

## **ОТЗЫВ**

официального оппонента на диссертацию  
Ефимовой Елены Сергеевны на тему  
«Стационарный метод Галеркина для неклассических уравнений с  
меняющимся направлением времени»,  
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук по специальности 01.01.02- Дифференциальные  
уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

### **Актуальность темы диссертации**

Диссертационная работа Ефимовой Е.С. посвящена применению стационарного метода Галеркина для неклассических линейных и нелинейных уравнений с меняющимся направлением времени. Теория начально-краевых задач для таких уравнений является одним из активно развивающихся направлений.

Неклассические краевые задачи для уравнений математической физики имеют широкий класс приложений. В частности, параболическими уравнениями с меняющимся направлением времени описываются различные физические процессы: перенос нейтронов в ядерном реакторе, перенос радиации, диффузионные процессы рассеивания электронов в металле, осцилляция плазмы, стационарные волны в плазме и др.

Для многих неклассических уравнений исследование вопросов разрешимости, единственности и устойчивости решений начально-краевых приобретает особое значение в связи с тем, что на данном временном интервале решение данной задачи не всегда существует. Как правило, оно существует на некотором малом временном промежутке, а далее может разрушиться в том смысле, что решение или его производные могут обратиться в бесконечность.

Примерами неклассических сингулярных параболических задач служат параболические уравнения с меняющимся направлением времени.

Такие уравнения в настоящее время представляют большой интерес, который вызван, в частности, их приложениями в гидродинамике, газовой динамике, теории пластичности и в других областях.

Здесь существуют и рассматриваются два различных типа уравнений. В первом изменение направления времени в уравнении происходит на заданном множестве независимых переменных. Во втором это множество определяется искомым решением, т.е. задача становится существенно нелинейной.

Начало исследований краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени первого типа было положено в работах М. Жевре (1914). Позже краевые задачи для линейных неклассических уравнений

математической физики с переменным направлением времени рассматривались в работах Г. Фикеры, О.А. Олейник, в которых были предложены новые подходы и методы построения единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений.

Неклассическим уравнениям с меняющимся направлением времени первого типа посвящены многие работы, в том числе работы С.А. Терсенова, И.Е. Егорова и В.Е. Федорова, R. Beals и V. Ptotoporescu, Ж.-Л. Лионса, С.Г. Пяткова и С.В. Попова. Нелинейные параболические уравнения с меняющимся направлением времени второго типа рассматривались впервые в работах Н.Н. Яненко, Н.А. Ларькина для описания сложных течений вязкой жидкости. При исследовании краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени применяются различные методы решения, такие, как метод компактности, метод монотонности, метод регуляризации и другие.

В диссертации приведена достаточно полная библиография работ, посвященных неклассическим уравнениям математической физики. Среди исследований по теории краевых задач для неклассических уравнений, следует отметить работы: В.Н. Врагова, Ф.И. Кожанова, А.М. Нахушева, Ю.А. Дубинского, В.К. Романко, Т.Ш. Кальменова, Б.А. Бубнова, Н.В. Кислова, С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкина. Уравнения с меняющимся направлением времени исследовались также в работах С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, В.Е. Федорова, С.Г. Пяткова, И.М. Петрушко, С.В. Попова, Н.В. Кислова.

Краевые задачи для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени в гильдеровских классах функций изучались С.А. Терсеновым. Здесь в отличие от обычных краевых задач для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных необязательно обеспечивает принадлежность решения пространствам Гельдера. С.А. Терсеновым, С.В. Поповым получены в простейших случаях необходимые и достаточные условия разрешимости таких задач в пространствах Гельдера.

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени входят в класс эллиптико-параболических уравнений. Отметим, что эллиптико-параболическим уравнениям посвящена обширная литература. Краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени рассматривались в работах Нахушева А.М., Потаповой С.В. В этих работах выписывались необходимые и достаточные условия разрешимости задач в пространствах Гельдера, при выполнении которых при повышении гладкости данных задачи повышалась и гладкость решения вплоть до границы. В работах Егорова И.Е. было установлено, что при определенных условиях на коэффициенты эллиптико-параболического уравнения единственное обобщенное решение начально-краевой задачи можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галеркина.

Стационарный метод Галеркина является универсальным методом и широко применяется к решению краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго и высокого порядков. При этом

устанавливаются оценки сходимости галёркинских аппроксимаций к точному решению. При изучении краевых задач для неклассических уравнений до настоящего времени в основном применялся нестационарный модифицированный метод Галеркина, а стационарный метод Галеркина применялся только для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка.

Общая схема стационарного метода Галеркина такова: строятся приближенные решения краевой задачи, далее для этих решений устанавливаются априорные оценки, на основе которых доказывается существование последовательности приближенных решений, которая сходится к точному решению краевой задачи. Обзор фундаментальных результатов в этом направлении можно найти в известной монографии О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой. Основоположниками метода Галёркина являются Б.Г. Галёркин, И.Г. Бубнов, Г.И. Петров. Еще в 1940 г. Г.И. Петров предложил одно обобщение стационарного метода Галёркина для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. При этом приближенное решение исходной задачи ищется в виде линейных комбинаций функций, удовлетворяющих поставленным краевым условиям.

В диссертационной работе проведено обобщение идеи Г.И. Петрова, и стационарный метод Галеркина применяется для исследования неклассических линейных и нелинейных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени.

Из этого следует, что исследования неклассических уравнений с меняющимся направлением времени стационарным методом Галеркина и получение оценки погрешности данного метода представляют собой актуальную научную проблему. Тем самым результаты исследования новых фундаментальных задач, поставленных в рамках данной работы, будут способствовать развитию теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики.

## Содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы. Общий объем составляет 87 страниц. Список литературы содержит 91 наименование.

**В первой главе** приведены геометрические обозначения, функциональные пространства и некоторые вспомогательные сведения.

**Во второй главе** диссертации с помощью стационарного метода Галеркина проведено исследование линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. Данная глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе с помощью стационарного метода Галеркина доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Также установлена оценка погрешности данного метода для исследуемого уравнения.

Во втором параграфе рассматривается вырождающееся параболическое уравнение, в котором коэффициент при временной производной может обращаться в нуль, но не меняет знака. Здесь доказывается теорема о повышении гладкости решения и выводится более сильная оценка погрешности для приближённых решений.

В третьем параграфе рассматривается неклассическое уравнение с временной производной нечётного порядка (не превосходящего трёх). При определённых условиях на коэффициенты уравнения доказываются теоремы существования и единственности точного решения и устанавливаются оценки погрешности для приближённых решений.

В четвёртом параграфе изучается нелокальная краевая задача для параболического уравнения с возможно меняющимся направлением времени.

Нелокальность задачи состоит в том, что значение решения при  $t=0$  пропорционально значению решения при  $t=T$ , т.е.  $u(x,0)=\alpha u(x,T)$ ,  $\alpha=\text{const}$ .

Здесь устанавливаются априорные оценки для галёркинских приближений, доказывается теорема существования и единственности решения и оценивается скорость сходимости.

**Третья глава** диссертации посвящена нелинейным неклассическим уравнениям с меняющимся направлением времени. В первом параграфе рассматривается уравнение параболического типа с линейной главной частью и с нелинейным демпфирующим членом который вносит положительный эффект при выводе априорных оценок. Доказывается существование и единственность решений и устанавливается скорость сходимости галёркинских аппроксимаций.

Второй параграф посвящён уравнению с меняющимся направлением времени содержащим производные третьего порядка по времени и сильно нелинейный анизотропный эллиптический оператором.

Здесь требуется более детальное исследование сходимости приближений с использованием монотонности нелинейного эллиптического оператора.

В третьем параграфе к рассмотренному в параграфе 2 уравнению добавляется нелинейный демпфирующий член. В обоих случаях доказываются существование и единственность решения и устанавливается скорость сходимости к нему приближенных решений.

### **Научная новизна полученных результатов и их значимость для науки и практики**

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Для приближенных решений краевых задач, построенных по методу Галеркина, получены глобальные априорные оценки во всей области.
- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени.
- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для нелинейных неклассических уравнений: полулинейного параболического

уравнения с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени, нелинейного неклассического уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени.

- Установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина для исследуемых линейных и нелинейных неклассических уравнений.

Результаты работы имеют теоретический характер. Исследуемые задачи являются актуальными и перспективными в области теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Полученные результаты могут быть использованы для постановки новых задач и в дальнейших исследованиях в теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Их практическая значимость заключается в том, что проведено теоретическое обоснование применения стационарного метода Галеркина для нахождения приближенных решений прикладных задач математической физики для уравнений с меняющимся направлением времени.

### **Замечания по диссертационной работе**

В целом диссертационная работа написана хорошо. Однако необходимо сделать следующие замечания.

1. В работе приводится много лемм и утверждений со ссылкой на монографию Ж. Л. Лионса без указания конкретных страниц, лемм в оригинале. Это существенно затрудняет чтение текста.
2. Условия Теоремы 2.4.1, стр. 47, влекут ограничение на постоянную  $\alpha^2 \leq 1$ , которое в тексте не сформулировано.
3. Доказательство сходимости приближений, особенно в нелинейных членах, на страницах 64,65 изложено очень схематично.

Отметим, что указанные недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертации. Автореферат правильно и достаточно полно отражает содержание диссертации. Диссертационная работа написана хорошо. Соискатель продемонстрировала хорошие знания и высокую технику в области дифференциальных уравнений с частными производными. Это вывод априорных оценок решений, использование теорем вложения и анализ качественных свойств решений, применение метода монотонности к нелинейным уравнениям.

Полученные результаты достоверны и основаны на строго доказанных теоремах и апробировались на многих конференциях и научных семинарах. Результаты являются новыми и своевременно опубликованы в 14 работах: 9 статьях, 5 тезисов докладов, 7 статей в журналах Перечня ВАК РФ, 1 публикация в журнале индексируемом в Scopus, 1 статья в журнале

индексируемом в Web of Science.

## Заключение

Диссертация Ефимовой Елены Сергеевны на тему «Стационарный метод Галеркина для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени» представляет высококвалифицированную научную работу на актуальную тему. Новые научные результаты, полученные в работе, имеют большое значение для развития качественной теории неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. Наряду с доказательством теорем существования и единственности решений автором исследованы и их качественные свойства. Также получены оценки сходимости приближённых решений к точному. Последнее приобретает особую значимость для проведения численных расчётов практических задач.

Считаю, что диссертационная работа «Стационарный метод Галеркина для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 года, N 842, а её автор, Ефимова Елена Сергеевна, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

## Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.03 —  
математическая физика, Профессор.

Главный научный сотрудник лаборатории механики неупорядоченных сред  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки - Института  
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской  
академии наук, 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15 8 (383) 333-16-  
12, antontsevsn@mail.ru

Антонцев Станислав Николаевич

Подпись Антонцева С. Н. заверяю

Учёный секретарь ИГиЛ, к.ф.м.н. Любашевская И.В.

