы теории функций комплексного переменного, интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Список литературы состоит из 111 наименований. Полный объём диссертации составляет 120 страниц. Опишем содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

Первая глава состоит из трех параграфов. В ней рассматривается асимптотика решений эллиптических задач с параметром (1)-(2). В первом параграфе главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

Во втором параграфе главы рассматривается асимптотика функции Грина в одномерном случае. Рассмотривается уравнение

$$L_0u - \lambda u = \delta(x - x_0), \quad |\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0, \quad \delta_0 \in (0, \pi), \tag{7}$$

где $L_0u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u)$, $x \in G = (a,b)$, $\lambda_0 \geq 0$ и δ – дельта-функция Дирака. Для простоты будем считать, что либо интервал (a,b) имеет конечную длину, либо $(a,b) = \mathbb{R}$, либо $(a,b) = (0,\infty)$. Оставшиеся случаи сводятся к этим при помощи линейной замены переменных. Уравнение (7) дополняется граничными условиями

$$B_1u(a) = \varphi_1, \quad B_2u(b) = \varphi_2, \tag{8}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1u = u$ или $B_1u = u_x + \sigma u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2u = u$ или $B_2u = u_x + \sigma u$ ($\sigma = const$). В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0$ или $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$, соответственно. Последние равенства понимаются в смысле принадлежности решения некоторому пространству Лебега (пространству $W_2^1(a,b)$). Условия на коэффициенты оператора L_0 имеют вид

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_1^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_1^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{9}$$

в случае интервала (a,b) конечной длины и

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_\infty^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_\infty^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{10}$$

в противном случае.

Положим $r(\xi) = 1/\sqrt{a(\xi)}, r_1(\xi) = \frac{-1}{2}(ar'r - br^2)(\xi)$. Далее знак $\approx$ в выражении $a(\lambda) \approx b(\lambda)$ означает, что выполнено равенство $a(\lambda) = b(\lambda)\big(1 + O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)\big)$ при соответствующих параметрах λ.

Основной результат этого параграфа представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 0.1. *Фиксируем $\delta_0 \in (0,\pi)$. Найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для всех комплексных чисел λ таких, что $|\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $v \in W_2^1(a,b)$ задачи (7), (8), где $\varphi_i = 0$, на любом компакте $[c,d] \subset (a,b)$ допускающее представление*

$$v(y_1) = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\left(-\sqrt{\lambda}\left|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\right| + \int_{x_1}^{y_1} r_1(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{11}$$

Пусть граничное условие в точке a есть условие Неймана, тогда

$$v(a) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\left(-\int_a^{x_1} (\sqrt{\lambda}\, r(\xi) + r_1(\xi))\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right), \tag{12}$$

Пусть граничное условие в точке b есть условие Неймана, тогда

$$v(b) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\int_{x_1}^{b} (\sqrt{\lambda}\, r(\xi) - r_1(\xi))\, d\xi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \qquad (13)$$

Третий параграф главы посвящён вопросу об асимптотическом представлении решений эллиптических задач с комплексным параметром, входящим в уравнение для некоторого естественного класса областей в двухмерном и трехмерном случаях. Выписан первый член асимптотики. Результаты применяются при исследовании некоторых задач об определении точечных источников в задачах тепломассопереноса. Рассматривается уравнение

$$L = L_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ n = 2, 3, \qquad (14)$$

где $L_0 u = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u$. Краевые условия записываются в виде

$$Bu|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial G,\ n = 2, 3, \qquad (15)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u$, ν – единичная внешняя нормаль к Γ и δ — дельта-функция Дирака.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$ при $n = 2$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ при $n = 3$. Скобками $(\cdot, \cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Введем функцию

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau.$$

Относительно коэффициентов уравнения (14) и граничного оператора (которые считаются вещественными) мы предположим, что

$$a_i \in W^2_\infty(G)\ (i = 1, \ldots, n),\ \nabla\psi, \Delta\psi, a_0 \in L_\infty(G),\ \sigma \in C^1(\Gamma) \qquad (16)$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}^n_+$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W^2_\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 0.2. *Пусть $G = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ и условия (16) выполнены. Фиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $u_n(x)$ $(n = 2, 3)$ задачи (14), (15) такое, что $e^{-\psi} u_n \in W^1_p(G) \cap W^2_q(G_\varepsilon)$ при всех $p \in (1, n/(n-1))$, $q < \infty$ и $\varepsilon > 0$*

($G_\varepsilon = \{x \in G: \ |x - x_0| > \varepsilon\}$) и решение допускает в любой области вида $0 < \varepsilon \leq |x - x_0| \leq R < \infty$ представление

$$u_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{17}$$

$$u_{2x_i}(x) = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|} + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})\Big); \tag{18}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{19}$$

$$u_{3x_i}(x) = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|} + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})\Big). \tag{20}$$

Теорема 0.3. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия* (16) *выполнены. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такой что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение u_n задачи* (14), (15), *где $Bu = u$, из класса описанного в теореме 0.2, и справедливы представления* (17), (19) *в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in K: |x - x_0| \geq \varepsilon > 0\}$ (K – компакт, такой что $K \subset G$ и для любого $x \in K$ отрезок прямой, соединяющей $x \in K$ и x_0 находится на положительном расстоянии от границы Γ).*

Теорема 0.4. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия* (16) *выполнены. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение u_n задачи* (14),(15), *где $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$, из класса описанного в теореме 0.2 и справедливы представления* (17), (19) *в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in G: 0 < \varepsilon \leq |x - x_0| \leq \rho(x_0, \Gamma) - \varepsilon\}$.*

В следующих двух теоремах рассматривается случай $G = \mathbb{R}^n_+$. Мы предполагаем, что найдется постоянная $M_0 \geq 0$ такая, что

$$|\tilde{\sigma}(x')| \leq M_0(1 + |x'|)^{-1} \ \ \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ \tilde{\sigma} = \sigma + \frac{\partial \psi}{\partial \nu}. \tag{21}$$

Теорема 0.5. *Пусть $G = \mathbb{R}^n_+$, $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и условия* (16) *выполнены. Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение u_n задачи* (14), (15), *где $Bu = u$ или $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n}$, из класса описанного в теореме 0.2, и справедливы представления* (17), (19) *на каждом компакте $K \subset G$ не содержащем x_0.*

Теорема 0.6. *Пусть* $G = \mathbb{R}^n_+$, $\delta_0 \in (0,\pi)$ *и условия* (16), (21) *выполнены (последнее условие должно быть выполнено в случае условий третьей краевой задачи). Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при всех* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует единственное решение* u_n *задачи* (14),(15) (*в этом случае* $Bu = u$ *или* $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sigma(x')u$), *принадлежащее классу описанному в теореме 0.2, и справедливы представления* (17), (19) *в любой области вида* $K_\varepsilon = \{x \in K : 0 < \varepsilon \leq |x - x_0|\}$, *где* $K \subset G$ *компакт.*

Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ или $G = \mathbb{R}^n_+$. Положим $K_{x_0,\delta_0} = \{x \in G: \ -|x-x_0|+\rho(x,\Gamma) \geq \delta_0\}$, где $\delta_0 > 0$ - некоторая фиксированная постоянная. Фиксируем также постоянную $\delta_1 \in (0,\pi)$ и пусть, как и ранее,

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau.$$

Теорема 0.7. *Пусть выполнены условия* (16) *и* $\delta_1 \in (0,\pi)$. *Тогда найдутся* $\lambda_0 \geq 0$, $\delta_2 > 0$ *такие, что при* $|arg\,(\lambda-\lambda_0)| \leq \pi-\delta_1$ *существует единственное решение* u_n *задачи* (14), (15) *такое, что* $u_n \in W^1_p(G)$ *для всех* $p \in (1, n/(n-1))$, $u_n \in W^2_2(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$ *и для* $x \in \{x \in K_{x_0,\delta_0} : |x - x_0| \geq \varepsilon_0, |x| \leq R\}$, *где* $R, \varepsilon_0 > 0$ *постоянные, имеет место представление*

$$u_2(x,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 2); \tag{22}$$

$$u_3(x,\lambda) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi_0(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 3). \tag{23}$$

Вторая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматривается обратные задачи об определении точечных источников по точечным данным переопределения. В первом параграфе главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых при доказательстве основных результатов данной главы.

Во втором параграфе рассматривается задача об определении вместе с решением правой части специального вида в параболическом уравнении

$$Lu = u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in G \times (0,T), \tag{24}$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функция $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в водоеме или воздухе, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in G$ — точечные источники и r — число этих источников. Мы считаем, что $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $T \leq \infty$. Чтобы определить неизвестные источники, уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{25}$$

$$B_1 u(t,a) = \varphi_1(t), \quad B_2 u(t,b) = \varphi_2(t), \tag{26}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1 u = u$ или $B_1 u = u_x + \sigma u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2 u = u$ или $B_2 u = u_x + \sigma u$ ($\sigma = const$). В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0$ или $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$, соответственно. В качестве условий переопределения мы берем условия вида

$$u(t, y_j) = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{27}$$

Предположим, что

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_1^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_1^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{28}$$

в случае интервала (a,b) конечной длины и

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_\infty^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_\infty^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{29}$$

в противном случае. Естественным образом также считаем, что найдутся постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что $M_1 \leq a(\xi) \leq M_2$ для всех ξ. Далее, для простоты считаем, что либо интервал (a,b) имеет конечную длину, либо $(a,b) = \mathbb{R}$, либо $(a,b) = (0,\infty)$. Оставшиеся случаи сводятся к этим при помощи линейной замены переменных. В качестве условий на данные берутся следующие условия:

(C) $\varphi_i \in W_2^{3/4}(0,T)$ или $\varphi_i \in W_2^{1/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле или условие третьей краевой задачи; $u_0 \in W_2^1(a,b)$, $f \in L_2(Q)$.

Условия согласования представимы в виде:

(D) если условие в точке $x = a$ ($x = b$) является условием Дирихле, то $\varphi_1(0) = u_0(t,a)$ $\big($соответственно $\varphi_2(0) = u_0(t,b)\big)$.

Построим вспомогательную функцию Φ как решение задачи (24)-(26), где $N_i \equiv 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$. В некоторой степени функция Φ характеризует вклад от известных распределенных источников загрязнения. Сделав замену $\omega = u - \Phi$, мы сведем задачу (24)-(27), к задаче

$$\begin{gathered} \omega_t - L_0\omega = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i), \quad (x,t) \in Q,\ B_1\omega(t,a) = 0,\ B_2\omega(t,b) = 0, \\ \omega(0,x) = 0,\ \omega(t,y_j) = \tilde{\psi}_j(t) = \psi_j - \Phi(y_j,t),\ j = 1,2,\ldots,s. \end{gathered} \tag{30}$$

Рассмотрим функцию $V_\delta(t)$ $(\delta > 0)$ такую, что

$$L(V_\delta)(p) = e^{-\sqrt{p}\delta}/\sqrt{p}, \quad \lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda},\ -\pi < \arg\lambda < \pi,\ \lambda = \sigma + i\gamma.$$

Определим класс функций

$$H_\delta = \bigl\{\psi(t) = \int_0^t \psi_0(\tau)V_\delta(t-\tau)\,d\tau :\ \psi_0 \in L_2(0,T)\bigr\}.$$

Следующая теорема – теорема о разрешимости задачи (24)-(27), где $r = 1$ и $s = 1$ и определению подлежат решение u и интенсивность N_1.

Теорема 0.8. *Пусть $r = 1$ и $s = 1$, $\tilde{\psi}_1 \in H_{\delta_0}$ с $\delta_0 = \bigl|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\bigr|$, выполнены условия (28), (29), (C) и (D) и $T < \infty$. Тогда существует единственное решение (u, N_1) задачи (24)-(27) такое, что $u \in L_2\bigl(0,T;W_2^1(a,b)\bigr)$, $(u-\Phi)_t \in L_2\bigl(0,T;\tilde{W}_2^{-1}(a,b)\bigr)$, $u \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$. Пусть $T = \infty$, $r = 1$, $s = 1$, выполнены условия (28), (29) и (D). Тогда найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_1$, $fe^{-\lambda t} \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(a,b)$, $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{3/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле и $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{1/4}(0,T)$ $(i = 1,2)$ в противном случае и справедливо представление*

$$\tilde{\psi}_1 = \int_0^t \psi_0(\tau)V_{\delta_0}(t-\tau)\,d\tau \quad с \quad \delta_0 = \Bigl|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Bigr|,\ \psi_0(\tau)e^{-\lambda\tau} \in L_2(0,\infty),$$

то существует единственное решение (u, N_1) задачи (24)-(27), где $r = 1$ и $s = 1$ такие, что $ue^{-\lambda t} \in L_2\bigl(0,T;W_2^1(a,b)\bigr)$, $(u-\Phi)_t e^{-\lambda t} \in L_2\bigl(0,T;\tilde{W}_2^{-1}(a,b)\bigr)$, $ue^{-\lambda t} \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Здесь под $\tilde{W}_2^{-1}(a,b)$ понимаем двойственное пространство к подпространству $\tilde{W}_2^1(a,b)$ пространства $W_2^1(a,b)$, состоящего из функций удовлетворяющих тем граничным условиям в (30), которые имеют смысл.

Пусть $r = 1$. Перейдем к задаче одновременного определения точки x_1 и функции $N_1(t)$. Нам понадобятся уже две точки y_1 и y_2, т. е. $s = 2$ в (27), такие, что $a \le y_1 < x_1 < y_2 \le b$. Таким образом, мы рассматриваем задачу (24)-(27), с $r = 1$ и $s = 2$, причем как функция $N_1(t)$, так и точка x_1 считаются неизвестными. Как и выше, построим функцию Φ и сведем задачу к задаче (30).

Следующая теорема в случае конечного промежутка (a, b) есть обобщение теоремы 2 в [62] на случай произвольных граничных условий. Случаи бесконечного или полубесконечного промежутка в [62] не рассматривались.

Теорема 0.9. *Пусть выполнены выполнены условия* (28), (29), (C), (D) *в случае* $T < \infty$ *и условия* (28), (29) *и* (D) *в случае* $T = \infty$. *Пусть* (u^i, N^i) — *решения уравнения*

$$u_t^i - L_0 u^i = N^i(t)\delta(x - x_i) + f, \quad (x,t) \in Q = (a,b) \times (0,T),$$

удовлетворяющие краевым условиям (25), (26) *и условиям переопределения* (27) *с* $s = 2$ *из класса, указанного в теореме 0.8, причем* $x_i \in (y_1, y_2)$ $(i = 1, 2)$. *Тогда* $x_1 = x_2$ *и* $N^1 = N^2$, *если* $N^1 \not\equiv 0$ *или* $N^2 \not\equiv 0$.

Рассмотрим случай $r = 1, s = 2$ и задачу определения решения обратной задачи - величин (u, N_1, x_1). Построив функцию Φ как это сделано выше, мы придем к задаче (30). Как мы уже отмечали, возможен случай $y_1 = a$ (в случае $a \neq -\infty$), соответственно, случай $y_2 = b$ (в случае $b \neq +\infty$). Тогда в первом случае мы берем $B_1 u|_{x=a} = u_x(a,t)$, а во втором $B_2 u|_{x=b} = u_x(b,t)$. В следующей теореме мы приведем асимптотические формулы для нахождения точки x_1.

Пусть $\Phi_i(\lambda) = L(\tilde{\psi}_i)$, где L – преобразование Лапласа, $i = 1, 2$.

Теорема 0.10. *Пусть выполнены условия теоремы 0.9 на данные и пусть* (u, N_1, x_1) — *решения задачи* (24)-(27), *где* $T = \infty$, *из класса указанного в теореме 0.8, причем* $N_1 \not\equiv 0$ *и* $y_1 < x_1 < y_2$. *Тогда найдется* $\lambda_2 > 0$ *такое, что на* $[\lambda_2, \infty)$ *множества нулей функций* $\Phi_1(\lambda)$ *и* $\Phi_2(\lambda)$ *совпадают и не имеют конечной предельной точки, существует конечный предел*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} = A,$$

и справедливы равенства: если $y_1 = a$ *и* $y_2 < b$, *то*

$$\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_a^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (31)$$

если $y_1 > a$ *и* $y_2 = b$, *то*

$$\int_{x_1}^{b} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{b} r(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{b} r_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{2\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right); \quad (32)$$

в оставшихся случаях

$$\int_{y_1}^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (33)$$

Аналог теоремы 0.10 в случае конечного промежутка $[0, T]$ также имеет место, но величина $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ заменяется на $o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

В третьем параграфе рассматривается теорема существования и единственности при n=2,3. Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), \quad u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0) \text{ если } Bu = u. \quad (34)$$

Введем функции

$$\varphi_j(x) = \frac{-1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(y_j + \tau(x - y_j)), (x - y_j))\,d\tau$$

и предположим что

$$a_i \in W_\infty^2(G)\ (i = 1, \ldots, n),\ \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j\ (j = 1, \ldots, s), a_0 \in L_\infty(G),\ \sigma \in C^1(\Gamma), \quad (35)$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}_+^n$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W_\infty^2(\mathbb{R}_+^n)$.

В случае $T = \infty$, мы предполагаем, что

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{1/4,1/2}(S), \text{ если } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\ (\sigma \in C^1(\Gamma)), \quad (36)$$

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \quad f_0 e^{-\lambda t} \in L_2(G), \quad (37)$$

для некоторого достаточно большого λ. В случае конечного T мы требуем, чтобы

$$g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \quad f_0 \in L_2(G), \quad (38)$$

$$g(x, t) \in W_2^{1/4,1/2}(S), \quad \sigma \in C^1(\Gamma). \quad (39)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t + Lu = f_0(t, x), \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (40)$$

Если $T = \infty$ и выполнены условия (34), (35), то найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для любых $\lambda \geq \lambda_0$, если выполнено (36), (37), то существует единственное решение w_0 задачи (40) такое, что $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. Если $T < \infty$, требуем чтобы было выполнены условия (34), (35), (38), (39). В этом случае решение w_0 существует и принадлежит классу $W_2^{1,2}(Q)$. Это утверждение – известный результат [3]. Сделав замену $v = u - w_0$ мы сведем задачу (3)-(5) к задаче

$$v_t + Lv = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \quad Lu = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a_0(x)u, \tag{41}$$

$$Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad S = (0, T) \times \Gamma, \tag{42}$$

$$v(t, y_j) = \tilde{\psi}_i = \psi_j(t) - w_0(t, y_j), \ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{43}$$

Пусть $\delta_j = min_i r_{ij}, j = 1, 2, \ldots, s$, где $r_{ij} = |x_i - y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji} = e^{\varphi_j(x_i)}$ если $|x_i - y_j| = \delta_j$ и $a_{ji} = 0$ в противном случае. Условие корректности записывается в виде

$$det A_0 \neq 0. \tag{44}$$

Фиксируем $p \in (1, n/(n-1))$. Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_j(t) = \int_0^t V_{\delta_j}(t - \tau)\psi_{0j}(\tau)d\tau, \ \psi_{0j} e^{-\lambda t} \in L_2(0, T), \tag{45}$$

где $V_\gamma(t)$ определяется своим преобразованием Лапласа

$$\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}, n = 3; \hat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}\gamma), n = 2.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ это функция Ханкеля и $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2} e^{iarg\ \lambda/2}$ – ветвь корня аналитическая в плоскости с разрезом $arg\ \lambda = \pi$. Не так трудно установить, что $V_\gamma(t) = \frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$ при $n = 2$ и, при $n = 3$, $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}}$.

Пусть $W_{q,B}^1(G)$ подпространство $W_q^1(G)$, состоящее из функций $u \in W_q^1(G)$ удовлетворяющих однородному условию Дирихле на $\Gamma = \partial G$ в случае, если $Bu = u$ и $W_{q,B}^1(G) = W_q^1(G)$ в противном случае. Под пространством $W_{p,B}^{-1}(G)$ понимаем сопряженное пространство к $W_{q,B}^1(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Введем множество $K = \{y \in G : \ \rho(y, \cup_{i=1}^m x_i) < \rho(y, \Gamma)\}$.

Теорема 0.11. *Пусть* $T = \infty$, $m = s$, *выполнены условия* (34), (35), (44) *и* $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *и выполнении условий* (36), (37), (45) *существует единственное решение задачи* (3)-(5) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 *есть решение вспомогательной задачи* (40), $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $e^{-\lambda t}\vec{N} \in L_2(0,\infty)$, $e^{-\lambda t} w \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^1(G))$, $e^{-\lambda t} w_t \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^{-1}(G))$, $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Аналог этой теоремы в случае $T < \infty$ имеет вид

Теорема 0.12. *Пусть* $T < \infty$, $m = s$, *выполнены условия* (34), (35), (44), (38), (39), (45) *с* $\lambda = 0$ *и* $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3)-(5) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 *есть решение вспомогательной задачи* (40), $w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $\vec{N} \in L_2(0,\infty)$, $w \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^1(G))$, $w_t \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^{-1}(G))$, $w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Далее в параграфе приведятся несколько теорем единственности решений задачи (3)-(5) в различных постановках. Во-первых, приводится теорема единственности для решений задачи (3)-(5) об определении мощностей источников, считая что число m и точки $\{x_i\}$ заданы. Далее, рассматривается единственность определения решений в общей постановке но для модельной задачи в случае $G = \mathbb{R}^n$ и при дополнительном предположении, что мощности N_i не зависят от времени.

Примеры, показывающие точность полученных результатов, некоторые свойства решений и алгоритмы их нахождения будут приведены в параграфе 4.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построены асимптотические представления функции Грина эллиптических задач с параметром и исследованы ее свойства.
2. Получены теоремы существования, единственности и оценки устойчивости решений различных классов обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения.

3. Описаны свойства решений и условия единственности и неединственности решений обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения. Построены примеры, показывающие точность полученных результатов.

Научная новизна исследования состоит в том, что

1. При достаточно слабых условиях гладкости на коэффициенты уравнения построены новые асимптотические представления функций Грина эллиптических задач с комплексным параметром и исследованы их свойства.
2. Исследованы обратные задачи идентификации объёмной плотности источников примесей по точечным замерам. Получены условия единственности решений и условия на данные гарантирующие существование решений в классах Соболева. Результаты диссертации позволяют строить новые численные алгоритмы определения источников.
3. Построены примеры неединственности решений обратных задач идентификации объёмной плотности источников примесей по точечным замерам и описаны алгоритмы, позволяющие строить решение обратных задач в модельных ситуациях.

Научная и практическая значимость диссертации определяется тем, что теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для параболических уравнений и математических моделей тепломассопереноса, указывают новые подходы в их решении и могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей, описываемых параболическими уравнениями и системами, в частности моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, моделей, описывающих процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряда других. Результаты также могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

Степень достоверности результатов проведённых исследований

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы.

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЮГУ, а также на 7-и научных и научно-практических конференциях:

1. Российско-Французский семинар "Дифференциальыне уравнения и математическое моделирование"(Ханты-Мансийск 2019).
2. 8 Всероссийская научная конференция "Информационные технологии и системы"(Ханты-Мансийск 2020).
3. Всероссийско научно-практическая конференция с международным участием "Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики" (Якутск 2020).
4. Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышёва (Обнинск 2021).
5. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики" (Якутск 2021).
6. XXII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск 2021).
7. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск 2021).
8. II Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ – 22) посвященной 90-летию БГПИ-БГУ (г. Улан-Удэ, 2022).

Личный вклад.

Научные результаты, составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. В совместных работах в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в десяти печатных изданиях [78–85], 5 из которых изданы в журналах, входящих в базы данных WOS, Scopus, в журналах из списка ВАК опубликовано 3 работы, [80, 83], четыре — в тезисах докладов [78, 81, 84, 85].

Благодарности. Приношу свою искреннюю благодарность своему научному руководителю Пяткову Сергею Григорьевичу за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, чуткое руководство, ценные советы и консультации.

ГЛАВА 1

Асимптотика решений элиптических задач с параметром

Мы рассматриваем вопрос об асимптотике решений эллиптических задач с параметром вида

$$Lu = L_0u + \lambda u = \delta(x - x_0), \tag{1.1}$$

где в случае $n = 1$ мы берем $L_0u = -a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$ и в случае $n = 2, 3$ $L_0u = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$,

$$Bu|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial G,\ n = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u$, ν – единичная внешняя нормаль к Γ и δ — дельта-функция Дирака. Область G совпадает с $\mathbb{R}^n$, полупространством $\mathbb{R}^n_+$, или областью в $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) с компактной границей $\Gamma \in C^2$. Предполагается, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|arg\,\lambda| \le \pi - \delta_0$, $\delta_0 \in (0, \pi)$.

1.1 Вспомогательные утверждения и определения

Напомним некоторые свойства преобразования Лапласа

$$L(u)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t)\, dt.$$

Пусть E - гильбертово пространство. Преобразование Лапласа изоморфно отображает весовое пространство Соболева $W_2^s(\mathbb{R}_+; E)$ функций, определенных на $(0, \infty)$, допускающих продолжение нулем при $t < 0$ с сохранением класса, с нормой

$$\left\|e^{-\gamma_0 t}\tilde{u}(t)\right\|_{W_2^s(\mathbb{R};E)} = \left\|u(t)\right\|_{s,\gamma_0},$$

где $\tilde{u}(t)$ — продолжение функции u, определенной при $t \ge 0$, нулем на всю вещественную ось, на пространство E_{s,γ_0} аналитических в области $Re\,p > \gamma_0 \ge 0$ функций с конечной нормой

$$\left\|U(p)\right\|^2_{s,\gamma_0} = \sup_{\gamma > \gamma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\|U(\gamma + i\tau)\right\|^2_E \bigl(1 + |\gamma + i\tau|^{2s}\bigr)\, d\tau. \tag{1.3}$$

В частности, при $s = 0$ имеем, что норма $\|e^{-\gamma t}u\|_{L_2(0,\infty;E)}$ эквивалентна норме

$$\sup_{\gamma > \gamma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\gamma + i\tau)\|^2_E\, d\tau. \tag{1.4}$$

В случае, если $E = \mathbb{C}$ или $E = L_2(G)$ или $E = W_2^s(G)$ (G - область в $\mathbb{R}^n$) приведенные выше свойства преобразования Лапласа имеются, например, в [86] (см. теорему 7.1 в случае $E = \mathbb{C}$ и §8 в остальных случаях). Именно в этих случаях нам эти свойства и понадобятся.

Банахово пространство X называется UMD-пространством (другие названия: ζ-выпуклое пространство, HT-пространство) если преобразование Гильберта $Pf = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|t-y|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t-y}\,dt$ определяет ограниченный оператор из $L_p(R, X)$ в $L_p(R, X)$ для некоторого (или что эквивалентно для каждого) $p \in (1, \infty)$. Подпространства, фактор пространства UMD-пространств, сопряженные пространства к UMD-пространствам, также есть UMD-пространства. (см., например, теорему 4.5.2 в [87] или [3, параграф 3]). Пространства Соболева и сопряженные к ним также обладают эти свойством. Семейство операторов $\tau \subset L(X, Y)$ (X, Y – банаховы пространства) называется R-ограниченным если найдется постоянная C_p такая что (see [88])

$$\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}} \Big\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j T_j x_j\Big\|_X^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_p\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}} \Big\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j x_j\Big\|_Y^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

для всех N, $T_1, T_2, \ldots, T_N \in \tau$ и $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$. Наименьшая постоянная C_p с этим свойством обозначается через $R(\tau)$ (эквивалентные определения R-ограниченности могут быть найдены в [3, 89–91]). Отметим, что это определение не зависит от p.

Приведем одну теорему о разрешимости параболических задач. Рассмотрим уравнение

$$u_t - Lu = f, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{1.5}$$

где L -генератор аналитической полугруппы в данном банаховом пространстве E, точнее $\{\lambda : |arg\,\lambda| \leq \pi/2\} \subset \rho(L)$ и справедлива оценка $\|\lambda(\lambda - L)^{-1}f\|_E \leq c\|f\|_E$ для всех $f \in E$.

Предположим что для некоторого $\theta \in (\pi/2, \pi)$ выполнено условие

(A) семейство $\tau = \{\lambda(L - \lambda I)^{-1} : \ |arg\,\lambda| \leq \theta\}$ R-ограничено.

Теорема 1.1. *Пусть E – UMD-пространство и условие* (A) *выполнено. Тогда для $f \in L_q(0, T; E)$ ($q \in (1, \infty), T \leq \infty$) существует единственное решение задачи* (1.5) *такое, что $u \in L_q(0, T; D(L))$, $u_t \in L_q(0, T; E)$ и справедлива* *оценка*

$$\|u_t\|_{L_q(0,T;E)} + \|Lu\|_{L_q(0,T;E)} \leq C\|f\|_{L_q(0,T;E)}.$$

Утверждение известно (см. [91, теорема 3.2], [3, теорема 4.4]).

1.2 Асимптотика функции Грина в одномерном случае

В этом параграфе рассматривается вопрос об асимптотике функции Грина в одномерном случае. Результаты основаны на асимптотическом представлении решений обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра.

Рассмотрим уравнение

$$L_0u - \lambda u = f(x), \quad x \in (a,b), \quad |\arg(\lambda - \lambda_0| \leq \pi - \delta_0, \quad \delta_0 \in (0,\pi), \ \lambda_0 \geq 0, \tag{1.6}$$

где $L_0u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$. Далее, для простоты считаем, что либо интервал (a,b) имеет конечную длину, либо $(a,b) = \mathbb{R}$, либо $(a,b) = (0,\infty)$. Оставшиеся случаи сводятся к этим при помощи линейной замены переменных. Уравнение (1.6) дополняется граничными условиями

$$B_1u(a) = \varphi_1, \quad B_2u(b) = \varphi_2, \tag{1.7}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1u = u$ или $B_1u = u_x + \sigma_1 u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2u = u$ или $B_2u = u_x + \sigma_2 u$ ($\sigma_i = const$). В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0$ или $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$, соответственно, более точно, поскольку мы рассматриваем обобщенные решения, эти условия заменяются на принадлежность решения пространству $W_2^1(a,b)$.

Предположим, что

$$a(x) \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_1^2(a,b), \quad b(x) \in C\big([a,b]\big) \cap W_1^1(a,b), \quad c(x) \in L_\infty(a,b) \tag{1.8}$$

в случае интервала (a,b) конечной длины и

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_\infty^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_\infty^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{1.9}$$

в противном случае. Естественным образом также считаем, что найдутся постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что $M_1 \leq a(\xi) \leq M_2$ для всех ξ. Далее, считаем эти условия на коэффициенты оператора L_0 выполненными, не оговаривая это дополнительно в формулировках утверждений. Отметим, что в ряде утверждений условия гладкости (1.8), (1.9) являются излишними (в частности, в утверждениях, где рассматриваются вопросы разрешимости параболических задач).

Пусть пространство $\tilde{W}_q^1(a,b)$ состоит из функций $v \in W_q^1(a,b)$, удовлетворяющих тем однородным краевым условиям из (1.7), которые имеют смысл. Обозначим через $\tilde{W}_p^{-1}(a,b)$ — двойственное пространство к $\tilde{W}_q^1(a,b)$ $(1/p+1/q=1)$ относительно скалярного произведения в $L_2(a,b)$. Таким образом, если оба условия в (1.7) являются условиями Неймана, то $\tilde{W}_q^1(a,b) = W_q^1(a,b)$. Двойственное пространство можно определить, например, как пополнение $L_p(a,b)$ по норме

$$\|u\|_{\tilde{W}_p^{-1}(a,b)} = \sup_{v\in \tilde{W}_q^1(a,b)} \big|(u,v)\big| \big/ \|v\|_{W_q^1(a,b)}.$$

Определения пространств Соболева с отрицательным индексом можно найти, например, в [1]. В нашем случае мы можем сослаться также на работы [5],[92].

Положим $r(\xi) = 1\big/\sqrt{a(\xi)}$. Далее знак $\approx$ в выражении $a(\lambda) \approx b(\lambda)$ означает, что выполнено равенство $a(\lambda) = b(\lambda)\big(1 + O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)\big)$ при соответствующих параметрах λ.

Лемма 1.1. *Пусть* $(a,b) \neq \mathbb{R}$. *Тогда существуют два линейно независимых решения однородного уравнения* (1.6), *удовлетворяющие асимптотике*

$$\begin{gathered} y_1(x) \approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi - \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right), \\ y_1'(x) \approx -\sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi - \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right), \\ y_2(x) \approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi + \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right), \\ y_2'(x) \approx \sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi + \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right), \end{gathered} \tag{1.10}$$

где $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$, $\lambda = \sigma + i\gamma$,

$$r_1(\xi) = \frac{-1}{2}(ar'r - br^2)(\xi).$$

Доказательство леммы 1.1. Доказательство в случае ограниченного интервала приведено в [62] (см. лемму 3) и опирается на результаты из [93] (Гл. 2, пункт

5 §4). Остается получить необходимую асимптотику в случае $(a,b)=(0,+\infty)$. Вначале мы делаем замену переменных $t=\int_0^x r(\xi)\,d\xi$ и преобразуем уравнение к виду

$$u''+\tilde{b}(t)u'+\tilde{c}(t)u=\lambda u,$$
$$\tilde{b}=-br+ar'(x)\big|_{x=x(t)},\quad \tilde{c}=-c(x)\big|_{x=x(t)},\quad t\in(0,1).$$

Далее мы делаем замену неизвестной функции

$$u=v\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{b}(\xi)\,d\xi\right).$$

Уравнение преобразуется к виду

$$v''+c_1(t)v=\lambda v,\quad c_1(t)=\tilde{c}+\frac{1}{4}\tilde{b}^2-\frac{1}{2}\tilde{b}'-\frac{1}{2}\tilde{b}.$$

Используя условия на коэффициенты, легко убедиться, что $c_1\in L_\infty(0,\infty)$. Используя представление решений обыкновенных дифференциальных уравнений [93](стр. 46), имеем

$$v=\alpha_1e^{\sqrt{\lambda}t}+\alpha_2e^{-\sqrt{\lambda}t}+\int_0^t\frac{e^{-\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}}c_1v(\xi)\,d\xi+\int_t^\infty\frac{e^{\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}}c_1v(\xi)\,d\xi.)\qquad(1.11)$$

что также можно переписать в виде

$$v=\alpha_1e^{\sqrt{\lambda}t}+\alpha_2e^{-\sqrt{\lambda}t}+\int_0^t\frac{e^{-\sqrt{\lambda}(t-\xi)}-e^{\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}}c_1v(\xi)\,d\xi.\qquad(1.12)$$

Ищем решение уравнения (1.12) такое, что $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$. Тогда уравнение (1.12) можно переписать в виде

$$v=e^{\sqrt{\lambda}t}+\int_0^t\frac{e^{-\sqrt{\lambda}(t-\xi)}-e^{\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}}c_1v(\xi)\,d\xi\qquad(1.13)$$

или в виде

$$v_0=1+\int_0^t\frac{e^{-2\sqrt{\lambda}(t-\xi)}-1}{2\sqrt{\lambda}}c_1v_0(\xi)\,d\xi=1+Kv_0,\ v_0=ve^{-\sqrt{\lambda}t}.\qquad(1.14)$$

С помощью метода последовательных приближений имеем $v_0=\sum_{i=0}^\infty K^i1$, причем имеем очевидную оценку

$$|K^i1(t)|\le\frac{1}{i!}\Big(\frac{c_0t}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)^i,\quad c_0=\|c_1\|_{L_\infty(0,\infty)},$$

которая гарантирует сходимость ряда и представление

$$v_0 = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}), \quad |O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})| \le (e^{c_0 t/\sqrt{|\lambda|}} - 1),$$

справедливое на каждом компакте изменения переменной t. Дифференцируя (1.13) по t и используя это представление, получим, что

$$v = e^{\sqrt{\lambda}t}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})),\ v' = \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}t}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})).$$

Полагая $y_2(x) = v\exp\bigl(-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{b}(\xi)\,d\xi\bigr)|_{t=t(x)}$ получим необходимую асимптотику. Далее ищем решение уравнения (1.11) такое, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Тогда уравнение (1.11) можно переписать в виде

$$v = e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}} c_1 v(\xi)\,d\xi + \int_t^\infty \frac{e^{\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}} c_1 v(\xi)\,d\xi.5 \qquad (1.15)$$

или в виде

$$v_0 = 1 + \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} c_1 v_0(\xi)\,d\xi + \int_t^\infty \frac{e^{2\sqrt{\lambda}(t-\xi)}}{2\sqrt{\lambda}} c_1 v_0(\xi)\,d\xi = 1 + Kv_0,\ v_0 = ve^{\sqrt{\lambda}t}. \quad (1.16)$$

Здесь удобно рассмотреть вспомогательную норму $\|v\|_0 = \|e^{-\delta t}v(t)\|_{L_\infty(0,\infty)}$, где $\delta = c_0/\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}$ ($\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda} > 0$). Легко увидеть, что оператор K допускает оценку

$$\|Kv_0\|_0 \le q\|v\|_0,\ q = c_0/\delta(2\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda} - \delta) < 1$$

при $\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda} > \sqrt{c_0}$. Тогда решение (1.16) можно найти методом последовательных приближений в виде $v_0 = \sum_{i=0}^\infty K^i 1$, причем будем иметь оценку $\|v_0\|_0 \le 1/(1-q)$. Используя эту оценку, легко показать, что $Kv_0 = O(1/\sqrt{|\lambda|})$ для любого компакта изменения переменной t и значит справедливо представление

$$v = e^{-\sqrt{\lambda}t}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})).$$

Аналогично получим, что

$$v' = -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})).$$

Полагая $y_1(x) = v\exp\bigl(-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{b}(\xi)\,d\xi\bigr)|_{t=t(x)}$ получим необходимую асимптотику. $\square$

Теорема 1.2. *Фиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для всех комплексных чисел λ таких, что $|\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $v \in W_2^1(a, b)$ задачи (1.6), (1.7), где $\varphi_i = 0$, $f(x) = \delta(x - x_1)$ $(x_1 \in (a, b))$ на любом компакте $[c, d] \subset (a, b)$ допускающее представление*

$$v(y_1) = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\sqrt{\lambda}\,\Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\, d\xi\Big| + \int_{x_1}^{y_1} r_1(\xi)\, d\xi\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \tag{1.17}$$

Пусть граничное условие в точке a есть условие Неймана, тогда

$$v(a) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\int_a^{x_1} (\sqrt{\lambda}\,!r(\xi) + r_1(\xi))\, d\xi\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big), \tag{1.18}$$

Пусть граничное условие в точке b есть условие Неймана, тогда

$$v(b) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\int_{x_1}^{b} (\sqrt{\lambda}\,!r(\xi) - r_1(\xi))\, d\xi\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \tag{1.19}$$

Доказательство теоремы 1.2. В некоторых частных случаях утверждение теоремы (в другой формулировке) получено в [18, Лемма 4] (в случае, если $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2)$, интервал (a, b) имеет конечную длину и $y_1 \in (a, b)$). Мы сейчас получим утверждение в оставшихся случаях. Основное внимание будет уделено асимптотическим представлениям решения v. Оставшиеся утверждения вытекают из полученных ниже представлений решения. Решение уравнения (1.6), где

$$f(x) = \delta(x - x_1) \quad \big(x_1 \in (a, b)\big),$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям (1.7) представимо в виде (см. [26])

$$v(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_a^x \frac{y_1(x) y_2(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi + \int_x^b \frac{y_2(x) y_1(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi, \tag{1.20}$$

где y_1, y_2 — линейно независимые решения однородного уравнения (1.1) и $W(\xi) = y_1'(\xi) y_2(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)$ — вронскиан. В качестве таких решений мы возьмем решения из леммы 1.1. Если $f(x) = \delta(x - x_1)$, то сумма последних двух интегралов равна

$$G(x, x_1) = \begin{cases} y_1(x) y_2(x_1)/W(x_1) a(x_1), & x_1 < x; \\ y_2(x) y_1(x_1)/W(x_1) a(x_1), & x_1 > x. \end{cases} \tag{1.21}$$

Используя определение вронскиана, получаем

$$W(x_1) \approx -2\sqrt{\lambda} r(x_1) \exp\left(2\int_a^{x_1} r_1\, d\xi\right). \tag{1.22}$$

Выпишем представление решения, например, в случае условий Неймана в точках a, b (т.е. $a \neq -\infty$, $b \neq +\infty$). Записывая соответствующую систему для нахождения постоянных c_i, находим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\Delta}\big(-y_2'(b)(b)G_x(a,x_1) + y_2'(a)G_x(b,x_1)\big),\\ c_2 &= \big(y_1'(b)G_x(a,x_1) - y_1'(a)G_x(b,x_1)\big)\frac{1}{\Delta}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

где

$$\Delta = y_1'(a)y_2'(b) - y_1'(b)y_2'(a) \approx -\lambda r(a)r(b)\exp\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\, d\xi + \int_a^b r_1(\xi)\, d\xi\right).$$

Используя асимптотику из леммы 1.1, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} c_1 &\approx \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\int_a^{x_1} r(\xi)\, d\xi - \int_a^{x_1} r_1(\xi)\, d\xi\right),\\ c_2 &\approx \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\Big(\int_a^b r(\xi)\, d\xi + \int_{x_1}^b r(\xi)\, d\xi\Big) - \int_a^{x_1} r_1(\xi)\, d\xi\right). \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$G(x,x_1) = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\,\Big|\int_{x_1}^x r(\xi)\, d\xi\Big| + \int_{x_1}^x r_1(\xi)\, d\xi\right)\left(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\right). \tag{1.25}$$

Теперь, используя (1.20), (1.24), (1.25) в точках a, b, получим утверждение. Случай $\sigma \neq 0$ рассматривается по аналогии с оставшимися случаями в [77] (см. лемма 3).

Рассмотрим, например, случай $(a,b) = (0,\infty)$, и краевое условие вида $u'(0) = 0$. Имеем из (1.20), что

$$v(x) = c_1 y_1(x) + G(x,x_1), \quad c_1 = -y_2(0)y_1(x_1)/y_1'(0)W(x_1)a(x_1). \tag{1.26}$$

Используя лемму 1.1, придем к нужной асимптотике. Оставшиеся случаи, кроме случая $(a,b) = \mathbb{R}$, рассматриваются аналогично. Рассмотрим этот случай. Как и в лемме 1.1, делаем замену переменных $t = \int_0^x r(\xi)\, d\xi$ и преобразуем уравнение к виду

$$u'' + \tilde{b}(t)u' + \tilde{c}(t)u = \lambda u + \delta(t - t_1)r(x_1), \ t_1 = \int_0^{x_1} r(\xi)\, d\xi,$$
$$\tilde{b} = -br + ar'(x)\big|_{x=x(t)}, \quad \tilde{c} = -c(x)\big|_{x=x(t)}, \quad t \in (0,1).$$

Далее мы делаем замену неизвестной функции

$$u = v \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{b}(\xi)\,d\xi\right).$$

Уравнение преобразуется к виду

$$v''+c_1(t)v = \lambda v+\delta(t-t_1)\alpha,\ \alpha = r(x_1)e^{\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\tilde{b}(\xi)\,d\xi} \quad c_1(t) = \tilde{c}+\frac{1}{4}\tilde{b}^2-\frac{1}{2}\tilde{b}'-\frac{1}{2}\tilde{b}. \quad (1.27)$$

В силу условий на данные $c_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$. Обращая оператор $\partial_t^2 - \lambda$, придем к равенству

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|t-t_1|} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|t-\xi|}c_1(\xi)v(\xi)\,d\xi.$$

Сделав замену $v_1(t) = 2\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}|t-t_1|}v(t)$, получим

$$v_1 = 1 + Kv_1,\ Kv_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|t-\xi|+\sqrt{\lambda}|t-t_1|-\sqrt{\lambda}|\xi-t_1|}c_1(\xi)v_1(\xi)\,d\xi. \quad (1.28)$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. Пусть $\beta = Re\sqrt{\lambda}$. Введем норму $\|v_1\|_0 = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-\frac{M}{\beta}|\xi-t_1|}|v_1(\xi)|$, где $M > c_0 = \|c_1\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$. Далее считаем также, что $\beta^2 > 2M$. Оценим $\|Kv_1\|_0$. Имеем

$$\|Kv_1\|_0 \le \frac{c_0}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t-\xi|+(\beta-\frac{M}{\beta})(|t-t_1|-|\xi-t_1|)}\,d\xi\|v_1(\xi)\|_0. \quad (1.29)$$

Введем множества $\Omega_+ = \{\xi:\ |\xi-t_1| < |t-t_1|\}$, $\Omega_- = \mathbb{R}\setminus\Omega_+$. Разобьем интеграл в (1.29) на сумму двух интегралов по этим множествам. Имеем, что

$$\frac{c_0}{2\beta}\int_{\Omega_-} e^{-\beta|t-\xi|+(\beta-\frac{M}{\beta})(|t-t_1|-|\xi-t_1|)}\,d\xi \le \frac{c_0}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t-\xi|}\,d\xi \le \frac{c_0}{\beta^2}. \quad (1.30)$$

Мы имеем, что $\Omega_+ = (t, 2t_1 - t)$, если $t < t_1$, и $\Omega_+ = (2t_1 - t, t)$, если $t > t_1$. Пусть, например, $t < t_1$. Тогда имеем, что

$$\frac{c_0}{2\beta}\int_{\Omega_+} e^{-\beta|t-\xi|+(\beta-\frac{M}{\beta})(|t-t_1|-|\xi-t_1|)}\,d\xi \le \frac{c_0}{2\beta}\int_t^{2t_1-t} e^{-\frac{M}{\beta}|t-\xi|}\,d\xi \le \frac{c_0}{2M}. \quad (1.31)$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника и оценили выражение $(\beta - \frac{M}{\beta})(|t-t_1| - |\xi-t_1|)$ через $(\beta - \frac{M}{\beta})|t-\xi|$. Точно такую же оценку имеем и в случае $t > t_1$. Из (1.29)-(1.31), вытекает оценка

$$\|Kv_1\|_0 \le \|v_1(\xi)\|_0(\frac{c_0}{\beta^2} + \frac{c_0}{2M}) \le \frac{c_0}{M} = q < 1. \quad (1.32)$$

Из оценки (1.32) вытекает, что уравнение (1.28) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке $\|v_1\|_0 \leq \frac{1}{1-q}$. или оценке

$$\|v_1(\xi)\|_0 \leq \frac{e^{\frac{M}{\beta}|\xi - t_1|}}{1-q}. \tag{1.33}$$

Рассмотрим уравнение (1.28) и оценим $|Kv_1(t)|$ с использованием (1.33).

$$\|Kv_1(t)\| \leq \frac{c_0}{2\beta(1-q)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t-\xi| + \beta(|t-t_1| - \beta|\xi - t_1|) + \frac{M}{\beta}|\xi - t_1|}\, d\xi. \tag{1.34}$$

Пусть $t < t_1$. Как и ранее, имеем

$$\frac{c_0}{2\beta(1-q)} \int_{\Omega_+} e^{-\beta|t-\xi| + \beta(|t-t_1| - |\xi - t_1|) + \frac{M}{\beta}|\xi - t_1|}\, d\xi \leq$$

$$\frac{c_0}{2\beta(1-q)} \int_{t}^{2t_1 - t} e^{-\frac{M}{\beta}|\xi - t_1|}\, d\xi \leq \frac{c_0|t_1 - t| e^{\frac{M}{\beta}|t - t_1|}}{\beta(1-q)}. \tag{1.35}$$

Тоже неравенство имеет место и в случае $t > t_1$. Оценим

$$\frac{c_0}{2\beta(1-q)} \int_{\Omega_-} e^{-\beta|t-\xi| + (\beta - \frac{M}{\beta})(|t-t_1| - \beta|\xi - t_1|) + \frac{M}{\beta}|\xi - t_1|}\, d\xi \leq \frac{c_0}{\beta^2(1-q)} e^{\frac{M}{\beta}|t-t_1|}. \tag{1.36}$$

Из оценок (1.35), (1.36) вытекает, что на любом компакте изменения переменой t $Kv_1(t) = O(\frac{1}{\beta}) = O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})$. Таким образом, $v_1 = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})$. Отсюда и вытекает утверждение, если мы вернемся к старым переменным. □

1.3 Асимптотика функции Грина в случае n=2,3

В этом параграфе рассматривается асимптотика решений по комплексному параметру λ решений следующей эллиптической задачи.

$$Lu = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \qquad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.37}$$

$$Bu|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial G,\ n = 2, 3, \tag{1.38}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u$, ν – единичная внешняя нормаль к Γ и δ — дельта-функция Дирака. Предполагается, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|arg\,\lambda| \leq \pi - \delta_0$, $\delta_0 \in (0, \pi)$.

Приведем некоторые известные вспомогательные факты. Мы рассматриваем несколько случаев $G=\mathbb{R}^n$, $G=\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\}$, и G - область в $\mathbb{R}^n$ с компактной границей Γ класса C^2. В случае $G=\mathbb{R}^n$ условие (1.38) понимается в смысле $\lim_{x\to\infty}u(x)=0$.

Как известно, см., например, §3.1 в [94] или гл. 4, 8 [95] решениями уравнения Гельмгольца $\lambda u-\Delta u=\delta(x-x_0)$ при $n=2$, $n=3$ соответственно являются функции

$$E_2(x-x_0)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}|x-x_0|),\quad E_3(x-x_0)=e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\frac{1}{4\pi|x-x_0|}. \qquad (1.39)$$

Здесь $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля и $\sqrt{\lambda}=|\lambda|^{1/2}e^{iarg\ \lambda/2}$ – ветвь корня аналитическая в плоскости с разрезом $arg\ \lambda=\pi$. Нам понадобятся линейно-независимые решения $y_i(r,\lambda)$ $(i=1,2)$ уравнения Бесселя

$$-y''-\frac{y'}{r}+\lambda y=0.$$

В нашем случае их удобно брать в виде $y_1(r,\lambda)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(ir\sqrt{\lambda})=\frac{1}{2\pi}K_0(r\sqrt{\lambda})$ (K_0 - функция Макдональда), $y_2(r,\lambda)=I_0(r\sqrt{\lambda})=J_0(ir\sqrt{\lambda})$ – функция Инфельда (см. [95, 96]). Приведем асимптотики этих функций (см. §10, 11 в [95], §3.6, 7.23 [96]) при $r\geq\varepsilon>0$, $\sqrt{|\lambda|}>>1$ и при $|arg\lambda|\leq\pi-\delta$ $(\delta>0)$:

$$y_1(r,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt{\lambda}r}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}r})\Big), \qquad (1.40)$$

$$y_1'(r,\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{4}H_1^{(1)}(ir\sqrt{\lambda})=\frac{-\lambda^{1/4}}{2\sqrt{2\pi r}}e^{-\sqrt{\lambda}}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}r})\Big), \qquad (1.41)$$

$$y_2(r,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}\lambda^{1/4}}e^{\sqrt{\lambda}r}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}r})\Big), \qquad (1.42)$$

$$y_2'(r,\lambda)=I_1(r)=\frac{\lambda^{1/4}}{\sqrt{2\pi r}}e^{\sqrt{\lambda}r}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}r})\Big), \qquad (1.43)$$

Функция y_2 ограничена при $r\to 0$, а функция $y_1(r)$ имеет логарифмическую особенность, $H_0^{(1)}(ir)\approx-\frac{2}{\pi i}\ln\frac{2}{r}$ (см. §11 [95]). Вронскиан этих решений равен (см. (2.53) в §9 [95]) $W(y_1,y_2)=1/2\pi r$. Имеем $(H_0^1(ix))'=-iH_1^{(1)}(ix)=\frac{2i}{\pi}K_1(x)$, $K_1(z)\approx\frac{1}{z}$ при $z\to 0$ (формула (15) §3.7 в [96]).

Из формул, приведенных выше, мы имеем асимптотические представления

$$E_2(x-x_0)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}|x-x_0|})\Big), \qquad (1.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}E_2(x-x_0)=\frac{-\lambda^{1/4}(x_i-x_{0i})}{2\sqrt{2\pi}|x-x_0|^{3/2}}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\Big(1+O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}|x-x_0|})\Big). \qquad (1.45)$$

Функция $E_2(x)$ положительна при вещественных $x>0$ и убывает по x (см. представление стр. 172, §6.15 в [96]). Пусть $\vec{a}=(a_1,a_2)$ при $n=2$, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ при $n=3$. Скобками $(\cdot,\cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Введем функцию

$$\psi=\frac{1}{2}\int_0^1(\vec{a}(x_0+\tau(x-x_0)),(x-x_0))\,d\tau.$$

Относительно коэффициентов уравнения (1.37) и граничного оператора (которые считаются вещественными) мы предположим, что

$$a_i\in W^2_\infty(G)\ (i=1,\ldots,n),\ \nabla\psi,\Delta\psi,a_0\in L_\infty(G),\ \sigma\in C^1(\Gamma) \qquad (1.46)$$

причем в случае, $G=\mathbb{R}^n_+$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x')=\sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0\in W^2_\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Сделаем в уравнении (1.37) замену переменных $u=e^{\psi}v$. Мы придем к задаче

$$L_0v+\lambda v=-\Delta v+(\vec{b},\nabla v)+b_0v+\lambda v=\delta(x-x_0),\ \tilde{B}v|_\Gamma=0, \qquad (1.47)$$

$$\vec{b}=\vec{a}-2\nabla\psi,\ b_0=a_0+(\vec{a},\nabla)\psi-\Delta\psi-|\nabla\psi|^2, \qquad (1.48)$$

где $\tilde{B}v=v$ или $\tilde{B}v=\frac{\partial v}{\partial\nu}+\tilde{\sigma}v=0$, $\tilde{\sigma}=\sigma+\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$. В силу условия (1.46), $b_i\in L_\infty(G)$ $(i=0,1,\ldots,n)$. В силу выбора функции ψ мы имеем еще одно замечательное свойство нового оператора $l(v)=(\vec{b},\nabla v)$. Перейдем к сферической (полярной при $n=2$) системе координат, взяв в качестве начала координат точку x_0. Пусть, например, $n=3$. Имеем $y=x-x_0$, $y_1=r\sin\theta\cos\varphi$, $y_2=r\sin\theta\sin\varphi$, $y_3=r\cos\theta$. Тогда в переменных y имеем, что $l(v)=(\vec{b},\nabla_yv)=(\sum_i b_ir_{y_i})v_r+(\sum_i b_i\theta_{y_i})v_\theta+(\sum_i b_i\varphi_{y_i})v_\varphi=b_rv_r+b_\theta v_\theta+b_\varphi v_\varphi$. Найдем величину b_r. Имеем $r_{y_i}=y_{ir}$ в силу представлений

$$v_{y_1}=v_r\sin\theta\cos\varphi+\frac{1}{r}v_\theta\cos\theta\cos\varphi-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}v_\varphi,$$
$$v_{y_2}=v_r\sin\theta\sin\varphi+\frac{1}{r}v_\theta\cos\theta\sin\varphi+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}v_\varphi,\quad v_{y_3}=v_r\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}v_\theta,$$

и тогда

$$b_r=\sum_i a_i(x_0+y)y_{ir}-2\sum_i\psi_{y_i}y_{ir}=\sum_i a_i(x_0+y)y_{ir}-2\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Однако,

$$2\psi(y) = \int_0^1 (\vec{a}(x_0+\tau y), y)\, d\tau = \int_0^{|y|} (\vec{a}(x_0+\xi\frac{y}{|y|}), \frac{y}{|y|})\, d\xi.$$

Поскольку вектор $y/|y|$ не зависит от r и равен (y_{1r}, y_{2r}, y_{3r}), имеем, что $2\frac{\partial\psi}{\partial r} = (\vec{a}(x_0+y), y/|y|) = \sum_i a_i(x_0+y)y_{ir}$ и следовательно $b_r \equiv 0$. При $n = 2$ имеем $y_1 = r\cos\varphi$, $y_2 = r\sin\varphi$ и аналогично $b_r = 0$. Кроме того, $u_{y_1} = u_r\cos\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}$, $u_{y_2} = u_r\sin\varphi + u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}$, $u_r = \cos\varphi u_{y_1} + \sin\varphi u_{y_2}$, $\frac{1}{r}u_\varphi = u_{y_2}\cos\varphi - \sin\varphi u_{y_1}$.

Сначала приведем вспомогательные результаты,которые представляют самостоятельный интерес. Положим $D(L) = W^2_{q,B}(\mathbb{R}^n) = W^2_q(\mathbb{R}^n)$ в случае $G = \mathbb{R}^n$, соответственно $D(L) = W^2_{q,B}(G) = \{u \in W^2_q(G) :\ Bu|_\Gamma = 0\}$, если $G = \mathbb{R}^n_+$ или G –область с компактной границей. Пусть L^* - формально сопряженный оператор, положим $D(L^*) = W^2_p(\mathbb{R}^n)$ $(1/q + 1/p = 1)$ в случае $G = \mathbb{R}^n$ и $D(L^*) = W^2_{p,B^*}(G) = \{u \in W^2_p(G) :\ B^*u|_\Gamma = 0\}$, где $B^*u = u$ в случае условий Дирихле и $B^*u = \frac{\partial u}{\partial\nu} + \sigma(x)u + (\vec{a}, \nu)u$. Определим пространство $W^{-2}_{q,B}(G)$ как двойственное к $W^2_{p,B^*}(G)$ относительно отношения двойственности определяемого скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$ в $L_2(G)$. $W^{-2}_{q,B}(G)$ совпадает с пополнением $L_q(G)$ по норме

$$\|v\| = \sup_{w\in W^2_{p,B^*}(G)} | < v, w > |/\|w\|_{W^2_{p,B^*}(G)}$$

(см. определения в [5, 92, 97]). Если $-\lambda \in \rho(L) \cap \rho(L^*)$, $L : L_q(G) \to L_q(G)$, $L^* : L_p(G) \to L_p(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$, то это пространство можно определить как пополнение $L_q(G)$ по норме $\|(L+\lambda)^{-1}u\|_{L_q(G)}$ (см. определения и результаты §6 (в частности, теорему 6.2) в [5]). Отметим, что $W^{-2}_{q,B}(G)$ при $G = \mathbb{R}^n$ совпадает с обычным пространством $W^{-2}_q(G) = (W^2_p(G))'$ (см. определения в [1]). Пусть $W^1_{q,B}(G) = W^1_q(G)$ если $G = \mathbb{R}^n$ или $G \neq \mathbb{R}^n$, но $Bu \neq u$. Если $Bu = u$, то положим $W^1_{q,B}(G) = \{u \in W^1_q(G) : u|_\Gamma = 0\}$. Пространство $W^1_{p,B^*}(G)$ определяем точно также. Положим $W^{-1}_{q,B}(G) = (W^1_{p,B^*}(G))'$. Оператор L допускает продолжение до ограниченного отображения $L_q(G)$ в $W^{-2}_{q,B}(G)$ и $W^1_{q,B}(G)$ в $W^{-1}_{q,B}(G)$. Запишем в каком смысле понимается равенство $Lu = f$ для $u \in L_q(G)$ или $u \in W^1_{q,B}(G)$. Имеем

$$\int_G \nabla u\overline{\nabla\varphi(x)} + \vec{a}\cdot\nabla u\overline{\varphi(x)}\, dx =< f, \varphi >,\ \forall\varphi \in W^1_{p,B^*}(G),$$

где $< f, \varphi >$ значение функционала f (который предполагается антилинейным) на элементе φ. Соответственно, если $u \in L_q(G)$, имеем

$$\int_G u\overline{L^*\varphi(x)}\,dx =< f, \varphi >, \ \forall \varphi \in W^2_{p,B^*}(G).$$

Заменим уравнение (1.37) уравнением

$$Lu + \lambda u = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u + \lambda u = f. \qquad (1.49)$$

Теорема 1.3. *Пусть условия* (1.46) *выполнены и* $f \in L_q(G)$ $(q \in (1, \infty))$. *Фиксируем* $\delta_0 \in (0, \pi/2]$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при всех* λ *с* $|arg\,(\lambda - \lambda_0| \leq \pi - \delta_0$ *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* (1.49), (1.38) *такое, что* $u \in W^2_{q,B}(G)$. *При всех таких* λ *оператор* $L + \lambda$ *допускает продолжение до изоморфизма* $L_q(G)$ *на* $W^{-2}_{q,B}(G)$ *и* $W^1_{q,B}(G)$ *на* $W^{-1}_{q,B}(G)$. *Спектры всех операторов* $L : L_q(G) \to L_q(G)$, $L : W^{-1}_{q,B}(G) \to W^{-1}_{q,B}(G)$, $L : W^{-2}_{q,B}(G) \to W^{-2}_{q,B}(G)$ *с областями определения* $W^2_{q,B}(G)$, $W^1_{q,B}(G)$, $L_q(G)$ *совпадают, каждый из операторов* $-L-\lambda_0$ *есть генератор аналитической полугруппы и более того семейство* $\tau = \{\lambda(\lambda+\lambda_0+L)^{-1} : E \to E, \ |arg\,\lambda| \leq \pi-\delta_0\}$ *- R-ограничено, где* E *совпадает с* $L_q(G)$, *или* $E = W^{-1}_{q,B}(G)$, *или* $E = W^{-2}_{q,B}(G)$.

Доказательство теоремы 1.3. Утверждение теоремы о совпадении спектров известно в случае области G с компактной границей (см. теорему 37 в [92] и §8 в [5]). Мы не нашли это утверждение в случае $G = \mathbb{R}^n_+$ или $G = \mathbb{R}^n$. Поэтому приведем доказательство.

Рассмотрим, например, наиболее сложный случай $G = \mathbb{R}^n_+$. Фиксируем число λ такое, что оператор $L_\lambda = L+\lambda : L_q(G) \to L_q(G)$ обратим. Поскольку коэффициенты формально сопряженного оператора $L^* : L_p(G) \to L_p(G)$ $(1/p+1/q = 1)$ обладают теми же свойствами гладкости, то утверждении теоремы 7.11 в [3] справедливо и для оператора L^* с областью определения $W^2_{p,B^*}(G)$. Следовательно, существует $\lambda_1 \geq 0$ такое, что операторы $L^* + \lambda_1 : L_p(G) \to L_p(G)$, $L + \lambda_1 : L_q(G) \to L_q(G)$ обратимы. Тогда $L + \lambda_1$ – изоморфизм $W^2_{q,B}(G)$ на $L_q(G)$ а оператор $L^* + \lambda_1$ – изоморфизм $W^2_{p,B^*}(G)$ на $L_p(G)$. Таким образом, поскольку для $u \in W^2_{q,B}(G)$, $v \in W^2_{p,B^*}(G)$ имеет место очевидное равенство $< (L + \lambda_1)u, v >=< u, (L^* + \lambda_1)v >$, то область определения сопряженного оператора к $L+\lambda_1$ включает $W^2_{p,B^*}(G)$ и на этих функциях значения сопряженного оператора совпадают со значениями оператора $L^*+\lambda_1$. Теперь, пусть v принадлежит области определения сопряженного оператора. По определению найдется $f \in L_p(G)$ такая, что $<(L+\lambda_1)u, v>=<u, f>$ для всех $u \in W^2_{q,B}(G)$. С другой стороны, найдется $w \in W^2_{q,B^*}(G)$ такая, что $(L^*+\lambda_1)w = f$, т.е. $<(L+\lambda_1)u, v>=<u,(L^*+\lambda_1)w>=<(L+\lambda_1)u, w>$. Поскольку оператор $(L+\lambda_1)$ есть отображение на, то $v = w$. Таким образом, оператор $L^*+\lambda_1$ является сопряженным к $L+\lambda_1$. Тогда из теорем 5.30, 6.22 в [98, гл.3] вытекает, что сопряженный оператор к L совпадает с L^*, и оператор L^*_λ обратим равно как и сам L_λ. Тогда оператор L_λ допускает продолжение до изоморфизма $L_q(G)$ на $W^{-2}_{q,B}(G)$, для $f \in W^{-2}_q(G)$ обобщенное решение уравнения (1.49) из $L_q(G)$ определяется как функция $u \in L_q(G)$ такая, что

$$<u, L^*_\lambda v>=<f, v>, \quad \forall v \in W^2_{p,B^*}(G).$$

Существование и единственность такой функции вытекает из обратимости L^*_λ и теоремы о представлении линейного непрерывного функционала над $L_p(G)$. В силу интерполяционных свойств операторов [1] $L_\lambda|_{[W^2_{q,B}(G),L_q(G)]_{1/2}}$ – изоморфизм $[W^2_{q,B}(G), L_q(G)]_{1/2}$ на $[L_q(G), W^{-2}_{q,B}(G)]_{1/2}$. Осталось доказать, что $W^1_{q,B}(G) = [W^2_{q,B}(G), L_q(G)]_{1/2}$ и $W^{-1}_{q,B}(G) = [L_q(G), W^{-2}_{q,B}(G)]_{1/2}$. При $G = \mathbb{R}^n$ эти равенства вытекают, например, из теоремы 1 пункта 2.4.2 [1] и теоремы о двойственности для комплексного метода (пункт 1.11.1 в [1]). Для области с компактной границей – это теорема 5.2 в [5]. Осталось рассмотреть случай $G = \mathbb{R}^n_+$. Пусть, например, $Bu = u$. Рассмотрим отображение $Su(x) = u(x)$ при $x_n > 0$ и $Su(x) = -u(x', -x_n)$ при $x_n < 0$. Имеем, что $S \in L(W^2_{q,B}(G), W^2_q(\mathbb{R}^n)) \cap L(L_q(G), L_q(\mathbb{R}^n))$. Определим также $Ru(x) = \frac{1}{2}(u(x', x_n) - u(x', -x_n))|_{\mathbb{R}^n_+}$, $R \in L(W^2_q(\mathbb{R}^n), W^2_{q,B}(G)) \cap L(L_q(\mathbb{R}^n), L_q(G))$. Имеем, что $RS = I$ (I - тождественный оператор). Т.е. R - ретракция, а S коретракция для соответствующих пространств (см. пункт 1.2.4 в [1]). Тогда по теореме 1.2.4 в [1] $W^1_{q,B}(G) = [W^2_{q,B}(G), L_q(G)]_{1/2} = \{u \in W^1_q(G) : \ u|_{x_n=0} = 0\}$. В силу теоремы о двойственности для комплексного метода (пункт 1.11.3 в [1]), $W^{-1}_q(G) = [L_q(G), W^{-2}_{q,B}(G)]_{1/2} = ([W^2_{p,B^*}(G), L_p(G)]_{1/2})' = (W^1_{p,B^*}(G))'$. Рассмотрим случай условий третьей краевой задачи. Отметим, что оператор $Mv = ve^{\sigma_0}$ (см. (1.46)) есть отображение $W^2_{q,B}(G)$ на $W^2_{q,B_0}(G) = \{w \in W^2_q(G) : w_{x_n}|_{x_n=0} =$

$0\}$, $L_q(G)$ на $L_q(G)$ и $W_q^1(G)$ на $W_q^1(G)$. Таким образом, достаточно показать, что $[W^2_{q,B_0}(G), L^2_q(G)]_{1/2} = W^1_q(G)$. Как в случае условий Дирихле строим оператор $Su(x) = u(x)$ при $x_n > 0$ и $Su(x) = u(x', -x_n)$ при $x_n < 0$ и оператор $Ru(x) = \frac{1}{2}(u(x', x_n) + u(x', -x_n))|_{\mathbb{R}^n_+}$. Имеем, что $S \in L(W^2_{q,B_0}(G), W^2_q(\mathbb{R}^n)) \cap L(L_q(G), L_q(\mathbb{R}^n))$ и $R \in L(W^2_q(\mathbb{R}^n), W^2_{q,B_0}(G)) \cap L(L_q(\mathbb{R}^n), L_q(G)$. Кроме того, $RS = I$. По теореме 1.2.4 в [1], $[W^2_{q,B_0}(G), L^2_q(G)]_{1/2} = W^1_q(\mathbb{R}^n_+)$. В этом случае мы также имеем $W^1_{q,B}(G) = [W^2_{q,B}(G), L_q(G)]_{1/2} = W^1_q(G)$. Аналогично показываем, что $W^1_{p,B^*}(G) = [W^2_{p,B^*}(G), L_p(G)]_{1/2} = W^1_p(G)$. Таким образом, в силу теоремы о двойственности $W^{-1}_{q,B}(G) = ([W^2_{p,B^*}(G), L_p(G)]_{1/2})' = (W^1_p(G))'$. В приведенном выше доказательстве мы показали, что если $-\lambda \in \rho(L)$, тогда $-\lambda$ также вложено в резольвентное множество расширений оператора $L : L_q(G) \to L_q(G)$ являющихся операторами из $W^{-2}_{q,B}(G)$ в $W^{-2}_{q,B}(G)$ и из $W^{-1}_{q,B}(G)$ в $W^{-1}_{q,B}(G)$ с областями определения $L_q(G)$ и $W^1_{q,B}(G)$, соответственно. Следовательно, мы можем утверждать, что резольвентное множество $L : L_q(G) \to L_q(G)$ включено в резольвентное множество его расширений. Но каждое обобщенное решение из пространства $L_q(G)$ также принадлежит $W^2_{q,B}(G)$ в случае правой части $f \in L_q(G)$. Это вытекает из определения сопряженного оператора и того факта, что сопряженный оператор к оператору $L^* : L_p(G) \to L_p(G)$ совпадает с оператором $L : L_q(G) \to L_q(G)$ что доказывается точно также как то, что сопряженный оператор к L совпадает с L^*. Это влечет обратное вложение и совпадение спектров всех трех операторов. Получим оставшиеся утверждения. Возьмем $E = L_q(G)$. Утверждении а существовании λ_0 такого, что семейство τ R-ограничено вытекает из теоремы 5.7 в случае $G = \mathbb{R}^n$, 7.11 в случае $G = \mathbb{R}^n_+$, и 8.2 в случае области G с компактной границей). Возьмем $E = W^{-2}_{q,B}(G)$. В качестве нормы в этом пространстве возьмем норму $\|f\|_E = \|(L+\lambda_0)^{-1}f\|_{L_q(G)}$. Пусть C_p – соответствующая постоянная из определения R-ограниченности. Но тогда имеем

$$\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}}\Big\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j\lambda_j(L+\lambda_0+\lambda_j)^{-1}f_j\Big\|^p_E\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}}\Big\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j\lambda_j(L+\lambda_0+\lambda_j)^{-1}(L+\lambda_0)^{-1}f_j\Big\|^p_{L_q(G)}\Big)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$C_p\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}}\Big\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j(L+\lambda_0)^{-1}f_j\Big\|^p_{L_q(G)}\Big)^{\frac{1}{p}} = C_p\Big(\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}}\Big\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j f_j\Big\|^p_E\Big)^{\frac{1}{p}}$$

для всех N, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ из нашего сектора и $f_1, f_2, \dots, f_N \in E$. Таким образом, семейство τ – R-ограничено и в случае $E = W^{-2}_{q,B}(G)$. R ограниченность семейства τ в случае $E = W^{-1}_{q,B}(G)$ вытекает из равенства $W^{-1}_{q,B}(G) = [W^{-2}_{p,B}(G), L_p(G)]_{1/2}$ и предложения 3.7 в [99]. Это равенство получили выше в случае $G = \mathbb{R}^n_+$ и $G = \mathbb{R}^n$. В случае G – область с компактной границей, это равенство вытекает из равенств $W^{-1}_{q,B}(G) = [W^{-2}_{q,B}(G), L_q(G)]_{1/2} = [W^2_{p,B^*}(G), L_p(G)]'_{1/2} = (W^1_{q,B^*}(G))'$ (см. теорему 5.2 в [5] и теорему о двойственности для комплексного метода [1]) $\square$

Замечание 1.1. *Поскольку R-ограниченность семейства операторов влечет его ограниченность, то из утверждения теоремы вытекают и оценки резольвенты для всех трех операторов с областями определения $W^2_{q,B}(G)$, $W^1_{q,B}(G)$, $L_q(G)$. В частности, например, если $\delta_0 \in (0, \pi)$, $D(L) = W^1_{q,B}(G)$, то найдется параметр $\lambda_0 \geq 0$ такой, что для всех $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$, имеем оценки*

$$\|(L+\lambda)^{-1} f\|_{W^1_{q,B}(G)} + |\lambda| \|(L+\lambda)^{-1} f\|_{W^{-1}_{q,B}(G)} \leq c\|f\|_{W^{-1}_{q,B}(G)},$$

$$\|(L+\lambda)^{-1} f\|_{W^2_{q,B}(G)} + |\lambda| \|(L+\lambda)^{-1} f\|_{L_q(G)} \leq c\|f\|_{L_q(G)},$$

где постоянная c не зависит от параметра λ, но зависит от параметра δ_0 и $f \in W^{-1}_{p,B}(G)$ или, соответственно, $f \in L_q(G)$.

Замечание 1.2. *Как правило, спектр оператора $L : L_q(G) \to L_q(G)$ не зависит от $q \in (1, \infty)$. По крайней мере это утверждение следует из теоремы 10 в [92] iв случае ограниченной области. Это верно и в случае $G = \mathbb{R}^n$, если мы дополнительно предположим, что a_0 удовлетворяет условию Гельдера (см. теорему 2.2 [100]) или $a_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$ (см. теорему 2.12 [100]).*

Введем весовую функцию $\varphi_\gamma(x) = (1 + |x|^2)^{\gamma/2}$ для $G = \mathbb{R}^n$ или $G = \mathbb{R}^n_+$ в случае неограниченной области G с компактной границей, φ_γ - гладкая положительная функция совпадающая с $(1+|x|^2)^{\gamma/2}$ для $|x| \geq 2R$ и с 1 для $|x| \leq R$, где R выбрана так, что $\Gamma \subset B_R(0)$. Пусть $L_{q,\gamma}(G) = \{u \in L_q(G) : \varphi_\gamma u \in L_q(G)\}$. По аналогии мы можем определить пространства $W^{-1}_{q,B,\gamma}(G) = \{u \in W^{-1}_{q,B}(G) : \varphi_\gamma u \in W^{-1}_{q,B}(G)\}$ и $W^{-2}_{q,B,\gamma}(G)$.

Теорема 1.4. *Предположим, что условия* (1.46) *выполнены и* $-\lambda \in \rho(L)$, $L : L_{q_0}(G) \to L_{q_0}(G)$. *Предположим, что* $f \in L_{q_0}(G)$ ($f \in W^{-1}_{q_0,B}(G)$ *или* $f \in W^{-2}_{q_0,B}(G)$) *и* $u(x)$ *решение задачи* (1.49), (1.38) *такое, что* $u \in W^2_{q_0,B}(G)$ ($u \in W^1_{q_0,B}(G)$ *или* $u \in L_{q_0}(G)$). *Если дополнитепльно* $f \in L_{q_2}(G)$ ($f \in W^{-1}_{q_2,B}(G)$ *или* $f \in W^{-2}_{q_2,B}(G)$) *при* $q_2 > q_0$, *то* $u \in W^2_{q,B}(G)$ ($u \in W^1_{q,B}(G)$ *или* $u \in L_q(G)$) *для всех* $q \in [q_0, q_2]$. *Если* G *является неограниченной областью и* $f \in L_{q_0,\gamma_0}(G)$ ($f \in W^{-1}_{q_0,B,\gamma_0}(G)$ *или* $f \in W^{-2}_{q,B,\gamma_0}(G)$, $\gamma_0 > 0$), *то* $u \in W^2_{q_0,B,\gamma_0}(G)$ ($u \in W^1_{q_0,B,\gamma_0}(G)$ *или* $u \in L_{q_0,\gamma_0}(G)$). *В этом случае* $u \in W^2_{q,B}(G)$ ($u \in W^1_{q,B}(G)$ *или* $u \in L_q(G)$) *для всех* $q \in [q_1, q_0]$ *при* $1 \leq q_1 < q_0$ *и* $\gamma_0 > n(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0})$.

Доказательство теоремы 1.4. Рассмотрим оператор $L : L_{q_0}(G) \to L_{q_0}(G)$ в области $W^2_{q_0,B}(G)$ и пусть $u \in W^2_{q_0,B}(G)$ решение (1.49), (1.38). В силу теорем вложения (см. [1]) следует, что $u \in L_r(G)$ для всех $r \in [q_0, q^*]$ ($q^* = nq_0/(n-2q_0)$), если $2q_0 < n$ и r для всех $2q_0 \geq n$. Пусть $q_0 < p \leq nq/(n-2q_0)$, тогда найдется $\lambda_1 > 0$ такая, что операторы $L + \lambda_1 : L_{q_0}(G) \to L_{q_0}(G)$ и $L+\lambda_1 : L_p(G) \to L_p(G)$ в $W^2_{q_0,B}(G)$ и $W^2_{p,B}(G)$ обратимы. Далее, найдем решение уравнения $Lv + \lambda_1 v = f + (\lambda_1 - \lambda)u$ в пространстве $W^2_{p,B}(G)$. Однако, функция $u \in L_p(G)$ есть обобщенное решение этого уравнения из $L_p(G)$. С учетом теоремы 1.3, $v = u$. Таким образом, $u \in W^2_{p,B}(G)$ и тем самым $u \in \cap_{q\in[q_0,q_2]} W^2_{q,B}(G)$, если $q_2 \leq q^*$ и $2q_0 \geq n$. В противном случае, $u \in W^2_{q^*,B}(G)$. Повторяя рассуждения в этом случае еще, получим $u \in W^2_{q_2,B}(G)$. Пусть G неограниченная область. Умножим (1.49) на φ_γ при $\gamma < 1$ и $\gamma \leq \gamma_0$. Функция $v = u\varphi_\gamma$ удовлетворяет тем же граничным условиям и уравнению

$$Lv + \lambda v = f\varphi_\gamma - 2\nabla\varphi_\gamma \cdot \nabla u + (\vec{a}, \nabla)\varphi_\gamma u = g.$$

при $\gamma < 1$ и $\gamma \leq \gamma_0$, $g \in L_{q_0}(G)$. Выберем λ, при котором существует $v_0 \in W^2_{q_0,B}(G)$ такая что $(L + \lambda)v_0 = g$. Функция $v - v_0 \in L_{q_0,loc}(G)$ удовлетворяет интегральному тождеству $< v - v_0, (L^* + \overline{\lambda})\psi >= 0$ для всех $\psi \in W^2_{p,B^*}(G)$ ($1/q_0 + 1/p = 1$) с компактным носителем. Поскольку множество таких функций $\psi \in W^2_{p,B^*}(G)$ плотно в $W^2_{p,B^*}(G)$ и $-\overline{\lambda} \in \rho(L^*)$, мы можем сделать вывод, что $v = v_0$ и тем самым $u \in W^2_{q_0,B,\gamma}(G)$ для всех $\gamma < 1$ и $\gamma \leq \gamma_0$. Если $\gamma_0 \geq 1$, то наградывая те же условия на функцию φ_γ при $\gamma < 2$ и $\gamma \leq \gamma_0$ мы можем установить, что $u \in W^2_{q_0,B,\gamma}(G)$. Повторяя рассуждения, мы приходим к выводу, что $u \in W^2_{q_0,B,\gamma_0}(G)$. Очевидно, что $W^2_{q_0,B,\gamma_0}(G) \subset W^2_{q,B}(G)$ для всех $q \in [q_1, q_0]$.

Фактические это следует из неравенства

$$\|v\|_{L_{q_1}(G)} \leq \|v\varphi_{\gamma_0}\|_{L_{q_0}(G)} \|\varphi_{\gamma_0}^{-1}\|_{L_{q_1 q_0/(q_0-q_1)}(G)} = c\|v\varphi_{\gamma_0}\|_{L_{q_0}(G)} < \infty.$$

Постоянная c фиксирована, так как $\gamma_0 q_1 q_0/(q_0 - q_1) > n$. При доказательстве остальных случаев, например, $f \in W^{-1}_{q_2,B}(G)$ или $f \in W^{-1}_{q_0,B,\gamma_0}(G)$ используются те же рассуждения. $\square$

Теорема 1.5. *Пусть условия* (1.46) *выполнены. Фиксируем* $\delta_0 \in (0, \pi)$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при всех* λ *с* $|arg\,(\lambda - \lambda_0| \leq \pi - \delta_0$ *существует единственное решение* $u_n(x)$ ($n = 2, 3$ *это размерность пространства*) *задачи* (1.37), (1.38) *такое, что* $e^{-\psi}u_n \in W^1_p(G) \cap W^2_q(G_\varepsilon)$ *при всех* $p \in (1, n/(n-1))$, $q < \infty$ *и* $\varepsilon > 0$ ($G_\varepsilon = \{x \in G : \ |x - x_0| > \varepsilon\}$).

Доказательство теоремы 1.5. Отметим, что $\delta(x - x_0) \in W^{-1}_p(\mathbb{R}^n)$ с $p \in (1, n/(n-1))$. Сделаем замену $u = e^{\psi}v$. Функция v есть решение уравнения (1.47). Возьмем любую $q_0 \in (1, n/(n-1))$, $q_1 = 1$, $q_2 < n/(n-1)$ и применим теоремы 1.3, 1.4. Тогда существует $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_0| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение уравнения (1.47) такое, что $v(x) \in W^1_q(G)$ для всех $q \in (1, n/(n-1))$. Фиксируем такое λ. Чтобы доказать гладкость решений, возьмем гладкую функцию φ, равную 0 в некоторой окрестности точки x_0 и 1 в некоторой области Γ. Функция $w = v\varphi \in W^1_q(G)$ удовлетворяет уравнению

$$L_0 w + \lambda w = -2\nabla\varphi \cdot \nabla v - \Delta\varphi v + (\vec{b}, \nabla)\varphi v = g_\varphi.$$

Правая часть в этом уравнении и само решение принадлежат $L_q(G)$. По теореме 1.3 $w \in W^2_q(G)$. В силу справедливости этого включения для всех функций φ с указанными выше свойствами и теорем вложения (см. [1]), мы можем утверждать, что $g_\varphi \in L_p(G)$ с $p \in [q, nq/(n-q)]$, если $q < n$ и p любое при $q \geq n$. Фиксируем такое p. Функция w есть обобщенное решение уравнения $(L_0 + \lambda)w = g_\varphi$ из $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ для всех функций φ. Если $q \geq n$, то мы доказали наше утверждение. В противном случае, повторяя рассуждения конечное число раз придем к необходимому результату. $\square$

Далее нам в основном понадобится теорема 1.5 в вышеприведенной формулировке. Однако, она остается справедливой и в виде

Теорема 1.6. *Пусть условия* (1.46) *выполнены. Фиксируем* $\delta_0 \in (0, \pi)$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при всех* λ *с* $|arg\,(\lambda - \lambda_0| \leq \pi - \delta_0$ *существует единственное решение* $u_n(x)$ ($n = 2, 3$ *это размерность пространства*) *задачи* (1.37), (1.38) *такое, что* $u_n \in W_p^1(G) \cap W_q^2(G_\varepsilon)$ *при всех* $p \in (1, n/(n-1))$, $q < \infty$ *и* $\varepsilon > 0$ ($G_\varepsilon = \{x \in G : \ |x - x_0| > \varepsilon\}$).

Доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 1.5. Единственное, что замену переменных $u = e^{\psi} v$ мы не делаем.

В следующей теореме мы предполагаем, что все функции имеют действительные значения.

Теорема 1.7. *Пусть условия* (1.46) *выполнены. Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что для всех* $\lambda \geq \lambda_0$, *если* $f \in L_2(G)$, $f \geq 0$ *п.в. (почти всюду) и* $Bu|_\Gamma \geq 0$, *тогда решение* $u(x) \in W_2^2(G)$ *задачи* (1.37), (1.38) *неотрицательно в* G.

Доказательство теоремы 1.7. В случае области G с компактной границей большое количество утверждений такого сорта содержится в [92] (см. теоремы 13, 35, 41). В частности, теорема (и даже более общее утверждение) полностью доказана в [92] для ограниченных областей G. Если G неограничена, используем рассуждения из доказательства слабого принципа максимума (см., например, §8.1 в [101]). Пусть v – решение задачи (1.49), (1.37). Имеем $(L + \lambda)\omega = -f \leq 0$, $B\omega|_\Gamma \leq 0$ ($\omega = -u$). Рассмотрим вначале случай условий Дирихле. В силу теорем вложения $u \in C(\overline{G})$. Определим функцию $\omega^+ = \max(0, \omega)$. Она неотрицательно и обращается в ноль на Γ. Построим функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\varphi(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 1$, $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq 2$. Умножим уравнение (1.49) на функцию $\varphi(x/R)\omega^+$ ($R > 0$), интегрируем по G. Интегрируя по частям, мы получим

$$\int\limits_G \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)(|\nabla\omega^+|^2 + (\vec{a}, \nabla)\omega^+\omega^+ + (\lambda + a_0)|\omega^+|^2)\,dx \leq \frac{1}{R}\Big|\int\limits_G \omega^+\nabla\varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\nabla\omega^+\,dx\Big|. \tag{1.50}$$

Функция $J = |(\vec{a}, \nabla)\omega^+\omega^+|$ оценивается через $|J| \leq |\vec{a}||\nabla\omega^+||\omega^+| \leq \frac{1}{2}(|\nabla\omega^+|^2 + |\vec{a}|^2|\omega^+|^2)$. Тогда будем иметь неравенство

$$\int_G \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big(\frac{|\nabla\omega^+|^2}{2} + (\lambda + a_0 - |\vec{a}|^2)|\omega^+|^2\Big)\,dx \leq \frac{1}{R}\Big|\int_G \nabla\varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\nabla\omega^+\omega^+\,dx\Big| \leq J_1. \tag{1.51}$$

где $J_1 = c_0\|\omega\|^2_{W_2^1(G)}/R$. Возьмем $\lambda_0 > \|a_0\|_{L_\infty(G)} + \||\vec{a}|^2\|_{L_\infty(G)}$ и $\lambda \geq \lambda_0$ и перейдем к пределу при $R \to \infty$. Очевидно, что правая часть неравенства стремится к нулю при $R \to \infty$. Отсюда вытекает, что $\omega^+ = 0$ и таким образом утверждение доказано. Рассмотрим случай $Bu \neq u$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, мы запишем соответствующее неравенство

$$\int_G \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)(|\nabla\omega^+|^2 + (\vec{a},\nabla)\omega^+\omega^+ + (\lambda + a_0)|\omega^+|^2)\,dx + J_2 \leq J_1, \tag{1.52}$$

где $J_2 = \int_\Gamma \varphi\big(\frac{x}{R}\big)\sigma|\omega^+|^2\,d\Gamma$. Отсюда имеем неравенство

$$\int_G \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big(\frac{|\nabla\omega^+|^2}{2} + (\lambda + a_0 - |\vec{a}|^2)|\omega^+|^2\Big)\,dx \leq J_1 + |J_2|, \tag{1.53}$$

Оценим интеграл по Γ. Используя теоремы о следах [1, теоремы 2.9.1, 4.7.1]) имеем

$$|J_2| = |\int\limits_\Gamma \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\sigma|\omega^+|^2\,d\Gamma| \leq c_0\|\omega^+\|^2_{W_2^{1/2+\varepsilon}(G)}, \quad \varepsilon \in (0, 1/2).$$

Далее используем интерполяционное неравенство [1]

$$\|\omega^+\|^2_{W_2^{1/2+\varepsilon}(G)} \leq c_1\|\omega^+\|^{2\theta}_{W_2^1(G)}\|\omega^+\|^{2(1-\theta)}_{L_2(G)}, \quad \theta = 1/2 + \varepsilon.$$

Отсюда получим $|J_2| \leq \delta\|\nabla\omega^+\|^2_{L_2(G)} + c_2(\delta)\|\omega^+\|^2_{L_2(G)}$. Здесь $\delta > 0$ произвольно и мы использовали неравенство $|ab| \leq |a|^p/p + |b|^q/q$ $(1/p + 1/q = 1)$. Взяв $\delta = 1/4$ и использовав эту оценку для $|J_2|$ in (1.53), получим

$$\int_G \varphi\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big(\frac{|\nabla\omega^+|^2}{4} + (\lambda + a_0 - |\vec{a}|^2 - c_2)|\omega^+|^2\Big)\,dx \leq \frac{c_0}{R}\|\omega\|^2_{W_2^1(G)} + c_2\|\omega\|^2_{L_2(G\setminus B_R(0))}. \tag{1.54}$$

Выбираем λ_0 такое, что $\lambda_0 > \|a_0\|_{L_\infty(G)} + \||\vec{a}|^2\|_{L_\infty(G)} + c_2$ и $\lambda \geq \lambda_0$ и перейдем к пределу при $R \to \infty$. Правая часть снова стремится к нулю и мы получаем утверждение. □

Теорема 1.8. *Пусть $G = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ и условия (1.46) выполнены. Фиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ (параметр λ_0 определен в теореме 1.5) такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_1)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $u_n(x)$ $(n = 2, 3)$ уравнения (1.37), (1.38) такое, что $e^{-\psi}u_n \in W_p^1(G) \cap W_q^2(G_\varepsilon)$ при всех $p \in (1, n/(n-1))$, $q < \infty$ и $\varepsilon > 0$*

($G_\varepsilon = \{x \in G: \ |x - x_0| > \varepsilon\}$) *и решение допускает в любой области вида* $0 < \varepsilon \le |x - x_0| \le R < \infty$ *представление*

$$u_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{1.55}$$

$$u_{2x_i}(x) = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})\Big); \tag{1.56}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{1.57}$$

$$u_{3x_i}(x) = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{4\pi|x - x_0|}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})\Big). \tag{1.58}$$

Доказательство теоремы 1.8. Существование и единственность решения следует из теоремы 1.5. Установим асимптотику решений. Пусть $n = 3$, $\theta_1 = (\pi - \delta_0)/2$, $\theta_0 = arg\, \lambda/2$. Сделаем замену переменных $y = x - x_0$, получим уравнение

$$-\Delta_y v + l_0 v + \lambda v = \delta(y), \ l_0 v = (\vec{b}, \nabla_y v) + b_0 v. \tag{1.59}$$

После замены $z = \sqrt{|\lambda|}y$ уравнение запишется в виде

$$-\Delta_z v + \frac{\tilde{l}_0 v}{\sqrt{|\lambda|}} + e^{2i\theta_0} v = \delta(z)\sqrt{|\lambda|}, \ \tilde{l}_0 v = (\vec{b}, \nabla_z v) + b_0 v/\sqrt{|\lambda|}. \tag{1.60}$$

Используя функцию E_3, получим

$$v(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-e^{i\theta_0}|z - \xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|z - \xi|}\tilde{l}_0 v(\xi)\, d\xi = \frac{\sqrt{|\lambda|}e^{-e^{i\theta_0}|z|}}{4\pi|z|}. \tag{1.61}$$

Умножим обе части уравнения на $|z|$ и положим $w = 4\pi v|z|$. По построению $|z|\tilde{l}_0 v = \tilde{l}_0(|z|v)$. Имеем

$$w(z) - K\omega = \sqrt{|\lambda|}e^{-e^{i\theta_0}|z|}, K\omega = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|e^{-e^{i\theta_0}|z - \xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z - \xi|}\tilde{l}_0 w(\xi)\, d\xi. \tag{1.62}$$

Фиксируем норму $\|w\| = \|w(z)e^{\delta_1|z|}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$, где $\delta_1 = \cos\theta_0 - \delta_2$, величину $\delta_2 < \cos\theta_1/2$ мы подберем ниже. Определим пространство H как подпространство $W^1_\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций w имеющих конечную норму

$\|w\|_H = \|w(z)\| + \|\nabla_z w\|$. Покажем, что оператор $K : H \to H$ является сжимающим при подходящем выборе параметров. Далее считаем, что $|\lambda| \geq 1$. Имеем

$$|e^{\delta_1|z|}Kw| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\,d\xi\|\tilde{l}_0 w(\xi)\|, \tag{1.63}$$

где мы воспользовались определением нормы. В силу условий на коэффициенты имеем неравенство

$$\|\tilde{l}_0 w\| \leq c_1\|w\|_H,\ \ c_1 = \max_i \|b_i\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.64}$$

Далее продифференцируем равенство (1.62) по z_i, имеем

$$w_{z_i} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-e^{i\theta_0}|z-\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\Big(\frac{|z|e^{i\theta_0}(z_i-\xi_i)}{|z-\xi|}+$$
$$\frac{|z|(z_i-\xi_i)}{|z-\xi|^2} - \frac{z_i}{|z|}\Big)\tilde{l}_0(w(\xi))\,d\xi - \frac{\sqrt{|\lambda|}e^{i\theta_0}z_i e^{-e^{i\theta_0}|z|}}{|z|}. \tag{1.65}$$

Отсюда получим неравенство

$$|e^{\delta_1|z|}(Kw)_{z_i}| \leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\Big(1+|z|+\frac{|z|}{|z-\xi|}\Big)\,d\xi\|\tilde{l}_0 w(\xi)\|. \tag{1.66}$$

Оценим каждый из интегралов в правой части (1.63) и (1.66). Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\,d\xi,$$

входящий как в (1.63), так и в (1.66). Функция

$$v_1 = Ie^{-\delta_1|z|}/|z| = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|-\delta_1|\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\,d\xi$$

является решением уравнения

$$-\Delta v_1 + \cos^2\theta_0 v_1 = \frac{e^{-\delta_1|\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|},\ \ v_1 \in W_p^2(\mathbb{R}^n),\ p < 3. \tag{1.67}$$

Это уравнение имеет радиально симметрические решения v_0, удовлетворяющие уравнению

$$-v_{0rr} - \frac{2}{r}v_{0r} + \cos^2\theta_0 v_0 = \frac{e^{-\delta_1 r}}{\sqrt{|\lambda|}r}. \tag{1.68}$$

Функции $v_2 = v_0 r$ есть решения уравнения

$$-v_{2rr} + \cos^2\theta_0 v_2 = \frac{e^{-\delta_1 r}}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{1.69}$$

Однако, нам необходимо решение v_2 с тем свойством, чтобы функция v_2 обращалась в ноль в 0 и убывала на бесконечности. Такое решение существует, единственно и записывается в виде

$$v_2 = \frac{1}{2\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}} \int_0^r (e^{-(r-\xi)\cos\theta_0} - e^{-(r+\xi)\cos\theta_0}) e^{-\delta_1\xi}\, d\xi +$$
$$\frac{1}{2\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}} \int_r^\infty (e^{(r-\xi)\cos\theta_0} - e^{-(r+\xi)\cos\theta_0}) e^{-\delta_1\xi}\, d\xi. \tag{1.70}$$

Функция v_0 будет удовлетворять уравнению (1.68) и принадлежать нужному классу. Следовательно, $v_0(|z|) = v_1$. Получим оценки. Функция v_2 оценивается через

$$\frac{e^{-r\delta_1}}{\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}\delta_2} + \frac{e^{-r\delta_1}}{\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}(\cos\theta_0 + \delta_1)}.$$

Тогда функция $I(z)$ оценивается через

$$\frac{1}{\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}\delta_2} + \frac{1}{\cos\theta_0\sqrt{|\lambda|}(\cos\theta_0 + \delta_1)} \le \frac{2}{\delta_2\cos\theta_1\sqrt{|\lambda|}} = c_3. \tag{1.71}$$

Нам также понадобится оценка для функции $I(z)/|z|$ (это первый интеграл в правой части (1.66), если правую часть разбить на соответствующую сумму интегралов). При $|z| \ge 1$ имеем, что $I(z)/|z| \le I(z) \le c_3$ и для $|z| \le 1$

$$I(z)/|z| = v_2 e^{\delta_1|z|}/|z| \le \max_{r\le 1} |(v_2(r)e^{\delta_1 r})'| \le 2c_3. \tag{1.72}$$

Последняя оценка легко получается из представления для функции v_2. Фактически мы уже оценили интеграл в правой части (1.63). Для того чтобы полностью оценить интеграл в (1.66) нам достаточно оценить интеграл

$$J = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z| e^{-\cos\theta_0|z-\xi| + \delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|^2}\, d\xi.$$

Воспользуемся неравенством $\frac{|z|}{|\xi||z-\xi|^2} \le \frac{1}{|\xi||z-\xi|} + \frac{1}{|z-\xi|^2}$, тогда имеем

$$J \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi| + \delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi||z-\xi|}\, d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi| + \delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\, d\xi = J_1 + J_2. \tag{1.73}$$

Интеграл $J_1 = 4\pi I(z)/|z|$ мы уже оценили. Рассмотрим J_2. Имеем

$$J_2 = \int_{|\xi|\geq|z|} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi + \int_{|\xi|<|z|} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi \leq$$
$$\int_{|\xi|\geq|z|} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi + \int_{|\xi|<|z|} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1|z-\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\delta_2|z-\xi|}}{\sqrt{|\lambda|}|z-\xi|^2}\,d\xi \leq \frac{S_2}{\sqrt{|\lambda|}}\Big(\frac{1}{\cos\theta_0} + \frac{1}{\delta_2}\Big) \leq \frac{2S_2}{\sqrt{|\lambda|}\delta_2}, \quad (1.74)$$

где S_2 – площадь единичной сферы. Из (1.63), (1.66), (1.70)-(1.74) вытекает, что

$$\|Kw\|_H \leq \frac{c_4}{\sqrt{|\lambda|}\delta_2}\|\tilde{l}_0 w\|, \qquad (1.75)$$

где постоянная c_4 зависит от величины $\cos\theta_1$ и некоторых абсолютных постоянных. Используя (1.64), также получим

$$\|Kw\|_H \leq \frac{c_4 c_1}{\sqrt{|\lambda|}\delta_2}\|w\|_H. \qquad (1.76)$$

Остается выбрать постоянную $\delta_2 = 2c_4c_1/\sqrt{|\lambda|}$, считая что параметр $|\lambda|$ таков, что $\delta_2 < \cos\theta_1/2$, т.е. $|\lambda| \geq \max(1, (4c_1c_4)^2/\cos^2\theta_1)$. При таком выборе норма оператора K не больше $1/2$ и следовательно уравнение (1.62) разрешимо единственным образом, решение удовлетворяет оценке

$$\|w\|_H \leq 2\sqrt{|\lambda|}\|e^{-e^{i\theta_0}|z|}\|_H \leq 8\sqrt{|\lambda|} \qquad (1.77)$$

и представляется в виде $w = \sum_{i=0}^{\infty} K^i f, \quad f = \sqrt{|\lambda|}e^{-e^{i\theta_0}|z|}$. Оценка (1.75) перепишется в виде

$$\|Kw\|_H \leq \frac{1}{2c_1}\|\tilde{l}_0 w\|. \qquad (1.78)$$

Оценим $\|Kf\|_H$. По построению, $\tilde{l}_0 f = b_0 f/\sqrt{|\lambda|}$. В силу (1.78) имеем $\|Kf\|_H \leq \frac{1}{2c_1}\|b_0 f\|/\sqrt{|\lambda|} \leq 1/2$. В этом случае можно сделать вывод, что $\|K^i f\|_H \leq 2^{-i+1}\|Kf\|_H \leq 2^{-i}$. Таким образом, норма остаточного члена оценивается через $\|\sum_{i=1}^{\infty} K^i f\|_H \leq 1$. Получили представление

$$w = f + Kw, \quad f = \sqrt{|\lambda|}e^{-e^{i\theta_0}|z|}, \quad \|Kw\|_H \leq 1. \qquad (1.79)$$

Следовательно

$$v(y) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|y|}}{4\pi|y|}\Big(1 + \frac{Kwe^{\sqrt{\lambda}|y|}}{\sqrt{|\lambda|}}\Big), \qquad (1.80)$$

где $|Kwe^{\sqrt{\lambda}|y|}| \leq e^{\sqrt{|\lambda|}\delta_2|y|} \leq e^{|x-x_0|2c_1c_4}$. Таким образом, если мы зафиксируем компакт вида $\varepsilon \leq |x-x_0| \leq M$, то $|Kwe^{\sqrt{\lambda}|y|}| \leq e^{2Mc_1c_4}$, $\frac{Kwe^{\sqrt{\lambda}|y|}}{\sqrt{|\lambda|}} = O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})$. Используя представление $v = w/|z|$, имеем $v_{z_i} = w_{z_i}/|z| - wz_i/|z|^2$, Используя уже равенства $w_{z_i} = f_{z_i} + (Kw)_{z_i}$ и (1.79), получим

$$v_{y_i}(y) = \frac{-\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}|y|}}{4\pi|y|}\Big(\frac{y_i}{|y|} + O\big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\big)\Big), \tag{1.81}$$

где представление справедливо в любой области вида $\varepsilon \leq |x-x_0| \leq M$.

Рассмотрим случай $n=2$. Рассуждения в целом совершенно аналогичны. Различаются только соответствующие детали.Рассмотрим уравнение (1.59). После замены $z = \sqrt{|\lambda|}y$ уравнение запишется в виде

$$-\Delta_z v + \frac{\tilde{l}_0 v}{\sqrt{|\lambda|}} + e^{2i\theta_0}v = \delta(z),\ \tilde{l}_0 v = (\vec{b}, \nabla_z v) + b_0 v/\sqrt{|\lambda|}, \tag{1.82}$$

где $\theta_0 = arg\,\lambda/2$. Используя фундаментальное решение (1.39), получим

$$v(z) - Kv = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(ie^{i\theta_0}|z|),\ Kv = -\frac{i}{4\sqrt{|\lambda|}}\int_{\mathbb{R}^n} H_0^{(1)}(ie^{i\theta_0}|z-\xi|)\tilde{l}_0 v(\xi)\,d\xi. \tag{1.83}$$

Фиксируем норму $\|v\| = \|v(z)|z|^{1/2}e^{\delta_1|z|}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$, где $\delta_1 = \cos\theta_0 - \delta_2$, величину $\delta_2 \leq \cos\theta_1/2$ мы подберем ниже. Определим пространство H как пространство функций из $L_\infty(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0))$ для всех $\varepsilon > 0$, имеющих обобщенную производную по угловой переменной v_φ при п.в. r такую, что $\|v\|_H = \|v(z)\| + \|v_\varphi/|z|\| < \infty$. Покажем, что оператор $K : H \to H$ является сжимающим при подходящем выборе параметров. В силу (1.40) и (1.44) найдется $R_0 > 0$ такое, что для некоторой постоянной $M > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{M}|H_0^{(1)}(ie^{i\theta_0}|z-\xi|)| \leq \frac{1}{|z-\xi|^{1/2}}e^{-\cos\theta_0|z-\xi|} \leq M|H_0^{(1)}(ie^{i\theta_0}|z-\xi|)| \tag{1.84}$$

для всех $\xi, z : |z-\xi| \geq R_0$. В этом случае для $|z-\xi| \geq R_1 = R_0/\cos\theta_1$ получается

$$\frac{1}{M}|H_0^{(1)}(i\cos\theta_0|z-\xi|)| \leq \frac{1}{|z-\xi|^{1/2}}e^{-\cos\theta_0|z-\xi|} \leq M|H_0^{(1)}(i\cos\theta_0|z-\xi|)|. \tag{1.85}$$

Далее считаем, что $|\lambda| \geq 1$. Имеем

$$|e^{\delta_1|z|}|z|^{1/2}Kv| \leq c_1\Big(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R_1}(z)} \frac{|z|^{1/2}e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|^{1/2}|z-\xi|^{1/2}}\,d\xi\|\tilde{l}_0v(\xi)\|+$$
$$\int_{B_{R_1}(z)} \frac{|z|^{1/2}e^{-\cos\theta_0|z-\xi|+\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|^{1/2}|z-\xi|^{1/2}}\,d\xi\Big)\|\tilde{l}_0v(\xi)\|, \quad (1.86)$$

где мы воспользовались определением нормы. В силу условий на коэффициенты имеем неравенство

$$\|\tilde{l}_0v\| \leq c_2\|v\|_H,\ c_2 = 2\max_i \|b_i\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.87)$$

Легко увидеть, что последний интеграл I_2 в (1.86) оценивается через

$$I_2 \leq C(R_1)/\sqrt{|\lambda|}, \quad (1.88)$$

где постоянная $C(R_1)$ не зависит от z. Оценим первый интеграл I_1. В силу (1.84), (1.85), имеем

$$I_1 \leq c_2\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R_1}(z)} |H_0^{(1)}(i\cos\theta_0|z-\xi|)|\frac{|z|^{1/2}e^{\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|^{1/2}}\,d\xi \leq$$
$$4c_2\Big|\frac{i}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} H_0^{(1)}(i\cos\theta_0|z-\xi|)\frac{|z|^{1/2}e^{\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|^{1/2}}\,d\xi\Big|. \quad (1.89)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{i}{4}\int_{\mathbb{R}^n} H_0^{(1)}(i\cos\theta_0|z-\xi|)\frac{|z|^{1/2}e^{\delta_1(|z|-|\xi|)}}{\sqrt{|\lambda|}|\xi|^{1/2}}\,d\xi.$$

Функция $v_1 = I\sqrt{|\lambda|}e^{-\delta_1|z|}/|z|^{1/2}$ есть решение уравнения

$$-\Delta v_1 + \cos^2\theta_0 v_1 = \frac{e^{-\delta_1|\xi|}}{|\xi|^{1/2}},\quad v_1 \in W_p^2(\mathbb{R}^n),\ p < 4, \quad (1.90)$$

убывающее на ∞. Это уравнение имеет радиально симметрические решения v_0, удовлетворяющие уравнению

$$-v_{0rr} - \frac{1}{r}v_{0r} + \cos^2\theta_0 v_0 = \frac{e^{-\delta_1 r}}{r^{1/2}}. \quad (1.91)$$

Нам необходимо решение v_0 с тем свойством, чтобы функция v_0 была ограничена в 0 и убывала на бесконечности. Такое решение существует, единственно и записывается в виде

$$v_0 = \int_0^r \frac{\tilde{y}_1(r)\tilde{y}_2(\xi)}{W(\xi)}\frac{e^{-\delta_1\xi}}{\xi^{1/2}}\,d\xi + \int_r^\infty \frac{\tilde{y}_2(r)\tilde{y}_1(\xi)}{W(\xi)}\frac{e^{-\delta_1\xi}}{\xi^{1/2}}\,d\xi, \quad (1.92)$$

где $\tilde{y}_i(r) = y_i(r, \cos^2\theta_0)$, функции y_1, y_2 имеют асимптотику (1.40)-(1.43) и W – соответствующий вронскиан. Функция v_0 будет удовлетворять уравнению (1.91), соответственно, $v_0(|z|)$ будет удовлетворять (1.67) и будет принадлежать нужному классу. Следовательно, $v_0 = v_1$. Получим оценки. Выберем постоянную R_2 такую, что при $r \geq R_2/\cos\theta_1$ все величины $O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|r}})$ в (1.40)-(1.43) по модулю не превышали $1/2$ при $\sqrt{|\lambda|} = \cos\theta_1$. Более или менее очевидно, что справедлива оценка $\sup_{r\leq R_2}|v_0(r)e^{\delta_1 r}r^{1/2}| \leq c_0(R_2)$. Откуда вытекает, что

$$|v_0(r)| \leq (|v_0(r)|e^{\delta_1 r}r^{1/2})e^{-\delta_1 r}r^{-1/2} \leq c_0(R_2)e^{-\delta_1 r}r^{-1/2} \quad \forall r \leq R_2. \tag{1.93}$$

Рассмотрим случай $r \geq R_2$. Первый интеграл J_1 в (1.92) оценивается через

$$J_1 \leq c_3 \int_0^{R_2} \frac{e^{-\cos\theta_0 r - \delta_1\xi}}{r^{1/2}}|\tilde{y}_2(\xi)|\xi|^{1/2}\,d\xi + c_4\int_{R_2}^r \frac{e^{-\cos\theta_0(r-\xi)-\delta_1\xi}}{r^{1/2}}\,d\xi \leq$$
$$c_5 e^{-\cos\theta_0 r}r^{-1/2} + \frac{c_6}{\delta_2}e^{-\delta_1 r}r^{-1/2} \leq \frac{c_7}{\delta_2}e^{-\delta_1 r}r^{-1/2}, \tag{1.94}$$

где постоянные c_i зависят от $R_2, \cos\theta_1$. Второй интеграл J_2 в (1.92) оценивается через

$$J_2 \leq c_8 \int_r^\infty \frac{e^{\cos\theta_0(r-\xi)-\delta_1\xi}}{r^{1/2}}\,d\xi \leq \frac{c_8 e^{-\delta_1 r}}{(\cos\theta_1 + \delta_1)r^{1/2}} = c_9 e^{-\delta_1 r}r^{-1/2}. \tag{1.95}$$

С учетом (1.93), (1.94), (1.95) окончательная оценка имеет вид $|v_0| \leq \frac{c_9}{\delta_2}e^{-\delta_1 r}r^{-1/2}$. В этом случае мы имеем $I \leq \frac{c_{10}}{\delta_2|\lambda|^{1/2}}$. Учитывая оценки (1.86), (1.88) и (1.89), получим

$$|e^{\delta_1|z|}|z|^{1/2}Kv| \leq \|Kv\| \leq \frac{c_{11}}{\delta_2|\lambda|^{1/2}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\|, \tag{1.96}$$

из которой с учетом (1.87) будем иметь

$$\|Kv\| \leq \frac{c_{11}}{\delta_2|\lambda|^{1/2}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\| \leq \frac{c_{11}c_2}{\delta_2|\lambda|^{1/2}}\|v(\xi)\|_H. \tag{1.97}$$

Оценим $\|\frac{1}{|z|}(Kv)_\varphi\|$. Дифференцируя, имеем

$$\frac{1}{|z|}|(Kv)_\varphi = -\frac{i}{4\sqrt{|\lambda|}}\int_{\mathbb{R}^n}(H_0^{(1)})'(e^{i\theta_0}|z-\xi|)\frac{e^{i\theta_0}(z_i-\xi_i)z_{i\phi}}{|z||z-\xi|}\tilde{l}_0 v(\xi)\,d\xi. \tag{1.98}$$

Отметим, что $|\frac{e^{i\theta_0}(z_i-\xi_i)z_{i\phi}}{|z||z-\xi|}| \leq 1$. Тогда

$$|(Kv)_\varphi|/|z| \leq \frac{1}{4\sqrt{|\lambda|}}\int_{\mathbb{R}^n}|(H_0^{(1)})'(e^{i\theta_0}|z-\xi|)|\frac{e^{-\delta_1|\xi|}}{|\xi|^{1/2}}\,d\xi\|\tilde{l}_0 v(\xi)\|. \tag{1.99}$$

Выберем постоянную R_3 такую, что при $r \geq R_3/\cos\theta_1$ величины $O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda| r}})$ с $\sqrt{|\lambda|} = \cos\theta_1$ в (1.40), (1.42) по модулю не превышали $1/2$. Тогда имеем оценку

$$|(Kv)_\varphi|/|z| \leq \Big(\frac{1}{4\sqrt{|\lambda|}}\int_{B_{R_3}(z)} |(H_0^{(1)})'(e^{i\theta_0}|z-\xi|)| \frac{e^{-\delta_1|\xi|}}{|\xi|^{1/2}}\, d\xi + \\ \frac{c_{12}}{\sqrt{|\lambda|}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R_3}(z)} \frac{e^{-\cos\theta_0|z-\xi|-\delta_1|\xi|}}{|z-\xi|^{1/2}|\xi|^{1/2}}\, d\xi\Big)\|\tilde{l}_0 v(\xi)\|. \quad (1.100)$$

Воспользовавшись неравенствами $|\xi| \geq |z|-|z-\xi|$ и $|H_0^{(1)})'(e^{i\theta_0}|z-\xi|)| \leq c/|z-\xi|$ в B_{R_3} легко можем оценить первый интеграл в правой части неравенства через $c_{13}(R_3)e^{-\delta_1|z|}/\sqrt{|z|^{1/2}|\lambda|}$. Второй интеграл мы уже оценили при оценке $\|Kv\|$. Из этого неравенства получим оценку

$$\|(Kv)_\varphi|/|z|\| \leq \frac{c_{14}}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\| \leq \frac{c_{14}c_2}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|v(\xi)\|_H. \quad (1.101)$$

Используя оценку (1.97), получим

$$\|Kv\|_H \leq \frac{c_{15}}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\| \leq \frac{c_{15}c_2}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|v(\xi)\|_H,\ c_{15} = \max(c_{14}, c_{11}). \quad (1.102)$$

Теперь мы можем выбрать постоянную $\delta_2 = 2c_{15}c_2/\sqrt{|\lambda|}$ и будем считать, что $|\lambda| \geq \max(1, (4c_2c_{15})^2/\cos^2\theta_1)$. Таким образом, $\|K\| \leq 1/2$, уравнение (1.83) имеет единственное решение из пространства H и решение удовлетворяет оценке

$$\|v\|_H \leq 2\|\frac{i}{4}H_0^{(1)}(e^{i\theta_0}|z|)\|_H \leq c_{16}. \quad (1.103)$$

Легко увидеть, что реально постоянная c_{16} зависит только от величины $\cos\theta_1$. Кроме того, имеем

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} K^i f, \quad f = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(e^{i\theta_0}|z|). \quad (1.104)$$

Запишем оценку для $\|(Kv)_r\|$. Собственно говоря, легко увидеть, что она ничем не отличается от оценки $(Kv)_\varphi$ и имеет тот же вид

$$\|(Kv)_r\| \leq \frac{c_{15}}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\| \leq \|v(\xi)\|_H/2. \quad (1.105)$$

Из оценок (1.105), (1.102) вытекает оценка

$$\|\nabla_z Kv\| \leq \frac{c_{15}}{\delta_2\sqrt{|\lambda|}}\|\tilde{l}_0 v(\xi)\| \leq \|v(\xi)\|_H. \quad (1.106)$$

Оценим остаточный член в (1.104). Имеем

$$\|Kv\|_H = \|\sum_{i=1}^{\infty} K^i f\|_H \leq \sum_i \frac{1}{2^{i-1}}\|Kf\|_H \leq 2\|Kf\|_H \leq 2c_2\|\tilde{l}_0 f\|.$$

Однако, $\|\tilde{l}_0 f\| \leq \frac{c_{16}}{\sqrt{|\lambda|}}$. Следовательно,

$$\|Kv\|_H \leq = \|\sum_{i=1}^{\infty} K^i f\|_H \leq \sum_i \frac{1}{2^{i-1}}\|Kf\|_H \leq 2\|Kf\|_H \leq \frac{c_{16}}{\sqrt{|\lambda|}}.$$

Из (1.106) также имеем $\|\nabla_z(\sum_{i=1}^{\infty} K^i f)\| \leq \frac{2c_{16}}{\sqrt{|\lambda|}}$. Таким образом, $Kv = O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})$. □

Рассмотрим случай, когда G – область с компактной границей Γ класса C^2. Мы ограничимся случаем, когда параметр λ вещественный, поскольку в приложениях нам понадобится именно этот случай.

Приведем вспомогательную лемму, которая легко может быть доказана методом от противного.

Лемма 1.2. *Пусть G область с компактной границей, $x_0 \in G$ и K – компакт, такой что $K \subset G$ и для любого $y \in K$ отрезок прямой, соединяющей $y \in K$ и x_0 находится на положительном расстоянии от границы Γ. Тогда найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $|x-y| + |x-x_0| - |y-x_0| \geq \delta_0$ для всех $x \in \Gamma$, $y \in K$.*

Для $n = 2$ и $n = 3$ определим соответствующие функции

$$E_2^{\pm}(x) = \frac{i}{4}H_0^1(i(\sqrt{\lambda} \mp \frac{M}{\sqrt{\lambda}})|x-x_0|),\ E_3^{\pm}(x) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}e^{(-\sqrt{\lambda}\pm\frac{M}{\sqrt{\lambda}})|x-x_0|}. \quad (1.107)$$

Лемма 1.3. *Пусть G – область с компактной границей, выполняется условие (1.46) и $\lambda_0 \geq 0$ параметр из теоремы 1.5. Тогда существует $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ задача (1.37), (1.38) с $Bu = u$ имеет решение $u = e^{\psi}v$ такое, что $0 \leq v(x) \leq E_n^+(x)$ в G, где параметр M в определении $E_n^+(x)$ выбран так, чтобы*

$$M - \|b_0\|_{L_\infty(G)} > 0. \quad (1.108)$$

Доказательство леммы 1.3. Сделав замену $u = e^{\psi}v$, мы придем к задаче (1.47). Выберем $M > \|b_0\|_{L_\infty(G)}$. Далее, увеличивая $\lambda_1 \geq \max(\lambda_0, M)$, если необходимо, и ссылаясь на теорему 41 в [92], получим, что $v \geq 0$ в G при $\lambda \geq \lambda_1$. Имеем, что

$$(L_0+\lambda)(E_n^+ - v) = (\lambda - (\sqrt{\lambda} - M/\sqrt{\lambda})^2)E_n^+ + b_0E_n^+ \geq (M - |b_0|)E_n^+ \geq 0. \quad (1.109)$$

Отсюда вытекает, что E_n^+ - верхнее решение задачи (1.47), т.е. $(L+\lambda)E_n^+ - \delta(x-x_0) \geq 0$ и $E_n^+|_\Gamma \geq v|_\Gamma = 0$. В случае ограниченной области G неравенство $v(x) \leq E_n^+(x)$ вытекает из принципа максимума в [92] (теоремы 13, 35). Пусть G неограничена. Правая часть в равенстве (1.109) принадлежит $L_p(G)$ с $p < 3$ (при $n = 2$ правая часть принадлежит даже любому $L_p(G)$), экспоненциально убывает на бесколечности и $\omega = v - E_n^+ \in W_q^1(G)$ при $q < 3/2$. По теореме 1.4 $\omega \in W_r^2(G)$ с $r \in (1,3)$. Далее сошлемся на теорему 1.7. □

Получим оценки для $|\nabla u|$ на Γ. Фиксируем постоянную $\delta_0 > 0$.

Лемма 1.4. *Пусть условия леммы* 1.3 *выполнены,* $Bu = u$ *и* $u = e^{\psi}v$ *– решение уравнения* (1.37), (1.38). *Тогда найдутся постоянные* $c > 0$ *и* $\lambda_2 \geq \lambda_1$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_2$, $|\nabla v(x)| \leq c|E_n^+(x)|e^{\sqrt{\lambda}\delta_0/2}$ *для всех* $x \in \Gamma$, *где функция* $E_n^+(x)$ *снова такова, что выполняется неравенство* (1.108).

Доказательство леммы 1.4. Сделаем замену $u = e^{\psi}v$. Найдется $R_0 > 0$ такое, что любой шар $B_R(y_0)$ радиуса не более R_0, касающийся Γ внешним образом, имеет с Γ только одну общую точку (т.е. выполнено равномерное условие внешней сферы (см. задачу 2.1 в [101, Ch.2])). Пусть также Γ_δ – некоторая δ-окрестность Γ, не содержащая точку x_0. Выберем точку $x_1 \in \Gamma$ и построим соответствующий шар $B_{R_0}(y_0)$, касающийся Γ в точке x_1. Найдем $R_1 < R_0$ такое, что $diam\,(N_{x_1}) \leq \delta_0/2$, $N_{x_1} = B_{R_1}(y_0) \cap G$ и $N_{x_1} \cap G \subset \Gamma_\delta$. Постоянную R_1 мы можем выбрать одной и той же для всех точек $x_1 \in \Gamma$. Возьмем в качестве барьера функцию $w = k(R_0^{-p} - r^{-p})$, где $r = |x - y_0|$ и $k > 0$ - постоянная. Далее, мы повторяем доказательство леммы в п.3 §7 гл.4 в [102] с небольшими изменениями. Тогда имеем что

$$(L_0+\lambda)w \geq kpr^{-p-2}((p+2) - n + \sum_{i=1}^n b_i x_i) \geq kpr^{-p-2}(p+2)/2,$$

при условии что неравенство $(p+2)-2n+2\sum_{i=1}^{n} b_i y_i \geq 0$ выполнено на $\Gamma_\delta \cap G$, что имеет место если $p > 2n + 2\sum_i \|b_i x_i\|_{L_\infty(\Gamma_\delta\cap G)}$. Имеем, что $w \pm v|_{\Gamma\cap N_{x_1}} = w|_\Gamma \geq 0$. Фиксируем параметр $M > \|b_0\|_{L_\infty(G)}$ в определении функции E_n^+. Параметр k выбираем так, чтобы $k = \max_{x\in N_{x_1}\cap G} E_n^+(x)/(R_0^{-p} - R_1^{-p})$. Таким образом, $L_0(w \pm v) > 0$, $w \pm v \geq 0$ на $\partial(N_{x_1} \cap G)$ в силу леммы 1.3. Ссылаясь на принцип максимума (теорема 35 в [92]), получим $|v| \leq w$ в $N_{x_1} \cap G$, откуда вытекает неравенство $|\nabla v(x_1)| \leq |\nabla w(x_1)| \leq c \max_{x\in N_{x_1}\cap G} E_n^+(x)$, причем постоянная c не зависит от точки $x_1 \in \Gamma$. Далее, используем асимптотические представления для функций E_n^+ и неравенство $|x_2-x_0| \geq |x_1-x_0|-\delta_0/2$, где x_2 – точка, где достигается максимум $\max_{x\in N_{x_1}\cap G} E_n^+(x)$. Наиболее трудный случай $n = 2$. Из (1.44) имеем что

$$E_2^+ = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}\lambda_M^{1/4}} e^{-\sqrt{\lambda_M}|x-x_0|}\Big(1 + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_M|}|x-x_0|})\Big),$$

где $\lambda_M = (\sqrt{\lambda} - \frac{M}{\sqrt{\lambda}})^2$. Выбираем $\lambda_2 \geq \lambda_1$ так, чтобы при $\lambda \geq \lambda_2$ и $x \in \Gamma_\delta$, было выполнено $\lambda_M \geq 1$ и $|O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_M|}|x-x_0|})| \leq 1/2$. В этом случае для всех $\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$ имеем, что $|\nabla v(x_1)| \leq |\nabla w(x_1)| \leq c_1 E_n^+(x_1)e^{\sqrt{\lambda}\delta_0/2}$, где постоянная c_1 не зависит от точки $x_1 \in \Gamma$. В случае $n = 3$ все упрощается и утверждение вытекает из представления решения E_3^+. □

Теорема 1.9. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия* (1.46) *выполнены. Тогда найдется $\lambda_3 \geq \lambda_2$ (см. лемму* 1.4*) для всех $\lambda \geq \lambda_3$ существует единственное решение и задачи* (1.37), (1.38), *где $Bu = u$, из класса описанного в теореме 1.8, в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in K : |x-x_0| \geq \varepsilon > 0\}$ (K – компакт со свойствами указанными в лемме* 1.2*), допускающее представление* (1.55), (1.57).

Доказательство теоремы 1.9. Имеем $u = e^\psi v$. Фиксируем компакт K со свойствами указанными в лемме 1.2 и найдем параметр $\delta_0 > 0$ по этой лемме. Считаем, что $\lambda \geq \lambda_2$ (см. лемму 1.4). В силу леммы 1.3 имеем, что в области G $0 \leq v \leq E_n^+$ (при подходящем выборе M) и на Γ справедлива оценка $|\nabla v(x)| \leq c_1 E_n^+(x)e^{\delta_0\sqrt{\lambda}/2}$. Продолжим коэффициенты оператора L на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса (очевидно это возможно) и построим формально сопряженный оператор $(L^*+\lambda)v = -\Delta v - \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + (a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i})v + \lambda v$. Справедлива теорема 1.8, значит существует решение уравнения

$$(L^* + \lambda)E_y(x) = \delta(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.110}$$

где y – параметр и λ достаточно велик. Функция $e^{-\psi_y(x)}E_y(x)$, $\psi_y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(y+\tau(x-y)), x-y)\, d\tau$, обладает свойствами указанными в теореме 1.8 по переменной x. Взяв в качестве пробной функции функцию равную v при $x \in G$ и 0 при $x \notin G$ и $y \in G$ $(y \neq x_0)$, в определении обобщенного решения уравнения (1.110) и интегрируя по частям, получим

$$v(y) = E_y(x_0) + \int_\Gamma E_y(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\, d\Gamma. \tag{1.111}$$

Функция $E_y(x)$ допускает представление (пусть, например, $n = 3$, в случае $n = 2$ рассуждения аналогичны)

$$E_y(x) = \frac{e^{\psi_y(x)}}{4\pi|x-y|}e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})),\ |x-y| \geq \varepsilon.$$

В частности,

$$E_y(x_0) = \frac{e^{\psi_y(x_0)}}{4\pi|y-x_0|}e^{-\sqrt{\lambda}|x_0-y|}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})),\ |x_0-y| \geq \varepsilon. \tag{1.112}$$

Без ограничения общности считаем справедлива оценка (иначе увеличим нижнюю оценку параметра λ) $|E_y(x)| \leq c_2 e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}$, для всех $x \in \Gamma$, где постоянная c_2 не зависит от $x \in \Gamma, y \in K$. Тогда второе слагаемое в (1.111) (используем лемму 1.4) допускает оценку

$$|\int_\Gamma E_y(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\, d\Gamma| \leq c_3 e^{-\sqrt{\lambda}|y-x_0|}\int_\Gamma e^{-\sqrt{\lambda}(|x-y|+|x-x_0|-|y-x_0|-\delta_0/2)}\, d\Gamma.$$

Отсюда и из леммы 1.2 имеем оценку

$$|\int_\Gamma E_y(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)\, d\Gamma| \leq c_4 e^{-\sqrt{\lambda}|y-x_0|}e^{-\sqrt{\lambda}\delta_0/2}.$$

Таким образом, второе слагаемое в (1.111) экспоненциально убывает по сравнению с первым. Отсюда и получим утверждение. □

Перейдем к случаю граничных условий типа Неймана. Т.е. мы рассматриваем случай $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$. Расширяя коэффициенты (1.37) на весь класс и применяя теорему 1.8 мы можем построить решение u_n уравнения (1.37) для всех $\lambda \geq \lambda_0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ и для некоторых $\lambda_0 \geq 0$.

Лемма 1.5. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия* (1.46) *выполнены. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда найдется $\lambda_3 \geq \lambda_0$ (параметр λ_0 взят из теоремы* 1.5) *такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_3$ существует решение v задачи* (1.47), *где $Bv = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v$, и в $B_{R_0-\delta}(x_0)$ ($R_0 = \rho(x_0, \Gamma)$) имеет место представление*

$$v(x) = v_n + v_{n1}(x), \quad |v_{n1}(x)| \leq c_1 e^{-\sqrt{\lambda}(R_0-\delta)}, \; v_n = u_n e^{-\psi(x)},$$

где $c_1 > 0$ некоторая константа.

Доказательство леммы 1.5. Существование решения $v(x)$ получено в теореме 1.5 при $\lambda \geq \lambda_0$. Построим функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ такую, что $\varphi(x) = 0$ в $\Gamma_{\delta/2}$ ($\delta/2$-окрестность границы Γ) и $\varphi(x) = 1$ в $G \setminus \Gamma_\delta$. Без ограничения общности можем считать, $\rho(x) = \rho(x, \Gamma)$ принадлежит классу $C^2(\Gamma_\delta)$, имеем $\nabla \rho(x) = -\nu(x)$ (см. лемму 14.16 в [101]). Продолжим функцию $\rho(x)$ с сохранением класса с множества $\Gamma_{\delta/2}$ на всю область G так, чтобы $\rho = 1$ на $G \setminus \Gamma_\delta$. Функция $w = v - \varphi v_n$ есть обобщенное решение задачи

$$(L_0 + \lambda) w = 2\nabla\varphi\nabla v_n + \Delta\varphi v_n - (b, \nabla)\varphi v_n = g(x), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} w|_\Gamma = 0. \qquad (1.113)$$

Как и в доказательстве теорем 1.3 and 1.4, получим, что $w \in W_p^2(G)$ для всех $p < \infty$. Далее, возьмем $\gamma > \|\tilde{\sigma}\|_{C(\Gamma)}$ и сделаем замену $w = e^{-\gamma\rho} w_0$. Задача преобразуется к задаче

$$\tilde{L}_0 w_0 = g(x) e^{\gamma\rho(x)}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + \sigma_0 w_0|_\Gamma = 0, \; \sigma_0 = \tilde{\sigma} + \gamma > 0, \qquad (1.114)$$

где оператор $\tilde{L}_0$ – оператор точно такого же вида, что и оператор L_0 с младшим коэффициентом $\lambda + \tilde{b}_0$. Легко увидеть, что справедлива оценка $|g(x)e^{\gamma\rho(x)}| \leq c_0\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}(R_0-\delta)}$. Здесь постоянная c_0 не зависит от λ. Выберем $\lambda_3 = \max(2\|\tilde{b}_0\|_{L_\infty(G)}, \lambda_0)$. Тогда легко увидеть, что постоянная $r_0 = \frac{2c_0}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}(R_0-\delta)}$ является верхним решением задачи (1.114), более того $\tilde{L}_0 r_0 \pm g(x)e^{\gamma\rho(x)} \geq 0$, $Br_0 \geq 0$. Увеличивая при необходимости λ_3 и применяя принцип максимума (теорема 35 в [92]) получим, что $|w_0| \leq r_0$. Отсюда и вытекает утверждение. □

Теорема 1.10. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия* (1.46) *выполнены. Тогда найдется $\lambda_4 \geq \lambda_0$ (параметр λ_0 взят из теоремы*

1.5) *такое, что при всех* $\lambda \geq \lambda_4$ *существует единственное решение и задачи* (1.37), (1.38), *где* $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$, *из класса описанного в теореме 1.8, допускающее представление* (1.55), (1.57) *в любой области вида* $K_\varepsilon = \{x \in G : 0 < \varepsilon \leq |x - x_0| \leq \rho(x_0, \Gamma) - \varepsilon\}$.

Утверждение теоремы вытекает из леммы 1.5.

Замечание 1.3. *В одномерном случае* $n = 1$, *утверждение не зависит от вида краевых условий и области, и имеет место представление (см. теорему 1.2)*

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \exp\Big(-\sqrt{\lambda}|x - x_0| + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} b(\xi)\, d\xi\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big),$$

которое равномерно для любого ограниченного промежутка $[c, d\,] \subset (a, b)$. *Здесь* v – *решение уравнения* $Lv = -v_{xx} + b(x)v_x + c(x)v + \lambda v = \delta(x - x_0)$, $b \in W^1_\infty(a, b)$, $c \in L_\infty(a, b)$, $x \in (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$.

Приведем некоторые результаты в случае $G = \mathbb{R}^n_+$.

Пусть условия (1.46) выполнены, тогда при всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $\lambda_0 \geq 0$ имеет место утверждение теоремы 1.5. Возьмем число $M > \|b_0\|_{L_\infty(G)}$ (считаем также что $\lambda \geq \max(M, \lambda_0)$). Тогда

$$\begin{aligned} &(L_0 + \lambda)E_n^+ - \delta(x - x_0) = (\lambda - \lambda_M)E_n^+ + b_0E_n^+ > 0, \\ &\quad (L_0 + \lambda)E_n^- - \delta(x - x_0) = (\lambda - \lambda_{-M})E_n^+ + b_0E_n^+ < 0 \text{ для п.в. } x \in G. \end{aligned} \tag{1.115}$$

Мы также предполагаем, что найдется постоянная $M_0 \geq 0$ такая, что

$$|\tilde{\sigma}(x')| \leq M_0(1 + |x'|)^{-1} \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.116}$$

Теорема 1.11. *Пусть* $G = \mathbb{R}^n_+$, $\delta_0 \in (0, \pi)$ *и условия* (1.46), (1.116) *выполнены* (*последнее условие должно быть выполнено в случае условий третьей краевой задачи*). *Тогда найдется* $\lambda_5 \geq \lambda_0$ (*параметр* λ_0 *взят из теоремы* 1.5) *такое, что при всех* $\lambda \geq \lambda_5$ *существует единственное решение* $u = e^\psi v$ *задач* (1.37), (1.38) (*в этом случае* $Bu = u$ *или* $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sigma(x')u$) *из класса описанного в теореме 1.8 и допускающее представление* (1.55), (1.57) *в любой области вида* $K_\varepsilon = \{x \in K : 0 < \varepsilon \leq |x - x_0|\}$, *где* $K \subset G$ – *компакт.*

Доказательство теоремы 1.11. Выберем компакт K. Как и ранее, сделав замену $u = e^{\psi}v$, придем к задаче (1.47). Используя теорему 1.5, найдем λ_0 такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ имеет место существование решений, обладающих указанной в формулировке гладкостью. Рассмотрим случай условий Дирихле. Фиксируем параметр $M > \|b_0\|_{L_\infty(G)}$. У нас выполнено (1.115) при $\lambda \geq \max(\lambda_0, M)$ и $(L_0+\lambda)(v-E_n^+) \leq 0$, $v-E_n^+ \leq 0$ при $x_n = 0$. Кроме того, используя теоремы 1.3 и 1.4, легко понять что $v-E_n^+ \in W_2^2(G)$. По теореме 1.7 найдется $\lambda_1 \geq \max(\lambda_0, M)$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ $v \leq E_n^+$ в G. Рассмотрим теперь функцию $\omega = E_n^- - v$. Имеем $(L_0 + \lambda)\omega \leq 0$ п.в. Определим функции

$$E_2^*(x) = \frac{i}{4}H_0^1(i(\sqrt{\lambda} - M_1)|x - x_0^*|),\ E_3^*(x) = \frac{1}{4\pi}e^{-(\sqrt{\lambda}-M_1)|x-x_0^*|}), \tag{1.117}$$

где $x_0^* = (x_0', -x_{0n})$ $(x_0 = (x_0', x_{0n}),\ n = 2, 3)$. Найдется постоянная $M_1 > 0$ такая, что $(L_0 + \lambda)E_n^* \geq 0$ в G. Действительно,

$$\begin{aligned}(L_0 + \lambda)E_n^* = (\lambda - \lambda_{M_1}^*)E_n^*(x) + (\vec{b}, \nabla)E_n^*(x) + b_0E_n^*(x) \geq \\ (2\sqrt{\lambda}M_1 - M_1^2)E_n^*(x) - c_1\sqrt{\lambda}(\|\vec{b}\|_{L_\infty(G)} + \|b_0\|_{L_\infty(G)})E_n^*(x),\end{aligned}$$

где $\lambda_{M_1}^* = (\sqrt{\lambda} - M_1)^2$. Остается выбрать $M_1 > c_1(\|\vec{b}\|_{L_\infty(G)} + \|b_0\|_{L_\infty(G)})$ и затем $\lambda_2 \geq \max(M_1^2, \lambda_1)$. Тогда при $\lambda \geq \lambda_2$ мы имеем $(L_0 + \lambda)E_n^* \geq 0$ и $E_n^* \in W_p^2(G)$ для всех p. Кроме того,

$$\omega|_{x_n=0} = E_n^-(x', 0) \leq E_n^*(x', 0),\ \omega \in W_2^2(G)$$

Применяя теорему (1.7), получим $\omega \leq E_n^*$. Таким образом, $E_n^- - E_n^* \leq v \leq E_n^+$ для всех $x \in G$ и отсюда вытекает утверждение, поскольку найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что $|x-x_0^*| \geq \delta_1+|x-x_0|$ для всех $x \in K$ и следовательно, функция E_n^* экспоненциально убывает по λ по сравнению с функциями E_n^- и E_n^+.

Перейдем к случаю третьей краевой задачи. Пусть, например, $n = 3$. Случай $n = 2$ рассматривается по аналогии. Как и ранее имеем, что $(L_0+\lambda)(E_n^- - v) \leq 0$ при соответствующем выборе параметра M и $\lambda \geq \max(\lambda_0, M)$. С другой стороны

$$\tilde{B}(E_n^- - v)|_{x_n=0} = -E_n^-(x', 0)(\frac{x_{0n}\sqrt{\lambda_M}}{\rho} + \frac{x_{0n}}{\rho^2}) + \tilde{\sigma}E_n^-(x', 0),\ \rho(x') = |x - x_0||_{x_n=0}.$$

В силу условия (1.116), правая часть неположительна, если $\lambda \geq \lambda_3$ for some $\lambda_3 \geq \max(\lambda_0, M)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что теорема

1.7 верна для $\lambda \geq \lambda_3$ и следовательно $E_n^- \leq v$ в G. Рассмотрим функцию $\omega = v - E_n^+ - 2E_n^*$, считая, что $\lambda \geq \lambda_4 = \max(\lambda_3, M^2/M_1^2)$. Мы имеем, что $(L_0+\lambda)\omega \leq 0$ и условие (1.116) влечет, что

$$\tilde{B}\omega|_{x_n=0} \leq -\tilde{\sigma}(E_n^- + 2E_n^*)(x',0) - E_n^*(x',0)\frac{x_{0n}\sqrt{\lambda_{M_1}^*}}{\rho(x')} \leq 0$$

если $\lambda \geq \lambda_5$ для некоторых $\lambda_5 \geq \max(\lambda_4, \lambda_2)$. Увеличивая λ_5 если необходимо, ввиду теоремы 1.7 имеем, что

$$E_n^-(x) \leq v(x) \leq E_n^+ + 2E_n^*(x) \text{ п.в.}$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. $\square$

Используя четное и нечетное продолжение коэффициентов уравнения и самого решения в область $x_n < 0$, можно получить асимптотику решений задачи (1.37), (1.38) и его производных аналогичную указанной в теореме 1.8. Однако, это приведет к некоторым дополнительным условиям на коэффициенты a_i уравнения. Для краткости, мы опишем соответствующий результат только в случае $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 1.12. *Пусть $G = \mathbb{R}^n_+$, $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и условия (1.46) выполнены. Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется $\lambda_6 \geq \lambda_0$ (параметр λ_0 взят из теоремы 1.5) такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_6)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение u_n задач (1.37), (1.38), где $Bu = u$ или $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n}$, из класса описанного в теореме 1.8, на каждом компакте $K \subset G$ не содержащем x_0 допускающее представление (1.55), (1.57).*

Доказательство теоремы 1.12. В случае граничного условия Дирихле построим нечетное продолжение решения u задачи (1.37)-(1.38) и четное продолжение a_0 (по переменной x_n). Это продолжение есть решение уравнения

$$Lu = \lambda u - \Delta u + a_0(x)u = \delta(x - x_0) - \delta(x - x_0^*),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.118}$$

где точка x_0^* симметрична точке x_0 относительно плоскости $x_n = 0$. Мы рассмотрим случай $n = 2$. Случай $n = 3$ рассматривается по аналогии и мы его опустим. В силу теоремы 1.8 решение уравнения (1.118) существует и представимо в виде $u = u_1 - u_2$, функции u_i допускают представление

$$u_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}\lambda^{1/4}} e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}|x-x_0|}\Big)\Big),$$

$$u_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0^*|}\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_0^*|}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}|x-x_0^*|}\Big)\Big).$$

Легко показать, что эта функция u есть решение исходной задачи. Пусть $x\in K$, где $K\subset\mathbb{R}^n_+$ некоторый компакт, не содержащий x_0. Тогда найдется постоянная $\delta_0>0$ такая, что $|x-x_0^*|-|x-x_0|\geq\delta_0$ для всех $x\in K$. В этом случае для всех $x\in K$ $0\leq u_2\leq cu_1e^{-\sqrt{\lambda}\delta_0}$, где c – некоторая постоянная. Этот факт гарантирует утверждение. Рассмотрим случай граничного условия Неймана. В этом случае аргументы те же, но используется четное расширением решения. □

Как и выше рассмотрим задачу.

$$Lw+\lambda w=\delta(x-x_0),\quad Bw|_\Gamma=0, \tag{1.119}$$

Найдется $\lambda_0>0$ такое что при $|arg\,(\lambda-\lambda_0|\leq\pi-\delta_0$ $(\delta_0>0)$, уравнение (1.119) разрешимо и полученное решение принадлежит классу $W^1_{p,B}(G)$, причем справедлива оценка

$$\|\hat{w}\|_{W^1_{p,B}(G)}+|\lambda|\|\hat{w}\|_{W^{-1}_{p,B}(G)}\leq c_1 \tag{1.120}$$

где постоянная c_1 не зависит от λ (см. замечание 1.1). Кроме того, имеем, что $w\in W^2_p(G_\varepsilon)$ для все $\varepsilon>0$ и $p\geq n/(n-1)$, где $G_\varepsilon=\{x\in G:\ |x-x_0|\geq\varepsilon\}$. Утверждение вообще говоря вытекает из свойств внутренней гладкости решений эллиптических задач (см. [97]). Однако, мы также можем сослаться и на теорему 1.6. Рассмотрим, например, случай $Bu\neq u$. Построим сопряженный оператор $L^*v=-\Delta v-\sum_{i=1}^n a_iv_{x_i}+(a_0-\sum_{i=1}^n a_{ix_i})v$ и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda}v(x,y)+L^*v(x,y)=\delta(x-y),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.121}$$

где y - параметр. Пусть $K_{x_0,\delta_0}=\{x\in G:\ -|x-x_0|+\rho(x,\Gamma)\geq\delta_0\}$, где $\delta_0>0$ - некоторая фиксированная постоянная. Фиксируем также постоянную $\delta_1\in(0,\pi)$ и пусть

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\int_0^1(\vec{a}(x_0+\tau(x-x_0)),(x-x_0))\,d\tau.$$

Теорема 1.13. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma\in C^2$ или $G=\mathbb{R}^n_+$, $a_i=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ и выполнены условия* (1.46). *Тогда найдутся $\lambda_0\geq0$, $\delta_2>0$ такие, что при $|arg\,(\lambda-\lambda_0)|\leq\pi-\delta_1$ существует единственное решение задачи* (1.119) *такое, что $w\in W^1_{p,B}(G)$ для всех $p\in(1,n/(n-1))$,*

$w \in W_2^2(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ и для $x \in \{x \in K_{x_0,\delta_0} : |x - x_0| \geq \varepsilon_0, |x| \leq R\}$, где $R, \varepsilon_0 > 0$ постоянные, имеет место представление

$$w(x,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x-x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 2); \qquad (1.122)$$

$$w(x,\lambda) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} e^{\psi_0(x)-\sqrt{\lambda}|x-x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 3); \qquad (1.123)$$

Доказательство теоремы 1.13. Существование и единственность решений вытекает из теоремы 1.6 в [77]. Покажем асимптотику решений. Запишем формулу Грина (используем граничное условие)

$$w(y) + \int_\Gamma \overline{(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v)} w(x)\, d\Gamma_x = \overline{v(x_0, y)},\ \tilde{\sigma} = \sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i. \qquad (1.124)$$

Рассмотрим, например, случай $n = 3$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Пусть $y \in K_{x_0,\delta_0}$. Запишем второе слагаемое в виде

$$\int_\Gamma \overline{(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v)} w(x)\, d\Gamma_x 4\pi|x_0 - y| e^{\sqrt{\lambda}|x_0-y|} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x_0-y|}}{4\pi|x_0 - y|}$$

Чтобы получить утверждение теоремы достаточно показать неравенство вида

$$|\int_\Gamma \overline{(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v)} w(x)\, d\Gamma_x| 4\pi|x_0 - y| e^{\sqrt{\lambda}|x_0-y|} \leq C e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}},$$

где постоянная C не зависит от λ и $\delta_2 > 0$ – некоторая постоянная. Используем аналог равенства (2.68):

$$\begin{aligned} e^{|x_0-y|\sqrt{\lambda}} \overline{(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v)} = \Big(-\sqrt{\lambda} \frac{e^{-\psi(x)-\sqrt{\lambda}(|x-y|-|x_0-y|)}}{4\pi|x-y|} \Big(\frac{(x-y),\nu)}{|x-y|} + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})\Big) \\ + \tilde{\sigma} \frac{e^{-\psi(x)-\sqrt{\lambda}(|x-y|-|x_0-y|)}}{4\pi|x-y|} \Big(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})\Big)\Big). \qquad (1.125) \end{aligned}$$

Поскольку $y \in K_{x_0,\delta_0}$, имеем, что $\sqrt{|x - y|} - |x_0 - y| \geq \delta_0$ и тогда имеем оценку

$$|e^{|x_0-y|\sqrt{\lambda}}|x_0 - y|(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)| \leq C e^{-\delta_0 Re\sqrt{\lambda}} \leq C e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}}, \qquad (1.126)$$

где δ_2 – положительная постоянная, откуда и вытекает утверждение. □

ГЛАВА 2

Обратные задачи об определении точечных источников по точечным данным переопределения

В этой главе исследуется вопрос об определении точечных источников по точечным данным переопределения. Мы рассматриваем случаи $n = 1, 2, 3$. В одномерном случае уравнение имеет вид

$$Lu = u_t - L_0u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in G \times (0,T), \tag{2.1}$$

где $L_0u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и $G = (a,b)$. Здесь неизвестными являются функция $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в водоеме или воздухе, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in G$ — точечные источники и r — число этих источников. Мы считаем, что $-\infty \le a < b \le \infty$, $T \le \infty$. Уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями:

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2.2}$$

$$B_1u(t,a) = \varphi_1(t), \quad B_2u(t,b) = \varphi_2(t), \tag{2.3}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1u = u$ или $B_1u = u_x + \sigma_1u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2u = u$ или $B_2u = u_x + \sigma_2u$ ($\sigma_i = const$). В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0$ или $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$, соответственно. В качестве условий переопределения мы берем условия вида

$$u(y_j,t) = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{2.4}$$

где $a \le y_1 < y_2 < \ldots < y_s \le b$. Равенство $y_1 = a$ возможно только если $a \neq -\infty$ и $B_1u = u_x$. Аналогично, равенство $y_s = b$ возможно только если $b \neq +\infty$ и $B_2u = u_x$.

В случае $n = 2, 3$ мы рассматриваем обратные задачи об определении правой части в уравнении

$$u_t + Lu = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i) + f_0(t,x), \quad Lu = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u, \tag{2.5}$$

где $(x, t) \in Q = (0, T) \times G$, G – область $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ с границей $\Gamma \in C^2$ и δ – дельта-функция Дирака. Уравнение (2.5) дополняется начальными и граничными условиями

$$Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = (0, T) \times \Gamma, \tag{2.6}$$

где $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$ или $Bu = u$ (ν – внешняя единичная нормаль к Γ), и условиями переопределения

$$u(y_j, t) = \psi_j(t), \ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.7}$$

В теории тепломассопереноса функция u - концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует источники (стоки). В самой общей постановке задачи (2.5)-(2.7) определению подлежат как сами мощности точечных источников $N_i(t)$, так и их местоположение x_i и их число m. Описание моделей такого сорта можно найти, например, в [53].

2.1 Вспомогательные утверждения и определения

Вначале мы рассмотрим одномерную ситуацию, т.е. $n = 1$. Для простоты в качестве условий на данные возьмем следующие условия:

(C) $\varphi_i \in W_2^{3/4}(0, T)$ или $\varphi_i \in W_2^{1/4}(0, T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле или условие третьей краевой задачи; $u_0 \in W_2^1(a, b)$, $f \in L_2(Q)$.

Условия согласования запишем в виде:

(D) если условие в точке $x = a$ $(x = b)$ является условием Дирихле, то $\varphi_1(0) = u_0(a)$ $\big($соответственно $\varphi_2(0) = u_0(b)\big)$.

Построим вспомогательную функцию Φ как решение задачи (2.1)-(2.3), где $N_i \equiv 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$. Мы имеем

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* (D), $a(x), b(x), c(x) \in L_\infty(G)$ *и* $T = \infty$. *Тогда найдется* $\lambda_1 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_1$ *и* $fe^{-\lambda t} \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(a, b)$, $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{3/4}(0, T)$ *если данное* i*-е условие представляет собой условие Дирихле или* $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{1/4}(0, T)$ $(i = 1, 2)$ *в противном случае, существует единственное решение* Φ *задачи* (2.1)-(2.3) , *где* $N_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *такое, что* $\Phi e^{-\lambda t} \in W_2^{1,2}(Q)$.

Пусть $T < \infty$, $a(x), b(x), c(x) \in L_\infty(G)$ и выполнены условия (C), (D). *Тогда существует единственное решение Φ задачи* (2.1)-(2.3), *где $N_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) такое, что $\Phi \in W_2^{1,2}(Q)$.*

Утверждение леммы – следствие теорем 5.7, 7.11, 8.2 из работы [3].

В некоторой степени функция Φ характеризует вклад от известных распределенных источников загрязнения. Сделав замену $\omega = u - \Phi$, мы сведем задачу (2.1)-(2.4), к задаче

$$\omega_t - L_0\omega = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i),\ B_1\omega(t, a) = 0,\ B_2\omega(t, b) = 0,\ \omega(x, 0) = 0, \quad (2.8)$$

$$\omega(t, y_j) = \tilde{\psi}_j(t) = \psi_j - \Phi(t, y_j),\ j = 1, 2, \ldots, s. \quad (2.9)$$

Следующее утверждение в случае интервала (a, b) конечной длины почти совпадает с леммой 2 в [77] (в лемме 2 рассматривается случай $r = 1$).

Лемма 2.2. *Пусть $N_i(t) \in L_2(0, T)$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), $a(x), b(x), c(x) \in L_\infty(G)$, $T < \infty$ и условия* (C), (D) *выполнены. Тогда существует единственное решение u задачи* (2.1)-(2.3) *из класса $u \in L_2\big(0, T; W_2^1(a, b)\big)$, $(u - \Phi)_t \in L_2\big(0, T; \tilde{W}_2^{-1}(a, b)\big)$, $u \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$, где*

$$Q_\varepsilon = \big\{(x, t) \in Q : |x - x_i| > \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, r\big\}.$$

Если $T = \infty$, $a(x), b(x), c(x) \in L_\infty(G)$ и условие (D) *выполнено, то найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ и $fe^{-\lambda t} \in L_2(Q)$, $N_i(t)e^{-\lambda t} \in L_2(0, T)$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), $u_0 \in W_2^1(a, b)$, $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{3/4}(0, T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле или $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{1/4}(0, T)$ ($i = 1, 2$) в противном случае, существует единственное решение u задачи* (2.1)-(2.3) *такое, что $ue^{-\lambda t} \in L_2\big(0, T; W_2^1(a, b)\big)$, $(u - \Phi)_t e^{-\lambda t} \in L_2\big(0, T; \tilde{W}_2^{-1}(a, b)\big)$, $ue^{-\lambda t} \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.*

В случае $T < \infty$ доказательство совпадает с доказательством леммы 2 в [77]. В частности, существование решения из указанного класса вытекает из теоремы 14.2 работы [97]. Вопросы существования и обобщенных решений и их свойств также подробно рассмотрены в книге [4, гл. 3] и можно сослаться на эту монографию.

Рассмотрим многомерный случай, в котором G – область в $\mathbb{R}^n$ с компактной границей Γ класса C^2 (см. определение включения $\Gamma \in C^2$ в гл. 1 в [4]). В случае неограниченной области G, решение, которое мы ищем, принадлежит некоторому пространству Лебега, т.е. фактически предполагаем убывание решения при $|x| \to \infty$. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$ для $n = 2$ и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ для $n = 3$. Скобками $(\cdot, \cdot)$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Далее приведем теоремы разрешимости для задач (2.5), (2.6). Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), \quad u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0) \text{ если } Bu = u. \tag{2.10}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t + Lu = f_0(t, x), \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2.11}$$

Следующая теорема вытекает из теорем 1.3, 1.1.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнено условие* (2.10), (1.46) *и* $T = \infty$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что для любых* $\lambda \geq \lambda_0$, *если* $e^{-\lambda t} f_0 \in L_2(Q)$, $e^{-\lambda t} g(x, t) \in W_2^{3/4, 3/2}(S)$ *в случае граничных условий Дирихле или* $e^{-\lambda t} g(x, t) \in W_2^{1/4, 1/2}(S)$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *в противном случае, то существует единственное решение задачи* (2.11) *такое, что* $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Доказательство. Сделаем замену $u = e^{\lambda t} v$, $\lambda \geq \lambda_0$. Функция v есть решение задачи

$$v_t + Lv + \lambda v = e^{-\lambda t} f_0(t, x), \quad Bv|_S = e^{-\lambda t} g, \quad v|_{t=0} = u_0(x), \tag{2.12}$$

Теоремы о следах гарантируют, что существует функция $\Phi \in W_2^{1,2}(Q)$ такая, что $B\Phi|_S = e^{-\lambda t} g$, используя которую можем свести задачу (2.12) к задаче с однородными граничными условиями (см., например, гл. 6 в [103]. Фиксируя $\delta_0 \in (0, \pi/2)$ и используя теорему 1.3, где считаем, что $D(L) = W_{2,B}^2(G)$. найдем соответствующий параметр λ_0. Далее сошлемся на теорему 1.1.

$\square$

Если $T < \infty$, тогда можем взять $\lambda_0 = 0$ и вышеупомянутая теорема может быть сформулирована в виде

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнено условия* (2.10), (1.46) *и* $T < \infty$. *Тогда, если* $f_0 \in L_2(Q)$, $g(x,t) \in W_2^{3/4,3/2}(S)$ *в случае граничных условий Дирихле или* $g(x,t) \in W_2^{1/4,1/2}(S)$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *в противном случае, то существует единственное решение задачи* (2.11) *такое, что* $u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Рассмотрим еще одно вспомогательное уравнение

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{2.13}$$

$$Bw|_S = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \tag{2.14}$$

Напомним, что $W_{p,B}^1(G)$ - пространство функций $u \in W_p^1(G)$, удовлетворяющей однородным условиям Дирихле, если $Bu = u$ и $W_{p,B}^1(G) = W_p^1(G)$, если $Bu \neq u$. Обозначим через $W_{p,B}^{-1}(G)$ двойственное пространство к $W_{q,B}^1(G)$ (отношение двойственности задается скалярным произведением в $L_2(G)$, (см. [5]).

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие* (1.46), $p \in (1, n/(n-1))$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *если* $Bu \neq u$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что для любых* $\lambda \geq \lambda_0$, *если* $e^{-\lambda t} N_i \in L_2(0, \infty)$, *то существует единственное решение задачи* (2.13), (2.14) *такое, что* $e^{-\lambda t} w \in L_2(0, \infty; W_{p,B}^1(G))$ *и* $e^{-\lambda t} w_t \in L_2(0, \infty; W_{p,B}^{-1}(G))$, $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *с* $Q_\varepsilon = \{(x,t) \in Q : \ |x - x_i| > \varepsilon \ \forall i \leq m\}$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Сделаем замену $w = e^{\lambda t} v$. Функция v есть решение задачи

$$v_t + Lv + \lambda v = \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda t} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{2.15}$$

$$Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \tag{2.16}$$

Фиксируя $\delta_0 \in (0, \pi/2)$ и используя теорему 1.3, где считаем, что $D(L) = W_{p,B}^1(G)$. найдем соответствующий параметр λ_0. Возьмем $\lambda \geq \lambda_0$. Далее сошлемся на теорему 1.1. Получим что существует решение задачи (2.15), (2.16) такое, что $v \in L_2(0, \infty; W_{p,B}^1(G))$ и $v_t \in L_2(0, \infty; W_{p,B}^{-1}(G))$. Возьмем $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что φ равна 1 вне некоторой ε-окрестности U точек $\{x_i\}$ и равна нулю в ε-окрестности этих точек. Параметр ε считаем настолько малым, что окрестность U лежит на положительном расстоянии от границы Γ. Тогда функция $v_0 = \varphi v$ есть решение задачи

$$v_{0t} + Lv_0 + \lambda v_0 = -2\nabla v \nabla \varphi + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} v - v\Delta\varphi, \tag{2.17}$$

$$Bv_0|_S = 0, \quad v_0|_{t=0} = 0, \tag{2.18}$$

$\square$

Правая часть в этом уравнении принадлежит классу $L_2(0,T;L_p(G))$. Таким образом, с одной стороны, по построению, v_0 есть обобщенное решение задачи, с другой стороны повторяя рассуждения из теоремы 2.1 получим существование решения задачи (2.17), (2.18) из класса $v_{0t} \in L_2(0,T;L_p(G))$, $v_0 \in L_2(0,T;W_p^2(G))$. В силу теоремы единственности, получим, что функция v_0 удовлетворяет этим включениям и значит, в силу произвольности ε, $v_t \in L_2(0,T;L_p(G_\varepsilon))$, $v \in L_2(0,T;W_p^2(G_\varepsilon))$ для всех $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что правая часть в (2.17) принадлежит $L_2(0,T;W_p^1(G)) \subset L_2(Q)$. Аналогично получим $v_0 \in W_2^{1,2}(Q)$ и значит $v \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon))$ для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* (1.46), $T < \infty$, $p \in (1, n/(n-1))$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *если* $Bu \neq u$. *Тогда если* $N_i \in L_2(0,T)$, *то существует единственное решение задачи* (2.13), (2.14) *такое, что* $w \in L_2(0,T;W_{p,B}^1(G))$ *и* $w_t \in L_2(0,T;W_{p,B}^{-1}(G))$, $w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Утверждение теоремы вытекает из предыдущей теоремы и возможности продолжения данных на весь промежуток $(0,\infty)$ с сохранением класса.

2.2 Определение источников в одномерном случае

В этом параграфе считаем, что коэффициенты оператора L_0 удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), если не оговорено противное.

Следующая теорема получена в работе [62]. Мы приведем ее для полноты изложения. В ней мы утверждаем, что в задаче (2.1)-(2.4) никакое количество точек замеров $S_y = \{y_i\}_{i=1}^s$ не позволяет определить местоположение источников $S_x = \{x_i\}_{i=1}^r$ и их мощности, если не задано дополнительное условие на взаимное расположение этих точек.

Считаем ниже, что точки множеств S_x, S_y занумерованы в порядке возрастания. Кроме того, предположим, что коэффициенты уравнения (2.1) обладают некоторой регулярностью, например, $a(x) \in W_\infty^1(a,b)$, $b, c \in L_\infty(a,b)$.

Теорема 2.5. *Пусть выполнено одно из условий*

1. $a < x_1 < x_2$, $y_i > x_2$, $i = 1, 2, \ldots, s$,

2. $x_{r-1} < x_r < b$, $y_i < x_{r-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s$,

3. $[x_{r_1}, x_{r_1+2}] \cap S_y = \emptyset$ *для некоторого* r_1.

Тогда решение задачи (2.1)-(2.4) *об определении мощностей источников* $N_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *и функции u из класса, указанного в лемме 2.2 неединственно.*

Замечание 2.1. *Утверждение теоремы влечет, что даже задача об определении мощностей источников может быть решена только если точки источников* $\{x_i\}$ *и точки замеров* $\{y_i\}$ *грубо говоря чередуются. Однако, если мы ищем также и местоположение источников, это условие не может быть гарантировано. Как показывают примеры, в этом случае задачи об определении точек* $\{x_i\}$ *и интенсивностей* $\{N_i\}$ *сводятся к набору локальных задач об определении одной из интенсивностей или одной из точек* $\{x_i\}$ *при правильном расположении точек* $\{x_i\}$ *и* $\{y_i\}$. *Однако, даже в такой формулировке задача простой не является.*

Следующая теорема в некоторых частных случаях совпадает с теоремой 2 в [62] (в случае конечного промежутка (a, b) и условий Дирихле и Неймана).

Теорема 2.6. *Пусть* $T = \infty$, *выполнены условия* (1.8), (1.9) *и пусть* (u^i, N^i) — *решения уравнения*

$$u_t^i - L_0 u^i = N^i(t)\delta(x - x_i) + f, \quad (x, t) \in Q = (a, b) \times (0, T),$$

удовлетворяющие начально-краевым условиям (2.2)-(2.3) *и условиям переопределения* (2.4) *с* $s = 2$ *из класса, указанного в лемме 2.2, причем* $x_i \in (y_1, y_2)$ $(i = 1, 2)$. *Тогда* $x_1 = x_2$ *и* $N^1 = N^2$ *если* $N^1 \not\equiv 0$ *или* $N^2 \not\equiv 0$.

Доказательство. Пусть $N_1 \not\equiv 0$ или $N_2 \not\equiv 0$. Покажем, что $x_1 = x_2$ и $N^1 = N^2$. Предположим противное, что $x_1 \neq x_2$. Применяя преобразование Лапласа и вычитая полученные равенства, мы придем к задаче

$$\lambda \hat{w} - L_0 \hat{w} = \hat{N}_1(\lambda)\delta(x - x_1) - \hat{N}_2(\lambda)\delta(x - x_2), \ B_i \hat{w} = 0, \ \hat{w}(y_i) = 0 \ (i = 1, 2),$$

где символ $\hat{w}$ обозначает преобразование Лапласа от функции $w = u^1 - u^2$. Ссылаясь на теорему 1.2, найдем число λ_0 такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\lambda I - L_0$ обратим, тогда предыдущее равенство перепишется в виде

$$\hat{w}(y) = \hat{N}_1(\lambda) v_1(y) - \hat{N}_2(\lambda) v_2(y), \quad \hat{w}(y_i) = 0 \ (i = 1, 2), \tag{2.19}$$

где функции $v_i(y)$ имеют асимптотическое представление

$$v_i(y) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\sqrt{\lambda}\Big|\int_{x_i}^{y} r(\xi)\,d\xi\Big| + \int_{x_i}^{y} r_1(\xi)\,d\xi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \qquad (2.20)$$

Считаем, что y_i – внутренние точки интервала (a, b). Случай когда одна или обе точки граничные рассматривается совершенно аналогично. Полагая $y = y_j$, $j = 1, 2$, мы придем к системе

$$\hat{N}_1(\lambda)v_1(y_j) - \hat{N}_2(\lambda)v_2(y_j) = 0, \; j = 1, 2. \qquad (2.21)$$

Запишем определитель этой системы J используя представления (2.20). Без ограничения общности считаем, что $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$. Имеем

$$J = \frac{1}{4\lambda\sqrt{a(x_1)a(x_2)}} \exp\Big(-\sqrt{\lambda}\Big(\Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Big| + \Big|\int_{x_2}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\Big|\Big) + \int_{x_1}^{y_1} r_1(\xi)\,d\xi + \int_{x_2}^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi\Big) \cdot J_0,$$

$$J_0 = \begin{vmatrix} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big) & e^{-\sqrt{\lambda}\left(\left|\int_{x_2}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\right| - \left|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\right|\right) + \int_{x_2}^{x_1} r_1(\xi)\,d\xi} \\ e^{-\sqrt{\lambda}\left(\left|\int_{x_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\right| - \left|\int_{x_2}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\right|\right) + \int_{x_1}^{x_2} r_1(\xi)\,d\xi} & \Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big) \end{vmatrix}$$

При наших предположениях

$$\Big|\int_{x_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\Big| - \Big|\int_{x_2}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\Big| > 0, \; \Big|\int_{x_2}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Big| - \Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Big| > 0$$

Следовательно, $J_0 \approx 1 \neq 0$. Тогда найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ $J > 0$ и значит из (2.21) вытекает, что $\hat{N}_i(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq \lambda_1$. По внутренней теореме единственности для аналитических функций $\hat{N}_i \equiv 0$, $i = 1, 2$. Получили противоречие. Следовательно, $x_1 = x_2$ и $v_1 \equiv v_2$. Тогда из (2.21) вытекает, что $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ и значит $N_1 = N_2$.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае конечного интервала $(0, T)$.

Теорема 2.7. *Пусть $T < \infty$, выполнены условия* (1.8), (1.9) *и пусть* (u^i, N^i) — *решения уравнения*

$$u^i_t - L_0 u^i = N^i(t)\delta(x - x_i) + f, \quad (x, t) \in Q = (a, b) \times (0, T),$$

удовлетворяющие начально-краевым условиям (2.2)-(2.3) *и условиям переопределения* (2.4) *с* $s = 2$ *из класса, указанного в лемме 2.2, причем* $x_i \in (y_1, y_2)$ $(i = 1, 2)$*. Тогда* $x_1 = x_2$ *и* $N^1 = N^2$ *если* $N^1 \not\equiv 0$ *или* $N^2 \not\equiv 0$*.*

Доказательство. Предположим противное, что $x_1 \neq x_2$. Считаем для определенности, что $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$. Функция $w = u_1 - u_2$ есть решение задачи

$$w_t - L_0 w = N^1 \delta(x - x_1) - N^2 \delta(x - x_2), \tag{2.22}$$

$$w(0, x) = 0,\ B_1 w(t, a) = 0,\ B_2 w(t, b) = 0,\ w(t, y_j) = 0\ (j = 1, 2). \tag{2.23}$$

Уравнение в (2.22) в области Q выполняется в смысле интегрального тождества

$$\int_Q w_t \varphi(t, x) + a(x) w_x \varphi_x + (b(x) + a_x(x)) w_x + c(x) w) \varphi(t, x)\, dxdt =$$
$$\int_0^T N^1(t) \varphi(t, x_1) - N^2(t) \varphi(t, x_2)\, dt \ \forall \varphi \in L_2(0, T; W_2^1(G)) \tag{2.24}$$

и п.в. в Q. Здесь интеграл $\int_Q w_t \varphi(t, x)\, dxdt$ понимается в смысле отношения двойственности между $L_2(0, T; \tilde{W}_2^1(G))$ и $L_2(0, T; \tilde{W}_2^{-1}(G))$. Пусть, например, $y_1 > a$, $y_2 < b$. Взяв в (2.24) функцию φ такую, что $\varphi = 0$ при $x > y_1$, мы получим, что функция w есть решение смешанной задачи (или задачи Дирихле)

$$w_t - L_0 w = 0,\ w(0, x) = 0, B_1 w(t, a) = 0,\ w(t, y_1) = 0,$$

с однородными данными из класса $W_2^{1,2}((0, T) \times (a, y_1))$. Следовательно (см. [4]), $w = 0$ п.в. в $(0, T) \times (a, y_1)$. Аналогично получим, что $w = 0$ п.в. в $(0, T) \times (y_2, b)$. Далее мы можем сослаться, например, на теорему 1.1 в работе [104] (см. также теорему 1 в [105]), откуда вытекает, что $w = 0$ п.в. на множестве $(0, T) \times (a, x_1) \cup (x_2, b)$. В частности имеем, что $w(t, x_1) = 0, w(t, x_2) = 0$. Далее обращаясь к интегральному тождеству (2.22) возьмем в нем функцию φ такую, что $supp\, \varphi \subset [0, T] \times [x_1, x_2]$. Тогда получим, что функция w есть обобщенное решение первой начально-краевой задачи на интервале (x_1, x_2) с нулевыми данными и, следовательно (см. параграфы 3,4 гл. 3 в [4]) $w \equiv 0$. Тогда в интегральном тождестве (2.24) левая часть равна нулю и в силу произвольности функции φ получим, что $N^1 = N^2 = 0$ п.в. Получили противоречие. Таким образом, $x_1 = x_2$. Тогда из (2.24), где как и ранее левая часть равна нулю, вытекает, что $N^1 = N^2$. Остальные случаи рассматриваются по аналогии.

Пусть, например, $y_1 = a$, $y_2 < b$. Аналогично рассматривая (2.24) получим, что $w = 0$ п.в. в $(0, T) \times (y_2, b)$. Ссылаясь на теорему 1.1 в работе [104], получим, что $w = 0$ п.в. в $(0, T) \times (x_2, b)$. Далее, имеем, что $w(t, a) = w_x(t, a) = 0$. Продолжая w нулем при $x < a = y_1$, получим, что w – решение параболического уравнения в некоторой области $(0, T) \times (a_1, x_1)$ $(a_1 < a)$, которое равно нулю в области $(0, T) \times (a_1, a)$. Ссылаясь на теорему 1.1 в работе [104] получим, что $w = 0$ п.в. в $(0, T) \times (a, x_1)$. Далее, доказательство точно такое же как и ранее. □

Как следствие теорем 2.6, 2.7 имеем, что

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия* (1.8), (1.9). *Тогда решение задачи* (2.2)-(2.4) *где* $r = 1$ *и* $s = 2$, *определения точки* x_1, *функции* u *и интенсивности* N_1 *единственно в случае, если известно, что* $x_1 \in (y_1, y_2)$.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия* (1.8), (1.9). *Тогда решение задачи* (2.2)-(2.4) *где* $r = 1$ *и* $s = 1$, *определения интенсивности* N_1 *и решения* u *единственно в классе, указанном в леммы 2.2.*

Далее, мы рассматриваем случай $r = 1$, $s = 2$, предполагая, что неизвестная точка расположена между двумя замерами, точками y_1, y_2. т.е. $a \le y_1 < x_1 < y_2 \le b$. Построим вспомогательную функцию Φ как решение задачи (2.1)-(2.3) (см. лемму 2.1) и сведем задачу к задаче (2.8), (2.9). Как мы уже отмечали, возможен случай $y_1 = a$ (в случае $a \neq -\infty$), соответственно, случай $y_2 = b$ (в случае $b \neq +\infty$). Тогда в первом случае мы берем $B_1 u|_{x=a} = u_x(a, t)$, а во втором $B_2 u|_{x=b} = u_x(b, t)$.

Применив преобразование Лапласа к уравнению в (2.8), обращая оператор $\lambda - L_0$ и положив $x = y_i$, придем к равенствам

$$\omega_0(y_i, \lambda) L(N_1)(\lambda) = L(\tilde{\psi}_i)(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \tilde{\psi}_i(t)\, dt = \Phi_i(\lambda), \tag{2.25}$$

где ω_0 — решение задачи

$$\lambda \omega_0 - L_0 \omega_0 = \delta(x - x_1), \quad B_1 \omega_0(a) = 0, \; B_2 \omega_0(b) = 0. \tag{2.26}$$

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия* (1.8), (1.9) *и* (u, N_1, x_1) — *решение задачи* (2.1)-(2.4), *где* $T = \infty$, *из класса указанного в лемме 2.2, причем* $N_1 \not\equiv 0$ *и* $y_1 < x_1 < y_2$. *Тогда найдется* $\lambda_2 > 0$ *такое, что на* $[\lambda_2, \infty)$ *множества нулей* *функций* $\Phi_1(\lambda)$ *и* $\Phi_2(\lambda)$ *совпадают и не имеют конечной предельной точки, существует конечный предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}=A,$$

и справедливы равенства: если $y_1=a$ *и* $y_2<b$, *то*

$$\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_a^{y_2} r(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi+O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big);\quad (2.27)$$

если $y_1>a$ *и* $y_2=b$, *то*

$$\int_{x_1}^{b} r(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{y_1}^{b} r(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{b} r_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{2\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}+O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big);\quad (2.28)$$

в оставшихся случаях

$$\int_{y_1}^{x_1} r(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}+O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).\quad (2.29)$$

Доказательство теоремы 2.10. Мы воспользуемся теоремой 1.2. Отметим, что величины $\omega_0(y_i,\lambda)$ строго положительно при достаточно большом $\lambda>0$ (см. представления (1.18)-(1.20) из теоремы 1.2) (положительность $\omega_0(x,\lambda)$ на (a,b) также вытекает из принципа максимума (см. например, теорему 8.1 в [4] в случае условий Дирихле)). Рассмотрим случай $y_1=a$ и $y_2<b$. Пусть λ_1 параметр из леммы 2.2 и $\lambda_0>\lambda_1$, причем $fe^{-\lambda_0 t}\in L_2(Q)$, $N_i(t)e^{-\lambda_0 t}\in L_2(0,T)$ $(i=1,2,\dots,r)$ $u_0{\in}W_2^1(a,b)$, $e^{-\lambda_0 t}\varphi_i\in W_2^{3/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле или $e^{-\lambda_0 t}\varphi_i\in W_2^{1/4}(0,T)$ $(i=1,2)$ в противном случае. Выберем параметр $\lambda_2>\lambda_0$ настолько большим, чтобы при $\lambda\geq\lambda_2$ выражение $O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)$ в (1.17) в точке y_2 и в (1.18) было по модулю не больше $1/2$. Далее, функция $L(N_1)(p)$ аналитична в полуплоскости $Re\,p\geq\lambda_2$, и значит, множество нулей S_0 функции $L(N_1)(\lambda)$ $(\lambda\geq\lambda_2)$ не может иметь конечной предельной точки (согласно внутренней теореме единственности для аналитических функций). Тогда из (2.25) вытекает, что множества нулей функций $\Phi_i(\lambda)$ совпадает с S_0 и эти функции имеют один знак. Разделив равенства (2.25) друг на друга, получим

$$\frac{\omega_0(y_1,\lambda)}{\omega_0(y_2,\lambda)}=\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)}.$$

Далее, используя представления (1.17), (1.18) из теоремы 1.2 и логарифмируя полученное равенство, мы приходим к тождеству

$$\sqrt{\lambda}\Big(-\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi + \int_{x_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi\Big) - \int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi$$
$$= \ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)} + \ln\bigg(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\bigg). \qquad (2.30)$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$2\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi \;=\; \int_a^{y_2} r(\xi)\,d\xi \,-\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi \,-\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)} \,+\, O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

Отсюда и вытекает (2.27). Рассмотрим случай $y_1 > a$ и $y_2 = b$. Аналогично, используя представления (1.17), (1.19) из теоремы 1.2 и логарифмируя полученное равенство, мы приходим к тождеству

$$2\sqrt{\lambda}\int_{x_1}^{b} r(\xi)\,d\xi - \sqrt{\lambda}\int_{y_1}^{b} r(\xi)\,d\xi - \int_{y_1}^{b} r_1(\xi)\,d\xi = \ln\frac{2\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + \ln\bigg(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\bigg).$$

Из этого равенства получаем (2.28). Равенство (2.29) получаем аналогично. □

Следствие 2.1. *Переходя к пределу при $\lambda \to \infty$ мы получим равенство*

$$A = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \int_{y_1}^{x_1} r(\xi)\,d\xi, \qquad (2.31)$$

откуда вытекает, что

$$|A| < \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi. \qquad (2.32)$$

Из (2.31) видно, что в силу положительности функции $r(\xi)$ величина $x_1 \in (y_1, y_2)$ определяется однозначно при условии (2.32).

Замечание 2.2. *Формулы (2.27)-(2.29), приведенные в теореме, позволяют определить местоположение источника, точку x_1, в том числе и численно. Численные эксперименты показывают, что такое определение вполне возможно [77]. Казалось бы что увеличение параметра λ при использовании асимптотических формул должно дать более точное определение точки x_1. Однако, на самом деле увеличение параметра λ для увеличения точности вычислений невозможно. Оценки показывают, что для получения удовлетворительных результатов необходимо брать $\lambda \le c/\tau$, где τ - шаг по времени, возникающий при дискретизации задачи и c – некоторая постоянная (см.*

[77]). Точной формулой (2.31) также пользоваться трудно из-за трудностей с вычислением величины A, при вычислении которой малые колебания данных влекут большие колебания в ответе.

Следующая теорема – теорема о разрешимости задачи (2.1)-(2.4), где $r = 1$ и $s = 1$ и определению подлежат решение u и интенсивность N_1. Как и ранее, используя лемму 2.1, построим вспомогательную функцию Φ как решение задачи (2.1)-(2.3), где $N_i \equiv 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$. Сделав замену $\omega = u - \Phi$, мы сведем задачу (2.1)-(2.4), к задаче (2.8), (2.9).

Рассмотрим функцию $V_\delta(t)$ $(\delta > 0)$ такую, что

$$L(V_\delta)(p) = e^{-\sqrt{p}\delta}/\sqrt{p}, \quad \lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg\lambda}. \ -\pi < \arg\lambda < \pi, \ \lambda = \sigma + i\gamma.$$

Определим класс функций

$$H_\delta = \big\{\psi(t) = \int_0^t \psi_0(\tau) V_\delta(t-\tau)\, d\tau : \ \psi_0 \in L_2(0,T)\big\}.$$

Теорема 2.11. *Пусть $r = 1$ и $s = 1$, $\tilde{\psi}_1 \in H_{\delta_0}$ с $\delta_0 = \big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\, d\xi\big|$, выполнены условия (1.8), (1.9) и $T < \infty$. Тогда существует единственное решение (u, N_1) задачи (2.1)-(2.4) такое, что $u \in L_2\big(0,T; W_2^1(a,b)\big)$, $(u-\Phi)_t \in L_2\big(0,T; \tilde{W}_2^{-1}(a,b)\big)$, $u \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$. Пусть $T = \infty$, $r = 1$, $s = 1$ и выполнены условия (1.8), (1.9) на данные. Тогда найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_1$, $fe^{-\lambda t} \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(a,b)$, $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{3/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле и $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{1/4}(0,T)$ $(i = 1,2)$ в противном случае и функция $\tilde{\psi}_1$ допускает представление*

$$\tilde{\psi}_1 = \int_0^t \psi_0(\tau) V_{\delta_0}(t-\tau)\, d\tau \quad \text{с} \quad \delta_0 = \Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\, d\xi\Big|, \ \psi_0(\tau) e^{-\lambda\tau} \in L_2(0,\infty), \quad (2.33)$$

то существует единственное решение (u, N_1) задачи (2.1)-(2.4), где $r = 1$ и $s = 1$ такие, что $ue^{-\lambda t} \in L_2\big(0,T; W_2^1(a,b)\big)$, $(u-\Phi)_t e^{-\lambda t} \in L_2\big(0,T; \tilde{W}_2^{-1}(a,b)\big)$, $ue^{-\lambda t} \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $T = \infty$. Рассмотрим приведенную задачу (2.8), (2.9). Формально применяя преобразование Лапласа, получим равенства

$$\lambda\hat{\omega} - L_0\hat{\omega} = \hat{N}_1(\lambda)\delta(x - x_1), \quad (2.34)$$

$$\hat{\omega}(y_1) = L(\tilde{\psi}_1)(\lambda),\ B_1\hat{\omega}(a) = 0,\ B_2\hat{\omega}(b) = 0. \tag{2.35}$$

Возьмем λ такое, что $Re\,\lambda \geq \lambda_0$, где параметр λ_0 определен в теореме 1.2 с $\delta_0 = \pi/2$. Без ограничения общности считаем, что величина $|O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})|$, определенная в формуле (1.17) не превышает $1/2$. Фактически, $\hat{\omega} \in \tilde{W}_2^1(a,b) \cap W_2^2(G_\varepsilon)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ есть обобщенное решение нашей краевой задачи, удовлетворяющее однородным граничным данным. Из (2.34) получим, что должно быть выполнено равенство

$$L(N_1)(\lambda) = L(\tilde{\psi}_1)(\lambda)/\omega_0(y_1,\lambda) = F(\lambda),\ \omega_0 = (\lambda - L_0)^{-1}\delta(x - x_1). \tag{2.36}$$

Отметим, что $L(\tilde{\psi}_i)(t) = e^{-\sqrt{\lambda}\delta_0}L(\psi_0)/\sqrt{\lambda}$ в силу свойств преобразования Лапласа (преобразование Лапласа свертки). Используя асимптотику функции $\omega_0(y_1,\lambda)$ из теоремы 1.2, получим оценку правой части в (2.36) вида

$$|F(\lambda)| \leq c_0|L(\psi_0)(\lambda)|. \tag{2.37}$$

Отсюда вытекает, что $(\lambda = \gamma + i\eta)$ для всех $\gamma_0 \geq \lambda_0$

$$\sup_{\gamma>\gamma_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\gamma+i\eta)|^2\,d\eta \leq c_0\sup_{\gamma>\gamma_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|L(\psi_0)(\gamma+i\eta)|^2\,d\eta \leq c_1\|e^{-\gamma_0 t}\psi_0\|^2_{L_2(0,\infty)}. \tag{2.38}$$

Таким образом, при $Re\,\lambda \geq \lambda_0$ к функции F применимо обратное преобразование Лапласа, если правая часть в (2.38) конечна. Возьмем $N_1(t) = L^{-1}(F(\lambda))(t)$. Тогда, если $e^{-\gamma_0 t}\psi_{0i} \in L_2(0,\infty)$, то $e^{-\gamma_0 t}N_1 \in L_2(0,\infty)$. Используя функцию $L(N_1)$ (см. (2.36)) найдем решение $\hat{\omega}$ задачи (2.34), (2.35). Используя найденную функцию N_1 и лемму 2.2 в случае $T = \infty$, найдем $\lambda_1 \geq \lambda_0$ и построим решение u задачи (2.1)-(2.3) из класса описанного в лемме 2.2. Функция $w = u - \Phi$ есть решение задачи (2.8), (2.9). Применяя к уравнению (2.8) преобразование Лапласа, получим что функция $\hat{w}$ есть решение задачи (2.34), (2.35), где мы берем $Re\,\lambda \geq \lambda_1$. В силу нашего выбора оператор $\lambda - L_0$ обратим и значит $\hat{w} = \hat{\omega}$. Таким образом, функция $\hat{w}$ удовлетворяет всем условиям из (2.35) и, в частности, имеем, что $w(t,y_1) = \tilde{\psi}_1$. Рассмотрим случай $T < \infty$. Построив функцию Φ, как и ранее мы сведем вопрос разрешимости нашей задачи к вопросу о разрешимости задачи (2.8), (2.9). Продолжая функции ψ_0 с промежутка $[0,T]$ на $[0,\infty]$ нулем мы построим продолжение функций $\tilde{\psi}_1$ на $[0,\infty)$. Сохраним те же обозначений для этих продолжений. Далее, воспользовавшись нашей теоремой в случае $T = \infty$, найдем функцию N_1 и решение ω задачи (2.8), (2.9).

Сужение нашего решения на $(0,T)$ даст нам решение нашей задачи на $(0,T)$. Единственность решений вытекает из теоремы 2.9. $\square$

Замечание 2.3. *Заметим что справедливость представления* (2.33) *не только достаточное условие разрешимости задачи* (2.1)-(2.4)*, но и необходимое. Если существует решение из класса описанного в теореме, то функция* $\tilde{\psi}_1$ *допускает представление* (2.33)*. Это легко вытекает из равенства* (2.36)*.*

Возникает вопрос о построении аналогов формул (2.27)-(2.29) в случае конечного интервала $(0,T)$. В следующей теореме мы предполагаем, что $T<\infty$ и

$$\tilde{\psi}_j \in H_{\delta_0},\ \delta_0 = \Big| \int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi \Big| \tag{2.39}$$

и, такум образом, найдутся функции ψ_{0j} такие, что

$$\tilde{\psi}_j = \int_0^t \tilde{\psi}_{0j}(\tau) V_\delta(t-\tau)\,d\tau, \quad \psi_{0j}(\tau) \in L_2(0,\infty),\ j=1,2, t\in(0,T).$$

Пусть выполнены условия (C), (D), (1.8), (1.9) и пусть (u, N_1, x_1) — решения задачи (2.1)-(2.4), где $T<\infty$, $r=1$, $s=2$ из класса указанного в лемме 2.2. Построив вышеприведенную функцию Φ, мы придем к задаче (2.8), (2.9). Можем как и ранее определить функции $\int_0^T \exp(-\lambda t)\tilde{\psi}_i\,dt = \Phi_i(\lambda)$, $i=1,2$.

Теорема 2.12. *Пусть выполнены условия* (C) *и* (D) *и пусть* (u, N_1, x_1) *— решения задачи* (2.1)-(2.4)*, где* $T<\infty$*, из класса указанного в лемме 2.2, причем* $N_1 \not\equiv 0$*,* $N_1 \geq 0$ *п.в. и* $y_1 < x_1 < y_2$*. Тогда найдется* $\lambda_2 > 0$ *такое, что на* $[\lambda_2, \infty)$ *множества нулей функций* $\Phi_1(\lambda)$ *и* $\Phi_2(\lambda)$ *совпадают и не имеют конечной предельной точки, существует конечный предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} = A,$$

и справедливы равенства: и справедливы равенства: если $y_1 = a$ *и* $y_2 < b$*, то*

$$\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_a^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi + o\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big); \tag{2.40}$$

если $y_1 > a$ *и* $y_2 = b$*, то*

$$\int_{x_1}^{b} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{b} r(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{y_1}^{b} r_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{2\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big); \tag{2.41}$$

в оставшихся случаях

$$\int_{y_1}^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big). \tag{2.42}$$

Доказательство теоремы 2.11. Доказательство основано на том что мы можем продолжить наше решение, определенное на $[0,T]$, на весь промежуток $[0,\infty)$. Пусть $\omega_0(x,t)$ есть решение задачи

$$\omega_{0t} - L_0\omega_0 = \delta(x-x_1),\quad B_1\omega_0(t,a)=0,\ B_2\omega_0(t,b)=0,\quad \omega_0(x,0)=0. \tag{2.43}$$

Тогда решение задачи (2.13), (2.14), где $r=1$, записывается в виде (формула Дьюамеля)

$$\omega(x,t) = \int_0^t N_1(\tau)\omega_{0t}(x,t-\tau)\,d\tau,\ t\le T. \tag{2.44}$$

Продолжим функцию N_1 определенную на $(0,T)$ нулем на весь промежуток $(0,\infty)$. Обозначим продолжение через $\tilde{N}(t)$. В этом случае функция

$$\omega(x,t) = \int_0^t \tilde{N}(\tau)\omega_{0t}(x,t-\tau)\,d\tau,\ t\in(0,\infty).$$

есть решение задачи (2.13), (2.14) на $(0,\infty)$. Далее используем теорему 2.10. Соответствующие функции $\tilde{\psi}_i(t)=\omega(y_i,t)$ есть продолжения $\tilde{\psi}_i$ на интервал $(0,\infty)$ (обозначаем продолжения тем же символом).

Далее используем теорему 2.10 и повторяем рассуждения доказательства теоремы 3 в [77]. □

Замечание 2.4. *Условие $N_1\ge 0$ п.в. упрощает доказательство и в приложениях это условие, как правило, выполнено.*

Алгоритм численного решения задачи (2.1)-(2.4) в случае $r=1, s=2$.

Опишем алгоритм нахождения решения задачи (2.1)-(2.4) в случае $r=1, s=2$, который может быть использован при численном решении задачи. Фактически, мы его уже построили. Вначале используя асимптотические формулы (2.27)-(2.29), где выбираем параметр $\lambda\in\mathbb{R}$ таким, чтобы было выполнено условие $\lambda\le c/\tau$, где τ - шаг по времени, возникающий при дискретизации задачи (при численном нахождении функций $\Phi_i(\lambda)$) находим точку x_1 (если необходимо проводя оптимизацию по параметру λ). Далее, в принципе можно найти преобразование Лапласа от функции N_1 (см. (2.36) и затем саму функцию N_1). Однако способы вычисления обратного преобразования Лапласа достаточно трудоемки (метод Виддера, Gaver-Stehfest, разложение в ряд Фурье и др. [106–109]). В работе [77] для численного определения функции N_1 использовались формулы (см. (2.44))

$$\tilde{\psi}_j = \int_0^t N_1(\tau)\omega_{0t}(y_j, t-\tau)\,d\tau, \text{ или } \int_0^t \tilde{\psi}_j(\tau)\,d\tau = \int_0^t N_1(\tau)\omega_0(y_j, t-\tau)\,d\tau,\ t \leq T.$$

где ω_0 – решение задачи (2.44) и $j = 1$ или $j = 2$. Отметим, что функция $\omega_0(y_j, t)$ положительна при $t > 0$. Поэтому численное обращение оператора Вольтерра реализуется довольно просто.

2.3 Теорема существования и единственности решения при n=2,3

В этом параграфе мы рассмотрим обратную задачу (2.5)—(2.7). Опишем условия на данные. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$ для $n = 2$ и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ для $n = 3$. Зафиксируем параметр $\lambda \geq \lambda_0$ (λ_0 максимальный из параметров определенных в теоремах 2.1, 2.3). Мы предполагаем, что

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{1/4,1/2}(S), \text{ если } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \ (\sigma \in C^1(\Gamma)), \tag{2.45}$$

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \quad f_0 e^{-\lambda t} \in L_2(G). \tag{2.46}$$

В этом случае, при выполнении условия (2.10) и условий теоремы 2.1 существует единственное решение w_0 вспомогательной задачи (2.11) такое, что $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. Рассмотрим обратную задачу (2.5)-(2.7). После замены переменных $w = u - w_0$ мы придем к более простой задаче

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{2.47}$$

$$Bw|_S = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \tag{2.48}$$

$$w(y_j, t) = \psi_j(t) - w_0(t, y_j) = \tilde{\psi}_j(t),\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.49}$$

Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_j(t) = \int_0^t V_{\delta_j}(t-\tau)\psi_{0j}(\tau)d\tau,\ \psi_{0j}e^{-\lambda t} \in L_2(0,T), \tag{2.50}$$

где $V_\gamma(t)$ определяется своим преобразованием Лапласа

$$\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}, n=3; \hat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}\gamma), n=2.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ это функция Ханкеля и $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2}e^{iarg\ \lambda/2}$ – ветвь корня аналитическая в плоскости с разрезом $arg\ \lambda = \pi$. Не так трудно установить, что $V_\gamma(t) = \frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$ при $n=2$ и, при $n=3$, $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}$. Второе равенство выводится в лемме 1.6.7 в [110]. Относительно первого отметим следующее. При $n=2$, функция $\hat{u}(x) = \hat{V}_{|x|}(\lambda)$ решение уравнения Гельмгольца $\lambda\hat{u} - \Delta\hat{u} = \delta(x)$ и (см. §10, 11 in [95], §3.6, 7.23 [96]) на любом компакте не содержащем 0 имеем

$$\hat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma}\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}\Big(1 + O(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}})\Big). \tag{2.51}$$

С другой стороны, решение задачи Коши

$$u_t - \Delta u = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u(0,x) = 0. \tag{2.52}$$

запишем в следующем виде (формула Пуассона)

$$u|_{|x|=\gamma} = \int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)}d\tau.$$

Применяя преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ к (2.52), мы получим

$$\mathcal{L}(\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)}d\tau) = \frac{1}{\lambda}\hat{V}_\gamma(\lambda). \tag{2.53}$$

Далее, имеем

$$\lambda\mathcal{L}(\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)}d\tau)(\lambda) = \mathcal{L}(\partial_t\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)}d\tau)(\lambda) =$$
$$\mathcal{L}(\int_0^t -\partial_\tau\frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t-\tau)}d\tau)(\lambda) = \mathcal{L}(\frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}) = \hat{V}_\gamma(\lambda).$$

Таким образом, получили, что $\mathcal{L}V_\gamma(t) = \hat{V}_\gamma(\lambda)$.

Далее считаем, что $m = s$ в (2.5)-(2.7). Введем множество $K = \{y \in G : \rho(y, \cup_{i=1}^m x_i) < \rho(y, \Gamma)\}$.

Определим функции

$$\varphi_j(x) = \frac{-1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(y_j + \tau(x - y_j)), (x - y_j))\, d\tau$$

и предположим что

$$a_i \in W_\infty^2(G)\ (i = 1, \ldots, n),\ \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j\ (j = 1, \ldots, s), a_0 \in L_\infty(G),\ \sigma \in C^1(\Gamma), \tag{2.54}$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}_+^n$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W_\infty^2(\mathbb{R}_+^n)$ и функции a_i допускают продолжение на все $\mathbb{R}^n$ такое, что условия (2.54) также выполнены для продолжений в случае $G = \mathbb{R}^n$. Отметим, что такое продолжение существует всегда, если G – область с компактной границей. Оно может быть осуществлено любым стандартным методом, например, методом Хестенса.

Пусть $\delta_j = min_i r_{ij}, j = 1, 2, \ldots, s$, где $r_{ij} = |x_i - y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji} = e^{\varphi_j(x_i)}$ если $|x_i - y_j| = \delta_j$ и $a_{ji} = 0$ в противном случае. Условие корректности записывается в виде

$$det A_0 \neq 0. \tag{2.55}$$

Фиксируем $p \in (1, n/(n-1))$.

Теорема 2.13. *Пусть $T = \infty$, $m = s$ и выполнены условия* (2.10), (2.54), (2.55) *и $y_i \in K$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнении условий* (2.45), (2.46), (2.50) *существует единственное решение задачи* (2.5)-(2.7) *такое, что $u = w_0 + w$, w_0 есть решение вспомогательной задачи* (2.11), *$e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $e^{-\lambda t}\vec{N} \in L_2(0,\infty)$, $e^{-\lambda t} w \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^1(G))$, $e^{-\lambda t} w_t \in L_2(0,\infty; W_{p,B}^{-1}(G))$, $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.*

Доказательство теоремы 2.13. Найдем параметр λ_0 такой что при $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнении условий (2.45), (2.46) решение w_0 вспомогательной задачи (2.11) существует и единственно. После замены $u = w_0 + w$, мы сведем обратную задачу (2.5)-(2.7) к задаче (2.47)-(2.49). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.47), придем к задаче

$$L_0\hat{w} = \lambda\hat{w} + L\hat{w} = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\lambda)\delta(x - x_i),\ B\hat{w}|_\Gamma = 0, \tag{2.56}$$

$$\hat{w}(y_j) = \hat{\hat{\psi}}_j,\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.57}$$

Вначале рассмотрим случай G – область с компактной границей и $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$. Построим сопряженный оператор $L^* v = -\Delta v - \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} + (a_0 - \sum_{i=1}^n a_{ix_i}) v$ и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda} v_j + L^* v_j = \delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.58}$$

Здесь в качестве коэффициентов берем вышеуказанное их продолжение на $\mathbb{R}^n$. Найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $Re\lambda \geq \lambda_1$, решение этой задачи из класса $v_j \in W^1_{p,B}(G)$ существует, единственно и справедливы асимптотические представления из теоремы 1.8. Отметим, что $v_j \in W_2^2(G_j(\varepsilon))$, $G_j(\varepsilon) = \{x \in G : |x - y_j| \geq \varepsilon\}$ $(j = 1, \ldots, s,\ \varepsilon > 0)$. Этот факт легко позволяет обосновать интегрирование по частям и получить используя (2.56), (2.58) формулу Грина вида

$$\hat{w}(y_j) - \int_\Gamma \Big(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} + \sigma \hat{w}\Big) \overline{v_j(x)}\, d\Gamma + \int_\Gamma \overline{\Big(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j\Big)} \hat{w}(x)\, d\Gamma = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i \overline{v_j(x_i)},$$
$$\tilde{\sigma} = \sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i. \tag{2.59}$$

Из граничного условия вытекает, что первый интеграл в левой части равенства равен нулю. Используя также равенство (2.57), получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m \hat{N}_i \overline{v_j(x_i)} = \hat{\hat{\psi}}_j + \int_\Gamma \hat{w}(x) \overline{\Big(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j\Big)}\, d\Gamma,\ j = 1, \ldots, s, \tag{2.60}$$

где функция w есть решение прямой задачи (2.47), (2.48) и эта функция определяется через функции N_i, функция $\hat{w}$ есть решение задачи (2.56). Воспользуемся теоремой 1.8. Тогда имеем, что $(\overline{(\overline{\lambda})^{1/2}} = \lambda^{1/2})$

$$\overline{v_j(x)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi |x - y_j|}\lambda^{1/4}} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big)\ (n = 2); \tag{2.61}$$

$$\overline{v_{jx_i}(x)} = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\varphi_j - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}}{2\sqrt{2\pi |x - y_j|}}\Big(\frac{x_i - y_j^i}{|x - x_0|} + O\big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\big)\Big)\ (n = 2); \tag{2.62}$$

$$\overline{v_j(x)} = \frac{1}{4\pi |x - y_j|} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big)\ (n = 3); \tag{2.63}$$

$$\overline{v_{jx_i}(x)} = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}}{4\pi |x - y_j|}\Big(\frac{x_i - y_j^i}{|x - y_j|} + O\big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\big)\Big)\ (n = 3), \tag{2.64}$$

где y_j^i – i-я координата точки y_j. Равенства имеют место на любом компакте в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, при $x \in \Gamma$. Рассмотрим, например, случай $n = 3$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Умножим равенство (2.60) на $e^{\delta_j \sqrt{\lambda}}$. Тогда, если используем равенство (2.63), то левую часть равенств (2.60) можно записать в виде $A(\lambda)\vec{\hat{N}}$, где элементы матрицы $A(\lambda)$ имеют вид $\alpha_{ij}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$ (α_{ij} - элементы матрицы A_0) и равенства (2.60) можно записать в виде

$$A(\lambda)\vec{\hat{N}} = \vec{\alpha} + S_0(\vec{\hat{N}}), \tag{2.65}$$

где координаты векторов $\vec{\alpha}, S_0(\vec{\hat{N}})$ записываются в виде

$$\alpha_j = e^{\delta_j \sqrt{\lambda}} \hat{\hat{\psi}}_j,\ S_{0j} = e^{\delta_j \sqrt{\lambda}} \int_\Gamma \hat{w}(x) \overline{(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)}\, d\Gamma,\ j = 1, \ldots, s,$$

Удобнее записать систему (2.65) в виде

$$\vec{\hat{N}} = A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha} + A(\lambda)^{-1} S_0(\vec{\hat{N}}), \tag{2.66}$$

Без ограничения общности считаем, что матрица $A(\lambda)$ обратима при $Re\lambda \geq \lambda_1$ и норма оператора $A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ограничена одной и той же постоянной c_0, при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_1$, иначе увеличим величину λ_1. Оценим норму вектора $A(\lambda)^{-1} S_0(\vec{\hat{N}})$. Для этого рассмотрим выражение

$$S_{0j} = e^{\delta_j \sqrt{\lambda}} \int_\Gamma \hat{w}(x) \overline{(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)}\, d\Gamma. \tag{2.67}$$

Запишем представление для этого выражения

$$\begin{aligned} e^{\delta_j \sqrt{\lambda}} \overline{(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)} = -\sqrt{\lambda} \frac{e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}(|x - y_j| - \delta_j)}}{4\pi |x - y_j|} \Big(\frac{(x - y_j, \nu)}{|x - y_j|} + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \Big) \\ + \tilde{\sigma} \frac{e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}(|x - y_j| - \delta_j)}}{4\pi |x - y_j|} \Big(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \Big) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Поскольку $y_j \in K$, имеем, что $\sqrt{|x - y_j|} - \delta_j \geq 0$ для $x \in \Gamma$ и тогда имеем оценку

$$|e^{\delta_j \sqrt{\lambda}} (\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)| \leq C\sqrt{\lambda}/|x - y_j| \tag{2.69}$$

для всех $Re\,\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$, где постоянная C не зависит от λ. Поскольку $\hat{w}$ есть решение задачи (2.56), найдется $\lambda_3 \geq \lambda_2$ такое, что при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_3$ справедлива оценка

$$\|\hat{w}\|_{W^1_{p,B}(G)} + |\lambda| \|\hat{w}\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq c \| \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\lambda) \delta(x - x_i) \|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq C_1 \|\vec{\hat{N}}\|, \tag{2.70}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ и под нормой вектора понимаем стандартную норму в $\mathbb{C}^m$. Утверждение вытекает из теоремы 1.3. Используя теоремы вложения можем записать

$$\|\hat{w}\|_{L_p(\Gamma)} \leq c_3\|\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G_\varepsilon)} \leq \|\varphi\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)},\ r_0 = 1/p + \varepsilon_0, \tag{2.71}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ произвольный параметр, мы его выберем таким, чтобы $r_0 < 1$. Тогда, используя интерполяционные неравенства (см. [1]) и (2.71) имеем оценку

$$\|\hat{w}\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|\varphi\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)} \leq c_4\|\varphi\hat{w}\|_{W_p^2(G)}^{r_0/2}\|\varphi\hat{w}\|_{L_p(G)}^{1-r_0/2} \leq C_4|\lambda|^{r_0/2-1}\|\vec{\hat{N}}\|. \tag{2.72}$$

Тогда из (2.67), (2.69), (2.72) имеем, что

$$|S_{0j}| \leq C\|\hat{w}\|_{L_p(\Gamma)}\|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}(\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \tilde{\sigma}v_j)\|_{L_q(\Gamma)} \leq C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\hat{N}}\|, \tag{2.73}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ. Отсюда получим оценку

$$\|A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\hat{N}})\| \leq c_0 m C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\hat{N}}\|. \tag{2.74}$$

Выберем параметр $\lambda_4 \geq \lambda_3$ такой, что при $Re\,\lambda \geq \lambda_4$

$$c_0 m C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2} = q < 1.$$

Тогда система уравнений (2.66) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|\vec{\hat{N}}\| \leq \frac{1}{1-q}\|A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha}\| \leq \frac{c_0}{1-q}\|\vec{\alpha}\|\ \forall Re\,\lambda \geq \lambda_4. \tag{2.75}$$

Определив $\vec{\hat{N}}$ как решение системы (2.66) построим функцию $\hat{w}$ как решение уравнения (2.56). Покажем, что построенная функция $\hat{w}$ удовлетворяет условиям (2.57). Действительно, имеем равенство (2.59). Учитывая равенства (2.60), которые эквивалентны системе (2.66), получим (2.57).

Выберем параметр $\lambda_5 \geq \lambda_4$ такой, что задача (2.47), (2.48) имеет при всех функциях N_i со свойством $N_i e^{-\lambda t} \in L_2(0,\infty)$ $(i = 1,\ldots,m)$ единственное решение w из класса указанного в формулировке теоремы. Это возможно (см. теорему 2.3). Оценим правую часть в (2.75). Фиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda \geq \lambda_5$ и предположим, что выполнено условие (2.50) с этим λ. В силу свойств преобразования Лапласа, имеем

$$\alpha_j(p) = e^{\delta_j\sqrt{p}}\hat{V}_{\delta_j}(p)\hat{\psi}_{0j} = \hat{\psi}_{0j}(p),\ p = \gamma + i\xi.$$

Тогда из (2.75) вытекает, что (см. §7 в [86])

$$\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\hat{N}_i(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi \le C\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\hat{\psi}_{0j}(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi \le$$
$$C\sum_{j=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|^2_{L_2(0,\infty)}<\infty. \quad (2.76)$$

Последнее влечет, что для вектор-функции $\hat{\vec{N}}$ определено обратное преобразование Лапласа и справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda t}\vec{N}\|_{L_2(0,\infty)} \le C\sum_{i=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|_{L_2(0,\infty)}<\infty, \quad (2.77)$$

где $\vec{N}=\mathcal{L}^{-1}(\hat{\vec{N}})$. Используя построенную функцию $\vec{N}$ и теорему 2.3, можем построить решение w задачи (2.47), (2.48) из требуемого в теореме класса. Легко понять, что функция w – искомое решение. Единственность такого решения очевидна, поскольку применив преобразование Лапласа мы придем к задаче (2.56), (2.57), единственность решений которой мы уже фактические доказали.

Рассмотрим случай $Bu=u$ и G – область с компактной границей. Доказательство аналогично. Приведем основные отличия в доказательстве. Формула Грина (2.59) с учетом краевого условия запишется в виде

$$\hat{w}(y_j)-\int_{\Gamma}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}\overline{v_j(x)}\,d\Gamma=\sum_{i=1}^{m}\hat{N}_i\overline{v_j(x_i)}. \quad (2.78)$$

Система (2.65) перепишется в виде

$$\hat{\vec{N}}=A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha}+A(\lambda)^{-1}S_0(\hat{\vec{N}}), \quad (2.79)$$

где координаты векторов $\vec{\alpha}, S_0(\hat{\vec{N}})$ записываются в виде

$$\alpha_j=e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\hat{\hat{\psi}}_j,\ S_{0j}=-e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\int_{\Gamma}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}\overline{v_j(x)}\,d\Gamma,\ j=1,\ldots,s,$$

Вместо оценки (2.69) имеем оценку

$$|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{v_j}|\le C, \quad (2.80)$$

где постоянная C не зависит от λ такого, что $Re\,\lambda\ge\lambda_2$ (параметр λ_2 определяется из тех же условий что и ранее). Отметим что оценка (2.70) в нашем случае также справедлива быть может с некоторой другой постоянной в правой части для всех λ таких, что $Re\,\lambda \geq \lambda_3$ для некоторого $\lambda_3 \geq \lambda_2$. Далее введем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равную 1 в ε-окрестности G_ε границы Γ и равную нулю вне 2ε окрестности Γ. Без ограничения общности считаем, что 2ε-окрестность Γ не содержит точек $\{y_j\}$ и $\{x_i\}$. Умножим уравнение (2.56) на φ. Имеем

$$L(\varphi\hat{w}) + \lambda(\varphi\hat{w}) = -2\nabla\varphi \cdot \nabla\hat{w} - \Delta\varphi\hat{w} + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{x_i}\hat{w} = g_0.$$

Теперь ссылаясь на теорему 1.3 (см. замечание к теореме) получим, что при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_3$ имеем

$$\|\varphi\hat{w}\|_{W_p^2(G)} + |\lambda|\|\varphi\hat{w}\|_{L_p(G)} \leq c\|g_0\|_{L_p(G)} \leq c_1\|\hat{w}\|_{W_p^1(G)} \leq C_3\|\hat{\vec{N}}\|. \quad (2.81)$$

Используя оценку (2.81), как и ранее получим

$$\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}\|_{L_p(\Gamma)} \leq c_3\|\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G_\varepsilon)} \leq \|\varphi\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)},\ r_0 = 1 + 1/p + \varepsilon_0, \quad (2.82)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ произвольный параметр, мы его выберем таким, чтобы $r_0 < 2$. Тогда, используя интерполяционные неравенства, как и ранее, имеем оценку

$$\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|\varphi\hat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)} \leq c_4\|\varphi\hat{w}\|_{W_p^2(G)}^{r_0/2}\|\varphi\hat{w}\|_{L_p(G)}^{1-r_0/2} \leq C_4|\lambda|^{r_0/2-1}\|\hat{\vec{N}}\|. \quad (2.83)$$

Тогда имеем, что

$$|S_{0j}| \leq C\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}\|_{L_p(\Gamma)}\|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{v_j}\|_{L_q(\Gamma)} \leq C_1|\lambda|^{(r_0/2-1)}\|\hat{\vec{N}}\|, \quad (2.84)$$

где постоянная C_1 не зависит от λ. Остальные рассуждения в доказательстве полностью совпадают. Дальнейшее доказательство в случае $n = 2$ вполне аналогично случаю $n = 3$ и мы его опустим.

Далее, рассмотрим случай $G = \mathbb{R}^n$. Этот случай наиболее простой. Пусть $n = 3$.

Найдем параметр λ_0 такой что при $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнении условий (2.45), (2.46) решение w_0 вспомогательной задачи (2.11) существует и единственно. После замены $u = w_0 + w$, мы сведем обратную задачу (2.5)-(2.7) к задаче (2.47)-(2.49). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.47), придем к задаче

$$L_0\hat{w} = \lambda\hat{w} + L\hat{w} = \sum_{i=1}^{m} \hat{N}_i(\lambda)\delta(x - x_i),\ B\hat{w}|_\Gamma = 0, \quad (2.85)$$

$$\hat{w}(y_j) = \hat{\tilde{\psi}}_j,\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.86}$$

Построим сопряженный оператор $L^*v = -\Delta v - \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} + (a_0 - \sum_{i=1}^n a_{ix_i})v$ и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda} v_j + L^* v_j = \delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.87}$$

Найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $Re\lambda \geq \lambda_1$, решение этой задачи из класса $v_j \in W^1_{p,B}(G)$ существует, единственно и справедливы асимптотические представления из теоремы 1.8. Отметим, что $v_j \in W^2_2(G_j(\varepsilon))$, $G_j(\varepsilon) = \{x \in G:\ |x - y_j| \geq \varepsilon\}$ $(j = 1, \ldots, s,\ \varepsilon > 0)$. Этот факт легко позволяет обосновать интегрирование по частям и получить используя (2.56), (2.58) формулу вида

$$\hat{w}(y_j) = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i \overline{v_j(x_i)}. \tag{2.88}$$

Используя также равенство (2.86), получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m \hat{N}_i \overline{v_j(x_i)} = \hat{\tilde{\psi}}_j,\ j = 1, \ldots, s, \tag{2.89}$$

Воспользуемся представлениями (2.61)-(2.64). Равенства имеют место на любом компакте в $\mathbb{R}^n$. Умножим равенство (2.89) на $e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}$. Тогда левую часть равенств (2.89) можно записать в виде $A(\lambda)\vec{\hat{N}}$, где элементы матрицы $A(\lambda)$ имеют вид $\alpha_{ij}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$ (α_{ij} - элементы матрицы A_0) и равенства (2.89) можно записать в виде

$$A(\lambda)\vec{\hat{N}} = \vec{\alpha}, \tag{2.90}$$

где координаты вектора $\vec{\alpha}$ записываются в виде

$$\alpha_j = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\hat{\tilde{\psi}}_j,\quad j = 1, \ldots, s,$$

Обращая матрицу A, получим

$$\vec{\hat{N}} = A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha}. \tag{2.91}$$

Без ограничения общности считаем, что матрица $A(\lambda)$ обратима при $Re\lambda \geq \lambda_1$ и норма оператора $A^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ограничена одной и той же постоянной c_0, при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_1$, иначе увеличим величину λ_1. Определив $\vec{\hat{N}}$, построим функцию

$\hat{w}$ как решение задачи (2.85). В силу равенств (2.88), (2.89), построенная функция $\hat{w}$ удовлетворяет условиям (2.86). Выберем параметр $\lambda_2 \geq \lambda_1$ такой, что задача (2.47), (2.48) имеет при всех функциях N_i со свойством $N_i e^{-\lambda t} \in L_2(0,\infty)$ $(i = 1,\ldots,m)$ единственное решение w из класса указанного в формулировке теоремы. Это возможно (см. теорему 2.3). Оценим правую часть в (2.91). Фиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda \geq \lambda_2$ и предположим, что выполнено условие (2.50) с этим λ. В силу свойств преобразования Лапласа, имеем

$$\alpha_j(p) = e^{\delta_j\sqrt{p}}\hat{V}_{\delta_j}(p)\hat{\psi}_{0j} = \hat{\psi}_{0j}(p),\ p = \gamma + i\xi.$$

Тогда из (2.75) вытекает, что (см. §7 в [86])

$$\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\hat{N}_i(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi \leq C\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\hat{\psi}_{0j}(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi \leq$$
$$C\sum_{j=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|^2_{L_2(0,\infty)} < \infty. \quad (2.92)$$

Последнее влечет, что для вектор-функции $\hat{\vec{N}}$ определено обратное преобразование Лапласа и справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda t}\vec{N}\|_{L_2(0,\infty)} \leq C\sum_{i=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|_{L_2(0,\infty)} < \infty, \quad (2.93)$$

где $\vec{N} = \mathcal{L}^{-1}(\hat{\vec{N}})$. Используя построенную функцию $\vec{N}$ и теорему 2.3, можем построить решение w задачи (2.47), (2.48) из требуемого в теореме класса. Легко понять, что функция w – искомое решение. Единственность такого решения очевидна, поскольку применив преобразование Лапласа мы придем к задаче (2.56), (2.57), единственность решений которой мы уже фактические доказали. Случай $n = 2$ рассматривается совершенно аналогично и мы опустим доказательство.

Рассмотрим случай $G = \mathbb{R}^n_+$. Найдем параметр λ_0 такой что при $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнении условий (2.45), (2.46) решение w_0 вспомогательной задачи (2.11) существует и единственно. После замены $u = w_0 + w$, мы сведем обратную задачу (2.5)-(2.7) к задаче (2.47)-(2.49). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.47), придем к задаче (2.56), (2.57). Рассмотрим случай $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} +$

σu. Построим сопряженный оператор $L^*v = -\Delta v - \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} + (a_0 - \sum_{i=1}^n a_{ix_i})v$ и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda} v_j + L^* v_j = \delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.94}$$

Здесь в качестве коэффициентов берем вышеуказанное их продолжение на $\mathbb{R}^n$. Найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $Re\lambda \geq \lambda_1$, решение этой задачи из класса $v_j \in W^1_{p,B}(G)$ существует, единственно и справедливы асимптотические представления из теоремы 1.8. Отметим, что $v_j \in W_2^2(G_j(\varepsilon))$, $G_j(\varepsilon) = \{x \in G :\ |x - y_j| \geq \varepsilon\}$ $(j = 1, \ldots, s,\ \varepsilon > 0)$. Этот факт легко позволяет обосновать интегрирование по частям и получить формулу Грина вида

$$\hat{w}(y_j) - \int_\Gamma \varphi(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} + \sigma \hat{w})\overline{v_j(x)}\, d\Gamma + \int_\Gamma \varphi \hat{w}(\overline{\frac{\partial v_j}{\partial \nu}} + \tilde{\sigma}\overline{v_j})\, d\Gamma + \int_\Gamma \hat{w}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\overline{v_j}\, d\Gamma -$$
$$\int_G 2\hat{w}(x)\nabla\varphi\overline{\nabla v_j(x)} + \hat{w}(x)\Delta\varphi\overline{v_j} + \sum_{i=1}^n a_i \hat{w}(x)\varphi_{x_i}\overline{v_j(x)}\, dx = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i\overline{v_j(x_i)},$$
$$\tilde{\sigma} = \sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i, \tag{2.95}$$

где функция $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n$ такова, что $\varphi(x) = 1$ при всех x таких, что $|x| \leq R$ с $R > \max_j(1 + |y_j| + \delta_j + |x_j|)$ и $\varphi(x) = 0$ при всех x таких, что $|x| \geq 2R$ и $\tilde{v}_j = v_j\varphi$. Кроме того, выполнено неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ для всех x. Из граничного условия вытекает, что первый интеграл в левой части равенства равен нулю. Используя также равенство (2.57), получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m \hat{N}_i\overline{v_j(x_i)} = \hat{\overline{\psi}}_j + \int_\Gamma \varphi \hat{w}(x)\overline{(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v_j)}\, d\Gamma + J_j,\ j = 1, \ldots, s, \tag{2.96}$$

где

$$J_j = \int_\Gamma \hat{w}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\overline{v_j}\, d\Gamma - \int_G 2\hat{w}(x)\nabla\varphi\overline{\nabla v_j(x)} + \hat{w}(x)\Delta\varphi\overline{v_j} + \sum_{i=1}^n a_i\hat{w}(x)\varphi_{x_i}\overline{v_j(x)}\, dx.$$

и функция w есть решение прямой задачи (2.47), (2.48) и эта функция определяется через функции N_i, функция $\hat{w}$ есть решение задачи (2.56) Опять воспользуемся равенствами (2.61)-(2.64). Отметим, что носители всех функций, входящих под знаки интегралов в (2.96) содержатся в шаре $B_{2R} = \{x : |x| \leq 2R\}$ а носители функций входящих в выражение J_j содержатся в множестве $B_{2R} \setminus B_R$.

Рассмотрим, например, случай $n = 3$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Умножим равенство (2.96) на $e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}$. Левую часть равенств (2.96) можно записать в виде $A(\lambda)\vec{\hat{N}}$, где элементы матрицы $A(\lambda)$ имеют вид $\alpha_{ij}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$ (α_{ij} - элементы матрицы A_0) и равенства (2.96) можно записать в виде

$$A(\lambda)\vec{\hat{N}} = \vec{\alpha} + S_0(\vec{\hat{N}}), \tag{2.97}$$

где координаты векторов $\vec{\alpha}, S_0(\vec{\hat{N}})$ записываются в виде

$$\alpha_j = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\hat{\tilde{\psi}}_j,\ S_{0j} = J_{0j} + J_j,\ J_{0j} = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\int_\Gamma \hat{w}(x)\varphi(\overline{\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \tilde{\sigma}v_j)}\,d\Gamma,\ j = 1,\ldots,s,$$

Пусть $\vec{J_0}$, $\vec{J}$ – вектора с координатами J_{0j} и J_j. Удобнее записать систему (2.97) в виде

$$\vec{\hat{N}} = A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha} + A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\hat{N}}), \tag{2.98}$$

Без ограничения общности считаем, что матрица $A(\lambda)$ обратима при $Re\lambda \geq \lambda_1$ и норма оператора $A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ограничена одной и той же постоянной c_0, при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_1$, иначе увеличим величину λ_1. Оценим норму вектора $A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\hat{N}})$. Оценка вектора $A(\lambda)^{-1}\vec{J_0}(\vec{\hat{N}})$ у нас фактически уже получена. Она имеет вид (см. (2.74)).

$$\|A(\lambda)^{-1}J_0(\vec{\hat{N}})\| \leq C_2|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\hat{N}}\|, \tag{2.99}$$

где постоянная C_2 не зависит от λ такого, что $Re\,\lambda \geq \lambda_3$. Постоянная C_2 вообще говоря отличается от той постоянной, которая имеется в (2.99), однако оценка имеет тот же вид, поскольку $|\varphi(x)| \leq 1$. Необходимо оценить норму вектора $\vec{J}$. Имеем

$$|J_j| \leq |\int_G 2\nabla\hat{w}(x)\overline{\nabla\varphi\nabla v_j(x)} + \hat{w}(x)\Delta\varphi\overline{v_j} + \sum_{i=1}^n a_i\hat{w}(x)\varphi_{x_i}\overline{v_j(x)}\,dx| + |\int_\Gamma \hat{w}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\overline{v_j}\,d\Gamma|. \tag{2.100}$$

Поскольку $\hat{w}$ есть решение задачи (2.56), найдется $\lambda_4 \geq \lambda_3$ такое, что при всех $Re\,\lambda \geq \lambda_3$ справедлива оценка (теорема 1.3)

$$\|\hat{w}\|_{W^1_{p,B}(G)} + |\lambda|\|\hat{w}\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq c\|\sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\lambda)\delta(x - x_i)\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq C_1\|\vec{\hat{N}}\|, \tag{2.101}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ и под нормой вектора понимаем стандартную норму в $\mathbb{C}^m$. Как вытекает из представлений (2.61)-(2.64), в области $B_{2R} \setminus B_R$

$|x-y_j|-\delta_j \geq R-|y_j|-\delta_j \geq 1$ и имеем оценки

$$|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{\nabla\varphi\nabla v_j(x)}|+|\overline{v_j}| \leq c(\sqrt{|\lambda|}+1)e^{-Re\sqrt{\lambda}} \leq c_1 e^{-\varepsilon_1\sqrt{|\lambda|}},$$

где постоянные $c, \varepsilon_1 > 0$ не зависят от параметра λ с $Re\lambda \geq \lambda_4$. Здесь мы воспользовались тем, что $Re\sqrt{\lambda} \geq |\lambda|^{1/2}/\sqrt{2}$ для всех λ с $Re\,\lambda \geq 0$ и тем что любая функция вида $\sqrt{|\lambda|}e^{-\varepsilon\sqrt{|\lambda|}}$ $(\varepsilon > 0)$ ограничена. Оценим выражения, входящие в интеграл J_j. Точно также как и при получении оценок (2.71)-(2.73), имеем, используя предыдущее неравенство, что

$$|\int_\Gamma \hat{w}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\overline{v_j}\,d\Gamma| \leq ce^{-\varepsilon_1\sqrt{|\lambda|}}\|\hat{w}\|_{L_p(\Gamma)} \leq {}_3\|\vec{\hat{N}}\|e^{-\varepsilon_1\sqrt{|\lambda|}}.$$

Интегралы по области, входящие в J_j оцениваются аналогично и имеем ту же оценку

$$|J_j| \leq {}_2\|\vec{\hat{N}}\|e^{-\varepsilon_0\sqrt{|\lambda|}}. \tag{2.102}$$

Окончательная оценка имеет вид

$$\|A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\hat{N}})\| \leq C_3|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\hat{N}}\|. \tag{2.103}$$

Выберем параметр $\lambda_5 \geq \lambda_4$ такой, что при $Re\,\lambda \geq \lambda_5$

$$C_3|\lambda|^{(r_0-1)/2} \leq q < 1.$$

Тогда система уравнений (2.97) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|\vec{\hat{N}}\| \leq \frac{1}{1-q}\|A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha}\| \leq \frac{c_0}{1-q}\|\vec{\alpha}\|\ \forall Re\,\lambda \geq \lambda_4. \tag{2.104}$$

Определив $\vec{\hat{N}}$ как решение системы (2.97) построим функцию $\hat{w}$ как решение уравнения (2.56). Далее мы повторяем рассуждения первой половины доказательства. □

Замечание 2.5. *Условие* (2.55) *является достаточным. Грубо говоря мы выделили главные члены асимптотики в матрице, которая возникает при решении задачи. Можно привести и более точные условие разрешимости, но при этом условия на функции $\tilde{\psi}_i$ изменятся, они останутся такого же типа, но параметры δ_j могут измениться и сама формулировка станет более громоздкой.*

Замечание 2.6. *При доказательстве мы использовали теорему 1.13. Однако, мы вполне можем использовать также теорему 1.8 в случае* $G = \mathbb{R}^n$ *или теорему 1.12 в случае* $G = \mathbb{R}^n_+$ *и считать что точки замеров* $\{y_i\}$ *лежат в соответствующих компактах, определенных в этих теоремах. Утверждение останется справедливым.*

Приведем формулировку теоремы в случае конечного интервала $(0, T)$.

Теорема 2.14. *Пусть* $m = s$ *и выполнены условия* (2.10), (2.54), (2.55), *условия* (2.45), (2.46), (2.50) *при* $\lambda = 0$, $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, s$. *Тогда существует решение задачи* (2.5)-(2.7) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 *есть решение вспомогательной задачи* (2.11), $w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $\vec{N} \in L_2(0, T)$, $w \in L_2(0, T; W^1_{p,B}(G))$, $w_t \in L_2(0, T; W^{-1}_{p,B}(G))$, $w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы 2.14. Используя теорему 2.2, строим решение вспомогательной задачи ω_0 и делаем замену переменных $u = w_0 + w$. Функция w – решение вспомогательной задачи (2.47)-(2.49). По условию на промежутке $[0, T]$ имеет место представление (2.50). Продолжим функции ψ_{0j} нулем при $t > T$. Полученная функция удовлетворяет условию $e^{-\lambda t}\psi_{0j} \in L_2(0, \infty)$ для любого $\lambda \geq 0$. Ссылаясь на доказательство предыдущей теоремы мы можем сказать, что существует функция $N(t) \in L_2(0, T)$ и функция w из требуемого в формулировке теоремы класса. Мы их строим, решая задачу (2.47)-(2.49) на бесконечном промежутке времени $(0, \infty)$. □

Далее приведем несколько теорем единственности решений задачи (2.5)-(2.7) в различных постановках. Во-первых, мы приведем теорему единственности для решений задачи (2.5)-(2.7) об определении мощностей источников, считая что число m и точки $\{x_i\}$ заданы в случае $T < \infty$. Далее, мы рассмотрим единственность определения решений в общей постановке но для модельной задачи в случае $G = \mathbb{R}^n$ и при дополнительном предположении, что мощности N_i не зависят от времени. Примеры показывающие точность полученных результатов будут приведены в следующем параграфе.

Введем функции

$$\varphi_j(x) = \frac{-1}{2} \int_0^1 (\vec{a}(y_j + \tau(x - y_j)), (x - y_j))\, d\tau.$$

Пусть $\delta_j = min_i r_{ij}, j = 1, 2, \ldots, s$, где $r_{ij} = |x_i - y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji} = e^{\varphi_j(x_i)}$ if $|x_i - y_j| = \delta_j$ и $a_{ji} = 0$ в противном случае. Мы предполагаем, что:

$$detA_0 \neq 0 \tag{2.105}$$

Условие (2.54) перепишем в следующем виде: коэффициенты L вещественны и

$$a_i \in W^2_\infty(G)\ (i = 1, \ldots, n),\ \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j, a_0 \in L_\infty(G)\ (j \le s),\ \sigma \in C^1(\Gamma), \tag{2.106}$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}^n_+$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W^2_\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Первый результат, который мы получим касается единственности решений обратной задачи (2.5)-(2.7) об определении решения u и мощностей N_i ($i = 1, \ldots, m$) по данным (2.7). Точки $\{x_i\}$ и их число считаются известными.

Теорема 2.15. *Пусть $T < \infty$, $m = s$ и выполнены условия* (2.105), (2.106). *Тогда решение $(u, \vec{N})$ обратной задачи* (2.5)-(2.7) *такое, что u принадлежит классу описанному в теореме* 2.1 *и $N_i \in L_2(0, T)$ единственно.*

Доказательство теоремы 2.15. Достаточно показать, что решение задачи (2.5)-(2.7) с однородными данными есть ноль. В этом случае вспомогательная функция $w_0 = 0$. Пусть функция u такая, что $u \in W^{1,2}_2(Q_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, $u \in L_2(0, T; W^1_{p,B}(G))$, $u_t \in L_2(0, T; W^{-1}_{p,B}(G))$ есть решение задачи

$$u_t + Lu = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{2.107}$$

$$Bu|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{2.108}$$

$$u(y_j, t) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.109}$$

Интегрируем уравнение (2.107) по t и делаем замену $w = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$. Эта функция есть решение задачи

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{m} s_i(t)\delta(x - x_i), \quad s_i = \int_0^t N_i(\tau)\, d\tau \in W^1_2(0, T),\ s_i(0) = 0, \tag{2.110}$$

$$Bw|_S = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \tag{2.111}$$

$$w(y_j, t) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.112}$$

Сделаем замену $w = e^{\lambda t} v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Получим уравнение

$$v_t + Lv + \lambda v = \sum_{i=1}^{m} s_i(t) e^{-\lambda t} \delta(x - x_i). \tag{2.113}$$

Пусть $v_j^*(x, \lambda)$ решение задачи

$$L^* v_j^* + \lambda v_j^* = \delta(x - y_j), \quad B^* v_j^*|_\Gamma = 0, \tag{2.114}$$

где L^* - формально сопряженный оператор к оператору L, $B^* v = v$, если $Bu = u$ и $B^* v = \frac{\partial v}{\partial \nu} + (\sigma + (\vec{a}, \nu))v$ в противном случае. Таким образом (2.114) - сопряженная задача к прямой задаче

$$Lv + \lambda v = \delta(x - y_j), \quad Bv|_\Gamma = 0. \tag{2.115}$$

Она обладает теми же свойствами, что и прямая задача, в частности справедливы теоремы об асимптотике решений по параметру λ. Умножая уравнение (2.113) на v_j^*, интегрируя его по Q, и используя равенства (2.112), получим равенства

$$(v(T,x), v_j^*(T,x)) = \int_G v(T,x) v_j^*(T,x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} \int_0^T s_i(t) e^{-\lambda t}\, dt v_j^*(x_i), \tag{2.116}$$

Равенство (2.116) можно переписать в виде:

$$A(\lambda) \vec{S} = \vec{F}, \tag{2.117}$$

где вектора $\vec{S}$, $\vec{F}$ имеют координаты $S_i = \int_0^T s_i(t) e^{-\lambda t}\, dt$ и $F_i = 4\pi \delta_j (v(T,x), v_j^*(x)) e^{\sqrt{\lambda} \delta_j}$ при $n = 3$ и $F_i = 2\sqrt{2\delta_j \pi} \lambda^{1/4} (v(T,x), v_j^*(T,x)) e^{\sqrt{\lambda}\delta_j}$ при $n = 2$. Преобразуем представление

$$\begin{aligned} f_j = (v(T,x), v_j^*(T,x)) = e^{-\lambda T} (w(T,x), (\lambda + L^*)^{-1} \delta(x - y_j)) = \\ e^{-\lambda T} ((\lambda + L)^{-1} w(T,x), \delta(x - y_j)) = e^{-\lambda T} (\lambda + L)^{-1} w(T,x)|_{x = y_j}. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее выражение имеет смысл и эти формальные преобразования законны. Мы имеем, что $w, w_t \in L_2(0,T; W^1_{p,B}(G))$. В частности, отсюда вытекает, что после может быть изменения на множестве меры ноль $w \in C([0,T]; W^1_p(G))$. В силу стандартных теорем вложения при $n = 2, 3$, $w \in C([0,T]; L_q(G))$ с $q \leq 3p/(3-p)$. Тогда выражение $(\lambda + L)^{-1} w(T,x) \in W^2_q(G)$

определено, если параметр λ достаточно велик, т.е. $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ для некоторого λ_0. Однако, $W_q^2(G) \subset C(\overline{G})$ при $n = 2, 3$ и $q > 3/2$, что выполнено. Таким образом, величина $(\lambda + L)^{-1} w(T, x)|_{x=y_j}$ имеет смысл. Имеет место оценка

$$|(\lambda + L)^{-1} w(T, y_j)| \leq \|(\lambda + L)^{-1} w(T, x)\|_{C(\overline{G})} \leq$$
$$c_0 \|(\lambda + L)^{-1} w(T, x)\|_{W_q^2(G)} \leq c_1 \|w(T, x)\|_{L_q(G)}, \quad (2.118)$$

где постоянные не зависят от параметра $\lambda \geq \lambda_0$ и мы использовали оценки резольвент эллиптических операторов (см. 1.3). Как следствие, получим оценку

$$|F_j| \leq c_2 \lambda^{\gamma} e^{-T\lambda} e^{\sqrt{\lambda}\delta_j} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0,$$

где постоянная c_2 не зависит от λ и $\gamma = 0$ при $n = 3$ и $\gamma = 1/4$ при $n = 2$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, T)$. Из вышеприведенной оценки вытекает, что найдется постоянная $C_0(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$|F_j| \leq \frac{C_0(\varepsilon) e^{-(T-\varepsilon)\lambda}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (2.119)$$

Для элементов $b_{ij}(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ в силу теоремы 2.13 имеем представление

$$b_{ji}(\lambda) = 4\pi \delta_j v_j^*(x_i) e^{\sqrt{\lambda}\delta_j} = a_{ji}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$$

при $n = 3$ и

$$b_{ji}(\lambda) = 2\sqrt{2\delta_j \pi} \lambda^{1/4} e^{\sqrt{\lambda}\delta_j} = a_{ji}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$$

при $n = 2$. В силу условия (2.105) считаем, что при $\lambda \geq \lambda_0$, матрица $A(\lambda)$ обратима и элементы обратной матрицы $A^{-1} = \{s_{ij}\}$ ограничены постоянной не зависящей от λ, иначе увеличим параметр λ_0. Тогда имеем

$$S_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}(\lambda) F_j(\lambda)$$

и оценка (2.119) влечет, что

$$|S_i(\lambda)| \leq \frac{C_1(\varepsilon)(\varepsilon) e^{-(T-\varepsilon)\lambda}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (2.120)$$

Рассмотрим функцию $S_i(\lambda_0 + z)$, где z - комплексный параметр, $Re\, z \geq 0$. Функция $S_i(\lambda_0 + z) = \int_0^T s_i(t) e^{-\lambda_0 t} e^{-zt}\, dt$ есть преобразование Лапласа от функции

$\tilde{s}_i(t) = s_i(t)e^{-\lambda_0 t}$ при $t \le T$ и $\tilde{s}_i(t) = 0$ при $t > T$. Введем дополнительную функцию $W(z) = ze^{z(T-\varepsilon)}S_i(\lambda_0 + z)$. Она аналитична в правой полуплоскости и на вещественной полуоси $\mathbb{R}^+$ ограничена постоянной C_1. Получим соответствующую оценку на мнимых полуосях. Интегрируя по частям, имеем

$$S_i(\lambda_0 + z) = \frac{-1}{\lambda_0 + z}(s_i(T)e^{-\lambda_0 T}e^{-zT} + \int_0^T s_i'(t)e^{-\lambda_0 t}e^{-zt}\,dt).$$

Для $z = iy$ получим оценку

$$|W(z)| \le (|s_i(T)| + \|s_i'\|_{L_1(0,T)}) = C_3 \ \forall z = iy,\ y \in \mathbb{R}. \tag{2.121}$$

Внутри каждого из секторов $0 \le argz \le \pi/2$, $-\pi/2 \le argz \le 0$ функция $W(z)$ допускает оценку

$$|W(z)| \le e^{|z|(T-\varepsilon)}(|s_i(T)| + \|s_i\|_{L_1(0,T)}) \ \forall Re\, z \ge 0.$$

Применяя теорему Фрагмена-Линделефа (см. теорему 5.6.1 в [111]) получим, что в каждом из секторов $0 \le argz \le \pi/2$, $-\pi/2 \le argz \le 0$ функция $W(z)$ допускает оценку

$$|W(z)| \le \max(C_1, C_3) = C_4 \ \forall Re\, z \ge 0. \tag{2.122}$$

Следовательно

$$|S_i(\lambda_0 + z)| = |L(\tilde{s}_i(t))(z)| \le C_4(\varepsilon)e^{-(T-\varepsilon)Re\, z}/|z| \ \ \forall Re\, z \ge 0. \tag{2.123}$$

Имеем равенство ($\sigma > 0, p = \sigma + i\xi$)

$$\tilde{s}_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt}L(\tilde{s}_i)(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t}e^{i\xi t}L(\tilde{s}_i)(\sigma + i\xi)\,d\xi.$$

и таким образом получим

$$\tilde{s}_i(t)e^{-\sigma(t-(T-\varepsilon))} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}e^{\sigma(T-\varepsilon)}L(\tilde{s}_i)(\sigma + i\xi)\,d\xi.$$

Используя равенство Парсеваля, получим

$$\|\tilde{s}_i(t)e^{-\sigma(t-(T-\varepsilon))}\|^2_{L_2(-\infty,\infty)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\sigma(T-\varepsilon)}|L(\tilde{s}_i)(\sigma + i\xi)|^2\,d\xi \le$$
$$\frac{C_4(\varepsilon)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2 + \xi^2}\,d\xi \le \frac{C_4(\varepsilon)}{2\sigma}. \tag{2.124}$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $\sigma > 0$, $\tilde{s}_i(t) = 0$ при $t \leq T - \varepsilon$. В силу произвольности ε можем заключить, что $\tilde{s}_i(t) = 0$ при $t \leq T$. Отсюда следует, что $N_i(t) = 0$ при $t \leq T$ для любых i и следовательно правая часть (2.107) обращается в ноль и значит $u = 0$. □

Прежде всего отметим, что следующее условие является фактически необходимым условием единственности решений задачи (2.5)-(2.7). При его нарушении любое количество точек замеров $\{y_i\}$ не гарантирует единственности (см. примеры ниже).

Условие (А). При $n = 2$ любые три точки из точек $\{y_i\}$ не лежат на одной прямой, а при $n = 3$ любые четыре точки из точек $\{y_i\}$ не лежат в одной плоскости.

Рассмотрим вопрос о единственности решений обратной задачи в простейшем случае $Lu = -\Delta u + \lambda_0 u$, $\lambda_0 \geq 0$, $G = \mathbb{R}^n$ и функции N_i в правой части (2.5) есть вещественные постоянные.

Теорема 2.16. *Пусть u_1, u_2 два решения задачи* (2.5)-(2.7) *из класса описанного в теореме* 2.13 *с правыми частями в уравнении* (2.5) *вида* $\sum_{i=1}^{r_1} N_i^j \delta(x - x_i^j)$ $(N_j = const, j = 1, 2)$, *выполнено условие* (А) *и* $s \geq 2r + 1$ *в случае* $n = 2$, $s \geq 3r + 1$ *в случае* $n = 3$, *где* $r \geq \max(r_1, r_2)$ *(т.е. предполагается, что верхняя граница для числа* $\max(r_1, r_2)$ *известна). Тогда* $u_1 = u_2$, $x_i^1 = x_i^2$, *т.е. решение задачи об определении числа* m, *точек* x_i *и постоянных* N_i *единственно.*

Доказательство теоремы 2.16. Пусть функции u_1, u_2 не совпадают и $w = u_1 - u_2$. Функция w удовлетворяет однородным начальным данным и однородным условиям переопределения (2.7) и имеем

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{r_1} N_i^1 \delta(x - x_i^1) - \sum_{i=1}^{r_2} N_i^2 \delta(x - x_i^2),\ 2r \geq r_1 + r_2,$$

Выделяя положительные и отрицательные постоянные N_i^j и произведя переобозначения, можем записать уравнение в виде

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{r_3} N_i \delta(x - x_i) - \sum_{i=1}^{r_4} C_i \delta(x - x_i^*),\ 2r \geq r_3 + r_4, \tag{2.125}$$

где уже постоянные N_i и C_i положительны и все точки x_i, x_i^* различны. Пусть, например, $n = 3$. Для простоты записи возьмем $\lambda_0 = 0$. Доказательство не меняется при других значениях этого параметра. Применяя преобразование Лапласа и обращая эллиптическую часть, получим

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^{r_3} \frac{N_i}{4\pi|x - x_i|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_i|} - \sum_{i=1}^{r_4} \frac{C_i}{4\pi|x - x_i^*|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_i^*|}. \tag{2.126}$$

Используя однородное условие (2.7), получим

$$\sum_{i=1}^{r_3} \frac{N_i}{4\pi|y_j - x_i|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|y_j-x_i|} = \sum_{i=1}^{r_4} \frac{C_i}{4\pi|y_j - x_i^*|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|y_j-x_i^*|}, \; j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.127}$$

Для определенности считаем, что $r_3 \geq r_4$. Покажем, что множества чисел $\{r_{ij} = |x_i - y_j| : \quad i = 1, 2 \ldots, r_3\}$, $\{\tilde{r}_{ij} = |x_i^* - y_j|, \; i = 1, 2 \ldots, r_4\}$ совпадают при всех j. Действительно, возьмем, произвольное j. Пусть $\delta_{1j} = \min_i r_{ij}$, $\tilde{\delta}_{1j} = \min_i \tilde{r}_{ij}$. Покажем, что $\delta_{1j} = \tilde{\delta}_{1j}$. Предположим противное, например, пусть $\delta_{1j} < \tilde{\delta}_{1j}$. Умножая систему (2.127) на $4\pi\delta_{1j}\lambda e^{\sqrt{\lambda}\delta_{1j}}$ и переходя к пределу при $\lambda \to +\infty$ получим равенство

$$\sum_{i:|x_i-y_j|=\delta_{1j}} N_i = 0. \tag{2.128}$$

Это противоречие, поскольку по предположению $N_i > 0$. Таким образом, $\delta_{1j} = \tilde{\delta}_{1j}$ и умножая систему (2.127) на $4\pi\delta_{1j}\lambda e^{\sqrt{\lambda}\delta_{1j}}$ и и переходя к пределу при $\lambda \to +\infty$ также получим

$$\sum_{i:|x_i-y_1|=\delta_{1j}} N_i = \sum_{i:|x_i^*-y_j|=\delta_{1j}} C_i.$$

Отсюда заключаем, что мы можем сократить в равенствах (2.127), (2.127) суммы слева и справа вида

$$\sum_{i:|x_i-y_j|=\delta_{1j}} \frac{N_i}{4\pi|y_j - x_i|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|y_j-x_i|}, \quad \sum_{i:|x_i^*-y_j|=\tilde{\delta}_{1j}} \frac{C_i}{4\pi|y_j - x_i^*|\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}|y_j-x_i^*|}$$

в силу их равенства. Пусть $\delta_{2j} = \min_{i:r_{ij}>\delta_{1j}} r_{ij}$, $\tilde{\delta}_{2j} = \min_{i:\tilde{r}_{ij}>\tilde{\delta}_{1j}} \tilde{r}_{ij}$. Повторяя рассуждения применительно к оставшимся суммам, получим что $\delta_{2j} = \tilde{\delta}_{2j}$. Также получим и аналог вышеприведенного равенства

$$\sum_{i:|x_i-y_j|=\delta_{2j}} N_i = \sum_{i:|x_i^*-y_j|=\tilde{\delta}_{2j}} C_i.$$

Опять, сокращая равные слагаемые в равенствах (2.127), придем к сокращенной системе аналогичной (2.127), но суммы слева и справа берутся по $i : r_{ij} > \delta_{2j}$ и $i : \tilde{r}_{ij} > \delta_{2j}$. Теперь уже очевидно, что математическая индукция покажет существование пар равных чисел $\delta_{kj}, \tilde{\delta}_{kj}$ $k = 1, 2, \ldots, r_{0j} \le \min(r_3, r_4)$ таких, что

$$\sum_{i:|x_i - y_j| = \delta_{kj}} N_i = \sum_{i:|x_i^* - y_j| = \tilde{\delta}_{kj}} C_i, \quad k = 1, 2, \ldots, r_{0j}, \tag{2.129}$$

причем левая и правая часть этих равенств положительна. Таким образом, множества чисел $\{r_{ij} = |x_i - y_j| : \quad i = 1, 2 \ldots, r_3\}$, $\{\tilde{r}_{ij} = |x_i^* - y_j|, \ i = 1, 2 \ldots, r_4\}$ совпадают при всех j. В частности, отсюда вытекает, что для любой точки, например, для точки x_1 и любого j найдется точка $x_{i_j}^*$ такая, что

$$|x_1 - y_j| = |x_{i_j}^* - y_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

У нас $s \ge 3r + 1$ и $r_4 \le r$ - число точек $\{x_i^*\}$. Следовательно, среди точек $\{x_{i_j}^*\}_{j=1}^s$ найдутся четыре совпадающих точки, пусть например, это будут точки $x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, x_{i_3}^*, x_{i_4}^*$. Тогда будут выполнены равенства

$$|x_1 - y_j| = |\tilde{x}_{i_j} - y_j|, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

откуда вытекает, что точки y_j при $j = 1, 2, 3, 4$ лежат в плоскости перпендикулярной отрезку $[x_1, x_{i_1}]$, т.е. в одной плоскости, а это противоречит условию (A). Таким образом, $w \equiv 0$.

Доказательство в случае $n = 2$ отличается лишь более сложным представлением для фундаментального решения $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}|x - x_0|)$, при этом используется его асимптотика. Как и в случае $n = 3$ мы приходим к противоречию с условием (A). $\square$

2.4 Некоторые приложения и примеры

Приведем соответствующие примеры, показывающие точность полученных результатов. Следующий пример показывает, что в случае нарушения условия (A) задача определения мощностей источников (стоков) в случае, если местоположение точек источников x_1, x_2 известно имеет неединственное решение и одновременно это пример неединственности решений в задаче определения мощности одного источника и его местоположения. Отметим, что задача определения местоположения одного источника x_0 и его мощности $N(t)$ достаточно проста и для их однозначного определения требуется в случае $n = 1$ два замера [62], как мы показали в параграфе 2 этой главы. Ниже мы покажем, что в случае $n = 2$ требуется три замера а в случае $n = 3$ 4 замера. (т.е. $s = 4$ в (2.7)). При этом в случае $n = 1$ необходимо, чтобы точка x_0 лежала между двумя точками замеров, а в случае $n = 2, 3$, чтобы было выполнено условие (A). Меньшее количество точек не позволяет однозначно определить параметры $N(t), x_0$. Численному решению задачи об определении одного источника посвящены, например, работы [112], [113], [75], [72], [114], [115], [72], [116], [117], [118], [119].

Пример 1. Возьмем вначале случай $n = 3$, $G = \mathbb{R}^n$, $Lu = -\Delta u$. Пусть u – решение уравнения (2.5), удовлетворяющее однородным начальным условиям, с правой частью в (2.5) вида

$$N(t)(\delta(x - x_1) - \delta(x - x_2)).$$

Преобразование Лапласа от решения задачи (2.5)-(2.6) с однородными данными записывается в виде

$$\hat{u} = \hat{N}(\lambda)(\frac{1}{4\pi|x - x_1|}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_1|} - \frac{1}{4\pi|x - x_2|}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_2|}).$$

Пусть P – плоскость, перпендикулярная отрезку $[x_1, x_2]$ и делящая его пополам. Тогда

$$\hat{u}(y, \lambda) \equiv 0 \ \ \forall y \in P.$$

Соответственно, будет выполнено, что $u(y, t) = 0$ для всех $y \in P$. Точно также строится и пример неединственности в случае $n = 2$. Вместо плоскости P берем серединный перпендикуляр к отрезку $[x_1, x_2]$. Таким образом, если условие (A) нарушено, то любое количество точек замеров не позволяет определить мощности или мощности и местоположение источников.

Пример 2. Рассмотрим случай $G = \mathbb{R}^n$, $Lu = -\Delta u$. Покажем, что условия (2.7) с $s = 4$ при $n = 2$ и с $s = 6$ при $n = 3$ не позволяют определить местоположение 2-х источников и их мощностей даже если условие (A) выполнено. Пусть u_1, u_2 решения уравнения (2.5) с однородными начальными условиями и правыми частями вида

$$N(t)\delta(x-x_1)+N(t)\delta(x-x_2),\ N(t)\delta(x-x_1^*)+N(t)\delta(x-x_2^*).$$

Пусть, например, $n=3$. Тогда их преобразования Лапласа $\hat{u}_1,\hat{u}_2$ определяются из равенства

$$\hat{u}_1(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\hat{N}}{4\pi|x-x_i|}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_i|},\quad \hat{u}_2(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\hat{N}}{4\pi|x-x_i^*|}e^{-\sqrt{\lambda}|x-x_i^*|}. \quad (2.130)$$

Здесь мы использовали явные представления фундаментальных решений для уравнения Гельмгольца (см., например, в §3.1 в [94] или Гл. 4, 8 [95]). В качестве точек x_i,x_i^* возьмем точки $x_1=(a,a,0),\ x_1^*=(a,-a,0),\ x_2=(-a,-a,0),\ x_2^*=(-a,a,0)$ $(a>0)$. Легко проверить что функции $\hat{u}_1,\hat{u}_2$ совпадают в точках

$$y_1=(M,0,0),\ y_2=(-M,0,0),\ y_3=(0,M,0),$$
$$y_4=(0,-M,0),\ y_5=(0,0,M),\ y_6=(0,0,-M),$$

где $M>0$ и, таким образом, задача об определении местоположения 2-х источников и их мощностей имеет неединственное решение в случае $s=6$. Как вытекает из теоремы 2.16, в случае $s=7$ точки x_1,x_2 и мощности определяются однозначно (при выполнении условия (A) и если мощности считаются постоянными).

Рассмотрим случай $n=2$. Как и ранее, строим функции u_1,u_2 чьи преобразования Лапласа имеют вид

$$\hat{u}_1=\sum_{j=1}^{2}\frac{i\hat{N}}{4\lambda}H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}|x-x_j|),\ \hat{u}_2=\sum_{j=1}^{2}\frac{i\hat{N}}{4\lambda}H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}|x-x_j^*|),$$

где H_0^1 – функции Ханкеля [96]. Возьмем $x_1=(a,a),\ x_1^*=(a,-a),\ x_2=(-a,-a),\ x_2^*=(-a,a)$ $(a>0)$, Легко проверить что

$$\hat{u}_1(y_j,\lambda)=\hat{u}_2(y_j,\lambda)\ \ \forall j=1,\dots,4,\ \lambda\in\mathbb{R}^+. \quad (2.131)$$

где $y_1=(M,0),\ y_2=(-M,0),\ y_3=(0,M),\ y_4=(0,-M)$. Как вытекает из теоремы 2.16, в случае $s=5$ точки x_1,x_2 и мощности определяются однозначно (при выполнении условия (A) и если мощности считаются постоянными).

Замечание 2.7. *Как показывают примеры, число минимумов соответствующего целевого функционала, вводимого если мы решаем задачу* (2.5)-(2.7) *численно сводя ее к задаче оптимального управления может быть велико и даже представлять из себя некоторое многообразие.*

Замечание 2.8. *На основе асимптотических представлений в случае постоянных величин N_i может быть построен численный алгоритм нахождения источников $\{x_i\}$ с использованием идей из работы [75]. Некоторый обзор работ посвященных поиску точечных источников может быть найден в работе [120], а некоторые подходы в работах [121], [122], [123], [124] .*

Алгоритм определения решения $u, N_1(t), x_1$ **задачи** (2.5)-(2.7) **в случае** $r = 1$. Пусть $G = \mathbb{R}^n$ или $G = \mathbb{R}^n_+$, или G область с компактной границей. Фиксируем параметр $\lambda \geq \lambda_0$ и предположим, что функции u, N_1 принадлежат классу описанному в теореме 2.13 (или в теореме 2.14) равно как и данные g, u_0, f_0. Предположим также, что точки замеров $\{y_i\}$ и точка x_1 содержатся в некотором компакте, вида, указанного, например, в теореме 2.13 (или в других теоремах об асимптотике в §1.3, $s = 3$ при $n = 2$ и $s = 4$ при $n = 3$. Считаем, что условие (A) выполнено.

Вначале рассмотрим случай $n = 3$. Найдя решение задачи (2.11) и сделав сдвиг $u = v_0 + w$, мы сведем задачу (2.5)-(2.7) к задаче

$$w_t + Lw = N_1(t)\delta(x - x_1), \quad w(x, 0) = 0, \quad Bw|_S = 0, \tag{2.132}$$

$$w(y_i, t) = \psi_i - v_0(y_i, t) = \tilde{\psi}_i(t), \ i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.133}$$

Преобразование Лапласа дает, что функция $\hat{w} = \mathcal{L}(w) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} w(x, t)\, dt$ есть решение задачи

$$\lambda\hat{w} + L\hat{w} = \hat{N}_1(\lambda)\delta(x - x_1), \quad Bw|_S = 0. \tag{2.134}$$

$$\hat{w}(y_j) = \mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda), \ j = 1, \ldots, s. \tag{2.135}$$

Используя условие (2.135), получим

$$\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda) = \hat{N}_1(\lambda) v_0(y_j, \lambda), \quad j = 1, \ldots, s, \tag{2.136}$$

где v_0 есть решение задачи (1.1), (1.2). Используя асимптотику v_0, получим

$$\frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_i)(\lambda)} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x_1-y_j|}|x_1-y_i|}{e^{-\sqrt{\lambda}|x_1-y_i|}|x_1-y_j|(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))}, \quad i,j=1,2,3,4. \tag{2.137}$$

Положим $G_{ij} = \mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)/\mathcal{L}(\tilde{\psi}_i)(\lambda)$. Без ограничения общности считаем, что $|O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})| \le 1/2$ при всех i, j и $\lambda \ge \lambda_1$ ($\lambda_1 \ge \lambda_0$). Берем $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Тогда из (2.137) имеем

$$\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = e^{|x_1-y_j|-|x_1-y_i|}(1+O(\frac{1}{\alpha})). \tag{2.138}$$

Таким образом,

$$\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_j - \alpha_i + O(\frac{1}{\alpha}). \tag{2.139}$$

Из этого равенства заключаем, что существует предел

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_j - \alpha_i. \tag{2.140}$$

Возможен случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, когда все пределы в (2.140) равны нулю. Тогда точка x_1 есть центр сферы, проходящей через точки y_1, y_2, y_3, y_4, единственным образом определяемой. В этом случае $\hat{N}_1 = \frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{v_0(y_j,\lambda)}$, $N_1 = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{v_0(y_j,\lambda)}\right)$. Предположим, что среди пределов (2.140) имеется ненулевой предел $\alpha_{j_0} - \alpha_{i_0}$. Таким образом, мы приближенно можем написать, что

$$\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_{j_0} - \alpha_{i_0}, \tag{2.141}$$

Приближенно равенство (2.137) можно переписать в виде

$$\frac{\alpha_{i_0}}{\alpha_{j_0}} = \frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_{j_0})(\lambda)}{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_{i_0})(\lambda)}e^{\sqrt{\lambda}(\alpha_{j_0}-\alpha_{i_0})} = G(\lambda). \tag{2.142}$$

Поскольку правая часть тождественно не равна 1 и известна, найдется $\lambda_3 > 0$ такое, что $G(\lambda) \ne 1$ при $\lambda \ge \lambda_3$. Мы получили приближенные уравнения (2.141) и (2.142) для нахождения величин $\alpha_{j_0}, \alpha_{i_0}$, причем при достаточно большом λ определитель этой системы не равен нулю. Решив ее, найдем приближения $\tilde{\alpha}_{j_0}, \tilde{\alpha}_{i_0}$. Легко увидеть, что определитель системы отделен от нуля равномерно по всем λ таким, что $\lambda \ge \lambda_4$ для некоторого λ_4. Поэтому для искомых величин $\alpha_{i_0}, \alpha_{j_0}$ будем иметь представление $\alpha_{i_0} = \tilde{\alpha}_{j_0} + O(\frac{1}{\alpha})$. Выбирая ненулевые пределы вида $\alpha_i - \alpha_j$ и используя равенства $\alpha_i = \alpha_j$ в том случае если предел нулевой, мы определим все величины α_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда точка x_1 определится как точка пересечения сфер с центрами в точках y_i и радиусами α_i. Функция N_1 определится при помощи обратного преобразование Лапласа (или с использованием формулы Дьюамеля), а функция $w(x,t)$ с использованием решения прямой задачи.

Рассмотрим случай $n = 2$. Отметим, что приведенный ниже алгоритм, вообще говоря получен не нами. Он приведен в работе [112]. Мы опишем его для полноты картины. Используя асимптотику из теоремы 1.8, получим

$$\frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_i)(\lambda)} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x_1-y_j|}\sqrt{|x_1-y_i|}}{e^{-\sqrt{\lambda}|x_1-y_i|}\sqrt{|x_1-y_j|}(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))}, \quad i,j = 1,2,3. \tag{2.143}$$

Положим $G_{ij} = \mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)/\mathcal{L}(\tilde{\psi}_i)(\lambda)$. Без ограничения общности считаем, что $|O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})| \leq 1/2$ при всех i,j и $Re\,\lambda \geq \lambda_0$ $(\lambda_0 > 0)$. Берем $\alpha \geq \sqrt{R_0}$. Тогда из (2.143) имеем

$$\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = e^{|x_1-y_j|-|x_1-y_i|}(1+O(\frac{1}{\alpha})). \tag{2.144}$$

Таким образом,

$$\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_j - \alpha_i + O(\frac{1}{\alpha}). \tag{2.145}$$

Из этого равенства заключаем, что существует предел

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_j - \alpha_i. \tag{2.146}$$

Возможен случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, когда все пределы в (2.146) равны нулю. Тогда точка x_0 есть центр окружности, проходящей через точки y_1, y_2, y_3, единственным образом определяемой. В этом случае $\hat{N} = \frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{v_0(y_j,\lambda)}$ $N = L^{-1}\Big(\frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_j)(\lambda)}{v_0(y_j,\lambda)}\Big)$ и $e^{-\gamma t}N(t) \in L_2(0,\infty)$ при всех $\gamma \geq \gamma_0$ (если выполнено условие (C)). Предположим, что среди пределов (2.146) имеется ненулевой предел $\alpha_{j_0} - \alpha_{i_0}$. Таким образом, мы приближенно можем написать, что

$$\ln\frac{G_{ij}(\alpha^2)}{G_{ij}((\alpha+1)^2)} = \alpha_{j_0} - \alpha_{i_0}, \tag{2.147}$$

Приближенно равенство (2.141) можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{\alpha_{i_0}}{\alpha_{j_0}}} = \frac{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_{j_0})(\lambda)}{\mathcal{L}(\tilde{\psi}_{i_0})(\lambda)}e^{\sqrt{\lambda}(\alpha_{j_0}-\alpha_{i_0})} = G(\lambda). \tag{2.148}$$

Поскольку правая часть тождественно не равна 1 и известна, найдется $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \geq \max(R_1, R_0)$ такое, что $G(\lambda_0) \neq 1$ (при больших по модулю λ это всегда так). Мы получили приближенные уравнения (2.148) и (2.147) для нахождения величин $\alpha_{j_0}, \alpha_{i_0}$, где мы выбираем и фиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$ - достаточно большое числе, и число λ_0, определитель этой системы которой не равен нулю. Решив ее, найдем приближения $\tilde{\alpha}_{j_0}, \tilde{\alpha}_{i_0}$. Легко увидеть, что определитель системы отделен от нуля равномерно по всем λ в некоторой полуплоскости $Re\,\lambda \geq \lambda_1$. Поэтому для искомых величин $\alpha_{i_0}, \alpha_{j_0}$ будем иметь представление $\alpha_{i_0} = \tilde{\alpha}_{j_0} + O(\frac{1}{\alpha}) + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}})$. Выбирая ненулевые пределы вида $\alpha_i - \alpha_j$ и используя равенства $\alpha_i = \alpha_j$ в том случае если предел нулевой, мы определим все величины α_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда точка x_1 определится как точка пересечения сфер с центрами в точках y_i и радиусами α_i. Функция N определится при помощи обратного преобразование Лапласа из равенства (2.143), а функция $w(x, t)$ как решение прямой задачи. Будем иметь, что $e^{-\gamma_1 t} N(t) \in L_2(0, \infty)$ для некоторого $\gamma_1 \geq \gamma_0$ (при выполнении (C)). Из способа построения точки x_0 мы видим, что она находится единственным образом. Тогда легко получается и теорема единственности решений задачи. Если условие (A) не выполнено, то единственности определения точки x_0 у нас нет.

Замечание 2.9. *Как и в одномерном случае, прямое использование приведенных алгоритмов вызывает некоторые затруднения. При численном решении задачи выбор достаточно большого параметра λ а асимптотических представлениях невозможен, необходимо принимать во внимание неравенство типа $\lambda \leq c/\tau$, где τ шаг по времени, возникающий при дискретизации задачи. Однако, даже при таком выборе приходится осуществлять некоторый подбор параметра, для оптимальности результата. В случае $n = 2$ численная реализация, приведенного выше алгоритма, представлена в работе [112].*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был исследован ряд обратных задач для математических моделей тепломассопереноса.

Основные результаты можно описать следующим образом.

1. При достаточно слабых условиях гладкости на коэффициенты уравнения построены асимптотические представления функций Грина эллиптических задач с комплексным параметром.
2. Исследованы обратные задачи идентификации объёмной плотности источников примесей по точечным замерам. Получены условия единственности решений и условия на данные гарантирующие существование решений в классах Соболева. Результаты диссертации позволяют строить новые численные алгоритмы определения источников.
3. Построены примеры неединственности и описаны алгоритмы, позволяющие строить решение обратных задач.

Результаты работы развивают теорию обратных задач для параболических уравнений и математических моделей тепломассопереноса, указывают новые подходы в их решении и могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей тепломассопереноса, и других моделей, в частности, моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, модели описывающие процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряд других. Результаты, также, могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. Grisvard P. Equations differentielles abstraites // Annales Scientifiques De L Ecole Normale Superieure. 1969. Vol. 2. P. 311–395.
3. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Am. Math. Soc. 2003. Vol. 166.
4. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Translations of Mathematical Monographs. 23. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1968.
5. Amann H. Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Teubner-Texte zur Mathematik. 1993. Vol. 133.
6. Вайнберг Б.Р. Асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решений внешних смешанных задач для гиперболических уравнений и квазиклассика // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. фундам. направления. 1988. Т. 34. С. 57–92.
7. Вайнберг Б.Р. О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \to \infty$ решений нестационарных задач // Успехи матемематических наук. 1975. Т. 30. С. 3–55.
8. Бабич В.М. Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1988. Т. 34. С. 93–134.
9. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука. 1972.
10. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, номер 5. С. 949–951.
11. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1964. Т. 65(107), номер 4. С. 576–630.

12. Буслаев В.С. Теория потенциала и геометрическая оптика // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 175–180.
13. Олимпиев И.В. Оценка поля в области тени при дифракции цилиндрической волны на ограниченном выпуклом цилиндре // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, номер 5. С. 1068–1071.
14. Вайнберг Б.Р. Об аналитических свойствах резольвенты для одного класса пучков операторов // Математический сборник. 1968, номер 2. Т. 77(119). С. 259–296.
15. Вайнберг Б.Р. О точечном источнике в неоднородной среде // Математический сборник. 1974. Т. 1. С. 124—151.
16. Гатауллин Т.М. Асимптотика фундаментального решения эллиптического уравнения по комплексному параметру // Матем. заметки. 1977. Т. 21, выпуск 3. С. 377–390.
17. Babich V., Kisilev A. Elastic waves. High frequency theory // Boca Raton: CRS Press. 2018.
18. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc. 1999.
19. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012.
20. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. 2006.
21. Kozhanov A.I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
22. Belov Yu.Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
23. Horani M. A., Favini A. An identification problem for first-order degenerate differential equations // Journal of optimization theory and applications. 2006. Vol. 130, No. 1. P. 41–60.
24. Bukhgeim A., Kalinina N. Global convergence of the Newton method in the inverse problems of memory reconstruction // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38, No. 5. P. 881–895.
25. Плеханова М.В., Федоров В.Е. Об управляемости вырожденных распределенных систем // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, No. 2. С. 78–98.

26. Фёдоров В.Е., Шкляр Б. Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением // МАТЕМ. СБ. 2012. Т. 203, No. 12. С. 137–156.
27. Urazaeva A., Fedorov V. On the well-posedness of the prediction - control problem for certain systems of equations // Mathematical Notes. 2009. Vol. 85, No. 3. P. 426–436.
28. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012.
29. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer Science+Business Media, New York, 2011.
30. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. The Netherland. Dordrecht, Springer, 2005.
31. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, 2007.
32. Beilina L., Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. Springer. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
33. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К. 2009.
34. Alifanov O.M. Inverse heat transfer problems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1994.
35. Ozisik M.N., Orlando H.A. Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis. 2000.
36. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
37. Pestov L., Bolgova V., Danilin A. Numerical recovering of a speed of sound by the BC-method in 3D // Acoustical Imaging. 2012. Vol. 31. P. 201–210.
38. Pestov L. Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method // Journal of inverse and ill-posed problems. 2012. Vol. 20, No. 1. P. 103–110.
39. Pestov L., Bolgova V., Kazarina O. Numerical recovering of a density by the BC-method // Inverse Problems and Imaging. 2010. Vol. 4, No. 4. P. 703–712.

40. Pestov L. On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2014. Vol. 22, No. 2. P. 245–250.
41. Klibanov M. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems //
htpp: www.arxiv.org, arxiv: 1410.7521v1. 2014. C. 42.
42. Chung F. A partial data result for the magnetic Schrödinger inverse problem // Analysis and PDE. 2014. Vol. 7, No. 1. P. 117–157.
43. Ames K.A., Straughan B. Non-standard and improperly posed problems. San-Diego, London: Academic Pres, Inc. 1997.
44. Ramm A.G. Inverse Problems. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Boston, Springer Science, Business Media, Inc., 2005.
45. Камынин В.Л. Обратная задача определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, No. 2. С. 207–216.
46. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. Т. 94, No. 2. С. 207–217.
47. Iskenderov A., Akhundov A. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. Vol. 79, No. 1. P. 73–75.
48. Ismailov M., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Problems In Science and Engineering. 2012. Vol. 20, No. 24. P. 463–476.
49. Jing L., Youjun X. An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. 2010. Vol. 34. P. 195–206.
50. Kerimov N., Ismailov M. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 396. P. 546–554.
51. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, No. 12. С. 2168–2184.

52. Криксин Ю.А., Плющев С.Н., Самарская Е.А. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. С. 95–108.
53. Marchuk G. Mathematical Models in Environmental Problems. Studies in Mathematics and its Applications // Amsterdam: Elsevier Science Publishers. 1986. Vol. 16.
54. Badia A. E., Ha-Duong T., Hamdi A. Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1–17.
55. Boano F., Revelli R., Ridolfi L. Source identification in river pollution problems: a geostatistical approach // Water Recources Research. 2005. Vol. 41. P. 1–13.
56. Ling L., Takeuchi T. Point sources identification problems for heat equations // Commun. Comput. Phys. 2009. Vol. 5, No. 5. P. 897–913.
57. Панасенко А.Е., Старченко А.В. Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // Вестник Томского ГУ. Математика и механика. 2008. Т. 3, No. 2. С. 47–55.
58. Hamdi A. Identification of point sources in two dimensional advection-diffusion-reaction equation: Application to pollution sources in a river. Stationary case // Inverse Problems in Science and Engineering. 2007. Vol. 15, No. 8. P. 855–870.
59. Murray-Bruce J., Dragotti P. Estimating localized sources of diffusion fields using spatiotemporal sensor measurements // IEEE Trans. on Signal Processing. 2015. Vol. 63, No. 12. P. 3018–3031.
60. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.
61. Pyatkov S. On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed problems. 2011. Vol. 18. P. 917–934.
62. Пятков С.Г., Сафонов Е.И. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников // Математические труды. 2016. Т. 19, № 1. С. 178–198.
63. Пятков С.Г., Ротко В.В. Об определении функции источника в квазилинейных параболических задачах с точечными условиями переопределения // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2017. Т. 9, №4. С. 19–26.

64. Cannon J. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data // SIAM J. Numer. Anal. 1968. Vol. 5. P. 275–286.
65. Engl H. W., Scherzer O., Yamamoto M. Uniqueness of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1253–1276.
66. Yamamoto M. Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle // Mathl. Comput. Modelling. 1993. Vol. 18, No.1. P. 79–88.
67. Yamamoto M. Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain // International Series of Numerical Mathematics. 1994. Vol. 18. P. 359–370.
68. Hettlich F., Rundell W. Identification of a discontinuous source in the heat equation // Inverse Problems. 2001. Vol. 17. P. 1465–1482.
69. DuChateau P., Rundell W. Unicity in an inverse problem for an unknown reaction term in a reaction-diffusion-equation // J. of Diff. Equ. 1985. Vol. 59. P. 155–164.
70. Cannon J. R., DuChateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998. Vol. 14. P. 535–551.
71. Пененко В.В. Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 12, No. 4. С. 421–434.
72. Deng X., Zhao Y., J. Zou. On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity // Int. J. Numer. Anal. Model. 2013. T. 10, No.3. C. 588–602.
73. Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж. Алгоритмы локализации источников загрязнения атмосферного воздуха на основе данных автоматизированной системы экологического мониторинга // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 35– 54.
74. Badia A., Ha-Duong T. Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution // Inverse Problems. 2007. Vol. 23. P. 2103–2120.
75. Badia A., Ha-Duong T. On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem // J. Inv. Ill-Posed Problems.

2002. Vol. 10, No. 6. P. 585–599.
76. Badia A., Ha-Duong T. An inverse source problem in potential analysis // Inverse Problems. 2000. Vol. 16, iss.3. P. 651–663.
77. Pyatkov S.G., Safonov E.I. Point Sources Recovering Problems for the One-Dimensional Heat Equation // Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. 2019. T. 11, Iss. 01. C. 496–510.
78. Неустроева Л.В. Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса // Сборник тезисов российско-французского семинара «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019. С. 43.
79. Неустроева Л.В. On recovering a point source in some heat and mass transfer problems // AIP CONFERENCE PROCEEDINGS.
80. Пятков С.Г., Неустроева Л.В. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников // Математические заметки СВФУ. 2020. Т. 27. С. 21–40.
81. Неустроева Л.В. О некоторых асимптотических преставлениях и их приложениях // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, д. т. н., профессора Э. А. Бондарева, 2021. С. 246-247.
82. Pyatkov S.G., Neustroeva L.V. On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. T. 66, n. 6-7. C. 964–987.
83. Neustroeva L.V. On uniqueness in the problems of determining point sources in mathematical models of heat and mass transfer // Bulletin of the South Ural state university. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. 2022. T. 14. C. 31–43.
84. Неустроева Л.В. Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса // Тезисы XXII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск. 2021. С. 24–25.
85. Неустроева Л.В. Обратные параболических задачи об определении точечных истояников // Международная конференция «Математические идеи

П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышёва, Обнинск. 2021. С. 315–317.

86. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи математических наук. 1964. С. 53–161.
87. Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems.
88. Denk R., Krainer T. R-boundedness, pseudodifferential operators, and maximal regularity for some classes of partial differential operators // Manuscripta Math. 2007. Vol. 124. P. 319–342.
89. Kunstmann P.C., Weis L. Maximal L_p regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ functional calculus // in Nagel, S. Piazzera (Eds.), Proceedings of the Autumn School on Evolution Equations and Semigroups, in: Levico Lectures,. 2004.
90. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. Vol. 257. P. 93–224.
91. Prüss J., Simonett G. Maximal regularity for evolution equations in weighted L_p-spaces // Arch. Math. 2004. Vol. 82. P. 415–431.
92. Amann H. Maximum Principles and Principal Eigenvalues. In: Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology // J. Ferrera, J. Lopez-Gomez, F. R. Ruiz del Portal (Editors). Amsterdam: Elsevier. 2005. P. 1–60.
93. Naimark M.A. Linear differential operators. New York: Frederick Ungar Publishing Co. XV, 1967.
94. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. 2-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
95. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Из-во МГУ, 1993.
96. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Иностранная литература. т.1, 1949.
97. Amann H. Nonautonomous parabolic equations involving measures // J. Math. Sci. 2005. Vol. 30, no. 4. P. 4780–4802.
98. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

99. Kalton N., Kunstmann P., Weis L. Perturbation and Interpolation Theorems for the H^∞-Calculus with Applications to Differential Operators // Mathematische Annalen. 2006. Vol. 336. P. 747–801.
100. Amann H. Хибер М., Шроэ Л. L_p спектральная независимость эллиптических операторов через коммутаторные оценки, Позитивность. 1999. Vol. 3. P. 259–272.
101. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М: Физматлит, 1989.
102. Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
103. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.:Наука, 1977.
104. Albano P., Tataru D. Unique continuation for second-order parabolic operators at the initial time // Proceedings of the American mathematical society. 2003. Vol. 132. P. 1077–1085.
105. Escauriaza L., Fernandez F. Unique continuation for parabolic operators // Ark. Mat. 2003. Vol. 41. P. 35–60.
106. Коломоец А.А., Ким А.А., Тарасов Р.С. Методы обращения преобразования Лапласа // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. Т. 10 (55). С. 70–75.
107. Коломоец А.А., Ким А.А. Методы обращения преобразования Лапласа // Евразийский Союз Учёных (ЕСУ). 2019. Т. 2. С. 25–88.
108. Martin B. Numerical Inversion of the Laplace Transform: A Survey and Comparison of Methods // Journal of Computational Physics. 1979. Т. 33 (1). С. 33.
109. Порошина В.И., Рябов В.М. О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник С.–Петерб. университета. 2011. Т. 3. С. 55–64.
110. Arendt W., Neubrander F., Hieber M. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems // Berlin: Springer Basel AG. 2011.
111. Tichmarsh E. Theory of functions. Oxford, 1939.
112. Pyatkov S., Safonov E. On Some Classes of Inverse Problems on Determining the Source Function // Proceedings of the 8th Scientific Conference on Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS 2020), Paris: Atlantis Press SARL. 2020. Vol. 483. P. 116–120.

113. Yang C. Solving the two-dimensional heat source problem through the linear least aquare error method // Int. J. Heat Mass Transfer. 1998. Vol. 41(2). P. 393–398.
114. Verdiere N., Joly-Blanchard G., Denis-Vidal L. Identifiability and identification of a pollution source in a river by using a semi-discretized model // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 221. P. 1–9.
115. Neto A., Oziik M. Twodimensional inverse heat conduction problem of estimating the timevarying strength of a line heat source // Journal of Applied Physics. 1992. Vol. 71. P. 53–57.
116. Mazaheri M., Samani J., Samani H. Mathematical Model for Pollution Source Identification in Rivers // Environmental Forensics. 2015. Vol. 16(4). P. 310–321.
117. Su J. Heat Source Estimation with the Conjugate Gradient Method in Inverse Linear Diffusive Problems // J. Braz. Soc. Mech. Sci. 2001. Vol. 23, no.3.
118. Liu F. A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plan heat source // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 51, iss.15-16. P. 3745–3752.
119. Milnes E. Simultaneous identification of a single pollution point-source location and contamination time under known flow field conditions // Advances in Water Resources. 2007. Vol. 30, iss.12. P. 2439–2446.
120. Кожевникова М.Ф., Левенец В.В., Ролик И.Л. Идентификация источников загрязнения: вычислительные методы // Вопросы атомной науки и техники. 2011. Т. 6(19). С. 149–156.
121. Zhou L., Hopke P., Liu W. Comparison of two trajectory based models for locating particle sources for two rural New York sites // Atmospheric Environment. 2004. Vol. 38. P. 1955–1963.
122. Hsu Y., Holsen T. The Use of Receptor Models to Locate Atmospheric Pollutant Sources: PCBs in Chicago // http://www.csu.edu/cers/documents.
123. Application of PSCF and CPF to PMF-Modeled Sources of PM2,5 in Pittsburgh / N. Pekney, C. Davidson, L. Zhow et al. // Aerosol Science and Technology. 2006. Vol. 40, iss. 10. P. 952–961.
124. Han Y., Holsen T., Hopke P. Identification of source location for atmospheric dry deposition of heavy metals during yellow-sand events in Seoul, Korea in

1998 using hybrid receptor models // Atmospheric Environment. 2004. Vol. 38. P. 5353–5361.