На правах рукописи

Федорова Наталья Виталиевна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ИХ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Новосибирск – 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель	Леган Михаил Антонович, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории статической прочности ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
Официальные оппоненты	Ефимов Виктор Прокопьевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией механики взрыва и разрушения горных пород ФГБУН Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН
	Самошкин Антон Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики ФГБОУ ВО «Сибирский государствен- ный университет путей сообщения»

Ведущая организация

ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань

Защита состоится 28 сентября 2020 г. в 16:30 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск. пр. Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, Факс: (383)333-16-12, е-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИГиЛ СО РАН http://www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» августа 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико-математических наук

В.Д. Кургузов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Исследование задач в области механики контактного взаимодействия является важным направлением и неотъемлемой частью современных инженерных разработок, касающихся многих сфер деятельности человека. К ним относятся машиностроение, строительство, биомеханика, геология и многие другие отрасли. Известно, что в зоне контактного взаимодействия наблюдается высокая концентрация напряжений и деформаций, вследствие чего могут появиться пластические деформации и микротрещины, что может привести к началу процесса разрушения, в некоторых случаях приводящего к катастрофическим последствиям. Такое разрушение особенно опасно, в случае использования хрупких материалов, таких как стекло, керамика, бетон и других, из-за быстрого протекания процесса.

Вследствие стремительного развития отраслей науки, связанных с механикой контактного взаимодействия, появляется множество задач, для которых трудно или невозможно получить аналитическое решение. В этом случае на помощь приходят численные методы, одним из которых является метод конечных элементов. Однако в связи с тем, что контактные задачи весьма трудоёмкие и, как правило, требуют больших затрат вычислительного времени, важно подобрать аналитический метод исследования, который позволит сделать ряд допущений в сложной модели и упростить её до суперпозиции известных решений таким образом, чтобы полученный результат существенно не отличался от результата, полученного численным методом. При этом подобранный аналитический метод будет учитывать реальные условия задачи, что позволит упростить расчёты инженерам, особенно, когда речь идёт о многократном решении однотипных задач и в тех случаях, когда важным фактором является время решения.

Также актуальными являются задачи в такой перспективной области, как биомеханика. В современном мире всё чаще возникают вопросы об усовершенствовании не только качества медицины, но и физических возможностей человека. Контактные задачи нашли своё применение и в этой области, когда изучается взаимодействие между биологическими тканями и материалами, из которых изготавливаются имплантаты. Анализ контактного взаимодействия помогает прогнозировать приживляемость имплантата, которая в свою очередь зависит от приложенной нагрузки, площади контакта между имплантатом и биологической тканью, прочности и других физических свойств биологических тканей, а также от покрытий и материала имплантата.

Степень разработанности темы.

Исследования, связанные с контактными задачами, выполняются по актуальным направлениям механики деформируемого твердого тела – механике контактного взаимодействия, механике разрушения и трибологии. Современный уровень механики контактного взаимодействия, а также возможности численных алгоритмов позволяют решать контактные задачи различного уровня сложности, проводить экспериментальные исследования совместно с математическим моделированием и численным анализом. Цель диссертационной работы – разработка методик получения параметров напряженно-деформированного состояния при решении контактных задач, возникающих в различных областях практического применения

Идея работы заключается в использовании конечно-элементного анализа для получения численных решений контактных задач с учётом реальных граничных условий, которые близки по постановке к известным модельным задачам, имеющим аналитическое решение.

Для достижения цели потребовалось решение следующих задач:

1. Определить максимальные растягивающие напряжения в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины в стеклянном образце, с учётом напряжений, возникающих от изгиба, вызванного наличием приспособления для проведения экспериментов.

2. Выполнить анализ влияния условий контакта на напряженно-деформированное состояние круглой свободно-опёртой пластины из хрупкого материала алюминида железа при вдавливании стального шара в центр.

3. Найти распределение контактного давления, возникающего между прижатыми друг к другу плоским и профилированным блоками оргстекла, с учётом геометрии начального зазора, реальных размеров блоков и особенностей граничных условий в эксперименте.

4. Установить оптимальную форму керамических стоматологических имплантатов в зависимости от площади контакта и степени минерализации кости.

Методы исследования.

Методы исследования включают обзор литературы, проведение теоретических и численных исследований на основе метода конечных элементов и компьютерного моделирования. В некоторых задачах использовались экспериментальные данные.

Научная новизна работы.

1. Установлено, что для вычисления максимального растягивающего напряжения в окрестности области контакта, где образуются кольцевые трещины, при испытании образцов конечных размеров по рассмотренной методике, можно воспользоваться аналитической формулой, полученной Хубером для растягивающих напряжений в полупространстве в окрестности области контакта, при этом напряжения от изгиба, возникающие в эксперименте, не влияют на напряжения в окрестности области контакта.

2. В контактной постановке численно решена задача об изгибе круглой пластины при вдавливании в неё стального шара и проведено сравнение численных результатов с результатами, полученными по известной формуле Войновского-Кригера. Показано, что для определения поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний хрупких материалов можно пользоваться аналитической формулой Войновского-Кригера.

3. В результате численного решения контактной задачи получено ступенчатое распределение контактного давления между плоским и профилированным прозрачными блоками конечных размеров. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального гидроразрыва пласта в слоистых горных породах.

4. Установлено, что напряжения в губчатой кости уменьшаются при использовании обратно-конусной формы стоматологических имплантатов. Выявлено, что для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате. Поэтому рекомендуется использовать такую форму имплантатов при протезировании людей в пожилом возрасте.

Практическая значимость работы.

1. При проведении испытаний по рассмотренным методикам, параметры напряжённо-деформированного состояния для аналогичных контактных задач могут быть определены с использованием предложенных аналитических методов, без затрат ресурсов и времени на численный анализ для уточнения влияния реальных граничных условий на результаты испытаний каждого образца, что является удобным инструментом для инженеров и экспериментаторов.

2. Полученные результаты оптимальной формы керамических стоматологических имплантатов, в зависимости от площади контакта с кортикальной костью и степени минерализации кости, могут быть использованы в качестве рекомендации для изготовления новых образцов имплантатов, а также для стоматологов при выполнении протезирования для людей разных возрастов.

3. Результаты работы были использованы в ООО «Газпромнефть НТЦ».

4. Диссертационная работа выполнялась в лаборатории статической прочности ИГиЛ СО РАН. Часть результатов получена при выполнении договора № НТЦ-18/08000/01397/Р от 29 ноября 2018 года с ООО «Газпромнефть НТЦ», гранта Правительства РФ № 14.W03.31.0002, проектов РФФИ № 15-01-07631 А, РФФИ № 18-08-00528 А и РФФИ № 18-38-00361 мол_а.

Личный вклад автора состоит в анализе современного состояния исследуемых задач, в проведении теоретических и численных исследований, а также в обработке и анализе результатов. Кроме того, личный вклад состоит в реализации идеи проектирования новой формы керамических стоматологических имплантатов, с учётом увеличения площади контакта имплантата с костью и изменения степени минерализации кости, в зависимости от возраста пациентов. Идея была реализована в рамках проекта РФФИ № 18-38-00361 мол_а по биомеханике, в котором автор являлся руководителем и единственным исполнителем.

Достоверность численных исследований обеспечивается проверенными алгоритмами решения классических контактных задач методом конечных элементов, исследованием сходимости сетки конечных элементов, согласованием с классическими аналитическими решениями, корректностью подготовки и проведения экспериментов, соответствием с результатами других авторов.

Апробация полученных результатов научных исследований. Результаты работы докладывались и обсуждались на одном зарубежном научном семинаре и 9-ти научных конференциях всероссийского и международного уровня, проходивших на территории РФ. Это Всероссийская конференция с международным участием «Краевые задачи и математическое моделирование» в Новокузнецке в 2016 г. и в 2018 г.; 4-я Всероссийская конференция «Проблемы оптимального проектирования сооружений» в Новосибирске в 2017 г.; Х Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела в Самаре в 2017 г.; Всероссийская конференция с международ-

ным участием, посвящённая 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН в Новосибирске в 2017 г.; Японско-Российский семинар «Advanced Materials Synthesis Process and Nanostructure» в г. Сендай (Япония) в 2018 г.; Российско-Японский семинар «Non-equilibrium processing of materials: experiments and modeling» в Новосибирске в 2018 г.; Юбилейная 30-я международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИК-МУС-2018) в Москве в 2018 г.; XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в Уфе в 2019 г.; Российско-Японский семинар «Маthematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications» в Новосибирске в 2019 г.

Публикации по теме диссертации.

Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 17-ти научных публикациях, в том числе в 3-х статьях в российских журналах из перечня ВАК, в 3-х статьях в зарубежных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus, в том числе в журнале, входящем в первый квартиль Q1 Web of Science, и в 11 статьях в периодических сборниках, трудах и тезисах международных и всерос-сийских конференций.

Структура и объём работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка используемой литературы (126 наименований), изложена на 135 страницах и содержит 46 рисунков и 7 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи работы. Обозначены методы исследования, научная и практическая значимость работы. Представлены положения, выносимые на защиту, апробация результатов и структура диссертации.

В первой главе рассмотрены этапы развития механики контактного взаимодействия и возникающие задачи на основе обзора отечественной и зарубежной литературы.

В разделе 1.1. повествуется об основных исторических аспектах становления механики контактного взаимодействия, начиная с исследований Генриха Рудольфа Герца, а также о значимых работах его последователей за последнее столетие, в том числе отмечается вклад К.Л. Джонсона и его коллег, расширивших теорию Герца.

В разделе 1.2. представлено состояние исследований в области механики контактного взаимодействия в СССР и РФ с середины XX века до настоящего времени на основе работ отечественных исследователей.

Paздел 1.3. содержит представление о состоянии исследований в области механики контактного взаимодействия за рубежом, в том числе современные достижения.

В разделе 1.4. обсуждаются проблемы и перспективные направления в анализе контактных задач, актуальные в настоящее время, требующие поиска новых решений.

В разделе 1.5. рассматриваются контактные задачи в биомеханике на основе анализа современной литературы. Рассматриваются особенности материалов и моделирования в задачах биомеханики, а также вопросы, связанные с перспективными направлениями и современными тенденциями в биомеханике и значением контактных задач.

Во второй главе рассматриваются методы исследования контактных задач.

В разделе 2.1. рассматривается численное моделирование контактных задач на основе метода конечных элементов, когда решается задача теории упругости с условиями на границе контакта, которые включают в себя пересчёт величины зазора, нормальных сжимающих и касательных контактных сил. Даны пояснения на основе схемы контакта точечной массы, подвешенной на пружинке, с поверхностью для контакта с трением и без трения. Рассмотрены методы решения контактных задач, такие как метод множителей Лагранжа и метод штрафных функций.

В разделе 2.2. представлены основные принципы решения контактных задач в конечно-элементном пакете ANSYS. В разделе рассматриваются общие этапы решения.

В третьей главе представлены постановки и решения контактных задач в рамках данного исследования.

В разделе 3.1. рассматривается задача об образовании кольцевых трещин в стеклянном полупространстве при контакте с шаром. Задача появилась из эксперимента, в котором моделировалось вдавливание стальных шаров в стеклянное полупространство. В качестве модели полупространства рассматривались образцы в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами 20 мм и высотой 10 мм. Для того, чтобы фиксировать образование кольцеобразных трещин вблизи области контакта использовался микроскоп, который устанавливался на нижнее основание траверсы испытательной машины и закрывался стальной защитой с отверстием для микроскопа, как показано на рис. 1. Испытания проводились с помощью шаров различных диаметров: 5,5 мм; 10 мм; 17 мм. Изображение от микроскопа передавалось на экран компьютера в реальном масштабе времени, что позволяло фиксировать нагрузки, при которых появлялись трещины.



Рис. 1 – а) схема для проведения эксперимента на испытательной машине Zwick/Roell Z100: 1 – стеклянный образец; 2 – стальная защита; 3 – микроскоп; б) расчётная схема

Расчётная схема представляет собой контактную задачу. Эффективный модуль упругости вычисляется по формуле:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{st}^2}{E_{st}}\right)^{-1},\tag{1}$$

где $E_{st} = 211 \ \Gamma \Pi a$ — модуль Юнга стали; $E = 70 \ \Gamma \Pi a$ — модуль Юнга стекла; $\nu_{st} = 0,28$ — коэффициент Пуассона для стали; $\nu = 0,2$ — коэффициент Пуассона для стекла.

Радиус области контакта вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3RP}{4E^*}},\tag{2}$$

где *R* – радиус шара; *P* – сила, при которой образовалась кольцевая трещина.

Давление в центре области контакта вычисляется по формуле:

$$p_0 = \frac{3}{2} p_m = \frac{3P}{2\pi a^2},\tag{3}$$

где *p_m* – среднее давление.

Таблица 1 – Средние значения из экспериментов

Диаметр шара,	Нагрузка, при которой образуются	Радиус области контакта	Давление в центре обла-
MM	кольцевые трещины, <i>P</i> , H	а, мм	сти контакта p_0 , ГПа
5,5	692	0,281	4,18
10	717	0,355	2,72
17	1115	0,498	2,15

Так как в эксперименте кольцевые трещины образовывались в окрестности области контакта на поверхности стеклянного образца, то представляло интерес максимальное растягивающее напряжение в месте образования трещины, то есть радиальное напряжение. Для вычисления радиального напряжения в любой точке полупространства была использована формула Хубера:

$$\sigma_r = p_0 \left[\frac{1 - 2\nu}{3} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{z^3}{\sqrt{u^3}} \right) + \frac{a^2 z^3}{(u^2 + a^2 z^2)\sqrt{u}} + \frac{z}{\sqrt{u}} \left(\frac{(1 - \nu)u}{a^2 + u} + (1 + \nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arct} \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - 2 \right) \right], \tag{4}$$

где

$$u = \frac{1}{2} \left(r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \right),$$
(5)

z – координата, отсчитываемая от поверхности полупространства по нормали к ней; *r* – радиус, отсчитываемый от точки начального контакта (рис. 1).

Цель решения задачи заключается в определении максимальных растягивающих напряжений в окрестности области контакта, при которых образуются кольцевые трещины численно и аналитически. Нужно было оценить влияние напряжений, возникающих от изгиба из-за наличия отверстия для микроскопа на напряжения в окрестности области контакта.

Так как формула Хубера не учитывает изгиб из-за наличия отверстия для микроскопа, было выполнено моделирование контактной осесимметричной задачи в программном пакете ANSYS 17.2. Рассматривались задачи для каждого диаметра шарика. Нагрузка задавалась в соответствии с усреднёнными экспериментальными данными из таблицы 1. Модель контакта рассматривалась без трения. Для сравнения рассматривалось два типа модельных задач. В первой граничные условия задавались с учётом опирания образца на стальную защиту с отверстием для микроскопа. Вторая соответствовала задаче Герца о вдавливании шара в полупространство. Для второй задачи известно решение Хубера. На рис. 2 показаны результаты вычисления напряжений в окрестности области контакта для задачи, учитывающей отверстие для микроскопа. В таблице 2 представлены результаты вычисления максимального растягивающего напряжения для разных диаметров шара: из аналитического решения Хубера; в численной модели, учитывающей отверстие для микроскопа; в численной модели задачи Герца. Приведена относительная разница между численными моделями задачи Герца и задачи, учитывающей отверстие. Так как эта разница не превышает 1,2%, то, следовательно, напряжения от изгиба, возникающие в эксперименте из-за наличия отверстия для микроскопа, существенно не влияют на значения растягивающих напряжений в окрестности области контакта.



Рис. 2 – Растягивающие напряжения в окрестности области контакта для задачи, учитывающей отверстие для микроскопа при диаметре шара 5,5 мм

Таблица 2 – Сравнение результатов

	Макс. растягивающее	Макс. растягивающее	Макс. растягивающее	Относительная разница между
Диаметр	напряжение	напряжение	напряжение в задаче	численными решениями:
шара, мм	(формула Хубера)	убера) (численный метод) Герца		задачи Герца и образца в
	σ_r , M Π a	σ_r , M Π a	метод) σ_r , МПа	эксперименте, 8%
5.5	755,2	755,09	764,14	1,2
10	513	512,26	512,84	0,1
17	417,2	417,33	419,15	0,4

В разделе 3.2. рассматривается задача о контакте круглой свободно опёртой пластины с шаром. Появляются новые материалы, для которых возникает необходимость определять поперечную прочность на разрыв, метод определения которой заключается в следующем. Образцы для эксперимента изготавливаются в виде круглых пластин из материала, предназначенного для испытаний. Приспособление для проведения эксперимента показано на рис. 3. Пластина устанавливается на кромку полого цилиндра, которая обеспечивает свободное опирание. На пластину помещается стальной шар и фиксируется лункой верхнего цилиндра. Перемещением внешнего цилиндра со сквозным отверстием осуществляется выравнивание двух цилиндров с шариком и пластиной друг относительно друга. В качестве экспериментальных образцов были взяты круглые пластины диаметром ≈ 20 мм, изготовленные посредством реакционного искрового плазменного спекания смеси порошков железа и алюминия при температурах 700°С, 800°С и 900°С.

В эксперименте использовался шарик диаметром 6 мм, изготовленный из подшипниковой стали ШХ15, имеющей модуль Юнга E = 211 ГПа и коэффициент Пуассона 0,28. Модуль Юнга E алюминида железа FeAl был принят равным 260 ГПа. Коэффициент Пуассона алюминида железа зависит от пористости материала и вычисляется по формуле:

$$\mu = 2\mu_0 \left(\frac{2-3\theta}{4-3\theta}\right),\tag{6}$$

где μ_0 – теоретический коэффициент Пуассона плотного материала, который для FeAl равен 0,31. θ – полная пористость, зависящая от температуры спекания. Параметры, принятые для рассматриваемых пластин, представлены в таблице 3.



Рис. 3 – а) экспериментальная установка Zwick / Roell Z100; б) схема проведения эксперимента

Таблица 3 – Параметры образцог	В
--------------------------------	---

№ об-	Температура	Пори-	Коэффициент Пуассона пористого	Диаметр пластины,	Толщина пластины,	Предельная нагрузка, при которой произошло
разца	спскания, С	стость	материала	ММ	ММ	разрушение, Н
1	700			19,5	2,12	142,2
2	700	0,47	0,141	19,6	2,39	153,3
3	700			19,7	2,96	269,0
4	800			19,5	2,85	405,2
5	800	0,47	0,141	19,5	3,19	361,8
6	800			19,5	3,16	345,8
7	900			19,4	3,17	395,8
8	900	0,53	0,105	19,5	3,17	352,0
9	900			19,4	3,05	388,6

Вводится допущение, что контактную нагрузку можно рассматривать, как сосредоточенную силу, приложенную в центре. Тогда максимальные растягивающие напряжения можно вычислить по приближённой формуле Войновского–Кригера для свободно опёртой по контуру круглой пластины:

$$\sigma_{MAX} = \frac{P}{h^2} \left[(1+\nu) \left(0.485 \cdot \ln\left(\frac{l}{h}\right) + 0.52\right) + 0.48 \right],\tag{7}$$

где P – значение приложенной нагрузки; h – толщина пластины; l = 9,1 мм – радиус опирания пластины.

Максимальное растягивающее напряжение имеет место в центре нижней поверхности пластины, где реализуется двухосное растяжение. Значение этого напряжения, при котором разрушается образец, называется поперечной прочностью на разрыв материала. Однако использованное аналитическое решение не учитывает контактное нагружение в эксперименте, которое заменяется сосредоточенной силой, и, следовательно, не учитывает напряжения в окрестности области контакта.

Целью данного исследования является оценка влияния контактных напряжений в эксперименте и определение максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней поверхности пластины (поперечная прочность на разрыв) численным и аналитическим методами.

Задача рассматривалась в программном пакете ANSYS 17.2. Решалась контактная осесимметричная задача. Поскольку толщина и внешний радиус пластины существенно влияют на вычисление напряжений, рассматривались девять задач с реальными значениями предельных нагрузок, толщин и диаметров пластин. Модель контакта рассматривалась без трения. Нагрузка, приложенная к шарику, задавалась в соответствии с экспериментальными данными из таблицы 3. Закрепление в модели было выполнено по контуру внутреннего радиуса площадки опирания.

Были получены растягивающие напряжения (для каждого образца) в пластине. В связи с хрупким характером разрушения пластин интерес представляли значения растягивающих напряжений в центре на нижней стороне пластины. На рис. 4 представлена эпюра первого главного напряжения в задаче для одной из пластин, спечённой при 700°С.



Рис. 4 – Эпюра первого главного напряжения с фиксированным значением максимальных растягивающих напряжений в центре на нижней поверхности пластины, спечённой при 700°C

Результаты вычислений напряжений аналитическим и численным методом сведены в таблицу 4.

№ образца	Температура изготовления образца, °С	Предельное напряжение при изгибе (аналитический метод), МПа	Напряжение в центре на нижней стороне пластины (численный метод), МПа	Относительная разница, %
1	700	59,5	56,3	5,6
2	700	48,7	46,1	5,6
3	700	52,0	49,6	4,9
4	800	85,6	81,7	4,8
5	800	58,8	56,3	4,4
6	800	57,4	55,0	4,4
7	900	63,8	61,2	4,3
8	900	56,8	54,3	4,5
9	900	68,5	65,6	4,5

Таблица 4 – Сравнение результатов

Относительная разница между численным и аналитическим методом не превышает 5,6%. Из этого можно сделать вывод, что для вычисления поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний новых материалов можно воспользоваться формулой Войновского – Кригера.

В разделе 3.3. рассматривается задача о контакте прямоугольных блоков из оргстекла с профилированным зазором. Задача появилась при подготовке эксперимента по моделированию гидроразрыва пласта (ГРП) в лабораторных условиях. Когда ГРП используется в реальных условиях, то трещину желательно проращивать только в продуктивных слоях, где находятся залежи нефти, при этом нельзя пересекать трещиной слои с газом и подземными водами, это приведёт к нежелательным последствиям. Следовательно, геометрия трещины должна быть смоделирована корректно для проектирования и оценки таких воздействий на пласт. Для оценки точности модели необходимо сравнение результатов расчёта с данными о росте трещины из тщательно контролируемых и непосредственно управляемых лабораторных экспериментов.

Лабораторный метод основывается на создании пошагового изменения напряжений на границе плоскости развития трещины, между двумя блоками оргстекла. Для образования нескольких зон контактного давления на границе между прижатыми друг к другу блоками поверхность одного блока имела заданный профиль. В результате контакта профилированного блока с гладкой поверхностью другого блока возникают разные зоны сжимающих напряжений. Вязкость разрушения на границе контакта равна нулю и в этом случае рост области гидроразрыва определяется контактным давлением и течением вязкой жидкости. Утечки жидкости не происходит из-за того, что проницаемость оргстекла равна нулю. Преимуществом рассматриваемой методики является возможность наблюдения области гидроразрыва в процессе эксперимента через прозрачные блоки.

Экспериментальная установка выполнена по следующей схеме. Имеется подвижная жёсткая стальная плита размерами 600х600х150 мм, которая передает усилие от 6ти домкратов на блоки оргстекла. В стальной плите есть отверстие под трубку для подвода жидкости гидроразрыва. На плиту устанавливается 1-й разделительный блок оргстекла с размерами 580х580х88 мм, который также имеет отверстие под трубку. Материал блока снижает возмущения поля напряжений на нижней поверхности от концентраторов в виде пазов для лент со светодиодами, необходимыми для подсветки области гидроразрыва. Следующим устанавливается профилированный в одном направлении 2й блок оргстекла, с размерами 580х580х180 мм, профилированной поверхностью вверх. На 2-й блок устанавливается 3-й блок оргстекла с размерами 580х580х182 мм, между нижней плоской поверхностью которого и верхней профилированной поверхностью 2го блока при сжатии создается ступенчатое распределение давления. Сверху на 3-й блок устанавливается 4-й блок оргстекла с размерами 580x580x187, который является промежуточным между 3-м блоком и верхней стальной несущей плитой и снижает возмущения поля напряжений на верхней поверхности от концентратора в виде отверстия для видеокамеры.

Траектория профиля может быть получена из решения задачи о ступенчатой нагрузке. Между 2-м и 3-м блоками оргстекла при начальном контакте имеется зазор, однако при сжатии блоков обе поверхности будут полностью прижаты друг к другу и между ними возникает контактное давление и разные зоны напряжений. Затем между этими блоками нагнетается жидкость, при достижении некоторого давления появляется область гидроразрыва, которая затем распространяется при меньшем давлении. Необходимо определить распределение сжимающих напряжений, возникающих при контакте плоского и профилированного блоков оргстекла, с учётом влияния реальных размеров блоков и особенностей граничных условий в эксперименте.

Рассмотрим случай действия распределённой нагрузки (давления) на полосе предполагаемого профилированного блока, как показано на рис. 5 (а). Существует аналитическое решение для определения перемещений поверхности полупространства под действием равномерно распределённой нагрузки на полосе:

$$U_z(x) = \frac{-(1-\nu^2) \cdot P}{\pi E} \cdot \left[(x+b) \cdot \ln\left[\left(\frac{x+b}{b}\right)^2\right] - (x-b) \cdot \ln\left[\left(\frac{x-b}{b}\right)^2\right] \right] + C, \quad (8)$$

где P = 4 МПа – давление, действующее на полосу шириной 2b = 100 мм. Коэффициент Пуассона оргстекла v = 0,4, а его модуль Юнга E = 3,3 ГПа.

С помощью уравнения (8) получена форма симметричного относительно вертикальной оси профиля, показанного на рис. 5 (б).



Рис. 5 – Схема ступенчатой нагрузки (а) и форма профиля, относительно оси симметрии (б)

В эксперименте используется не полупространство, а блоки, имеющие конкретные границы. Кроме того, в аналитическом решении не учитывается отверстие для видеокамеры. Профиль перемещений был вычислен с учётом нагрузки на полосе шириной 100 мм, и был вырезан в блоке в одном направлении. В расчете задавалась максимальная нагрузка 2,5 МН, создаваемая экспериментальной установкой. В расчётной модели эта сила равномерно распределена по всей поверхности верхнего блока из оргстекла, с которой контактирует стальная плита, за исключением центральной круговой области диаметром 0,15 м, соответствующей отверстию для видеокамеры.

Построена трёхмерная модель сборки блоков из оргстекла. При создании модели профилированного блока, траектория профиля в эскизе задавалась в соответствии с уравнением (8). Закрепление выполнялось по нижней поверхности 1-го блока, по которой оргстекло контактирует с подвижной стальной плитой, при этом перемещения на этой поверхности запрещались по всем направлениям. Контактные пары на границе контакта задавались с учётом трения.

В результате численного анализа получили, что при заданной нагрузке контактное давление в центральной части в среднем равно 3,9 МПа, а на краях центральной полосы примерно 5,6 МПа. Распределение контактного давления имеет характерный ступенчатый вид. Давление в центральной полосе меньше давления на боковых полосах в среднем на 4 МПа. Максимальное давление достигает 9,2 МПа. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков реальных размеров при экспериментальном моделировании реального ГРП в слоистых горных породах.



Рис. 6 – Давление в области контакта профилированного блока

В разделе 3.4. рассматривается задача исследования формы керамических стоматологических имплантатов в зависимости от площади контакта и степени минерализации кости.

С трёхмерного томографического снимка челюсти пациента были сняты анатомические размеры, по которым была построена трёхмерная модель центральной части верхней челюсти, которая учитывает состав губчатой и кортикальной кости. Твердотельная модель части челюсти представляет собой кортикальную кость переменной толщины, варьирующейся в пределах 2 мм. Внутренняя полость челюсти заполнена губчатой костью. В модели челюсти были вырезаны отверстия с резьбой под соответствующие типы имплантатов и были построены модели имплантатов следующих типов: цилиндрический, конический, цилиндрический обратно-конусный и конусный обратно-конусный (рис. 7).

Модели имплантатов цилиндрический и конусный построены на основе реальных имплантатов, применяемых в стоматологии в настоящее время, а цилиндрический обратно-конусный и конусный обратно-конусный строились на основе предыдущих типов имплантатов, однако, у них шейка имплантатов имеет обратную коническую форму из-за следующего предположения. Внутренняя часть челюсти состоит из непрочного пористого материала, а именно губчатой кости, у которой площадь контакта с имплантатом больше, при этом губчатая кость является менее прочной изза пористой структуры и плохо воспринимает жевательные нагрузки, в том числе и в процессе приживляемости имплантата. Основная нагрузка приходится на более прочную кортикальную кость, являющуюся внешней оболочкой челюсти, толщина которой всего 2 миллиметра. Таким образом, за счёт обратно-конусной формы шейки имплантата предполагается, что увеличится площадь контакта между имплантатом и кортикальной костью, и соответственно произойдёт перераспределение напряжений, вследствие чего напряжения в губчатой кости уменьшатся. При этом диаметр прямой шейки имплантата 4,2 мм, а диаметр шляпки обратно-конусного имплантата увеличен до 6,2 мм.



Рис. 7 – Модели имплантатов (фронтальное и боковое сечения челюсти): а) цилиндрический; б) цилиндрический обратно-конусный; в) конусный; г) конусный обратно-конусный

В расчёте методом конечных элементов рассматривается два варианта модели материала. Первый вариант, когда кортикальная и губчатая кости являются линейным изотропным материалом с нормальной минерализацией кости, второй вариант материала с критической минерализацией кости.

Для вычисления предела прочности и модуля упругости губчатой кости в зависимости от плотности, которая меняется с возрастом, использовались эмпирические формулы:

$$\sigma = 60\rho^2, \tag{9}$$

$$E = 1.915\rho^3,$$
 (10)

где σ измеряется в МПа, E – измеряется в МПа, ρ – плотность в г/см³. В скелете человека полная плотность губчатой кости варьируется в пределах 0,1-1,5 г/см³. Для оценки механических свойств губчатой кости при различной минерализации кости,

эти экстремальные значения плотности были приняты для расчёта в качестве параметров нормальной и критической минерализации. Таким образом модуль упругости губчатой кости меняется с 6,46 ГПа при нормальной минерализации до 1,915 МПа при критической минерализации, а предел прочности со 135 МПа при нормальной минерализации до 0,6 МПа при критической минерализации. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3.

Предел прочности и модуль упругости кортикальной кости уменьшаются, со 140 МПа в 30 лет до 120 МПа в 90 лет. За тот же самый период модуль упругости уменьшается с 17 ГПа до 15,6 ГПа. Данные параметры кортикальной кости были так же соотнесены с нормальной и критической минерализацией. Имплантаты в модели рассматривались из Y-TZP керамики ZrO2+3,8% Y2O3, для которой модуль Юнга 400 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел прочности 750 МПа.

Закрепление было выполнено по поверхностям верхней и задней части модели, при этом перемещения на этой поверхности в каждом узле запрещались по всем направлениям. Нагрузка прикладывалась к поверхности имплантата, в соответствии с направлением жевательной нагрузки в размере 150 Н. Контактные пары задавались без трения из расчёта того, что модель контакта связанная и соответствует успешной остеоинтеграции.

В результате решения задач были зафиксированы эквивалентные напряжения по Мизесу в кортикальной и губчатой костях, а также в имплантате. Оценка напряжений по Мизесу в костной ткани, оправдана тем, что необратимые деформации наступают раньше достижения наибольшим напряжением предела прочности кости, поэтому напряжения по Мизесу отражают реальную картину в оценке несущей способности кости, в отличие от оценки по наибольшему растягивающему напряжению, которое используется для определения предельных нагрузок. Результаты расчёта всех моделей представлены в таблице 5.

	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа					
Тип имплантата	Нормальная минерализация			Критическая минерализация		
	Кортикальная	Губчатая	Имплантат	Кортикальная	Губчатая	Имплантат
	кость	кость		кость	кость	riminaniai
Цилиндрический	32,3	7,78	38,69	168,9	0,16	87,7
Цилиндрический обратно- конусный	29,9	7,36	82,55	81,4	0,14	57,9
Конусный	26,3	6,5	57,7	163,6	0,18	249,4
Конусный обратно- конусный	31,5	5,4	49,8	82,3	0,15	48,6

Таблица 5 – Сравнение результатов

В результате проведённого исследования обратно-конусной формы имплантатов установлено, что напряжения в губчатой кости, как при нормальной, так и при критической минерализации уменьшаются, что является преимуществом таких имплантатов перед имплантатами стандартной формы. Заметим, что если при нормальной минерализации форма имплантатов не играет существенной роли, то для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе были получены численные решения контактных задач, имеющих практическое значение, которые близки по постановке к известным задачам, имеющим аналитическое решение, и выполнено сравнение результатов расчетов напряжённо-деформированного состояния в области контакта с результатами моделирования с использованием аналитических решений. Кроме того, была рассмотрена практическая контактная задача биомеханики, для изучения оптимальной формы имплантатов, обеспечивающей наибольшую площадь контакта с костью и, соответственно, наименьшие значения контактных напряжений.

Основные результаты работы:

1. Установлено напряжённо-деформированное состояние стеклянного образца в форме прямоугольного параллелепипеда, моделирующего полупространство в эксперименте при вдавливании стального шара в центр образца. С помощью метода конечных элементов, учитывающего реальные граничные условия в эксперименте, найдены максимальные растягивающие напряжения в окрестности области контакта, от действия которых образуются кольцевые трещины в стеклянном образце. Относительная разница между численными моделями задачи Герца и задачи, учитывающей отверстие, не превышает 1,2%, следовательно, напряжения, возникающие от изгиба в эксперименте из-за наличия отверстия для микроскопа, существенно не влияют на значения растягивающих напряжений в окрестности области контакта. Формулу Хубера для получения растягивающих напряжений в полупространстве можно использовать для образцов конечных размеров, испытанных по рассмотренной методике.

2. Установлено напряжённо-деформированное состояние круглой свободно опёртой пластины из хрупкого материала алюминида железа при вдавливании стального шара в центр. С помощью численного моделирования, с учётом реальных граничных условий и способа нагружения в эксперименте, найдены максимальные растягивающие напряжения в центре на нижней поверхности пластины. Выполнено сравнение с результатами аналитического решения модельной задачи о круглой свободно опёртой пластине, нагруженной сосредоточенной силой в центре. Относительная разница между численным и аналитическим методом не превышает 5,6%. Из этого был сделан вывод, что для вычисления поперечной прочности на разрыв по известной методике испытаний новых материалов можно воспользоваться формулой Войновского–Кригера.

3. Установлено напряжённо-деформированное состояние прямоугольных блоков из оргстекла, при начальном контакте которых имеет место зазор заданной формы. Рассмотренный метод создания ступенчатого распределения контактного давления с помощью профилированного блока может быть использован для блоков конечных размеров при экспериментальном моделировании реального ГРП в слоистых породах. Подтверждено, что отверстие для видеокамеры не имеет влияния на напряжения в области контакта, а нагрузки, реализуемой экспериментальной установкой, достаточно для устранения зазора между плоским и профилированным блоками оргстекла.

4. Установлено, что напряжения в губчатой кости, как при нормальной, так и при критической минерализации уменьшаются при использовании обратно-конусной формы стоматологических имплантатов, что является несомненным преимуществом таких имплантатов перед имплантатами стандартной формы. При этом выявлено, что

если при нормальной минерализации форма имплантатов не играет существенной роли, то для критической минерализации использование обратно-конусной формы имплантатов существенно снижает напряжения не только в губчатой кости, но и в кортикальной, а также в имплантате. Поэтому рекомендуется использовать такую форму имплантатов при протезировании людей в пожилом возрасте.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК РФ

1. Леган М.А., Новоселов А.Н., Фёдорова Н.В. Разрушение стекла вблизи области контакта со стальными шарами // ПМТФ. – 2018. Т. 59, № 4. – С. 149-159.

2. Legan M.A., Novoselov A.N., Fedorova N.V. Formation of annular cracks in glass during contact interaction // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. № 894 – Art. 012051 (7 p.)

3. Dudina D.V., Legan M.A., Fedorova N.V., Novoselov A.N., Anisimov A.G., Esikov M.A. Structural and mechanical characterization of porous iron aluminide FeAl obtained by pressureless Spark Plasma Sintering // Mater. Sci. Eng., A. – 2017. № 695 – P. 309-314.

4. Fedorova N.V., Legan M.A., Dudina D.V. Fracture analysis in the area of contact stresses using the FEM and the gradient criteria of the limiting state // Materials Today: Proceedings. – 2019. Vol. 16, pt. 1. – P. 130-136.

5. Федорова Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов из керамики в зависимости от их формы и степени минерализации кости // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 451-459.

6. Ларичкин А.Ю., Федорова Н.В., Тодер М.С., Шевела А.А. Различные подходы к оценке работоспособности имплантатов в стоматологии: материалы, моделирование, современные тенденции // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 1. – С. 117-139.

Публикации в прочих изданиях

1. Леган М.А., Новоселов А.Н., Федорова Н.В. Образование кольцевых трещин в стекле при контактном взаимодействии // Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва: тез. докл. Всеросс. конф. с международным участием посвящ. 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 4–8 сент. 2017 г. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2017. – С. 162.

2. Федорова Н.В., Леган М.А., Новоселов А.Н. Численный анализ контактного взаимодействия при вдавливании стального шара в стеклянное полупространство // 10 Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: материалы, Самара, 18–22 сент. 2017 г.: в 2 т. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – Т. 2. – С. 258-260.

3. Fedorova N.V., Legan M.A. The problem of the formation of annular cracks in the glass half-space upon contact with the ball, taking into account real experimental conditions // Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications: abstr., Russia-Japan workshop, Novosibirsk, 11–13 Nov. 2019. – Novosibirsk, 2019. – P. 8.

4. Федорова Н.В., Леган М.А. Определение контактных напряжений при вдавливании шара в образцы из стекла с учетом граничных условий в эксперименте // Юбилейная

30 междунар. инновационная конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2018): сб. тр. конф., Москва, 20–23 нояб. 2018 г. – Москва: Издво ИМАШ РАН, 2019. – С. 212-215.

5. Fedorova N.V., Legan M.A. Determining the contact stresses of the ball indentation in glass specimens with the actual conditions of their support // Non-equilibrium processing of materials: experiments and modeling: abstr. of Russian-Japan joint seminar, Novosibirsk 1–3 Okt. 2018. – Novosibirsk: IPS NSU, 2018. – P. 38.

6. Леган М.А., Новоселов А.Н., Федорова Н.В. Разрушение стекла при контактном взаимодействии со стальными шарами // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. – Новокузнецк: Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та, 2019. – С. 77-82.

7. Федорова Н.В., Дудина Д.В., Леган М.А., Новоселов А.Н. Анализ напряженнодеформированного состояния при изгибе круглых пластин, изготовленных методом искрового плазменного спекания // Краевые задачи и математическое моделирование: тем. сб. науч. ст. – Новокузнецк, 2017. – С. 192-196.

8. Федорова Н.В., Дудина Д.В., Леган М.А., Новоселов А.Н. Расчет напряженнодеформированного состояния при изгибе круглых пластин, изготовленных методом искрового плазменного спекания // Проблемы оптимального проектирования сооружений: докл. 4 Всерос. конф., Новосибирск, 11–13 апр. 2017 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 311-318.

9. Федорова Н.В. Анализ напряженно-деформированного состояния керамических стоматологических имплантатов // 12 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр. в 4 т., Уфа, 19–24 авг. 2019 г. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2019. – Т. 4. – С. 218-220.

10. Федорова Н.В. Исследование напряженно-деформированного состояния цельнокерамических имплантатов в зависимости от их формы для использования в стоматологии // Юбилейная 30 междунар. инновационная конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2018): сб. тр. конф., Москва, 20–23 нояб. 2018 г. – Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. – С. 403-406.

11. Федорова Н.В., Леган М.А. Задача о контакте блоков из оргстекла с профилированным зазором // Международной молодежной научной конференции «XLV Гагаринские чтения» (14-17 апреля 2020 г., Москва, Россия): сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий» – Москва, 2020. (принята в печать).

Выход в свет 31.07.2020. Формат 60×90/16. Объем 1 печ. лист. Тираж 75 экз. Заказ № 274 ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН 630083, г. Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-16-12; факс: (383)333-16-12. E-mail: igil@hydro.nsc.ru