На правах рукописи

Бурмистрова Оксана Александровна

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНЫХ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ И ВРАЩАЮЩИХСЯ ЖИДКИХ СЛОЕВ

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН).

Научный руководитель:

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор **Пухначев Владислав Васильевич**.

Официальные оппоненты:

Бекежанова Виктория Бахытовна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук – обособленного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»,

Ершов Игорь Валерьевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный аграрный университет».

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

Защита состоится 2019 г. в : часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук

Рудой
Евгений Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Изучение течений со свободной поверхностью является актуальной темой исследования, так как такие течения имеют много практических приложений. Для понимания процессов, происходящих в жидких слоях, важно исследовать в них конвективное движение. Под конвекцией понимается перемещение макроскопических частей жидкости, приводящее к переносу тепла и других физических величин. При этом существует два вида конвекции: естественная (свободная) конвекция, которая вызвана неоднородностью среды, и вынужденная, которая вызвана внешним механическим воздействием на среду.

Важную роль в неизотермических движениях со свободной поверхностью играет термокапиллярный эффект, обусловленный зависимостью поверхностного натяжения от температуры. При этом для достаточно тонких слоев жидкости термокапиллярная конвекция играет доминирующую роль.

Под жидкой пленкой понимается слой жидкости малой толщины по крайней мере с одной свободной поверхностью. Пленки жидкости применяются в таких аппаратах, как испарители, конденсаторы, электролизеры, абсорберы, кристаллизаторы. В пищевой промышленности жидкие пленки используются для производства сахара, в нефтеперерабатывающей — при дистилляции горюче-смазочных материалов. Кроме того, пленки жидкости широко применяются в химической, энергетической и фармацевтической промышленности. В новых технологиях используются пленки различного масштаба, они применяются в мини- и микросистемах. Важным приложением свободных пленок жидкости является технология опреснения соленой воды. Благодаря большой поверхности контакта при малых расходах жидкости, область применения пленок в различных технологиях велика и постоянно растет. Поэтому важно понимать процессы теплообмена и гидродинамику жидких пленок.

Еще одним примером движения жидкости со свободной поверхностью является жидкий слой на внутренней поверхности вращающегося цилиндра, важным приложением которого является производство пластиковых труб. В процессе производства пластиковых труб возникают неровности, которые образуются вследствие неустойчивости течения. Таким образом, важно понимать механизмы развития неустойчивости жидкости на поверхности вращающегося цилиндра.

Цели и задачи исследования

Целью работы является построение решений для неизотермических задач со свободной границей в полях внешних сил (гравитационном или центробежном) и исследование их на устойчивость. В ходе работы были решены следующие задачи об устойчивости:

– задача о слоистом течении бесконечно протяженной свободной жидкой пленки при совместном действии вертикальной силы тяжести и термокапиллярной силы;

– задача о равновесии свободной вертикальной пленки жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками;

– задача о термокапиллярной неустойчивости жидкости на внутренней поверхности цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Научная новизна

При решении задач были получены следующие новые результаты:

– для бесконечно протяженной вертикальной свободной жидкой пленки в случае плоского стационарного неизотермического слоистого течения с постоянной толщиной найдено и исследовано на устойчивость точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла. При различных значениях числа Галилея и числа Био получено значение волнового числа, при котором течение становится неустойчивым;

– для неизотермической пленки жидкости, находящейся в продольном поле тяжести и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками, в приближении тонкого слоя получена система дифференциальных уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и температуру. Плоская стационарная задача численно решена при различных значениях краевого угла, близких к $\pi/2$. Решение с постоянной толщиной пленки исследовано на устойчивость аналитически и численно при различных значениях ускорения тяжести;

– для неизотермического слоя жидкости, находящейся на внутренней поверхности цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью, точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла исследовано на устойчивость. Построены нейтральные кривые. Исследована зависимость критического значения числа Марангони от числа Био, числа Рейнольдса и безразмерного радиуса цилиндра.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа носит теоретический характер. Получены и исследованы на устойчивость точные решения некоторых задач со свободной поверхностью. Работа вносит вклад в теорию гидродинамической устойчивости. Результаты исследования задач о свободной жидкой пленке, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил, помогают интерпретировать результаты экспериментов (W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist, O. Kabov (2008), H. Fridhi, W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist (2014)), в результате которых получены пленки, которые могут быть использованы в технологии опреснения воды. Результаты решения задачи об устойчивости жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра позволяют понять некоторые механизмы развития неустойчивости при производстве пластиковых труб (R.J. Crawford, J.L. Throne (2002)).

Методология и методы исследования

При решении поставленных задач использовались: аппарат механики сплошных сред; теория дифференциальных уравнений, метод согласования асимпотических разложений; приближение тонкого слоя; методы гидродинамической теории устойчивости; численный метод стрельбы, метод ортогонализации, метод Рунге – Кутты, методы численного решения, реализованные в пакете Mathematica.

Положения, выносимые на защиту

Автор диссертационной работы защищает:

– построение и результаты исследования на устойчивость точного решения уравнений Навье – Стокса и переноса тепла для бесконечно протяженной свободной жидкой пленки при совместном действии вертикальной силы тяжести и термокапиллярной силы;

– вывод в приближении тонкого слоя уравнений для свободной вертикальной пленки жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил и ограниченной сверху и снизу твердыми стенками; построение стационарных решений при краевом угле, близком к $\pi/2$; результаты исследования на устойчивость пленки с постоянной толщиной;

– результаты исследования термокапиллярной неустойчивости слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается использованием известных моделей гидродинамики и математических методов теории устойчивости, применением апробированных численных методов. Корректность результатов численного решения подтверждается сравнением с аналитическими результатами в предельных случаях.

Доклады по теме работы были представлены и обсуждались

– на Всероссийской научной конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» с элементами школы молодых ученых (Ялта, 2016);

– на Международной конференции «8th Conference of the International Marangoni Association» (Bad Honnef, Germany, 2016);

– на Всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова (Новосибирск, 2016);

– на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);

– на V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2014);

– на IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 2012);

– на XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2011);

– на XI Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики» (Новосибирск, 2010);

– на Всероссийской конференции «XXIX Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 2010);

– на конкурсах молодых ученых Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2016, 2017);

– на семинаре под руководством чл.-корр. РАН В.В. Пухначева и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюка «Прикладная гидродинамика» Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2016, 2019);

– на семинаре под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова «Математические модели механики сплошных сред» Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2018);

– на семинаре под руководством д.ф.-м.н. Д.А. Брацуна кафедры прикладной физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, 2018, 2019);

– на семинаре под руководством д.ф.-м.н. А.М. Блохина «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018);

– на семинаре под руководством д.ф.-м.н. О.А. Кабова лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (Новосибирск, 2018).

Результаты диссертационной работы опубликованы в 11 изданиях: 3 статьи в журналах из списка ВАК [1—3], 2 статьи в трудах конференций [4; 5] и 6 публикаций в сборниках тезисов докладов [6—11].

Личный вклад

Автор диссертационной работы выполнял все аналитические и численные исследования поставленных задач самостоятельно. Все публикации в изданиях, рекомендованных ВАК, выполнены без соавторов.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, приведен обзор литературы по исследуемой проблеме; сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна работы, а также ее теоретическая и практическая значимость; представлены методы исследования и основные положения, выносимые на защиту; аргументрирована достоверность результатов и описан личный вклад автора; приведено краткое содержание диссертационной работы.

В **первой главе** диссертационной работы рассматривается задача о бесконечно протяженной по вертикали свободной пленке жидкости, находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил. В параграфе 1.1 формулируется постановка задачи. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, которая занимает плоскую область $\Omega_t = \{x \in (-\infty, \infty); z \in (-h(x,t), h(x,t))\}$, где $z = \pm h(x,t)$ — неизвестные свободные поверхности. Направление ускорения свободного падения $\mathbf{g} = (-g, 0)$ противоположно направлению оси x, $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости, p — давление жидкости, T — ее температура. Течение симметрично относительно прямой $z = 0$. Выписываются уравнения Навье – Стокса и переноса тепла:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \\ &T_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)T = \chi\Delta T, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, ν — ее кинематический коэффициент вязкости, χ — коэффициент температуропроводности.

Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ линейно зависит от T:

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa\left(T - T_0\right). \tag{2}$$

Здесь $\sigma_0 > 0$, $\kappa > 0$, $T_0 > 0$ — постоянные.

На свободной поверхности $z = h(x,t)$ задаются граничные условия

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = V_n, \quad (p_0 - p)\mathbf{n} + 2\rho\nu D\cdot\mathbf{n} = -2K\sigma\mathbf{n} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \beta(T_\Gamma - T). \tag{4}$$

Здесь $D = (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций, $\nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности, K — ее средняя кривизна, V_n — скорость ее перемещения в направлении $\mathbf{n}$, $p_0 = \mathrm{const}$ — атмосферное давление, $\beta > 0$ — коэффициент межфазного теплообмена, T_Γ — температура окружающей среды, которая считается заданной.

В параграфе 1.2 в точной постановке получено решение системы (1) в виде слоистого течения с постоянной толщиной пленки $2a$:

$$
\begin{aligned}
&u = \frac{g}{2\nu} z^2 + c, \;\; w = 0, \;\; p = p_0, \;\; h = a, \\
&T = -bx - \frac{b}{\chi}\left(\frac{g}{24\nu} z^4 + \frac{cz^2}{2}\right) + f,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где c, b, f — постоянные, которые находятся из граничных условий (3), (4). Показано, что если свободная поверхность идеально теплоизолирована ($\beta = 0$), то расход жидкости q через поперечное сечение пленки равен нулю. Далее предполагается, что $\beta \neq 0$, и для замыкания модели задаются q и a. Приводятся графики решения (5) при различных значениях расхода.

В параграфе 1.3 сформулирована задача об устойчивости решения (5). Решение задачи для возмущений ищется в виде

$$
\psi = \varphi(z) \mathrm{e}^{\lambda t + ikx}, \;\; T = \xi(z) \mathrm{e}^{\lambda t + ikx}, \;\; h = A \mathrm{e}^{\lambda t + ikx},
$$

где ψ — функция тока, $k > 0$ — волновое число, λ — комплексный параметр.

Система уравнений для амплитуд возмущений является системой комплексных уравнений шестого порядка с переменными коэффициентами и несамосопряженным оператором. При этом собственное значение λ входит в краевые условия, а задача содержит несколько независимых параметров. Таким образом, данная спектральная задача решается только численно. Для этого аналитически ищется начальное приближение в случае длинных волн. Обнаружено, что собственные значения в нулевом по волновому числу приближении отрицательны. Значит, решение устойчиво относительно длинноволновых возмущений.

В параграфе 1.4 задача об устойчивости решена численно с помощью метода ортогонализации (С. К. Годунов (1961), А. А. Абрамов (1961)). Функции φ и ξ имеют разную четность. Показано, что наиболее опасными являются возмущения с четной функцией тока.

На рисунке 1 приведены графики зависимости вещественной λ_r и мнимой λ_i частей собственных значений от k при различных значениях числа Галилея $\mathrm{Ga} = ga^3/\nu^2$. Обнаружено, что критическое значение волнового числа уменьшается с возрастанием Ga.

На рисунке 2 приведены графики зависимости λ_r от k при различных значениях числа Био $\mathrm{Bi} = \beta a$. Показано, что критическое значение волнового числа увеличивается с возрастанием Bi.

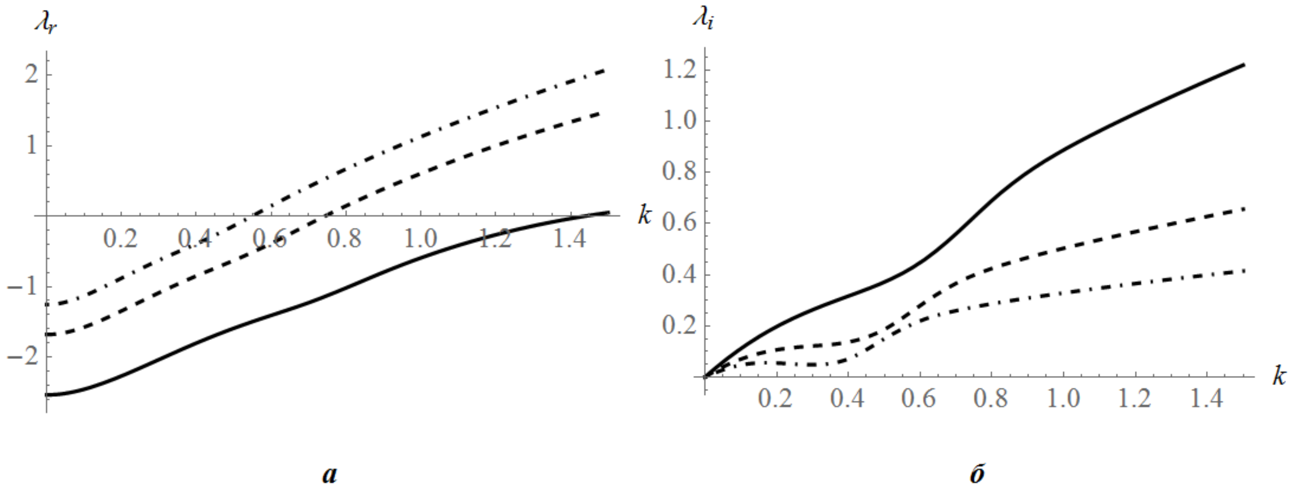


Рис. 1 — Зависимость *а* – инкрементов и *б* – частот возмущений от волнового числа при различных значениях числа Галилея. Сплошная линия соответствует $\mathrm{Ga} = 0.97$, штриховая — $\mathrm{Ga} = 1.47$, штрихпунктирная — $\mathrm{Ga} = 1.96$.

Во **второй главе** рассматривается задача о неизотермической свободной жидкой пленке, находящейся в поле тяжести и ограниченной по вертикали твердыми стенками. В параграфе 2.1 формулируется постановка задачи. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, заполняющая слой $\Omega_t = \{x \in (0, l); y \in (-\infty, \infty); z \in (-h(x, y, t), h(x, y, t))\}$. При $x = 0$ и $x = l$ жидкость граничит с твердыми стенками.

Для жидкого слоя выполняются уравнения (1) и краевые условия (3), (4) на свободной поверхности $z = h(x, y, t)$. При этом вместо двумерных градиента и лапласиана в уравнениях присутствуют трехмерные. Вектор скорости имеет компоненты $\mathbf{v} = (u, v, w)$, ускорение тяжести — компоненты $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$. Течение по-прежнему предполагается симметричным относительно плоскости $z = 0$, а зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры имеет вид (2). На твердых поверхностях задается условие прилипания

$$\mathbf{v} = 0 \quad (x = 0, \quad x = l) \tag{6}$$

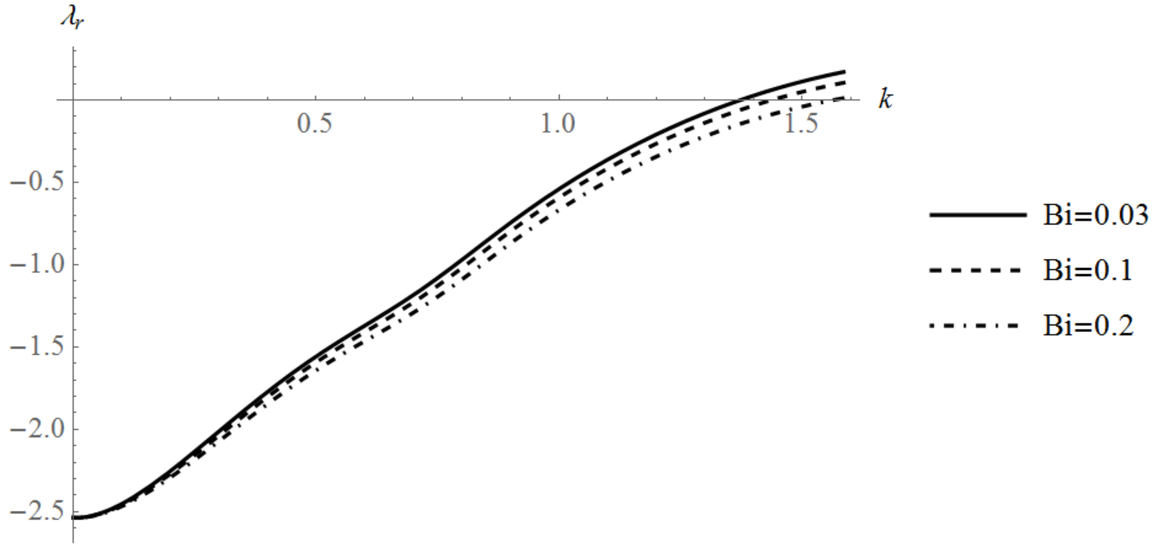


Рис. 2 — Зависимость инкрементов возмущений от волнового числа при различных значениях числа Био.

и условия для температуры. Это либо условия второго рода

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \quad (x = 0); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2 \quad (x = l), \tag{7}$$

где Q_1, Q_2 — заданные тепловые потоки на нижней и верхней стенке соответственно, либо условия первого рода

$$T = T_{1S} \quad (x = 0); \quad T = T_{2S} \quad (x = l), \tag{8}$$

где T_{1S}, T_{2S} — температуры нижней и верхней стенки соответственно.

В параграфе 2.2 в приближении тонкого слоя в предположении идеальной теплоизолированности свободной поверхности ($\beta = 0$) получена система трех уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки $\mathbf{q}$, толщину пленки h и ее осредненную по поперечной координате температуру T:

$$\begin{aligned} &-\mathbf{q}_t + \frac{\sigma_0}{\rho} h \nabla \Delta h = \frac{\kappa}{\rho} \nabla T - \mathbf{g} h, \;\; h_t + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \\ &(hT)_t + \nabla \cdot (\mathbf{q} T) = \chi \nabla \cdot (h \nabla T) \end{aligned} \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha_0 \;\; (x = 0); \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha_1 \;\; (x = l), \tag{10}$$

$$\mathbf{q} = 0 \ \ (x = 0, x = l),$$

а также (7) или (8). Здесь ∇ и Δ — градиент и лапласиан соответственно по переменным x и y.

В параграфе 2.3 рассмотрена плоская стационарная задача. В этом случае система (9), записанная в безразмерных переменных, сводится к уравнению для толщины пленки

$$h'''h = \gamma(-\frac{1}{h} + h),$$

где γ — постоянная. При этом вместе с условиями (10) задается условие $h(0) = h_0$, которое эквивалентно заданию объема течения. Если $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ (краевой угол равен $\pi/2$), существует решение с постоянной толщиной пленки, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$h = 1, \quad T = -x + c, \quad q = 0, \tag{11}$$

где c — постоянная.

Далее стационарная задача решается при отличных от нуля α_1. Результаты численного решения, полученного методом стрельбы, представлены на рисунке 3.

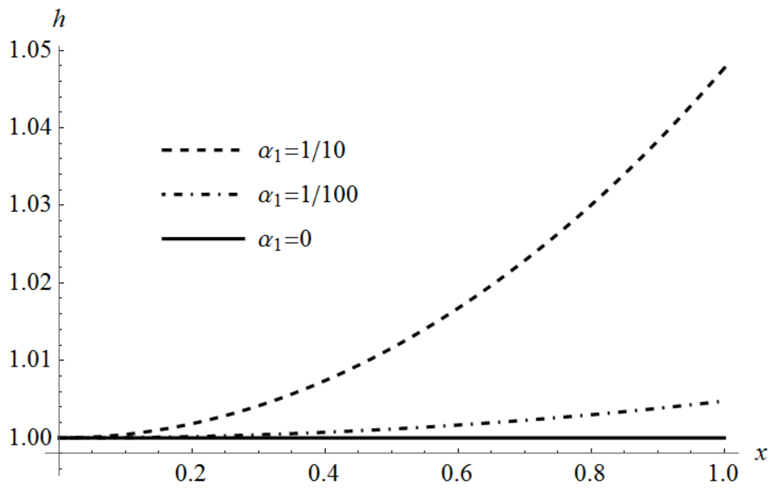


Рис. 3 — Зависимость толщины от координаты для различных α_1.

В параграфе 2.4 решение (11) исследуется на устойчивость. Система уравнений для возмущений на данном решении сводится к уравнению для возмущения расхода q

$$q_{xxxxxx} - \frac{1}{\alpha}q_{txxxx} - 2\gamma q_{xxx} + \delta q_{ttxx} - \frac{\delta}{\alpha}q_{ttt} = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$q = q_{xx} = q_{xxxx} - \gamma q_x = 0 \quad (x = 0, x = 1) \tag{13}$$

для случая, когда задано условие (7), или

$$q = q_{xx} = q_{xxxxx} + \delta q_{ttx} = 0 \quad (x = 0, x = 1) \tag{14}$$

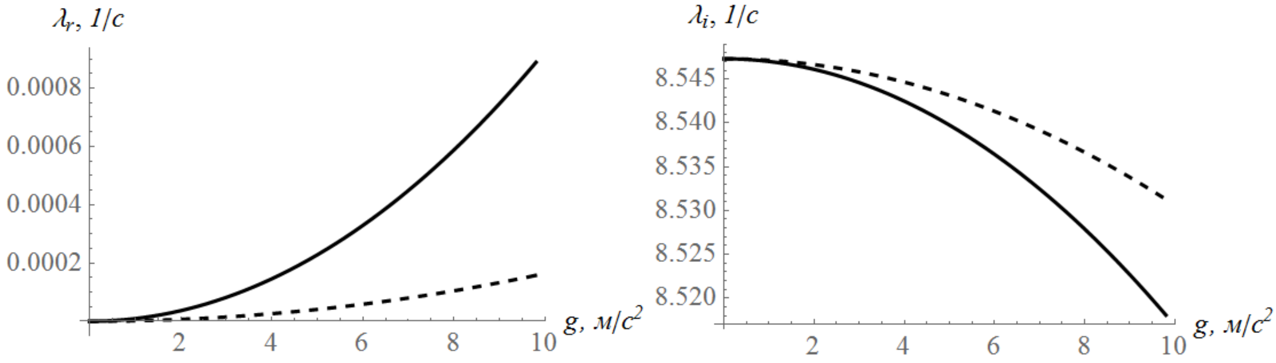
для случая, когда задано условие (8). Здесь α и δ — постоянные. Решения задач (12), (13) и (12), (14) ищутся в виде

$$q(x,t) = e^{\lambda t} f(x).$$

Спектральные задачи решались аналитически с помощью метода сращивания асимптотических разложений и численно методом ортогонализации. Проведено сравнение аналитических и численных результатов, которые хорошо согласуются.

На рисунке 4 приведены графики зависимости вещественной λ_r и мнимой λ_i частей собственных значений от ускорения тяжести в размерных переменных. Таким образом, в случае краевого условия второго рода для температуры инкремент возмущений больше по сравнению со случаем краевого условия первого рода. При этом в обоих случаях решение неустойчиво, но инкремент остается малым даже при земной гравитации. Это означает, что пленка может существовать достаточно долго, что соответствует экспериментам (W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist, O. Kabov (2008), H. Fridhi, W. Soua, A. Kaiss, L. Tadrist (2014)).

В **третьей главе** рассматривается задача о неизотермическом слое жидкости на внутренней поверхности цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью. В параграфе 3.1 формулируется постановка задачи. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, находящаяся между двумя бесконечными цилиндрическими поверхностями, которые имеют радиусы r_1 и $r_2 < r_1$. Поверхность $r = r_2$ предполагается свободной. Повехность $r = r_1$



а ***б***

Рис. 4 — Зависимость *а* – инкрементов и *б* – частот возмущений от ускорения тяжести. Сплошная линия соответствует краевым условиям (13), штриховая – условиям (14).

является твердой и вращается вокруг общей оси двух поверхностей с постоянной угловой скоростью ω. Предполагается, что сила тяжести отсутствует. Как и в предыдущих главах, зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры имеет вид (2). Задача решается в цилиндрической системе координат r, φ, z.

На твердой стенке выполняются условия

$$\mathbf{v} = (0, \omega r_1, 0), \;\; T = T_S. \tag{15}$$

Решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла с краевыми условиями (3), (4), (15), при котором свободная поверхность $r = h(z, \varphi, t)$ цилиндрическая, имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{v} = (0, \omega r, 0), \;\; p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \tilde{p}_0, \;\;\; h = r_2, \\ T = \frac{\beta r_2 (T_S - T_\Gamma)}{1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2)} \ln\frac{r}{r_2} + \frac{T_S + T_\Gamma \beta r_2 \ln(r_1/r_2)}{1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2)},\end{gathered} \tag{16}$$

где $\tilde{p}_0$ — постоянная.

На решение (16) накладываются малые возмущения, для них выписывается система уравнений в безразмерных переменных. При этом рассматриваются осесимметричные возмущения как наиболее опасные. По аналогии с задачей Пирсона (J. R. A. Pearson, 1958), где исследовалась термокапиллярная конвекция в плоском слое, предполагается, что свободная поверхность недеформируема, и что неустойчивость вызвана монотонными возмущениями.

Решение задачи для возмущений ищется в виде

$$u = A(r)\cos(kz),\ \ v = B(r)\cos(kz),\ \ w = C(r)\sin(kz),$$

$$p = \xi(r)\cos(kz),\ \ T = \zeta(r)\cos(kz).$$

Для искомых функций A, B, C, ξ и ζ получается спектральная задача, где роль спектрального параметра играет число Марангони $\mathrm{Ma} = \kappa\theta d/(\rho\nu\chi)$. Здесь $d = r_1 - r_2$, $\theta = \beta r_2(T_S - T_\Gamma)(1 + \beta r_2 \ln(r_1/r_2))^{-1}\,(\ln(r_1/r_2))$. Независимыми безразмерными параметрами задачи являются $\mathrm{Re} = \omega d^2/\nu$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Bi} = \beta d$ — число Био, $b = r_1/d$ — безразмерный радиус полости.

В параграфе 3.2 аналитически найдены асимптотики нейтральных кривых при $k \to 0$ (длинные волны), а в параграфе 3.3. — при $k \to \infty$ (короткие волны).

В параграфе 3.4 задача решена численно с помощью метода ортогонализации, построены нейтральные кривые при различных значениях определяющих параметров. При этом, в частности, находились критическое значение числа Марангони Ma^* (минимум нейтральной кривой) и критическое значение волнового числа k^* (точка минимума нейтральной кривой). Обнаружено, что при увеличении Bi значения Ma^* и k^* также увеличиваются.

На рисунке 5 изображены нейтральные кривые для различных значений b, а на рисунке 6 — для различных значений Re. Таким образом, при увеличении b значения Ma^* и k^* уменьшаются, а при увеличении Re увеличиваются.

Обнаружено хорошее согласование численно полученных нейтральных кривых с асимптотическими решениями, а также с решением задачи Пирсона.

Основные результаты диссертации приведены в **заключении**:

1. Для бесконечно протяженной по вертикали свободной жидкой пленки найдено точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла в виде плоского стационарного слоистого течения с постоянной толщиной. Показано, что если свободные поверхности пленки идеально теплоизолированы, расход жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю. В случае если

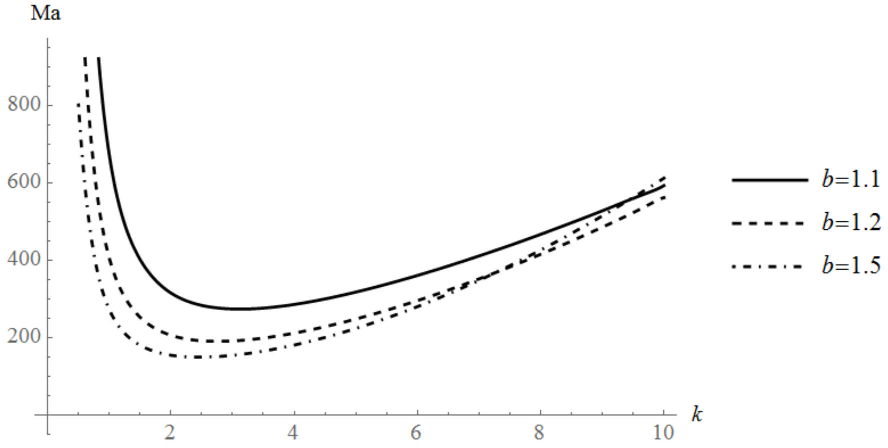


Рис. 5 — Нейтральные кривые при различных b.

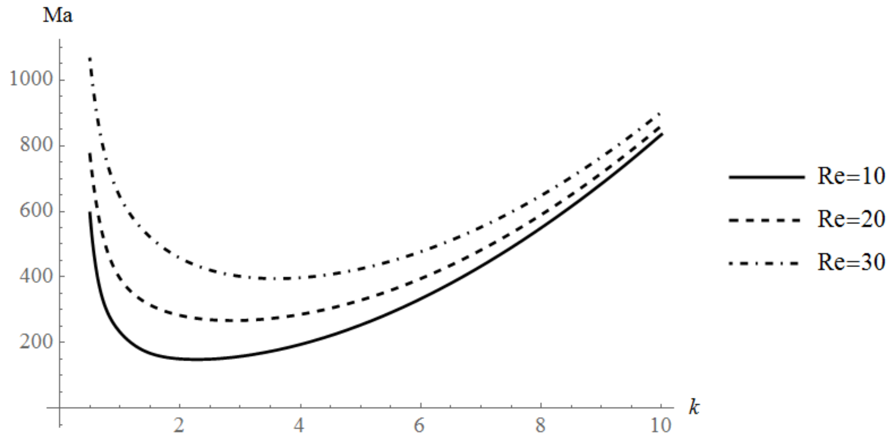


Рис. 6 — Нейтральные кривые при различных Re.

коэффициент межфазного теплообмена отличен от нуля, свободными параметрами являются расход жидкости и производная от температуры по продольной координате, являющаяся постоянной, либо расход и толщина пленки. Найденное решение исследовано на устойчивость при малых значениях волнового числа. В длинноволновом приближении пленка устойчива. С помощью продолжения по параметру получено значение волнового числа, при котором решение теряет устойчивость (критическое значение). Обнаружено, что при возрастании числа Галилея критическое значение волнового числа уменьшается, а при возрастании числа Био — увеличивается.

2. В приближении тонкого слоя для свободной пленки жидкости, находящейся в продольном поле тяжести и ограниченной по вертикали твердыми стенками, получена система дифференциальных уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки, ее толщину и темпера-

туру. Найдено решение системы с постоянной толщиной пленки. При этом температура является линейной функцией продольной координаты. Плоская стационарная задача решена численно для различных значений краевого угла, близких к $\pi/2$. Решение с постоянной толщиной исследовано на устойчивость при различных значениях ускорения тяжести, при этом аналитические и численные результаты согласуются. Показано, что решение неустойчиво, но даже при земной гравитации инкремент возмущений остается малым. Таким образом, пленка может существовать достаточно долго. Обнаружено, что в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие первого рода, инкремент возмущения меньше, чем в случае краевого условия второго рода.

3. Для неизотермической жидкости, расположенной на внутренней поверхности вращающегося цилиндра, точное решение уравнений Навье – Стокса и переноса тепла исследовано на устойчивость. В качестве спектрального параметра выбиралось число Марангони. Аналитически найдены асимптотики нейтральных кривых, которые для длинных волн имеют порядок $O(k^{-2})$ при $k \to 0$, а для коротких волн – $O(k^2)$ при $k \to \infty$. Численно построены нейтральные кривые. Обнаружено, что критические значения числа Марангони и волнового числа увеличиваются с увеличением чисел Био и Рейнольдса и уменьшаются с увеличением безразмерного радиуса цилиндра. При отсутствии вращения и при большом безразмерном радиусе асимптотики и результаты численного решения согласуются с решением задачи Пирсона о термокапиллярной конвекции в плоском слое.

Публикации автора по теме диссертации

1. ***Бурмистрова, О. А.*** **Устойчивость вертикальной пленки жидкости с учетом эффекта Марангони и теплообмена с окружающей средой / О. А. Бурмистрова // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — Т. 55, № 3. — С. 17—25.**
2. ***Burmistrova, O. A.*** **Equilibrium and stability of a free liquid film in a longitudinal gravitational field / O. A. Burmistrova // Journal of SibFU. Mathematics and Physics. — 2015. — Vol. 8, no. 3. — P. 253–259.**

3. ***Burmistrova, O. A.* Thermocapillary instability of a liquid layer on interior surface of a rotating cylinder / O. A. Burmistrova // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 754, no. 3. — 032004.**

4. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и малые возмущения свободной пленки жидкости в продольном поле тяжести / О. А. Бурмистрова, В. В. Пухначев // Сб. тр. Всерос. конф. «XXIX Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 15–17 ноября, 2010 г.) — Новосибирск : Изд-во ин-та теплофизики СО РАН, 2010. — CD-диск, 17 с.

5. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и устойчивость свободной жидкой пленки в продольном поле тяжести под действием термокапиллярных сил / О. А. Бурмистрова // Сборник трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа, 2015 г.) — Казань : Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. — С. 638—640.

6. *Бурмистрова, О. А.* Длинноволновове приближение в динамике неизотермических жидких пленок / О. А. Бурмистрова // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (Новосибирск, 16–20 апреля, 2011 г.) — Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2011. — С. 121.

7. *Бурмистрова, О. А.* Устойчивость свободной пленки жидкости в продольном поле тяжести с учетом эффекта Марангони / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов IV Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 15-17 ноября, 2012 г.) — Донецк : Изд-во Дон. нац. ун-та, 2012. — С. 28.

8. *Бурмистрова, О. А.* Равновесие и устойчивость неизотермической пленки жидкости в продольном поле тяжести / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 29 июня – 4 июля, 2014 г.) — Бийск : Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2014. — С. 23—24.

9. *Бурмистрова, О. А.* Термокапиллярная неустойчивость жидкого слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов Всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова (Новосибирск, 29 февраля – 2 марта, 2016 г.) — Новосибирск : Изд-во Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2016. — С. 35.

10. *Burmistrova, O. A.* Thermocapillary instability of a liquid layer on interior surface of a rotating cylinder / O. A. Burmistrova, V. V. Pukhnachev // Book of abstracts of IMA8 – 8th Conference of the International Marangoni Association, (Bad Honnef, Germany, 12-16 June 2016). — Bad Honnef, 2016. — P. 90.

11. *Бурмистрова, О. А.* Стационарные режимы вращающегося слоя жидкости на цилиндрической поверхности / О. А. Бурмистрова // Сб. тезисов докладов Всероссийской научной конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» с элементами школы молодых ученых (Ялта, 18-25 сентября, 2016 г.) — Новосибирск : Изд-во Института теплофизики СО РАН, 2016. — С. 18.