ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

БЕЛОНОГОВ ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертационная работа

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Пятков С.Г.

Ханты-Мансийск — 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть E – банахово пространство. Обозначим через $L_p(G;E)$ (G область в $\mathbb{R}^n$) пространство измеримых функций, определённых на G, со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ (см., например, [1, §1.18.4]). Также используем пространства $C^k(\overline{G};E)$, состоящие из функций, обладающих всеми производными до порядка k включительно, непрерывных и ограниченных в G и имеющих непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Пространство $C^s(\overline{G};E)$ при дробных s состоит из функций из $C^k(\overline{G};E)$ с $k=[s]$, старшие производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем $s-k$. Пространства Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ определены стандартным образом ([1], [2], [3], [4], [5]). Для дробных s, пространство Соболева $W_p^s(G;E)$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^s(G;E)$. Если $E=\mathbb{C}$ или $E=\mathbb{C}^n$, то используется обозначение $B_{p,p}^s(G)$. Аналогично вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$, или $C^k(\overline{G})$.

Принадлежность $u\in W_p^s(G)$ (или $u\in C^k(\overline{G})$) для заданной вектор-функции $u=(u_1,u_2,\dots,u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Норма в соответствующем пространстве – сумма норм координат. Аналогичное соглашение примем для матриц, т.е. включение $a\in W_p^s(G)$ ($a=\{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x)\in W_p^s(G)$ для всех i,j. Для заданного интервала $J=(0,T)$, положим

$$W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p(J;W_p^r(G))$$

и

$$W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma)).$$

Аналогичным образом определяем пространства Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ (см. [6]) Символы $(A,B)_{\theta,q}$ и $[A,B]_\theta$ для заданных банаховых пространств A,B обозначают пространства, полученные при помощи вещественного и комплексного интерполяционных методов (см. [1]).

Говорим, что граница Γ данной области G принадлежит классу C^s, $s\geq 1$ (см. определение в [6, Гл. 1]), если для любой точки $x_0\in\Gamma$ найдется окрестность

U (координатная окрестность) этой точки, и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такая, что ось y_n направлена по внутренней нормали в Γ в точке x_0 и уравнение части границы $U \cap \Gamma$ имеет вид $y_n = \gamma(y')$, $\gamma(0) = 0$, $|y'| < \delta$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, причем $\gamma \in C^s(\overline{B'_\delta(0)})$ ($B'_\delta(0) = \{y' : |y'| < \delta\}$) и $G \cap U = \{y : |y'| < \delta, 0 < y_n - \gamma(y') < \delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap U = \{y : |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma(y') < 0\}$. Числа δ, δ_1 для области G фиксированы, причем без ограничения общности считаем, что $\delta_1 > (M+1)\delta$, где M постоянная Липшица функции γ. Обозначим, такой параметр δ через δ_Γ (он определен неоднозначно).

Пусть $B_\delta(b)$ – шар радиуса δ с центром в точке b. Для данных множеств $S, M \subset \mathbb{R}^n$ через $\rho(S, M)$ обозначаем расстояние между ними, т.е. $\rho(S, M) = \inf_{x\in S, y\in M} |x - y|$. Положим $(u, v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$, если u и v скалярные функции и $(u, v) = \int_G \langle u(x, t), v(x)\rangle \, dx$, если u и v вектора длины h. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^h$ или в $\mathbb{C}^h$. Пусть $L : X \to Y$ – линейный оператор и X, Y – банаховы пространства. Через $L(X, Y)$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов, определенных на X со значениями в Y. Через $\sigma(L), \rho(L)$ обозначаем спектр и резольвентное множество оператора L.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи.

Данная работа посвящена исследованию регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта, а также вопросов корректности обратных задач по определению коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения.

Основное внимание уделено системам уравнений тепломассопереноса (конвекции-диффузии), т.е. параболическим системам второго порядка, возникающим при описании процессов диффузии, фильтрации, тепло- и массопереноса и в самых разных других областях. Большое количество приложений таких систем и необходимая библиография имеются, например, в работе [2]. Все коэффициенты рассматриваемых уравнений и систем, равно как и данные задач, мы считаем вещественными.

В самом общем случае рассматриваемая система второго порядка имеет вид

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где u - вектор длины h, $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} - a_0(x,t)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$-матрицы-функции, $h \in \mathbb{N}$. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = \varphi \quad (S = \Gamma \times (0,T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x,t)u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ матрицы, и условиями сопряжения:

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x,t) - \alpha_1(x,t)u^+(x,t) - \alpha_2(x,t)u^-(x,t) = g^+(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(x,t) - \beta_1(x,t)u^+(x,t) - \beta_2(x,t)u^-(x,t) = g^-(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{4}$$

где $\frac{\partial u^{\pm}}{\partial N}(x_0,t) = \lim_{x\in G^{\pm},\ x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\nu_j$, $u^{\pm} = \lim_{x\in G^{\pm},\ x\to x_0\in\Gamma_0} u(x,t)$, и ν - внешняя единичная нормаль к ∂G^-. Далее, иногда используем обозначение $u^{\pm} = u|_{G^{\pm}}$ и записываем функцию u в виде вектора $u = (u^+, u^-)$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(4). Условия сопряжения (3), (4) обобщают известные в теории тепломассопереноса условия на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. постановки в [7]):

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_0}, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = \alpha(u^+ - u^-). \tag{5}$$

Если $\alpha \to \infty$, мы получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [6, §16, гл. 3]), когда условия имеют вид $u^+ = u^-$, $\frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{S_0}$. Заметим, что во многих случаях, связанных прежде всего с математическим моделированием, условия сопряжения в задаче дифракции соответствуют условиям непрерывности решения и потока при переходе через поверхность контакта. Область G^- может состоять из нескольких компонент связности. В этом случае, на каждой компоненте связности множества Γ_0 мы имеем свое условие вида (3), (4).

Отдельно мы рассматриваем один частный, но важный случай, когда условие $\overline{G^-} \subset G$ не выполнено. В этом случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0,l)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega \in C^2$), причем $G^+ = \cup_i G^{2i}$, $G^- = \cup_i G^{2i-1}$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0 < l_1 < \ldots, < l_m = l$. Этот частный случай очень часто возникает в приложениях. Опишем постановку задачи. Пусть

$$Lu = a_{nn}(t,x)u_{x_nx_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u,$$

а уравнение (1) имеет вид

$$Mu = u_t - Lu = f. \tag{6}$$

Введём обозначения: $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0,l)$, $S^0 = (0,T) \times \Gamma^0$. Уравнение (6) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{7}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x)\ (x \in G),\ R_0u(t,x',0) = \varphi_0, \quad R_1u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{8}$$

где $R_0u = u$ или $R_0u = -u_{x_n}+\sigma_0 u$, соответственно $R_1u = u$ или $R_1u = u_{x_n}+\sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$R_i^+u = (u_{x_n} - \alpha_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i-0} = g_i^+, \tag{9}$$

$$R_i^-u = (u_{x_n} - \beta_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i+0} = g_i^-,\ i=1,2,...,m-1. \tag{10}$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (6), удовлетворяющего условиям (7)– (10).

В качестве приложений полученных результатов для параболических уравнений, мы рассматриваем также одну задачу сопряжения в стационарном случае. Рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$-Lu = f(x),\ Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} - a_0(x)u - \lambda u, \tag{11}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Считаем, что область G разделена на две области G^+ и G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$. Для простоты здесь считаем, что Γ_0 состоит из одной компоненты связности. Уравнение (11) дополняется краевыми условиями:

$$Bu|_\Gamma = g, \tag{12}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)n_j\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x)u$ и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) - \beta(u^+ - u^-)(x_0) = g^+(x_0),\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(x_0),\quad x_0 \in \Gamma_0, \tag{13}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j,\ u^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} u(x)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. Задача состоит в нахождении решения уравнения (11), удовлетворяющего условиям (12), (13).

Второй класс задач, который мы рассматриваем – обратные задачи об определения коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения. Как и в случае задач сопряжения, мы рассмотрим три различных случая. В первом случае мы рассматриваем параболические уравнения вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t,x),\quad (t,x) \in Q = (0,T)\times G, \tag{14}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и случае область G разделена на две области G^+ и

G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Здесь множество G^- может быть и многосвязным, соответственно пусть Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, r_0)$ компоненты связности множества Γ_0 и $S_i = (0, T) \times \Gamma_i$. Уравнение (14) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = g \;\; (S = \Gamma \times (0, T)), \;\; u|_{t=0} = u_0(x), \tag{15}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(t, x) u$ и условиями сопряжения

$$B_i^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N}\big|_{S_i} - \beta_i (u^+ - u^-)\big|_{S_i} = g_i^+, \;\; \frac{\partial u^+}{\partial N}\big|_{S_i} = \frac{\partial u^-}{\partial N}\big|_{S_i}, \;\; i \le r_0 \tag{16}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, \; x \to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i} \nu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^+(t, x_0) u_{x_i}^+ \nu_j$, $u_{x_i}^\pm =$
$\lim_{x \in G^\pm, \; x \to x_0 \in \Gamma_0} u_{x_i}(t, x)$, $a_{ij}^\pm = \lim_{x \in G^\pm, \; x \to x_0 \in \Gamma_0} a_{ij}(x, t)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(b_i, t) = \varphi_i(t) \; (i = 1, 2, \ldots, r_1), \;\; u^-(b_i, t) = \varphi_i(t) \; (i = r_1 + 1, \ldots, r), \tag{17}$$

где $b_i \in \Gamma_0$, $\{b_i\}$ – некоторый набор точек. Задача в данном случае состоит в нахождении решения уравнения (14), удовлетворяющего условиям (15)-(17) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}(t) \Phi_{ij}(t, x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r_0)$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Во втором случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0, l)$, описанную выше. Пусть $S^0 = (0, T) \times \Gamma^0$, $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0, l)$. Уравнение (14) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{18}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_j} \nu_i + \sigma u$;

$$u(0, x) = u_0(x) \; (x \in G), \;\; R_0 u(t, x', 0) = \varphi_0, \;\; R_1 u(t, x', l) = \varphi_1, \tag{19}$$

где $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$B_i^+ u = \frac{\partial u_i^+}{\partial N} - \beta_i (u_i^+ - u_i^-) = g_i^+, \;\; \frac{\partial u_i^+}{\partial N} = \frac{\partial u_i^-}{\partial N}, \;\; i = 1, \ldots, m - 1, \tag{20}$$

где $\frac{\partial u_i^\pm}{\partial N}(t,x') = \lim_{x_n\to l_i\pm 0} a_{nn}u_{x_n}(t,x',x_n), u_i^\pm = \lim_{x_n\to l_i\pm 0} u(t,x',x_n)$. Пусть $x_{ij} = (x'_{ij}, l_j) \in \Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ $(j = 1,2,\ldots,m-1, \quad i = 1,2,\ldots,N_j,)$ – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u(t,x'_{ij},x_n)|_{x_n=l_j+0} = \varphi_{ij}(t),\ i = 1,2,\ldots,N_j,$$
$$u(t,x'_{ij},x_n)|_{x_n=l_j-0} = \varphi_{ij}(t),\ i = M_j+1,\ldots,N_j. \quad (21)$$

Здесь задача состоит в нахождении решения уравнения (14), удовлетворяющего условиям (18)-(21) и неизвестных функций β_j вида $\beta_j = \sum_{i=1}^{N_j}\alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t,x')$ $(j = 1,2,\ldots,m-1,\ x' = (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}))$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Рассмотрим третий случай – случай эллиптического уравнения (11). В этом случае мы предполагаем, что коэффициент β в (13) представим в виде $\beta = \sum_{i=1}^{r}\beta_j\Phi_j(x)$, где функции Φ_j заданы, а постоянные β_j считаются неизвестными. Рассматриваемая задача состоит в нахождении решения задачи (11)-(13) и неизвестных постоянных β_j таких, что

$$u^+(b_i) = \psi_i\ (i = 1,2,\ldots,r_1),\quad u^-(b_i) = \psi_i\ (i = r_1+1,\ldots,r), \qquad (22)$$

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Первые результаты об обобщенной разрешимости и простейшие результаты о дифференциальных свойствах решений задач дифракции для параболических и эллиптических уравнений второго порядка (L_2 теория) были получены в работах О.А. Ладыженской и Олейник О.А. (см. [8–11]) и ряда других авторов в 50-60 годы. Общая теория задач типа дифракции для эллиптических операторов высокого порядка имеется в работах Шефтеля [12, 13], где приведены условия разрешимости как в пространствах Соболева, так и в пространствах Гельдера. Можно также отметить работу [14], где по существу был рассмотрен в вопрос об обобщенной в некотором смысле разрешимости задач типа дифракции и работу [15], посвященную уже задачам типа дифракции для эллиптических систем высокого порядка в пространствах Соболева и Гельдера. Задачи типа дифракции в общей постановке для параболических систем высокого порядка были рассмотрены в работе [16] также в пространствах Соболева и Гельдера. Отметим книгу

[17, §6.5], где приведены результаты о разрешимости задачи дифракции для параболических операторов второго порядка с коэффициентами не зависящими от времени, с решениями принадлежащими пространству Соболева-Бесова со значениями в гильбертовом пространстве (в частности, сюда входят и обычные системы параболических уравнений второго порядка). Сошлемся также на книгу Борсука М. [18], посвященную вопросам разрешимости эллиптических задач сопряжения с условиями типа диффракции на границе раздела в негладких областях (области с конической точкой или с ребром на границе, и др.). Рассматриваются задачи как для линейных, так и для квазилинейных уравнений. Отметим, что задачи сопряжения с условиями типа диффракции возникают во многих приложениях, прежде всего в теории упругости - например, задачи, связанные с контактным взаимодействием упругих тел. Из работ последнего времени отметим монографию [19], статьи [20–23]. Задачи дифракции возникают также при математическом моделировании процессов тепломассообмена в многофазных средах. Подобные задачи рассматриваются, например, в статьях [24], [25] и многих других авторов.

Задача (1)-(4) не является задачей дифракции в смысле классического определения и не входит в класс задач, изученных в вышеупомянутых работах. Работ, посвященных теоретическим результатам для таких задач немного. Опишем их более подробно. Обобщенная разрешимость задачи (1)-(4) в случае квазилинейного оператора M, записанного в дивергентном виде, причем функции u^+, u^- входят в (3), (4) также нелинейным образом, была доказана в работе [26], где фактически была использована теория монотонных операторов. Обобщенная разрешимость задачи (1)-(4) (т.е. решение u принадлежит классу $L_2(0,T;W_2^1(G)))$ с условиями вида (5) в линейном случае была получена в работе [27]. Обобщенная разрешимость модельной задачи близкой по смыслу к задаче (1)-(4) для модельного параболического уравнения в одномерном случае имеется в работе [28]. В отличие от работ [26, 27], мы исследуем вопрос о регулярной разрешимости задачи (1)-(4) в классах Соболева, т.е. в классах $W_p^{1,2}(Q)$.

Модельный случай (область $G = \Omega \times (0,l)$ есть цилиндр) очень часто возникает в приложениях, в том числе в приложениях возникают и обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи β в (16). Общая постановка подобных задач может быть найдена, например, в [29] при $n = 2$ и в [30, §3-7,3-8] при $n = 1$. Различные модельные постановки имеются например в работах [31], [32–38] и многих других. Практически все работы посвящены численному решению задачи, иногда совсем в простых случаях строится явное решение. Каких-либо теоретических результатов, посвященных подобным обратных задачам по-видимому нет.

Опишем некоторые методы и результаты посвященные численному решению задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта. Вопрос о численном решении задачи нестационарной линейной теплопроводности в многослойном композите с неидеальным контактом между слоями рассмотрен в работах [39–41]. В [39], [40] автор рассматривает n – слойную цилиндрическую поверхность, а в [41] - n – слойную неограниченную пластину. В качестве численного метода используется метод интегральных преобразований.

Задачи Дирихле для нелинейных уравнений эллиптического типа с условиями сопряжения типа неидеального контакта рассматриваются в работах [24, 42–48]. Численное решение строится с помощью метода конечных разностей.

В работах [49, 50] рассмотрен вопрос об аналитическом решении первой краевой задачи для модельного одномерного уравнения теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом на границах слоёв. Задача фактически решается с помощью метода Фурье. В [50] метод решения дан в единой аналитической форме для случаев сдвиговой, осевой и центральной симметрии среды.

Стационарная задача теплопроводности в двумерных неограниченных двупериодических композитных материалах с неидеальными условиями контакта рассматривается в [51]. Задача сводилась к некоторому функциональному уравнению, которое и решалось численно.

В статье [52] рассмотрена задача о численном решении задачи сопряжения с условиями типа неидеального контакта в одномерных кусочно-однородных композитных материалах.

В последнее время в связи с широким использованием новых материалов все возрастающий интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в кусочно-однородных средах, а также в средах, содержащих тонкие сильно и слабопроницаемые пленки — трещины и завесы [53–62]. Трещины и завесы имеют место на неидеальных контактах составных разнородных материалов [63–68].

Обратные задачи в многослойных средах возникают во многих прикладных задачах, среди которых можно выделить задачи сейсморазведки (например, определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых), определения свойств материалов (механических, теплофизических), идентификации полимерных и композитных материалов, задачи рентгеновской и акустической томографии и ряд других. В настоящее время существует множество различных постановок обратных задач и для некоторых классов обратных задач уже имеются теоремы единственности, разрешимости или, по крайней мере, оценки устойчивости. Выделим основные направления исследований. Среди работ, посвящённых параболическим уравнениям и системам можно выделить работы Прилепко А.И., Орловского Д.Г., Денисова А.М., Камынина В.Л., Исакова В., M. Yamomoto, Кожанова А.И., Lorenzi A., Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. и многих других авторов. Имеются также работы Орловского Д.Г., Фавини А., Горбачук М.Л., Бухгейма А.Л., Федорова В.Е. и других (см. [69], [70], [71], [72], [73]), посвящённые абстрактным эволюционным уравнениям в банаховом пространстве. Основные классы исследуемых задач отличаются по виду условий переопределения: интегральные условия с данными зависящими от времени и (или) пространственных переменных, условие финального переопределения (в этом случае решение задаётся в финальный момент времени), оператор Дирихле-Неймана или Неймана-Дирихле, эволюционные данные переопределения (в этом случае данные зависят от времени, как правило решение или его производные задаются на некоторых пространственных многообразиях или в отдельных точках). Как раз к этому классу задач относятся рассматриваемые в работе задачи. Стоит отметить большое количество работ Новосибирской школы по обратным задачам (это в основном работы, посвящённые гиперболическим уравнениям и системам): Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Яхно В., Аниконов Ю.Е., Бухгейм А.Л., Кабанихин С.И., а также работы Белишева М.И., Клибанова М.И., Uhlman G., Пестова Л.Н. Отметим ряд недавних монографий, где можно найти постановки и подробную библиографию: [74], [75], [76]. Среди последних монографий, посвящённых численным методам решения обратных задач, можно выделить, например, монографии [77], [78], [79]. Сошлемся также на монографии [80], [81], [30], [82], [83–86], где имеется значительное количество постановок обратных задач и ряд результатов, связанных в основном с численным решением обратных задач. Очень часто численные методы основаны на сведении обратной задачи к некоторой задаче оптимального управления и в конечном счёте решение строится при помощи регуляризации и минимизации некоторого функционала. Отметим однако, что функционал в нелинейном случае не является выпуклым, и фактически не очень понятно даёт ли его минимизация решение искомой задачи. Поэтому теоретическое исследование задачи и построение на этой основе новых теоретических результатов надежных численных методов имеет большое значение.

Обратные задачи нахождения неизвестных граничных режимов, в частности, задачи конвективного теплообмена, являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композитных материалов и т.п. (см. [80] - [87]). Насколько нам известно, теоретических результатов о разрешимости (или единственности решений) задач вида (14)-(17) в литературе не имеется. Отметим, что практически нет и аналогичных результатов в случае задач конвективного теплообмена определения коэффициента теплообмена, входящего в граничное условие, а не в условие сопряжения за исключением некоторых модельных случаев (см., например, [88], [89]).

В связи с большим количеством практических приложений имеемся большое количество работ, посвященных численному решению задачи (14)-(17) в различных постановках, как правило ищутся коэффициенты β, зависящие от времени или наоборот от пространственных переменных, точки $\{b_i\}$ в (17) чаще всего являются внутренними точками областей G^+, G^-. Отметим, например, работы [31], [34], [38], [90–94]. В качестве метода почти во всех работах используется сведение обратной задачи к некоторой задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала ([34], [38], [90–92, 94]). Опишем некоторые рассмотренные задачи.

В случае одной пространственной переменной зависящий от температуры коэффициент теплообмена по точечным условиям переопределения численно определяется в статье [90]. Двумерная обратная задача определения коэффициентов теплообмена (зависящих специальным образом от дополнительных параметров, которые и подлежат определению) по набору значений решений в заданных точках численно решается в работе [91]. В работах [31], [93] рассматриваются и численно решаются обратные задачи определения коэффициента теплообмена, зависящего от двух пространственных переменных с помощь метода Монте-Карло. В качестве условий переопределения берется значение решения на части границы области. Одновременное определение коэффициента, входящего в параболическое уравнение, и коэффициента теплообмена осуществляется в работе [92]. В качестве условий переопределения используются значения замеров температур в точках на границе раздела слоев (как и в условии (17)). Точечные условия переопределения также используются в [34] и в [94], в последней была рассмотрена одномерная обратная задача одновременного определения теплового потока на одной из боковых поверхности цилиндра и термического контактного сопротивления на границе раздела сред. Численное определение коэффициента теплообмена по данным замеров на доступной части внешней границы рассматриваемой области осуществляется в работе [38].

Сошлемся также на работы [95], [96], [97], посвященные численному определению коэффициента теплопередачи в параболическом случае. Численное решение двумерной параболической задачи теплопроводности по оптимальному проектированию многослойной теплоизоляции, основанное на методе квадратичной аппроксимации исходной постановки задачи в виде формулировки Лагранжа, приведено в статье [98].

Выделим также работы [99], [100], [101], [102], где было получено большое количество результатов, посвященных численному решению стационарных обратных задач об одновременном определении коэффициента теплообмена и других параметров среды. В частности, в [99], [100] оценивается теплопроводность, коэффициент теплопередачи и тепловой поток. В первом случае рассматриваются трехмерные, а во втором - двумерные нерегулярные тела. В статье [101] определяют переменный (зависящий от пространства и температуры) коэффициент теплопередачи в двумерных задачах при наличии граничных условий Дирихле, Неймана и Робина. В [101] происходит одновременная оценка теплового потока и коэффициента теплопередачи в конструкциях неправильной геометрии.

В данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (14)-(17), в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений. Стоит отметить, что на данный момент практически не имеется работ, посвящённых вопросам корректности рассматриваемых обратных задач, основные полученные ранее результаты связаны с некоторыми модельными ситуациями и, в основном, в одномерном случае, и с численными методами решения подобных задач. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Цели и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование вопросов регулярной разрешимости и единственности решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических и эллиптических уравнений и вопросов корректности обратных задач определения коэффициента теплопередачи для математических моделей тепломассопереноса в многослойных следах с точечными данными переопределения.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических систем уравнений.
2. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для эллиптических уравнений второго порядка.
3. Исследовать вопросы существования и единственности решений обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений.

Методы исследования

При исследовании обратных параболических задач в основном использовались методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, использовались классические результаты о разрешимости параболических задач (L_p-теория), методы повышения гладкости решений при повышении гладкости данных, основанные на методе конечных разностей, методы доказательства разрешимости параболических задач, основанные на использовании и получении априорных оценок шаудеровского типа, интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

Краткое содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав и заключения. Список литературы состоит из 121 наименования. Полный объём работы составляет 166 страниц. Опишем содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы работы, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов работы.

Первая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматривается задача (1)-(4).

В первом параграфе главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

Во втором параграфе главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения (1)-(4) в случае $\overline{G^-} \subset G$. Опишем основные результаты. Введём обозначения: $S_\phi = (0,\phi) \times \Gamma$, $S_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times \Gamma$, $Q_\phi = (0,\phi) \times G$, $Q_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times G$, $S^0_{\alpha,\beta} = \times(\alpha,\beta) \times \Gamma_0$, $S^0_\phi = (0,\phi) \times \Gamma$, $Q^\pm_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times G^\pm$, $Q^\pm = (0,T) \times G^\pm$, $Q^\pm_\phi = G^\pm \times (0,\phi)$.

Опишем условия на данные. Условие параболичности по Петровскому оператора L записывается в виде.

Пусть $L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j}$ и $\nu(x)$ – внешняя единичная нормаль к S в данной точке. Рассмотрим матрицу
$A_0(t,x,\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$, и предположим, что найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что все корни p полинома $\det\big(A_0(t,x,\xi) + pE\big) = 0$ (E - единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \le -\delta_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{23}$$

Пусть $B_0 u = u$ в случае условий Дирихле и $B_0 u = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j} u$ в противном случае. Условие Лопатинского может быть записано в виде (см. [4, пункт 2]:

для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ система

$$\big(\lambda E + A_0(x_0, t_0, \xi' + i\nu(x_0)\partial_{y_n})\big)v(z) = 0, \quad B_0(x_0, t_0, \xi' + i\nu\partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (24)$$

где $(\xi', \nu) = 0, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C\big(\overline{\mathbb{R}}^+\big)$ убывающее на бесконечности при всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda| \le \pi/2$, и $h_j \in \mathbb{C}$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$.

Легко понять, что условие Лопатинского сохраняется при ортогональной (и даже любой невырожденной) замене переменных. Поэтому это условие также может быть переписано в виде: для любой точки $(t_0, x_0) \in S$, и операторов $A_0(x, t, D)$ и $B_0(x, t, D)$, записанных в локальной декартовой системе координат y в этой точке (ось y_n направлена по нормали к S и оси $y_1, \ldots, y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости в точке (x_0, t_0)), система

$$\big(\lambda E + A_0(x_0, t_0, \xi', i\partial_{y_n})\big)v(z) = 0, \quad B_0(x_0, t_0, \xi', i\partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (25)$$

где $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C\big(\overline{\mathbb{R}}^+\big)$, убывающее на бесконечности при всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda| \le \pi/2$, и $h_j \in \mathbb{C}$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$.

Мы также предполагаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad \varphi \in W_p^{2k_0, k_0}(S), \quad (26)$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и выполнены условия согласования: в случае условий Дирихле $u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0)$ при $p > 3/2$, в случае условий с косой производной $B(x, 0)u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0)$ при $p > 3$.

Предполагаем, что число компонент связности границ Γ, Γ_0 конечно и каждая из них принадлежит классу C^2. Чтобы избежать громоздких записей, мы приводим условия, использованные ниже в теореме 0.1, в случае когда эти границы состоят из одной компоненты связности. В общем случае, изменится вид условий сопряжения (4), для каждой компоненты связности Γ_0 они будут своими, однако условия на соответствующие матрицы α_i, β_i $(i = 1, 2)$ будут теми же самыми, что и в случае одной компоненты связности Γ_0. Аналогичная ситуация имеет место и в случае нескольких компонент связности множества Γ. Пусть $p \in (1, \infty)$. Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \ a_{ij} \in C(Q^\pm), \ i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad (27)$$

где $q > n+2$ при $p \le n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \le (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$.

Условие (27) означает, что функции a_{ij} могут допускать при переходе через Γ_0 разрывы первого рода. Обозначим через $a_{ij}^\pm$ предельные значения функций $a_{ij}|_{G^\pm}$ на Γ_0. Далее предположим, что

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}),\ s_0 = 1/2 - 1/2p; \tag{28}$$

$$a_{ij}^\pm, \alpha_k, \beta_k \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}), \quad (k = 1, 2,\ i, j = 1, 2 \ldots, n) \tag{29}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Здесь и далее $\varepsilon_0 > 0$ – произвольный параметр.

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm),\ \ \varphi \in W_p^{k_0, 2k_0}(S),\ g^\pm \in W_p^{s_1, 2s_1}(S_0)\ (s_1 = 1 - 1/p). \tag{30}$$

Условия согласования на внешней границе Γ имеют вид: при $p > 3/2$ в случае условия Дирихле и при $p > 3$ в случае условия с косой производной, выполнено равенство

$$\varphi(x, 0) = B(x, 0, \partial_x) u_0|_\Gamma. \tag{31}$$

Пусть $u_0^\pm = u_0|_{G^\pm}$. Условия согласования на Γ_0 записываются в виде: если $p > 3$, то

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} - \alpha_1(x, 0) u_0^+ - \alpha_2(x, 0) u_0^-|_{\Gamma_0} = g^+(x, 0), \tag{32}$$

$$\frac{\partial u_0^-}{\partial N} - \beta_1(x, 0) u_0^+ - \beta_2(x, 0) u_0^-|_{\Gamma_0} = g^-(x, 0), \tag{33}$$

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$Mu^+ = f(x, t),\ (x, t) \in Q^+,\ Bu^+|_S = \varphi,\ \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^+,\ u^+|_{t=0} = 0; \tag{34}$$

$$Mu^- = f(x, t),\ \ (x, t) \in Q^-,\ \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^-,\ u^-|_{t=0} = 0, \tag{35}$$

где исходные данные удовлетворяют условиям согласования (31)-(33).

Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 0.1. *Пусть выполнены условия* (27)-(33), *выполнено условие параболичности* (23) *для оператора* L *и для задач* (34), (35) *выполнены условия Лопатинского* (24). *Тогда существует единственное решение задачи* (1)-(4) *такое, что* $u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$.

В третьем параграфе главы также рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения для параболических систем второго порядка с условиями сопряжения типа неидеального контакта, но в цилиндрической пространственной области $G = \Omega \times (0, l), (\partial\Omega \in C^2)$. Опишем более точно постановку задачи и условия на данные. Введём обозначения: $\Gamma = \partial G$, $Q^0 = (0, T) \times \Omega$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $Q^i = (0, T) \times G^i$, $\Gamma_i = \partial\Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $S_i = (0, T) \times \Gamma_i$, где $i = 1, 2, ..., m$. Запишем условия на коэффициенты. Далее, считаем, что в условиях ниже $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ – некоторый фиксированный параметр (он может быть как угодно малым). Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \; a_{ij} = a_{ji}, \; a_{nj} = a_{jn} = 0, \; a_{ij} \in C(Q^k) \; (i, j = 1, \ldots, n), \tag{36}$$

где $q > n + 2$ при $p \leq n + 2$ и $q = p$ при $p > n + 2$, $r > (n + 2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{Q^k}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^k})$ $(k = 1, \ldots, m)$. Вообще говоря, функции a_{ij} могут допускать при переходе через плоскости $x_n = l_k$ разрывы первого рода. Далее предположим, что

$$\alpha_i^k(x', t), \beta_i^k(x', t) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}) \quad (k = 1, 2; \; i = 1, 2 \ldots, m - 1), \tag{37}$$

$$\sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_i), \tag{38}$$

и $\sigma|_{S_i}$ допускают продолжение до функции класса $C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$,

$$\sigma_0, \sigma_1 \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}), \tag{39}$$

$$u_0(x) \in \cap_{i=1}^m W_p^{2-2/p}(G^i), \quad \varphi \in \cap_{i=1}^m W_p^{k_0, 2k_0}(S_i), \tag{40}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$, если $Ru = u$ и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае.

$$\varphi_0 \in W_p^{k_1, 2k_1}(Q^0), \; \varphi_1 \in W_p^{k_2, 2k_2}(Q^0), \tag{41}$$

где $k_1 = 1 - 1/2p$, если $R_0 u = u$ и $k_1 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и, аналогично, $k_2 = 1 - 1/2p$, если $R_1 u = u$ и $k_2 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае. Пусть также

$$g_i^{\pm} \in W_p^{s_0, 2s_0}(Q^0), \; i = 1, 2, ..., m - 1. \tag{42}$$

Условия согласования при $t = 0$ имеют вид:

$$R(0,x)u_0|_{\partial\Omega} = \varphi(0,x),\ \ R_0(0,x')u_0(x',0) = \varphi_0(0,x'),\ R_1(0,x')u_0(x',l) = \varphi_1(0,x'), \tag{43}$$

где каждое из равенств выполняется при $p > 3/2$, если соответствующий оператор R, R_0 или R_1 задает условие Дирихле, и при $p > 3$ в противном случае; при $p > 3$ считаем, что

$$g_i^+(0,x') = (u_{0x_n} - \alpha_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i-0}, \tag{44}$$

$$g_i^-(0,x') = (u_{0x_n} - \beta_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i+0}. \tag{45}$$

В случае $Ru \neq u$ дополнительно потребуем, чтобы

$$a_{ij}|_{Q^k} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(Q^k)\ (i,j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,m) \tag{46}$$

и $a_{ij}|_{Q^k}$ допускают продолжение до функций класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^k})$.

Приведем несколько условий, гарантирующих параболичность задачи и выполнение условия Лопатинского. Пусть $A_0(t,x,\xi) = a_{nn}\xi_n^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Условие сильной эллиптичности (см. [6, определение 7, §8, Гл.7]): существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$Re\,\langle A_0(t,x,\xi)\eta,\eta\rangle \geq \delta_0|\xi|^2|\eta|^2\ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\eta \in \mathbb{R}^h. \tag{47}$$

Поскольку для удобства мы рассматриваем уравнения с вещественными коэффициентами, мы можем убрать символ Re в этом неравенстве. Условие нормальной сильной эллиптичности: выполнено условие (47) и существует постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(t,x)(\xi_i u + \eta_i v), \xi_j u + \eta_j v\rangle \geq \delta_1|Im\langle\, u,v\rangle|\ \forall(t,x) \in Q, \tag{48}$$

для всех $u,v \in \mathbb{C}^h, \xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ таких что $\langle\xi,\eta\rangle = 0, |\xi| = |\eta| = 1$.

Для функций $\varphi(t,x',x_n)$ положим

$$S_{\alpha,\beta}(\varphi) = \int_\alpha^\beta\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|\varphi(t,x',\tau)|^2 d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt,$$

где $0 \leq \alpha < \beta \leq T$.

Введем дополнительные обозначения:

$$
\begin{aligned}
J_i^+(\varphi, g_i^+) = \quad & S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l_i+\tau) - \alpha_i^1\varphi(t,x',l_i+\tau) - \\
& \alpha_i^2\varphi(t,x',l_i-\tau) - g_i^+(t,x'+\tau n(x'))), \\
J_i^-(\varphi, g_i^-) = \quad & S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l_i-\tau) - \beta_i^1\varphi(t,x',l_i-\tau) - \\
& \beta_i^2\varphi(t,x',l_i+\tau) - g_i^-(t,x'+\tau n(x'))),\ i=1,2,\ldots,m-1, \\
& J_m^-(\varphi,\varphi_1) = J^{0,T}(\varphi,\varphi_1),\ J_0^+(\varphi,\varphi_0) = J_{0,T}(\varphi,\varphi_0), \\
& I_0^+(\varphi,\varphi_0) = S_{0,T}(-\varphi_{x_n}(t,x',\tau) + \sigma_0\varphi(t,x',\tau) - \varphi_0(t,x'+\tau n(x'))), \\
& I_m^-(\varphi,\varphi_1) = S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l-\tau) + \sigma_1\varphi(t,x',l-\tau) - \varphi_1(t,x'+\tau n(x'))).
\end{aligned}
$$

Далее, мы будем предполагать, что:

B) если $R_iu = u$ $(i=0,1)$ и $Ru = u$, то $\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t,x',r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $p > 2$ и $R_iu = u$ $(i=0,1)$ и $Ru \neq u$, то $R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t,x',r_i)$; если $p > 2$, $R_iu \neq u$ $(i=0,1)$ и $Ru = u$, то $R_i\varphi(t,x',r_i) = \varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $p > 2$ и $Ru = u$, то $R_i^+\varphi = g_i^+(t,x')|_{\partial\Omega}$ и $R_i^-\varphi = g_i^-(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $p = 2$, $R_0u = u$ и $Ru \neq u$, или $R_1u = u$ и $Ru \neq u$, то $J_0^+(\varphi,\varphi_0) < \infty$ или $J_m^-(\varphi,\varphi_1) < \infty$, соответственно; если $p = 2$ и $Ru = u$, то предположим, что $J_i^\pm(\varphi, g_i^\pm) < \infty$ $(i = 1,2,\ldots,m-1)$ и если $R_0u \neq u$ или $R_1u \neq u$, то $I_0^+(\varphi,\varphi_0) < \infty$ или соответственно, $I_m^-(\varphi,\varphi_1) < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, \min_i(l_i - l_{i-1}))$, $\delta < \delta_0$.

Теорема 0.2. *Пусть* $p \neq 3/2, p \neq 3$, *выполнены условия* (36)-(46), B) *и условие* (48) *если* $Ru = u$ *и* (48), (46) *если* $Ru \neq u$. *Тогда существует единственное решение задачи* (6)-(10) *такое, что* $u|_{Q^i} \in W_p^{1,2}(Q^i)$.

В четвертом параграфе мы приведем результаты аналогичные параграфу 2 но в эллиптическом случае и мы рассматриваем модельную задачу – случай одного эллиптического уравнения второго порядка.

Рассматривая задачу (11)-(13), мы предполагаем, что оператор L эллиптичен, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in G.$$

Опишем условия на данные, гарантирующие разрешимость (11)-(13). Считаем, что

$$a_i \in L_p(G)\ (i \geq 0),\ a_{ij} \in C(G^\pm)\ (\ i,j = 1,\ldots,n),\ \sigma \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma); \tag{49}$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{G^\pm})$ и

$$a^\pm_{ij}|_{\Gamma_0} \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma_0}),\ a_{ij}|_\Gamma \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma}),\quad i,j=1,\dots,n, \tag{50}$$

где $a^\pm_{ij}(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} a_{ij}(t,x)$, параметр $\varepsilon_0 \in (0,\frac{1}{2})$ произволен (он может быть как угодно мал) и последнее включение в (50) считается выполненным, только если $Bu \neq u$ в (12). Мы считаем, что

$$g^\pm \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0),\ g \in W_p^{2k_0}(S). \tag{51}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле. Пусть

$$f \in L_p(G),\ \beta \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma_0), \tag{52}$$

Теорема 0.3. *Пусть выполнены условия* (49)-(52) *и* $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$. *Тогда найдется параметр* $\lambda_0 > 0$ *такой, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует единственное решение задачи* (11)-(13) *такое, что* $u|_{G^\pm} \in W_p^2(G^\pm)$, *причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^2(G^+)}+\|u\|_{W_p^2(G^-)}+|\lambda|\|u\|_{L_p(G)} \leq C_0(\|f\|_{L_p(G)}+\|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+$$
$$\|g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)}), \tag{53}$$

где постоянная C_0 *не зависит от* λ.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматривается вопросы корректности обратных задач об определения коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения.

В первом параграфе главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых при доказательстве основных результатов данной главы.

Во втором параграфе рассматривается обратная задача (14)-(17) определения коэффициентов теплообмена на границе раздела сред, входящих в условие сопряжения типа неидеального контакта. Мы считаем, что параметр $p > n+2$ зафиксирован.

Пусть $\{b_i\}$ – набор точек из условия (17). Параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(b_i)}\cap S = \emptyset$, $\overline{B_\delta(b_i)}\cap\overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $b_i \neq b_j$, $i,j = 1,2,\dots,r$. Введём обозначения: $Q^\tau = (0,\tau)\times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(x_i)$, $S_0^\tau = (0,\tau)\times\Gamma_0$, $Q^\pm = (0,T)\times G^\pm$, $Q^\pm_\tau = (0,\tau)\times G^\pm$, $S_i^\tau = (0,\tau)\times\Gamma_i$ $(i\le r_0)$, $S^\tau = (0,\tau)\times\Gamma$, $\Gamma_\delta = G_\delta\cap\Gamma_0$. Рассматривая задачу (14)-(17), мы предполагаем, что число компонент связности границ Γ,Γ_0 конечно,

$$\Gamma,\Gamma_0\in C^2,\quad \Gamma_\delta\in C^3. \tag{54}$$

и для любой координатной окрестности U_i точки b_i имеем, что $\overline{U_i}\subset G$ и $\overline{U_i}\cap\Gamma_0 = \{y: |y'|\le\delta, y_n=\gamma(y')\}$, где y – локальная система координат в точке x_i. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Включение (54) означает, что $\Gamma_i\in C^2$ для всех i, аналогично для компонент связности Γ. Для компонент связности множества Γ мы не вводим отдельных обозначений.

Оператор L считается эллиптическим, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\delta_0|\xi|^2>0\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(t,x)\in Q.$$

Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения, где $u^\pm = u|_{G^\pm}$,

$$Mu=f(x,t),\ (x,t)\in Q,\ Bu|_S=g,\ u|_{t=0}=u_0, \tag{55}$$

$$B_i^+u=\frac{\partial u^+}{\partial N}-\beta_i(u^+-u^-)=g_i^+,\ \frac{\partial u^+}{\partial N}=\frac{\partial u^-}{\partial N},\ (t,x)\in S_i,\ i\le r_0. \tag{56}$$

Считаем, что выполнены условия

$$a_i\in L_p(Q)\ (i\ge 0),\ a_{ij}\in C(Q^\pm)\ (\ i,j=1,\dots,n),\ \sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}); \tag{57}$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$ и

$$a_{ij}^\pm|_{\Gamma_0}\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}),\ a_{ij}|_\Gamma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}),\quad i,j=1,\dots,n, \tag{58}$$

где $\varepsilon_0\in(0,\frac12)$ и последнее включение выполнено, если $Bu\ne u$ в (15);

$$a_i\in L_\infty(0,T;W_p^1(G_\delta^\pm))\ (i\ge 0),\ a_{ij}\in L_\infty(0,T;W_\infty^1(G_\delta^\pm))\ (i,j=1,2,\dots,n). \tag{59}$$

Построим функции $\varphi_i(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x)=1$ в $B_{\delta/2}(x_i)$ и $\varphi_i(x)=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_{3\delta/4}(x_i)$, положим $\varphi(x)=\sum_{i=1}^r\varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы $z_n=y_n-\gamma(y')$, $z'=y'$, где y – локальная система координат в точке x_i. При выполнении условия (54) преобразование

$x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z : |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U' : z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$. Положим $Q_0^\tau = (0,\tau) \times U'$, $Q_0 = (0,T) \times U'$ $Q_0^\pm(\tau) = (0,\tau) \times U^\pm$ и $S_{01}^\tau = (0,\tau) \times B'_\delta$, $S_{01} = (0,T) \times B'_\delta$.

Мы считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm),\ g_i^+ \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ g(0,x) = B(0,x,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ g \in W_p^{k_0,2k_0}(S). \tag{60}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 1,\ldots,r_0$. Положим $u_0^\pm = u_0|_{G^\pm}$. Предположим, что

$$f \in L_p(Q). \tag{61}$$

Пусть U_i – координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma_0$, выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Тогда мы также предполагаем, что для каждого $i = 1,2,\ldots,r$, $j = 1,\ldots,r_0$,

$$\begin{gathered}\nabla_{z'}\varphi_i f(t,x^i(z)) \in L_p(Q_0),\ \nabla_{z'}\varphi_i u_0^\pm(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U^\pm)\ (i \le r),\\ \nabla_{z'}\varphi_k g_j^+(t,x^k(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})\ (k \in N_j = \{k : b_k \in \Gamma_j\}),\\ \nabla_{z'}a_{kl}^\pm(x^i(z',0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(S_{01}),\quad (k,l = 1,2\ldots,n,\ \varepsilon_0 > 0).\end{gathered} \tag{62}$$

Отметим, что условие (62) не зависит от введённой локальной системы координат y и системы координат z.

Приведем условия на данные. Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t,x)$ при всех допустимых i,j обладают свойствами

$$\Phi_{ij} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ \Phi_{ij} \in L_p(0,T; W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i)) \cap W_p^1(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i; W_p^{1/2-1/2p}(0,T)). \tag{63}$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k = \Phi_{kj}(t,b_i)$ $(j = 1,2,\ldots,m_k,\ i \in N_k = \{i : \ b_i \in \Gamma_k\})$. Считаем, что число номеров во множестве N_k равно m_k и таким образом матрица Φ_k квадратная. В силу теорем вложения $\Phi_{kj}(t,b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(b_i) \ne u_0^-(b_i)\ ,\psi_i \in W_p^{s_1}(0,T)\ (i \le r)$$
$$|det\,\Phi_k| \ge \delta_1 > 0,\ \forall t \in [0,T], \forall k = 1,\ldots,r_0. \tag{64}$$

$$u_0^+(b_i)=\varphi_i(0)\ (i=1,2,\dots,r_1),\quad u_0^-(b_i)=\varphi_i(0)\ \ (i=r_1+1,\dots,r), \tag{65}$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все условия, гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (16) в точке $(0,b_j)$. Имеем

$$B_k^+u_0=\frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N}-\beta_k(0,b_j)(u_0^+(b_j)-u_0^-(b_j))=g_k^+(0,b_j), \tag{66}$$

где $\beta_k(0,x_j)=\sum_{i=1}^{m_k}\alpha_{ki}(0)\Phi_{ki}(0,b_j)$. Положим $\alpha_{ki}(0)=\alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k=\vec{F}_k,\quad F_{kj}=(\frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N}-g^+(0,b_j))/(u_0^+(b_j)-u_0^-(b_j)),\ j\in N_k,$$
$$\vec{\alpha}_k=(\alpha_1^k,\dots,\alpha_{m_k}^k),\quad \vec{F}_k=(F_{k1},\dots,F_{km_k}),$$

которая в силу (64) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Обозначим $\beta_{0k}=\sum_{i=1}^{m_k}\alpha_i^k\Phi_{ki}(t,x)$, $\alpha_k=\beta_k-\beta_{0k}$. Условия согласования на Γ_0 имеют вид

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N}=\beta_{0i}(0,x)(u_0^+-u_0^-)+g_i^+(0,x),\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N}=\frac{\partial u_0^-}{\partial N},\ (t,x)\in\Gamma_i. \tag{67}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 0.4. *Пусть выполнены условия* (54), (57)–(65), (67). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (14)-(17) *такое, что* $u|_{Q^\pm_{\tau_0}}\in W_p^{1,2}(Q^\pm_{\tau_0})$, $\alpha_{ij}(t)\in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(i=1,2,\dots,r_0,\ j=1,2,\dots,m_i)$, *причем* $\nabla_{z'}\varphi_i u^\pm(x^i(z))\in W_p^{1,2}((0,\tau)\times U^\pm)$, $i=1,\dots,r$ $\ (u^\pm=u|_{Q^\pm})$.

В третьем параграфе рассматривается обратная задача определения коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения типа неидеального контакта в случае цилиндрической области G.

Введем обозначения: $S_{\alpha,\beta}=(\alpha,\beta)\times\Gamma$, $Q_\phi=(0,\phi)\times G$, $Q_{\alpha,\beta}=(\alpha,\beta)\times G$, $Q^0=(0,T)\times\Omega$, $Q^0_\phi=(0,\phi)\times\Omega$, $S_0^\phi=(0,\phi)\times\Gamma^0$, $G_\delta=\cup_{i,j}B_\delta(x_{ij})$, $G^i=\Omega\times(l_{i-1},l_i)$, $Q^i=(0,T)\times G^i$, $Q^i_\phi=(0,\phi)\times G^i$, $Q^\pm=(0,T)\times G^\pm$, $Q^\pm_\tau=(0,\tau)\times G^\pm$, $\Gamma_i=\partial\Omega\times(l_{i-1},l_i)$, $S_i^\phi=(0,\phi)\times\Gamma_i$, $S_i=(0,T)\times\Gamma_i$, где $i=1,2,...,m$, $\Gamma^i=\{x:\ x'\in\Omega,x_n=l_i\}$, $S^i=(0,T)\times\Gamma^i$.

Оператор L считается эллиптическим, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\delta_0|\xi|^2\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(t,x)\in Q.$$

Мы предполагаем, что

$$a_i \in L_p(Q),\ p > n+2,\ i = 0,\dots,n, \tag{68}$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q^k}),\ a_{ij} = a_{ji},\ a_{nj} = a_{jn} = 0,\ i,j = 1,\dots,n, k = 1,2,\dots,m, \tag{69}$$

$$a_{ij}|_{S_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}),\ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}),\ i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m, \tag{70}$$

$$\sigma_j \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0})\ (j = 0,1), \tag{71}$$

где $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал) и включения $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$ означают, что $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(S_i)$ и эти функции допускают непрерывное продолжение на $\overline{S_i}$ класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$. При переходе через плоскости $x_n = l_i$ оно вообще говоря имеют разрывы первого рода.

Фиксируем достаточно малый параметр δ. Дополнительно предположим, что

$$a_i \in L_\infty(0,T;W_p^1(G_\delta^\pm))\ (i = 0,1,\dots,n),\ a_{ij} \in L_\infty(0,T;W_\infty^1(G_\delta^\pm))\ i,j = 1,2,\dots,n. \tag{72}$$

Построим функции $\varphi_{ij}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_{ij}(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(x_{ij})$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(x_{ij})$, положим $\psi(x) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}(x)$ $(i = 1,2,\dots,N_j,\ j = 1,2,\dots,m-1)$. Считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm),\ g_i^\pm \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0), \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\varphi(0,x) = R(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ &\varphi_0(0,x') = R_0u_0(x',0),\\ \varphi_1(0,x') = R_1u_0(x',l), \varphi_i \in W_p^{k_i,2k_i}&(Q_0)\ (i = 0,1),\ \varphi \in W_p^{k_2,2k_2}(S_i).\end{aligned} \tag{74}$$

где $k_i = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_i = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 0,1,2$. Пусть также

$$f \in L_p(Q),\ a_{nn}(t,x',l_i \pm 0) \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}),\ i = 1,\dots,m-1, \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{x'}\varphi f(t,x) \in L_p(Q),\ \nabla_{x'}\psi u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm),\ \nabla_{x'}\psi g_i^+(t,x') \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0),\\ \nabla_{x'}a_{nn}(t,x',l_i \pm 0) \in W_p^{s_0,2s_0}((0,T) \times (B_\delta(x_{ji}) \cap \Gamma^i)),\end{aligned} \tag{76}$$

где $i=1,2\ldots,m-1,\ j=1,\ldots,N_i$. Нам понадобятся дополнительные условия согласования

А) если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}=\varphi(t,x',r_i)$ $(r_0=0,r_1=l)$; если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru\neq u$, то $R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}=\varphi(t,x',r_i)$; если $R_iu\neq u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $R_i\varphi(t,x',r_i)=\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $Ru=u$, то $B_i^+\varphi=g_i^+(t,x')|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial\varphi_i^+}{\partial N}=\frac{\partial\varphi_i^-}{\partial N},\ i=1,\ldots,m-1,$, где $\frac{\partial\varphi_i^\pm}{\partial N}=a_{nn}\varphi_{x_n}(t,x',l_i\pm 0)$.

Пусть $B'_\delta(x'_{ij})=\{x':|x'-x'_{ij}|<\delta\}$, $U_{i=1}^{N_j}B'_\delta(x'_{ij})=\Omega_{\delta j}$. Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t,x')$ при всех допустимых i,j обладают свойствами

$$\Phi_{ij}\in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)\cap H_T^{2,1/2}(\Omega_{\delta j}),$$
$$H_\tau^{2,1/2}(\Omega_{\delta j})=L_p(0,\tau;W_p^{2-1/p}(\Omega_{\delta j}))\cap W_p^1(\Omega_{\delta j};W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau)).\quad (77)$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k=\Phi_{jk}(t,x'_{ik})$ $(i,j=1,2,\ldots,N_k)$. В силу теорем вложения $\Phi_{jk}(t,x'_{ik})\in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(x_{ij})\neq u_0^-(x_{ij}),\ \varphi_{ij}\in W_p^{s_1}(0,T)\ (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=1,2,\ldots,N_j),$$
$$|det\,\Phi_k|\geq\delta_1>0\ \forall t\in[0,T],\forall k=1,\ldots,m-1.\quad (78)$$

$$u_0^+(x_{ij})=\varphi_{ij}(0)\ (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=1,2,\ldots,M_j),$$
$$u_0^-(x_{ij})=\varphi_{ij}(0)\ \ (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=M_j+1,\ldots,N_j),\quad (79)$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все данные гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (20) в точке $(0,x_{ij})$. Имеем

$$B_k^+u_0=\frac{\partial u_{0j}^+(x'_{ij})}{\partial N}-\beta_k(0,x'_{ij})(u_{0j}^+(x'_{ij})-u_{0j}^-(x'_{ij}))=g_j^+(0,x'_{ij}),\quad (80)$$

где $\frac{\partial u_{0j}^\pm(x'_{ij})}{\partial N}=\frac{\partial u_0(x)}{\partial N}(x'_{ij},l_j\pm 0)$. $u_{0j}^\pm(x'_{ij})=u_0(x'_{ij},l_j\pm 0)$, $\beta_k(0,x'_{jk})=\sum_{i=1}^{N_k}\alpha_{ik}(0)\Phi_{ik}(0,x'_{jk})$. Положим $\alpha_{ik}(0)=\alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k=\vec{F}_k,\quad F_{kj}=(\frac{\partial u_{0j}^+(x'_{jk})}{\partial N}-g_j^+(0,x'_{jk}))/(u_{0j}^+(x'_{jk})-u_{0j}^-(x'_{jk})),$$
$$j=1,2,\ldots,N_i;\ k=1,2,\ldots,m-1,$$

$$\vec{\alpha}_k=(\alpha_1^k,\ldots,\alpha_{m_k}^k),\quad \vec{F}_k=(F_{k1},\ldots,F_{km_k}),$$

которая в силу условия (78) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Положим $\beta_{0k} = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^k \Phi_{ik}(t,x)$, $\alpha_k = \beta_k - \beta_{0k}$. Условия согласования на Γ_0 имеют вид

$$\frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \beta_{0j}(0,x')(u_{0j}^+ - u_{0j}^-) + g_j^+(0,x'),\ \frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \frac{\partial u_{0j}^-}{\partial N},\ (t,x) \in \Gamma^j. \qquad (81)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 0.5. *Пусть выполнены условия* A), (68)–(79), (81) . *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (14), (18)-(21) *такое, что* $u|_{Q^\pm_{\tau_0}} \in W_p^{1,2}(Q^\pm_{\tau_0})$, $\alpha_{ij}(t) \in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(i = 1,2,\dots,m-1,\ j = 1,2,\dots,N_i)$, *причем* $\nabla_{x'}\psi u(t,x) \in W_p^{1,2}(Q^\pm_{\tau_0})$.

В четвертом параграфе мы приводим результаты аналогичные параграфу 2 но в эллиптическом случае.

Параметр $p > n$ зафиксирован. Введём обозначения: $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta = G_\delta \cap \Gamma_0$, где δ допустимый параметр такой, что $\delta < \delta_{G^-}$, и для любой координатной окрестности $U_i = \{y :\ |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma(y') < \delta_1\}$ точки b_i имеем, что $\overline{U_i} \subset G$. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Как и ранее, $\Gamma = \partial G$, $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$. Рассматривая задачу (11)-(13), (22) мы предполагаем, что

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2, \quad \Gamma_\delta \in C^3,$$

Оператор L считается эллиптическим. Считаем, что

$$a_i \in L_p(G)\ (i \geq 0),\ a_{ij} \in C(G^\pm)\ (\ i,j = 1,\dots,n),\ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma); \qquad (82)$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{G^\pm})$ и

$$a_{ij}^\pm|_{\Gamma_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma_0}),\ a_{ij}|_\Gamma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma}),\ \ i,j = 1,\dots,n, \qquad (83)$$

где $a_{ij}^\pm(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} a_{ij}(t,x)$, параметр $\varepsilon_0 \in (0,\frac{1}{2})$ произволен (он может быть как угодно мал) и последнее включение в (83) считается выполненным, только если $Bu \neq u$ в (12);

$$a_i \in W_p^1(G_\delta^\pm))\ (i \geq 0),\ a_{ij} \in W_\infty^1(G_\delta^\pm))\ (i,j = 1,2,\dots,n), \qquad (84)$$

где $G_\delta^\pm = G_\delta \cap G^\pm$. Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где y – локальная система координат в точке b_i. При выполнении условия (5) преобразование $x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z : |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U' : z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$.

Мы считаем, что

$$g^{\pm} \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0),\ g \in W_p^{2k_0}(\Gamma). \tag{85}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле. Предположим также, что

$$f \in L_p(G),\ \Phi_j \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0) \cap W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta). \tag{86}$$

Пусть Φ - матрица с элементами $\phi_{ij} = \Phi_j(b_i)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$. В силу теорем вложения $\Phi_j(x) \in C^{\alpha_0}(\overline{\Gamma_0})$ с $\alpha_0 = 1 - n/p$ (см. теоремы вложения в [25]).

В координатной окрестности U_i точки $b_i \in \Gamma_0$, выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Мы также предполагаем, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$

$$\begin{gathered}\nabla_{z'}\varphi_i f(x^i(z)) \in L_p(U'),\ \nabla_{z'}\varphi_i u_0^{\pm}(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U^{\pm})\ (i \le r),\\ \nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \in W_p^{2s_0}(B'_\delta),\\ \nabla_{z'} a_{kl}^{\pm}(x^i(z',0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(B'_\delta),\quad (k, l = 1, 2 \ldots, n,\ \varepsilon_0 > 0).\end{gathered} \tag{87}$$

Считая, что условия (82)-(87) выполнены, построим решение задачи сопряжения (11)-(13), где возьмем $\beta = 0$, $g^- = 0$. Обозначим полученное решение через w_0. Функция $v = u - w_0$ есть решение задачи

$$Lv = 0,\ (x \in G),\quad Bv|_\Gamma = 0, \tag{88}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta(v^+ - v^-) = \beta(w_0^+ - w_0^-),\quad \frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N}\ (x \in \Gamma_0), \tag{89}$$

$$\begin{gathered}v^+(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^+(b_i)\ (i = 1, 2, \ldots, r_1),\\ v^-(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^-(b_i)\ (i = r_1 + 1, \ldots, r).\end{gathered} \tag{90}$$

Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\tilde{\psi}_i \ne 0\ (i \le r),\quad |det\, \Phi| > 0. \tag{91}$$

Введем множество данных

$$S_R = \{(g, f, \psi_1, \dots, \psi_r, g^+) : \ \|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi g^+(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + \sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi_i f(x^i(z)\|_{L_p(U')} + \sum_{j=1}^{r} |\psi_j| \le R\}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 0.6. *Пусть выполнены условия* (82)-(87), (91) *и* $(g, f, \psi_1, \dots, \psi_r, g^+) \in S_R$. *Тогда найдется параметр* $\lambda_0 > 0$*, зависящий от числа* R*, такой, что такой что при* $\lambda \ge \lambda_0$ *существует решение* $(u, \beta_1, \dots, \beta_r)$ *задачи* (11)-(13), (22) *такое, что* $u|_{G^\pm} \in W_p^2(G^\pm)$, $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^2(U^+) \cap W_p^2(U^-)$, $i = 1, \dots, r$ *и решения с данными из множества* S_R *определяются единственным образом.*

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертационной работы, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических систем уравнений.
2. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для эллиптических уравнений второго порядка.
3. Исследованы вопросы существования и единственности решений обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений.

Научная новизна исследования состоит в том, что

1. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для параболических систем уравнений в классах Соболева.
2. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с

условиями сопряжения типа неидеального контакта для эллиптического уравнения второго порядка в классах Соболева.

3. Доказана корректность в классах конечной гладкости обратной задачи определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости.
4. Доказана корректность в пространствах Соболева стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получена теоремы существования и единственности решений задачи.

Научная и практическая значимость работы определяется тем, что теоретические результаты работы развивают теорию задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических и эллиптических уравнений и систем, а также теорию обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений и систем, указываются новые подходы к их решению, результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей, описываемых параболическими и эллиптическими уравнениями и системами, в частности моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, моделей, описывающих процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряда других. Предложенные подходы конструктивны и могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

Степень достоверности результатов проведённых исследований

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в работе, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЮГУ, а также на 10 научных и научно-практических конференциях и семинарах:

1. Российско-французский семинар «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Ханты-Мансийск, 25–29 августа 2019 года).
2. 8-ая международная научная конференция «Информационные технологии и системы» (Ханты-Мансийск, 17-21 марта 2020 года).
3. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики» (Якутск, 12–17 июля 2021 года).
4. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск, 16-21 декабря 2021 года).
5. Всероссийский научный семинар «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 5 - 10 июля 2022 года).
6. XXIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 24–28 октября 2022 года).
7. Научная конференция «Современные проблемы обратных задач» (Новосибирск, 19 - 23 декабря 2022 года).
8. Всероссийский научный семинар «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 18 марта 2023 года).
9. Семинар «Краевые задачи механики сплошных сред» (Новосибирск, 4 апреля 2023 года).
10. Семинар «Избранные вопросы математического анализа» (Новосибирск, 10 апреля 2023 года).

Личный вклад.

Научные результаты, составляющие основное содержание работы, получены автором самостоятельно. В совместных работах в ВКР включены результаты, принадлежащие лично автору.

Публикации. Основные результаты по теме диссертационной работы изложены в девяти печатных изданиях [103–111], четыре из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [104, 105, 108, 109], четыре — в тезисах докладов [103, 106, 107, 111].

Благодарности. Приношу свою искреннюю благодарность своему научному руководителю Пяткову Сергею Григорьевичу за постановку задачи, посто-

янную поддержку и внимание к работе, чуткое руководство, ценные советы и консультации.

ГЛАВА 1

Задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта

В этой главе мы рассматриваем вопросы существования регулярных решений задач сопряжения с условиями типа не идеального контакта. Будут рассмотрены три постановки. В первом случае мы рассматриваем систему уравнений вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1.1}$$

где u - вектор длины h, $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$-матрицы-функции, $h \in \mathbb{N}$. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$. Уравнение (1.1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = \varphi \ \ (S = \Gamma \times (0,T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{1.2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x,t)u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ матрицы, и условиями сопряжения:

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x,t) - \alpha_1(x,t)u^+(x,t) - \alpha_2(x,t)u^-(x,t) = g^+(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(x,t) - \beta_1(x,t)u^+(x,t) - \beta_2(x,t)u^-(x,t) = g^-(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{1.4}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0,t) = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j$, $u^\pm = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} u(x,t)$, и ν - внешняя единичная нормаль к ∂G^-. Далее, иногда используем обозначение $u^\pm = u|_{G^\pm}$ и записываем функцию u в виде вектора $u = (u^+, u^-)$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям (1.2)-(1.4). Условия сопряжения (1.3), (1.4) обобщают известные в теории тепломассопереноса условия на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. постановки в [7]):

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_0}, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = \alpha(u^+ - u^-). \tag{1.5}$$

Если $\alpha \to \infty$, мы получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [6, §16, гл. 3]), когда условия имеют вид $u^+ = u^-$, $\frac{\partial u^+}{\partial N}|_{S_0} = \frac{\partial u^-}{\partial N}|_{S_0}$.

Во втором случае постановка задачи аналогична, но условие $\overline{G^-} \subset G$ не выполнено. В этом случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0, l)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1})$, причем $G^+ = \cup_i G^{2i}$, $G^- = \cup_i G^{2i-1}$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0 < l_1 < \ldots, < l_m = l$. Этот частный случай очень часто возникает в приложениях.

В качестве приложений полученных результатов для параболических уравнений и систем мы также рассмотрим одну модельную задачу сопряжения в эллиптическом случае, где условия на области $G^\pm$ такие же как и в первом случае, однако постановка задачи более простая. Мы рассматриваем эллиптическое уравнение с параметром и ищем решение уравнения

$$-Lu = f(x),\ Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a_0(x) u - \lambda u, \tag{1.6}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего краевым условиям

$$Bu|_\Gamma = g, \tag{1.7}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x) u$ и условиям сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) - \beta(u^+ - u^-)(x_0) = g^+(x_0),\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(x_0), \quad x_0 \in \Gamma_0, \tag{1.8}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0) = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \nu_j$, $u^\pm = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} u(x)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно.

1.1 Необходимые определения. Вспомогательные результаты.

Пусть G - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Введём обозначения: $S_\phi = (0,\phi) \times \Gamma$, $S_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times \Gamma$, $Q_\phi = (0,\phi) \times G$, $Q_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times G$, $S^0_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times \Gamma_0$, $S^0_\phi = (0,\phi) \times \Gamma_0$, $Q^\pm_{\alpha,\beta} = (\alpha,\beta) \times G^\pm$, $Q^\pm = (0,T) \times G^\pm$, $Q^\pm_\phi = (0,\phi) \times G^\pm$.

Мы будем использовать в пространстве $W_p^s(\alpha,\beta;E)$ ($s \in (0,1)$, E - банахово пространство) норму $\|q(t)\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)} = (\|q\|^p_{L_p(\alpha,\beta;E)} + < q >^p_s)^{1/p}$, $< q >^p_s = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{\|q(t_1)-q(t_2)\|^p_E}{|t_1-t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2$. Если $E = \mathbb{R}$, то мы получим обычное пространство $W_p^s(\alpha,\beta)$. При $s \in (0,1)$ положим $\tilde{W}_p^s(\alpha,\beta;E) = \{q \in W_p^s(\alpha,\beta;E) : \ (t-\alpha)^{-s} q(t) \in L_p(\alpha,\beta;E)\}$. Это банахово пространство с нормой $\|q(t)\|^p_{\tilde{W}_p^s(\alpha,\beta;E)} =$

$\|\frac{q}{(t-\alpha)^s}\|^p_{L_p(\alpha,\beta;E)} + < q >^p_s$. Если $s > 1/p$, то все функции q из этого пространства обладают тем свойством, что $q(\alpha) = 0$ и при $s \neq 1/p$ эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W^s_p(\alpha,\beta;E)}$ эквивалентны для функций $q(t)$ таких, что $q(\alpha) = 0$ если $s > 1/p$. Эквивалентность вытекает, например, из леммы 1 пункта 3.2.6 [1]. Тогда пространства $\tilde{W}^s_p(\alpha,\beta;L_p(G))$, $\tilde{W}^{s,2s}_p(Q_{\alpha,\beta}) = \tilde{W}^s_p(\alpha,\beta;L_p(G)) \cap L_p(\alpha,\beta;W^{2s}_p(G))$, при $s \neq 1/p$ состоят из функций $v(t,x)$ из $W^s_p(\alpha,\beta;L_p(G))$ и $W^{s,2s}_p(Q_{\alpha,\beta})$, соответственно, таких, что $v(\alpha,x) = 0$, если $s > 1/p$. Нормы $\|\cdot\|_{\tilde{W}^{s,2s}_p(Q_{\alpha,\beta})}$, $\|\cdot\|_{\tilde{W}^s_p(\alpha,\beta;L_p(G))}$ определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в $\tilde{W}^s_p(\alpha,\beta;E)$. Имеем

$$\|u\|^p_{\tilde{W}^{s,2s}_p(Q_{\alpha,\beta})} = \Big(\int_G\int_\alpha^\beta \frac{|u(x,t)|^p}{(t-\alpha)^{sp}}\,dtdx + \int_G\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}\,dtd\tau dx + \|u\|^p_{L_p(\alpha,\beta;W^{2s}_p(G))}\Big)^{1/p}. \quad (1.9)$$

Аналогично определяем пространства $\tilde{W}^s_p(\alpha,\beta;L_p(\Gamma))$, $\tilde{W}^{s,2s}_p(S_{\alpha,\beta})$. Следующая лемма по существу известна (см., например, [112]), где была получена правая часть нижеприведенного неравенства при $s \in (1/p;1)$.

Лемма 1.1. *Найдутся постоянные C_1 и C_2, не зависящие от $\phi \in (0,T]$, такие что*

$$C_1\|v\|_{\tilde{W}^{s,2s}_p(S_\phi)} \leq \|v\|_{W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})} \leq C_2\|v\|_{\tilde{W}^{s,2s}_p(S_\phi)} \quad (1.10)$$

для всех $v \in W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})$ таких, что $v = 0$ при $t < 0$.

Доказательство. Пусть $v \in W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})$, $v = 0$ при $t < 0$. Рассмотрим выражение, которое входит в норму $\|v\|^p_{W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})}$:

$$J = \int_{-1}^\phi |v(x,t)|^p dt + \int_{-1}^\phi\int_{-1}^\phi \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}dtd\tau = \int_0^\phi |v(x,t)|^p dt + \int_{-1}^0\int_0^\phi \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}dtd\tau + \int_0^\phi\int_{-1}^0 \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}dtd\tau + \int_0^\phi\int_0^\phi \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}dtd\tau \quad (1.11)$$

Обозначим второе и третье слагаемые через J_2 и J_3. Имеем

$$J_2 = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\phi} \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}\, dtd\tau = \int_0^{\phi} |v(x,t)|^p \int_{-1}^{0} \frac{1}{|t-\tau|^{1+sp}}\, d\tau dt. \quad (1.12)$$

Внутренний интеграл равен $\int_{-1}^{0} \frac{1}{|t-\tau|^{1+sp}} d\tau = \frac{|t-\tau|^{-sp}}{sp}|_{-1}^{0} = \frac{t^{-sp}}{sp} - \frac{|1+t|^{-sp}}{sp} = \varphi(t)$. Отметим, что $\varphi(t) \le \frac{1}{t^{sp}sp}$ и $\varphi(t) = \frac{t^{-sp}}{sp}(1 - \frac{t^{sp}}{(1+t)^{sp}}) \ge \frac{1}{t^{sp}}(1 - (\frac{T}{1+T})^{sp})$. Таким образом,

$$\delta_0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x,\tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau \le J_2 \le \int_0^{\phi} \frac{|v(x,\tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau \frac{1}{sp}, \quad (1.13)$$

где $\delta_0 = \frac{1}{sp}(1 - (\frac{T}{1+T})^{sp}) > 0$. Аналогично, можно показать, что и интеграл J_3 удовлетворяет неравенству (1.13). Используя определение норм, получаем, что

$$J \ge 2\delta_0 \int_0^{\phi} \frac{|v(x,\tau)|^p}{\tau^{sp}} d\tau + \int_0^{\phi}\int_0^{\phi} \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}} dtd\tau \ge$$

$$\ge min(1, 2\delta_0)||v||^p_{\tilde{W}^s_p(0,\phi)}. \quad (1.14)$$

Из вышеприведенных оценок получаем, что

$$J \le max(1, T^{sp} + \frac{2}{sp})||v||^p_{\tilde{W}^s_p(0,\phi)}. \quad (1.15)$$

Из оценок (1.13) - (1.15) и определения нормы в пространствах $W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})$ и $\tilde{W}^{s,2s}_p(S_\phi)$ вытекает неравенство (1.10), где постоянные C_1, C_2 равны постоянным из оценок (1.14), (1.15), возведенным в степень $1/p$. $\square$

Пусть G - цилиндрическая область $G = \Omega \times (0,l)$. Введем дополнительные обозначения: $Q^0 = (0,T)\times\Omega$, $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0,l)$, $S^0 = (0,T)\times\Gamma^0$, $Q^0_\phi = (0,\phi)\times\Omega$, $S^\phi_0 = (0,\phi)\times\Gamma^0$, $G^i = \Omega\times(l_{i-1}, l_i)$, $Q^i = (0,T)\times G^i$, $Q^i_\phi = (0,\phi)\times G^i$, $\Gamma_i = \partial\Omega\times(l_{i-1}, l_i)$, $S^\phi_i = (0,\phi)\times\Gamma_i$, $S_i = (0,T)\times\Gamma_i$, где $i = 1, 2, ..., m$. В этом случае нам понадобится аналог леммы 1.1. В этой лемме мы считаем, что: $S_\phi = S^\phi_0$ и $S_{-1,\phi} = (-1,\phi)\times\Gamma^0$ или $S_\phi = Q^0_\phi$ и $S_{-1,\phi} = (-1,\phi)\times\Omega$.

Лемма 1.2. *Найдутся постоянные C_1 и C_2, не зависящие от $\phi \in (0,T]$, такие что*

$$C_1\|v\|_{\tilde{W}^{s,2s}_p(S_\phi)} \le \|v\|_{W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})} \le C_2\|v\|_{\tilde{W}^{s,2s}_p(S_\phi)}, \ s \in (0,1),$$

для всех $v \in W^{s,2s}_p(S_{-1,\phi})$ таких, что $v = 0$ при $t < 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.

Следующая лемма справедлива как в случае области G с гладкой границей так и в случае цилиндрической области G. В последнем случае под нормой $\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_i,2s_i}(S_\phi)}$ $(i=0,1)$ понимаем сумму норм $\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_i,2s_i}(S_0^\phi)}+\|v(t,x',0)\|_{\tilde{W}_p^{s_i,2s_i}(Q_\phi^0)}+\|v(t,x',l)\|_{\tilde{W}_p^{s_i,2s_i}(Q_\phi^0)}$.

Лемма 1.3. *Существует постоянная C, не зависящая от $\phi\in(0,T]$ такая, что*

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\phi)}\le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)},\ s_1=1-1/2p,$$
$$\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi)}\le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)},\ s_0=1/2-1/2p,\quad(1.16)$$

для всех $v\in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(x,0)=0$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial\nu}$ – производная по внешней нормали к Γ.

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство в (1.16). Пусть $v\in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ и $v(x,0)=0$. Тем же символом обозначаем продолжение функции v нулём при $t<0$. Имеем, что

$$\|v\|^p_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}=\|v\|^p_{W_p^{1,2}(Q_{-1,\phi})}=\int_G\int_{-1}^{\phi}|v_t|^p+\sum_{|\alpha|\le2}|D^\alpha v|^p\,dxdt\ge$$
$$\int_G\int_0^1|\tilde{v}_\tau|^p\frac{1}{(1+\phi)^p}+\sum_{|\alpha|\le2}|D^\alpha\tilde{v}|^p\,dxd\tau\cdot(1+\phi),\quad(1.17)$$

где $\tau=\frac{t+1}{1+\phi}$ и $\tilde{v}(\tau,x)=v(\tau(1+\phi)-1,x)$. Последний интеграл оценивается снизу через (используем теорему о следах, см., например, теорему 7.3 в [113])

$$\ge\frac{1}{(1+T)^{p-1}}\|\tilde{v}\|^p_{W_p^{1,2}(Q_1)}\ge C_0\|\tilde{v}\|^p_{W_p^{s_1,2s_1}(S_1)}=$$
$$=C_0\Big(\int_\Gamma\Big(\int_0^1|\tilde{v}(x,\xi)|^pd\xi+\int_0^1\int_0^1\frac{|\tilde{v}(x,\xi)-\tilde{v}(x,\eta)|^p}{|\xi-\eta|^{1+s_1p}}d\xi d\eta\Big)\,d\Gamma+$$
$$\|\tilde{v}\|^p_{L_p(0,1;W_p^{2s_1}(\Gamma))}\Big).\quad(1.18)$$

Сделаем замену: $\xi = \frac{t+1}{1+\phi}, \eta = \frac{\tau+1}{1+\phi}$. Тогда для первого слагаемого в (1.18) имеем оценку

$$\int_\Gamma \Big(\int_{-1}^{\phi} \frac{|v|^p}{1+\phi} dt + \int_{-1}^{\phi}\int_{-1}^{\phi} \frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_1 p}} \, dt d\tau \cdot (1+\phi)^{s_1 p - 1} \Big) \, d\Gamma \geq$$

$$\geq \frac{1}{1+\phi} \|v\|^p_{L_p(\Gamma; W_p^{s_1}(-1,\phi))} \geq \frac{1}{1+T} \|v\|^p_{L_p(\Gamma; W_p^{s_1}(-1,\phi))}. \quad (1.19)$$

Аналогично

$$\|\tilde{v}\|^p_{L_p(0,1; W_p^{2s_1}(\Gamma))} \geq \frac{1}{1+T} \|v\|^p_{L_p(-1,\phi; W_p^{2s_1}(\Gamma))}. \quad (1.20)$$

Из неравенств (1.19), (1.20) и леммы 1.1 вытекает, что $\|v\|^p_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \geq \frac{C_0 C_1^p}{1+T} \|v\|^p_{\tilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\phi)}$. Доказательство второго неравенства в (1.16) ничем не отличается и мы его опустим. $\square$

Запишем аналог леммы 1.3 в стационарном случае:

Лемма 1.4. *Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2. Существует постоянная C такая, что*

$$\|v\|_{W_p^{2s_1}(\Gamma)} + \|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma)} \leq C \|v\|_{W_p^2(G)}, \ \ s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \quad s_1 = 1 - \frac{1}{2p}, \quad (1.21)$$

для всех $v \in W_p^2(G)$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ – производная по внешней нормали к Γ.

Следующая лемма имеет место как в случае области G с гладкой границей так и в случае цилиндрической области G.

Лемма 1.5. *Пусть $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau)$ и $u(0,x) = 0$. Если $b \in L_q(Q_\tau)$ с $q > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $q = p$ при $p > (n+2)/2$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\|bu\|_{L_p(Q_\tau)} \leq c\tau^{\beta_1} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)},$$

где $\beta_1 = 1 - \frac{n+2}{2q}$ при $q > (n+2)/2$ и $\beta_1 < 1 - \frac{n+2}{2p}$ при $q = p > (n+2)/2$. Если $b \in L_r(Q_\tau)$ с $r > n+2$ при $p \leq n+2$ и $r = p$ при $p > n+2$, то

$$\|b\nabla u\|_{L_p(Q_\tau)} \leq c\tau^{\beta_2} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)},$$

где $\beta_2 = 1/2 - \frac{(n+2)}{2p}$ при $r > n+2$ и $\beta_2 < 1/2 - \frac{(n+2)}{2p}$ при $r = p > n+2$. Постоянная $c > 0$ не зависит $\tau \leq T$ и $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau)$.

Доказательство этой леммы основано на применении неравенства Гельдера, с последующим использованием неравенств из леммы 3.3 гл. 2 в [6], где надо взять $\delta = \sqrt{\tau}$ и использовать оценку $\|u\|_{L_p(Q_\tau)} \leq c\tau \|u_t\|_{L_p(Q_\tau)}$. Отметим, что неравенства такого типа и более общие доказываются и используются в главе 5 работы [114], кроме того фактически эта лемма получена в доказательстве теоремы 9.1 гл.4 в [6].

В следующей лемме G ограниченная область с гладкой границей или G – цилиндрическая область описанная выше.

Лемма 1.6. *Пусть $s \in ((n+2)/2p, 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения. Произведение $q \cdot v$ функций класса $W_p^{s,2s}(Q_\tau)$ ($\tau \in (0,T]$) снова принадлежит $W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, а если $q \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то $qv \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_0 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} (\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}).$$

Если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_1 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

а если $v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то в виде

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_2 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

где постоянные c_i, $i = 0,1,2$, не зависит от q, v и $\tau \in (0,T]$. Если функция $v(t)$ строго отделена от нуля в Q_τ, т.е. $\delta_0 = \inf_{(t,x)\in Q^\tau} |v(t,x)| > 0$, то отношение q/v функций класса класса $W_p^{s,2s}(Q_\tau)$ ($\tau \in (0,T]$) снова принадлежит $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, а если $q \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то $q/v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и

$$\|q/v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(0,\tau)} \leq c_0 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} (\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}),$$

$$\|q/v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_0 \|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

где постоянная c_0 не зависит от функции q и τ. Множество Q_τ в этих утверждениях может быть заменено на S_τ или на S_i^τ. В этом случае нам необходимо потребовать включения $s \in ((n+1)/2p, 1)$. В случае если q зависит только одной переменной t, норма q в $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ в этих неравенствах заменяется на норму q в $\tilde{W}_p^{s}(0,\tau)$. Если обе функции не зависят от переменной x, *то утверждение остается справедливым, но нормы* $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *или* $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *в неравенствах заменяются на нормы* $\tilde{W}_p^s(0,\tau)$ *или* $W_p^s(0,\tau)$, *соответственно.*

Доказательство. Доказательство основано на определении нормы и фактически оно содержится в доказательстве леммы 1 в [18]. Поэтому мы приведем только основную часть доказательства. Отметим, что в силу результатов §6.3 (см. также теорему 1 в разделе замечания) в [115] имеет место включение $W_p^{s,2s}(Q_\tau) \subset C^{s-(n+2)/2p}(\overline{Q_\tau}) \subset C(\overline{Q_\tau})$ $(\tau \in (0,T])$. Имеем

$$\|qv\|^p_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} = \|qvt^{-s}\|^p_{L_p(Q_\tau)} + < qv >^p_s + \|qv\|^p_{L_p(0,\tau;W_p^{2s}(G))},$$
$$< qv >^p_s = \int_G \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|qv(t_1,x) - qv(t_2,x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx. \quad (1.22)$$

Имеем

$$|qv(t_1,x) - qv(t_2,x)| \le |q(t_1,x) - q(t_2,x)||v(t_1,x)| + |q(t_2,x)||v(t_1,x) - v(t_2,x)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}< qv >^p_s \le c(p) \int_G \int_0^\tau \int_0^\tau |v(t_1)|^p \frac{|q(t_1,x) - q(t_2,x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx + \\ c(p) \int_G \int_0^\tau \int_0^\tau |q(t_2,x)|^p \frac{|v(t_1,x) - v(t_2,x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx \le \\ c_1 \|v\|^p_{L_\infty(Q_\tau)} \int_G \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|q(t_1,x) - q(t_2,x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx + \\ c_2 \|q\|^p_{L_\infty(Q_\tau)} \int_G \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|v(t_1,x) - v(t_2,x)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx. \quad (1.23)\end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает оценка

$$< qv >^p_s \le c(< q >^p_s + \|q\|^p_{L_\infty(Q_\tau)})(< v >^p_s + \|v\|^p_{L_\infty(Q_\tau)}). \quad (1.24)$$

Отметим, что в силу вложения $W_p^{s,2s}(Q) \subset C(\overline{Q})$ и определения нормы

$$< v >_s + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \le c\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)}, \quad (1.25)$$

причем постоянная c не зависит от τ. Неравенство очевидно в силу вложения $W_p^{s,2s}(Q) \subset C(\overline{Q})$ (см. §6.3 и теорему 1 в разделе замечания в [115]). Кроме того, имеет место неравенство (если $v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$)

$$< v >_s + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \le c\|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}, \quad (1.26)$$

Здесь независимость постоянной c от τ устанавливается следующим образом. Достаточно оценить второе слагаемое в левой части равенства. Рассмотрим функцию $w = v(\xi\tau, x)$, которая определена уже в области $\xi \in (0,1), x \in G$. Используя вложение $W_p^{s,2s}(Q_1) \subset C(\overline{Q_1})$, получим оценку

$$\|v\|_{L_\infty(Q_1)} \leq c\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_1)}, \tag{1.27}$$

где постоянная c очевидным образом не зависит от τ. Перейдя от переменной ξ в интегралах в правой части (1.27) к переменой $t = \xi\tau$, легко можно убедиться в том, что возникающая в правой части неравенства новая постоянная ограничена постоянной не зависящей от параметра $\tau \in (0,1]$. Суммируя, можем сказать из (1.24)-(1.26), что справедливы неравенства

$$< qv >_s^p \leq c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}(\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}), \tag{1.28}$$

причем если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то

$$< qv >_s^p \leq c_1\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)}, \tag{1.29}$$

а если $v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то

$$< qv >_s^p \leq c_2\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}. \tag{1.30}$$

где постоянные c_i, $i = 0,1,2$, не зависит от q, v и $\tau \in (0,T]$. Оценим первое слагаемое в (1.22). Имеем оценку

$$\|qvt^{-s}\|_{L_p(Q_\tau)}^p \leq \|qt^{-s}\|_{L_p(Q_\tau)}\|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}^p. \tag{1.31}$$

Оценим третье слагаемое в правой части (1.22). Пусть, например, $2s < 1$. В случае $2s \geq 1$ рассуждения аналогичны в соответствии с определениями. Нам достаточно оценить интеграл

$$I = \int_0^\tau \int_G \int_G \frac{|qv(t,x_1) - q(t,x_2)|^p}{|x_1 - x_2|^{n+2sp}}\, dx_1 dx_2 dt. \tag{1.32}$$

Как и ранее при выводе (1.197) имеем оценку

$$I \leq c(\|q\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s}(G))}^p + \|q\|_{L_\infty(Q_\tau)}^p)(\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s}(G))}^p + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}^p). \tag{1.33}$$

Из полученных оценок (1.27)-(1.31), (1.33) вытекает три первых неравенств в утверждении леммы. Оставшиеся неравенства вытекают из полученных оценок.

Рассмотрим задачу

$$M_0 u = u_t - L_0 u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1.34}$$

где $L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x,t) u_{x_i} + a_0(x,t) u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$-матрицы-функции,

$$Ru|_S = \varphi, \quad u(x,0) = u_0(x) \ (x \in G), \tag{1.35}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x,t) u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ матрицы.

Фиксируем $p \in (1, \infty)$. Мы предполагаем, что

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \ a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \ i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.36}$$

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}) \ (\varepsilon_0 > 0); \tag{1.37}$$

где $q > n+2$ при $p \leq n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$.

Лемма 1.7. *Пусть G – ограниченная область с границей Γ класса C^2. Рассмотрим дифференциальное выражение вида $Rv = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_{x_i} + \sigma v$, где γ_i, σ удовлетворяют условиям* (1.37) *и оператор M_0, коэффициенты которого удовлетворяют условиям* (1.36). *Тогда существуют постоянные C_0, C_1, не зависящие от $\phi \in (0,T]$ такие, что*

$$\|Rv\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi)} \leq C_0 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \ s_0 = 1/2 - 1/2p, \tag{1.38}$$

$$\|M_0 v\|_{L_p(Q_\phi)} \leq C_1 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \tag{1.39}$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(x,0) = 0$.

Доказательство леммы основано на теоремах о следах и теоремах вложения (см., например, теорему 7.3 в [113] или теорему 5.1 в [114]) и теоремах о точечных мультипликаторах см., например, [116, теорема 3.3.2, с.198]). Используя лемму 1.1 и продолжение коэффициентов с сохранением класса в область $t < 0$, мы сводим задачу к задаче об оценке выражения $\|Rv\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{-1,\phi})}$ через норму $\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_{-1,\phi})}$. Последняя оценка (и даже более общие оценки) получена, например, в доказательстве теоремы 5.4 в [114]. Неравенство (1.39), где постоянная C_1 будет зависеть от норм коэффициентов уравнения в соответствующих классах и не зависит от ϕ, было получено, например, в доказательстве теоремы 2.1 в [4], или в доказательстве теоремы 9.1 гл.4 в [6]. К сожалению, мы не нашли работ, где оценки леммы 1.7 были бы сформулированы как отдельное утверждение.

Опишем условия на данные.

Мы также предполагаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad \varphi \in W_p^{k_0,2k_0}(S), \tag{1.40}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и выполнены условия согласования: в случае условий Дирихле $u_0(x)|_\Gamma = g(x,0)$ при $p > 3/2$, в случае условий с косой производной $R(x,0)u_0(x)|_\Gamma = g(x,0)$ при $p > 3$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.36), (1.37), (1.40) *, и условия* (23), (24) *в применении к задаче* (1.34), (1.35), $f \in L_p(Q)$ $(p \neq 3/2, 3)$. *Тогда существует единственное решение* $u \in W_p^{1,2}(Q)$ *задачи* (1.34), (1.35). *Справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c\big[\|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)}\big]. \tag{1.41}$$

Доказательство. Утверждение теоремы в случае ограниченных младших коэффициентов вытекает из [6, теорема 10.4]. Однако, как известно (это отмечается и в [6]), их можно ослабить (см., например, условия на младшие коэффициенты в [4, с.198]). □

Как следствие теоремы 1.1, мы имеем следующее утверждение

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.36), (1.37), (1.40), *и условия* (23), (24) *в применении к задаче* (1.34), (1.35), $f \in L_p(Q)$ $(p \neq 3/2, 3)$, $u_0 \equiv 0$ *и* $\phi \in (0, T]$. *Тогда на промежутке* $(0, \phi)$ *существует единственное решение* u *задачи* (1.34), (1.35) *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$. *Решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \le c(\|\varphi\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_\phi)} + \|f\|_{L_p(Q_\phi)}),$$

где постоянная c *не зависит от* $\phi \in (0, T]$ *и* f, φ.

Доказательство. Достаточно доказать, что постоянная c не зависит от ϕ. Продолжим φ нулем при $t < 0$ и пусть $\tilde\varphi = \begin{cases} \varphi(t,x), \ t \in (-\infty, \phi) \\ \varphi(2\phi - t, x), \ t \in [\phi, T] \end{cases}$. Очевидно, что $\tilde{\varphi} \in W_p^{k_0,2k_0}(S)$. Построим функцию $\tilde{f} = f$ при $t \le \phi$ и $\tilde{f} = 0$ при $t > \phi$. Используя теорему 1.1, построим решение задачи (1.34)-(1.35) с функциями $\tilde{\varphi}$, $\tilde{f}$ вместо φ и f такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. По теореме 1.1:

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \le \|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|\tilde{f}\|_{L_p(Q)}).$$

Оценим правую часть. Имеет место следующее неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s,2s}(S)} \le \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s,2s}(S_{-1,\beta})} \le \\ c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s,2s}(S_{-1,\phi})} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s,2s}(S_{\phi,\beta})}), \quad \beta = \max(1+2\phi, T).$$

Мы здесь использовали аддитивность пространств Соболева относительно разбиения области (см. замечание 3 пункта 4.4.1 в [1]) и определение соответствующей нормы. Первое слагаемое в правой части в силу леммы 1.1 оценивается через $c_2\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S_\phi)}$. После замены переменных в определении нормы мы сведем оценку второго слагаемого также к лемме 1.1 и получим

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{s,2s}(S_{\phi,\beta})} \le c_3\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(S_\phi)},$$

где c_3 – постоянная не зависящая от ϕ. Кроме того имеем, что $\|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} = \|f\|_{L_p(Q_\phi)}$. Отсюда и вытекает утверждение. $\square$

Замечание 1.1. *Ясно, что если граница области состоит из нескольких компонент связности, то вообще говоря, граничные условия на них могут отличаться. Утверждение теорем 1.1, 1.2 останутся в силе. Однако, следует иметь ввиду, что показатель k_0, равно как и условия согласования будут меняться в зависимости от соответствующей компоненты связности* Г. *Например, в работе [2, §4] это в явном виде принимается во внимание. В нашем случае мы также будем иметь дело с несколькими компонентами связности границы. В случаях $p = 3/2$, $p = 3$ утверждения теорем 1.1, 1.2 также справедливы, однако, условия согласования в этом случае записываются в довольно сложном виде.*

Нам понадобятся также формулировки теорем 1.2, 1.2 с немного измененными условиями на данные. Точнее мы заменим условие (1.37) на условие

$$\gamma_i, \sigma \in W_p^{s_0,2s_0}(S_0), \ p > n+2. \tag{1.42}$$

Теорема 1.3. *Пусть* $p > n+2$, $Ru \neq u$ *и выполнены условия теоремы* 1.1 *или теоремы* 1.2 *где условие* (1.37) *заменено на условие* (1.42). *Тогда справедливо утверждение теоремы* 1.1 *или теоремы* 1.2, *соответственно.*

Утверждение вытекает из теоремы 2.1 в [4].

Далее, мы сформулируем аналог теоремы 1.2 в случае цилиндрической пространственной области. Утверждение имеет почти тот же самый вид, но в этом случае возникают дополнительные условия согласования данных и дополнительные условия на коэффициенты. По существу, мы предполагаем, что оператор имеет некоторый специальный вид. Основы теории параболических и эллиптических задач в областях с ребрами и угловыми точками были заложены в работах Кондратьева В.А. и других авторов (см. результаты и библиографию в [117]). Однако, несмотря на огромное количество работ по этой тематике, мы не нашли подходящей ссылки, а условия согласования на данные по всей видимости являются новыми и совпадают с условиями, взятыми из теорем продолжения данных с границы области (см. теорему 7.3 в [113]). Мы рассматриваем задачу

$$Mu = u_t - Lu = f, \quad Lu = a_{nn}u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_i u_{x_i} - a_0 u, \tag{1.43}$$

где $x \in G = \Omega \times (0, l) \subset \mathbb{R}^n$, Ω — ограниченная область с границей класса C^2, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$-матрицы-функции, причем $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ при $(t, x) \in Q = (0, T) \times G$ и всех i, j,

$$Ru|_{S^0} = \varphi, R_i u(x', r_i, t) = \varphi_i(x', t),\ i = 0, 1, r_0 = 0, r_1 = l,\ u(x, 0) = u_0(x), \tag{1.44}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x,t)\nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma(x,t)u$; $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n}$, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n}$. Фиксируем $p \in (1, \infty)$ и предположим, что

$$a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.45}$$

$$\sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S^0}),\ a_{ij} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S^0}), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.46}$$

где $q > n+2$ при $p \leq n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал).

Лемма 1.8. *Предположим, что выполнены условия* (1.45), (1.46) *и* $\sigma_0 \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q_\phi^0})$ $(\varepsilon_0 > 0)$. *Тогда существуют постоянные* C_0, C_1, C_2, *не зависящие от* $\phi \in (0,T]$ *такие, что*

$$\|\sigma_0 v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} \leq C_0 \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)}, \ s_0 = 1/2 - 1/2p,$$

для всех $v \in \tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)$,

$$\|Rv\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\varphi)} \leq C_1 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \ \|L_0 v\|_{L_p(Q_\phi)} \leq C_2 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \tag{1.47}$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ *таких, что* $v(x,0) = 0$.

Доказательство первого неравенства основано на определении нормы, теоремах о точечных мультипликаторах (см., например, [116, теорема 3.3.2, с.198]). При получении второго неравенства используем те же теоремы и лемму 1.5.

Последняя оценка (1.47) (и даже более общие оценки) получена, например, в доказательстве теоремы 5.4 в [114]. Она также вытекает из леммы 1.5.

Приведем несколько условий, гарантирующих параболичность задачи и выполнение условия Лопатинского. Пусть $A_0(t,x,\xi) = a_{nn}\xi_n^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Условие сильной эллиптичности (см. [6, определение 7, §8, Гл.7]): существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$Re\,\langle A_0(t,x,\xi)\eta, \eta\rangle \geq \delta_0 |\xi|^2 |\eta|^2 \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \eta \in \mathbb{R}^h. \tag{1.48}$$

Условие нормальной сильной эллиптичности: выполнено условие (1.48) и существует постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что

$$Re \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(t,x)(\xi_i u + \eta_i v), \xi_j u + \eta_j v\rangle \geq \delta_1 |Im\langle\ u, v\rangle| \ \forall (t,x) \in Q, \tag{1.49}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^h, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких что $\langle \xi, \eta\rangle = 0, |\xi| = |\eta| = 1$.

Условие Лежандра: существует постоянная $\delta_3 > 0$ такая, что

$$Re \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,r=1}^{h} a_{ij}^{k,r}(t,x)\xi_i^k, \overline{\xi}_j^r \geq \delta_3 \sum_{i,k} |\xi_i^k|^2, \ \ \forall (t,x) \in Q \tag{1.50}$$

и всех симметричных матриц с элементами $\{\xi_i^k\}$. Здесь $a_{ij}^{k,r}$ – элементы матрицы a_{ij}.

Сильное условие Лежандра: существует постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(t,x)\xi_i,\xi_j\rangle \geq \delta_2\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2,\ \ \forall\xi_i\in\mathbb{C}^h,\ \forall(t,x)\in Q. \tag{1.51}$$

Лемма 1.9. *Справедливы следующие импликации:* (1.51) $\Rightarrow$ (1.50)$\Rightarrow$ (1.49) $\Rightarrow$ (1.48). *Условие параболичности и условие Лопатинского на* S^0 *в случае наших краевых условий вытекают из* (1.49)

Все утверждения леммы могут быть найдены в пункте 2.5 §6.2 гл. 6 в [17]) (см. также пункт 4.3 работы [2]). В этом пункте при выполнении условия (1.49) показано, что система

$$\big(\lambda E + A_0(x_0,t_0,\xi'+i\nu(x_0)\partial_{y_n})\big)v(z)=0,\ \ B_0(x_0,t_0,\xi'+i\nu\partial_{y_n})v(0)=h_j,$$

где $\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, $y_n\in\mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C\big(\overline{\mathbb{R}}^+\big)$ убывающее на бесконечности при всех $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda|\leq\pi/2$, и $h_j\in\mathbb{C}$ таких, что $|\xi'|+|\lambda|\neq 0$.

Далее, мы предполагаем, что

$$u_0(x)\in W_p^{2-2/p}(G),\ \ \varphi\in W_p^{2k_0,k_0}(S^0),$$
$$\varphi_0\in W_p^{2k_1,k_1}(Q^0),\ \varphi_1\in W_p^{2k_2,k_2}(Q^0), \tag{1.52}$$

где $k_i=s_1$ в случае условия Дирихле на Γ_0 (или на $\Omega_0=\{(t,x',0):(t,x')\in Q^0\}$, или на $\Omega_m=\{(t,x',l):(t,x')\in Q^0\}$, соответственно) и $k_i=s_0$ в противном случае.

Нам необходимы условия согласования, гарантирующие существование функции $\Phi\in W_p^{1,2}(Q)$ удовлетворяющей условиям (1.44). Случаи $p=3/2$, $p=3$ являются критическими, если мы рассматриваем условия согласования в точке $t=0$. Однако, как мы увидим, наиболее естественный случай $p=2$ также является критическим и в этом случае необходимы дополнительные интегральные условия согласования. Пусть $\Phi\in W_2^{1,2}(Q)$ удовлетворяет условиям (1.44) и, например, $R_0u=u$ и $Ru\neq u$. В силу теоремы 7.3 в [113], если $p>2$ и $\Phi\in W_p^{1,2}(Q)$, то должно быть выполнено условие $R\varphi_0|_{\partial\Omega}=\varphi(t,x',0)$; если же $p=2$, то это условие заменяется на интегральное условие согласования. В этом случае $R\Phi|_{S^0}\in L_2(0,T;W_2^{1/2}(\Gamma_0))$, $R_0\Phi(t,x',0)\in L_2(0,T;W_2^{3/2}(\Omega))$. Приведем полный набор условий согласования. Для функций $\varphi(t,x',x_n)$ положим

$$S_{\alpha,\beta}(\varphi)=\int_\alpha^\beta\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|\varphi(t,x',\tau)|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt,$$

где $0\le\alpha<\beta\le T$. Пусть $n(x')=(n_1,\dots,n_{n-1})$ – единичная внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в соответствующей точке x'. Считаем, что $\delta\in(0,\delta_0)$, где $\delta_0\in(0,l)$ – некоторая постоянная такая, что $x'+\tau n(x')\in\Omega$ для всех $x'\in\partial\Omega$ и $\tau\le\delta_0$. Далее считаем параметр δ_0 фиксированным. Положим $J_{\alpha,\beta}(\varphi,\varphi_0)=S_{\alpha,\beta}(\varphi(t,x',\tau)-R(t,x',0)\varphi_0(t,x'+\tau n(x')))$, $J^{\alpha,\beta}(\varphi,\varphi_1)=S_{\alpha,\beta}(\varphi(t,x',l-\tau)-R(t,x',l)\varphi_1(t,x'+\tau n(x')))$, $I_{\alpha,\beta}(\varphi,\varphi_0)=S_{\alpha,\beta}(\varphi_\tau(t,x',\tau)+\varphi_0(t,x'+\tau n(x')))$, $I^{\alpha,\beta}(\varphi,\varphi_1)=S_{\alpha,\beta}(\varphi_\tau(t,x',l-\tau)-\varphi_1(t,x'+\tau n(x'))$. Здесь символ $R(t,x',0)$ ($R(t,x',l)$) обозначает оператор R, все коэффициенты которого взяты в точке $x_n=0$ ($x_n=l$).

Условия согласования.

А) если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $\varphi_i(x',t)|_{\partial\Omega}=\varphi(x',r_i,t)$; если $p>2$ и $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru\ne u$, то $R(x',r_i,t)\varphi_i(x',t)|_{\partial\Omega}=\varphi(x',r_i,t)$; если $p>2$, $R_iu=(-1)^{i+1}u_{x_n}$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $(-1)^{i+1}\varphi_{x_n}(x',r_i,t)=\varphi_i(x',t)|_{\partial\Omega}$; если $R_iu=u$ $(i=0,1)$, то $u_0(x',r_i)|_\Omega=\varphi_i(x',0)$ при $p>3/2$; если $R_iu=(-1)^{i+1}u_{x_n}$ $(i=0,1)$, то $(-1)^{i+1}u_{0x_n}(x',r_i)|_\Omega=\varphi_i(x',0)$ при $p>3$; если $Ru=u$, то $u_0(x)|_{\Gamma_0}=\varphi(0,x)$ при $p>3/2$; если $Ru\ne u$, то $R(0,x)u_0(x)|_{\Gamma_0}=\varphi(0,x)$ при $p>3$; если $p=2$ и если $Ru\ne u$ и $R_0u=u$ или $Ru\ne u$ и $R_1u=u$, то существует $\delta\in(0,\delta_0)$ такое, что $J_{0,T}(\varphi,\varphi_0)<\infty$ или, соответственно, $J^{0,T}(\varphi,\varphi_1)<\infty$; если $p=2$ и $R_0u\ne u$ и $Ru=u$ или $R_1u\ne u$ и $Ru=u$, то существует $\delta\in(0,\delta_0)$ такое, что $I_{0,T}(\varphi,\varphi_0)<\infty$ или, соответственно, $I^{0,T}(\varphi,\varphi_1)<\infty$. Все условия согласования за исключением интегральных вытекают из стандартных теорем о следах (см. лемму 3.4 и теорему 2.3 гл. 1 в [6] и лемму 2). Отметим, что для данных, удовлетворяющих условиям (1.52) выполнение интегрального условия согласования хотя бы для одного $\delta\in(0,\delta_0)$ влечет его выполнение для всех таких δ.

Лемма 1.10. *Предположим, что выполнены условия* (1.45), (1.52) *и* (1.46) *в случае $Ru\ne u$ и существует функция $\Phi\in W_2^{1,2}(Q)$, удовлетворяющая условиям* (1.44). *Тогда, если $Ru\ne u$ и $R_0u=u$ или $Ru\ne u$ и $R_1u=u$, то существует $\delta\in(0,\delta_0)$ такое, что $J_{0,T}(\varphi,\varphi_0)<\infty$ или, соответственно,*

$J^{0,T}(\varphi,\varphi_1)<\infty$;
если $R_0u\neq u$ и $Ru=u$ или $R_1u\neq u$ и $Ru=u$, то существует $\delta\in(0,\delta_0)$ такое, что $I_{0,T}(\varphi,\varphi_0)<\infty$ или, соответственно, $I^{0,T}(\varphi,\varphi_1)<\infty$.

Доказательство. Сначала отметим, что вторая половина утверждения есть непосредственное следствие теоремы 7.3 в [113]. Кроме того, его доказательство вполне аналогично приведенному ниже для первой половины утверждения. Поэтому мы его опустим. Покажем первую половину утверждения. Рассмотрим, например, выражение

$$S_{0,T}(\varphi(t,x',\tau)-R(t,x',0)\varphi_0(t,x'+\tau n(x')))=$$
$$\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',\tau)\Phi(t,x',\tau)-R(t,x',0)\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt\leq \tag{1.53}$$
$$2\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',0)\Phi(t,x',\tau)-R(t,x',0)\Phi(t,x'+\tau n(x'),0))|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt+$$
$$2\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|(R(t,x',\tau)-R(t,x',0))\Phi(t,x',\tau)|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt\leq$$
$$\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}c_1(\sum_{i=1}^{n-1}|\Phi_{x_i}(t,x',\tau)-\Phi_{x_i}(t,x'+\tau n(x'),0)|^2+|\Phi(t,x',\tau)-$$
$$\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2)+c_2\tau^{2\varepsilon_0}(\sum_{i=1}^{n-1}|\Phi_{x_i}(t,x',\tau)|^2+|\Phi(t,x',\tau)|^2)d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt$$

(используем условие, что все коэффициенты оператора R удовлетворяют условию Гельдера по переменной x с показателем $2\varepsilon_0$). Используя неравенство Харди по переменной τ для оценки последнего слагаемого (можно воспользоваться леммой 1 пункта 3.2.6 в [1]) получим, что

$$\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}\tau^{2\varepsilon_0}(\sum_{i=1}^{n-1}|\Phi_{x_i}(t,x',\tau)|^2+|\Phi(t,x',\tau)|^2)d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt\leq$$
$$c_3\|\Phi\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(G))}. \tag{1.54}$$

Оценим первое слагаемое под знаком интеграла. Имеем

$$\Phi_{x_i}(t,x',\tau)-\Phi_{x_i}(t,x'+\tau n(x'),0)=\int_0^\tau \partial_\xi\Phi_{x_i}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)\,d\xi=$$
$$\int_0^\tau -\sum_{j=1}^{n-1} n_j\Phi_{x_ix_j}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)+\Phi_{x_ix_n}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)\,d\xi.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|\Phi_{x_i}(t,x',\tau)-\Phi_{x_i}(t,x'+\tau n(x'),0)|^2\le$$
$$\tau c\int_0^\tau \sum_{j=1}^{n}|\Phi_{x_ix_j}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)|^2\,d\xi.$$

Аналогично имеем

$$|\Phi(t,x',\tau)-\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2\le\tau c\int_0^\tau \sum\nolimits_{j=1}^{n}|\Phi_{x_j}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)|^2\,d\xi.$$

Из последних двух неравенств получим

$$(\sum_{i=1}^{n-1}|\Phi_{x_i}(t,x',\tau)-\Phi_{x_i}(t,x'+\tau n(x'),0)|^2+|\Phi(t,x',\tau)-$$
$$\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2)\le c\tau\int_0^\tau\sum_{j=1}^{n}|\Phi_{x_j}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)|^2+$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}|\Phi_{x_ix_j}(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)|^2\,d\xi. \quad (1.55)$$

Обозначим подынтегральное выражение через $J(t,x'+(\tau-\xi)n(x'),\xi)$. Рассмотрим произвольную точку $x'_0\in\partial\Omega$. Найдется ее окрестность U_0 и система координат y полученная из исходной с помощью поворота и переноса начала координат, такая, что $U_0\cap\Omega=\{y:\ \omega(y'')<y_{n-1}<\omega(y'')+\delta,\ |y''|\le r_0\}$, $U_0\cap\partial\Omega=\{y:\ y_{n-1}=\omega(y''),\ |y''|\le r_0\}$ ($\delta,r_0>0,\ y''=(y_1,y_2,\dots,y_{n-2})$), причем без ограничения общности можем считать, что ось y_{n-1} направлена по нормали к $\partial\Omega$ в точке x'_0. В этом случае имеем, что в системе координат y нормаль к $\partial\Omega$ имеет координаты $n_{y'}=\frac{1}{1+|\nabla\omega|^2}(-\omega_{y_1},\dots,-\omega_{y_{n-2}},1)$ и $n(x'(y'))=x'_0+An_{y'}$, где A – ортогональная матрица. Поскольку $\partial\Omega$ можно накрыть конечным числом множеств вида $U_0\cap\Omega$, чтобы оценить интеграл (1.53), в силу (1.54) достаточно получить оценку для интегралов вида (используем неравенство (1.55) и параметризацию $x' = x_0' + Ay'$, $y' = (y'', \omega(y''))$ поверхности $U_0 \cap \partial\Omega$)

$$\int_0^T \int_0^\delta \int_{U_0\cap\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} |\Phi_{x_i}(t,x',\tau) - \Phi_{x_i}(t,x'+\tau n(x'),0)|^2 + |\Phi(t,x',\tau) -$$

$$\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2) d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt = \int_0^T \int_0^\delta \int_{|y''|<r_0} (\sum_{i=1}^{n-1} |\Phi_{x_i}(t,x'(y'),\tau) -$$

$$\Phi_{x_i}(t,x'(y') + \tau n(x'(y')),0)|^2 + |\Phi(t,x'(y'),\tau) - \Phi(t,x'(y') +$$

$$\tau n(x'(y')),0)|^2) \sqrt{1 + |\nabla_{y''}\omega(y'')|^2} dy'' \frac{d\tau}{\tau} dt \leq$$

$$c_1 \int_0^T \int_0^\delta \int_{|y''|<r_0} \int_0^\tau J(t, x'(y') + (\tau-\eta) n(x'(y')), \eta) dy'' d\eta d\tau dt =$$

$$c_1 \int_0^T \int_0^\delta \int_{|y''|<r_0} \int_\eta^\delta J(t, x'(y') + (\tau-\eta) n(x'(y')), \eta) dy'' d\tau d\eta dt. \quad (1.56)$$

Сделаем в первых двух внутренних интегралах замену переменных $(y'', \tau) \to z' = x'(y') + (\tau - \eta)n(x'(y')) = x_0' + A\tilde{y'}$, $\tilde{y'} = y' + (\tau - \eta)n_{y'}$. Образ области $\{y'' : |y''| < r_0\} \times (0, \delta)$ при этом отображении $z' = z'(y'', \tau)$ будет содержаться в $\Omega_\delta = \{x' \in \Omega : \ \rho(x', \partial\Omega \cap U_0) < \delta\}$ ($\rho(x, M)$ – расстояние от x до множества M) при каждом $\eta \in (0, \delta)$. Кроме того, якобиан преобразования $\frac{\partial(z_1,\ldots,z_{n-1})}{\partial(y'',\tau)} = \pm\frac{\partial(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{n-1})}{\partial(y'',\tau)}$ строго отделен от нуля и отображение взаимно однозначно, если параметр δ достаточно мал (это легко увидеть). Без ограничения общности мы можем считать, что это условие выполнено. Тогда правая часть в (1.56) оценивается сверху через

$$c_2 \int_0^T \int_0^\delta \int_{\Omega_\delta} J(t, z', \eta) dz' d\eta dt \leq c_3 \|\Phi\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega\times(0,\delta)))}.$$

Из этой оценки и оценки (1.54) вытекает неравенство

$$S_{0,T}(\varphi(t,x',\tau) - R(t,x',0)\varphi_0(t,x'+\tau n(x'))) \leq c_4 \|\Phi\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega\times(0,\delta)))} < \infty,$$

если параметр δ достаточно мал, где постоянная c_4 не зависит от функций φ, φ_0, Φ. Совершенно те же рассуждения проводятся и в случае оценки интеграла $J^{0,T}(\varphi, \varphi_1)$. $\square$

Лемма 1.11. *Пусть выполнено* (1.45), (1.52), *условие* A) *и* (1.46) *в случае* $Ru \neq u$. *Тогда найдется функция* $\Phi \in W_p^{2,1}(Q)$, *удовлетворяющая начальному условию и второму и третьему граничному условию в* (1.44) *и такая, что в случае* $p = 2$: *если* $R_0u = u$ *и* $Ru \neq u$, *или* $R_1u = u$ *и* $Ru \neq u$ *то для некоторого* $\delta \in (0, \delta_0)$ *соответственно*

$$J_{0,T}(\varphi - R\Phi, 0) < \infty, \quad J^{0,T}(\varphi - R\Phi, 0) < \infty; \tag{1.57}$$

если $R_0u = -u_{x_n}$ *и* $Ru = u$, *или* $R_1u = u_{x_n}$ *и* $Ru = u$, *то для некоторого* $\delta \in (0, \delta_0)$ *соответственно*

$$I_{0,T}(\varphi - \Phi, 0) < \infty, \quad \text{или} \quad I^{0,T}(\varphi - \Phi, 0) < \infty. \tag{1.58}$$

Доказательство. Вначале построим функцию $v_0 \in W_p^{2,1}(Q)$ такую, что $v_0(x, 0) = u_0(x)$. Достаточно, продолжить функция u_0 с сохранением класса в $\mathbb{R}^n$ как функцию с компактным носителем (существование такого продолжения вытекает из теоремы 4.2.3 в [1]) и затем воспользоваться теоремой 5.5 в [114], взяв в качестве v_0 решение задачи Коши $v_{0t} - \Delta v_0 = 0$, $v_0(x, 0) = u_0(x)$. В силу лемм 1.3, 1.5, включения (1.52) сохраняются для новых функций $\varphi^1 = \varphi - Rv_0|_{S^0}$, $\varphi_0^1 = \varphi_0 - R_0v_0|_{\Omega_0^T}$, $\varphi_1^1 = \varphi_1 - R_1v_0|_{\Omega_m^T}$. Далее, легко построить функцию $v^0 \in W_p^{2,1}(Q)$ такую, что $R_iv^0(x', r_i, t) = \varphi_i^1(x', t)$ $(i = 0, 1)$, $v^0(x, 0) = 0$. Построение может быть осуществлено следующим образом. Построим продолжение функций $\varphi_i^1(x', t)$ в некоторую область Ω^0 такую, что $\overline{\Omega} \subset \Omega^0$ с сохранением класса. Продолжение обозначаем теми же символами. Поскольку $\partial\Omega \in C^2$, мы можем, например, воспользоваться методом Хестенса (см., например, лемму 2.9.1 в [1], где этот метод описан в случае полупространства, в общем случае используется разбиение единицы и локальное выпрямление границы (см. пункт 4.2.2 в [1])). Построим функцию $\psi_0(x') \in C_0^\infty(\Omega^0)$ такую, что $\psi_0 = 1$ для $x' \in \Omega$ и область G_0 такую, что $\partial G_0 \in C^2$, $\{(x', 0) : x' \in \Omega^0\} \cup \{(x', l) : x' \in \Omega^0\} \subset \partial G_0$, $G \subset G_0$. Определим также функцию $\psi_1(x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\psi_1(x_n) = 1$ на $(0, l/3)$, $\psi_1(x_n) = 0$ при $x_n > l/2$. Пусть, например, $R_0u = u$ и $R_1u = u_{x_n}$. Определим функции: $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0^1\psi_0$ при $x' \in \Omega^0$, $x_n = 0$ и $\tilde{\varphi}_0 = 0$ при $x \in \partial G_0 \setminus \{(x', 0) : x' \in \Omega^0\}$ и $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1^1\psi_0$ при $x' \in \Omega^0$, $x_n = l$ и $\tilde{\varphi}_1 = 0$ при $x \in \partial G_0 \setminus \{(x', l) : x' \in \Omega^0\}$. Первая из полученных функций $\tilde{\varphi}_0$ принадлежит $W_p^{2k_1,k_1}(\partial G_0 \times (0, T))$ $(k_1 = 1 - 1/2p)$, а вторая $\tilde{\varphi}_1$ классу $W_p^{2k_2,k_2}(\partial G_0 \times (0, T))$

$(k_2 = 1/2 - 1/2p)$. Следовательно, существуют функции $v_i \in W_p^{2,1}(G_0 \times (0,T))$ такие, что $v_1|_{\partial G_0\times(0,T)} = \tilde{\varphi}_0$, $\frac{\partial}{\partial n} v_2|_{\partial G_0\times(0,T)} = \tilde{\varphi}_1$, где n – единичная внешняя нормаль к ∂G_0, и $v_i(x,0) = 0$. В качестве таких функций можно взять решения параболических задач: $v_{it} - \Delta v_i = 0$, $v_i(x,0) = 0$, $v_1|_{\partial G_0\times(0,T)} = \tilde{\varphi}_0$ и, соответственно, $\frac{\partial}{\partial n} v_2|_{\partial G_0\times(0,T)} = \tilde{\varphi}_1$ (см. теорему 10.4 в [6]). Искомая функция v^0 такая, что $v^0 \in W_p^{2,1}(Q)$ и $R_i v^0(x', r_i, t) = \varphi_i^1(x', t)$ $(i = 0,1)$ записывается в виде $v^0 = v_1\psi_1 + v_2(1-\psi_1)$, мы даже имеем, что $v^0 \in W_p^{2,1}(G_0 \times (0,T))$. Совершенно аналогичные рассмотрения проводятся и для других возможных вариантов операторов R_0, R_1. Функция $\Phi = v_0 + v^0$ есть требуемая. Рассмотрим случай $p = 2$ и покажем, что в этом случае выполнены условия (1.57)-(1.58). Пусть, например, $R_0 u = -u_{x_n}$, $Ru = u$ и $I_{0,T}(\varphi, \varphi_0) < \infty$, Φ – вышепостроенная функция, удовлетворяющая начальному условию и второму и третьему граничному условию в (1.44). Имеем, что $\Phi_{x_n}(t, x', 0) = -\varphi_0(t, x')$ и тогда

$$\int_0^T \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\varphi_\tau(t,x',\tau) - \Phi_{x_n}(t,x',\tau)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt \leq$$
$$2\int_0^T \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\varphi_\tau(t,x',\tau) + \varphi_0(t, x' + \tau n(x'))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt +$$
$$2\int_0^T \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\Phi_{x_n}(t,x',\tau) - \Phi_{x_n}(t, x' + \tau n(x'), 0)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt.$$

Последний интеграл оценивается через $c\|\Phi\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega\times(0,\delta)))}$, доказательство совпадает с вышеприведенным в предыдущей лемме. Отсюда и вытекает, что $I_{0,T}(\varphi - \Phi, 0) < \infty$. Оставшиеся неравенства в утверждении леммы проверяются по той же схеме. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.11 *и* Φ *– функция построенная в этой лемме. Тогда без ограничения общности можем считать, что найдется постоянная* $c > 0$ *такие, что справедлива оценка*

$$\|\Phi\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c\big[\|\varphi_0\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q^0)} + \|\varphi_1\|_{W_p^{k_2,2k_2}(Q^0)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}\big]. \tag{1.59}$$

Найдется постоянная $c_1 > 0$ такие, что справедливы оценки

$$J_{0,T}(\varphi - R\Phi, 0) \le c_1(\|\Phi\|_{L_2(0,T;W_2^2(G))} + J_{0,T}(\varphi, \varphi_0)),$$
$$J^{0,T}(\varphi - R\Phi, 0) \le c_1(\|\Phi\|_{L_2(0,T;W_2^2(G))} + J^{0,T}(\varphi, \varphi_1)),$$
$$I_{0,T}(\varphi - \Phi, 0) \le c_1(\|\Phi\|_{L_2(0,T;W_2^2(G))} + I_{0,T}(\varphi, \varphi_0)),$$
$$I^{0,T}(\varphi - \Phi, 0) \le c_1(\|\Phi\|_{L_2(0,T;W_2^2(G))} + I^{0,T}(\varphi, \varphi_1)).$$

Функция Φ определяется неоднозначно и вообще говоря постоянная c в (1.59) меняется в зависимости от способа ее построения. Однако, как легко увидеть из доказательства леммы 1.11, утверждение следствия будет иметь место, при некотором фиксированном способа ее построения.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (1.45), A), (1.52), $f \in L_p(Q)$ ($p \ne 3/2, 3$). *Если $Ru = u$, то предположим, что выполнено условие* (1.49), *а если $Ru \ne u$, то условия* (1.49) и (1.46). *Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q)$ задачи* (1.43), (1.44). *Справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le c\big[\|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S^0)} + \|\varphi_0\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q^0)} + \|\varphi_1\|_{W_p^{k_2,2k_2}(Q^0)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}\big], \tag{1.60}$$

где в случае $p = 2$, в зависимости от вида краевых условий, к правой части добавляются одно или два выражения вида $c_1(J_{0,T}(\varphi, \varphi_0))^{1/2}$, $c_1(J^{0,T}(\varphi, \varphi_1))^{1/2}$, $c_1(I_{0,T}(\varphi, \varphi_0))^{1/2}$, $c_1(I^{0,T}(\varphi, \varphi_1))^{1/2}$, где c_1 – некоторая постоянная.

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $Ru = u$. Используя лемму 1.11, построим функцию Φ и сделаем замену $u = v + \Phi$. Тогда функция v есть решение уравнения (1.43) с новой правой частью $\tilde{f} = f - M\Phi \in L_2(Q)$, т.е.

$$Mv = v_t - a_{nn}v_{x_nx_n} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_iv_{x_i} + a_0u = \tilde{f},$$

удовлетворяющая однородным начальным данным и краевым условиям

$$v|_{S^0} = \tilde{\varphi} = \varphi - \Phi|_{S^0}, \quad R_iv(t, x', r_i) = 0 \ (i = 0, 1), \ v|_{t=0} = 0.$$

Сначала рассмотрим случай краевых условий $R_0u = -u_{x_n}$, $R_1u = u_{x_n}$. В этом случае при $p > 2$ из условия A) вытекает, что $\tilde{\varphi}_{x_n}|_{x_n=0} = 0$ и $\tilde{\varphi}_{x_n}|_{x_n=l} = 0$, а при

$p = 2$ выполнены условия (1.58). В любом случае функция $\tilde{\varphi}$ допускает четные продолжения относительно плоскости $x_n = 0$ и плоскости $x_n = l$ в области $Q_{-l,0}$, $Q_{l,2l}$ соответственно с сохранением класса $W_p^{k_0,2k_0}$. Продолжение (обозначаем его тем же символом) принадлежит классу $W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,2l))$. Для доказательства этого факта используем определение нормы и стандартные свойства пространств Соболева. В частности, при $p \neq 2$, имеем неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,2l))} \leq c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,0))}+ \\ \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(0,l))} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(l,2l))}) \leq c_1\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S^0)}. \quad (1.61)$$

Последнее неравенство вытекает из определения функции $\tilde{\varphi}$, а предпоследнее из свойства аддитивности пространства Соболева относительно разбиения области (см. замечание 3 пункта 4.4.1 в [1] и библиографию приведенную в этом замечании). Однако, показатель $p = 2$ является критическим и последнее неравенство неверно. Запишем его аналог. Имеем ($k_0 = 3/4$)

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,2l))} = \\ \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(0,T;W_2^{2k_0}(\partial\Omega\times(-l,2l))} + \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(-l,2l);W_2^{k_0}(0,T))}. \quad (1.62)$$

Для последней нормы имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(-l,2l);W_2^{k_0}(0,T))} = \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(-l,0);W_2^{k_0}(0,T))}+ \\ \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(0,l);W_2^{k_0}(0,T))} + \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(l,2l);W_2^{k_0}(0,T))} \leq \\ 3\|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(0,l);W_2^{k_0}(0,T))}.$$

В качестве нормы в пространстве $W_2^{2k_0}(\partial\Omega\times(-l,2l))$ можем взять эквивалентную норму, определяемую равенством

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{2k_0}(\partial\Omega\times(-l,2l))} = \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(\partial\Omega;W_2^{2k_0}(-l,2l))} + \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(-l,2l;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))}.$$

Для последнего слагаемого имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(-l,2l;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))} = \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(-l,0;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))} + \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(0,l;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))}+ \\ \|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(l,2l;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))} \leq 3\|\tilde{\varphi}\|^2_{L_2(0,l;W_2^{2k_0}(\partial\Omega))}. \quad (1.63)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Исходя из определения имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{2k_0}(-l,2l))} = \|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^1(-l,2l))} + < \tilde{\varphi}_{x_n} >^2_{1/2,2},$$

$$< \tilde{\varphi}_{x_n} >^2_{1/2,2} = \int_{(-l,2l)^2} \frac{|\tilde{\varphi}_{x_n}(\xi) - \tilde{\varphi}_{x_n}(\eta)|^2}{|\xi-\eta|^2}\, d\xi d\eta.$$

Первая норма очевидным образом оценивается через $3\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^1(0,l)}$. Функцию $\psi = \tilde{\varphi}_{x_n}$ можно записать в виде суммы трех функций $\psi_1+\psi_2+\psi_3$, где $\psi_2 = \tilde{\varphi}_{x_n}$ при $x_n \in (0,l)$ и $\psi_2 = 0$ при $x_n \notin (0,l)$, $\psi_1 = \psi_2(-x_n)$, $\psi_3 = \psi_2(2l - x_n)$. Тогда полунорма $< \tilde{\varphi}_{x_n} >_{1/2,2}$ оценивается через

$$c\sum_{i=1}^{3} < \psi_i >^2_{1/2,2} \leq c_1 \|\tilde{\varphi}_{x_n}\|^2_{W_2^{1/2}(0,l)} + c_2 (\int_0^l |\tilde{\varphi}_{x_n}|^2 \frac{dx_n}{x_n} + \int_0^l |\tilde{\varphi}_{x_n}|^2 \frac{dx_n}{l-x_n}).$$

Последнее неравенство вытекает непосредственно из определения полунормы. Аналогичные оценки доказываются во многих работах (см., например, предложение 7.1 работы [118]). Утверждение о том, что продолжение функции φ с интервала $(0,l)$ на все $\mathbb{R}$ нулем сохраняет класс $W_2^{1/2}$ тогда и только тогда, когда $\int_0^l |\varphi|^2 \frac{dx_n}{x_n} < \infty$ и $\int_0^l |\varphi|^2 \frac{dx_n}{l-x_n} < \infty$, которое мы фактически используем, известно (оно вытекает из определения и свойств пространств $\tilde{B}^s_{q,p}$ в [1, 4.3.2] или из предложения 5.11 в [113]). Интегрируя полученное неравенство и используя (1.63), заключаем, что

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{2k_0}(\partial\Omega\times(-l,2l))} \leq c_3(\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{2k_0}(\partial\Omega\times(0,l))} + \|\frac{\tilde{\varphi}_{x_n}}{\sqrt{\rho(x_n)}}\|^2_{L_2(\partial\Omega\times(0,l))}), \tag{1.64}$$

где $\rho(x_n) = min(x_n, l-x_n)$. Используя (1.62)-(1.64), получим оценку

$$\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,2l))} \leq c(\|\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^{k_0,2k_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \|\frac{\tilde{\varphi}_{x_n}}{\sqrt{\rho(x_n)}}\|^2_{L_2(S^0)}),$$

Из этой оценки вытекает что неравенство (1.61) при $p=2$ заменяется на неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{k_0,2k_0}((0,T)\times\partial\Omega\times(-l,2l))} \leq$$
$$c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{k_0,2k_0}(S^0)} + (I_{0,T}(\tilde{\varphi},0))^{1/2} + (I^{0,T}(\tilde{\varphi},0))^{1/2}). \tag{1.65}$$

Построим четную функцию $\psi_1(x_n) \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую что $supp\,\psi_1 \in (-2l/3, 2l/3)$, $\psi_1 = 1$ при $x_n \in [0, l/2]$. Определим также четную относительно точки $x_n =$

l функцию $\psi_2(x_n) = 1 - \psi_1(x_n)$ для $x_n \in (0, l)$ и $\psi_2(x_n) = 0$ при $x_n < 0$. Построим также функции $\alpha_i(x_n) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $supp\,\alpha_1 \subset (-2l/3, 2l/3)$, $supp\,\alpha_2 \subset (l/3, 5l/3)$ и $\alpha_1 = 1$ на $supp\,\psi_1$, $\alpha_2 = 1$ на $supp\,\psi_2$. Строим области G_1 и G_2, такие что $G_1 \supset \Omega \times [0, 2l/3]$, $G_1 \subset \Omega \times [0, 3l/4)$, $G_2 \supset \Omega \times [l/3, l]$, $G_2 \subset \Omega \times [l/4, l]$, и части границы ∂G_1 и ∂G_2, лежащие в областях $x_n > 0$ и $x_n < l$ соответственно, принадлежат классу C^2. Построим четные относительно плоскостей $x_n = 0$ и $x_n = l$ продолжения областей G_1 и G_2. Обозначим их $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$. Имеем что $\partial\tilde{G}_1 \in C^2$ и $\partial\tilde{G}_2 \in C^2$. Дана функция $g \in L_p(Q)$. Построим четное продолжение g относительно плоскостей $x_n = 0$ и $x_n = l$. Таким образом:

$$g(x', x_n, t) = \begin{cases} g(x', x_n, t),\ x_n \in (0, l) \\ g(x', -x_n, t),\ x_n \in (-l, 0) \\ g(x', 2l - x_n, t),\ x_n \in (l, 2l) \end{cases}.$$

Имеем: $g \in L_p(Q_{-l,2l})$. Продолжим коэффициенты $a_{ij}, a_i (i \neq n)$ четным образом, а a_n нечетным образом, относительно плоскостей $x_n = 0$ и $x_n = l$ в область $Q_{-l,2l}$.

Рассмотрим задачи

$$u_{it} - Lu_i = g\alpha_i, \quad (x,t) \in \tilde{Q}_i = (0,T) \times \tilde{G}_i,\ i = 1, 2, \tag{1.66}$$

$$u_i|_{(0,T)\times\partial\tilde{G}_i} = a_i = \psi_i\tilde{\varphi},\ u_i|_{t=0} = 0,\ i = 1, 2. \tag{1.67}$$

По построению $\partial\tilde{G}_1, \partial\tilde{G}_2 \in C^2$. Тогда, ссылаясь на [6, теорема 10.4 гл. 7] или на теорему 2.1 в [4], можем утверждать, что задачи (1.66)-(1.67) разрешимы и справедлива оценка:

$$\|u_i\|_{W_p^{2,1}(\tilde{Q}_i)} \leq c(\|g\|_{L_p(Q)} + \|a_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\partial\tilde{G}_i)}),\ i = 1, 2. \tag{1.68}$$

У нас область $\tilde{G}_1$ симметрична относительно плоскости $x_n = 0$. Тогда решение u_1 обладает свойством $u_{1x_n}|_{x_n=0} = 0$. Действительно, рассмотрим функцию $\tilde{u}_1(x,t) = u_1(x', -x_n, t)$ для $x \in \tilde{G}_1$, $\tilde{u}_1|_{\partial\tilde{G}_1\times(0,T)} = a_1(x,t)$. И кроме того, $\tilde{u}_{1x_n} = -u_{1x_n}(x', -x_n, t)$, $\tilde{u}_{1x_i} = u_{1x_i}(x', -x_n, t)$, $\tilde{u}_{1x_nx_n} = u_{1x_nx_n}(x', -x_n, t)$, $\tilde{u}_{1x_ix_j} = u_{1x_ix_j}(x', -x_n, t)$. Тогда функция $\tilde{u}_1$ в силу четности коэффициентов также есть решение задачи (1.66)-(1.67). В силу единственности решений $\tilde{u}_1 = u_1$. То есть u_1 четная по x_n и тогда $u_1(x', x_n, t) = u_1(x', -x_n, t)$, $u_{1x_n}(x', x_n, t) = -u_{1x_n}(x', -x_n, t)$ и $u_{1x_n}(x', 0, t) = 0$. Аналогично имеем, что

$u_{2x_n}(x',l,t) = 0$ и u_2 четная функция по переменной x_n относительно точки $x_n = l$. Построим функцию $v = u_1\psi_1 + u_2\psi_2$; имеем, что $v|_{S^0} = \tilde{\varphi}$ $v|_{t=0} = 0$. Ищем решение исходной задачи в виде $v = u_1\psi_1 + u_2\psi_2$. Функция v удовлетворяет граничным условиям в Q: условию Дирихле на $\partial\Omega\times(0,l)$ и условиям Неймана на плоскостях $x_n = 0$ и $x_n = l$. Имеем $v_t - Lv = u_{1t}\psi_1 - Lu_1\psi_1 - [L,\psi_1]u_1 + u_{2t}\psi_2 - Lu_2\psi_2 - [L,\psi_2]u_2 = g - [L,\psi_1]u_1 - [L,\psi_2]u_2$, где $[L,\psi_i]b = L(\psi_i b) - \psi_i Lb$ $(v_i = v|_{Q^i})$. Ищем функцию g как решение уравнения

$$g = V(g) + f, \quad V(g) = [L,\psi_1]u_1 + [L,\psi_2]u_2. \tag{1.69}$$

Положим $u_1 = V_1(g)$, $u_2 = V_2(g)$, $g \in L_p(Q)$. Имеем $[L,\psi_k]u_k = L(\psi_k u_k) - \psi_k Lu_k = 2a_{nn}\psi_{kx_n}u_{kx_n} + a_{nn}u_k\psi_{kx_nx_n} - a_n\psi_{kx_n}u_k$ $(k=1,2)$. Пусть $g_1, g_2 \in L_p(Q)$. Рассмотрим $V(g_1) - V(g_2)$. Функции $u_k(g_2) - u_k(g_1) = \tilde{u}_k$ есть решения задач

$$\tilde{u}_{kt} - L\tilde{u}_k = \tilde{g} = (g_1 - g_2)\alpha_k,\ \tilde{u}_k|_{(0,T)\times\partial\tilde{G}_k} = 0,\ \tilde{u}_k|_{t=0} = 0. \tag{1.70}$$

Фиксируем $\tau \in (0,T]$. Как вытекает из доказанного (см. (1.68)) имеет место оценка

$$\|\tilde{u}_k\|_{W_p^{2,1}(\tilde{Q}_{k\tau})} \le c\|g_1 - g_2\|_{L_p(Q_\tau)}, \quad \tilde{Q}_{k\tau} = (0,\tau)\times\tilde{G}_k, \tag{1.71}$$

где постоянная c не зависит от τ. Поясним доказательство этого факта. Возьмем в (1.70) правую часть $g_\tau = \tilde{g}$ для $t \in (0,\tau)$ и $g_\tau = 0$ для $t > \tau$ и решим задачу (1.70) с правой частью g_τ, решение которой будет удовлетворять оценке (1.68), т.е. оценке $\|\tilde{u}_k\|_{W_p^{2,1}(\tilde{Q}_k)} \le c\|g_\tau\|_{L_p(\tilde{Q}_k)} = c\|\tilde{g}\|_{L_p(Q_\tau)}$. Кроме того, это решение на $[0,\tau]$ совпадает с решением задачи (1.70) со старой правой частью. Отсюда и вытекает оценка (1.71) с постоянной не зависящей от τ. Рассмотрим выражение $[L,\psi_k](u_k(g_1) - u_k(g_2)) = J_k$. Имеем

$$\|J_k\|_{L_p(Q_\tau)} \le 2\|a_{nn}\psi_{kx_n}\tilde{u}_{kx_n}\|_{L_p(Q_\tau)} + \|\tilde{u}_k a_{nn}\psi_{kx_nx_n}\|_{L_p(Q_\tau)} + \|\tilde{u}_k a_n\psi_{kx_n}\|_{L_p(Q_\tau)}.$$

Из леммы 1.5 и оценки (1.71) вытекает, что найдутся постоянные c_i, $\beta > 0$ не зависящие от τ такие, что

$$\|J_k\|_{L_p(Q_\tau)} \le c_k\tau^\beta\|\tilde{u_k}\|_{W_p^{1,2}(Q_{k\tau})} \le \tau^\beta c_{2k}\|g_1 - g_2\|_{L_p(Q_\tau)}.$$

Из полученных оценок вытекает, что

$$\|V(g_1) - V(g_2)\|_{L_p(Q_\tau)} \le c_0\tau^\beta\|g_1 - g_2\|_{L_p(Q_\tau)}, \tag{1.72}$$

где постоянная c_0 не зависит от $\tau \le T$. Выберем $\tau_0 > 0$ такой, что $c_0\tau_0^\beta = q < 1$, тогда оператор V будет сжимающим и уравнение (1.69) имеет единственное решение $g \in L_p(Q_\tau)$. В этом случае функция v есть решение исходной задачи (1.43), (1.44) задачи на промежутке $[0,\tau]$. Далее продолжим решение. Рассуждения аналогичны, например, тем которые были проведены в [114, §21]. Построим функцию $V_1(x,t) = \begin{cases} v(x,t),\ t \in (0,\tau) \\ v(x, 2\tau - t),\ t \in (\tau, 2\tau) \\ 0,\ t > 2\tau \end{cases}$. Делаем замену: $v = V_1 + V$. Тогда исходная задача перепишется в виде

$$V_t - LV = \tilde{f} - L_0 V_1,\ V|_{S^0} = \tilde{\varphi} - V_1|_{S^0},\ V|_{t=0} = 0,\ V_{x_n}(t, x', r_k) = 0\ (k = 1, 2).$$

Отметим, что $V \equiv 0$ на $[0,\tau]$. Далее повторяем рассуждения на промежутке $[\tau_0, 2\tau_0]$ вместо $[0,\tau_0]$. Без ограничения общности можно считать, что все постоянные c_i в вышеприведенных оценках те же самые, поэтому интервал разрешимости задачи не изменится. Показав разрешимость на $[\tau_0, 2\tau_0]$, далее переходим на $[2\tau_0, 3\tau_0]$ и т. д. Мы получили утверждение теоремы в частном случае, рассмотрев граничные операторы $Ru = u$, $R_i u = (-1)^{i+1} u_{x_n}$. В оставшихся случаях все рассуждения совершенно аналогичны, единственное отличие состоит в том, что в случае условий Дирихле $R_i u = u$ $(i = 1, 2)$ продолжение правой части g и функций $\tilde{\varphi}$ через плоскости $x_n = 0$ или $x_n = l$ осуществляется нечетным образом и соответствующие решения u_k будут нечетными функциями x_n. В случае смешанных условий, например, $R_0 u = u$, $R_1 u = u_{x_n}$, одна из них будет нечетной функцией а вторая четной функцией переменной x_n. Соответствующие вспомогательные задачи (1.66), (1.67) имеют вид

$$u_{it} - Lu_i = g\alpha_i,\quad (x,t) \in \tilde{Q}_i = (0,T) \times \tilde{G}_i,\ i = 1, 2,$$

$$Ru_i|_{(0,T)\times\partial\tilde{G}_i} = a_i = \psi_i \tilde{\varphi},\ u_i|_{t=0} = 0,\ i = 1, 2.$$

Оценка (1.60) для решений из утверждения теоремы вытекает из оценок (1.61), (1.62), (1.68) и оценок для функции g вытекающих из рассуждений второй половины доказательства. В частности, из оценки (1.72) и равенства (1.69) вытекает оценка

$$\|g\|_{L_p(0,\tau_0)} \le \frac{1}{1-q}(\|f\|_{L_p(0,\tau_0)} + \|V(0)\|_{L_p(0,\tau_0)}).$$

Оценки для норм $\|g\|_{L_p((i-1)\tau_0,i\tau_0)}$ и затем для соответствующих норм функций v получаются последовательно. При получении оценки (1.60) используем оценки (1.61), (1.65) и следствие 1. $\square$

Как следствие теоремы 1.4, мы имеем следующее утверждение

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* (1.45), (1.52), (1.49) *если* $Ru = u$ *и* (1.49) *и* (1.46), *если* $Ru \neq u$ $(p \neq 3/2, 3)$, $u_0 \equiv 0$ *и* $\phi \in (0, T]$. *Пусть также выполнено условие A), где интегральные условия при* $p = 2$ *заменяются на условия: если* $R_0 u = u$ *и* $Ru \neq u$, *или* $R_1 u = u$ *и* $Ru \neq u$, *то* $J_{0,\phi}(\varphi, \varphi_0) < \infty$ *или* $J^{0,\phi}(\varphi, \varphi_1) < \infty$, *соответственно; если* $R_0 u = -u_{x_n}$ *и* $Ru = u$, *или* $R_1 u = u_{x_n}$ *и* $Ru = u$, *то* $I_{0,\phi}(\varphi, \varphi_0) < \infty$ *или* $I^{0,\phi}(\varphi, \varphi_1) < \infty$, *соответственно. Тогда на промежутке* $(0, \phi)$ *существует единственное решение* u *задачи* (1.43), (1.44) *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$. *Решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q_\phi)} + \|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_0^\phi)} + \|\varphi_0\|_{\tilde{W}_p^{k_1,2k_1}(Q_\phi^0)} + \|\varphi_1\|_{\tilde{W}_p^{k_2,2k_2}(Q_\phi^0)}),$$

где постоянная c *не зависит от* $\phi \in (0, T]$ *и* f, φ *и в случае* $p = 2$, *в зависимости от вида краевых условий, к правой части добавляются одно или два выражения вида* $c_1(J_{0,\phi}(\varphi, \varphi_0))^{1/2}$, $c_1(J^{0,\phi}(\varphi, \varphi_1))^{1/2}$, $c_1(I_{0,\phi}(\varphi, \varphi_0))^{1/2}$, $c_1(I^{0,\phi}(\varphi, \varphi_1))^{1/2}$, *где* c_1 *– некоторая постоянная не зависящая от* ϕ.

Доказательство. Пусть $p \neq 2$. Продолжим функции $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ нулем при $t < 0$ сохранив обозначения и пусть $\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t, x), \ t \in (-\infty, \phi) \\ \varphi(2\phi - t, x), \ t \in [\phi, T] \end{cases}$. Аналогично определим $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$. Очевидно, что $\tilde{\varphi} \in W_p^{k_0,2k_0}(S^0)$, $\tilde{\varphi}_0 \in W_p^{k_1,2k_1}(Q_\phi^0)$, $\tilde{\varphi}_1 \in W_p^{k_2,2k_2}(Q_\phi^0)$. Построим функцию $\tilde{f} = f$ при $t \leq \phi$ и $\tilde{f} = 0$ при $t > \phi$. Используя теорему 1.4, построим решение задачи (1.43)-(1.44) с функциями $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$, $\tilde{f}$ вместо $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ и f такое, что $u \in W_p^{2,1}(Q)$. По теореме 1.4:

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\varphi)} \leq \|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq$$
$$c(\|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S^0)} + \|\tilde{\varphi}_0\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q^0)} + \|\tilde{\varphi}_1\|_{W_p^{k_2,2k_2}(Q^0)}).$$

Оценим правую часть. Имеет место следующее неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S^0)} \leq \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((-1,T)\times\Gamma_0)} \leq$$
$$c(\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((-1,\phi)\times\Gamma_0)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((\phi,T)\times\Gamma_0)})$$

Мы здесь использовали аддитивность пространств Соболева относительно разбиения области (см. замечание 3 пункта 4.4.1 в [1]) и определение соответствующей нормы. Первое слагаемое в правой части в силу леммы 1.2 оценивается через $c_2\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_0^\varphi)}$. После замены переменных в определении нормы мы сведем оценку второго слагаемого также к лемме 1.2 и получим

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((\phi,T)\times\Gamma_0)} \leq c_3\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_0^\varphi)},$$

где c_3 – постоянная не зависящая от ϕ. Аналогично получим оценки

$$\|\tilde{\varphi}_0\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q^0)} \leq c_4\|\varphi_0\|_{\tilde{W}_p^{k_1,2k_1}(Q_\varphi^0)}, \|\tilde{\varphi}_1\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q_\phi^0)} \leq c_5\|\varphi_1\|_{\tilde{W}_p^{k_2,2k_2}(Q_\varphi^0)},$$

где постоянные c_4, c_5 также не зависят от ϕ. Кроме того имеем, что $\|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} = \|f\|_{L_p(Q_\phi)}$. Отсюда и вытекает утверждение. В случае $p = 2$ рассуждения повторяются, только запись соответствующих неравенств становится более сложной. □

Как и в случае теорем 1.1, 1.2 мы можем немного изменить условия на коэффициенты. Точнее мы заменим условие (1.46) на условие

$$\sigma \in W_p^{s_0,2s_0}(S^0),\ a_{ij} \in W_p^{s_0,2s_0}(S^0),\quad i,j = 1,\ldots,n,\ p > n+2. \tag{1.73}$$

Теорема 1.6. *Пусть* $p > n+2$, $Ru \neq u$ *и выполнены условия теоремы* 1.4 *или теоремы* 1.5, *где условие* (1.46) *заменено на условие* (1.73). *Тогда справедливо утверждение теоремы* 1.4 *или соответственно теоремы* 1.5.

Ввиду леммы 1.6, доказательство аналога теоремы 1.4 или теоремы 1.5 в этом случае не изменится.

1.2 Регулярная разрешимость задачи сопряжения в случае $\overline{G^-} \subset G$

Предполагаем, что число компонент связности границ Γ, Γ_0 конечно и каждая из них принадлежит классу C^2. Пусть $p \in (1,\infty)$. Приведем условия на исходные данные. Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q),\quad a_0 \in L_r(Q),\ a_{ij} \in C(Q^\pm),\ i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.74}$$

где $q > n+2$ при $p \leq n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$.

Условие (1.74) означает, что функции a_{ij} могут допускать при переходе через Γ_0 разрывы первого рода. Обозначим через $a_{ij}^\pm$ предельные значения функций $a_{ij}|_{G^\pm}$ на Γ_0. Далее предположим, что

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}),\ s_0 = 1/2 - 1/2p; \tag{1.75}$$

$$a_{ij}^\pm, \alpha_k, \beta_k \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}) \ \ (k = 1,2,\ i,j = 1,2\ldots,n) \tag{1.76}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm), \ \ \varphi \in W_p^{k_0,2k_0}(S),\ g^\pm \in W_p^{s_1,2s_1}(S_0)\ (s_1 = 1 - 1/p). \tag{1.77}$$

Условия согласования на внешней границе Γ имеют вид: при $p > 3/2$ в случае условия Дирихле и при $p > 3$ в случае условия с косой производной, выполнено равенство

$$\varphi(x,0) = B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma. \tag{1.78}$$

Пусть $u_0^\pm = u_0|_{G^\pm}$. Условия согласования на Γ_0 записываются в виде: если $p > 3$, то

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} - \alpha_1(x,0)u_0^+ - \alpha_2(x,0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^+(x,0), \tag{1.79}$$

$$\frac{\partial u_0^-}{\partial N} - \beta_1(x,0)u_0^+ - \beta_2(x,0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^-(x,0), \tag{1.80}$$

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$Mu^+ = f(x,t),\ (x,t) \in Q^+,\ Bu^+|_S = \varphi,\ \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^+,\ u^+|_{t=0} = 0; \tag{1.81}$$

$$Mu^- = f(x,t), \ \ (x,t) \in Q^-,\ \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^-,\ u^-|_{t=0} = 0, \tag{1.82}$$

где исходные данные удовлетворяют условиям согласования (1.78)-(1.80).

Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия* (1.74)-(1.80), *выполнено условие параболичности* (23) *для оператора L и для задач* (1.81), (1.82) *выполнены условия Лопатинского* (24). *Тогда существует единственное решение задачи* (1.1)-(1.4) *такое, что $u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$.*

Доказательство. Вначале мы сведем задачу к задаче с нулевым начальным условием. Построим функцию $v_0(x,t) \in W_p^{1,2}(Q^+) \cap W_p^{1,2}(Q^-)$ такую, что $v_0(x,0) = u_0(x)$. Без ограничения общности можем считать, что справедлива оценка

$$\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \le c(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}), \tag{1.83}$$

где постоянная c не зависит от u_0. Чтобы определить такую функцию, мы вначале построим продолжение U_0^+ функции u_0^+ на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса (используя, например, метод Хестенса или метод, описанный в пункте 4.2.3 в [1]). Без ограничения общности, считаем, что $supp\, U_0^+ \subset B_R = \{x : \ |x| < R\}$ для некоторого $R > 0$ и R таково, что $\overline{G^+} \subset B_R$. Далее построим функцию V как решение задачи $V_t - \Delta V = 0$, $V|_{t=0} = U_0^+$, $V|_{\partial B_R \times (0,T)} = 0$. Имеем, что $V \in W_p^{1,2}(B_R \times (0,T))$ (см. теорему 10.4 в [6]). Возьмем $v_0^+ = v_0|_{G^+} = V|_{G+}$. Аналогично построим $v_0^- = v_0|_{G^-}$. Операторы продолжения (см. [1, теорема 4.2.3]) и оператор построения решения уравнения теплопроводности ограничены в соответствующих пространствах. Поэтому можем считать, что постоянная в (1.83) не зависит от u_0. Далее, мы сделаем замену $u = w + v_0$. Придем к задаче

$$Mw = w_t - Lw = f(x,t) - Mv_0 = \tilde{f}, \tag{1.84}$$

$$Bw|_S = \varphi - Bv_0|_S = \tilde{\varphi}, \quad v|_{t=0} = 0, \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial w^+}{\partial N}(x,t) - \alpha_1(x,t)w^+(x,t) - \alpha_2(x,t)w^-(x,t) = \tilde{g}^+(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial N}(x,t) - \beta_1(x,t)w^+(x,t) - \beta_2(x,t)w^-(x,t) = \tilde{g}^-(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{1.87}$$

где $\tilde{g}^+(x,t) = g^+ - \frac{\partial v_0^+}{\partial N}(x,t) + \alpha_1(x,t)v_0^+(x,t) + \alpha_2(x,t)v_0^-(x,t)$, $\tilde{g}^-(x,t) = g^- - \frac{\partial v_0^+}{\partial N}(x,t) + \beta_1(x,t)v_0^+(x,t) + \beta_2(x,t)v_0^-(x,t)$. В силу (1.78)-(1.80) новые данные также удовлетворяют условиям согласования (1.78)-(1.80), в частности $\tilde{g}^\pm(x,0) = 0$, если $p > 3$. Тогда по теореме 1.1 заключаем, что задачи (1.81), (1.82) с данными $\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-$ вместо f, φ, g^+, g^- имеют единственные решения $u^\pm \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$, причем справедлива оценка

$$\|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c\big[\|\tilde{g}^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|\tilde{g}^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \\ \|\tilde{f}\|_{L_p(Q)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)}\big].$$

В силу леммы 1.7 и оценки (1.83) оценку можно переписать в виде

$$\|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le c\big[\|g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \\ \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}\big]. \quad (1.88)$$

Определим функцию $\vartheta(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & x \in G^+,\ t \ge 0 \\ u^-(x,t) & x \in G^-,\ t \ge 0, \end{cases}$ после замены $w = v + \vartheta$ задача (1.84)-(1.87) сведется к задаче

$$Mv = 0,\ Bv|_S = 0,\ v|_{t=0} = 0, \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - (\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-)\Big|_{S_0} = g_0^+,\ \frac{\partial v^-}{\partial N} - (\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-)\Big|_{S_0} = g_0^-, \quad (1.90)$$

где $g_0^+ = \alpha_1 u^+ + \alpha_2 u^-,\ g_0^- = \beta_1 u^+ + \beta_2 u^-$. Рассмотрим вместо задачи (1.89)-(1.90) задачу с параметром $\tau \in [0,1]$, заменив условия (1.90) на условия

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \tau(\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-)\Big|_{S_0} = g_0^+,\ \ \frac{\partial v^-}{\partial N} - \tau(\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-)\Big|_{S_0} = g_0^-. \quad (1.91)$$

При $\tau = 0$ задача (1.89), (1.90) имеет единственное решение в силу условий теоремы. Определим оператор $R = (R^+, R^-)$, сопоставляющий паре (g^+, g^-) решение (v^+, v^-) задач (1.81), (1.82), с $f \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Таким образом, $(v^+, v^-) = R(g^+, g^-) = (R^+(g^+), R^-(g^-))$. Тогда задача (1.89), (1.91) эквивалентна системе

$$(v^+, v^-) = R(g_0^+, g_0^-) + \tau R(\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-, \beta_1 v^+ + \beta_2 v^-). \quad (1.92)$$

Если $(v^+, v^-) \in W_p^{1,2}(Q^+) \times W_p^{1,2}(Q^-)$, то $v^+ \in W_p^{s_1,2s_1}(S_0),\ v^- \in W_p^{s_1,2s_1}(S_0)$ (см. [113, теорема 7.3]). Рассматриваем оператор $R(v^+, v^-)$ как оператор из $H_\phi = \{v = (v^+, v^-) \in W_p^{1,2}(Q_\phi^+) \times W_p^{1,2}(Q_\phi^-) :\ \ Bv^+|_{S_\phi} = 0,\ v^\pm|_{t=0} = 0\}$ в H_ϕ. В качестве нормы в H_ϕ берем норму $\|v\|_{H_\phi} = \|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}$. Получим априорные оценки, равномерные по параметру $\tau \in [0,1]$, которые гарантируют в том числе ограниченность оператора $R : H_\phi \to H_\phi$. Пусть вектор-функция (v^+, v^-) есть решение уравнения (1.92). В силу теоремы 1.2

$$\|R(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \le C(\|\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} + \|\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)}). \quad (1.93)$$

Поскольку $\alpha_i, \beta_i \in C^{\alpha,2\alpha}(S_0)$ и $\alpha > s_0$, то в соответствии с теоремой о точечных мультипликаторах [116, теорема 3.3.2, с.198] (можно также использовать определение нормы), имеем

$$\|\alpha_1 v^+ + \alpha_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} + \|\beta_1 v^+ + \beta_2 v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} \leq$$
$$C(\|v^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} + \|v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)}), \quad (1.94)$$

где постоянная C не зависит от ϕ, а зависит от величин $\|\alpha_i\|_{C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{S_0})}$ и $\|\beta_i\|_{C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{S_0})}$, $i = 1, 2$. Далее имеем, что

$$\|v^\pm\|^p_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\phi)} = \int_0^\phi \frac{|v^\pm|^p}{t^{s_0 p}} dt + \int_0^\phi \int_0^\phi \frac{|v^\pm(t) - v^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}} dt d\tau \leq \phi^{(s_1 - s_0)p} \|v^\pm\|^p_{\tilde{W}_p^{s_1}(0,\phi)}. \quad (1.95)$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\phi))} \leq \phi^{1/2} \|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\phi))}. \quad (1.96)$$

По лемме 1.3 правая часть оценивается через $C\phi^{1/2}\|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}$. Таким образом, имеем неравенство:

$$\|v^+\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\phi))} + \|v^-\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\phi))} \leq C\phi^{1/2}(\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}). \quad (1.97)$$

Оценим нормы $\|v^\pm\|_{L_p(0;\phi;W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))}$. Имеем, что

$$\|v^\pm\|_{L_p(0;\phi;W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))} \leq c_1 \|v^\pm\|_{L_p(0;\phi;W_p^1(G^\pm))} \leq$$
$$c_2 \|v^\pm\|^{1/2}_{L_p(Q_\phi^\pm)} \|v^\pm\|^{1/2}_{W_p^{1,2}(Q_\phi^\pm)} \leq c_3 \phi^{1/2} \|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^\pm)}. \quad (1.98)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о следах ([1, теорема 4.7, с.412] и соответствующей оценкой $\|u\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} \leq c_1 \|u\|_{W_p^1(G^\pm)}$, интерполяционным неравенством
$\|u\|_{W_p^1(G^\pm)} \leq C\|u\|^{1/2}_{L_p(G^\pm)} \|u\|^{1/2}_{W_p^2(G^\pm)}$ и неравенством $\|u\|_{L_p(0,\phi)} \leq \phi \|u_t\|_{L_p(0,\phi)}$ ($u(0) = 0$), вытекающим из формулы Ньютона-Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от ϕ. Из неравенств (1.94), (1.96)-(1.98) вытекает оценка:

$$\|R(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq C\phi^{1/2}(\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^-)}), \quad (1.99)$$

где постоянная C не зависит от $\phi \in (0; T]$. Таким образом, если $\phi \leq \gamma_0$, $C\gamma_0^{1/2} = 1/2$, то из (1.92) и теоремы 1.2 вытекает неравенство

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \leq 2\|R(g_0^+, g_0^-)\|_{H_\phi} \leq 2c(\|g_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} + \|g_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)}), \quad (1.100)$$

где постоянная c не зависит от ϕ. Используя оценку (1.94), примененную к функциям u^+, u^- и определение функций $g_0^{\pm}$, имеем

$$\|g_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} + \|g_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\phi^0)} \le c(\|u^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} + \|u^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}). \qquad (1.101)$$

Далее мы покажем, что найдется такой параметр $\gamma_1 \le \gamma_0$ такой, что из неравенства

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_\phi} \le c_1 \qquad (1.102)$$

для решений уравнения (1.92) вытекает оценка

$$\|(v^+, v^-)\|_{H_{min(\phi+\gamma_1,T)}} \le c_2, \qquad (1.103)$$

где параметры c_i зависят от норм данных и не зависят от $\tau \in [0,1]$ и параметр γ_1 не зависит от $\phi \in (0,T)$. Возьмем параметр $\gamma_1 \le \gamma_0$ и предположим, что справедлива оценка (1.102). Пусть $v|_{G^\pm} = v^\pm$, продолжим v нулем при $t < 0$. Определим функцию $v_0(x,t) = v(x,t)$ при $t \le \phi$ и $v_0(x,t) = v(x, 2\phi - t)$ при $t \in (\phi, T)$. Имеем, что $v_0 \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ и $\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le 2\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}$. Сделаем замену: $v = v_0 + v_1$. Функция v_1 есть решение задачи

$$Mv_1 = -Lv_0, \ Bv_1|_S = -Bv_0|_S, \ \frac{\partial v_1^+}{\partial N} = \tau(\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-) + \tilde{g}_0^+,$$
$$\frac{\partial v_1^-}{\partial N} = \tau(\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-) + \tilde{g}_0^- \ \ ((x,t) \in S_0), \qquad (1.104)$$

где $\tilde{g}_0^+ = (-\frac{\partial v_0^+}{\partial N} + \tau(\alpha_1 v_0^+ + \alpha_2 v_0^-))|_{S_0} + g_0^+$, $\tilde{g}_0^- = (-\frac{\partial v_0^+}{\partial N} + \tau(\beta_1 v_0^+ + \beta_2 v_0^-))|_{S_0} + g_0^-$. По построению, $v_1 = 0$ при $t \in [0, \phi], x \in G$. По лемме 1.7 найдется постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$\|Lv_0\|_{L_p(Q)} \le c_0 \|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le 2c_0\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \le 2c_0 c_1, \qquad (1.105)$$

где постоянная c_0 зависит от норм коэффициентов уравнения в соответствующих классах. В силу леммы 1.7, также имеем

$$\|Bv_0\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S)} \le \tilde{c}\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le 2\tilde{c}c_1. \qquad (1.106)$$

Аналогично в силу леммы 1.3 имеем неравенство

$$\|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} + \|\tilde{g}_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{\phi+\gamma_1}^0)} \le c_2\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le 2c_2c_1. \qquad (1.107)$$

Из теоремы 1.2, примененной к задаче (1.104), вытекает следующая оценка

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq C(\|Lv_0\|_{L_p(Q)} + \|Bv_0\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})}$$
$$+ \|\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})} + +\|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})} + \|\tilde{g}_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})}), \quad (1.108)$$

где постоянная C не зависит от ϕ, γ_1. Из оценок (1.105)-(1.107) имеем неравенство

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)}$$
$$+ c_5(\|\alpha_1 v_1^+ + \alpha_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})} + \|\beta_1 v_1^+ + \beta_2 v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})}), \quad (1.109)$$

где постоянные c_4, c_5 не зависят от ϕ, τ. В силу оценки (1.94) имеем

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \leq c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_6(\|v_1^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})} + \|v_1^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^0_{\phi+\gamma_1})}). \quad (1.110)$$

Оценим последнее слагаемое. Рассмотрим выражение

$$J = \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm|}{t^{s_0 p}}\,dt + \int\limits_0^{\phi+\gamma_1}\int\limits_0^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau =$$
$$= \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm|}{t^{s_0 p}}\,dt + \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int\limits_0^{\phi} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{\phi}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau + \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau.$$

В силу того, что $v_1 = 0$ при $t \leq \phi$, второй интеграл может быть оценен так:

$$\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_0^{\phi} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau = \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_0^{\phi} \frac{|v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau =$$
$$\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} |v_1^\pm(\tau)|^p \Big(\frac{1}{(\tau-\phi)^{s_0 p}} - \frac{1}{\tau^{s_0 p}}\Big)\frac{1}{s_0 p}\,dt \leq \frac{1}{s_0 p}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(\tau)|^p}{|\tau-\phi|^{s_0 p}}\,dt.$$

Аналогично: $\int_0^{\phi}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t)-v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau \leq \frac{1}{s_0 p}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t)|^p}{|t-\phi|^{s_0 p}}\,dt$. Тогда для величины J имеем оценку

$$J \leq (1 + \frac{2}{s_0 p})\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t)|^p}{|t-\phi|^{s_0 p}}dt + \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v_1^\pm(t) - v_1^\pm(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0 p}}\,dtd\tau \leq$$
$$(1 + \frac{2}{s_0 p})\gamma_1^{p/2}\|v_1^\pm\|^p_{\tilde{W}_p^{s_1}(\phi,\phi+\gamma_1)}.$$

В силу леммы 1.3 (чтобы применить лемму, вначале делаем замену переменных $\xi = t - \phi$, $\eta = \tau - \phi$) имеем оценку

$$\int_\Gamma J\, d\Gamma \le C_0 \|v_1^\pm\|^p_{W_p^{1,2}(Q^\pm_{\phi,\phi+\gamma_1})}\gamma_1^{1/2}, \tag{1.111}$$

где C_0 не зависит от ϕ, γ_1. Как и ранее, в (1.98) имеем, что

$$\begin{aligned}\|v_1^\pm\|_{L_p(0,\phi+\gamma_1;W_p^{1-1/p}(\Gamma))} &= \|v_1^\pm\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;W_p^{1-1/p}(\Gamma))} \\ &\le C_0\|v_1^\pm\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;W_p^1(G^\pm))} \le C_1\|v_1^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q^\pm_{\phi,\phi+\gamma_1})}\gamma_1^{1/2}.\end{aligned}$$

Из оценок (1.110), (1.111) и последней оценки вытекает неравенство

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \le c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c_8\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})}\gamma_1^{1/2}, \tag{1.112}$$

где постоянные c_4, c_8 не зависят от параметров $\phi, \gamma_1, \tau \in [0,1]$. Выберем γ_2 так, чтобы $C_8\gamma_2^{1/2} = 1/2$, тогда при $\gamma_1 \le \gamma_2$ из предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\|v_1\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} \le 2c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q)} \le 4c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \tag{1.113}$$

Тогда имеем из (1.88), (1.101), (1.100), (1.107), (1.113)

$$\begin{aligned}\|v_1+v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\phi+\gamma_1})} &\le 5c_4\|v_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \le c\big[\|g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} \\ &+ \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0^+\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0^-\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}\big],\end{aligned} \tag{1.114}$$

где постоянная c зависит от норм коэффициентов и постоянных из теорем вложения и не зависит от параметров $\tau \in [0,1], \phi, \gamma_1$. Возьмем $\phi = \gamma_0$. Далее, в силу доказанного, мы можем выписать оценку такого вида на $[0, \gamma_0 + 2\gamma_1]$, $[0, \gamma_0 + 3\gamma_1]$ и т.д. За конечное число шагов мы достигнем конца промежутка T. Это позволяет утверждать, что на всем промежутке $[0,T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} &\le c\big[\|g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} \\ &+ \|f\|_{L_p(Q)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|u_0^+\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0^-\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}\big]\end{aligned} \tag{1.115}$$

с некоторой постоянной c не зависящей от $\tau \in [0,1]$. Далее мы сошлемся на метод продолжения по параметру (см. теорему 3.13 гл. 3 в [119]) согласно которому уравнение (1.92) разрешимо для всех $\tau \in [0,1]$. Решение будет удовлетворять оценке (1.115), из которой вытекает и единственность решений задачи. $\square$

Как и в предыдущем параграфе, мы можем немного переформулировать утверждение теоремы 1.7. Введем условия

$$\gamma_i, \sigma \in W_p^{s_0,2s_0}(\overline{S}),\ s_0 = 1/2 - 1/2p; \tag{1.116}$$

$$a_{ij}^{\pm}, \alpha_k, \beta_k \in W_p^{s_0,2s_0}(\overline{S_0})\ \ (k = 1,2,\ i,j = 1,2\ldots,n) \tag{1.117}$$

Теорема 1.8. *Пусть* $p > n+2$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 1.7, *где любое из включений в условиях* (1.75), (1.76) *заменено на соответствующее включение из* (1.116) *и* (1.117), *утверждение теоремы* 1.7 *имеет место.*

1.3 Регулярная разрешимость задачи сопряжения в цилиндрической пространственной области

1.3.1 Основные результаты

Как мы уже отмечали, мы рассматриваем модельный случай $G = \Omega \times (0,l), (\partial\Omega \in C^2)$. Опишем более точно постановку задачи и условия на данные. Считаем, что оператор L имеет вид

$$Lu = a_{nn}(t,x)u_{x_nx_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u.$$

Уравнение (1.1) перепишется в виде

$$Mu = u_t - Lu = f. \tag{1.118}$$

Уравнение (1.118) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{1.119}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x)\ (x \in G),\ R_0u(t,x',0) = \varphi_0,\ \ R_1u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{1.120}$$

где $R_0u = u$ или $R_0u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно $R_1u = u$ или $R_1u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$R_i^+u = (u_{x_n} - \alpha_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i-0} = g_i^+, \tag{1.121}$$

$$R_i^- u = (u_{x_n} - \beta_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i+0} = g_i^-,\ i=1,2,...,m-1. \tag{1.122}$$

Запишем условия на коэффициенты. Далее, считаем, что в условиях ниже $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ – некоторый фиксированный параметр (он может быть как угодно малым). Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q),\ \ a_0 \in L_r(Q),\ a_{ij} = a_{ji},\ a_{ij} \in C(Q^k)\ (i,j = 1,\dots,n), \tag{1.123}$$

где $q > n+2$ при $p \leq n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{Q^k}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^k})$ $(k = 1,\dots,m)$. Вообще говоря, функции a_{ij} могут допускать при переходе через плоскости $x_n = l_k$ разрывы первого рода. Далее предположим, что

$$\alpha_i^k(x',t), \beta_i^k(x',t) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0})\ \ (k=1,2;\ i=1,2\dots,m-1). \tag{1.124}$$

$$\sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_i), \tag{1.125}$$

и $\sigma|_{S_i}$ допускают продолжение до функции класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$.

$$\sigma_0, \sigma_1 \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}). \tag{1.126}$$

$$u_0(x) \in \cap_{i=1}^m W_p^{2-2/p}(G^i),\ \ \varphi \in \cap_{i=1}^m W_p^{k_0,2k_0}(S_i), \tag{1.127}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$, если $Ru = u$ и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае.

$$\varphi_0 \in W_p^{k_1,2k_1}(Q^0),\ \varphi_1 \in W_p^{k_2,2k_2}(Q^0), \tag{1.128}$$

где $k_1 = 1 - 1/2p$, если $R_0 u = u$ и $k_1 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и, аналогично, $k_2 = 1 - 1/2p$, если $R_1 u = u$ и $k_2 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае. Пусть также

$$g_i^{\pm} \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0);\ i = 1,2,...,m-1. \tag{1.129}$$

Условия согласования при $t = 0$ имеют вид:

$$R(0,x)u_0|_{\partial\Omega} = \varphi(0,x),$$
$$R_0(0,x')u_0(x',0) = \varphi_0(0,x'),\ R_1(0,x')u_0(x',l) = \varphi_1(0,x'), \tag{1.130}$$

где каждое из равенств выполняется при $p > 3/2$, если соответствующий оператор R, R_0 или R_1 задает условие Дирихле, и при $p > 3$ в противном случае; при $p > 3$ считаем, что

$$g_i^+(0,x') = (u_{0x_n} - \alpha_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i-0}, \tag{1.131}$$

$$g_i^-(0,x') = (u_{0x_n} - \beta_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i+0}. \tag{1.132}$$

В случае $Ru \neq u$ дополнительно потребуем, чтобы

$$a_{ij}|_{S_k} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_k)\ (i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m) \tag{1.133}$$

и $a_{ij}|_{S_k}$ допускают продолжение до функций класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k})$.

Введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
J_i^+(\varphi, g_i^+) = \quad & S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l_i+\tau) - \alpha_i^1\varphi(t,x',l_i+\tau) - \\
& \alpha_i^2\varphi(t,x',l_i-\tau) - g_i^+(t,x'+\tau n(x'))), \\
J_i^-(\varphi, g_i^-) = \quad & S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l_i-\tau) - \beta_i^1\varphi(t,x',l_i-\tau) - \\
& \beta_i^2\varphi(t,x',l_i+\tau) - g_i^-(t,x'+\tau n(x'))),\ i = 1,2,\dots,m-1, \\
& J_m^-(\varphi,\varphi_1) = J^{0,T}(\varphi,\varphi_1),\ J_0^+(\varphi,\varphi_0) = J_{0,T}(\varphi,\varphi_0), \\
I_0^+(\varphi,\varphi_0) = & S_{0,T}(-\varphi_{x_n}(t,x',\tau) + \sigma_0\varphi(t,x',\tau) - \varphi_0(t,x'+\tau n(x'))), \\
I_m^-(\varphi,\varphi_1) = & S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t,x',l-\tau) + \sigma_1\varphi(t,x',l-\tau) - \varphi_1(t,x'+\tau n(x'))).
\end{aligned}$$

Далее, мы будем предполагать, что:

B) если $R_i u = u$ $(i = 0,1)$ и $Ru = u$, то $\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t,x',r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $p > 2$ и $R_i u = u$ $(i = 0,1)$ и $Ru \neq u$, то $R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t,x',r_i)$; если $p > 2$, $R_i u \neq u$ $(i = 0,1)$ и $Ru = u$, то $R_i\varphi(t,x',r_i) = \varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $p > 2$ и $Ru = u$, то $R_i^+\varphi = g_i^+(t,x')|_{\partial\Omega}$ и $R_i^-\varphi = g_i^-(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $p = 2$, $R_0 u = u$ и $Ru \neq u$, или $R_1 u = u$ и $Ru \neq u$, то $J_0^+(\varphi,\varphi_0) < \infty$ или $J_m^-(\varphi,\varphi_1) < \infty$, соответственно; если $p = 2$ и $Ru = u$, то предположим, что $J_i^\pm(\varphi, g_i^\pm) < \infty$ $(i = 1,2,\dots,m-1)$ и если $R_0 u \neq u$ или $R_1 u \neq u$, то $I_0^+(\varphi,\varphi_0) < \infty$ или соответственно, $I_m^-(\varphi,\varphi_1) < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, \min_i(l_i - l_{i-1}))$, $\delta < \delta_0$.

Теорема 1.9. *Пусть $p \neq 3/2, p \neq 3$, выполнены условия* (1.123)-(1.132), B) *и условие* (1.49) *если $Ru = u$ и* (1.49), (1.133) *если $Ru \neq u$. Тогда существует единственное решение задачи* (1.118)-(1.122) *такое, что $u|_{Q^i} \in W_p^{1,2}(Q^i)$.*

Доказательство. Вначале мы сведем задачу к задаче с однородными начальным условием и граничным условием на S^0. Построим функции $v_{0i} \in W_p^{2,1}(Q^i)$ такие, что $v_{0i}(x,0) = u_0(x)$. Достаточно, продолжить функция u_0 с сохранением класса в $\mathbb{R}^n$ как функцию с компактным носителем (существование такого продолжения вытекает из теоремы 4.2.3 в [1]) и затем воспользоваться теоремой 5.5 в [114], взяв в качестве v_{0i} решение задачи Коши $v_{0it} - \Delta v_{0i} = 0,\ v_{0i}(x,0) = u_0(x)$. Введем функцию $\varphi^1 = \varphi - Rv_{0i} \in W_p^{k_0,2k_0}(S_i)$, имеем, что при соответствующих p $\varphi^1(0,x) = 0$. Продолжим функцию φ^1 из S_i через плоскости $x_n = l_{i-1}, x_n = l_i$ на множество $\tilde{S}_i = \partial\Omega \times (2l_{i-1} - l_i, 2l_i - l_{i-1})$ с сохранением класса с помощью метода Хестенса. Строим область $\tilde{G}_i \subset \tilde{G}^i = \Omega \times (2l_{i-1} - l_i, 2l_i - l_{i-1})$ такую, что $\tilde{G}_i \supset \Omega \times (3l_{i-1}/2 - l_i/2, 3l_i/2 - l_{i-1}/2)$ и $\partial\tilde{G}_i \in C^2$. Построим также продолжение f_i функции f в область $(0,T) \times \tilde{G}_i$, полагая $f \equiv 0$ в $\tilde{G}_i \setminus G_i$. Далее возьмем функцию $\psi_i(x_n) \in C_0^\infty(3l_{i-1}/2 - l_i/2, 3l_i/2 - l_{i-1}/2)$ такую, что $\psi_i(x_n) = 1$ при $x_n \in (l_{i-1}, l_i)$. Коэффициенты оператора R (если $Ru \neq u$) продолжаем в область $\tilde{G}^i$ четным образом относительно плоскостей $x_n = l_j$, $j = i-1, i$, равно как и коэффициенты оператора L. Ищем функцию $V_i \in W_p^{1,2}((0,T) \times \tilde{G}_i)$ как решение задачи

$$V_{it} - LV_i = f_i - Mv_{0i},\ RV_i = \varphi^1\psi_i|_{(0,T)\times\partial\tilde{G}_i},\ V_i|_{t=0} = 0. \tag{1.134}$$

Функция V_i существует, единственна и принадлежит требуемому классу (см. теорему 10.4 в [6] и теорему 2.1 в [4]). Положим $\Phi(t,x) = V_i(t,x) + v_{0i}(t,x)$ при $(t,x) \in Q^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. По построению, $\Phi(0,x) = u_0(x)$, $R\Phi|_{S^0} = \varphi$ и более того $M\Phi = Mv_{0i} + MV_i = f$ в Q^i. Поскольку операторы продолжения данных и оператор, сопоставляющий данным решение V_i задачи (1.134) были непрерывны в соответствующих классах, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^m \|\Phi\|_{W_p^{1,2}(Q^i)} \le c \sum_{i=1}^m (\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^i)} + \|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S_i)} + \|f\|_{L_p(Q^i)}),$$

где постоянная c не зависит от u_0, φ. Сделаем замену $u = v + \Phi$. Придем к задаче

$$v_t - Lv = 0. \tag{1.135}$$

$$Rv|_{S^0} = 0,\ v(0,x) = 0\ (x \in G), \tag{1.136}$$

$$R_0 v(t,x',0)=\tilde\varphi_0=\varphi_0-R_0\Phi(t,x',0);$$
$$R_1 v(t,x',l)=\tilde\varphi_1=\varphi_1(t,x')-R_1\Phi(t,x',l), \quad (1.137)$$

$$R_i^+ v=(v_{x_n}-\alpha_i^1(x',t)v)|_{x_n=l_i+0}-\alpha_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i-0}=\tilde g_i^+=g_i^+-R_i^+\Phi; \quad (1.138)$$

$$R_i^- v=(v_{x_n}-\beta_i^1(x',t)v)|_{x_n=l_i-0}-\beta_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i+0}=\tilde g_i^-=g_i^--R_i^-\Phi. \quad (1.139)$$

Проверим, что новые данные также удовлетворяют условиям согласования B), (1.130)-(1.132). Условие (1.130) выполнено, поскольку новые функции u_0,φ просто нули и $\tilde\varphi_0(0,x')=\varphi_0(0,x')-R_0\Phi(0,x',0)=\varphi_0(0,x')-R_0u_0(x',0)=0$ в силу (1.130), аналогично $\tilde\varphi_1(0,x')=0$ при соответствующих p. При $p>3$ в силу (1.131), (1.132) имеем, что

$$\tilde g_i^+(0,x')=g_i^+(0,x')-R_i^+u_0=0,\ \tilde g_i^-(0,x')=g_i^-(0,x')-R_i^-u_0=0.$$

В силу условия B), имеем: если $R_iv=v$ $(i=0,1)$ и $Rv=v$, то $\tilde\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}=\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}-\Phi(t,x',r_i)|_{\partial\Omega}=\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}-\varphi(t,x',r_i)=0$ $(r_0=0,r_1=l)$; если $p>2$ и $R_iv=v$ $(i=0,1)$ и $Rv\neq v$, то $R(t,x',r_i)\tilde\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}=R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}-R\Phi(t,x',r_i)|_{\partial\Omega}=R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}-\varphi(t,x',r_i)=0$; если $p>2$, $R_iv\neq v$ $(i=0,1)$ и $Rv=v$, то $\tilde\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}=\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}-R_i\Phi(t,x',r_i)=0$. Проверим, что: если $p=2$, $R_0v=v$ и $Rv\neq v$, или $R_1v=v$ и $Rv\neq v$, то $J_0^+(0,\tilde\varphi_0)<\infty$ или $J_m^-(0,\tilde\varphi_1)<\infty$, соответственно; если $p=2$ и $Rv=v$, то $J_i^\pm(0,\tilde g_i^\pm)<\infty$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$ для некоторого $\delta\in(0,\min_i(l_i-l_{i-1}))$, $\delta<\delta_0$, и если $R_0v\neq v$ или $R_1v\neq v$, то $I_0^+(0,\tilde\varphi_0)<\infty$ или соответственно, $I_m^-(0,\tilde\varphi_1)<\infty$ для некоторого $\delta\in(0,\min_i(l_i-l_{i-1}))$, $\delta<\delta_0$.

Рассмотрим, например, случай $R_0v=v$ и $Rv\neq v$. Проверим, что $J_0^+(0,\tilde\varphi_0)<\infty$. Имеем

$$\begin{gathered}J_0^+(0,\tilde\varphi_0)=\\ \int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',0)(\varphi_0(t,x'+\tau n(x'))-\Phi(t,x'+\tau n(x'),0))|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt\le\\ 2\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',0)\varphi_0(t,x'+\tau n(x'))-\varphi(t,x',\tau)|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt+\\ 2\int_0^T\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',\tau)\Phi(t,x',\tau)-R(t,x',0)\Phi(t,x'+\tau n(x'),0)|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt.\end{gathered} \quad (1.140)$$

Первый интеграл здесь конечен в силу условия B). Второй интеграл оценивался в доказательстве леммы 1.10 и он оценивается через $c_1\|\Phi\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(G^1))}$. Таким образом, условие $J_0^+(0,\tilde{\varphi}_0) < \infty$ выполнено. Доказательство остальных условий согласования при $p = 2$ проводится по той же схеме и мы их опустим. Рассмотрим вспомогательные задачи

$$v_{it} - Lv_i = 0, \ (t,x) \in Q^i. \tag{1.141}$$

$$Rv_i|_{S_i} = 0, \ v_i(0,x) = 0 \ (x \in G^i), \tag{1.142}$$

$$\tilde{R}_{0i}v_i = g^+_{i-1}, \ \tilde{R}_{1i}v_i = g^-_i, \ i = 1,2,\ldots,m, \tag{1.143}$$

где $\tilde{R}_{0i}v = -v_{x_n}|_{x_n=l_{i-1}}$ за исключением случая $i = 1$, в этом случае если $R_0v = v$, то $\tilde{R}_{01}v = v|_{x_n=0}$, и $\tilde{R}_{1i}v = v_{x_n}|_{x_n=l_i}$ за исключением случая $l = m$, в этом случае если $R_1v = v$, то $\tilde{R}_{1m}v = v|_{x_n=l}$. Используя теорему 1.5, можем построить на любом промежутке $[0,\phi] \subset [0,T]$ решение этой задачи $v_i \in W_p^{1,2}(Q^i_\phi)$, удовлетворяющее оценке

$$\|v_i\|_{W_p^{1,2}(Q^i_\phi)} \le c(\|g^+_{i-1}\|_{\tilde{W}_p^{k_1,2k_1}(Q^0_\phi)} + \|g^-_i\|_{\tilde{W}_p^{k_2,2k_2}(Q^0_\phi))} + J_i(\phi)), \tag{1.144}$$

где постоянная c не зависит от $\phi \in (0,T]$ и $g_i^\pm$ и $k_1 = 1/2 - 1/2p$ за исключением случая $i = 1$, в этом случае если $R_0v = v$, то $k_1 = 1 - 1/2p$ и $k_2 = 1/2 - 1/2p$ за исключением случая $i = m$, в этом случае если $R_1v = v$, то $k_2 = 1 - 1/2p$. Если $p \neq 2$, то $J_i(\phi) = 0$. В случае $p = 2$ и $Rv = v$: если $\tilde{R}_{0i}v = -v_{x_n}|_{x_n=l_{i-1}}$ и $\tilde{R}_{1i}v = v_{x_n}|_{x_n=l_i}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, то

$$J_i(\phi) = \int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |g^+_{i-1}(t,x' + \tau n(x'))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt + \\ \int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |g^-_i(t,x' + \tau n(x'))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt;$$

если $\tilde{R}_{01}v = v|_{x_n=0}$ и $\tilde{R}_{11}v = v_{x_n}|_{x_n=l_1}$, то

$$J_1(\phi) = \int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |g^-_1(t,x' + \tau n(x'))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt;$$

если $\tilde{R}_{0m}v = -v_{x_n}|_{x_n=l_{m-1}}$ и $\tilde{R}_{1m}v = v|_{x_n=l}$, то

$$J_m(\phi) = \int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |g^+_{m-1}(t,x' + \tau n(x'))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt.$$

Если же $p=2$ и $Rv\neq v$, то: если $i=1$ и $R_0v=v$ то

$$J_1(\phi)=\int_0^\phi\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',0)g_0^+(t,x'+\tau n(x'))|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt;$$

если $i=m$ и $R_1v=v$, то

$$J_m(\phi)=\int_0^\phi\int_0^\delta\int_{\partial\Omega}|R(t,x',0)g_m^-(t,x'+\tau n(x'))|^2d\Gamma\frac{d\tau}{\tau}dt;$$

если же ни одно из этих условий не выполнено, то $J_i(\phi)=0$. Определим оператор X, сопоставляющий вектору $(g_0^+,g_1^-,...,g_{m-1}^+,g_m^-)=\vec{g}$ вектор решений $\vec{v}=(v_1,v_1,...,v_m)$ задач (1.141)-(1.143). Таким образом, $\vec{v}=X(\vec{g})$. Рассмотрим семейство задач зависящих от параметра $\tau\in[0,1]$.

$$v_t-Lv=0, \tag{1.145}$$

$$Rv|_{S^0}=0,\ v(0,x)=0\ (x\in G), \tag{1.146}$$

$$R_{0\tau}^+v=\tilde{\varphi}_0;\ R_{m\tau}^-v=\tilde{\varphi}_1, \tag{1.147}$$

$$R_{i\tau}^+v=(v_{x_n}-\tau\alpha_i^1(x',t)v)|_{x_n=l_i+0}-\tau\alpha_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i-0}=\tilde{g}_i^+; \tag{1.148}$$

$$R_{i\tau}^-v=(v_{x_n}-\tau\beta_i^1(x',t)v)|_{x_n=l_i-0}-\tau\beta_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i+0}=\tilde{g}_i^-,\ i=1,2,\ldots,m, \tag{1.149}$$

где $R_{0\tau}^+v=(-v_{x_n}+\tau\sigma_0v)|_{x_n=0}$ если $R_0v\neq v$, иначе $R_{0\tau}^+v=v|_{x_n=0}$ и $R_{m\tau}^-v=(v_{x_n}+\tau\sigma_1v)|_{x_n=l}$ если $R_1v\neq v$, иначе $R_{m\tau}^-v=v|_{x_n=l}$. При $\tau=1$ задача (1.145)-(1.149) совпадает с задачей (1.135)-(1.139). При $\tau=0$ задача имеет единственное решение такое, что $v|_{Q^i}=v_i$, где v_i – решение задачи (1.141)-(1.143) с $\vec{g}=(\tilde{\varphi}_0,\tilde{g}_1^-,\tilde{g}_1^+,\ldots,\tilde{g}_{m-1}^-,\tilde{g}_{m-1}^+,\tilde{\varphi}_1)$. Тогда равенства (1.145)-(1.149) можно переписать в виде

$$\vec{v}=\tau XT\vec{v}+X\vec{g}, \tag{1.150}$$

где вектор $T\vec{v}$ имеет координаты: $(Tv)_1=-\sigma_0v|_{x_n=0}$, если $R_0v\neq v$ и $(Tv)_1=0$ в противном случае, $(Tv)_{2m}=-\sigma_1v|_{x_n=0}$, если $R_1v\neq v$ и $(Tv)_{2m}=0$ в противном случае, $(Tv)_{2i}=\beta_i^1(x',t)v|_{x_n=l_i-0}+\beta_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i+0}$ и $(Tv)_{2i+1}=\alpha_i^1(x',t)v|_{x_n=l_i+0}+\alpha_i^2(x',t)v|_{x_n=l_i-0}$, где $i=1,2,\ldots,m-1$. Мы будем отождествлять функцию v с вектором $\vec{v}$, i-я координата которого есть функция $v|_{Q^i}$. Дальнейшее доказательство проведем в случае $R_0v\neq v$, $R_1v\neq v$, $Rv=v$. В оставшихся случаях доказательство только упрощается. Оператор XT можно рассматривать как ограниченное линейное отображение пространства H_ϕ функций

$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \prod_{i=1}^m W_p^{1,2}(Q_\phi^i)$, удовлетворяющих условиям (1.146), где $v|_{Q^i} = v_i$, в себя. В качестве нормы в H_ϕ берем норму $\|\vec{v}\|_{H_\phi} = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^i)}$. Получим априорные оценки, равномерные по параметру $\tau \in [0,1]$, которые гарантируют в том числе ограниченность оператора $XT : H_\phi \to H_\phi$. По лемме 1.3, если $v_i \in W_p^{1,2}(Q_\phi^i)$, то $v_i(t,x',l_k) \in \tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(Q_\phi^0)$ $(k = i-1, i)$ и справедлива оценка $\|v_i(t,x',l_k)\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(Q_\phi^0)} \leq c_1 \ \|v_i(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^i)}$, где постоянная c_1 не зависит от ϕ. Пусть $\vec{v} \in H_\phi$ - решение уравнения (1.150). Оценим $\|XT\vec{v}\|_{H_\phi}$ В силу оценок (1.144) имеем

$$\|XT\vec{v}\|_{H_\phi} = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^i)} \leq$$
$$c(\|\sigma_0 v_1(t,x',0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} + \|\sigma_1 v_m(t,x',l)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} +$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}(\|\beta_i^1 v_i(t,x',l_i) + \beta_i^2 v_{i+1}(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} +$$
$$\|\alpha_i^1 v_{i+1}(t,x',l_i) + \alpha_i^2 v_i(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)}) + I(\phi)), \quad (1.151)$$

где $I(\phi) = 0$ при $p \neq 2$ и при $p = 2$

$$I^2(\phi) = \int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\sigma_0 v_1(t, x' + \tau n(x'), 0)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt +$$
$$\int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\sigma_1 v_m(t, x' + \tau n(x'), l))|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt +$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}(\int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\beta_i^1 v_i(t, x' + \tau n(x'), l_i) + \beta_i^2 v_{i+1}(t, x' + \tau n(x'), l_i)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt +$$
$$\int_0^\phi \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\alpha_i^1 v_{i+1}(t, x' + \tau n(x'), l_i) + \alpha_i^2 v_i(t, x' + \tau n(x'), l_i)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt.$$

Ссылаясь на лемму 1.8, можем переписать неравенство (1.151) в виде

$$\|XT\vec{v}\|_{H_\phi} = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi^i)} \leq c_1(\|v_1(t,x',0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} +$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}(\|v_i(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} + \|v_{i+1}(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)}) +$$
$$\|v_m(t,x',l)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\phi^0)} + I(\phi)) = c_1(I_1(\phi) + I(\phi)). \quad (1.152)$$

Далее имеем, что

$$\|v_i(t,x',l_i)\|^p_{\tilde W^{s_0}_p(0,\phi)} = \int_0^\phi \frac{|v_i|^p}{t^{s_0 p}}dt+$$
$$\int_0^\phi\int_0^\phi \frac{|v_i(t,x',l_i)-v_i(\xi,x',l_i)|^p}{|t-\xi|^{1+s_0 p}}dtd\tau \le \phi^{(s_1-s_0)p}\|v_i(t,x',l_i)\|^p_{\tilde W^{s_1}_p(0,\phi)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v_i(t,x',l_i)\|_{L_p(\Omega;\tilde W^{s_0}_p(0,\phi))} \le \phi^{1/2}\|v_i(t,x',l_i)\|_{L_p(\Omega;\tilde W^{s_1}_p(0,\phi))}.$$

По лемме 1.3 правая часть оценивается через $C\phi^{1/2}\|v_i(t,x)\|_{W^{1,2}_p(Q^i_\phi)}$. Таким образом, имеем неравенство:

$$\|v_i(t,x',l_i)\|_{L_p(\Omega;\tilde W^{s_0}_p(0,\phi))} \le C\phi^{1/2}\|v_i\|_{W^{1,2}_p(Q^i_\phi)}, \qquad (1.153)$$

где постоянная C не зависит от φ. Рассмотрим нормы, входящие в (1.152). Имеем в силу (1.153), что

$$\|v_i(t,x',l_i)\|^p_{\tilde W^{s_0,2s_0}_p(Q^0_\phi)} =$$
$$\|v_i(t,x',l_i)\|^p_{L_p(\Omega;\tilde W^{s_0}_p(0,\phi))} + \|v_i(t,x',l_i)\|^p_{L_p(0,\phi;W^{2s_0}_p(\Omega))} \le$$
$$c_3\phi^{p/2}\|v_i\|_{W^{1,2}_p(Q^i_\phi)} + c_4\|v_i(t,x)\|^p_{L_p(0,\phi;W^1_p(G^i))} \le c_5\phi^{p/2}\|v_i\|^p_{W^{1,2}_p(Q^i_\phi)}. \qquad (1.154)$$

Здесь при оценке последнего слагаемого мы воспользовались теоремой о следах ([1, теорема 4.7, с. 412]) и соответствующей оценкой $\|v_i\|_{W^{1-1/p}_p(\Omega)} \le c_1\|v_i\|_{W^1_p(G^i)}$, интерполяционным неравенством $\|v_i\|_{W^1_p(G^i)} \le C\|v_i\|^{1/2}_{L_p(G^i)}\|v_i\|^{1/2}_{W^2_p(G^i)}$ и неравенством $\|v_i\|_{L_p(0,\phi;L_p(G^i))} \le \phi\|v_{it}\|_{L_p(0,\phi;L_p(G^i))}$ ($v_i(0,x)=0$), вытекающим из формулы Ньютона–Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от ϕ. Окончательная оценка для выражения I_1 имеет вид

$$I_1(\phi) \le c_6\phi^{1/2}\|\vec v\|_{H_\phi}, \qquad (1.155)$$

где постоянная c_6 не зависит от ϕ. Рассмотрим случай $p=2$ и оценим выражение $I(\phi)$. Каждое из слагаемых входящих в выражение I оценивается одинаково. Рассмотрим, например, первое слагаемое

$$I_0 = \int\limits_0^{\phi} \int\limits_0^{\delta} \int\limits_{\partial\Omega} |\sigma_0 v_1(t, x' + \tau n(x'), 0)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt \leq$$

$$c_1 \int\limits_0^{T} \int\limits_0^{\delta} \int\limits_{\partial\Omega} |v_1(t, x' + \tau n(x'), 0)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt$$

Используем рассуждения из леммы 1.10. Имеем неравенство

$$|v_1(t, x' + \tau n(x'), 0)|^2 =$$

$$|\int\limits_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n-1} v_{1x_i}(t, x' + \xi n(x'), \tau - \xi) n_i - v_{1x_n}(t, x' + \xi n(x'), \tau - \xi)\, d\xi|^2 =$$

$$|\int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n-1} v_{1x_i}(t, x' + (\tau - \eta) n(x'), \eta) n_i - v_{1x_n}(t, x' + (\tau - \eta) n(x'), \eta)\, d\eta|^2 \leq$$

$$c_2 \tau \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} |v_{1x_i}(t, x' + (\tau - \eta) n(x'), \eta|^2\, d\eta.$$

Как и при оценке правой части в неравенстве (1.56), получим

$$I_0 \leq c_2 \|v_1(t, x)\|^2_{L_2(0,\phi; W_p^1(G^1))}, \tag{1.156}$$

при условии, что параметр $\delta > 0$ выбран также как и в лемме 1.10 (или взят меньшим). Далее как и ранее используем оценку $\|v_1\|_{W_p^1(G^1)} \leq C\|v_1\|^{1/2}_{L_p(G^1)} \|v_1\|^{1/2}_{W_p^2(G^1)}$ и неравенство $\|v_1\|_{L_p(0,\phi;L_p(G^1))} \leq \phi \|v_{1t}\|_{L_p(0,\phi;L_p(G^1))}$ $(v_1(0, x) = 0)$, вытекающее из формулы Ньютона-Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от ϕ. Тогда будем иметь неравенство

$$I_0 \leq c_3 \phi \|v_1(t, x)\|^2_{W_2^{1,2}(Q^1_\phi)}. \tag{1.157}$$

Остальные слагаемые в выражении $I(\phi)$ допускают аналогичные оценки. Таким образом, используя (1.157) и его аналоги для функций $v_i(t, x)$, (1.155), придем к неравенству $\|XT\vec{v}\|_{H_\phi} \leq c\phi^{1/2} \|\vec{v}\|_{H_\phi}$, где постоянная c не зависят от ϕ. Таким образом, если $\phi \leq \gamma_0$, $c\gamma_0^{1/2} = 1/2$, то оператор XT является сжимающим для любого $\tau \in [0, 1]$ и значит решение уравнения (1.150) удовлетворяет оценке

$\|\vec{v}\|_{H_\phi} \leq 2\|X\vec{g}\|_{H_\phi}$, $\forall \phi \leq \gamma_0$. Далее мы покажем, что найдется такой параметр $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такой, что из неравенства

$$\|\vec{v}\|_{H_\phi} \leq \alpha_1 \tag{1.158}$$

для решений уравнения (1.150) вытекает оценка $\|\vec{v}\|_{H_{min(\phi+\gamma_1,T)}} \leq \alpha_2$, где параметры α_2 и γ_1 зависят от норм данных и не зависят от $\tau \in [0,1]$ и $\phi \in (0,T)$. Возьмем параметр $\gamma_1 \leq \gamma_0$ и предположим, что справедлива оценка (1.158). Продолжим $\vec{v}$ нулем при $t < 0$. Определим вектор-функцию $\vec{v}_0(t,x)$ и соответствующую функцию v_0 такую, что $v_0|_{Q^i} = v_i^0$ следующим образом: $\vec{v}_0(t,x) = \vec{v}(t,x)$ при $t \leq \phi$ и $\vec{v}_0(x,t) = \vec{v}(2\phi - t, x)$ при $t \in (\phi, T)$. Имеем, что $\vec{v}_0 = (v_1^0, \ldots, v_m^0) \in H_T$ и $\|\vec{v}_0\|_{H_T} \leq 2\|\vec{v}\|_{H_\phi}$. Определим вектор $\vec{\Psi}$ и соответствующую функцию Ψ, которая есть решение задачи

$$M\Psi = -Mv_0,\ R\Psi|_{S^0} = 0,\ \Psi(0,x) = 0,\ -\Psi_{x_n}\big|_{x_n=0} = \tilde{\varphi}_0 - R_{0\tau}^+ v_0;$$
$$\Psi_{x_n}\big|_{x_n=l} = \tilde{\varphi}_1 - R_{m\tau}^- v_0,\ \Psi_{x_n}\big|_{x_n=l_i-0} = \tilde{g}_i^- - R_{i\tau}^- v_0,\ \Psi_{x_n}\big|_{x_n=l_i+0} = \tilde{g}_i^+ - R_{i\tau}^+ v_0.$$

Легко увидеть, что условия согласования для всех функций выполнены.
По теореме 1.4 существует единственное решение этой задачи из класса $\Psi_i \in W_p^{1,2}(Q^i)$ $(i = 1, 2\ldots, m)$ и справедлива оценка $\|\vec{\Psi}\|_{H_T} \leq c_1$, где без ограничения общности можем считать, что постоянная c_1 не зависит от τ. Далее сделаем замену $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\Psi} + \vec{\omega}$, таким образом $v = v_0 + \Psi + \omega$. Функция ω есть решение задачи

$$M\omega = 0,\ R\omega|_{S^0} = 0,\ R_{0\tau}^+\omega = -\tau\sigma_0\Psi|_{x_n=0},\ R_{m\tau}^-\omega_m = -\tau\sigma_m\Psi|_{x_n=l},$$
$$\omega(0,x) = 0,\ \omega_{x_n}|_{x_n=l_i-0} = \tau(\beta_i^1\omega|_{x_n=l_i-0} + \beta_i^2\omega|_{x_n=l_i+0}) + \tau\Psi_i^-,$$
$$\omega_{x_n}|_{x_n=l_i+0} = \tau(\alpha_i^1\omega|_{x_n=l_i+0} + \alpha_i^2\omega|_{x_n=l_i-0}) + \tau\Psi_i^+,$$

где $\Psi_i^+ = \alpha_i^1\Psi|_{x_n=l_i+0} + \alpha_i^2\Psi|_{x_n=l_i-0}$, $\Psi_i^- = \beta_i^1\Psi|_{x_n=l_i-0} + \beta_i^2\Psi|_{x_n=l_i+0}$. По построению, $\vec{\omega} = 0$ при $t \in [0,\phi], x \in G$. По лемме 1.5, $Mv_0 \in L_p(Q)$ и найдется постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$\|Mv_0\|_{L_p(Q)} \leq c_0\|\vec{v}_0\|_{H_T} \leq 2c_0\|\vec{v}_0\|_{H_\phi} \leq 2c_0c_1,$$

где постоянная c_0 зависит от норм коэффициентов уравнения в соответствующих классах. По построению

$$\vec{\omega} = \tau XT\vec{\omega} + \tau X\vec{f}, \tag{1.159}$$

где $\vec{f} = (-\sigma_0\Psi|_{x_n=0}, \Psi_1^-, \Psi_1^+, \ldots, \Psi_{m-1}^+, -\sigma_m\Psi|_{x_n=l})$. Мы имеем оценку (1.152), которая с учетом оценок вида (1.156) в данном случае записывается в виде

$$\|XT\vec{\omega}\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \leq c_1(\|\omega_1(t,x',0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})}+$$
$$\|\omega_m(t,x',l)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})} + \sum_{i=1}^{m-1}(\|\omega_i(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})}+$$
$$\|\omega_{i+1}(t,x',l_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})})) + c_2\sum_{i=1}^{m}\|\omega_i(t,x)\|_{L_2(0,\phi+\gamma_1;W_p^1(G^i))}, \quad (1.160)$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от ϕ и $\gamma_1 > 0$ – некоторая постоянная. Оценим норму

$$\|\omega_i(t,x',l_i)\|^p_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})} =$$
$$\|\omega_i(t,x',l_i)\|^p_{L_p(0,\phi+\gamma_1;W_p^{2s_0}(\Omega))} + \|\omega_i(t,x',l_i)\|^p_{L_p(\Omega;W_p^{s_0}(0,\phi+\gamma_1))}.$$

Для удобства положим $v(t) = \omega_i(t,x',l_i)$, опуская несущественные аргументы. Имеем

$$J = \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v|^p}{t^{s_0p}}\,dt + \int\limits_{0}^{\phi+\gamma_1}\int\limits_{0}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau =$$
$$\int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v(t)|^p}{t^{s_0p}}\,dt + \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int\limits_{0}^{\phi} \frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau+$$
$$\int\limits_{0}^{\phi}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau + \int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int\limits_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau.$$

В силу того, что $v = 0$ при $t \leq \phi$, второй интеграл может быть оценен так:

$$\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_0^{\phi} \frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau = \int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_0^{\phi} \frac{|v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau =$$
$$\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} |v(\tau)|^p\Big(\frac{1}{(\tau-\phi)^{s_0p}} - \frac{1}{\tau^{s_0p}}\Big)\frac{1}{s_0p}\,dt \leq \frac{1}{s_0p}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1} \frac{v(t\tau)|^p}{|\tau-\phi|^{s_0p}}\,dt.$$

Аналогично: $\int_0^{\phi}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau\le\frac{1}{s_0p}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\frac{|v(t)|^p}{|t-\phi|^{s_0p}}\,dt$. Тогда для величины J имеем оценку

$$J\le(1+\frac{2}{s_0p})\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\frac{|v(t)|^p}{|t-\phi|^{s_0p}}dt+\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\int_{\phi}^{\phi+\gamma_1}\frac{|v(t)-v(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+s_0p}}\,dtd\tau\le$$
$$(1+\frac{2}{s_0p})\gamma_1^{p/2}\|v(t)\|^p_{\tilde W_p^{s_1}(\phi,\phi+\gamma_1)}.$$

В силу леммы 1.3 (чтобы применить лемму, вначале делаем замену переменных $\xi=t-\phi$, $\eta=\tau-\phi$) имеем оценку

$$\int_{\Omega}J\,d\Omega=\|\omega_i(t,x',l_i)\|^p_{L_p(\Omega;W_p^{s_0}(0,\phi+\gamma_1))}\le C_0\|\omega_i\|^p_{W_p^{1,2}((\phi,\phi+\gamma_1)\times G^i)}\gamma_1^{1/2},\qquad(1.161)$$

где C_0 не зависит от ϕ,γ_1. Имеем

$$\|\omega_i(t,x',l_i)\|_{L_p(0,\phi+\gamma_1;W_p^{2s_0}(\Omega))}=$$
$$\|\omega_i(t,x',l_i)\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;W_p^{1-1/p}(\Omega))}\le c_1\|\omega_i(t,x)\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;W_p^1(G^i))}\le$$
$$c_2\|\omega_i(t,x)\|^{1/2}_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;W_p^2(G^i))}\|\omega_i(t,x)\|^{1/2}_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;L_p(G^i))}\le$$
$$c_3\|\omega_i(t,x)\|_{W_p^{1,2}((\phi,\phi+\gamma_1)\times G^i)}\gamma_1^{1/2},\quad(1.162)$$

Здесь как и при выводе оценки (1.154) мы воспользовались теоремой о следах ([1, теор. 4.7, с.412] и соответствующей оценкой $\|\omega_i\|_{W_p^{1-1/p}(\Omega)}\le c_1\|\omega_i\|_{W_p^1(G^i)}$, интерполяционным неравенством $\|\omega_i\|_{W_p^1(G^i)}\le C\|\omega_i\|^{1/2}_{L_p(G^i)}\|\omega_i\|^{1/2}_{W_p^2(G^i)}$ и неравенством $\|\omega_i\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;L_p(G^i))}\le\phi\|\omega_{it}\|_{L_p(\phi,\phi+\gamma_1;L_p(G^i))}$ ($\omega_i(\phi,x)=0$), вытекающим из формулы Ньютона-Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от ϕ. Из оценок (1.161), (1.162) вытекает оценка

$$\|\omega_i(t,x',l_i)\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})}\le c_5\|\omega_i(t,x)\|_{W_p^{1,2}((\phi,\phi+\gamma_1)\times G^i)}\gamma_1^{1/2}.$$

Аналогично получим

$$\|\omega_i(t,x',l_{i-1})\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(Q^0_{\phi+\gamma_1})}\le c_6\|\omega_i(t,x)\|_{W_p^{1,2}((\phi,\phi+\gamma_1)\times G^i)}\gamma_1^{1/2}.$$

Как и при выводе (1.162) получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{m}\|\omega_i(t,x)\|_{L_2(0,\phi+\gamma_1;W_p^1(G^i))}\le c_7\|\omega_i(t,x)\|_{W_p^{1,2}((\phi,\phi+\gamma_1)\times G^i)}\gamma_1^{1/2}.$$

Последние три оценки и (1.160) влекут, что

$$\|XT\vec{\omega}\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \le c_8 \|\vec{\omega}\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \gamma_1^{1/2},$$

где постоянная c_8 не зависит от γ_1, ϕ. Из равенства (1.159) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \le \|XT\vec{\omega}\|_{H_{\phi+\gamma_1}} + \|X\vec{f}\|_{H_T} \le c_8 \|\vec{\omega}\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \gamma_1^{1/2} + \|X\vec{f}\|_{H_T}.$$

Выберем γ_2 так, чтобы $C_8 \gamma_2^{1/2} = 1/2$, тогда при $\gamma_1 \le \gamma_2$ из предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\|\omega\|_{H_{\phi+\gamma_1}} \le 2\|X\vec{f}\|_{H_T} = c_9. \tag{1.163}$$

Постоянная c_9 зависит от норм данных и постоянной α_1. Возьмем $\phi = \gamma_0$. Из оценки (1.163) вытекает и соответствующая оценка для функции v уже на промежутке $[0, \gamma_0 + \gamma_1]$. Повторяя рассуждения выпишем оценку для функции v на $[0, \gamma_0 + 2\gamma_1]$, $[0, \gamma_0 + 3\gamma_1]$ и т.д. За конечное число шагов мы достигнем конца промежутка T. Это позволяет утверждать, что на всем промежутке $[0, T]$ справедлива оценка

$$\|v\|_{H_T} \le c\Big[\sum_{i=1}^{m-1}(\|g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q_i^0)} + \|g_i^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q_i^0)}) + \|f\|_{L_p(Q)} +$$
$$\|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S^0)} + \|\varphi_0\|_{W_p^{k_1,2k_1}(Q^0)} + \|\varphi_1\|_{W_p^{k_2,2k_2}(Q^0)} + \sum_{i=1}^{m} \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^i)}\Big] \tag{1.164}$$

с некоторой постоянной c не зависящей от $\tau \in [0, 1]$. Далее мы сошлемся на метод продолжения по параметру (см. теорему 3.13 гл. 3 в [119]) согласно которому уравнение (1.150) разрешимо для всех $\tau \in [0, 1]$. Решение будет удовлетворять оценке (1.164), из которой вытекает и единственность решений задачи. $\square$

Как и ранее, мы можем немного переформулировать утверждение теоремы 1.9. Запишем условия

$$\alpha_i^k(x', t), \beta_i^k(x', t) \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0) \ \ (k = 1, 2;\ i = 1, 2 \ldots, m-1), \tag{1.165}$$

$$\sigma \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i), \tag{1.166}$$

$$\sigma_0, \sigma_1 \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0). \tag{1.167}$$

В случае $Ru \ne u$ дополнительно потребуем, чтобы

$$a_{ij}|_{S_k} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i) \ (i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m). \tag{1.168}$$

Теорема 1.10. *Пусть $p > n+2$. Тогда при выполнении условий теоремы* 1.9, *где любое из включений в условиях* (1.124)-(1.129), (1.133) *заменено на соответствующее включение из* (1.165)-(1.168), *утверждение теоремы* 1.9 *имеет место.*

1.3.2 Возможные обобщения и уточнения результатов.

Первый результат, который мы приведем - уточнение теоремы 1.9 в случае $n = 1$. Хотя конечно этот результат является следствием теоремы 1.9, ряд условий согласования здесь может быть опущен и условия разрешимости формулируются немного по другому.

В нашем случае $G = (0,l)$, $G^i = (l_{i-1}, l_i)$, $Lu = a(t,x)u_{xx} - a_1(t,x)u_x - a_0(t,x)u$. Мы рассматриваем параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f. \tag{1.169}$$

Уравнение (1.169) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$R_0 u|_{x=0} = \varphi_0(t), R_1 u|_{x=l} = \varphi_1(t),\ u(0,x) = u_0(x)\ (x \in G), \tag{1.170}$$

где $R_i u = u$ или $R_i u = u_x + \sigma_i(t)u$; а также условиями сопряжения:

$$R_i^+ u = (u_x - \alpha_i^1(t)u)|_{x=l_i+0} - \alpha_i^2(t)u|_{x_n=l_i-0} = g_i^+(t), \tag{1.171}$$

$$R_i^- u = (u_x - \beta_i^1(t)u)|_{x=l_i-0} - \beta_i^2(t)u|_{x=l_i+0} = g_i^-(t),\ i = 1,2,...,m-1. \tag{1.172}$$

Запишем условия на коэффициенты. В условиях ниже $\varepsilon_0 > 0$ – некоторый фиксированный параметр (он может быть как угодно малым). Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q),\quad a_0 \in L_r(Q),\ a \in C(Q^i)\ (i = 1, \dots, m) \tag{1.173}$$

где $q > 3$ при $p \leq 3$ и $q = p$ при $p > 3$, $r > 3/2$ при $p \leq 3/2$ и $r = p$ при $p > 3/2$, и функция $a|_{Q^i}$ допускает продолжение до непрерывной строго положительной функции класса $C(\overline{Q^i})$ $(i = 1, \dots, m)$. Далее предположим, что

$$\alpha_i^k(t), \beta_i^k(t) \in C^{s_0+\varepsilon_0}([0,T])\ (k = 1,2;\ i = 1, 2 \dots, m-1),$$
$$\sigma_0, \sigma_1 \in C^{s_0+\varepsilon_0}([0,T]). \tag{1.174}$$

$$u_0(x) \in \cap_{i=1}^m W_p^{2-2/p}(G^i), \varphi_0 \in W_p^{k_1}(0,T),\ \varphi_1 \in W_p^{k_2}(0,T), \tag{1.175}$$

где $k_1 = 1 - 1/2p$, если $R_0 u = u$ и $k_1 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и, аналогично, $k_2 = 1 - 1/2p$, если $R_1 u = u$ и $k_2 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае. Пусть также

$$g_i^{\pm} \in W_p^{s_0}(0,T),\ i = 1,2,...,m-1. \tag{1.176}$$

Условия согласования при $t = 0$ имеют вид:

$$R_0 u_0(0) = \varphi_0(0),\ R_1 u_0(l) = \varphi_1(0), \tag{1.177}$$

где каждое из равенств выполняется при $p > 3/2$, если соответствующий оператор R_0 или R_1 задает условие Дирихле, и при $p > 3$ в противном случае; при $p > 3$ считаем, что

$$g_i^+(0) = (u_{0x_n} - \alpha_i^1(0)u_0)|_{x=l_i+0} - \alpha_i^2(0)u_0|_{x=l_i-0}, \tag{1.178}$$

$$g_i^-(0) = (u_{0x_n} - \beta_i^1(0)u_0)|_{x=l_i-0} - \beta_i^2(0)u_0|_{x=l_i+0}. \tag{1.179}$$

Теорема 1.9 может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 1.11. *Пусть* $p \neq 3/2, p \neq 3$, *выполнены условия* (1.173)-(1.179). *Тогда существует единственное решение задачи* (1.169)-(1.172) *такое, что* $u|_{Q^i} \in W_p^{1,2}(Q^i)$.

Далее, мы приведем некоторые следствия из основных результатов, которые могут быть интересны сами по себе. Первое возможное обобщение результатов относится к виду граничных условий на S^0, имеющих вид $Ru|_{S^0} = \varphi(t,x)$, где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$. Вообще говоря, все результаты сохраняют свою силу, если мы заменим граничные условия такого типа условием

$$P_0 u|_{S^0} = \varphi^0(t,x), \quad (I - P_0)(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u) = \varphi^1(t,x), \tag{1.180}$$

где P_0 – ортопроектор в $\mathbb{C}^h$, т.е. для различных компонент вектора u могут задаваться различные условия на S^0, I – тождественный оператор. В этом случае все условия на коэффициенты остаются прежними, однако изменится вид условий согласования. Мы рассмотрим только самый простой случай, когда имеет место равенство

$$[P_0, \sigma_i] = P_0\sigma_i - \sigma_i P_0 \equiv 0\ (i = 0,1), \quad [P_0, \alpha_i^k] \equiv 0,\ [P_0, \beta_i^k] \equiv 0. \tag{1.181}$$

Введем обозначения

$$J_i^+(\varphi^0, g_i^+) = S_{0,T}(\varphi^0_{x_n}(t,x',l_i+\tau)-$$
$$\alpha_i^1\varphi^0(t,x',l_i+\tau)-\alpha_i^2\varphi^0(t,x',l_i-\tau)-P_0g_i^+(t,x'+\tau n(x'))),$$
$$J_i^-(\varphi^0, g_i^-) = S_{0,T}(\varphi^0_{x_n}(t,x',l_i-\tau)-$$
$$\beta_i^1\varphi^0(t,x',l_i-\tau)-\beta_i^2\varphi^0(t,x',l_i+\tau)-P_0g_i^-(t,x'+\tau n(x'))),$$
$$J_m^-(\varphi^1,\varphi_1) = S_{0,T}(\varphi^1(t,x',l-\tau)-(I-P_0)R(t,x',l)\varphi_1(t,x'+\tau n(x'))),$$
$$I_0^+(\varphi^0,\varphi_0) = S_{0,T}(-\varphi^0_{x_n}(t,x',\tau)+\sigma_0\varphi^0(t,x',\tau)-P_0\varphi_0(t,x'+\tau n(x'))),$$
$$J_0^+(\varphi^1,\varphi_0) = S_{0,T}(\varphi^1(t,x',\tau)-(I-P_0)R(t,x',0)\varphi_0(t,x'+\tau n(x')),$$
$$I_m^-(\varphi^0,\varphi_1) = S_{0,T}(\varphi^0_{x_n}(t,x',\tau)+\sigma_1\varphi^0(t,x',\tau)-P_0\varphi_1(t,x'+\tau n(x'))).$$

Далее, мы будем предполагать, что:

C) если $R_iu = u$ $(i = 0,1)$, то $P_0\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi^0(t,x',r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $p > 2$ и $R_iu = u$ $(i = 0,1)$, то $(I-P_0)R(t,x',r_i)\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega} = \varphi^1(t,x',r_i)$; если $p > 2$, $R_iu \neq u$ $(i = 0,1)$, то $R_i\varphi^0(t,x',r_i) = P_0\varphi_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $p > 2$, то $R_i^+\varphi^0 = P_0g_i^+$ и $R_i^-\varphi^0 = P_0g_i^-$ $(i = 1,2\ldots,m-1)$; при $p = 2$, если $R_0u = u$ или $R_1u = u$, то $J_0^+(\varphi^1,\varphi_0) < \infty$ или $J_m^-(\varphi^1,\varphi_1) < \infty$, соответственно; $J_i^{\pm}(\varphi^0,g_i^{\pm}) < \infty$ $(i = 1,2,\ldots,m-1)$ и если $R_0u \neq u$ или $R_1u \neq u$, то $I_0^+(\varphi^0,\varphi_0) < \infty$ или соответственно, $I_m^-(\varphi^0,\varphi_1) < \infty$. При $p = 2$ все условия должны быть выполнены для некоторого $\delta \in (0, \min_i(l_i - l_{i-1}))$, $\delta < \delta_0$.

Условия согласования при $t = 0$ имеют вид:

$$(I-P_0)R(0,x)u_0|_{\partial\Omega} = \varphi^1(0,x),\ P_0u_0|_{\partial\Omega} = \varphi^0(0,x),$$
$$R_0(0,x')u_0(x',0) = \varphi_0(0,x'),\ R_1(0,x')u_0(x',l) = \varphi_1(0,x'), \quad (1.182)$$

где каждое из равенств должно выполняться при $p > 3/2$, если соответствующий оператор R, R_0 или R_1 задает условие Дирихле, и при $p > 3$ в противном случае;
при $p > 3$ считаем, что

$$g_i^+(0,x') = (u_{0x_n} - \alpha_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i-0}, \quad (1.183)$$

$$g_i^-(0,x') = (u_{0x_n} - \beta_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i+0}. \quad (1.184)$$

Также предположим, что

$$a_{ij}|_{Q^i} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(Q^i)\ (i = 1,\ldots,m,\ s_0 = 1/2 - 1/2p) \quad (1.185)$$

и $a_{ij}|_{Q^i}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^i})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 1.12. *Пусть* $p \neq 3/2, p \neq 3$, *выполнены условия* (1.123), (1.124)-(1.129), (1.181)-(1.185), (1.49) *и условие* C). *Тогда существует единственное решение задачи* (1.118),(1.120)-(1.122), (1.180) *такое, что* $u|_{Q^i} \in W_p^{1,2}(Q^i)$.

Доказательство проводится по той же схеме. Отметим, что условие Лопатинского на боковой поверхности S^0 выполнено и для смешанных условий вида (1.180) (см. утверждение 6.2.13 гл. 6 в [17]).

Замечание 1.2. *Вообще говоря граница области* Ω *может состоять из нескольких компонент связности. В этом случае на различных компонентах связности множества* S^0 *могут задаваться условия разного вида, скажем на одной компоненте условия Дирихле а на другой условия Неймана. Теорема 1.9 и в этом случае также остается справедливой. Изменится только формулировка условий согласования, на каждой компоненте связности они будут своими.*

Замечание 1.3. *Возникает вопрос о том можно ли брать в качестве оператора* L *оператор общего вида* $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} - a_0 u$ *такой, что, например, выполнено условие* (1.49)*? Результаты сохранят свою силу (рассматривается задача в той же постановке), если нормы коэффициентов* $\{a_{in}\}_{i=1}^{n-1}$ *в пространстве* $C(\overline{Q})$ *достаточно малы. Теорема 1.9 также может быть доказана при выполнении условия* $a_{jn}(t, x', l_i) = a_{nj}(t, x', l_i) = 0$ *для* $x' \in \partial\Omega$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ *и* $i = 0, 1, 2 \ldots, m$. *Доказательство проводится по схеме близкой к той, что была использована в теореме 1.4.*

1.4 Регулярная разрешимость задач сопряжения в эллиптическом случае

В этом параграфе мы приведем некоторые следствие из полученных выше результатов в применении к эллиптическому случаю, но немного упростим постановку. В более общей ситуации результаты также остаются справедливыми. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1.6), удовлетворяющего условиям (1.7)-(1.8). Пусть $\{b_i\}_{i=1}^r$ некоторый набор точек, лежащих на $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ и $B_\delta(b_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке b_i. Как и ранее $\Gamma = \partial G$. Параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \partial G = \emptyset$, $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)}) = \emptyset$ для $i \neq j$. Далее во всех условиях на данные считаем такой параметр фиксированным.

Введём обозначения: $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta = G_\delta \cap \Gamma_0$. Рассматривая задачу (1.6)-(1.8), мы предполагаем, что

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2, \quad \Gamma_\delta \in C^3, \tag{1.186}$$

где δ допустимый параметр такой, что $\delta < \delta_{G^-}$, и для любой координатной окрестности $U_i = \{y : \ |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma(y') < \delta_1\}$ точки b_i имеем, что $\overline{U_i} \subset G$. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Условие $\delta_1 > (M+1)\delta$ гарантирует вложение $B_\delta(b_i) \subset U_i$.

Оператор L считается эллиптическим, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in G.$$

Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения

$$Lu = f(x), \ x \in G, \ Bu|_\Gamma = g, \tag{1.187}$$

$$B^+u = \frac{\partial u^+}{\partial N} - \beta(u^+ - u^-) = g^+, \ \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N} + g^-, \ x \in \Gamma_0. \tag{1.188}$$

Опишем условия на данные, гарантирующие разрешимость задачи (1.187), (1.188). Считаем, что

$$a_i \in L_p(G) \ (i \geq 0), \ a_{ij} \in C(G^\pm) \ (\ i,j = 1, \ldots, n), \tag{1.189}$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{G^\pm})$ и

$$\sigma \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma), \ a_{ij}^\pm|_{\Gamma_0} \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma_0}), \ a_{ij}|_\Gamma \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{\Gamma}),$$
$$i,j = 1, \ldots, n, \tag{1.190}$$

где $a_{ij}^{\pm}(t,x_0) = \lim_{x\in G^{\pm},\ x\to x_0\in\Gamma_0} a_{ij}(t,x)$, параметр $\varepsilon_0 \in (0,\frac{1}{2})$ произволен (он может быть как угодно мал) и последнее включение в (1.190) считается выполненным, только если $Bu \neq u$ в (1.7);

$$a_i \in W_p^1(G_\delta^{\pm}))\ (i\geq 0),\ a_{ij} \in W_\infty^1(G_\delta^{\pm}))\ (i,j=1,2,\dots,n), \tag{1.191}$$

где $G_\delta^{\pm} = G_\delta \cap G^{\pm}$. Сразу отметим, что при $p>n$ утверждения приведенных ниже в этом параграфе теорем останется справедливым если мы заменим одно или несколько включений в (1.190) на соответствующие включения

$$\sigma \in W_p^{1-1/p}(\Gamma),\ a_{ij}^{\pm}|_{\Gamma_0} \in W_p^{1-1/p}(\Gamma),\ a_{ij}|_{\Gamma} \in W_p^{1-1/p}(\Gamma),\quad i,j=1,\dots,n, \tag{1.192}$$

где последнее включение требуется только если $Bu \neq u$ в (1.7). Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x)$. Мы используем выпрямление границы $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где y – локальная система координат в точке b_i. При выполнении условия (1.186) преобразование $x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z : |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U' : z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$. Мы считаем, что

$$g^{\pm} \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0),\ g \in W_p^{2k_0}(\Gamma). \tag{1.193}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле. Пусть

$$f \in L_p(G),\ \beta \in C^{2s_0+2\varepsilon_0}(\Gamma_0), \tag{1.194}$$

$$\beta \in C^{2s_1+2\varepsilon_0}(\Gamma_\delta). \tag{1.195}$$

При $p>n$ вместо (1.194), (1.195) достаточно потребовать выполнения условий

$$f \in L_p(G),\ \beta \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0), \tag{1.196}$$

$$\beta \in W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta). \tag{1.197}$$

В координатной окрестности U_i точки $b_i \in \Gamma_0$, выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Мы также предполагаем, что для каждого

$i = 1, 2, \ldots, r$

$$\nabla_{z'}\varphi_i f(x^i(z)) \in L_p(U'),$$
$$\nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0)) \in W_p^{2s_0}(B'_\delta),$$
$$\nabla_{z'}a^{\pm}_{kl}(x^i(z',0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(B'_\delta), \quad (k,l = 1, 2\ldots, n,\ \varepsilon_0 > 0). \quad (1.198)$$

Отметим, что условие (1.198) не зависит от введённой локальной системы координат y и системы координат z. Например, третье включение эквивалентно тому что, для любого гладкого касательного к Γ_0 векторного поля $l(x)$, $\frac{\partial \varphi_i g^+(x)}{\partial l} \in W_p^{2s_0}(B'_\delta)$. Каждая из производных $\frac{\partial}{\partial z_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ в переменных x может быть записана как производная по направлению некоторого касательного к Γ_0 векторного поля, которые в каждой точке образуют базис в касательной плоскости к Γ_0. Условие (1.198) может быть переформулировано и в исходной системе координат x, однако гораздо проще записать его в виде (1.198).

Следующий результат фактически есть следствие теоремы 1.7, где мы доказали эту теорему в параболическом случае.

Теорема 1.13. *Пусть выполнены условия* (1.189)–(1.190), (1.193)-(1.194) *и* $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$. *Тогда найдется параметр* $\lambda_0 > 0$ *такой, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует единственное решение задачи* (1.187)-(1.188) *такое, что* $u|_{G^\pm} \in W_p^2(G^\pm)$, *причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^2(G^+)} + \|u\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|u\|_{L_p(G)} \leq C_0(\|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}$$
$$+ \|g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)}),$$

где постоянная C_0 *не зависит от* λ.

Доказательство. Получим априорную оценку для решений. Положим $v = e^{\lambda t}u(x)$, где u решение задачи (1.187), (1.188). Эта функция есть решение задачи

$$v_t - Lv = f(x)e^{\lambda t}, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, T > 0,$$

$$Bv|_S = ge^{\lambda t} \quad (S = \Gamma \times (0,T)), \quad v|_{t=0} = u(x),$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(x) - \beta(v^+ - v^-)(x) = g^+(x)e^{\lambda t},\ \frac{\partial v^+}{\partial N}(x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(x) + g^-(x)e^{\lambda t},$$
$$(t,x) \in S_0 = (0,T) \times \Gamma_0,$$

Решение этой задачи существует, единственно и решение удовлетворяет оценке (см. теорему 1.7)

$$\|v_t\|_{L_p(Q)} + \|v\|_{L_p(0,T;W_p^2(G^+))} + \|v\|_{L_p(0,T;W_p^2(G^-))} \leq C_1(\|fe^{\lambda t}\|_{L_p(Q)} + \|g^+e^{\lambda t}\|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \|ge^{\lambda t}\|_{W_p^{k_0,2k_0}((0,T)\times\Gamma)} + \|g^-e^{\lambda t}\|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \|u\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}),$$

где C_1 – некоторая постоянная не зависящая от данных. Рассмотрим, например, норму

$$\|g^+e^{\lambda t}\|_{W_p^{s_0,2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} = (\|g^+e^{\lambda t}\|^p_{L_p(0,T;W_p^{2s_0}((0,T)\times\Gamma_0)} + \|g^+e^{\lambda t}\|^p_{L_p(\Gamma_0;W_p^{s_0}(0,T))})^{1/p},$$

где каждое норма в правой и левой части распадается в произведение норм по переменным t, x. Фиксируем $\lambda_0 > 0$ и пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Например, имеем неравенство

$$\|e^{\lambda t}\|_{W_p^{s_0}(0,T)} \leq c\|e^{\lambda t}\|^{s_0}_{W_p^1(0,T)}\|e^{\lambda t}\|^{1-s_0}_{L_p(0,T)} \leq c_1|\lambda|^{s_0}C(T,\lambda),$$
$$C(T,\lambda) = ((e^{p\lambda T}-1)/p\lambda)^{1/p},$$

откуда вытекает, что

$$(\|g^+e^{\lambda t}\|^p_{L_p(0,T;W_p^{2s_0}(\Gamma_0))} + \|g^+e^{\lambda t}\|^p_{L_p(\Gamma_0;W_p^{s_0}(0,T))})^{1/p} \leq C(T,\lambda)c_2(\|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}),$$

где постоянная c_2 не зависит от λ. Аналогичные рассуждения могут быть записаны и для остальных интегралов. Таким образом, используя определение нормы и структуру решения v получим неравенство

$$C(T,\lambda)(|\lambda|\|u\|_{L_p(G)}+\|u\|_{W_p^2(G^-)}+\|u\|_{W_p^2(G^+)}) \leq C_2C(T,\lambda)(\|f\|_{L_p(G)}+\|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)}) + C_1(\|u\|_{W_p^2(G^+)} + \|u\|_{W_p^2(G^-)}),$$

Делим обе части неравенства на $C(T,\lambda)$. Увеличивая постоянную λ_0 если необходимо мы можем считать, что $C_1/C(T,\lambda) \leq 1/2$ при $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда будет справедливо неравенство

$$|\lambda|\|u\|_{L_p(G)} + \|u\|_{W_p^2(G^-)} + \|u\|_{W_p^2(G^+)} \leq C_3(\|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)}),$$

где постоянная C_3 не зависит от λ. Эта априорная оценка как и в доказательстве теоремы 1.7 и метод продолжения по параметру в соответствии со схемой изложенной в этой теореме гарантирует разрешимость задачи в требуемом классе и соответствующую оценку для решений из утверждения теоремы. □

Оценку из утверждения теоремы можно улучшить в следующем смысле. Построим функцию $\varphi_{0i} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $supp\,\varphi_{0i} \subset B_\delta(b_i)$.

Лемма 1.12. *Пусть выполнены условия теоремы 1.13 и $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\varphi_{0i}u\|_{W_p^2(G^+)}+\|\varphi_{0i}u\|_{W_p^2(G^-)}+|\lambda|\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(G)} \leq C_0(\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)}+\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$
$$\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + |\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}J),$$
$$J = \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$
$$\|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0},$$

где постоянная C_0 не зависит от λ и $\varepsilon_0 \in (0, 1/15p)$ как угодно малая постоянная.

Доказательство. Утверждение доказывается довольно просто. Функция $v = \varphi_{0i}u$ есть решение задачи

$$-Lv = \varphi_{0i}f + [\varphi_{0i}, L]u = \tilde{f}, \quad B^+v\big|_S = \varphi_{0i}g^+ - [\varphi_{0i}, B^+]u,\ \ Bv|_\Gamma = 0,$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N} + \varphi_{0iN}(v^+ - v^-) + g^-\varphi_{1i},$$

где $[\varphi_{0i}, L]u = \varphi_{0i}Lu - L(\varphi_{0i}u) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk}u_{x_k}\varphi_{0ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk}u\varphi_{0ix_lx_k} - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_{0ix_k}u$ и $[\varphi_i, B^+]u = -\sum_{k,l=1}^n a_{kl}^+\nu_k\varphi_{0ix_l}u^+$. Применяя оценку из теоремы 1.13 к функции v, получим

$$\|v\|_{W_p^2(G^+)} + \|v\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)} \leq c_1(\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)} + \|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}$$
$$+ \|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+$$
$$\|u^+(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + |\lambda|^{s_0}\|u^+(x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta)}+$$
$$\|u^-(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + |\lambda|^{s_0}\|u^-(x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta)}+$$
$$\|u\|_{W_p^1(G^+\cap B_\delta(b_i))} + \|u\|_{W_p^1(G^-\cap B_\delta(b_i))}). \quad (1.199)$$

Последнее слагаемое оценивается через

$$\|u\|_{W_p^1(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} \le c_2\|u\|^{1/2}_{W_p^2(G^\pm\cap(B_{\delta_2}(b_i)))}\|u\|^{1/2}_{L_p(G^\pm\cap(B_{\delta_2}(b_i)))} \le$$
$$c_2|\lambda|^{-1/2}(\|u\|_{W_p^2(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} + |\lambda|\|u\|_{L_p(G^\pm\cap B_\delta(b_i))}) \le c_2|\lambda|^{-1/2}J.$$

Аналогично (используем еще теоремы о следах)

$$\|u^\pm(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + |\lambda|^{s_0}\|u^\pm(x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta)} \le$$
$$c_3|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}(\|u\|_{W_p^2(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} + |\lambda|\|u\|_{L_p(G^\pm\cap B_\delta(b_i))}) \le c_4|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}J,$$

где $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ как угодно малая постоянная. Действительно, первое слагаемое в предыдущей сумме оценивается через

$$\|u^\pm(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} \le c_5\|u^\pm(x^i(z))\|_{W_p^1(G^\pm\cap B_\delta(b_i))} \le c_6|\lambda|^{-1/2}J,$$

а второе через ($\theta = 1/2p + 2\varepsilon_0$)

$$|\lambda|^{s_0}\|u^\pm(x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta)} \le c_6|\lambda|^{s_0}\|u^\pm(x^i(z))\|_{W_p^{1/p+\varepsilon_0}(U^\pm)} \le$$
$$c_7|\lambda|^{s_0}\|u\|^{\theta}_{W_p^2(G^\pm\cap B_\delta(b^i))}\|u\|^{1-\theta}_{L_p(G^\pm\cap B_\delta(b^i))} \le c_8|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}J.$$

Подставляя полученные выше оценки в (1.199), получим неравенство

$$\|\varphi_{0i}u\|_{W_p^2(G^+)} + \|\varphi_{0i}u\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(G)} \le$$
$$C_2(\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)} + \|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} +$$
$$\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + c_6|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}J.$$

□

Теорема 1.14. *Пусть выполнены условия* (1.186), (1.189)–(1.198). *Тогда решение полученное в теореме 1.13 обладает тем свойством, что* $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in$

$W_p^2(U^\pm)$, $i=1,\dots,r$, *и справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^r(\|\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)}+|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z))\|_{L_p(U')})$$

$$\le C_1(|\lambda|^{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^r(\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+$$

$$\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)})+\sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(U')}$$

$$+\sum_{i=1}^r[\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)}+|\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0))\|_{L_p(G)}+$$

$$\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)}+|\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{L_p(B'_\delta)}]+|\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0}J),$$

где постоянная C_1 *не зависит от* $\lambda\ge\lambda_0$ *и* f,g,g^+, $\varphi_{0i}\in C_0^\infty(B_\delta)$, $\varphi_{0i}(x)=1$ *на* $supp\,\varphi_i$, *и* $\varepsilon_0\in(0,1/15p)$ *как угодно малая постоянная.*

Доказательство. Доказательство использует метод конечных разностей и оценку из леммы 1.12. Считаем для удобства, что $supp\,\varphi_{0i}=1$ на $B_{3\delta/4}$. Использование метода конечных разностей производится по схеме изложенной в доказательстве теоремы 4, п. 3, §2, гл.4 в [120]. Поэтому мы остановимся только на основных моментах. Возьмем точку $b_i\in\Gamma_0$. Умножая уравнение на φ_i, для $v=\varphi_i u$, имеем:

$$-Lv=\varphi_i f+[\varphi_i,L]u=\tilde f,\quad B^+v\big|_S=\varphi_i g^+-[\varphi_i,B^+]u,$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(x_0)=\frac{\partial v^-}{\partial N}(x_0)+\varphi_{iN}(v^+-v^-)+g^-\varphi_i,$$

где $[\varphi_i,L]u=\varphi_i Lu-L(\varphi_i u)=-2\sum_{l,k=1}^n a_{lk}u_{x_k}\varphi_{ix_l}-\sum_{l,k=1}^n a_{lk}u\varphi_{ix_lx_k}-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_{ix_k}u$
и $[\varphi_i,B^+]u=-\sum_{k,l=1}^n a^+_{kl}\nu_k\varphi_{ix_l}u^+$. Запишем L в локальной системе координат y и обозначим полученные коэффициенты через $\tilde a_{ij},\tilde a_i$. Выпрямим границу преобразованием $z_n=y_n-\gamma(y')$, $z'=y'$. Получим задачу

$$\tilde Lv=\tilde f,$$

$$\tilde B^+v\big|_{z_n=0}=\varphi_i g^+(x^i(z',0))-[\varphi_i,B^+]u^+(x^i(z',0))=\tilde g^+(z'),$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}=\frac{\partial v^-}{\partial N}+\varphi_{iN}(v^+-v^-)+g^-\varphi_i,\ \varphi_{iN}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial N}$$

где $\tilde{L}$, $\tilde{B}^+$ – операторы L, B^+, записанные в системе координат z. Обозначим коэффициенты $\tilde{L}$ через c_{kl}, c_k, оператор $\tilde{B}^+$ запишется в виде $\tilde{B}^+v = \sum_{k=1}^n b_k(z')v_{z_k} - \beta(z')(v^+ - v^-)$. Пусть $\Delta_j v(z) = (v(z+e_j\eta) - v(z))/\eta$ (e_j – j-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/8$ и $j \le n-1$. Тогда функция $w = \Delta_j v$ есть решение задачи

$$\tilde{L}(z,D)w = [\tilde{L}, \Delta_j]v + \Delta_j \tilde{f} = \tilde{f}_0,$$
$$\tilde{B}^+ w|_{z_n=0} = [\tilde{B}^+, \Delta_j]v + \Delta_j \tilde{g}^+ = \tilde{g}_0^+,$$
$$\frac{\partial w^+}{\partial N} = \frac{\partial w^-}{\partial N} + \Delta_j(\varphi_{iN}(v^+ - v^-)) + \Delta_j g^- \varphi_i + [\frac{\partial}{\partial N}, \Delta_j](w^+ - w^-), \quad (1.200)$$

где $[\tilde{L}, \Delta_j]v = -\sum_{k,l=1}^n \Delta_j c_{kl}(z) v_{z_k z_l}(z+e_j\eta) - \sum_{k=1}^n \Delta_j c_k(z) v_{z_k}(z+e_j\eta) - \Delta_j c_0(z) v(z+e_j\eta)$, $[\tilde{B}^+, \Delta_j]v = -\sum_{k=1}^n \Delta_j b_k v_{z_l}(z'+e_j'\eta, 0) + \Delta_j \beta(v^+ - v^-)(z' + e_j'\eta, 0)$, где e_j' - j-й координатный вектор в $\mathbb{R}^{n-1}$. Вернемся к переменным x и продолжим все функции в (1.200) нулем вне $U_j \cap G$. Тогда функция $w \in W_p^2(G^+) \cap W_p^2(G^-)$ есть решение задачи (1.187)-(1.188) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т.е.

$$Lw = \tilde{f}_0 \ \ \big(x \in G\big), \ \ Bw\big|_\Gamma = 0, \ B^+w = \tilde{g}_0^+, \ \frac{\partial w^+}{\partial N} = \frac{\partial w^-}{\partial N} + \tilde{g}^-.$$

По теореме 1.13, имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^2(G^+)} + \|w\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda| \|w\|_{L_p(G)} \le$$
$$c_0(\|\tilde{f}_0\|_{L_p(G)} + \|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \|\tilde{g}_0^+\|_{L_p(\Gamma_0)} + \|\tilde{g}^-\|_{\tilde{W}_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0} \|\tilde{g}^-\|_{L_p(\Gamma_0)}).$$

Наша следующая цель показать, что правая часть ограничена равномерно по параметру η. Это делается стандартным образом с использованием представлений

$$\Delta_j f = \int_0^1 f_{z_j}(z + e_j \tau \eta)\, d\tau.$$

Окончательное неравенство имеет вид

$$\|\Delta_j v(z)\|_{W_p^2(U^+)} + \|\Delta_j v(z)\|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda| \|\Delta_j v\|_{L_p(G)} \le c_1(\|\nabla_{z'} \varphi_i f\|_{L_p(U')} +$$
$$\|f\|_{L_p(G)} + \|\nabla_{z'} \varphi_i g^+\|_{W_p^{2s_0}(B_\delta')} + \|\nabla_{z'} \varphi_i g^+\|_{L_p(B_\delta')} |\lambda|^{s_0} + \|\nabla_{z'} \varphi_i g^-\|_{L_p(B_\delta')} |\lambda|^{s_0}$$
$$+ \|\nabla_{z'} \varphi_i g^-\|_{W_p^{2s_0}(B_\delta')} + \|u^+\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')} + |\lambda|^{s_0} \|u^+\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')} + \|u^-\|_{W_p^{1+2s_0}(B_{3\delta/4}')} +$$
$$|\lambda|^{s_0} \|u^-\|_{W_p^1(B_{3\delta/4}')} + \|u\|_{W_p^2(G^+ \cap B_{3\delta/4}(b_i))} + \|u\|_{W_p^2(G^- \cap B_{3\delta/4}(b_i))}) = J_2,$$

где постоянная c_1 не зависит от η. Используя лемму 1.12 получим оценку

$$\|\varphi_{0i}u(z)\|_{W_p^2(U^+)} + \|\varphi_{0i}u(z)\|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda|\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(G)} \leq c_2(\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$
$$\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)}+|\lambda|^{-1/2+2\varepsilon_0}J),$$

Далее из теорем вложения мы можем записать неравенство

$$\|u^+\|_{W_p^{1+2s_0}(B'_{3\delta/4})} + |\lambda|^{s_0}\|u^+\|_{W_p^1(B'_{3\delta/4})} + \|u^-\|_{W_p^{1+2s_0}(B'_{3\delta/4})} + |\lambda|^{s_0}\|u^-\|_{W_p^1(B'_{3\delta/4})}$$
$$\|u\|_{W_p^2(G^+\cap B_{3\delta/4}(b_i))} + \|u\|_{W_p^2(G^-\cap B_{3\delta/4}(b_i))} \leq c_3|\lambda|^{\varepsilon_0}(\|\varphi_{0i}u\|_{W_2^2(G^+\cap B_\delta(b_i))}$$
$$+ \|\varphi_{0i}u\|_{W_2^2(G^-\cap B_\delta(b_i))} + |\lambda|\|\varphi_{0i}u\|_{L_p(B_\delta(b_i))}).$$

Из двух последних неравенств вытекает, что величина J_2 допускает оценку

$$J_2 \leq c_4(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(U')} + \|f\|_{L_p(G)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{L_p(B'_\delta)}|\lambda|^{s_0}+$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{L_p(B'_\delta)}|\lambda|^{s_0}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g^-\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)}+c_5|\lambda|^{\varepsilon_0}(\|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|\varphi_{0i}g^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$
$$\|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|\varphi_{0i}g^-\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)}) + c_6|\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0}J),$$

В силу произвольности j и известных свойств конечных разностей (см. [8, гл. 1, лемма 4.6] и теорему 4 п.4, §3, гл. 3 в [121]), заключаем, что для всех $j = 1, 2, \dots, n-1$ существуют обобщенные производные $v_{z_j} \in W_p^2(U^+) \cap W_p^2(U^-)$. В силу произвольности параметров i, j справедлива оценка из утверждения теоремы. $\square$

ГЛАВА 2

Обратные задачи об определения коэффициентов теплообмена

Полученные в первой главе результаты здесь используются при исследовании вопросов корректности обратных задач об определения коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения. Мы также рассматриваем 3 случая. В первом случае рассматриваем параболические уравнения вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{2.1}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u$, $G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$. Здесь множество G^- может быть и многосвязным, соответственно пусть Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, r_0)$ компоненты связности множества Γ_0 и $S_i = (0,T) \times \Gamma_i$.

Уравнение (2.1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = g \;\; (S = \Gamma \times (0,T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2.2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x,t)u$ и условиями сопряжения

$$B_i^+u = \frac{\partial u^+}{\partial N}\big|_{S_i} - \beta_i(u^+ - u^-)\big|_{S_i} = g_i^+, \;\; \frac{\partial u^+}{\partial N}\big|_{S_i} = \frac{\partial u^-}{\partial N}\big|_{S_i}, \;\; i \le r_0 \tag{2.3}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i}\nu_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\pm(t,x_0)u_{x_i}^\pm \nu_j$, $u_{x_0}^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} u_{x_i}(t,x)$, $u^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} u(t,x)$, $a_{ij}^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} a_{ij}(t,x)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(b_i,t) = \psi_i(t) \; (i = 1, 2, \ldots, r_1), \quad u^-(b_i,t) = \psi_i(t) \; (i = r_1 + 1, \ldots, r), \tag{2.4}$$

где $b_i \in \Gamma_0$, $\{b_i\}$ – некоторый набор точек. Обратная задача состоит в нахождении решения уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям (2.2)-(2.4) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t,x)$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Во втором случае, как и в предыдущей главе рассматривается цилиндрическая пространственная область $G = \Omega \times (0, l)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega \in C^2$). Берем в качестве оператора L оператор вида $Lu = a_{nn}u_{x_nx_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u$. Положим $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0, l)$, $S^0 = (0,T) \times \Gamma_0$. Пусть l_i – некоторый набор чисел такой, что $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_m = l$. Положим $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $G^+ = \cup_i G^{2i}$ и $G^- = \cup_i G^{2i-1}$.

Уравнение (2.1) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{2.5}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x)\ (x \in G),\ R_0u(t,x',0) = \varphi_0, \quad R_1u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{2.6}$$

где $R_0u = u$ или $R_0u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1u = u$ или $R_1u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$B_i^+u = \frac{\partial u_i^+}{\partial N} - \beta_i(u_i^+ - u_i^-) = g_i^+,\ \frac{\partial u_i^+}{\partial N} = \frac{\partial u_i^-}{\partial N},\ i = 1, \ldots, m-1, \tag{2.7}$$

где $\frac{\partial u_i^\pm}{\partial N}(t,x') = \lim_{x_n \to l_i \pm 0} a_{nn}u_{x_n}(t,x',x_n), u_i^\pm = \lim_{x_n \to l_i \pm 0} u(t,x',x_n)$. Пусть $x_{ij} = (x'_{ij}, l_j) \in \Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1$, $\ i = 1, 2, \ldots, N_j$,) – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$\begin{gathered} u(t, x'_{ij}, x_n)|_{x_n = l_j + 0} = \psi_{ij}(t),\ i = 1, 2, \ldots, M_j, \\ u(t, x'_{ij}, x_n)|_{x_n = l_j - 0} = \psi_{ij}(t),\ i = M_j + 1, \ldots, N_j. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Обратная задача состоит в нахождении решения уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям (2.5)-(2.8) и неизвестных функций β_i вида $\beta_j = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t,x)$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Наконец в третьем случае мы рассматриваем модельную эллиптическую задачу, где рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$-Lu = f(x),\ Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u - \lambda u, \tag{2.9}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Считаем, что область G разделена на две области G^+ и G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$. Для простоты здесь считаем, что Γ_0 состоит из одной компоненты связности. Уравнение (2.9) дополняется краевыми условиями:

$$Bu|_\Gamma = g, \tag{2.10}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x)u$ и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) - \beta(u^+ - u^-)(x_0) = g^+(x_0),\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(x_0),\quad x_0 \in \Gamma_0, \tag{2.11}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0) = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \nu_j$, $u^\pm = \lim_{x \in G^\pm,\ x \to x_0 \in \Gamma_0} u(x)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. В этом случае мы предполагаем, что коэффициент β в (2.11) представим в виде $\beta = \sum_{i=1}^r \beta_j \Phi_j(x)$, где функции Φ_j заданы, а постоянные β_j считаются неизвестными. Рассматриваемая задача состоит в нахождении решения задачи (2.9)-(2.11) и неизвестных постоянных β_j таких, что

$$u^+(b_i) = \psi_i\ (i = 1, 2, \ldots, r_1),\quad u^-(b_i) = \psi_i\ (i = r_1 + 1, \ldots, r), \tag{2.12}$$

2.1 Вспомогательные утверждения и определения

Далее, мы считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован. Параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \Gamma = \emptyset$, $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Введём обозначения: $Q_\tau = (0, \tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $S_\tau^0 = (0, \tau) \times \Gamma_0$, $Q^\pm = (0, T) \times G^\pm$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G^\pm$, $S_\tau = (0, \tau) \times \Gamma$, $\Gamma_\delta = G_\delta \cap \Gamma_0$. Рассматривая задачу (2.1)—(2.4), мы предполагаем, что

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2,\quad \Gamma_\delta \in C^3, \tag{2.13}$$

где δ допустимый параметр такой, что $\delta < \delta_{\Gamma_0}$, и для любой координатной окрестности $U_i = \{y:\ |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma(y') < \delta_1\}$ точки b_i имеем, что $\overline{U_i} \subset G$. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Условие $\delta_1 > (M+1)\delta$ гарантирует вложение $B_\delta(b_i) \subset U_i$. Далее мы фиксируем такой параметр δ (он может быть выбран как угодно малым, если необходимо).

Оператор L считается эллиптическим, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall (t,x) \in Q.$$

Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения, где $u^{\pm} = u|_{G^{\pm}}$,

$$Mu = f(x,t), \ (x,t) \in Q, \ Bu|_S = g, \ u|_{t=0} = u_0, \tag{2.14}$$

$$B_i^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N} - \beta_i(u^+ - u^-) = g_i^+, \ \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N} + g_i^-, \ (t,x) \in S_i, \ i \leq r_0. \tag{2.15}$$

Считаем, что выполнены условия

$$a_i \in L_p(Q) \ (i \geq 0), \ a_{ij} \in C(Q^{\pm}) \ (\ i,j = 1, \ldots, n), \ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}); \tag{2.16}$$

функции $a_{ij}|_{G^{\pm}}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^{\pm}})$ и

$$a_{ij}^{\pm}|_{\Gamma_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}), \ a_{ij}|_{\Gamma} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad i,j = 1, \ldots, n, \tag{2.17}$$

где $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$ и последнее включение выполнено, если $Bu \neq u$;

$$a_i \in L_\infty(0,T; W_p^1(G_\delta^{\pm})) \ (i \geq 0), \ a_{ij} \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G_\delta^{\pm})) \ (i,j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где y – локальная система координат в точке b_i. При выполнении условия [87] преобразование $x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z : |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U' : z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$. Положим $Q_0^\tau = (0,\tau) \times U'$, $Q_0 = (0,T) \times U'$ $Q_0^{\pm}(\tau) = (0,\tau) \times U^{\pm}$ и $S_{01}^\tau = (0,\tau) \times B'_\delta$, $S_{01} = (0,T) \times B'_\delta$.

Мы считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^{\pm}), \ g_i^{\pm} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_i), \ g(0,x) = B(0,x,\partial_x)u_0|_\Gamma, \ g \in W_p^{k_0, 2k_0}(S). \tag{2.19}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 1, \dots, r_0$. Пусть $u_0^{\pm} = u_0|_{G^{\pm}}$. Условия согласования на Γ_0 записываются в виде:

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \beta_i(u_0^+ - u_0^-) + g_i^+(0,x),\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N} + g_i^-(0,x),\ x \in \Gamma_i,\ i \le r_0. \quad (2.20)$$

Пусть

$$f \in L_p(Q), \quad (2.21)$$

$$\beta_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ i = 1,2,\dots,r, \quad (2.22)$$

$$\beta_i \in L_p(0,T; W_p^{2-1/p}(G_\delta \cap \Gamma_i)) \cap W_p^1(G_\delta \cap \Gamma_i; W_p^{1/2-1/2p}(0,T)). \quad (2.23)$$

Пусть U_i – координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma_0$, выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Тогда мы также предполагаем, что для каждого $i = 1,2,\dots,r$, $j = 1,\dots,r_0$,

$$\begin{gathered}\nabla_{z'}\varphi_i f(t,x^i(z)) \in L_p(Q_0),\ \nabla_{z'}\varphi_i u_0^{\pm}(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U^{\pm})\ (i \le r),\\ \nabla_{z'}\varphi_k g_j^+(t,x^k(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})\ (k \in N_j = \{k : x_k \in \Gamma_j\}),\\ \nabla_{z'} a_{kl}^{\pm}(x^i(z',0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(S_{01}),\ \ (k,l = 1,2\dots,n,\ \varepsilon_0 > 0). \quad (2.24)\end{gathered}$$

Отметим, что условие (2.24) не зависит от введённой локальной системы координат y и системы координат z.

Следующий результат есть следствие теоремы 1.8.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.16)–(2.17), (2.19)–(2.22) *и* $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.14)-(2.15) *такое, что* $u|_{Q^{\pm}} \in W_p^{1,2}(Q^{\pm})$, *причем справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \le C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \\ \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|g_i^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)}).\end{gathered}$$

Если $u_0 \equiv 0$, *то для любого* $\tau \in (0,T]$ *существует единственное решение* $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ *задачи* (2.14)-(2.15), *удовлетворяющее оценке*

$$\begin{gathered}\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_1(\|f\|_{L_p(Q_\tau)} + \\ \sum_{i=1}^{r_0} \|g_i^+\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|g_i^-\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \|g\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_\tau)}), \quad (2.25)\end{gathered}$$

где постоянная C_1 не зависит от τ.

Доказательство. Вначале считаем, что $\tau = T$. Утверждение о разрешимости задачи (2.14), (2.15) из класса $u \in W_p^{1,2}(Q^{\pm})$ вытекает из теоремы 1.8. Наша задача – частный случай задачи, рассмотренной в этой теореме. Утверждение теоремы в случае произвольного τ проводится по схеме, изложенной в доказательстве теоремы 1.2 и поэтому мы его опустим. □

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.13), (2.16)–(2.24). *Тогда на промежутке* $(0,\tau)$ *существует единственное решение задачи* (2.14)-(2.15), *где* $g_i^- = 0$ *для всех* i, *такое, что* $u|_{Q_\tau^{\pm}} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^{\pm})$, *причем* $\nabla_{z'}\varphi_i u^{\pm}(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_0^{\pm}(\tau))$, $i = 1, \ldots, r$. *Если* $u_0 \equiv 0$, *то решение удовлетворяет оценке*

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i u^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i u^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))}) \leq$$
$$C_1(\sum_{i=1}^{r_0}\|g_i^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_i^\tau)} + \|g\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)} +$$
$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)} + \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i\in N_j}\|\nabla_{z'}\varphi_i g_j^+(t,x^i(z',0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)}), \quad (2.26)$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau \in (0,T]$ и f, g, u_0, g_j^+.

Доказательство. Доказательства основываются на известных результатах о свойствах конечных разностей (см. лемму 4.6 гл. 2 в [6] и теорему 4, п. 4, §3, гл. 3 в [120]). Рассуждения совпадают с теми которые приведены в доказательстве теоремы 4, п. 3, §2, гл. 4 в [120]. Поэтому мы приведем только набросок доказательства. Возьмем точку $b_i \in \Gamma_m$ $(m = 1, 2, \ldots, r_0)$. Умножая уравнение на φ_i, для $v = \varphi_i u$, имеем:

$$Mv = v_t - Lv = \varphi_i f + [\varphi_i, L]u = \tilde{f},\ v\big|_{t=0} = \varphi_i u_0(x),\ B_m^+ v = \varphi_i g_m^+ - [\varphi_i, B_m^+]u,$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \frac{\partial v^-}{\partial N} = \sum_{k,l=1}^{n}(a_{kl}^+ u^+ - a_{kl}^- u^-)\varphi_{ix_l}\nu_k, \quad ((t,x) \in S_m),$$

где $[\varphi_i, L]u = \varphi_i Lu - L(\varphi_i u) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk}u_{x_k}\varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk}u\varphi_{ix_lx_k} - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_{ix_k}u$ и $[\varphi_i, B_m^+]u = -\sum_{k,l=1}^n a_{kl}^+\nu_k\varphi_{ix_l}u^+$. Далее, мы временно опустим индекс m в обозначении оператора B_m^+ и функций g_m^+ и β_m. Запишем L в локальной системе координат y и обозначим полученные коэффициенты через $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_i$. Выпрямим границу преобразованием $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$. Получим задачу

$$Mv = v_t - \tilde{L}v = \tilde{f}, \quad v\big|_{t=0} = v_0(z) = \varphi_i(x^i(z))u_0(x(z)),$$
$$\tilde{B}^+ v\big|_{z_n=0} = \varphi_i g^+(t, x^i(z', 0)) - \ [\varphi_i, B^+]u^+(t, x^i(z', 0)) = \tilde{g}^+(t, z'),$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \frac{\partial v^-}{\partial N} = \tilde{g}^-(t, z'),$$

где $\tilde{L}$, $\tilde{B}^+$ – операторы L, B^+, записанные в системе координат z, $\tilde{g}^-(t, z') = \varphi_i g_m^- + \sum_{k,l=1}^n (a_{kl}^+ u^+ - a_{kl}^- u^-)\varphi_{ix_l}\nu_k|_{x=x^i(z',0)}$, Обозначим коэффициенты $\tilde{L}$ через c_{kl}, c_k, оператор $\tilde{B}^+ =$ запишется в виде $\tilde{B}^+ v = \frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta(t, z')(v^+ - v^-)$, $\frac{\partial v^\pm}{\partial N} = \sum_{k=1}^n b_k^\pm(t, z')v_{z_k}^\pm$. Уравнение рассматривается в соответствующей окрестности U'. Пусть $\Delta_j v(z) = (v(z + e_j\eta) - v(z))/\eta$ (e_j – j-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/8$ и $j \le n - 1$. Тогда функция $w = \Delta_j v$ есть решение задачи

$$w_t - \tilde{L}(t, z, D)w = -[\tilde{L}, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{f} = \tilde{f}_0, \ \tilde{B}^+ w|_{z_n=0} = [\tilde{B}^+, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{g}^+ = \tilde{g}_0^+,$$
$$\frac{\partial w^+}{\partial N} - \frac{\partial w^-}{\partial N} = \Delta_j\tilde{g}^-(t, z') + M_0 v = \tilde{g}_0^-, w|_{t=0} = \Delta_j v_0 = \tilde{u}_{01}, \quad (2.27)$$

где $[\tilde{L}, \Delta_j]v = -\sum_{k,l=1}^n \Delta_j c_{kl}(t, z)v_{z_k z_l}(t, z+e_j\eta) - \sum_{k=1}^n \Delta_j c_k(t, z)v_{z_k}(t, z+e_j\eta) - \Delta_j c_0(t, z)v(t, z + e_j\eta)$, $[\tilde{B}^\pm, \Delta_j]v = -\sum_{k=1}^n \Delta_j b_k v_{z_l}^\pm(t, z' + e_j\eta, 0) + \Delta_j\beta(v^+ - v^-)(t, z'+e_j\eta, 0)$, $M_0 v = -\sum_{k=1}^n \Delta_j b_k^+ v_{z_l}^+(t, z'+e_j\eta, 0) + \sum_{k=1}^n \Delta_j b_k^- v_{z_l}^-(t, z'+e_j\eta, 0)$. Вернемся к переменным x и продолжим все функции в (2.27) нулем вне $U_i \cap G$. Тогда функция $w \in W_p^{1,2}(Q^+) \cap W_p^{1,2}(Q^-)$ есть решение задачи (2.14)-(2.15) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т.е.

$$Mw = w_t - Lw = \tilde{f}_0 \ \ \big((x, t) \in Q\big), \quad w\big|_{t=0} = \tilde{u}_{01}, \quad Bw\big|_S = 0, \ B_l^+ w = \tilde{g}_0^+,$$
$$\frac{\partial w^+}{\partial N} - \frac{\partial w^-}{\partial N} = \tilde{g}_0^-,$$

где последние два равенства выполняются при всех $l \le r_0$ и $(t, x) \in S_l$, причем функции $\tilde{g}_0^\pm$ отличны от нуля только при $l = m$. По теореме 2.1, имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|w\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \le C_0(\|\tilde{u}_{01}\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|\tilde{u}_{01}\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} +$$
$$\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)} + \|\tilde{g}_0^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|\tilde{g}_0^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0)}).$$

Наша следующая цель показать, что правая часть ограничена равномерно по параметру η. Рассмотрим, например, первую норму в правой части. С одной стороны замена $x = x^i(z)$ принадлежит классу C^3 и $supp\,\varphi_i(x^i(z)) \subset \{z \in U' : |z'| \leq 3\delta/4\}$, а $|\eta| < \delta/8$, поэтому имеем, что

$$\|\tilde{u}_{01}\|_{W_p^{2-2/p}(G^{\pm})} \leq c_1 \|\Delta_j \varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^{\pm})}, \tag{2.28}$$

где постоянная c_1 не зависит от величины η. С другой стороны имеем представление

$$\tilde{u}_{01} = \Delta_j v_0 = \int_0^1 v_{0z_j}(z + e_j \tau\eta)\, d\tau.$$

Используя неравенство Минковского, получим

$$\|\Delta_j v_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(U^{\pm})} \leq \int\limits_0^1 \|v_{0z_j}(z + e_j\tau\eta)\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(U^{\pm})}\, d\tau \leq \|\nabla_{z'} \varphi_i u_0(x(z))\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(U^{\pm})}. \tag{2.29}$$

Аналогично получаем и оценку

$$\|\tilde{g}_0^{\pm}\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} \leq c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g^+(t, x^i(z',0))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^{\tau})}). \tag{2.30}$$

Оценка получается с использованием определения функций $\tilde{g}_0^{\pm}$. Например, для $\tilde{g}_0^+$ имеем

$$\tilde{g}_0^+(t,z') = \Delta_j \tilde{g}^+ - \sum_{k=1}^n \Delta_j b_k(t,z') v_{z_k}^+(t, z' + e_j\eta, 0) + \Delta_j \beta(t,z')(v^+ - v^-)(t, z' + e_j\eta, 0),$$

$$\tilde{g}^+(t,z') = \varphi_i g^+(t, x(z',0)) - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_{iz_k} u^+(t, x(z',0)).$$

При оценивании нормы этой функции мы используем представления

$$\Delta_j \tilde{g}^+ = \int_0^1 \tilde{g}_{z_j}^+(t, z' + \tau\eta e_j')\, d\tau,\ \Delta_j b_k(t,z') = \int_0^1 b_{kz_j}(t, z' + \tau\eta e_j')\, d\tau,$$

$$\Delta_j \beta(t,z') = \int_0^1 \beta_{z_j}(t, z' + \tau\eta e_j')\, d\tau$$

(e_j' - j-й координатный вектор в $\mathbb{R}^{n-1}$), наши условия на коэффициенты, леммы 1.3, 1.6 (см. также [6, гл. 2, лемма 3.4] и [113, лемма 7.2]), в соответствии с которой включение $u \in W_p^{s_1,2s_1}(S_{01}^\tau)$ влечет, что $u_{z_j} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)$, и справедлива соответствующая оценка. Оценка для нормы $\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)}$ имеет вид

$$\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)} \leq c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(0,T;U')}, \tag{2.31}$$

где постоянная c не зависит от η. Теперь оценки (2.28)–(2.31) гарантируют оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|w\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq C_5(\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^+)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^-)} +$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(0,T;L_p(U'))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}),$$

где постоянная C_5 не зависит от η. В частности, используя (2.25) имеем неравенство

$$\|\Delta_j v(t,z)\|_{W_p^{1,2}(U^+)} + \|\Delta_j v(t,z)\|_{W_p^{1,2}(U^-)} \leq C_6(\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^+)} +$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^-)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(0,T;L_p(U'))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} +$$
$$\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)}) = J_2,$$

где постоянная C_6 не зависит от η. В силу произвольности j и известных свойств конечных разностей (см. в [8, гл. 1, лемма 4.6]), заключаем, что для всех $j = 1,2,\ldots,n-1$ существуют обобщенные производные $v_{z_j} \in W_p^{1,2}(Q_0^+(T)) \cap W_p^{1,2}(Q_0^-(T))$ и справедливо неравенство $\|v_{z_j}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(T))} + \|v_{z_j}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(T))} \leq J_2$. В силу произвольности параметров m, j справедлива оценка (2.26) при $\tau = T$. Оценка (2.26) на произвольном малом промежутке времени $(0,\tau)$ вытекает из доказанной и доказательство вполне аналогично приведенному в теореме 1.2.

$\square$

Замечание 2.1. *Поскольку граница Γ области может состоять из нескольких компонент связности, то вообще говоря, мы можем брать различные граничные условия на каждой из них. Утверждение теоремы останется справедливым.*

Рассмотрим случай цилиндрической области G. Параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(x_{ij})} \cap \partial G = \emptyset$ для всех i,j, $\overline{B_\delta(x_{ij})} \cap \overline{B_\delta(x_{i_1j_1})} = \emptyset$, если

$x_{ij} \neq x_{i_1 j_1}$ для $i \neq j$. Далее во всех условиях на данные считаем такой параметр δ фиксированным.

Введём обозначения: $Q^0 = (0,T) \times \Omega$, $Q^0_\phi = (0,\phi) \times \Omega$, $S^\phi_0 = (0,\phi) \times \Gamma^0$, $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0,l)$, $S^0 = (0,T) \times \Gamma_0$, $G_\delta = \cup_{i,j} B_\delta(x_{ij})$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $Q^i = (0,T) \times G^i$, $Q^i_\phi = (0,\phi) \times G^i$, $Q^\pm = (0,T) \times G^\pm$, $Q^\pm_\tau = (0,\tau) \times G^\pm$, $\Gamma_i = \partial\Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $S^\phi_i = (0,\phi) \times \Gamma_i$, $S_i = (0,T) \times \Gamma_i$, где $i = 1, 2, ..., m$, $\Gamma^i = \{x : \ x' \in \Omega, x_n = l_i\}$, $S^i = (0,T) \times \Gamma^i$.

Ниже мы всюду считаем что $p > n + 2$, поскольку именно это условие используется при доказательстве основного результата.

Оператор L считается эллиптическим, т.е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall (t,x) \in Q.$$

Для удобства записи, для функций определенных в Q и имеющих разрывы первого рода на плоскостях $x_n = l_i$ положим $v(t,x',l_i \pm 0) = \lim_{x_n \to l_i \pm 0} v(t,x)$. Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения

$$Mu = f(x,t), \ (x,t) \in Q, \ u|_{t=0} = u_0, \tag{2.32}$$

$$B^+_i u = \frac{\partial u^+_i}{\partial N} - \beta_i(u^+_i - u^-_i) = g^+_i, \ \frac{\partial u^+_i}{\partial N} = \frac{\partial u^-_i}{\partial N} + g^-_i, \ i = 1, \ldots, m, \tag{2.33}$$

где $\frac{\partial u^\pm_i}{\partial N}(x_0) = a_{nn}u_{x_n}(t,x',l_i \pm 0)$, $u^\pm_i = u(x',l_i \pm 0)$;

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{2.34}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x) \ (x \in G), \ R_0 u(t,x',0) = \varphi_0, \quad R_1 u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{2.35}$$

где $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u$.

Мы предполагаем, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad a_0 \in L_p(Q), \quad i = 0, \ldots, n, \tag{2.36}$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q^k}), \ a_{ij} = a_{ji}, \ a_{nj} = a_{jn} = 0, \quad i,j = 1, \ldots, n, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.37}$$

$$a_{ij}|_{S_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}),\ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}),\ i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m, \tag{2.38}$$

$$\sigma_j \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0})\ (j = 0,1), \tag{2.39}$$

где $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал) и включения $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$ означают, что $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_i)$ и эти функции допускают непрерывное продолжение на $\overline{S_i}$ класса $C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$. При переходе через плоскости $x_n = l_i$ оно вообще говоря имеют разрывы первого рода.

Фиксируем допустимый параметр δ. Дополнительно предположим, что

$$a_i \in L_\infty(0,T; W_p^1(G_\delta^\pm))\ (i = 0,1,\dots,n),\ a_{ij} \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G_\delta^\pm)),\\ i,j = 1,2,\dots,n. \tag{2.40}$$

Построим функции $\varphi_{ij}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_{ij}(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(x_{ij})$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(x_{ij})$, положим $\psi(x) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}(x)$ $(i = 1,2,\dots,N_j, j = 1,2,\dots,m-1)$. Считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm),\ g_i^\pm \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0), \tag{2.41}$$

$$\varphi(0,x) = R(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ \varphi_0(0,x') = R_0 u_0(x',0),\\ \varphi_1(0,x') = R_1 u_0(x',l), \varphi_i \in W_p^{k_i,2k_i}(Q_0)\ (i = 0,1),\ \varphi \in W_p^{k_2,2k_2}(S_i). \tag{2.42}$$

где $k_i = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_i = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 0,1,2$. Условия согласования при $t = 0$ записываются в виде:

$$B_i^+ u_0 = \frac{\partial u_{0i}^+}{\partial N} - \beta_i(u_{0i}^+ - u_{0i}^-) = g_i^+(0,x'),\ \frac{\partial u_{0i}^+}{\partial N} = \frac{\partial u_{0i}^-}{\partial N} + g_i^-(0,x'),\ i = 1,\dots,m-1. \tag{2.43}$$

Пусть также

$$f \in L_p(Q),\ a_{nn}(t,x',l_i \pm 0) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}),\ i = 1,\dots,m-1, \tag{2.44}$$

$$\beta_i \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0),\ i = 1,2,\dots,m-1, \tag{2.45}$$

$$\beta_i \in L_p(0,T; W_p^{2-1/p}(G_\delta \cap \Gamma^i)) \cap W_p^1(G_\delta \cap \Gamma^i; W_p^{1/2-1/2p}(0,T)), \tag{2.46}$$

$$\nabla_{x'}\psi f(t,x) \in L_p(Q),\ \nabla_{x'}\psi u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm),\ \nabla_{x'}\psi g_i^\pm(t,x') \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0),\\ \nabla_{x'} a_{nn}(t,x',l_i \pm 0) \in W_p^{s_0,2s_0}((0,T) \times (B_\delta(x_{ji}) \cap \Gamma^i)), \tag{2.47}$$

где $i = 1, 2 \ldots, m-1,\ j = 1, \ldots, N_i$. Нам понадобятся дополнительные условия согласования

А) если $R_i u = u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru = u$, то $\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $R_i u = u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru \neq u$, то $R(t, x', r_i)\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$; если $R_i u \neq u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru = u$, то $R_i\varphi(t, x', r_i) = \varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega}$; если $Ru = u$, то $B_i^+\varphi = g_i^+(t, x')|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial\varphi_i^+}{\partial N} = \frac{\partial\varphi_i^-}{\partial N} + g_i^-,\ i = 1, \ldots, m-1,$, где $\frac{\partial\varphi_i^\pm}{\partial N} = a_{nn}\varphi_{x_n}(t, x', l_i \pm 0)$.

Приведем вспомогательный результат (см. теорему 1.10).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* А), (2.36), (2.37), (2.38) *в том случае если* $Ru \neq u$, (2.39) *при* $j = 0$ *если* $R_0 u \neq u$ *и при* $j = 1$ *если* $R_1 u \neq u$, (2.41)-(2.45). *Тогда существует единственное решение задачи* (2.32)-(2.35) *такое, что* $u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$, *причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q)}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1}(\|g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + \|g_i^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)}) + \sum_{i=1}^{m}\|\varphi\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S_i)} + \sum_{i=0}^{1}\|\varphi_i\|_{\tilde{W}_p^{k_i,2k_i}(S^0)}). \tag{2.48}$$

Если $u_0 \equiv 0$, *то для любого* $\tau \in (0, T]$ *существует единственное решение* $u|_{Q_\tau^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$ *задачи* (2.32)-(2.35), *удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq C_1(\|f\|_{L_p(Q_\tau)} + \sum_{i=1}^{m-1}(\|g_i^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\tau^0)} +$$
$$\|g_i^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\tau^0)}) + \|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_\tau^0)} + \sum_{i=0}^{1}\|\varphi_i\|_{\tilde{W}_p^{k_i,2k_i}(S_\tau^0)}), \tag{2.49}$$

где постоянная C_1 *не зависит от* τ.

Доказательство теоремы. Утверждение вытекает из теоремы 1.6.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и дополнительно условия* (2.40), (2.46), (2.47). *Тогда на промежутке* $(0, \tau)$ *существует единственное решение и задачи* (2.32)-(2.35), *где* $g_i^- = 0$ *для всех* i, *такое, что* $u|_{Q_\tau^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$, *причем* $\nabla_{x'}\varphi u(x) \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$. *Если* $u_0 \equiv 0$, *то решение удовлетво-*

ряет оценке

$$\|\nabla_{x'}\varphi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\nabla_{x'}\varphi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) \leq C_1(\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{k_0,2k_0}(S_\tau^0)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)} +$$
$$\|\nabla_{x'}\varphi f\|_{L_p(Q_\tau)} + \sum_{i=1}^{m-1}(\|g_i^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\tau^0)} + \|\nabla_{x'}\varphi g_i^+(t,x')\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(Q_\tau^0)}), \quad (2.50)$$

где постоянная C_1 *не зависит от* $\tau \in (0,T]$ *и* f, φ, u_0, g_j^+.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2.2. Мы приводим только основные этап доказательства, поскольку метод доказательства уже многократно описан в литературе (см. теорему 4, п. 4, §3, гл. 3 в [120] и теорему 4, п. 3, §2, гл. 4 в [120]). Покажем дополнительную гладкость решений в Q. Умножая уравнение на ψ, для $v = \psi u$, имеем:

$$Mv = v_t - Lv = \psi f + [\psi, L]u = \tilde{f},\ v\big|_{t=0} = \psi u_0(x) = v_0,$$
$$B_s^+ v = \psi g_s^+ - [\psi, B_s^+]u = \tilde{g}_s^+, Rv|_{S^0} = 0, \quad R_0 v(t,x',0) = 0, \quad R_1 v(t,x',l) = 0,$$
$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \frac{\partial v^-}{\partial N} = (a_{nn}^+ u^+ - a_{nn}^- u^-)\psi_{ix_n}, \quad (2.51)$$

где $s = 1,2,\ldots,m-1$, $[\psi, L]u = \psi Lu - L(\psi u) = -\sum_{l,k=1}^n a_{lk} u \psi_{x_k x_l} - 2\sum_{l,k=1}^n a_{lk} u_{x_k} \psi_{x_l} - \sum_{k=1}^n a_k \psi_{x_k} u$
и $[\psi, B_s^+]u = -\psi_{x_n}(a_{nn}u)(t,x',l_s+0)$. Пусть $\Delta_j v(x) = (v(x+e_j\eta) - v(x))/\eta$ (e_j – j-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/8$ и $j \leq n-1$. Тогда выполнено

$$w_t - L(t,x,D)w = -[L,\Delta_j]v + \Delta_j \tilde{f} = \tilde{f}_0,$$
$$B_s^+ w = [B_s^+, \Delta_j]v + \Delta_j \tilde{g}_s^+ = w_s^+, \quad w|_{t=0} = \Delta_j v_0 = w_0, \ \frac{\partial w^+}{\partial N} - \frac{\partial w^-}{\partial N} =$$
$$\Delta_j((a_{nn}^+ u^+ - a_{nn}^- u^-)\psi_{ix_n}) - \Delta_j a_{nn}^+(t,x) v_{x_n}^+(t,x+e_j\eta) + \Delta_j a_{nn}^-(t,x) v_{x_n}^-(t,x+e_j\eta) = w_s^-, \quad (2.52)$$

где $[L,\Delta_j]v = -\sum_{k,l=1}^n \Delta_j a_{kl}(t,x) v_{x_k x_l}(t,x+e_j\eta) - \sum_{k=1}^n \Delta_j a_k(t,x) v_{x_k}(t,x+e_j\eta) - \Delta_j a_0(t,x) v(t,x+e_j\eta)$, $[B_s^+, \Delta_j]v = -\Delta_j a_{nn}(t,x',l_s+0) v_{x_n}(t,x'+e_j\eta, l_s+0) + \Delta_j \beta_s(v_s^+ - v_s^-)(t,x'+e_j\eta)$. Эти равенства получаются, если мы применим оператор Δ_j в (2.51). Преобразования осуществляются следующим образом. Имеем

$$\eta\Delta_j(a_{kl} v_{x_k x_l}) = a_{kl} v_{x_k x_l}(t,x+e_j\eta) - a_{kl} v_{x_k x_l}(t,x) =$$
$$(a_{kl}(t,x+e_j\eta) - a_{kl}(t,x)) v_{x_k x_l}(t,x+e_j\eta) + a_{kl}(t,x)(v_{x_k x_l}(t,x+e_j\eta) - v_{x_k x_l}(t,x)).$$

Аналогичные равенства имеют место для любого коэффициента a_k, a_0. Таким образом,

$$\Delta_j Lv = L\Delta_j v + \sum_{k,l=1}^{n} \Delta_j a_{kl}(t,x) v_{x_k x_l}(t, x + e_j\eta) +$$
$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_j a_k(t,x) v_{x_k}(t, x + e_j\eta) + \Delta_j a_0(t,x) v(t, x + e_j\eta).$$

Продолжим все функции в (2.52) нулем вне множества G_δ. Тогда функция $w \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи (2.32)-(2.35) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т.е.

$$Mw = w_t - Lw = \tilde{f}_0 \ \ \big((x,t) \in Q\big), \ \ w\big|_{t=0} = w_0, \ \ B_l^+ w = w_l^+ \ (l \le m-1),$$
$$Rw\big|_{S^0} = 0, \ \frac{\partial w^+}{\partial N} - \frac{\partial w^-}{\partial N} = w_s^-, \ R_0 w(t,x',0) = 0, \ \ R_1 w(t,x',l) = 0. \quad (2.53)$$

Далее нам нужны некоторые оценки. Они более или менее очевидны. Мы используем леммы 4.10, 4.11 гл.2 в [6] о свойствах конечных разностей и теоремы о точечных мультипликаторах (см., например, [116, теорема 3.3.2, с.198]), а также наши условия на коэффициенты и теоремы о следах. Имеем, что

$$\|w_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^\pm)} \le c_1 \|\nabla_{x'} \psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^\pm)}, \quad (2.54)$$

где постоянная c_1 не зависит от величины η. Покажем это неравенство. По определению,

$$\|u\|^p_{W_p^s(G)} = \sum_{|\beta| \le [s]} \|D^\beta u\|^p_{L_p(G)} + \sum_{|\beta|=[s]} \int_G \int_G \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|^p}{|x-y|^{n+\{s\}p}}\, dxdy.$$

В нашем случае $[s] = 1$, $\{s\} = 1 - 2/p$, а в качестве G берем множества $G^\pm$. Оценим, например, первое слагаемое. Имеем ($u = w_0 = \Delta_j v_0$ с $v_0 = \varphi u_0(t,x)$)

$$\sum_{|\beta| \le [s]} \|D^\beta w_0\|^p_{L_p(G^\pm)} = \sum_{k=1}^{n} \|w_{0x_k}\|^p_{L_p(G^\pm)} + \|w_0\|^p_{L_p(G^\pm)}.$$

Имеем представление

$$\Delta_j v_{0x_k} = \frac{1}{\eta} \int_{x_j}^{x_j+\eta} v_{0x_k x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, d\xi =$$
$$\int_0^1 v_{0x_k x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \tau\eta, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, d\tau = \int_0^1 v_{0x_k x_j}(x + e_j\tau\eta)\, d\tau.$$

Тогда, используя неравенство Минковского, получим

$$\|\Delta_j v_{0x_k}\|_{L_p(G^\pm)} \le \int_0^1 \|v_{0x_kx_j}(x+e_j\tau\eta)\|_{L_p(G^\pm)}\,d\tau.$$

Если мы сделаем замену $x_j+\tau\eta=\xi$, и воспользуемся тем фактом, что $supp\,v_0 \subset G_{3\delta/4}$, то увидим, что последнее слагаемое оценивается через (подынтегральное выражение не зависит от τ) $\|v_{0x_kx_j}(x)\|_{L_p(G^\pm)}$. Таким образом,

$$\|\Delta_j v_{0x_k}\|_{L_p(G^\pm)} \le \|v_0\|_{W_p^2(G^\pm)} = \|\psi u_0(x)\|_{W_p^2(G^\pm)} \le c\|\psi u_0(x)\|_{W_p^2(G^\pm)}. \tag{2.55}$$

Рассмотрим второе слагаемое в норме

$$J=\sum_{k=1}^n \int_{G^\pm}\int_{G^\pm} \frac{|w_{x_k}(x^1)-w_{x_k}(x^2)|^p}{|x^1-x^2|^{n+s_0p}}\,dx^1dx^2, \quad s_0=1-2/p.$$

Аналогично имеем

$$\Delta_j v_{0x_k}(x^1)-\Delta_j x_{0x_k}(x^2)=\int_0^1 (v_{x_kx_j}(x^1+\tau\eta e_j)-v_{x_kx_j}(x^2+\tau\eta e_j))\,d\tau.$$

Используя неравенство Минковского снова получим, что

$$\Big(\int_{G^\pm}\int_{G^\pm} \frac{|w_{x_k}(x^1)-w_{x_k}(x^2)|^p}{|x^1-x^2|^{n+s_0p}}\,dx^1dx^2\Big)^{1/p} \le$$
$$\int_0^1 \Big(\int_{G^\pm}\int_{G^\pm} \frac{|v_{0x_kx_j}(x^1+\tau\eta e_j)-v_{0x_kx_j}(x^2+\tau\eta e_j)|^p}{|x^1-x^2|^{n+s_0p}}\,dx^1dx^2\Big)^{1/p}\,d\tau. \tag{2.56}$$

Но $|x^1-x^2|=|(x^1+\tau\eta e_j)-(x^2+\tau\eta e_j)|$. Как и ранее тогда получим, что последний интеграл оценивается через

$$c\|\nabla_{x'}v_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^\pm)} = c\|\nabla_{x'}\psi u_0(x)\|_{W_p^{2-2/p}(G^\pm)}. \tag{2.57}$$

Аналогично получим неравенство

$$\|w_0\|_{L_p(G^\pm)} \le c\|\psi u_0(x)\|_{W_p^1(G^\pm)}. \tag{2.58}$$

Из неравенств (2.55)-(2.58) вытекает неравенство (2.54). Используя также теоремы вложения, условия на коэффициенты и лемму 3.4 гл. 2 в [6], имеем

$$\|w_l^+\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(Q^0)} \le c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}+\|\nabla_{x'}\psi g_l^+(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)}, \tag{2.59}$$

где опять постоянная c не зависит от η. Приведем подробное доказательство. Запишем определение функции w_l^+. Имеем

$$w_s^+ = [B_s^+, \Delta_j]v + \Delta_j \tilde{g}_s^+, \ \tilde{g}_s^+ = \psi g_s^+(t,x') - \psi_{x_n}(a_{nn}u)(t,x',l_s+0),$$
$$[B_s^+, \Delta_j]v = -\Delta_j a_{nn}(t,x',l_s+0)v_{x_n}(t,x'+e_j\eta,l_s+0) + \Delta_j\beta_s(v_s^+ - v_s^-)(t,x'+e_j\eta).$$

Оценим второе слагаемое. Имеем

$$\Delta_j \tilde{g}_s^+ = \int_0^1 \tilde{g}_{sxj}^+(t,x'+\tau\eta e_j)\,d\tau.$$

Как и ранее, используем неравенство Минковского. Имеем

$$\|\Delta_j \tilde{g}_s^+(t,x'))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} \le \int_0^1 \|\tilde{g}_{sx_j}^+(t,x+\tau\eta e_j)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)}\,d\tau$$
$$\le \|\tilde{g}_{sx_j}^+(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} \le c_1\|\nabla_{x'}\psi g_s^+(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + c_2\|\psi_0 u_s^+(t,x')\|_{W_p^{s_1,2s_1}(Q^0)} \le$$
$$c_3\|\nabla_{x'}\psi g_s^+(t,x'))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + c_4(\|\psi_0 u(x)\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|\psi_0 u(x)\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}), \quad (2.60)$$

где $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольная функция такая, что $supp\,\psi_0 \subset G_\delta$, $\psi_s(x) = 1$ для $x \in G_{7\delta/8}$. Здесь мы использовали лемму 3.4 гл. 2 в [6] и лемму 7.2 в [113], в соответствии с первой из них имеет место вложение $W_p^{1,2}(Q) \subset W_p^{s_1,2s_1}(S)$ и соответствующая оценка а в соответствии со второй включение $u \in W_p^{s_1,2s_1}(Q^0)$ влечет, что $u_{x_j} \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)$ и справедлива соответствующая оценка.

Оценим первое слагаемое в определении функции w_s^+:

$$J = -\Delta_j a_{nn}(t,x',l_s+0)v_{x_n}(t,x'+e_j\eta,l_s+0) + \Delta_j\beta_s(v_s^+ - v_s^-)(t,x'+e_j\eta).$$

Как и ранее, имеем представления

$$\Delta_j a_{nn}(t,x',l_s+0)) = \int_0^1 a_{nnx_j}(t,x'+\tau\eta e_j,l_s+0)\,d\tau,\ \Delta_j\beta_s(t,x')$$
$$= \int_0^1 \beta_{sx_j}(t,x'+\tau\eta e_j)\,d\tau.$$

Отсюда, если мы используем (2.47), (2.46) и лемму 1.6, то получим оценку

$$\|J\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} \le c(\|v_s^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + \|v_s^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + \|v_{x_n}(t,x',l_s+0)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)}.$$

Однако, в силу теорем вложения (см. лемму 3.4 гл. 2 в [6]), правая часть здесь оценится через

$$c_1(\|v^+(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|v^-(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}) \le c_2(\|u^+(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u^-(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}).$$

Отметим, что все постоянные не зависят от η. Используя эту оценку и суммируя полученные оценки (2.60), получим оценку (2.59). Аналогично оцениваем нормы $\|w_l^-\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(Q^0)}$. Осталось показать, что норма $\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)}$ также оценивается постоянной, не зависящей от параметра η. Используя рассуждения аналогичные вышеприведенным и условия на коэффициенты имеем оценку

$$\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)} \leq c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} + \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(0,T;G^+)} + \\ \|\nabla_{x'}\psi_i f\|_{L_p(0,T;W_p^1(G^-))}), \quad (2.61)$$

где постоянная c не зависит от η. Ссылаясь на теорему 2.3, имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|w\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq C_0(\|w_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|w_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \\ \|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q)} + \sum_{i=1}^{m-1} \|w_i^+\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \quad (2.62)$$

Теперь оценки (2.54), (2.59), (2.61) гарантируют оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|w\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \leq C_5(\|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \\ \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(0,T;L_p(G^+))} + \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(0,T;L_p(G^-))} + \sum_{i=1}^{m-1} \|\nabla_{x'}\psi g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q^0)} + \\ \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)}), \quad (2.63)$$

где постоянная C_5 не зависит от η. В частности, используя (2.49) имеем неравенство

$$\|\Delta_j v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(G^+)} + \|\Delta_j v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(G^-)} \\ \leq C_6(\|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(0,T;L_p(G^+))} + \\ \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(0,T;L_p(G^-))} + \sum_{i=1}^{m-1} \|\nabla_{x'}\psi g_i^+\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(Q^0)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \\ \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{i=1}^{m-1} \|g_i^+\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(Q^0)} + \sum_{i=1}^{m} \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S_i)}), \quad (2.64)$$

где постоянная C_6 не зависит от η. В силу произвольности j и известных свойств конечных разностей (см. лемму 4.11 в [6]), заключаем, что для всех $j = 1, 2, \ldots, n-1$ существуют обобщенные производные $v_{z_j} \in W_p^{1,2}((0,T) \times$

$G^+) \cap W_p^{1,2}((0,T)\times G^-)$ и справедлива оценка из утверждения теоремы. Утверждение теоремы об оценке на произвольном малом промежутке времени $(0,\tau)$ вполне аналогично приведенным в доказательстве теоремы 1.2 (см. также теорему 2.3)).

Замечание 2.2. *Ясно, что если граница $\partial\Omega$ области состоит из нескольких компонент связности, то вообще говоря, граничные условия на них могут отличаться. Утверждение теорем 2.3, 2.4 останутся в силе. Однако, следует иметь ввиду, что показатель k_0, равно как и условия согласования будут меняться в зависимости от соответствующей компоненты связности $\partial\Omega$. Например, в работе [2, §4] это в явном виде принимается во внимание. В нашем случае мы также будем также подразумевать, что случаи нескольких компонент связности границы Γ возможны.*

2.2 Обратные задачи об определения коэффициентов теплообмена в случае $\overline{G^-} \subset G$

Приведем условия на данные. Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t,x)$ при всех допустимых i,j обладают свойствами

$$\Phi_{ij} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ \Phi_{ij} \in L_p(0,T;W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i)) \cap W_p^1(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i; W_p^{1/2-1/2p}(0,T)). \tag{2.65}$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k = \Phi_{kj}(t,b_i)$ $(j = 1,2,\ldots,m_k,\ i \in N_k = \{j :\ b_j \in \Gamma_k\}$. Считаем, что число номеров во множестве N_k равно m_k и таким образом матрица Φ_k квадратная. В силу теорем вложения $\Phi_{kj}(t,b_i) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(b_i) \neq u_0^-(b_i)\ (i \in N_k), \psi_i \in W_p^{s_1}(0,T)\ (i \leq r),$$
$$|det\,\Phi_k| \geq \delta_1 > 0,\ \forall t \in [0,T], \forall k = 1,\ldots,r_0. \tag{2.66}$$

$$u_0^+(b_i) = \psi_i(0)\ (i = 1,2,\ldots,r_1),\ \ u_0^-(b_i) = \psi_i(0)\ \ (i = r_1+1,\ldots,r), \tag{2.67}$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все условия, гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (2.3) в точке $(0,b_j)$. Имеем

$$B_k^+ u_0 = \frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N} - \beta_k(0,b_j)(u_0^+(b_j) - u_0^-(b_j)) = g_k^+(0,b_j), \tag{2.68}$$

где $\beta_k(0,b_j) = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{ki}(0)\Phi_{ki}(0,b_j)$. Положим $\alpha_{ki}(0) = \alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k = \vec{F}_k, \quad F_{kj} = (\frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N} - g^+(0,b_j))/(u_0^+(b_j) - u_0^-(b_j)),\ j \in N_k,$$

$$\vec{\alpha}_k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{m_k}^k), \quad \vec{F}_k = (F_{k1}, \ldots, F_{km_k}),$$

которая в силу (2.66) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Положим $\beta_{0k} = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^k \Phi_{ki}(t,x)$, $\alpha_k = \beta_k - \beta_{0k}$. Естественным образом должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \beta_{0i}(0,x)(u_0^+ - u_0^-) + g_i^+(0,x),\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N},\ x \in \Gamma_i, \tag{2.69}$$

которое является еще одним условием согласования. Считая, что условия теорем 2.1, 2.2 выполнены, построим решение задачи сопряжения (2.14), (2.15), где возьмем функции β_{0k} $(k = 1, 2, \ldots, r_0)$ вместо β_k. Отметим, что в силу условия (2.65) и леммы 1.6,

$$\beta_{0k} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_k), \quad \beta_{0k} \in L_p(0,T; W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta \cap \Gamma_k)) \cap W_p^1(\Gamma_\delta \cap \Gamma_k); W_p^{s_0}(0,T)),$$

и таким образом, условия теорем 2.1, 2.2 будут выполнены. Обозначим полученное решение через w_0. Отметим, что условия (2.66), (2.67) и принадлежность функции w_0 некоторому пространству Гельдера $w_0 \in C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^\pm})$ $(\alpha \leq 2 - (n+2)/p)$ гарантируют существование постоянных $\tau^0 > 0, \delta_2 > 0$ таких, что

$$|\psi_j(t) - w_0^-(t,b_j)| \geq \delta_2 > 0\ (j = 1, 2, \ldots, r_1),$$
$$|\psi_j(t) - w_0^+(t,b_j)| \geq \delta_2 > 0\ \forall t \in [0,\tau^0],\ (j = r_1 + 1, \ldots, r). \tag{2.70}$$

Функция $v = u - w_0$ есть решение задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0,\ ((x,t) \in Q = G \times (0,T)), \quad Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta_{0i}(v^+ - v^-) = \alpha_i(v^+ - v^-) + \alpha_i(w_0^+ - w_0^-), \frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N},\ (t,x) \in S_i,\ i \leq r_0, \tag{2.72}$$

$$v^+(b_i,t) = \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0^+(t,b_i)\ (i = 1, 2, \ldots, r_1),$$
$$v^-(b_i,t) = \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0^-(t,b_i)\ (i = r_1 + 1, \ldots, r). \tag{2.73}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (2.13), (2.16)–(2.19), (2.21), (2.24), (2.65)–(2.67), (2.69). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (2.1)-(2.4) *такое, что* $u|_{Q^{\pm}_{\tau_0}} \in W_p^{1,2}(Q^{\pm}_{\tau_0})$, $\alpha_{ij}(t) \in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(i = 1,2,\dots,r_0,\ j = 1,2,\dots,m_i)$, *причем* $\nabla_{z'}\varphi_i u^{\pm}(x^i(z)) \in W_p^{1,2}((0,\tau)\times U^{\pm})$, $i = 1,\dots,r$ $(u^{\pm} = u|_{Q^{\pm}})$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (2.71)-(2.73).

Чтобы избежать громоздких записей, мы приведем доказательство в случае когда Γ_0 состоит из одной компоненты связности. В общем случае получаемая система уравнений для нахождения функций α_{ij} распадается на r_0 систем, каждую из которых можно рассмотреть отдельно. Поэтому рассмотрение общего случая лишь усложнит записи. В этом случае у нас останется одна поверхность Γ_0 (S_0), вместо наборов функций β_{0i}, β_i, $\alpha_i(t,x)$ используем функции $\beta_0 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_{0i}\Phi_i(t,x)$ (вектор $\vec{\alpha}_0 = (\alpha_{01},\dots,\alpha_{0r})$ есть решение системы

$$\Phi(0)\vec{\alpha}_0 = \vec{F},\quad F_j = (\frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N} - g^+(0,b_j))/(u_0^+(b_j) - u_0^-(b_j)),\ j = 1,2,\dots,r),$$

$\beta = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(t)\Phi_i(t,x)$ (функции Φ_i удовлетворяют условиям (2.65)), $\alpha = \beta - \beta_0$, соответственно. Матрица $\Phi(t)$ имеет элементы $\phi_{ij} = \Phi_j(t,b_i)$. Равенство (2.72) запишется в виде

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta_0(v^+ - v^-) = \alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w_0^+ - w_0^-),\quad \frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N},\quad (t,x)\in S_0. \quad (2.74)$$

Таким образом, мы рассматриваем задачу (2.71), (2.73), (2.74).

Фиксируем $R_0 > 0$ (эту величину мы определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} = (\beta_1 - \beta_{01},\dots,\beta_r - \beta_{0r}) \in B_{R_0} = \{\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau) :\ \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_0\}$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$ и решая задачу (2.71), (2.74), мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Функция v обладает свойствами, указанными в формулировках теорем 2.1, 2.2. Мы сведем вопрос разрешимости задачи (2.71), (2.73), (2.74) к вопросу разрешимости приведенного ниже операторного уравнения относительно вектора $\vec{\alpha}$, разрешимость которого устанавливается при помощи теоремы о неподвижной точке. Кроме отображения $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$, нам понадобится еще одно отображение. Пусть v – решение задачи (2.71), (2.74). Фиксируя k и умножая уравнение (2.71) на φ_k, имеем

$$Mw = w_t - Lw = [\varphi_k, L]v = f_{0k},\quad w = \varphi_k v,\quad w\big|_{t=0} = 0, \quad (2.75)$$

где $[\varphi_k, L]v = \varphi_k Lv - L(\varphi_k v) = -2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}\varphi_{kx_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v\varphi_{kx_ix_i} - \sum_{i=1}^n a_i\varphi_{kx_i}v$. Сделав замену переменных $x = x^k(z)$, перепишем (2.75) в виде

$$w^\pm_{kt} - b^\pm_{nn}(t,z)w^\pm_{kz_nz_n} = \sum_{i+j<2n} b^\pm_{ij}w^\pm_{kz_iz_j} + \sum_{i=1}^n b^\pm_i w^\pm_{kz_i} + b^\pm_0 w^\pm_k + f_{0k} = f_k(t,z),\ z \in U^\pm, \tag{2.76}$$

где $w^\pm_k = \varphi_k v(t, x^k(z))|_{U^\pm}$. Отметим, что $b^\pm_{nn} > 0$ для всех t, z в силу эллиптичности оператора L. В силу свойств решения v, указанных в теоремах 2.1, 2.2 и условий на коэффициенты, имеем что, для всех k, $f_k \in L_p(Q^\tau_0)$, $\nabla_{z'} f_k(t,z) \in L_p(Q^\tau_0)$ и более того $f_k(t,z) \in C^{d_0}(\overline{B'_\delta}; L_p((0,\tau)\times(-\delta_1,\delta_1)))$ с $d_0 < 1-(n-1)/p$ (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)-(3.12) в [3])), после может быть изменения на множестве меры ноль. Рассмотрим уравнения

$$\omega_{it}(t,z_n) - b^+_{nn}(t,0,z_n)\omega_{iz_nz_n} = f_i(t,0,z_n)\ (i = 1,2,\ldots,r_1),\ z_n \in (0,\delta_1), \tag{2.77}$$

$$\omega_{it}(t,z_n) - b^-_{nn}(t,0,z_n)\omega_{iz_nz_n} = f_i(t,0,z_n)\ (i = r_1+1,\ldots,r),\ z_n \in (-\delta_1,0). \tag{2.78}$$

Дополним уравнения (2.77), (2.78) начальными и краевыми условиями

$$\omega_i(0,z_n) = 0,\ \omega_i|_{z_n=0} = \tilde\psi_i(t),\ \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0,\ i \le r_1. \tag{2.79}$$

$$\omega_i(0,z_n) = 0,\ \omega_i|_{z_n=0} = \tilde\psi_i(t),\ \omega_i|_{z_n=-\delta_1} = 0,\ i > r_1. \tag{2.80}$$

Пусть $v(\vec\alpha)$ – решение задачи (2.71), (2.74), построим функции ω_i как решение задачи (2.77), (2.79) (или (2.78), (2.80) соответственно). В случае, если $v(\vec\alpha)$ есть решение задачи (2.71), (2.74), то $\omega_i(t,z_n) = w^+_i(t, x^i(0,z_n))$ при $i \le r_1$ и $\omega_i(t,z_n) = w^-_i(t,x^i(0,z_n))$ при $i > r_1$. Перепишем равенства (2.74) в окрестности U_i в виде

$$\sum_{j=1}^n b^+_j(t,z')v^+_{z_j}(x^i(t,z',0)) = (\beta_0(v^+ - v^-) + \alpha(v^+ - v^-) +$$
$$\alpha(w^+_0 - w^-_0))(t, x^i(z',0)),$$
$$\sum_{j=1}^n b^+_j(t,z')v^+_{z_j}(x^i(t,z',0)) = \sum_{j=1}^n b^-_j(t,z')v^-_{z_j}(x^i(t,z',0)). \tag{2.81}$$

Полагая $z' = 0$, можем переписать эти равенства в виде

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^+(t,0)v_{z_j}^+(t,b_i) = (\beta_0(v^+ - v^-) + \alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w_0^+ - w_0^-))(t,b_i),$$
$$\sum_{j=1}^{n} b_j^-(t,z')v_{z_j}^-(t,b_i) = (\beta_0(v^+ - v^-) + \alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w_0^+ - w_0^-))(t,b_i). \quad (2.82)$$

Если функции $v, \vec{\alpha}$ есть решение обратной задачи, то легко увидеть, что $\omega_{iz_n}(t,0) = v_{z_n}^+(t,b_i)$ при $i \le r_1$ и $\omega_{iz_n}(t,0) = v_{z_n}^-(t,b_i)$ при $i > r_1$. Полагая $z' = 0$ и используя (2.73), мы придем к равенствам

$$b_n^+(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^+(t,0)v_{z_j}^+(t,b_i) = \beta_0(v^+ - v^-)(t,b_i) +$$
$$\alpha(\tilde{\psi}_i(t) - v^-)(t,b_i) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,b_i), i = 1,2,\dots,r_1, \quad (2.83)$$

$$b_n^-(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^-(t,0)v_{z_j}^-(t,b_i) = \beta_0(v^+ - v^-)(t,b_i) +$$
$$\alpha(v^+(t,b_i) - \tilde{\psi}_i(t)) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,b_i), i = r_1+1,\dots,r, \quad (2.84)$$

которые также можно переписать в виде

$$\alpha(t,x^i(0)) = (b_n^+(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^+(t,0)v_{z_j}^+(t,b_i) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,b_i) +$$
$$\alpha v^-(t,b_i))/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,b_i)) = F_i, i = 1,2,\dots,r_1 \quad (2.85)$$

$$\alpha(t,x^i(0)) = (b_n^-(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^-(t,0)v_{z_j}^+(t,b_i) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,b_i) -$$
$$\alpha v^+(t,b_i))/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,b_i)) = F_i, i = r_1+1,\dots,r. \quad (2.86)$$

Здесь функция v строится как решение задачи (2.71), (2.74) а функции ω_i как решение задач (2.77), (2.79) (или (2.78), (2.80) соответственно). Отметим, что в силу (2.70) знаменатели в равенствах (2.85), (2.86) строго отделены от нуля (при $\tau \le \tau^0$). Это и есть искомая система уравнений для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \quad (2.87)$$

где координаты вектора F определены равенствами (2.85), (2.86). Отметим, что лемма 1.6 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\|\vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.88}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре B_{R_0} и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha} = 0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (2.71), (2.74) $v = v(\vec{\alpha}) = 0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0) = b_n^+(t,0)\omega_{iz_n}(t,0)/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t, x^i(0))), i = 1, 2, \ldots, r_1,$$
$$F_i(0) = b_n^-(t,0)\omega_{iz_n}(t,0)/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t, x^i(0))), i = r_1 + 1, \ldots, r.$$

Положим $R_0 = 2\|\Phi^{-1}\vec{F}(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,T)}$. Если у нас есть два вектора $\vec{\alpha}_i \in B_{R_0}$, $i = 1, 2$, то неравенство (2.88) влечет

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\sum_{i=1}^{r}\|F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.89}$$

Проверим выполнение условий теоремы о неподвижной точке. Вначале получим оценки для решений $v(\vec{\alpha})$. В силу леммы 1.6 $\alpha \in \tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)$, $\nabla_{z'}\alpha(t, x^i(z', 0)) \in \tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)$ $(i = 1, \ldots, r)$ и имеем оценки

$$\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} \le c_0\sum_{i=1}^{r}\|\alpha_i\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\|\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} \le \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_1R_0, \tag{2.90}$$

$$\|\nabla_{z'}\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} \le c_0\sum_{i=1}^{r}\|\alpha_i\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\|\nabla_{z'}\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})} \le c_2\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2R_0. \tag{2.91}$$

где постоянная c_0 не зависит от τ. Отметим, что включение $\nabla_{z'}\Phi_i(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})$ вытекает из последних двух включений в (2.65). Из теоремы 2.1 имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_0\|\alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} = J_0, \tag{2.92}$$

где постоянная C_0 не зависит от τ. В силу леммы 1.6, получим, что

$$J_0 \le c_2\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)}(\|v^+ - v^-\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{2.93}$$

Имеем
$$\|v^+ - v^-\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} \le \|v^+\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \|v^-\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)}. \tag{2.94}$$
В норму $\|v^\pm\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)}$ входят два слагаемых $\|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau))}$ и $\|v^\pm\|_{L_p(0,\tau;\tilde W_p^{2s_0}(\Gamma_0))}$. Можем оценить первое через

$$\|v^+\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau))} + \|v^-\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau))} \le c\tau^{1/2}(\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}). \tag{2.95}$$

Действительно, $\|v^\pm\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le \tau^{1/2}\|v^\pm\|_{\tilde W_p^{s_1}(0,\tau)}$. Тогда (лемма 1.3) $\|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau))} \le C\tau^{1/2}\|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)}$. Отсюда и вытекает неравенство (2.95). Оценим второе слагаемое. Имеем, что

$$\|v^\pm\|_{L_p(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))} \le c_1\|v^\pm\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G^\pm))} \le$$
$$c_2\|v^\pm\|^{1/2}_{L_p(Q_\tau^\pm)}\|v^\pm\|^{1/2}_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)} \le c_3\tau^{1/2}\|v^\pm\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)}. \tag{2.96}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о следах (см. [1, теорема 4.7, с.412]) и соответствующей оценкой $\|v^\pm\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} \le c_1\|v^\pm\|_{W_p^1(G^\pm)}$, интерполяционным неравенством $\|v^\pm\|_{W_p^1(G^\pm)} \le C\|v^\pm\|^{1/2}_{L_p(G^\pm)}\|v^\pm\|^{1/2}_{W_p^2(G^\pm)}$ и неравенством $\|v^\pm\|_{L_p(0,\phi)} \le \phi\|v_t^\pm\|_{L_p(0,\phi)}$, вытекающим из формулы Ньютона-Лейбница. Отметим, что те же рассуждения имеются в доказательстве теоремы 1.7 (см. неравенства (1.98)-(1.100)). Неравенства (2.95), (2.96) гарантирую оценку

$$\|v^+\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \|v^-\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} \le C\tau^{1/2}(\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}). \tag{2.97}$$

Здесь постоянная C не зависят от τ. Неравенства (2.92)-(2.94), (2.97) гарантируют оценку

$$\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le c_4R_0\tau^{1/2}(\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) +$$
$$c_5R_0\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}. \tag{2.98}$$

Выбрав $\tau_1 \le \tau^0$ такое, что $c_4R_0\tau_1^{1/2} \le 1/2$, из (2.98) получим при $\tau \le \tau_1$, что

$$\|v^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le 2c_6R_0\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} = c_7R_0. \tag{2.99}$$

Здесь все постоянные не зависят от τ. Из этого неравенства и (2.92)-(2.94), (2.97), (2.99) вытекает неравенство

$$\|\alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} \le c(R_0). \tag{2.100}$$

Сейчас мы запишем оценки из теоремы 2.2. Как вытекает из этой теоремы, имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))})\leq$$
$$C_1(\|\alpha(v^+-v^-)+\alpha(w_0^+-w_0^-)\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)}+\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i(\alpha(v^+-v^-)+$$
$$\alpha(w_0^+-w_0^-))\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)}),$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau\in(0,T]$. Повторяя предыдущие рассуждения, используемые при выводе (2.98), и оценку (2.99), придем к неравенству вида

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))})\leq$$
$$c_6\tau^{1/2}\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))})+$$
$$c_7(\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})}+\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}),$$

где постоянные c_i не зависят от τ и зависят от величины R_0. Выберем $\tau_2\leq\tau_1$ такое, что $c_6\tau_2^{1/2}\leq 1/2$. Тогда при $\tau\leq\tau_2$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))})\leq$$
$$c_8(\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)(t,x^i(z',0))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})}).\quad(2.101)$$

Пусть $\vec\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{ir})\in B_{R_0}$ $(i=1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (2.71)-(2.72), где функция α заменяется на соответствующие функции $\alpha^j=\sum_{i=1}^r\alpha_{ji}\Phi_i$ $(j=1,2)$. Тогда разности $v_1-v_2=\tilde\omega$, $\tilde\alpha=\alpha^1-\alpha^2$ есть решение задачи

$$M\tilde\omega=\tilde\omega_t-L\tilde\omega=0,\quad (t,x)\in Q=G\times(0,T),$$
$$B\tilde\omega|_S=0,\quad \tilde\omega|_{t=0}=0,\ \text{для}\ \ (t,x)\in S_0:\ \frac{\partial\tilde\omega^+}{\partial N}=\frac{\partial\tilde\omega^-}{\partial N},$$
$$\frac{\partial\tilde\omega^+}{\partial N}-\beta_0(\tilde\omega^+-\tilde\omega^-)=\frac{(\alpha^1+\alpha^2)}{2}(\tilde\omega^+-\tilde\omega^-)+\frac{\tilde\alpha}{2}(v_1^++v_2^+-v_1^--v_2^-)+\tilde\alpha(w_0^+-w_0^-).$$

Теперь мы повторим рассуждения использованные при получении оценок (2.99), (2.101), но применительно к этой задаче вместо задачи (2.71), (2.72). Точно также получим, что, при $\tau \le \tau_1$, справедливо неравенство

$$\|\tilde{\omega}^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{\omega}^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le c_6(R_0)\|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{2.102}$$

где c_6 не зависит от τ. Аналогично при $\tau \le \tau_2$ имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))}) \le$$
$$c_9(\|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\tilde{\alpha}(x^i(z',0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)}). \tag{2.103}$$

Аналог оценок (2.90), (2.91) в нашем случае дает неравенство

$$\|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^0)} + \sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\tilde{\alpha}(x^i(z',0))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} \le c\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.104}$$

Тогда неравенства (2.102), (2.103) могут быть переписаны в виде

$$\|\tilde{\omega}^+\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{\omega}^-\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}^+(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))} +$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}^-(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))}) \le c_{10}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.105}$$

Пусть w_i^j $(j = 1, 2)$ решения задач (2.77), (2.79) и (2.78), (2.80) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j. Пусть $w^0 = \varphi_i\tilde{\omega}$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$k_{it} - b_{nn}^+(t,0,z_n)k_{iz_nz_n} = \sum_{i+j<2n} b_{ij}^+\omega_{z_iz_j}^0 + \sum_{i=1}^{n} b_i^+\omega_{z_i}^0 + b_0^+\omega^0 + [\varphi_i, L]\tilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i|_{z'=0}, \tag{2.106}$$

$$k_i\big|_{t=0} = 0,\ k_i|_{z_n=0} = 0,\ k_i|_{z_n=\delta_1} = 0,\ i \le r_1. \tag{2.107}$$

$$k_{it} - b_{nn}^-(t,0,z_n)k_{iz_nz_n} = \sum_{i+j<2n} b_{ij}^-\omega_{z_iz_j}^0 + \sum_{i=1}^{n} b_i^-\omega_{z_i}^0 + b_0^-\omega^0 + [\varphi_i, L]\tilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i|_{z'=0}, \tag{2.108}$$

$$k_i\big|_{t=0} = 0,\ k_i|_{z_n=0} = 0,\ k_i|_{z_n=-\delta_1} = 0,\ i > r_1. \tag{2.109}$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, [6, т. 9.1 §9 гл. 4]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_1} \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} + \sum_{i=r_1+1}^{r} \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(-\delta_1,0))} \leq$$
$$\sum_{i=1}^{r_1} \|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))} + \sum_{i=r_1+1}^{r} \|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(-\delta_1,0))}. \quad (2.110)$$

Приведем оценку для правой части. Пусть, например, $i \leq r_1$. Имеем

$$\|f_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \leq c_1 \|f_i(t,z',z_n)\|_{W_p^s(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} = J,$$
$$s > (n-1)/p,$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)-(3.12) в [3]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [3]).

$$J \;\leq\; c_1 \|f_i(t,z)\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \|f_i(t,z)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}, \;\; 2\theta - 1 \;=\; s. \quad (2.111)$$

Исходя из определения f_i и условий (2.18) на коэффициенты, имеем

$$\|f_i\|_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \leq c\|\tilde{\omega}\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U^+))} \leq c_1 \tau^{1/2} \|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}, \quad (2.112)$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|\tilde{\omega}\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U^+))} \leq c\|\tilde{\omega}\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;W_p^2(+))} \|\tilde{\omega}\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;L_p(U^+))}$$

и оценку $\|\tilde{\omega}\|_{L_p(0,\tau;L_p(U^+))} \leq \tau \|\tilde{\omega}_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(U^+)}$, вытекающую из формулы Ньютона-Лейбница, а затем оценим полученные нормы через норму в $W_p^{1,2}(Q_\tau^+)$. Также в силу условий (2.18) (используем еще вложение $W_p^1(U^+) \subset L_\infty(U^+)$)

$$\|f_i(t,z)\|_{W_p^1(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \leq c(\|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}). \quad (2.113)$$

Оценки (2.111)-(2.113) влекут, что

$$\|f_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(-\delta_1,\delta_1)))} \leq c_2 \tau^{(1-\theta)/2} (\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))} +$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))} + \|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}), \quad (2.114)$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от τ. Очевидно, что точно такая оценка имеет место и при $i > r_1$. Используя оценки (2.110), (2.114), получим

$$\sum_{i=1}^{r_1} \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} + \sum_{i=r_1}^{r} \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(-\delta_1,0))} \leq c_2\tau^{\frac{1-\theta}{2}}(\|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}+$$

$$\|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau))})).$$

В частности, отсюда и из (2.105) и леммы 1.3 вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} \|k_{iz_n}(t,0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_4\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.115}$$

Мы получили необходимые оценки. Оценим теперь норму $\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}$, считая что $\tau \leq \tau_2$. В силу (2.89), достаточно оценить норму $\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}$. Приведем покоординатные оценки. Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Пусть, например, $i \leq r_1$. Оно записывается в виде

$$J_1 = b_n^+(\omega_{iz_n}^1 - \omega_{iz_n}^2)/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,x^i(0))) \tag{2.116}$$

где $b_n^+ = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{k,l}(y^i(z))\nu_k\nu_l|_{z_n=0}$ ($\tilde{a}_{k,l}$ – старшие коэффициенты L, записанного в локальной системе координат y в области G^+). Здесь $\nu_k = -\gamma_{z_k}(z')/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$ при $k < n$ и $\nu_n = 1/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$. В силу условий (2.17), леммы 1.6 и неравенства (2.110) имеем

$$\|J_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_1\|\omega_{iz_n}^1 - \omega_{iz_n}^2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2\tau^{d_2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s}(0,\tau)}, \tag{2.117}$$

где все постоянные не зависят от τ и $d_2 = (1-\theta)/2$ - положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n-1}(b_i^+(t,0)\tilde{w}_{z_i}^+(t,x^i(0)) - \beta_0(\tilde{w}^+ - \tilde{w}^-)(t,x^i(0)))/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,x^i(0))).$$

В силу леммы 1.6 и условий на коэффициенты (2.17) имеем

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2\sum_{i=1}^{r}(\|\tilde{w}^+(t,x^i(0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} + \|\tilde{w}^-(t,x^i(0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}+$$

$$\|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))|_{z=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}).$$

Каждое из слагаемых, входящих в эту сумму, оценивается одинаково. Отметим, что условие $v \in \tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_{01}^\tau)$ влечет, что $\nabla_{z'} v \in \tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)$ и справедлива оценка (см. [113, лемма 7.2]) $\|\nabla_{z'} v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} + \|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^\tau)} \le c\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_{01}^\tau)}$ для всех $v \in \tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_{01}^\tau)$, где с помощью замены переменных легко убедиться, что постоянная c не зависит от τ. В частности, отсюда вытекает оценка

$$\|v\|_{W_p^1(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le c\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_{01}^\tau)}. \tag{2.118}$$

Рассмотрим, например, последнее слагаемое в оценке для $\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$. Имеем (см. например, [113, теорема 5.10])

$$\|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))|_{z=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|_{W_p^s(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))},$$

при $s > (n-1)/p$ (возьмем $s \in (n-1)/p, 1)$). Далее, используя интерполяционное неравенство (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [3]), (2.118) и лемму 1.3, получим

$$\begin{gathered}\|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))|_{z=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|_{W_p^s(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le \\ c_3\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|^\theta_{W_p^1(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le \\ c_4\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))\|^\theta_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}\|\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le \\ c_5\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))\|^\theta_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau))}\tau^{(1-\theta)/2}\|\varphi_i(\tilde{w}^+(t,x^i(z',0)))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}.\end{gathered}$$

Ссылаясь на лемму 1.3 и используя (2.105), получим оценку ($d_3 = (1-\theta)/2$)

$$\|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(t,x^i(z)))|_{z=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_6\tau^{d_3}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $\|J_2\|$, и можно сказать, что

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_7\tau^{d_4}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.119}$$

для некоторого $d_4 > 0$ и не зависящей от τ постоянной c_7. Оценка последней разности

$$J_3 = (\alpha^1 v_1^-(t,x^i(0))) - \alpha^2 v_2^-(t,x^i(0)))/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,x^i(0)))$$

получается аналогично, и мы имеем, что найдутся постоянные $d_5 > 0$ и c_8 такие, что

$$\|J_3\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_8\tau^{d_5}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.120}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (2.114), (2.116), (2.120), имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{10}\tau^{d_6}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где показатель d_6 минимальный из полученных в доказательстве, и постоянная c_{10} не зависит от τ. Возьмем в качестве τ_0 число со свойством $\tau_0 \leq \tau_2$, $c_{10}\tau_0^{d_6} \leq 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно уравнение (2.111) имеет решение $\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_0)$. Используя найденное решение $\vec{\alpha}$, найдем решение v задачи сопряжения (2.71), (2.72).

Покажем, что у нас выполнены условия переопределения (2.73). Вычитая равенства (2.82) из соответствующих равенств (2.83), (2.84), получим

$$b_n^+(t,0)(\omega_{iz_n}(t,0) - v_{z_n}^+(t,b_i)) = \alpha(\tilde{\psi}_i(t) - v^+)(t,b_i), i = 1,2,\ldots,r_1, \tag{2.121}$$

$$b_n^-(t,0)(\omega_{iz_n}(t,0) - v_{z_n}^-(t,b_i)) = \alpha(-\tilde{\psi}_i(t) + v^-)(t,b_i), i = r_1+1,\ldots,r, \tag{2.122}$$

Напомним, что $v(\vec{\alpha})$ есть решение задачи (2.71), (2.74) и тогда $w_i^+(t,0) = v_i^+(t,b_i)$ при $i \leq r_1$ и $w_i^-(t,0) = v_i^-(t,b_i)$ при $i > r_1$. Функции $w_i^+(t,z)$ $(i \leq r_1)$ и $w_i^-(t,z)$ $(i > r_1)$ удовлетворяют уравнению (2.76). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (2.77) при $i \leq r_1$ и из (2.78) при $i > r_1$. Получим равенства

$$(w_{it}(t,z_n) - \omega_{it}^+(t,0,z_n)) - b_{nn}^+(t,0,z_n)(w_{iz_nz_n} - \omega_{iz_nz_n}^+(t,0,z_n)) = 0,\ i \leq r_1, \tag{2.123}$$

$$(w_{it}(t,z_n) - \omega_{it}^-(t,0,z_n)) - b_{nn}^-(t,0,z_n)(w_{iz_nz_n} - \omega_{iz_nz_n}^-(t,0,z_n))) = 0,\ i > r_1. \tag{2.124}$$

Функции $w_i(t,z_n) - \omega_i^+(t,0,z_n)$ при $i = 1,\ldots,r_1$ и $w_i(t,z_n) - \omega_i^-(t,0,z_n)$ при $r > r_1$ при удовлетворяет уравнениям (2.123), (2.124), однородному начальному условию и в силу (2.121), (2.122) граничным условиям

$$b_n^+(t,0)(w_{iz_n}(t,0) - \omega_{iz_n}^+(t,0)) = \alpha(w_i(t,0) - \omega_i^+(t,0)),\ w_i(t,\delta_1) - \omega_i^+(t,0,\delta_1) = 0,$$

$$b_n^-(t,0)(w_{iz_n}(t,0) - \omega_{iz_n}^-(t,0)) = \alpha(\omega_i^-(t,0) - w_i(t,0)),\ w_i(t,-\delta_1) - \omega_i^+(t,0,-\delta_1) = 0,$$

где в первом равенстве $i = 1,2,\ldots,r_1$ и во втором $i = r_1+1,\ldots,r$. В силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t,z_n) = \omega_i^+(t,0,z_n)$ при $i = 1,\ldots,r_1$ и $w_i(t,z_n) = \omega_i^-(t,0,z_n)$ при $i = r_1+1,\ldots,r$. Следовательно, выполнены равенства (2.73). Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, то утверждение о единственности решений здесь очевидно. □

Как видно из доказательства теоремы 2.5, параметр τ_0, на котором решение существует определяется величиной

$$R_T = J_T(u_0, g, f, \psi_1, \ldots, \psi_r, g_1^+, \ldots, g_{r_0}^+) = \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} +$$
$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^+)} + \|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U^-)}) +$$
$$\|f\|_{L_p(Q_T)} + \sum_{i=1}^{r_0}\|g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^T)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S_T)} +$$
$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{x'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^T)} + \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i\in N_j}\|\nabla_{z'}\varphi_i g_j^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{01}^T)} + \sum_{i=1}^{r}\|\psi_i\|_{W_p^{s_1}(0,T)}$$

и не определяется самим видом (или гладкостью) данных. Напомним, что $S_T = S$, $Q_T = Q$, $S_{01}^T = S_{01}$. Таким образом, $\tau_0 = \tau_0(R_T)$. В связи с этим справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть дана постоянная $R > 0$. Тогда найдется $\tau_0 = \tau_0(R) > 0$ такое, что решение задачи (2.1)-(2.4) с данными удовлетворяющими условиям теоремы 2.5 и условию $J_T(u_0, g, f, \psi_1, \ldots, \psi_r, g_1^+, \ldots, g_{r_0}^+) \leq R$. существует на $[0, \tau_0]$, единственно и для любых двух таких наборов данных $f^i, u_0^i, g_{ij}^+, g^i, \psi_j^i$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, r_0)$ справедлива оценка устойчивости*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u_1 - u_2\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} + \sum_{i=1}^{r_0}\sum_{j=1}^{m_i}\|\alpha_{ij}^1 - \alpha_{ij}^2\|_{W_p^{s_0}(0,\tau_0)}$$
$$+\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i u^+(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^+(\tau_0))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i u^-(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^-(\tau_0))}) \leq$$
$$cJ_{\tau_0}(u_0^1 - u_0^2, g^1 - g^2, f^1 - f^2, \psi_1^1 - \psi_1^2, \ldots, \psi_r^1 - \psi_r^2, g_{11}^+ - g_{21}^+, \ldots, g_{1r_0}^+ - g_{2r_0}^+),$$

где α_{ij}^k, u_k $(k = 1, 2)$ соответствующие решения задачи (2.1)-(2.4) и c – некоторая постоянная, также зависящая от R.

Оценка устойчивости частично получена в доказательстве предыдущей теоремы. Однако, ее подробное доказательство требует значительного количества дополнительных рассуждений. Чтобы не усложнять изложение, мы не приводим его в полном виде.

Замечание 2.3. *Вообще говоря граница* Γ *области также может состоять из нескольких компонент связности, в этом случае мы можем брать различные граничные условия на каждой из них. Утверждения теорем* 2.1, 2.2, 2.5 *останутся справедливыми при выполнении соответствующих условий на коэффициенты граничных операторов.*

2.3 Обратные задачи об определения коэффициентов теплообмена в случае цилиндрической области G

Пусть $p \in (n+2, \infty)$. Приведем условия на исходные данные. Ряд этих условий мы уже сформулировали в предыдущем пункте. Пусть $B'_\delta(x'_{ij}) = \{x' : |x' - x'_{ij}| < \delta\}$, $U_{i=1}^{N_j} B'_\delta(x'_{ij}) = \Omega_{\delta j}$. Здесь параметр $\delta > 0$ выбираем достаточно малым, чтобы было выполнено условие: $\overline{B_\delta(x_{ij})} \cap \overline{B_\delta(x_{i_1 j_1})} = \emptyset$ при $x_{ij} \neq x_{i_1 j_1}$, $\overline{B'_\delta(x'_{ij})} \cap \partial\Omega = \emptyset$ при всех x'_{ij}.

Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t, x')$ при всех допустимых i, j обладают свойствами

$$\Phi_{ij} \in W_p^{s_0, 2s_0}(Q^0) \cap H_T^{2,1/2}(\Omega_{\delta j}),$$
$$H_\tau^{2,1/2}(\Omega_{\delta j}) = L_p(0, \tau; W_p^{2-1/p}(\Omega_{\delta j})) \cap W_p^1(\Omega_{\delta j}; W_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)). \quad (2.125)$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k = \Phi_{jk}(t, x'_{ik})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N_k)$. В силу теорем вложения $\Phi_{jk}(t, x'_{ik}) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0, T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(x_{ij}) \neq u_0^-(x_{ij}),\ \psi_{ij}(t) \in W_p^{s_1}(0, T),\ (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = 1, 2, \ldots, N_j),$$
$$|det\, \Phi_k| \geq \delta_1 > 0\ \forall t \in [0, T], \forall k = 1, \ldots, m-1. \quad (2.126)$$

$$u_0^+(x_{ij}) = \psi_{ij}(0)\ (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = 1, 2, \ldots, M_j),$$
$$u_0^-(x_{ij}) = \psi_{ij}(0)\ \ (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = M_j + 1, \ldots, N_j), \quad (2.127)$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все данные гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (2.7) в точке $(0, x_{ij})$.

Имеем

$$B_k^+ u_0 = \frac{\partial u_{0j}^+(x'_{ij})}{\partial N} - \beta_k(0, x'_{ij})(u_{0j}^+(x'_{ij}) - u_{0j}^-(x'_{ij})) = g_j^+(0, x'_{ij}), \qquad (2.128)$$

где $\frac{\partial u_{0j}^+(x'_{ij})}{\partial N} = \frac{\partial u_0(x)}{\partial N}(x'_{ij}, l_j \pm 0)$. $u_{0j}^{\pm}(x'_{ij}) = u_0(x'_{ij}, l_j \pm 0)$, $\beta_k(0, x'_{jk}) = \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_{ik}(0)\Phi_{ik}(0, x'_{jk})$. Положим $\alpha_{ik}(0) = \alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k = \vec{F}_k, \quad F_{kj} = (\frac{\partial u_{0j}^+(x'_{jk})}{\partial N} - g_j^+(0, x'_{jk}))/(u_{0j}^+(x'_{jk}) - u_{0j}^-(x'_{jk})),$$
$$j = 1, 2, \ldots, N_i; \; k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\vec{\alpha}_k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{m_k}^k), \quad \vec{F}_k = (F_{k1}, \ldots, F_{km_k}),$$

которая в силу условия (2.126) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Положим $\beta_{0k} = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^k \Phi_{ik}(t, x)$, $\alpha_k = \beta_k - \beta_{0k}$. Условия согласования на Γ_0 имеют вид

$$\frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \beta_{0j}(0, x')(u_{0j}^+ - u_{0j}^-) + g_j^+(0, x'), \; \frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \frac{\partial u_{0j}^-}{\partial N}, \; (t, x) \in \Gamma^j. \qquad (2.129)$$

Считая, что условия теорем 2.3, 2.4 выполнены построим решение задачи сопряжения (2.32), (2.33), где возьмем функции β_{0k} $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ вместо β_k. Отметим, что в силу условия (2.125) и леммы 1.6,

$$\beta_{0k} \in W_p^{s_0, 2s_0}(Q^0), \quad \beta_{0k} \in L_p(0, T; W_p^{2-1/p}(\Omega_{\delta k})) \cap W_p^1(\Omega_{\delta k}; W_p^{s_0}(0, T)),$$

и таким образом, условия теорем 2.3, 2.4 будут выполнены. Обозначим полученное решение через w_0. Оно обладает всеми свойствами гладкости указанными в формулировках этих теорем. Отметим, что условия (2.126), (2.127) и принадлежность функции w_0 некоторому пространству Гельдера $w_0 \in C^{\alpha/2, \alpha}(\overline{Q^{\pm}})$ $(\alpha \leq 2 - (n+2)/p)$ гарантируют существование постоянных $\tau^0 > 0, \delta_2 > 0$ таких, что

$$|\psi_{ij}(t) - w_{0j}^-(t, x'_{ij})| \geq \delta_2 > 0 \; (j = 1, 2, \ldots, m-1; \; i = 1, 2, \ldots, M_j),$$
$$|\psi_{ij}(t) - w_{0j}^+(t, x'_{ij})| \geq \delta_2 > 0 \; \forall t \in [0, \tau^0], \; (j = 1, 2, \ldots, m-1; \; i = M_j+1, \ldots, N_j). \qquad (2.130)$$

Сделаем замену $u = v + w_0$ в (2.1),(2.5)-(2.8). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \qquad (2.131)$$

$$Rv|_{S^0}=0, v|_S=0,\ R_0v(t,x',0)=0,\quad R_1u(t,x',l)=0,\ v|_{t=0}=0, \qquad (2.132)$$

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial N}-\beta_{0i}(v_i^+-v_i^-)=\alpha_i(v_i^+-v_i^-)+\alpha_i(w_{0i}^+-w_{0i}^-),$$
$$\frac{\partial v_i^+}{\partial N}=\frac{\partial v_i^-}{\partial N},\ (t,x')\in Q^0,\ (i=1,2,\ldots,m-1), \quad (2.133)$$

$$v_j^+(t,x'_{ij})=\tilde\varphi_{ij}(t)=\psi_{ij}(t)-w_{0j}^+(t,x'_{ij})\ (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=1,2,\ldots,M_j),$$
$$v_j^-(t,x'_{ij})=\tilde\varphi_{ij}(t)=\psi_{ij}(t)-w_{0j}^-(t,x'_{ij})\ (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=M_j+1,\ldots,N_j). \quad (2.134)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия* A), (2.36), (2.37), (2.38) *в том случае если* $Ru\neq u$, (2.39) *при* $j=0$ *или* (u) *при* $j=1$ *если* $R_0u\neq u$ *или* (u) $R_1u\neq u$, (2.40)–(2.42), (2.44), (2.47), (2.125)-(2.127), (2.129). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (2.1), (2.5)-(2.8) *такое, что* $u|_{Q^{\pm}_{\tau_0}}\in W_p^{1,2}(Q^{\pm}_{\tau_0})$, $\alpha_{ij}(t)\in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(i=1,2,\ldots,m-1,\ j=1,2,\ldots,N_i)$, *причем* $\nabla_{x'}\varphi u(x)\in W_p^{1,2}(Q^{\pm}_{\tau_0})$.

Доказательство. Чтобы установить утверждение, достаточно доказать разрешимость вспомогательной задачи (2.131)-(2.134). Чтобы избежать громоздких записей, мы приведем доказательство в случае когда $m=2$, т.е. мы имеем только одну поверхность $\Gamma^1=\{x\in G:\ x_n=l_1\in(0,l)\}$. В общем случае получаемая система уравнений для нахождения функций α_{ij} распадается на $m-1$ систему, каждую из которых можно рассмотреть отдельно. Поэтому рассмотрение общего случая лишь усложнит записи. В этом случае у нас останется одна поверхность Γ^1 (S^1), положим $r=N_1$, будем иметь набор точек $x_i=(x'_i,l_1)$ $(i=1,2,\ldots,r)$, вместо наборов функций β_{0i}, β_i, $\alpha_i(t,x')$ используем функции $\beta_0=\sum_{i=1}^r\alpha_{0i}\Phi_i(t,x')$ (вектор $\vec\alpha_0=(\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0r})$ есть решение системы

$$\Phi(0)\vec\alpha_0=\vec F,\quad F_j=(\frac{\partial u_0^+(x'_j)}{\partial N}-g^+(0,x'_j))/(u_0^+(x'_j)-u_0^-(x'_j)),\ j=1,2,\ldots,r,$$

$\beta=\sum_{i=1}^r\alpha_i(t)\Phi_i(t,x')$ (функции Φ_i удовлетворяют условиям (2.125) $\alpha=\beta-\beta_0$, соответственно. Матрица $\Phi(t)$ имеет элементы $\phi_{ij}=\Phi_j(t,x'_i)$. Равенство (2.133) запишется в виде

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}-\beta_0(v^+-v^-)=\alpha(v^+-v^-)+\alpha(w_0^+-w_0^-),\ \ \frac{\partial v^+}{\partial N}=\frac{\partial v^-}{\partial N},\ \ (t,x)\in S^1. \quad (2.135)$$

Соответственно, равенство (2.134) запишем в виде

$$v^+(t,x_i') = \tilde{\varphi}_i(t) = \varphi_i(t) - w_0^+(t,x_i') \ (i=1,2,\dots,M),$$
$$v^-(t,x_i') = \tilde{\varphi}_i(t) = \varphi_i(t) - w_0^-(t,x_i') \ (i=M+1,\dots,r), \quad (2.136)$$

где $v^\pm(t,x_i') = \lim_{x_n\to l_1\pm 0} v(t,x_i',x_n)$.

Таким образом, мы рассматриваем задачу (2.131) - (2.132), (2.135), (2.136).

Построим интегральное уравнение для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируя функцию α и применяя теорему 2.3 к задаче (2.131)-(2.133) мы построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Возьмем точку $y_i' \in \Omega$ и функцию φ_i $(i \le r)$. Умножая уравнение (2.131) на φ_i имеем

$$Mw = w_t - Lw = [\varphi_i, L]v = f_0, \quad w = \varphi_i v, \quad w\big|_{t=0} = 0. \quad (2.137)$$

где $[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk} v_{x_k}\varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk} v \varphi_{ix_kx_l} - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_{ix_k} v$. Равенства (2.137) можно переписать в виде

$$w_t - a_{nn}(t,x)w_{x_nx_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}w_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{x_i} + a_0 w + f_0 = f_1. \quad (2.138)$$

Отметим, что $a_{nn} > 0$ для всех t, x. Имеем, что $f_1, \nabla_{x'} f_1 \in L_p(Q_\tau)$. В силу теорем вложения, $f_1(t,x',x_n) \in C^\alpha(\overline{\Omega}; L_p((0,\tau)\times(0,l)))$ с $\alpha \le 1-(n-1)/p$, после может быть изменения на множестве меры ноль (см. соотношения (3.1)-(3.3), (3.5), (3.6), следствие 4.3 в [3] и включение (5.7$'$) в [113]). Рассмотрим уравнения

$$w_{it}(t,x_n) - a_{nn}(t,y_i',x_n)w_{ix_nx_n} = f_1(t,y_i',x_n) \ (i=1,2,\dots,r_0) \quad (2.139)$$

$$w_{it}(t,x_n) - a_{nn}(t,y_i',x_n)w_{ix_nx_n} = f_1(t,y_i',x_n) \ (i=r_0+1,\dots,r) \quad (2.140)$$

Дополним уравнения (2.139), (2.140) начальными и краевыми условиями

$$w_i(0,x_n) = 0, \ w_i|_{x_n=a+0} = \tilde{\psi}_i(t), \ w_i|_{x_n=a+\delta} = 0, \ i \le r_0. \quad (2.141)$$

$$w_i(0,x_n) = 0, \ w_i|_{x_n=a-0} = \tilde{\psi}_i(t), \ w_i|_{x_n=a-\delta} = 0, \ i > r_0. \quad (2.142)$$

Решение w_i задачи (2.139), (2.141) (или (2.140), (2.142) соответственно) существует и единственно [6]. В случае если $v, \vec{\alpha}$ есть решение задачи (2.131)-(2.134) имеем, что $w_i(t,x_n) = \varphi_i v(t,y_i',x_n)$. Перепишем условие сопряжения (2.133) в виде

$$a_{nn}^+ v_{x_n}^+(t,x') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,x') = \alpha(v^+ - v^-)(t,x') + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,x'), \quad (2.143)$$

Рассмотрим это условие в точке (t,y_i') и используя (2.134), получим

$$a_{nn}^+(t,y_i')v_{x_n}^+(t,y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t,y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')), i = 1,2,\dots,r_0, \quad (2.144)$$

$$a_{nn}^-(t,y_i')v_{x_n}^-(t,y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t,y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')), i = r_0+1,\dots,r, \quad (2.145)$$

Искомая система для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$ имеет вид

$$\alpha(t,y_i') = (a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') + \\ \alpha v^-(t,y_i'))/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')) = F_i, i = 1,2,\dots,r_0, \quad (2.146)$$

$$\alpha(t,y_i') = (a_{nn}^-(t,y_i')w_{ix_n}(t,a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t,y_i') - \\ \alpha v^+(t,y_i'))/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')) = F_i, i = r_0+1,\dots,r \quad (2.147)$$

Отметим, что в силу (2.130) знаменатели в этих равенствах строго отделены от нуля на промежутке $[0,\tau^0]$. Здесь v – решение задачи сопряжения (2.131)-(2.133), а функции ω_i решения задач (2.139), (2.141) и (2.139), (2.142), соответственно. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \quad (2.148)$$

где координаты вектора F определены равенствами (2.146), (2.147). Отметим, что лемма 1.6 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\|\vec{F}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (2.149)$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_0} = \{\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau) : \|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_0\}$ и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha} = 0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (2.131)-(2.133) $v = v(\vec{\alpha}) = 0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0) = a^+_{nn}(t, y'_i)\omega_{ix_n}(t, a)/(\tilde{\psi}_i(t) + (w^+_0 - w^-_0)(t, y'_i)), i = 1, 2, \ldots, r_0,$$
$$F_i(0) = a^-_{nn}(t, y'_i)\omega_{ix_n}(t, a)/(-\tilde{\psi}_i(t) + (w^+_0 - w^-_0)(t, y'_i)), i = r_0 + 1, \ldots, r,$$

где ω_i решения задач (2.139), (2.141) или (2.140), (2.142) соответственно, где правые части в (2.139) и (2.140) равны нулю. Положим $R_0 = 2\|\Phi^{-1}\vec{F}(0)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau^0)}$. Получим оценки, считая, что $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$ и $\tau \leq \tau^0$. Из теоремы 2.3 вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|v\|_{W^{1,2}_p(Q^1_\tau)} + \|v\|_{W^{1,2}_p(Q^2_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t, x)\|_{W^{1,2}_p(Q^1_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t, x)\|_{W^{1,2}_p(Q^2_\tau)} \\ \leq c_0(\|\alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w^+_0 - w^-_0)\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \\ \|\nabla_{x'}\varphi(\alpha(v^+ - v^-) + \alpha(w^+_0 - w^-_0))(t, x')\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)}), \quad (2.150)\end{aligned}$$

где постоянная c_0 не зависит от τ. Воспользовавшись леммой 1.6, получим, что первое слагаемое J_0 в правой части здесь оценивается через

$$J_0 \leq c_1\|\alpha\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)}(\|v^+ - v^-\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \|w^+_0 - w^-_0\|_{W^{s_0,2s_0}_p(S_0)}). \quad (2.151)$$

Второе слагаемое J_1 оценивается через

$$\begin{aligned}J_1 \leq c_2(\|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^\tau_{0\delta})}(\|(v^+ - v^-)\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \|(w^+_0 - w^-_0)(t, x')\|_{W^{s_0,2s_0}_p(S_0)}) + \\ \|\alpha\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)}(\|\nabla_{x'}\varphi(v^+ - v^-)\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi(w^+_0 - w^-_0)(t, x')\|_{W^{s_0,2s_0}_p(S_0)}). \\ (2.152)\end{aligned}$$

В силу леммы 1.6 имеем оценку

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^\tau_{0\delta})} \leq \\ c_3\sum_{i=1}^{r}\|\alpha_i\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)}(\|\Phi_i\|_{W^{s_0,2s_0}_p(S_0)} + \|\nabla_{x'}\Phi_i\|_{W^{s_0,2s_0}_p(S_{0\delta})}) \leq c_4\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)}, \quad (2.153)\end{aligned}$$

где постоянная c_4 равно как и постоянные $c_0 - c_3$ не зависит от τ. Далее, у нас имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|(v^+ - v^-)\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi(v^+ - v^-)\|_{\tilde{W}^{s_0,2s_0}_p(S^0_\tau)} \leq \\ c_5\tau^{1/2}(\|v\|_{W^{1,2}_p(Q^1_\tau)} + \|v\|_{W^{1,2}_p(Q^2_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t, x)\|_{W^{1,2}_p(Q^1_\tau)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t, x)\|_{W^{1,2}_p(Q^2_\tau)}), \\ (2.154)\end{aligned}$$

которая была получена в доказательстве теоремы 1.7 (см. неравенства (1.98)-(1.100)). Приведем краткое доказательство. Оценим первое слагаемое в (2.154). Второе оценивается точно также. Имеем

$$\|v^{\pm}\|^p_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} = \int_0^\tau \frac{|v^{\pm}|^p}{t^{s_0 p}}dt + \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{|v^{\pm}(t) - v^{\pm}(\xi)|^p}{|t-\xi|^{1+s_0 p}}dtd\tau \leq \tau^{(s_1-s_0)p}\|v^{\pm}\|^p_{\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)}. \quad (2.155)$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v^{\pm}\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \leq \tau^{1/2}\|v^{\pm}\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}. \quad (2.156)$$

По лемме 1.3 правая часть оценивается через $C\tau^{1/2}(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})$. Таким образом, имеем неравенство:

$$\|v^+\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} + \|v^-\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \leq C\tau^{1/2}(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}). \quad (2.157)$$

Оценим нормы $\|v^{\pm}\|_{L_p(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega))}$. Например, для функции v^+ имеем, что

$$\|v^+\|_{L_p(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega))} \leq c_6\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G_2^\tau))} \leq$$
$$c_7\|v\|^{1/2}_{L_p(Q_2^\tau)}\|v\|^{1/2}_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} \leq c_8\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}. \quad (2.158)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о следах ([1, теорема 4.7, с.412] и соответствующей оценкой $\|v^+\|_{W_p^{1-1/p}(\Omega)} \leq c_1\|v^+\|_{W_p^1(G_2)}$, интерполяционным неравенством
$\|v^+\|_{W_p^1(G_2)} \leq C\|v^+\|^{1/2}_{L_p(G_2)}\|v^+\|^{1/2}_{W_p^2(G_2)}$ и неравенством $\|v^+\|_{L_p(0,\tau)} \leq \tau\|v_t^+\|_{L_p(0,\tau)}$ $(v(0,x) = 0)$, вытекающим из формулы Ньютона-Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от τ. Аналогично для функции v^- имеем

$$\|v^-\|_{L_p(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega))} \leq c_9\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}. \quad (2.159)$$

Таким образом, справедливо неравенство (2.154). Из (2.150)-(2.154) вытекает неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} \leq$$
$$c_{10}\tau^{1/2}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} +$$
$$\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)}) + c_{10}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|(w_0^+ - w_0^-)(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} +$$
$$\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+ - w_0^-)(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}), \quad (2.160)$$

Выбрав τ_1 такое, что $c_{10}R_0\tau_1^{1/2} = 1/2$, из (2.160) получим, что при $\tau \le \tau_2 = min(\tau_1, \tau^0)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} \le$$
$$2c_{10}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|(w_0^+ - w_0^-)(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+ - w_0^-)(t,x')\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}), \tag{2.161}$$

Пусть $\vec{\alpha_i} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_0}$ $(i = 1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (2.131), (2.133), с функциями $\alpha_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}\Phi_j$ $(i = 1,2)$ вместо α. Имеет место оценка (2.161), где в правой части стоят соответствующие нормы $\|\vec{\alpha_i}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$. Тогда разности $v_1 - v_2 = \omega$, $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ есть решение задачи

$$Mv = \omega_t - L\omega = 0, \quad B\omega|_S = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial\omega^+}{\partial N} = \frac{\partial\omega^-}{\partial N}, \tag{2.162}$$

$$\frac{\partial\omega^+}{\partial N} - \beta_0(\omega^+ - \omega^-) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}(\omega^+ - \omega^-) + \frac{\gamma}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + \gamma(w_0^+ - w_0^-). \tag{2.163}$$

Пусть $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2$. Задача (2.162), (2.163) имеет тот же вид, что и задача (2.131), (2.133), поэтому при $\tau \le \tau_2$ имеет место та же оценка (2.161), которая запишется в виде

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} \le$$
$$2c_{10}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} +$$
$$\|\nabla_{x'}\varphi(\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{2.164}$$

Из оценок (2.154) записанных для функций v_1, v_2 и (2.164) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^1)} + \|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^2)} \le$$
$$c_{11}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+ - w_0^-)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}), \tag{2.165}$$

где постоянная c_{11} не зависит от τ. Пусть w_i^j $(j = 1,2)$ решения задач (2.139), (2.141) и (2.139), (2.142) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_i, и $w^0 = \varphi_i\omega$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$k_{it} - a_{nn}(t, y_i', x_n)k_{ix_nx_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\omega^0_{z_iz_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega^0_{z_i} + a_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\omega|_{x'=y_i'} = \tilde{f}_i(t, y_i', x_n), \tag{2.166}$$

$$k_i\big|_{t=0}=0,\ k_i|_{x_n=a}=0,\ k_i|_{x_n=a+\delta}=0\ (i\le r_0), \tag{2.167}$$

$$k_i\big|_{t=0}=0,\ k_i|_{x_n=a}=0,\ k_i|_{x_n=a-\delta}=0\ (i> r_0). \tag{2.168}$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, [6]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a,a+\delta))}+\sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a-\delta,a))}\le$$
$$c_{13}\Big(\sum_{i=1}^{r_0}\|\tilde f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))}+\sum_{i=r_0+1}^{r}\|\tilde f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a-\delta,a))}\Big). \tag{2.169}$$

Пусть, например, $i\le r_0$. Имеем

$$\|\tilde f_i(t,y_i',x_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))}\le c_{14}\|\tilde f_i(t,x)\|_{W_p^s(\Omega;L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}=J,\quad s>(n-1)/p, \tag{2.170}$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)-(3.12) в [3]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [3]).

$$J\le c_{15}\|\tilde f_i(t,x)\|^{\theta}_{W_p^1(\Omega;L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\|\tilde f_i(t,x)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(\Omega;L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))},\quad 2\theta-1=s. \tag{2.171}$$

Ввиду замечания 5.3 (c) в [3] норма в последнем пространстве может быть определена как

$$\|\tilde f_i\|_{W_p^{-1}(\Omega;L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}=\sup_{\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega;L_q((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}|(\tilde f_i,\varphi)|,\quad 1/p+1/q=1,$$

где скобки обозначают продолжение скалярного произведения в L_2 до отношения двойственности между соответствующими пространствами. Исходя из определения $\tilde f_i$ и условий на коэффициенты имеем

$$\|\tilde f_i\|_{W_p^{-1}(\Omega;L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\le c_{16}(\|\omega\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G_1))}+\|\omega\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G_2))})\le$$
$$c_{17}\tau^{1/2}(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}), \tag{2.172}$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G_i))}\le c_{18}\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_i))}\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;L_p(G_i))}$$

и оценку $\|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_i))} \leq \tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_i))}$, вытекающую из формулы Ньютона-Лейбница, а затем оценим полученные нормы через норму в $W_p^{1,2}(Q_\tau^i)$. Оценки (2.171), (2.172) влекут, что

$$\|\tilde{f}_i(t,x_i,x_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} \leq c_{19}\tau^{(1-\theta)/2}(\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+$$
$$\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^\theta(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^{1-\theta}. \tag{2.173}$$

где c_{19} – постоянная не зависящая от τ. Как вытекает из неравенства (2.165), неравенство (2.173) можно переписать в виде

$$\|\tilde{f}_i(t,x_i,x_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} \leq c_{20}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\ i\leq r_0. \tag{2.174}$$

Очевидно, что такая же оценка имеет место и в случае $i > r_0$. Из (2.169), (2.174) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a,a+\delta))}+\sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a-\delta,a))} \leq c_{21}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

В частности, отсюда вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\|k_{iz_n}(t,a)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{22}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.175}$$

Оценим $\|R(\vec{\alpha}_1)-R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$. Из (2.149) вытекает оценка

$$\|R(\vec{\alpha}_1)-R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{23}\sum_{i=1}^{r}\|F_i(\vec{\alpha}_1)-F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.176}$$

Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1)-F_i(\vec{\alpha}_2)$. Пусть, например, $i\leq r_0$. Оно записывается в виде

$$J_1 = a_{nn}^+(t,y_i')(\omega_{ix_n}^1-\omega_{ix_n}^2)(t,a)/(\tilde{\psi}_i(t)+(w_0^+-w_0^-)(t,y_i')).$$

В силу леммы 1.6 и неравенства (2.175) имеем

$$\|J_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{24}\|\omega_{iz_n}^1-\omega_{iz_n}^2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_2\tau^{\beta_1}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s}(0,\tau)}, \tag{2.177}$$

где все постоянные не зависят от τ и β_1 - положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = -\beta_0(w^+-w^-)(t,y_i')/(\tilde{\psi}_i(t)+(w_0^+-w_0^-)(t,y_i')).$$

В силу леммы 1.6 имеем

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{25} \sum_{i=1}^{r} \|(\omega^+ - \omega^-)(t, y_i')\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Справедливы очевидные оценки (лемма 1.3, (2.165) и теоремы вложения (см. [3]))

$$\begin{gathered}\|w^\pm(t, y_i')\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_1 \|\varphi w^\pm(t, x')\|_{W_p^1(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le \\ c_{26}(\|\nabla_{x'}\varphi w^\pm(t, x')\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} + \|\varphi w^\pm(t, x')\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}) \le \\ c_{27}\tau^{1/2}(\|\nabla_{x'}\varphi w^\pm(t, x')\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))} + \|\varphi w^\pm(t, x')\|_{L_p(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}) \le \\ c_{28}\tau^{1/2}(\|\nabla_{x'}\varphi w(t, x)\|_{W_p^{1,2}(Q_k^\tau)} + \|\varphi w(t, x')\|_{W_p^{1,2}(Q_k^\tau)}) \le c_{29}\tau^{1/2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\end{gathered}$$

где $i > r_0$ и $k = 1$ в случае функции ω^+ и $k = 2$ и $i \le r_0$ в случае функции ω^-. Таким образом, справедлива оценка

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{30}\tau^{1/2}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.178}$$

для некоторой не зависящей от τ постоянной c_{24}. Оценка последней разности

$$J_3 = (\alpha_1 v_1^-(t, x_i) - \alpha_2 v_2^-(t, x_i))/(\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t, x^i(0)))$$

получается аналогично и имеем, что найдутся постоянные $\beta_3 > 0$ и c_8 такие, что

$$\|J_3\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{31}\tau^{\beta_3}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{2.179}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (2.177), (2.178), (2.179) имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{31}\tau^{\beta_0}\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{2.180}$$

где показатель β_0 минимальный из полученных в доказательстве и постоянная c_{31} не зависит от τ. Возьмем в качестве τ_0 число со свойством $\tau_0 \le \tau_2$, $c_{31}\tau_0^{\beta_0} \le 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно уравнение (2.148) имеет решение $\vec{\alpha} \in \tilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_0)$. Найдем решение задачи сопряжения v. Покажем что мы нашли решение нашей обратной задачи. Достаточно показать, что у нас выполнены условия переопределения (2.134). Мы имеем равенства (2.144), (2.145) и равенства (2.146), (2.147), откуда вытекает, что

$$a^+_{nn}(t, y'_i)w_{ix_n}(t, a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y'_i) = \alpha(\tilde{\psi}_i(t) - v^-)(t, y'_i)) + \alpha(w^+_0 - w^-_0)(t, y'_i)), \tag{2.181}$$

при $i \le r_0$ и при $i > r_0$ имеем

$$a^-_{nn}(t, y'_i)w_{ix_n}(t, a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y'_i) = \alpha(v^+(t, y'_i) - \tilde{\psi}_i(t)) + \alpha(w^+_0 - w^-_0)(t, y'_i)). \tag{2.182}$$

Вычитая (2.144) и (2.181), соответственно, (2.145) и (2.182), получим

$$a^+_{nn}(t, y'_i)(v^+_{x_n}(t, y'_i) - w_{ix_n}(t, a)) = \alpha(v^+ - \tilde{\psi}_i(t)) = \alpha(v^+(t, y'_i) - w(t, a)),$$
$$i = 1, 2, \ldots, r_0, \tag{2.183}$$

$$a^-_{nn}(t, y'_i)(v^-_{x_n}(t, y'_i) - w_{ix_n}(t, a)) = \alpha(\tilde{\psi}_i(t) - v^-) = \alpha(w(t, a) - v^-),\ i = r_0 + 1, \ldots, M, \tag{2.184}$$

Функция $w_{0i} = \varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (2.138). Возьмем в этом уравнении $x' = y'_i$ и вычтем его из равенства (2.139) при $i \le r_0$ и из (2.140) при $i > r_0$. Получим равенство

$$(w_{it}(t, x_n) - w_{0it}(t, y'_i, x_n))) - a_{nn}(t, y'_i, x_n)(w_{ix_nx_n} - w_{0ix_nx_n}(t, x_i, x_n)) = 0, \tag{2.185}$$

где $i = 1, 2, \ldots, r$. Функции $\tilde{w}_i = w_i(t, x_n) - w_{0i}(t, x_i, x_n)$ удовлетворяет уравнению (2.185), начальному условию $\tilde{w}_i\big|_{t=0} = 0$ и в силу (2.183), (2.184) граничным условиям

$$a^+_{nn}(t, x_i)\tilde{w}_{ix_n}(t, a) = -\alpha\tilde{w}_i(t, a),\ \tilde{w}_i(t, a + \delta) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, r_0, \tag{2.186}$$

$$a^-_{nn}(t, y'_i)\tilde{w}_{ix_n}(t, a) = \alpha\tilde{w}_i(t, a),\ \tilde{w}_i(t, a - \delta) = 0,\ i = r_0 + 1, \ldots, r. \tag{2.187}$$

В силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t, x_n) = w_{0i}(t, y'_i, x_n)$. Следовательно, выполнены равенства $w_{0i}(t, y'_i, a + 0) = \tilde{\psi}_i$ для всех $i \le r_0$ и $w_{0i}(t, y'_i, a - 0) = \tilde{\psi}_i$ для всех $i > r_0$. Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, то утверждение о единственности решений здесь очевидно. $\square$

Как видно из доказательства теоремы 2.6, параметр τ_0, на котором решение существует определяется величиной

$$R_T = J_T(u_0, g, f, \{\psi_{ij}\}_{j,i=1}^{m-1,N_j}, g_1^+, \dots, g_{m-1}^+) = \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} +$$
$$\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|\nabla_{x'}\psi u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_T)} +$$
$$\sum_{i=1}^{m-1} \|g_i^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q_T^0)} + \sum_{i=1}^{m} \|\varphi\|_{W_p^{k_2,2k_2}(S_i^T)} + \sum_{i=0}^{1} \|\varphi_i\|_{W_p^{k_i,2k_i}(Q_T^0)} +$$
$$\sum_{j=1}^{m-1} \|\nabla_{x'}\psi f\|_{L_p(Q_T)} + \sum_{j=1}^{m-1} \|\nabla_{x'}\psi g_j^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(Q_T^0)} + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N_j} \|\psi_{ij}\|_{W_p^{s_1}(0,T)}$$

и не определяется самим видом (или гладкостью) данных. Напомним, что $S_i^T = S_i,$, $Q_T = Q$, $Q_T^0 = Q_0$. Таким образом, $\tau_0 = \tau_0(R_T)$. В связи с этим справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть дана постоянная $R > 0$. Тогда найдется $\tau_0 = \tau_0(R) > 0$ такое, что решение задачи* (2.1), (2.5)-(2.8) *с данными удовлетворяющими условиям теоремы 2.6 и условию $J_T(u_0, g, f, \{\psi_{ij}\}_{j,i=1}^{m-1,N_j}, g_1^+, \dots, g_{m-1}^+) \le R$. существует на $[0, \tau_0]$, единственно и для любых двух таких наборов данных $u_0^k, g^k, f^k, \psi_{il}^k, g_{kl}^+$, $(k = 1, 2,\ \ l = 1, 2, \dots, m-1, i = 1, 2, \dots, N_l)$ справедлива оценка устойчивости*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u_1 - u_2\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} + \|\nabla_{x'}\psi(u_1 - u_2)\|_{W_p^{1,2}(Q+_{\tau_0})} +$$
$$|\nabla_{x'}\psi(u_1 - u_2)\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{N_i} \|\alpha_{ji}^1 - \alpha_{ji}^2\|_{W_p^{s_0}(0,\tau_0)} \le$$
$$cJ(u_0^1 - u_0^2, g^1 - g^2, f^1 - f^2, \{\psi_{ij}^1 - \psi_{ij}^2\}_{j,i=1}^{m-1,N_j}, g_{11}^+ - g_{21}^+, \dots, g_{1m-1}^+ - g_{2m-1}^+),$$

где α_{ij}^k, u_k $(k = 1, 2)$ соответствующие решения задачи (2.1), (2.5)-(2.8) *и c – некоторая постоянная, также зависящая от R.*

Оценка устойчивости частично получена в доказательстве предыдущей теоремы. Однако, ее подробное доказательство требует значительного количества дополнительных рассуждений. Чтобы не усложнять изложение, мы не приводим его в полном виде.

2.4 Обратные задачи об определения коэффициентов теплообмена в случае $\overline{G^-} \subset G$ для эллиптического случая

Приведем условия на данные. Считаем, что функции $\Phi_j(x)$ при всех допустимых j обладают свойствами

$$\Phi_j \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0) \cap W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta)). \tag{2.188}$$

Пусть Φ - матрица с элементами $\phi_{ij} = \Phi_j(b_i)$ $(i, j = 1, 2, \dots, r)$. В силу теорем вложения $\Phi_j(x) \in C^{\alpha_0}(\overline{\Gamma_0})$ с $\alpha_0 = 1 - n/p$ (см. теоремы вложения в [1]). Считая, что условия теорем 1.13, 1.14 выполнены, построим решение задачи сопряжения (1.187), (1.188), где возьмем $\beta = 0$, $g^- = 0$. Обозначим полученное решение через w_0. Функция $v = u - w_0$ есть решение задачи

$$Lv = 0,\ (x \in G), \quad Bv|_\Gamma = 0, \tag{2.189}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N} - \beta(v^+ - v^-) = \beta(w_0^+ - w_0^-), \quad \frac{\partial v^+}{\partial N} = \frac{\partial v^-}{\partial N}\ (x \in \Gamma_0), \tag{2.190}$$

$$v^+(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^+(b_i)\ (i = 1, 2, \dots, r_1),$$
$$v^-(b_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - w_0^-(b_i)\ (i = r_1 + 1, \dots, r). \tag{2.191}$$

Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\tilde{\psi}_i \neq 0\ (i \leq r), \quad |det\, \Phi| > 0. \tag{2.192}$$

Введем множество данных

$$S_R = \{(g, f, \psi_1, \dots, \psi_r, g^+) :\ \|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} +$$
$$\sum_{j=1}^{r} \|\nabla_{z'} \varphi g^+(x^i(z', 0))\|_{W_p^{2s_0}(B_{\delta'})} + \sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'} \varphi_i f(x^i(z)\|_{L_p(U')} + \sum_{j=1}^{r} |\psi_j| \leq R\}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия* (1.186), (1.189)–(1.193), (1.198), (2.188), (2.192) *и* $(g, f, \psi_1, \dots, \psi_r, g^+) \in S_R$. *Тогда найдется параметр* $\lambda_0 > 0$, *зависящий от числа* R, *такой, что такой что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует решение* $(u, \beta_1, \dots, \beta_r)$ *задачи* (2.9)-(2.12) *такое, что* $u|_{G^\pm} \in W_p^2(G^\pm)$, $\nabla_{z'} \varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^2(U^+) \cap W_p^2(U^-)$, $i = 1, \dots, r$ *и решения с данными из множества* S_R *определяются единственным образом.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (2.189)-(2.191). Фиксируем $R_0 > 0$ (эту величину мы определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in B_{R_0} = \{\vec{\alpha} : \quad |\vec{\alpha}| \leq R_0\}$. Выберем параметр $\lambda_0 \geq 0$ такой, что утверждения теорем 1.13, 1.14 справедливы при $\lambda \geq \lambda_0$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$ и решая задачу (2.189), (2.190), мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Функция v обладает свойствами, указанными в формулировках теорем 1.13, 1.14. Мы сведем вопрос разрешимости задачи (2.189)-(2.191) к вопросу разрешимости приведенного ниже операторного уравнения относительно вектора $\vec{\alpha}$, разрешимость которого устанавливается при помощи теоремы о неподвижной точке. Кроме отображения $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$, нам понадобится еще одно отображение. Пусть v – решение задачи (2.189), (2.190). Фиксируя k и умножая уравнение (2.191) на φ_k, имеем

$$-Lw = [\varphi_k, L]v = f_{0k}, \quad w = \varphi_k v, \tag{2.193}$$

где $[\varphi_k, L]v = \varphi_k Lv - L(\varphi_k v) = -2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} \varphi_{kx_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v \varphi_{kx_ix_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{kx_i} v$. Сделав замену переменных $x = x^k(z)$, перепишем (2.193) в виде

$$-b_{nn}^{\pm}(z) w_{kz_nz_n}^{\pm} + \lambda w_k^{\pm} = \sum_{i+j<2n} b_{ij}^{\pm} w_{kz_iz_j}^{\pm} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\pm} w_{kz_i}^{\pm} + b_0^{\pm} w_k^{\pm} + f_{0k} = f_k(z), \ z \in U^{\pm}, \tag{2.194}$$

где $w_k^{\pm} = \varphi_k v(x^k(z))|_{U^{\pm}}$. Отметим, что $b_{nn}^{\pm} > 0$ для всех z в силу эллиптичности оператора L. Рассмотрим уравнения

$$-b_{nn}^{+}(0, z_n)\omega_{iz_nz_n} + \lambda\omega_i = f_i(0, z_n) \ (i = 1, 2, \ldots, r_1), \ z_n \in (0, \delta_1), \tag{2.195}$$

$$-b_{nn}^{-}(0, z_n)\omega_{iz_nz_n} + \lambda\omega_i = f_i(0, z_n) \ (i = r_1 + 1, \ldots, r), \ z_n \in (-\delta_1, 0). \tag{2.196}$$

Дополним уравнения (2.195), (2.196) начальными и краевыми условиями

$$\omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i, \ \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \ i \leq r_1. \tag{2.197}$$

$$\omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i, \ \omega_i|_{z_n=-\delta_1} = 0, \ i > r_1. \tag{2.198}$$

Пусть $v(\vec{\alpha})$ – решение задачи (2.189), (2.190), построим функции ω_i как решение задачи (2.195), (2.197) (или (2.196), (2.198) соответственно). В случае, если $v(\vec{\alpha})$ есть решение задачи (2.189)-(2.190), то $\omega_i(z_n) = w_i^{+}(x^i(0, z_n))$ при $i \leq r_1$ и

$\omega_i(z_n) = w_i^-(x^i(0,z_n))$ при $i > r_1$. Перепишем равенства (2.192) в окрестности U_i в виде

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^+(z')v_{z_j}^+(x^i(z',0)) = (\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-))(x^i(z',0)),$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^+(z')v_{z_j}^+(x^i(z',0)) = \sum_{j=1}^{n} b_j^-(z')v_{z_j}^-(x^i(z',0))). \quad (2.199)$$

Эти равенства при $z' = 0$ можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^+(0)v_{iz_j}^+(x^i(0)) = \beta(v^+ - v^-)(x^i(0)) + \beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)), i \le r_1, \quad (2.200)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^-(0)v_{iz_j}^-(x^i(0)) = \beta(v^+ - v^-)(x^i(0)) + \beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)),\ i > r_1, \quad (2.201)$$

Отметим, что $v_{iz_j}^\pm(b_i) = w_{iz_j}^\pm(0)$ и $v_i^\pm(b_i) = w_i^\pm(0)$, поскольку φ_i обращается в 1 в некоторой окрестности точки $x^i(0) = b_i$. Если функции $v, \vec{\alpha}$ есть решение обратной задачи, то легко увидеть, что $\omega_{iz_n}(0) = v_{z_n}^+(x^i(0))$ при $i \le r_1$ и $\omega_{iz_n}(0) = v_{z_n}^-(x^i(0))$ при $i > r_1$. Используя (2.200), (2.201) и условия переопределения, мы придем к равенствам

$$b_n^+(0)\omega_{iz_n}(0)+\sum_{j=1}^{n-1} b_j^+(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) = \beta(\tilde{\psi}_i-v^-)(x^i(0))+\beta(w_0^+-w_0^-)(x^i(0)), i \le r_1, \quad (2.202)$$

$$b_n^-(0)\omega_{iz_n}(0)+\sum_{j=1}^{n-1} b_j^-(0)v_{z_j}^-(x^i(0)) = \beta(v^+-\tilde{\psi}_i)(x^i(0))+\beta(w_0^+-w_0^-)(x^i(0)), i > r_1, \quad (2.203)$$

которые также можно переписать в виде

$$\beta(x^i(0)) = (b_n^+(0)\omega_{iz_n}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j^+(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) + \beta v^-(x^i(0))+$$

$$\beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i = F_i, i = 1,2,\ldots,r_1 \quad (2.204)$$

$$\beta(x^i(0)) = (-b_n^-(0)\omega_{iz_n}(0) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j^-(0)v_{z_j}^+(x^i(0)) + \beta v^+(x^i(0)) +$$
$$\beta(w_0^+ - w_0^-)(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i = F_i, i = r_1+1, \ldots, r. \quad (2.205)$$

Здесь функция v строится как решение задачи (2.189), (2.190) а функции ω_i как решение задач задачи (2.195), (2.197) (или (2.196), (2.198) соответственно). Отметим, что в силу (2.192) знаменатели в равенствах (2.204), (2.205) отделены от нуля. Это и есть искомая система уравнений для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \quad (2.206)$$

где координаты вектора F определены равенствами (2.204), (2.205). Отметим, что условие (2.192) гарантирует оценку

$$|\Phi^{-1}\vec{F}| \leq c|\vec{F}|. \quad (2.207)$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре B_{R_0} и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha} = 0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (2.189), (2.190) $v = v(\vec{\alpha}) = 0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0) = b_n^+(0)\omega_{iz_n}(0)/\tilde{\psi}_i,\ i = 1, \ldots, r_1.$$
$$F_i(0) = -b_n^-(0)\omega_{iz_n}(0)/\tilde{\psi}_i, i = r_1+1, \ldots, r,$$

где функции ω_i решения задач задачи (2.195), (2.197) (или (2.196), (2.198) соответственно) где в правой части равенств (2.195), (2.196) стоят нули. Положим $R_0 = 2|\Phi^{-1}\vec{F}(0)|$. Нетрудно оценить величину R_0. Вообще говоря она зависит от параметра λ. Имеет место неравенство

$$\|\omega_i\|_{W_p^2(0,\delta)} + |\lambda|\|\omega_i\|_{L_p(0,\delta)} \leq c|\tilde{\psi}_i||\lambda|^{1-1/p},$$

где постоянная c не зависит от $\lambda \geq 0$. Оценка является стандартной. Для задач сопряжения она получена в теореме 1.13. Для общих эллиптических задач она также имеет место (см., например, [**?**]). Отсюда имеем неравенство

$$|\omega_{iz_n}(0)| \leq c\|\omega_i\|_{W_p^{1+1/p+\varepsilon_1}(0,\delta)} \leq \lambda^{-s_0+\varepsilon_0}(\|\omega_i\|_{W_p^2(0,\delta)} + |\lambda|\|\omega_i\|_{L_p(0,\delta)}) \leq c_1\lambda^{s_0+\varepsilon_1} \quad (2.208)$$

и, таким образом, $R_0 \leq c_1\lambda^{s_0+\varepsilon_1}$, где постоянная c_1 не зависит от λ, а постоянная ε_1 как угодно мала. Эта оценка будет использована ниже. Если у нас есть два вектора $\vec{\alpha}_i \in B_{R_0}$, $i = 1, 2$, то неравенство (2.207) влечет

$$|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)| \leq c\sum_{i=1}^{r} |F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)|. \tag{2.209}$$

Проверим выполнение условий теоремы о неподвижной точке. Вначале получим оценки для решений $v(\vec{\alpha})$. Из теоремы 1.13 имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^2(G^+)} + \|v\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)} \leq c_0(\|\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\beta(v^+ - v^-) + \beta(w_0^+ - w_0^-)\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} = c_0 J_0, \tag{2.210}$$

где постоянная c_0 не зависит от λ. В силу леммы 1.4, получим, что

$$J_0 \leq c_1\|\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}(\|v^+ - v^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}(\|v^+ - v^-\|_{L_p(\Gamma_0)} + \|w_0^+ - w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)})). \tag{2.211}$$

Из теорем вложения имеем

$$\|v^\pm\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \leq c_2\|v\|_{W_p^1(G^\pm)} \leq c_2|\lambda|^{-1/2}(\|v\|_{W_p^2(G^\pm)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)}). \tag{2.212}$$

Кроме того, имеем

$$|\lambda|^{s_0}\|v^\pm\|_{L_p(\Gamma_0)} \leq c_3\|v\|_{W_p^{1/p+\varepsilon_0}(G^\pm)}|\lambda|^{s_0} \leq c_4|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0/2}(\|v\|_{W_p^2(G^\pm)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)}), \tag{2.213}$$

где $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ как угодно малая положительная постоянная. Неравенства (2.210)-(2.213) гарантируют оценку

$$\|v\|_{W_p^2(G^+)} + \|v\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)} \leq c_5\|\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0/2}(\|v\|_{W_p^2(G^+)} + \|v\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)}) + c_6\|\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}(\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^+ - w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)}). \tag{2.214}$$

Выбрав $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что $c_5 R_0 \lambda_1^{-1/2+\varepsilon_0} \leq 1/2$ (см. (2.208)), из (2.214) получим при $\lambda \geq \lambda_1$, что

$$\|v\|_{W_p^2(G^+)} + \|v\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|v\|_{L_p(G)} \leq 2c_6\|\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}(\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^+ - w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)}). \tag{2.215}$$

Сейчас мы запишем оценки из теоремы 1.14. Как вытекает из этой теоремы, имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(U^-)}+|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{L_p(U')}) \leq$$

$$c_7(\|\beta(v^+-v^-)+\beta(w_0^+-w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+|\lambda|^{s_0}\|\beta(v^+-v^-)+\beta(w_0^+-w_0^-)\|_{L_p(\Gamma_0)})+$$

$$c_8(\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i(\beta(v^+-v^-)+\beta(w_0^+-w_0^-))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)}+$$

$$|\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i(\beta(v^+-v^-)+\beta(w_0^+-w_0^-))\|_{L_p(B'_\delta)})),$$

где постоянная C_1 не зависит от $\lambda \geq \lambda_0$. Повторяя предыдущие рассуждения, используемые при выводе (2.214) и используя оценку (2.215), придем к неравенству вида

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)}+|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{L_p(U')}) \leq$$

$$c_8\lambda^{-1/2+\varepsilon_0/2}(\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)}+$$

$$|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{L_p(U')})+c_9(\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+$$

$$\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{L_p(\Gamma_0)}+(\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+|\lambda|^{s_0}\|w_0^+-w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)}),$$

где постоянные c_i не зависят от λ и зависят от величины R_0. Выберем $\lambda_2 \geq \lambda_1$ такое, что $c_8\lambda_2^{-1/2+\varepsilon_0}/2 \leq 1/2$. Тогда при $\lambda \geq \lambda_2$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)}+|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i v(x^i(z))\|_{L_p(U')}) \leq$$

$$2c_9(\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{L_p(B'_\delta)})+$$

$$(\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+|\lambda|^{s_0}\|w_0^+-w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)}). \quad (2.216)$$

Оценим норму правой части. По теореме 1.13

$$\|w_0\|_{W_p^2(G^+)}+\|w_0\|_{W_p^2(G^-)}+|\lambda|\|w_0\|_{L_p(G)} \leq$$

$$c_{10}(\|f\|_{L_p(G)}+\|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)}+\|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}+\|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)}+|\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)})=C_0J.$$

В частности, отсюда вытекает оценка

$$\|w_0^{\pm}\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^{\pm}\|_{L_p(\Gamma_0)} \leq$$
$$c_1|\lambda|^{-1/2+\varepsilon_0}(\|w_0\|_{W_p^2(G^+)} + \|w_0\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|w_0\|_{L_p(G)}) \leq C_1 + C_2|\lambda|^{s_0+\varepsilon_0}, \quad (2.217)$$

где C_i – постоянные не зависящие от λ. Далее мы используем лемму 1.12. Возьмем $\varphi_{0i} \in C_0^\infty(B_\delta(b_i))$ такую что $\varphi_{0i} = 1$ на $supp\,\varphi_i$.

$$\|\varphi_{0i}w_0\|_{W_p^2(G^+)} + \|\varphi_{0i}w_0\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|\varphi_{0i}w_0\|_{L_p(G)} \leq$$
$$C_0(\|\varphi_{0i}f\|_{L_p(G)} + \|\varphi_{0i}g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|\varphi_{0i}g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + |\lambda|^{-1/2+3\varepsilon_0}J),$$
$$J = \|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{k_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{L_p(G)} + \|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0}.$$

Из этого неравенства вытекает оценка

$$\|\varphi_{0i}w_0\|_{W_p^2(G^+)} + \|\varphi_{0i}w_0\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|\varphi_{0i}w_0\|_{L_p(G)} \leq C_3 + C_4|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}, \quad (2.218)$$

где ε_0 как угодно малая положительная постоянная. Далее используя теорему 1.14 получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{L_p(U')})$$
$$\leq c_3(\|g^+\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \|g^+\|_{L_p(\Gamma_0)}|\lambda|^{s_0} + \|f\|_{L_p(G)}) + c_4(\|g\|_{W_p^{2k_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}\|g\|_{L_p(\Gamma)}) +$$
$$c_5(\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(U')} + \sum_{i=1}^{r}[\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} +$$
$$|\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i g^+(x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta)}]),$$

где c_i постоянные, не зависящие от параметра $\lambda \geq \lambda_1$. Как и ранее имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma)} + |\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{L_p(G)} +$$
$$|\lambda|\|\nabla_{z'}\varphi_i w_0(x^i(z))\|_{L_p(U')}) \leq C_5 + C_6|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}. \quad (2.219)$$

В силу (2.188) $\beta \in W_p^{2s_0}(\Gamma_0)$, $\nabla_{z'}\beta(x^i(z',0)) \in W_p^{2s_0}(B'_\delta)$ $(i = 1,\ldots,r)$ и имеем оценки

$$\|\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \leq c_0\sum_{i=1}^{r}|\beta_i|\|\Phi_i\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} \leq |\vec{\alpha}|c_1 \leq c_1R_0, \quad (2.220)$$

$$\|\nabla_{z'}\beta(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} \le c_0\sum_{i=1}^r|\beta_i|\|\nabla_{z'}\Phi_i\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} \le c_2|\vec\alpha| \le c_2R_0. \qquad (2.221)$$

Пусть $\vec\alpha_i = (\beta_{i1},\beta_{i2},\dots,\beta_{ir}) \in B_{R_0}$ $(i=1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (2.189)-(2.190), где функция β заменяется на соответствующие функции $\beta^j = \sum_{i=1}^r \beta_{ji}\Phi_i$ $(j=1,2)$. Тогда разности $v_1 - v_2 = \tilde\omega$, $\tilde\beta = \beta^1-\beta^2$ есть решение задачи

$$-L\tilde\omega = 0, \quad x\in G,$$

$$B\tilde\omega|_\Gamma = 0, \quad \text{для} \quad x\in\Gamma_0: \ \frac{\partial\tilde\omega^+}{\partial N} = \frac{\partial\tilde\omega^-}{\partial N},$$

$$\frac{\partial\tilde\omega^+}{\partial N} = \frac{(\beta^1+\beta^2)}{2}(\tilde\omega^+-\tilde\omega^-) + \frac{\tilde\beta}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + \tilde\beta(w_0^+ - w_0^-).$$

Теперь мы повторим рассуждения использованные при получении оценок (2.214), (2.216), но применительно к этой задаче вместо задачи (2.189), (2.190). Точно также, используя оценку (2.214), получим что при $\lambda\ge\lambda_3\ge\lambda_2$ (для некоторого λ_3) справедливо неравенство

$$\|\tilde\omega\|_{W_p^2(G^+)} + \|\tilde\omega\|_{W_p^2(G^-)} + |\lambda|\|\tilde\omega\|_{L_p(G)} \le$$
$$2c_6|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2|(\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^+-w_0^-\|_{L_p(\Gamma_0)}). \quad (2.222)$$

где c_6 не зависит от λ. Аналогично при $\lambda\ge\lambda_4\ge\lambda_3$ имеем оценку

$$\sum_{i=1}^r(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde\omega(x^i(z))\|_{W_p^2(U^+)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde\omega(x^i(z))\|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda|\|\tilde\omega(x^i(z))\|_{L_p(U')}) \le$$
$$c_{10}|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2|(\sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + |\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+-w_0^-)\|_{L_p(B'_\delta)} +$$
$$(\|w_0^+-w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^+-w_0^-\|_{L_p(B'_\delta)})), \quad (2.223)$$

Аналог оценок (2.220), (2.221) в нашем случае дает неравенство

$$\|\tilde\beta\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + \sum_{i=1}^r\|\nabla_{z'}\tilde\beta(x^i(z',0))\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} \le c|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2|. \qquad (2.224)$$

Пусть w_i^j $(j=1,2)$ решения задач (2.195), (2.197) и ((2.196), (2.198) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j. Пусть $w^0 = \varphi_i\tilde\omega$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$-b_{nn}^+(0,z_n)k_{iz_nz_n} + \lambda k_i = \sum_{i+j<2n} b_{ij}^+\omega^0_{z_iz_j} + \sum_{i=1}^n b_i^+\omega^0_{z_i} + b_0^+\omega^0 + [\varphi_i, L]\tilde\omega|_{z'=0} = \tilde f_i|_{z'=0}, \qquad (2.225)$$

$$k_i|_{z_n=0}=0,\ k_i|_{z_n=\delta_1}=0,\ i\le r_1. \tag{2.226}$$

$$-b^-_{nn}(0,z_n)k_{iz_nz_n}+\lambda k_i=\sum_{i+j<2n} b^-_{ij}\omega^0_{z_iz_j}+\sum_{i=1}^n b^-_i\omega^0_{z_i}+b^-_0\omega^0+[\varphi_i,L]\tilde\omega|_{z'=0}=\tilde f_i|_{z'=0}, \tag{2.227}$$

$$k_i\Big|_{t=0}=0,\ k_i|_{z_n=0}=0,\ k_i|_{z_n=-\delta_1}=0,\ i>r_1. \tag{2.228}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_1}(\|k_i\|_{W^2_p((0,\delta_1))}+|\lambda|\|k_i\|_{L_p(0,\delta_1)})+\sum_{i=r_1+1}^{r}(\|k_i\|_{W^2_p((-\delta_1,0))}+|\lambda|\|k_i\|_{L_p(-\delta_1,0)})\le$$
$$\sum_{i=1}^{r_1}\|\tilde f_i(0,z_n)\|_{L_p((0,\delta_1))}+\sum_{i=r_1+1}^{r}\|\tilde f_i(0,z_n)\|_{L_p((-\delta_1,0))}. \tag{2.229}$$

Приведем оценку для правой части. Пусть, например, $i\le r_1$. Имеем

$$\|f_i(0,z_n)\|_{L_p(0,\delta_1)}\ \le\ c_1\|f_i(z',z_n)\|_{W^s_p(B'_\delta;L_p((0,\delta_1)))}\ =\ J,\ \ s\ =\ (n\ -\ 1)/p+\varepsilon_0,$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)-(3.12) в [3]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. [1]).

$$J\ \le\ c_1\|f_i(z)\|^\theta_{W^1_p(B'_\delta;L_p((0,\delta_1)))}\|f_i(z)\|^{1-\theta}_{W^{-1}_p(B'_\delta;L_p((0,\delta_1)))},\ \ 2\theta-1=s. \tag{2.230}$$

Исходя из определения f_i и условий (1.189), (1.191) на коэффициенты, имеем

$$\|f_i\|_{W^{-1}_p(B'_\delta;L_p((0,\delta_1)))}\le c\|\tilde\omega\|_{W^1_p(U^+))}\le c_1\lambda^{-1/2}(\|\tilde\omega\|_{W^2_p(U^+)}+|\lambda|\|\tilde\omega\|_{L_p(G^+)}), \tag{2.231}$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается если мы используем интерполяционное неравенство

$$\|\tilde\omega\|_{W^1_p(U^+)}\le c\|\tilde\omega\|^{1/2}_{W^2_p(U^+)}\|\tilde\omega\|^{1/2}_{L_p(U^+)}.$$

Также в силу условий (1.191) (используем еще вложение $W^1_p(U^+)\subset L_\infty(U^+)$)

$$\|f_i(z)\|_{W^1_p(B'_\delta;L_p((0,\delta_1)))}\le c(\|\tilde\omega\|_{W^2_p(G^+)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde\omega(z)\|_{W^2_p(U^+)}). \tag{2.232}$$

Оценки (2.221)-(2.222) влекут, что

$$\|f_i(0,z_n)\|_{L_p(0,\delta_1)}\le c_2\lambda^{(\theta-1)/2}(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde\omega(z)\|_{W^2_p(U^+)}+$$
$$\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde\omega(z)\|_{W^2_p(U^-)}+\|\tilde\omega\|_{W^2_p(U^+)}+\|\tilde\omega\|_{W^2_p(U^-)}+|\lambda|\|\tilde\omega\|_{L_p(G^+)}), \tag{2.233}$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от τ. Очевидно, что точно такая оценка имеет место и при $i > r_1$. Используя оценки (2.228), (2.232), получим

$$\sum_{i=1}^{r_1}(\|k_i\|_{W_p^2((0,\delta_1))} + |\lambda|\|k_i\|_{L_p(0,\delta_1)}) + \sum_{i=r_1+1}^{r}(\|k_i\|_{W_p^2((-\delta_1,0))} + |\lambda|\|k_i\|_{L_p(-\delta_1,0)})$$

$$\leq c_3\lambda^{(\theta-1)/2}(\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(z)\|_{W_p^2(U^+(\tau))}+$$

$$\|\nabla_{z'}\varphi_i\tilde{\omega}(z)\|_{W_p^2(U^-)} + \|\tilde{\omega}\|_{W_p^2(U^+)} + \|\tilde{\omega}\|_{W_p^2(U^-)} + |\lambda|\|\tilde{\omega}\|_{L_p(G^+)}), \quad (2.234)$$

В частности, отсюда и из (2.222), (2.223), (2.234) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}|k_{iz_n}(0)| \leq c\lambda^{-1/2+1/2p+\varepsilon_0/2}(\|k_i\|_{W_p^2(0,\delta)} + |\lambda|\|k_i\|_{L_p(0,\delta)}) \leq$$

$$c_1\lambda^{\gamma}C_0(\lambda)|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|, \quad \gamma = -3/4 + (n+1)/4p + 3\varepsilon_0/4, \quad (2.235)$$

где в отличие от других постоянных, постоянная $C_0(\lambda)$ зависит от λ

$$C_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-)\|_{W_p^{2s_0}(B'_\delta)} + |\lambda|^{s_0}\|\nabla_{z'}\varphi_i(w_0^+ - w_0^-)\|_{L_p(B'_\delta)})+$$

$$\|w_0^+ - w_0^-\|_{W_p^{2s_0}(\Gamma_0)} + |\lambda|^{s_0}\|w_0^+ - w_0^-\|_{L_p(B'_\delta)}.$$

Однако мы имеем что в силу (2.217), (2.219), что

$$C_0(\lambda) \leq c_5 + c_6|\lambda|^{s_0+3\varepsilon_0}. \quad (2.236)$$

Тогда неравенство (2.235) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^{r}|k_{iz_n}(0)| \leq C|\lambda|^{15\varepsilon_0/4-1/4+(n-1)/4p}. \quad (2.237)$$

где постоянная C не зависит от λ. Мы получили необходимые оценки. Оценим теперь норму $|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)|$, считая что $\lambda \geq \lambda_4$. В силу (2.209), оценим норму $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2|$. Приведем покоординатные оценки. Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Пусть, например, $i \leq r_1$. Оно записывается в виде

$$J_1 = b_n^+(\omega_{iz_n}^1(0) - \omega_{iz_n}^2(0))/\tilde{\psi}_i, \quad (2.238)$$

где $b_n^+ = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{a}_{k,l}(y^i(z))\nu_k\nu_l|_{z_n=0}$ ($\tilde{a}_{k,l}$ – старшие коэффициенты L, записанного в локальной системе координат y). Здесь $\nu_k = -\gamma_{z_k}(z')/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$

при $k < n$ и $\nu_n = 1/\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}$. В силу условий на коэффициенты 2 и неравенства (2.234) имеем

$$|J_1| \le c|\omega^1_{iz_n}(0) - \omega^2_{iz_n}(0)| \le c_2 C_0(\lambda)\lambda^\gamma |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|, \qquad (2.239)$$

где все постоянные не зависят λ за исключением $C_0(\lambda)\tau$. Рассмотрим второе слагаемое. Пусть, например, $i \le r_1$.

$$J_2 = (\sum_{j=1}^{n-1} b_j^+(0)\tilde{w}^+_{z_j}(x^i(0)) + \beta\tilde{w}^-(x^i(0)))/\tilde{\psi}_i.$$

В силу условий на коэффициенты имеем

$$|J_2| \le c_3 \sum_{i=1}^{r} (|\tilde{w}^+(x^i(0))| + |\tilde{w}^-(x^i(0))| + |\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}.$$

Каждое из слагаемых, входящих в эту сумму, оценивается одинаково. Рассмотрим, например, последнее слагаемое в оценке для $|J_2|$. Имеем (см. например, [1])

$$|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}| \le c_4 \|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|_{W^s_p(U^+)},\ s = n/p + \varepsilon_0$$

Далее, используя интерполяционное неравенство и теоремы о следах (см. [1]), получим

$$|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}| \le c_2 \|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|_{W^s_p(U^+)} \le$$
$$c_3 \|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|^{\theta}_{W^2_p(U^+)} \|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|^{1-\theta}_{L_p(U^+)} \le$$
$$c_4|\lambda|^{\theta-1}(\|\nabla_{z'}\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|_{W^2_p(U^+)} + |\lambda|\|\varphi_i(\tilde{w}^+(x^i(z)))\|_{L_p(U^+)},\ \theta = n/2p + \varepsilon_0/2.$$

Используя (2.222), (2.223) и (2.236) получим оценку

$$\|\nabla_{z'}(\tilde{w}^+(x^i(z)))|_{z=0}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} \le c_6 \lambda^{-1/2+(n-1)/2p+7\varepsilon_0/2}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $|J_2|$, и можно сказать, что

$$|J_2| \le c_7 \lambda^{-1/2+(n-1)/2p+7\varepsilon_0/2}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2| \qquad (2.240)$$

для некоторой не зависящей от λ постоянной c_7. Оценим $J_3 = \tilde{\beta}(w_0^+ - w_0^-)(0)$. Используя (47), имеем, что $(s = n/p + \varepsilon_0)$

$$|J_3| \le |\tilde{\beta}(0)|(\|\varphi_{0i}w_0\|_{W^s_p(U^+)} + \|\varphi_{0i}w_0\|_{W^s_p(U^-)}) \le c_7 \|\varphi_{0i}w_0\|^{\theta}_{W^2_p(U^+)} \|\varphi_{0i}w_0\|^{1-\theta}_{L_0(U^+)} +$$
$$\|\varphi_{0i}w_0\|^{\theta}_{W^2_p(U^-)} \|\varphi_{0i}w_0\|^{1-\theta}_{L_0(U^-)} \le c|\lambda|^{\theta-1+s_0+3\varepsilon_0}|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|. \quad (2.241)$$

Таким образом,

$$|J_3| \le c_8 |\lambda|^{-1/2+(n-1)/2p+7\varepsilon_0/2} |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|. \tag{2.242}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (2.239), (2.240), (2.242), имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{10}\ \lambda^{\gamma_0} |\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2|, \tag{2.243}$$

причем в силу условия $p > n$, число γ_0 (минимальное из постоянных в (2.237), (2.240), (2.241)) отрицательно, если параметр ε_0 достаточно мал. Условие $\varepsilon_0 < 1/15p$ это гарантирует. Возьмем в качестве λ_5 число со свойством $\lambda_5 \ge \lambda_4$, $c_{10}\lambda_5^{\gamma_0} \le 1/2$. В этом случае при $\lambda \ge \lambda_5$ оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно уравнение (2.206) имеет решение $\vec{\alpha}$. Используя найденное решение $\vec{\alpha}$, найдем решение v задачи сопряжения (2.189)-(2.191).

Покажем, что у нас выполнены условия переопределения (2.191). Взяв равенства (2.200), (2.201) и вычитая их из соответствующих равенств (2.202), (2.203), получим

$$b_n^+(0)(\omega_{iz_n}(0) - w_{iz_n}^+(0)) = \alpha(\tilde{\psi}_i - w^+(0)), i = 1, 2, \ldots, r_1, \tag{2.244}$$

$$b_n^-(0)(\omega_{iz_n}(0) - w_{iz_n}^-(0)) = \alpha(-\tilde{\psi}_i + w^-(0)), i = r_1 + 1, \ldots, r, \tag{2.245}$$

Функции $w_i^\pm(z)$ удовлетворяют уравнению (2.194). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (2.195) при $i \le r_1$ и из (2.196) при $i > r_1$. Мы получим, что

$$-b_{nn}^+(0, z_n)(\omega_{iz_nz_n} - w_{iz_nz_n}^+(0, z_n)) + \lambda(\omega_{iz_nz_n} - w_{iz_nz_n}^+(0, z_n)) = 0,\ i \le r_1, \tag{2.246}$$

$$-b_{nn}^-(0, z_n)(\omega_{iz_nz_n} - w_{iz_nz_n}^-(0, z_n))) + \lambda(\omega_{iz_nz_n} - w_{iz_nz_n}^-(0, z_n)) = 0,\ i \le r_1, = 0,\ i > r_1. \tag{2.247}$$

Используя граничные условия (2.202), (2.203) и (2.244) получим

$$b_n^+(0)(w_{iz_n}(0) - \omega_{iz_n}^+(0)) = \beta(w_i(0) - \omega_i^+(0)),\ w_i(\delta_1) - \omega_i^+(0, \delta_1) = 0,$$

$$b_n^-(0)(w_{iz_n}(0) - \omega_{iz_n}^-(0)) = \beta(\omega_i^-(0, z_n) - w_i(0)),\ w_i(-\delta_1) - \omega_i^+(0, -\delta_1) = 0,$$

где в первом равенстве $i = 1, 2, \ldots, r_1$ и во втором $i = r_1 + 1, \ldots, r$. Увеличивая параметр λ, если необходимо, можем считать, что решения полученных смешанных начально-краевых задач единственно и тогда $w_i(z_n) = \omega_i^+(0, z_n) = \tilde{\psi}_i$ при

$i = 1, \ldots, r_1$ и $w_i(z_n) = \omega_i^-(0, z_n) = \tilde{\psi}_i$ при $i = r_1+1, \ldots, r$. Последнее утверждение теоремы, о том что, если данные принадлежат класссу S_R и совпадают, то и решения совпадают, вытекает из единственности решений уравнения (2.206), имеющей место при $\lambda \geq C(R)$, где $C(R)$ – некоторая постоянная, зависящая от R.

$\square$

Замечание 2.4. *Вообще говоря граница* Γ *области может состоять из нескольких компонент связности, в этом случае мы можем брать различные граничные условия на каждой из них. Утверждения теорем* 1.13, 1.14, 2.7 *останутся справедливыми. В случае если граница* Γ_0 *состоит из нескольких компонент связности* $\Gamma_0 = \cup \Gamma_i$, *на каждой из которых задано условие сопряжения вида* (1.188) *и ищутся соответствующие функции* β_i *входящие в условие сопряжения того же вида, что и в теореме* 2.7, *то утверждение теоремы* 2.7 *также остается справедливым при выполнении соответствующих условий на данные.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был исследованы вопросы регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта, а также вопросы корректности обратных задач по определению коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения.

Основные результаты можно описать следующим образом.

1. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для параболических систем уравнений в классах Соболева.
2. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для эллиптического уравнения второго порядка в классах Соболева.
3. Доказана корректность в классах конечной гладкости обратной задачи определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости.
4. Доказана корректность в пространствах Соболева стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получена теоремы существования и единственности решений задачи.

Результаты работы развивают теорию задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических и эллиптических уравнений и систем, а также теорию обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений и систем, указываются новые подходы к их решению, результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей, описываемых параболическими и эллиптическими уравнениями и системами, в частности моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, моделей, описывающих процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряда других. Предложенные подходы конструктивны и могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. Amann H. Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Teubner-Texte zur Mathematik. 1993. Vol. 133.
3. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik matematicki. 2000. Vol. 35. P. 161–177.
4. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L_p-L_q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. Vol. 257.
5. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Am. Math. Soc. 2003. Vol. 166.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1968.
7. Baehr H.D. Heat and Mass Transfer. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
8. Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я., Уральцева Н.Н. О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158.
9. Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я., Уральцева Н.Н. О классической разрешимости задач дифракции // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92.
10. Олейник О.А. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // УМН. 1959. Т. 14.
11. Олейник О.А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Известия Академии Наук СССР Серия математическая. 1961. Т. 25.
12. Шефтель З.Г. Разрешимость в Lp и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // УМН. 1964. Т. 19.
13. Шефтель З.Г. Оценки в Lp решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и

условиям сопряжения // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149.
14. Schechter M. A generalization of the problem of transmission // Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-classe Di Scienze. 1960. Vol. 14.
15. Житарашу Н.В. Априорные оценки и разрешимость общих краевых задач // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165.
16. Житарашу Н.В. Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169.
17. Prüss V., Simonett G. Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations. Basel: Birkhauser Publishing, 2016.
18. Borsuk M. Transmission Problems for Elliptic Second-Order Equations in Non-Smooth Domains. Basel: Birkhauser Publishing, 2010.
19. Хлуднев А.М. Задача теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
20. Попова Т.С. Задача о сопряжении тонких упругих включений в упругом теле // V Международная конференция "Математика, ее приложения и математическое образование 2019. С. 273 – 277.
21. Хлуднев А.М., Попова Т.С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения // Мат.заметки СВФУ. 2018. Т. 25.
22. Khludnev A., Faella L. Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // Math. Meth.Appl.Sciences. 2016. Vol. 39.
23. Khludnev A., Popova T. Junction problem for rigid and semirigid inclusions in elastic bodies // Arch.Appl.Meth. 2016. Vol. 86.
24. Манапова А. Р. О конечно-разностном методе решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с условиями неидеального контакта // Вестник Башкирского университета. 2015. Т. 20.
25. Пятков С.Г. О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13.
26. Simon L. On contact problems for nonlinear parabolic functional differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2004. Vol. 22.
27. Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта //

Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40.
28. Jovanovi B., Vulkov L. Formulation and analysis of a parabolic transmission problem on disjoint intervals // Publications De L'Institut Mathematique. 2012. Vol. 91.
29. Drenchev L.B., Sobczak J. Determination of the Heat Exchange Coefficient on the Casting-Die Interface // High Temperature Capillarity Second International Conference, Cracow, Poland, 1997. C. 349 – 354.
30. Ozisik M.N., Orlando H.R.B. Inverse Heat Transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
31. Identification of contact failures in multi-layered composites / A. Abreu, H.R.B. Orlande, C.P. Naveira-Cotta [и др.] // Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011, 2011. C. 479-487.
32. Lugon J.Jr., Neto A.J.S. An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a one-dimensional porous medium // Proceedings of COBEM 2003. 17th International Congress of Mechanical Engineering, 2003. C. 1-11.
33. Hickson R., Barry S., Mercer G. Critical times in multilayer diffusion. Part 1: Exact solutions // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52.
34. Huang C., Ju T. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat // International J. for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38.
35. AL-Najem N. Whole time domain solution of inverse heat conduction problem in multi-layer media // Heat and Mass Transfer. 1997. Vol. 33.
36. Osman A., Beckf J. Nonlinear Inverse Problem for the Estimation of Time-and-Space-Dependent Heat-Transfer Coefficients // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 1989. Vol. 3.
37. Study of the one dimensional and transient bioheat transfer equation: multi-layer solution development and applications / D. Rodriguesa, P. Pereira, P. Limro-Vieira et al. // Int. J. Heat Mass Transf. 2013. Vol. 62.

38. Zhuo L., Lesnik D., Meng S. Reconstruction of the heat transfer coefficient at the interface of a bimaterial // Inverse Problems in Science and Engineering. 2019. Vol. 28.
39. Акимов И.А., Абузяров В.Н. Нестационарная теплопроводность в слоях с неидеальным контактом // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. Т. 4.
40. Акимов И.А., Тугов В.В. Разработка математических моделей теплопередачи в многослойных конструкциях // Фундаментальные исследования. 2017. Т. 8.
41. Акимов И.А., Акимов А.И., Абузяров В.Н. Математическое моделирование и определение тепловых потоков в слоистых средах с неидеальным тепловым контактом // Научно-технический вестник Поволжья. 2020. Т. 7.
42. Khludnev A., Popova T. Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Quart.Appl.Math. 2016. Vol. 74.
43. Khludnev A., Popova T., Faella L. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22.
44. Khludnev A., Popova T. On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies // ZAMM. 2017. Vol. 97.
45. Lazarev N. An Equilibrium Problem for the Timoshenko-type Plate Containing a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2013. Vol. 6.
46. Popova T. The equilibrium problem for a linear viscoelastic body with a crack // Mathematical Notes of NEFU. 1998. Vol. 5.
47. Манапова А. Р., Арисова О.Г. Вычислительные аспекты решения задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с условиями неидеального контакта // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21.
48. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта // Журнал СВМО. 2019. Т. 21.
49. Калманович В. В. О построении решении задачи теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом между слоями //

Таврический вестник информатики и математики. 2021. Т. 2.
50. Калманович В. В., Картанов А.А. О решении задачи теплопроводности в многослойной среде при неидеальном тепловом контакте между слоями // Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского, 2021. С. 167-174.
51. Castro L. P., Kapanadze D., Pesetskaya E. A heat conduction problem of 2D unbounded composites with imperfect contact conditions // ZAMM. 2015. Vol. 95.
52. Sheils N. Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact // Applied Mathematical Modelling. 2016. Vol. 46.
53. Бахвалов Н.С. Осреднение процесса передачи тепла в периодических средах при наличии излучения // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17.
54. Васильев Б.А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20.
55. Максимов А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Численное моделирование тепловых процессов в соединениях разнородных материалов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18.
56. Радыгин В.М. Применение интегральной формулы Шварца в задачах сопряжения математической физики // Задачи технической гидродинамики. 1991. Т. 1.
57. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985.
58. Шефтель З.Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сибирский математический журнал. 1965. Т. 4.
59. Oger L., Gauthier C. Heterogeneites et longueurs caracteristiques dans les milieux poreux // Entropie. 1989. Vol. 25.
60. Lazarev N., Semenova G. Optimal location problem for composite bodies with separate and joined rigid inclusions // The bulletin of Irkutsk state university. Series: Mathematics. 2023. Vol. 43.
61. Lazarev N. Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff–Love plate with two hinged rigid inclusions // Boundary value problems. 2021. Vol. 88.

62. Lazarev N., Rudoy E. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Zeitschrift fur angewandte mathematik und mechanik. 2014. Vol. 94.
63. Абдурахманов И.М. О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33.
64. Абдурахманов И.М., Алишаев М.Г. Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. 1973. Т. 4.
65. Гуревич А.В., Крылов А.Л., Топор Д.Н. Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298.
66. Зазовский А.Ф., Тодуа Г.Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности // Изв. АН СССР. 1990. Т. 4.
67. Колпаков А.Г. О склеенных телах // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28.
68. Brown S. Transport of fluid and electric current through a single fracture // J. Geophysics Research. 1989. Vol. 94.
69. Horani M. A., Favini A. An identification problem for first-order degenerate differential equations // Journal of optimization theory and applications. 2006. Vol. 130.
70. Bukhgeim A. L., Kalinina N. I. Global convergence of the Newton method in the inverse problems of memory reconstruction // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38.
71. Плеханова М. В., Федоров В. Е. Об управляемости вырожденных распределенных систем // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6.
72. Фёдоров В. Е., Шкляр Б. Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением // Математический сборник. 2012. Т. 203.
73. Urazaeva A. V., Fedorov V. E. On the well-posedness of the prediction - control problem for certain systems of equations // Mathematical Notes. 2009. T. 85.
74. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012.

75. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer Science+Business Media, New York, 2011.
76. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. 2006.
77. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. The Netherland. Dordrecht, Springer, 2005.
78. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, 2007.
79. Beilina L., Klibanov M. V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. Springer. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
80. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. Москва: Янус-К, 2009.
81. Alifanov O.M. Inverse heat transfer problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
82. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
83. Pestov L., Bolgova V., Danilin A. Numerical recovering of a speed of sound by the BC-method in 3D // Acoustical Imaging. 2012. Vol. 31.
84. Pestov L. Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method // Journal of inverse and ill-posed problems. 2012. Vol. 20.
85. Pestov L., Bolgova V., Kazarina O. Numerical recovering of a density by the BC-method // Inverse Problems and Imaging. 2010. Vol. 4.
86. Pestov L. On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2014. Vol. 22.
87. Ткаченко В.Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наукова думка, 2008.
88. Костин А.Б., Прилепко А.И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I // Дифференц. уравнения.

1996. Т. 32.
89. Костин А.Б., Прилепко А.И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. II // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32.
90. Artyukhin E., Nenarokomov A. Deriving the thermal contact resistance from the solution of the incerce heat-conduction problem // Journal of Engineering Physics. 1984. Vol. 46.
91. Drenchev L.B., Sobczak J. Inverse heat conduction problems and application to estimate of heat paramters in 2-D experiments // Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, Foundry Research Institute, Krakow (Poland), 1998. C. 355-361.
92. Loulou T., Scott E. An inverse heat conduction problem with heat flux measurements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2006. Vol. 67.
93. A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites / L.A.S. Abreu, M.J. Colaco, C.J.S. Alves [и др.] // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), 2013. C. 5422-5432.
94. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности / Ю.М. Мацевитый, А.О. Костиков, Н.А. Сафонов [и др.] // Проблемы машиностроения. 2017. Т. 20.
95. Абгарян К. К., Носков Р. Г., Ревизников Д. Л. Обратная коэффициентная задача теплопереноса в слоистых наноструктурах // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. 2017. Т. 20.
96. Detection of contact failures with the Markov chain Monte Carlo method by using integral transformed measurements / L. A. S. Abreu, H. R. B. Orlande, M. J. Colaco et al. // International Journal of Thermal Sciences. 2018. Vol. 132.
97. Thermography detection of contact failures in double layered materials using the reciprocity functional approach / L. A. S. Abreu, H. R. B. Orlande, M. J. Colaco et al. // Applied Thermal Engineering. 2016. Vol. 100.
98. A. Nenarokomov Margarita O. Salosina O. A. Optimal Design of Multi-Layer Thermal Protection of Variable Thickness // International Journal of Numer-

ical Methods for Heat & Fluid Flow. 2017. Vol. 27.
99. Mohebbi F., Sellier M. Estimation of thermal conductivity, heat transfer coefficient, and heat flux using a three dimensional inverse analysis // International Journal of Thermal Sciences. 2015. Vol. 99.
100. Mohebbi F., Sellier M. Parameter estimation in heat conduction using a two-dimensional inverse analysis // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2016. Vol. 17.
101. Mohebbi F., Sellier M. Identification of space- and temperature-dependent heat transfer coefficient // International Journal of Thermal Sciences. 2018. Vol. 128.
102. Mohebbi F., Evans B. Simultaneous estimation of heat flux and heat transfer coefficient in irregular geometries made of functionally graded materials // International Journal of Thermofluids. 2019. Vol. 1-2.
103. Белоногов В.А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Сборник тезисов российско-французского семинара «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019. С. 14.
104. Белоногов В.А., Пятков С.Г. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Известия вузов. Математика. 2020. Т. 7. С. 18–32.
105. Belonogov V., Pyatkov S. On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain // Сибирские электронные математические известия. 2021. Vol. 18. P. 176–206.
106. Белоногов В.А. Разрешимость задач сопряжения типа неидеального контакта в цилиндрической пространственной области // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, д. т. н., профессора Э. А. Бондарева, 2021. С. 207-209.
107. Белоногов В.А. О некоторых классах обратных задач об определении коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сборник тезисов Евразийской конференции по прикладной математике, 2021. С. 26.
108. Belonogov V., Pyatkov S. On Some Classes of Inverse Problems of Recovering the Heat Transfer Coefficient in Stratified Media // Siberian Mathematical

Journal. 2022. Vol. 63. P. 206–223.

109. Белоногов В.А. Об идентификации коэффициента теплообмена в слоистой среде // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14. С. 13–26.

110. Белоногов В.А., Пятков С.Г. О некоторых классах стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена для математических моделей тепломассопереноса // Вестник Югорского государственного университета. 2022. Т. 64. С. 101–117.

111. Белоногов В.А. Определение коэффициента теплопередачи в слоистых средах в цилиндрической пространственной области // Тезисы XXIII всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, 2022. С. 8-9.

112. Пятков С.Г., Вержбицкий М.А. О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23. С. 3–18.

113. Grisvard P. Equations differentielles abstraites // Annales Scientifiques De L Ecole Normale Superieure. 1969. Vol. 2. P. 311–395.

114. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем общего вида // Труды МИАН. 1965. Т. 83. С. 3–163.

115. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

116. Трибель Х. Теория функциональных пространств. Москва: Мир, 1986.

117. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. С. 2–76.

118. Agranovich M., Vishik M. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // Russian Mathematical Surveys. 1964. Vol. 19. P. 53–161.

119. Lieberman G.M. Second order parabolic differential equations. Singapure: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996.

120. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

121. Qamlo A., Mohammed B. Boundary Control for 2×2 elliptic systems with conjugation conditions // Intelligent Control and Automation. 2013. Vol. 4.

P. 280–286.