На правах рукописи

Ефимова Елена Сергеевна

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова": НИИ математики СВФУ.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Егоров Иван Егорович.**

Официальные оппоненты:

Антонцев Станислав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Лаборатория математического моделирования фазовых переходов, главный научный сотрудник.

Виноградова Полина Витальевна, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», Естественно-научный институт, кафедра высшей математики, профессор, заведующий кафедрой.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Защита диссертации состоится «___» ____________ 2019 г. в ______ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «___» ____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук — Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени является одним из активно развивающихся направлений теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Это обусловлено тем, что она имеют широкий класс приложений. В частности, параболическими уравнениями с меняющимся направлением времени описываются различные физические процессы: перенос нейтронов в ядерном реакторе, перенос радиации, диффузионные процессы рассеивания электронов в металле, осцилляция плазмы, стационарные волны в плазме и др.

Начало исследований краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени было положено в работах М. Жевре (1914). Позже краевые задачи для линейных неклассических уравнений математической физики с переменным направлением времени рассматривались в работах Г. Фикеры, О.А. Олейник, в которых были предложены новые подходы и методы построения единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений.

Неклассическим уравнениям с меняющимся направлением времени посвящены многие работы, в том числе работы С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, Н.В. Кислова, И.М. Петрушко, В.Е. Федорова, R. Beals, V. Ptotopopescu, Ж.-Л. Лионса, С.Г. Пяткова и С.В. Попова. Нелинейные параболические уравнения с меняющимся направлением времени рассматривались впервые в работах Н.Н. Яненко для описания сложных течений вязкой жидкости. Также в работах В.Н. Монахова, С.Н. Антонцева, С.Г. Пяткова рассматривался вопрос о разрешимости краевых задач для нелинейных параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Среди других работ, оказавших влияние на исследования по теории краевых задач для неклассических уравнений, отметим следующие: В.Н. Врагова, А.М. Нахушева, Ю.А. Дубинского, В.К. Романко, Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева, Т.Ш. Кальменова, Н.А. Ларькина, Б.А. Бубнова, Н.В. Кислова, С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкина, В.В. Катрахова, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова.

Краевые задачи для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени в гельдеровских классах функций изучались С.А. Терсеновым (1985). Параболические уравнения с меняющимся направлением времени входят в класс эллиптико-параболических уравнений. Исследованию эллиптико-параболических уравнений посвящены работы А.М. Нахушева, О.А. Олейник, Е.В. Радкевича, С.А. Терсенова, И.Е. Егорова, В.Е. Федорова.

Стационарный метод Галеркина является универсальным методом и широко применяется к решению краевых задач для линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго и высокого порядков. Отметим работы О.А. Ладыженской, С.Г. Михлина, Ю.А. Дубинского, А.В. Джишкариани, П.В. Виноградовой, А.Г. Зарубина. В работах П.В. Виноградовой, А.Г. Зарубина, А.В. Джишкариани установлены оценки погрешности метода Галеркина. При изучении краевых задач для неклассических уравнений до настоящего времени в основном применялся нестационарный модифицированный метод Галеркина, а стационарный метод Галеркина применялся только для эллиптико-параболических уравнений второго порядка. Метод Галеркина для нестационарных уравнений изучался во многих работах, в частности, в работе П.В. Виноградовой, А.Г. Зарубина установлены оценки погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений. Основоположниками метода Галеркина являются Б.Г. Галеркин, И.Г. Бубнов, Г.И. Петров и М.В. Келдыш.

Целью работы являются: изучение разрешимости краевых задач для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени с помощью стационарного метода Галеркина и оценка погрешности данного метода.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, метод компактности, метод априорных оценок, стационарный метод Галеркина. С помощью полученных априорных оценок для приближенных решений, построенных по методу Галеркина, доказывается регулярная разрешимость краевых задач для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. Также для исследуемых линейных и нелинейных неклассических уравнений установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые применяется стационарный метод Галеркина к решению краевых задач для рассматриваемых неклассических уравнений с меняющимся направлением времени, и для них устанавливаются оценки погрешности данного метода через собственные значения спектральной задачи для $(n+1)$-мерного оператора Лапласа по $x \in R^n$ и t (линейного самосопряженного квазиэллиптического оператора четного порядка в случае уравнения высокого порядка).

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Для приближенных решений краевых задач, построенных по методу Галеркина, получены глобальные априорные оценки во всей области.

- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени.

- Доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для нелинейных неклассических уравнений: полулинейных уравнений с меняющимся направлением времени первого и высокого порядков по времени, нелинейного уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени.

- Установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина для исследуемых линейных и нелинейных неклассических уравнений.

Степень достоверности результатов диссертации.

Достоверность всех результатов диссертации подтверждается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость диссертации.

Результаты работы имеют теоретический характер и могут быть использованы для постановки новых задач и в дальнейших исследованиях в теории неклассических краевых задач для уравнений математической физики. Их практическая значимость заключается в том, что проведено теоретическое обоснование применения стационарного метода Галеркина для нахождения приближенных решений прикладных задач математической физики для уравнений с меняющимся направлением времени.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались:

– на научном семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова (2017);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством профессора А.М. Блохина (2018);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Неклассические уравнения математической физики" под руководством профессора А.И. Кожанова (2017);

– на научном семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Избранные вопросы математического анализа" под руководством профессора Г.В. Демиденко (2017);

– на семинаре Научно-исследовательского института математики СВФУ "Дифференциальные уравнения с частными производными" под руководством профессора И.Е. Егорова (2012-2017);

– на XVI, XVII, XVIII и XXI Лаврентьевских чтениях (г. Якутск: 2012, 2013, 2014, 2017);

– на XIX и XXI Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва: 2012, 2014);

– на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Белгород, 2013);

– на III Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации" (г. Якутск, 2012);

– на Аспирантских чтениях СВФУ (г. Якутск, 2012).

Результаты диссертационной работы были получены при поддержке грантов ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг., мероприятие 1.3.2 "Проведение научных исследований целевыми аспирантами" (Соглашение 14.132.21.1352), Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект № 4402) и на 2014-2016 гг. (проект № 3047), гранта ректора СВФУ (2013).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах: 9 статьях, тезисах 5 докладов; 7 статей [2-8] опубликованы в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ, в том числе 1 статья (переводная) входит в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus, а также 1 обзорная статья [1] - в Web of Science. В совместных публикациях автором проведены доказательства утверждений лемм и теорем, а соавторам принадлежат постановки задач и методика их исследования. В работах [2,6] результаты получены автором единолично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы. Общий объем составляет 87 страниц. Список литературы содержит 91 наименование.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Ивану Егоровичу Егорову за постановку задач, помощь в работе над диссертацией и постоянное внимание к выполнению работы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приведены геометрические обозначения, функциональные пространства и некоторые вспомогательные сведения.

Во второй главе диссертации с помощью стационарного метода Галеркина проведено исследование линейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени. Данная глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе с помощью стационарного метода Галеркина доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Также установлена оценка погрешности данного метода для исследуемого уравнения.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \qquad (1)$$

Отметим, что коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Введем следующие множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \qquad (2)$$

$$u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \;\; u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \qquad (3)$$

Через C_L обозначим множество функций из $W_2^{2,1}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3).

При $k(x,0) > 0, \; k(x,T) < 0$ краевые условия (3) принимают вид

$$u|_{t=0} = 0, \;\; u|_{t=T} = 0,$$

а также пусть выполнены условия $f(x,0) = 0$ и $f(x,T) = 0$. В качестве базисных выбираются функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \;\; k = 1, 2, ..., \qquad (4)$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \ \ \varphi_k|_{t=T} = 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{\Delta} u = u_{tt} + \Delta u$. При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

При $k(x,0) > 0, \ k(x,T) \geq 0$, краевые условия (3) имеют вид

$$u|_{t=0} = 0,$$

поэтому вместо краевых условий (6) выбираем условия

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \ \ \varphi_{kt}|_{t=T} = 0, \tag{6^1}$$

а также предполагается выполненным условие $f(x,0) = 0$.

При $k(x,0) \leq 0, \ k(x,T) < 0$ краевые условия (3) имеют вид

$$u|_{t=T} = 0,$$

поэтому вместо краевых условий (6) рассматриваем краевые условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \ \ \varphi_k|_{t=T} = 0, \tag{6^2}$$

кроме того, считаем выполненным условие $f(x,T) = 0$.

При $k(x,0) \leq 0, \ k(x,T) \geq 0$ вместо краевых условий (6) имеем условия

$$\varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \ \ \varphi_{kt}|_{t=T} = 0. \tag{6^3}$$

Приближенные решения $u^N(x,t)$ первой краевой задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \ \ l = \overline{1, N}. \tag{7}$$

Теорема 2.1.1 Пусть выполнены условия

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \ \ c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \ \ f \in W_2^{0,1}(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,0) > 0, \ \ k(x,T) < 0, \ \ f(x,0) = 0, \ \ f(x,T) = 0,$$

$$\text{или } k(x,0) > 0,\;\; k(x,T) \geq 0,\;\; f(x,0) = 0,$$

$$\text{или } k(x,0) \leq 0,\;\; k(x,T) < 0,\;\; f(x,T) = 0,$$

$$\text{или } k(x,0) \leq 0,\;\; k(x,T) \geq 0.$$

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$.

Теорема 2.1.2 Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1. Тогда галёркинские приближения $u^N(x,t)$ при $N \to \infty$ слабо сходятся в $W_2^{2,1}(Q)$ и сходятся в норме $L_2(Q)$ к решению краевой задачи (1)-(3) из $W_2^{2,1}(Q)$.

Теорема 2.1.3 Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_1(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4},\; C_1 > 0, \tag{8}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (1)-(3).

Во втором параграфе в случае вырождающегося параболического уравнения с помощью теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(3) доказывается теорема о повышении гладкости решения, которая позволяет получить более сильную оценку погрешности стационарного метода Галеркина. Для этого рассматривается вспомогательная краевая задача:

$$\widetilde{L}v \equiv kv_t - \triangle v + (c + k_t)v = g(x,t),\; (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$v|_{\Gamma} = 0,\;\; v|_{\overline{S}_0^+} = 0,\;\; v|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{10}$$

Заметим, что решение $u(x,t)$ краевой задачи (1)-(3), гарантированное теоремой 2.1.1, удовлетворяет условию $u_t \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

Через $\widehat{W}_2^{1,1}(Q)$ обозначим подпространство $W_2^{1,1}(Q)$, выделенное краевыми условиями

$$\eta|_{\Gamma} = 0,\;\; \eta|_{\overline{S}_0^-} = 0,\;\; \eta|_{\overline{S}_T^+} = 0.$$

Определение 2.2.1 Функция $v(x,t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ называется обобщенным решением краевой задачи (9), (10), если выполнено тождество

$$\int\limits_Q [-kv\eta_t + \sum_{i=1}^n v_{x_i}\eta_{x_i} + cv\eta]dQ = (g,\eta)\;\; \forall \eta \in \widehat{W}_2^{1,1}(Q),$$

где $g(x,t) \in L_2(Q)$.

Теорема 2.2.1 Пусть $c(x,t) \geq c_0 > 0,\; (x,t) \in \overline{Q}$, и имеет место один из следующих случаев: $k(x,t) \geq 0,\; (x,t) \in \overline{Q}$, или $k(x,t) \leq 0,\; (x,t) \in \overline{Q}$.

Тогда краевая задача (9), (10) может иметь не более одного обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

Теорема 2.2.2 Пусть выполнены условия

$$c \geq c_0 > 0, \;\; c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \;\; c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; c + \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; f \in W_2^{0,2}(Q)$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x,t) \geq 0, \;\; k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) > 0, \;\; f|_{t=0} = f_t|_{t=0} = 0,$$

$$\text{или } k(x,t) \leq 0, \;\; k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; f|_{t=T} = f_t|_{t=T} = 0.$$

Тогда для решения $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ краевой задачи (1)-(3) имеют место

$$u_t \in W_2^{2,1}(Q), \; u_{tt} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q).$$

При $k(x,t) \geq 0, \; k(x,0) > 0, \; k(x,T) > 0$, в качестве базисных функций берем функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\varphi_{ktt} - \triangle\varphi_k = \lambda\varphi_k, \;\; (x,t) \in Q, \tag{11}$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0, \;\; \varphi_k|_{t=0} = 0, \;\; \varphi_{kt}|_{t=T} = 0. \tag{12}$$

При этом функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Во втором случае краевые условия (12) имеют вид

$$\varphi_k|_{S_T} = 0, \;\; \varphi_{kt}|_{t=0} = 0, \;\; \varphi_k|_{t=T} = 0.$$

Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \;\; l = \overline{1,N}. \tag{13}$$

Теорема 2.2.3 Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.2. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_2(||f|| + ||f_t|| + ||f_{tt}||)\lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_2 > 0, \tag{14}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (1)-(3).

В третьем параграфе проведено исследование неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени, для него доказана разрешимость рассматриваемой краевой задачи в весовом пространстве Соболева, и установлены оценки погрешности стационарного метода Галеркина.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим неклассическое уравнение высокого порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \triangle u + c(x)u = f(x,t), \tag{15}$$

где $s \geq 1$ - целое число, $f \in L_2(Q)$.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (15) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

<u>Краевая задача.</u> Найти решение уравнения (15) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{16}$$

$$D_t^j u|_{t=0,\, t=T} = 0, \;\; j = \overline{0, s-1}, \;\; D_t^s u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \;\; D_t^s u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{17}$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (16), (17), а W_L - замыкание C_L по норме

$$||u||_L^2 = ||u||_{2,2s}^2 + ||k_{2s+1} D_t^{2s+1} u||^2.$$

В случае

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0, \;\; (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0$$

рассмотрим спектральную задачу

$$Z\varphi \equiv (-1)^s D_t^{2s} \varphi - \Delta \varphi = \lambda \varphi, \; (x,t) \in Q, \tag{18}$$

$$\varphi|_{\Gamma} = 0, \tag{19}$$

$$D_t^i \varphi|_{t=0,\, t=T} = 0, \; i = \overline{0, s-1}. \tag{20}$$

Заметим, что Z является квазиэллиптическим оператором.

Пусть $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$ есть замыкание множества функций из $C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих краевым условиям (19), (20), по норме пространства $W_2^{2,2s}(Q)$.

Справедливы равенство

$$(Z\varphi, \psi) = (\varphi, Z\psi) \ \ \forall \varphi, \psi \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$$

и оценка

$$(Z\varphi, \varphi) = \int\limits_Q [(D_t^s \varphi)^2 + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2] dQ \geq C_3 ||\varphi||_{1,s}^2, \ \ C_3 > 0.$$

Тогда спектральная задача (18)-(20) имеет собственные значения λ_k такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,\ \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и собственные функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортогональный базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ и ортонормированный базис в $L_2(Q)$. При этом для любой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x,t), \ \ c_k = (u, \varphi_k), \tag{21}$$

причем ряд (21) сходится в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$.

С другой стороны, имеет место второе основное неравенство

$$||u||_{2,2s} \leq C_4 ||Zu||, \ \ C_4 > 0, \ \ \forall u \in \widetilde{W}_2^{2,2s}(Q).$$

В силу последнего неравенства собственные функции φ_k спектральной задачи (18)-(20) принадлежат $\widetilde{W}_2^{2,2s}(Q)$.

Далее, приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (15)-(17) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \ \ l = \overline{1, N}. \tag{22}$$

Теорема 2.3.1 Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия

$$(-1)^s [2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \leq 0, \;\; (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \geq 0,$$
$$(-1)^s [2k_{2s} - k_{2s+1t}] \geq \delta > 0, \;\; s > 1.$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (15)-(17) $u(x,t) \in W_L$. При этом $u^N \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$.

Теорема 2.3.2 Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.1. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,s} \leq C_5 ||f|| \lambda_{N+1}^{-1/4}, \;\; C_5 > 0, \tag{23}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (15)-(17) из W_L.

Теорема 2.3.3 Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.1 и $||k_{2s+1} D_t^{2s+1} u^N|| \leq C_6 ||f||, \; C_6 > 0$. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,s} \leq C_7 ||f|| \lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_7 > 0, \tag{24}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (15)-(17) из W_L.

В четвертом параграфе исследуется нелокальная краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu \equiv k(t) u_t - \Delta u + c(x,t) u = f(x,t). \tag{25}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (25) достаточно гладкие в $\overline{Q}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (25) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \;\; u(x,0) = \alpha u(x,T), \;\; \alpha = const. \tag{26}$$

Отметим, что регулярная разрешимость краевой задачи (25), (26) была доказана А.П. Львовым (2001) методом "ε регуляризации" в случае, когда коэффициент k зависит от x и t, а коэффициент c не зависит от t.

Рассмотрим случай $k(0) > 0, \; k(T) > 0$. В качестве базисных выбираются функции $\varphi_k(x,t)$, которые являются решениями спектральной задачи

$$-\widetilde{\Delta} \varphi = \lambda \varphi, \tag{27}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0, \tag{28}$$

$$\varphi(x,0) = \alpha \varphi(x,T), \;\; \varphi_t(x,T) = \alpha \varphi_t(x,0), \tag{29}$$

где $\widetilde{\Delta} u = u_{tt} + \Delta u$. При этом функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (25), (26) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой N линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1,N}. \tag{30}$$

Теорема 2.4.1 Пусть выполнены условия

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \; c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \; f \in W_2^{0,1}(Q), \quad \alpha f(x,0) = f(x,T),$$

$$k(T) - \alpha^2 k(0) \geq 0, \quad k(0) - \alpha^2 k(T) \geq 0, \quad k(0) > 0, \; k(T) > 0.$$

Тогда краевая задача (25), (26) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q)$.

Теорема 2.4.2 Пусть выполнены все условия теоремы 2.4.1. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_8 ||f||_{0,1} \lambda_{N+1}^{-1/4}, \quad C_8 > 0,$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (25), (26).

Третья глава диссертации посвящена исследованию нелинейных неклассических уравнений с меняющимся направлением времени с помощью стационарного метода Галеркина. Для всех исследуемых уравнений доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи. Данная глава включает три параграфа.

В первом параграфе исследуется полулинейное параболическое уравнение с меняющимся направлением времени, и для него установлена оценка погрешности стационарного метода Галеркина.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим полулинейное уравнение параболического типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + c(x,t)u + |u|^\rho u = f(x,t). \tag{31}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (31) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Положим $p = \rho + 2, \;\; 0 < \rho \leq \frac{4}{n-1}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (31) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \;\; u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \;\; u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{32}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $\widetilde{\Delta} u = u_{tt} + \Delta u$. Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}$ являются решениями спектральной задачи (4), (5), (6) или спектральных задач (4), (5), (6^p), $\;p = 1, 2, 3$.

Далее, приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (31), (32) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \;\; l = \overline{1,N}. \tag{33}$$

Теорема 3.1.1 Пусть выполнены условия

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \;\; c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; f \in W_2^{0,1}(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев

$$k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; f(x,0) = 0, \;\; f(x,T) = 0,$$

$$\text{или} \;\; k(x,0) > 0, \; k(x,T) \geqslant 0, \; f(x,0) = 0,$$

$$\text{или} \;\; k(x,0) \leqslant 0, \; k(x,T) < 0, \; f(x,T) = 0,$$

$$\text{или} \;\; k(x,0) \leqslant 0, \; k(x,T) \geqslant 0.$$

Тогда краевая задача (31), (32) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^{2,1}(Q) \cap L_p(Q)$.

Теорема 3.1.2 Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,0} \leq C_9(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-\frac{1-\alpha}{4}}, \;\; C_9 > 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1/2 - 1/p}{1/2 - 1/\overline{m}}, \;\; \overline{m} = \frac{2(n+1)}{n-1},$$

$u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (31), (32).

Во втором параграфе рассматривается сильно нелинейное неклассическое уравнение третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени.

В цилиндрической области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = Pu - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}) + c(x)u = f(x,t), \tag{34}$$

где $p>2,\ Pu=\sum\limits_{i=1}^{3}k_i(x,t)D_t^iu$, причем коэффициенты $k_i(x,t),\ c(x)$ являются достаточно гладкими функциями.

Обозначим

$$S_0^{\pm}=\{(x,0):x\in\Omega,\ -k_3(x,0)\gtrless 0\},\quad S_T^{\pm}=\{(x,T):x\in\Omega,\ -k_3(x,T)\gtrless 0\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (34) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma}=0, \tag{35}$$

$$u|_{t=0}=0;\ \ u|_{t=T}=0;\ \ u_t|_{\overline{S_0^{+}}}=0;\ \ u_t|_{\overline{S_T^{-}}}=0. \tag{36}$$

В дальнейшем рассмотрим случай $k_3(x,0)>0,\ k_3(x,T)<0,\ x\in\Omega$.

При $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ положим

$$A_0(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\varphi_{x_i}|^{p-2}\varphi_{x_i}) + c(x)\varphi.$$

Тогда оператор $\varphi\ \to\ A_0(\varphi)$ является ограниченным из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$.

Пусть Ω - ограниченная область с границей S класса C^∞, и функция $\psi(x)$ обладает свойствами:

$$\psi\in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \psi(x)>0\ \text{ при }\ x\in\Omega,$$

$$\psi|_S=0\ \text{ и }\ \frac{\partial\psi}{\partial n}|_S=0.$$

С помощью стационарного метода Галеркина доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1 Пусть выполнены условия

$k_3(x,0)>0,\ k_3(x,T)<0,\ x\in\Omega$ и $f,\sqrt{\psi}\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L_2(Q),\ i=\overline{1,n},\ -k_2+\frac{1}{2}k_{3t}\geq\delta>0,\ -k_2+\frac{3}{2}k_{3t}\geq\delta>0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}((k_3\psi)_{x_i})^2\leq\frac{1}{4}\delta^2\psi$, коэффициент $c(x)>0$ достаточно большой.

Тогда существует, и притом единственная, функция $u(x,t)$, такая, что

$$u\in L_p((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)),$$

$$u_t,u_{tt}\in L_2(Q),\ k_3D_t^3u\in L_{p'}((0,T);W_{p'}^{-1}(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x,0)\in L_2(\Omega),\ u_{tt}(x,T)\in L_2(\Omega),$$

$$\sqrt{\psi}\frac{\partial}{\partial x_j}(|u_{x_i}|^{(p-2)/2}u_{x_i})\in L_2(Q),\ \forall i,j;$$

$$\sqrt{\psi}v_{tx_i}\in L_2(Q),\ \frac{\partial}{\partial t}(|u_{x_i}|^{(p-2)/2}u_{x_i})\in L_2(Q)\forall i,$$

и $u(x,t)$ удовлетворяет (34)-(36).

В третьем параграфе исследуется полулинейное неклассическое уравнение высокого порядка с меняющимся направлением времени.

В цилиндрической области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим неклассическое уравнение высокого порядка

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{2s+1}k_i(x,t)D_t^iu-\triangle u+c(x)u+|u|^\rho u=f(x,t), \tag{37}$$

где $s\geq 1$ - целое число, $f\in L_2(Q)$.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (37) достаточно гладкие в $\overline{Q}$, и введем множества

$$S_0^{\pm}=\{(x,0):(-1)^sk_{2s+1}(x,0)\gtrless 0,x\in\Omega\},$$

$$S_T^{\pm}=\{(x,T):(-1)^sk_{2s+1}(x,T)\gtrless 0,x\in\Omega\}.$$

Положим $p=\rho+2,\ 0<\rho\leq\frac{2}{n-1}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (37) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma=0, \tag{38}$$

$$D_t^ju|_{t=0,\ t=T}=0,\ \ j=\overline{0,s-1};\ \ D_t^su|_{\overline{S}_0^+}=0,\ \ D_t^su|_{\overline{S}_T^-}=0. \tag{39}$$

Пусть C_L - множество гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (38), (39), а W_L - замыкание C_L по норме

$$||u||_L^2=||u||_{2,2s}^2+||k_{2s+1}D_t^{2s+1}u||^2.$$

Рассмотрим случай

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \le 0, \;\; (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \ge 0.$$

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}$ являются решениями спектральной задачи

$$(-1)^s D_t^{2s}\varphi_k - \triangle\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \;\; x \in \Omega, \tag{40}$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0, \tag{41}$$

$$D_t^j\varphi_k|_{t=0} = 0, \;\; D_t^j\varphi_k|_{t=T} = 0, \;\; j = \overline{0, s-1}. \tag{42}$$

При этом функции $\varphi_k(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,s}(Q)$, ортонормированы в $L_2(Q)$ и образуют в нем базис, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенные решения $u^N(x,t)$ краевой задачи (37)-(39) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

в котором c_k^N определяются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \;\; l = \overline{1, N}. \tag{43}$$

Теорема 3.3.1 Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1t}] \ge \delta > 0, \; (-1)^s[2k_{2s} - k_{2s+1t}] \ge \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \le 0, \;\; (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \ge 0, \; x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in W_L$ краевой задачи (37)-(39). При этом $u^N \to u$ слабо в $W_2^{2,2s}(Q)$.

Теорема 3.3.2 Пусть выполнены все условия теоремы 3.3.1, и последовательность $\{k_{2s+1}D_t^{2s+1}u^N\}$ ограничена в $L_2(Q)$. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,s} \le C_{10}(||f|| + ||f||^{\rho+1})\lambda_{N+1}^{-1/2}, \;\; C_{10} > 0, \tag{44}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (37)-(39).

Теорема 3.3.3 Пусть выполнены все условия теоремы 3.3.1. Тогда справедлива оценка

$$||u - u^N||_{1,s} \le C_{11}(||f|| + ||f||^{\rho+1})\lambda_{N+1}^{-1/4}, \; C_{11} > 0,$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (37)-(39).

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. Egorov, I.E. The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics / I.E. Egorov, V.E. Fedorov, I.M. Tikhonova, E.S. Efimova // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1907, 020011.

2. Ефимова, Е.С. Стационарный метод Галеркина для полулинейного неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 1. – С. 16–23.

3. Efimova, E.S. Error estimate for the stationary Galerkin method applied to a semilinear parabolic equation with alternating time direction / E.S. Efimova, I.E. Egorov, M.S. Kolesova // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 213, № 6. – pp. 838-843.

4. Ефимова, Е.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени / Е.С. Ефимова, И.Е. Егоров, М.С. Колесова // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2014. – Т.14, № 3. – С. 43–49.

5. Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для нелинейного неклассического уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением времени / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 19–27.

6. Ефимова, Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка / Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, Вып. 2. – С. 32–38.

7. Егоров, И.Е. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для вырождающегося параболического уравнения / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 1. – С. 27–33.

8. Егоров, И.Е. Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / И.Е. Егоров, Е.С. Ефимова // Математические заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, вып. 2. – С. 41–46.