На правах рукописи

Сир

Сираева Дилара Тахировна

ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С ДАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ СУММЫ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ И ЭНТРОПИИ

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2019

Работа выполнена в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленном структурном подразделении Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Хабиров Салават Валеевич**.

Официальные оппоненты:

Нещадим Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Лаборатория обратных задач математической физики, ведущий научный сотрудник.

Григорьев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, Отдел вычислительных технологий, Лаборатория анализа и оптимизации нелинейных систем, главный научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный университет».

Защита состоится «____» ____________ 20__ года в ____ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 20__ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, д.ф.-м.н. Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных используются во многих прикладных задачах математической физики, механики сплошных сред и др. Наиболее изучена квазилинейная система уравнений в газовой динамике, к которой широко применяются численные методы[1]. Эффективным способом систематического изучения и получения точных решений системы квазилинейных дифференциальных уравнений является применение к данным уравнениям методов группового анализа.

Симметрийный (групповой) анализ дифференциальных уравнений базируется на теории непрерывных групп, основоположником которой является выдающийся норвежский математик второй половины XIX в. Софус Ли. В XX в. академик Л.В. Овсянников начал активно применять идеи Софуса Ли к исследованию систем квазилинейных дифференциальных уравнений, что привело к развитию нового направления в математике — группового анализа дифференциальных уравнений. Им же была сформулирована научно-исследовательская программа ПОДМОДЕЛИ[2], ставящая целью наиболее полно использовать свойства симметрии дифференциальных уравнений. Можно выделить следующие этапы исследования квазилинейных дифференциальных уравнений методами группового анализа: групповая классификация по произвольному элементу; вычисление допускаемой алгебры Ли; вычисление оптимальной системы неподобных подалгебр; прослеживание вложений всех подалгебр из оптимальной системы (иерархия подмоделей); построение инвариантных, частично инвариантных подмоделей (регулярных и нерегулярных); анализ подмоделей, в том числе симметрийными методами; получение точных групповых решений; исследование поведения частиц в целом. Была поставлена задача получения инвариантных подмоделей в каноническом виде[3].

В ходе реализации научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ были проведены обширные исследования, в которых участвовали А.П. Чупахин, С.В. Хабиров, С.В. Мелешко, А.А. Черевко, С.В. Головин, Е.В. Мамон-

[1]Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

[2]Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 30–55.

[3]Овсянников Л. В. Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики // Препринт ИГиЛ № 3–97. — Новосибирск, 1997. — 41 с.

тов, Ю.А. Чиркунов и другие[4]. Задача пополнения банка точных решений квазилинейных дифференциальных уравнений актуальна и по сей день.

Настоящая работа является частью реализации научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ. Автором рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, равного сумме функций плотности и энтропии $p = f(\rho) + h(S)$. Группа преобразований системы гидродинамического типа расширяется переносом по давлению. Соответствующая ей алгебра Ли 12-мерна и отличается от других алгебр Ли для других уравнений состояния. Уравнения гидродинамического типа с указанным уравнением состояния не рассматривались с позиции симметрийного анализа.

Цель диссертационной работы – реализация части научно-исследовательской программы ПОДМОДЕЛИ, поставленной академиком Л.В. Овсянниковым для уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи:**
– построение оптимальной системы неподобных подалгебр, вложение подалгебр из оптимальной системы, вложение подмоделей;
– классификация инвариантных подмоделей;
– получение точных решений подмоделей аналитическими способами;
– описание движений частиц в целом для точных решений.

Научная новизна работы заключается в том, что к уравнениям гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии, впервые применены методы группового анализа:

1. Построена оптимальная система неподобных подалгебр для расширенной оператором переноса давления известной 11-мерной алгебры Ли уравнений газовой динамики.
2. Построены 39 инвариантных подмоделей ранга 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Полученные подмодели отличаются от известных подмоделей уравнений газовой динамики тем, что коэффициенты подмоделей содержат функцию плотности; коэффициент в уравнении для энтропии подмодели не равен нулю.

[4]Овсянников Л. В. Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, вып. 3. — С. 362–372.

3. Инвариантная подмодель ранга 2 квазилинейной системы дифференциальных уравнений гидродинамического типа изучена аналитическими методами: найдены интегралы, представлен симметрический характеристический вид, найдены преобразования эквивалентности; поставлены начальные условия в случае системы не типа Коши.
4. Исследованы движения частиц для решений одной переопределенной подмодели ранга 2 (системы дифференциальных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными). В одном случае величина движущегося объема из одних и тех же частиц постоянна, дозвуковая область движения исчезает со временем. В другом случае решение описывает движение частиц без особенностей в полупространстве под действием двигающегося поршня.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты работы носят теоретический характер, вносят вклад в развитие изучения подмоделей уравнений гидродинамического типа и служат источником новых точных решений данных уравнений. Новые решения позволят описывать движение частиц в целом, проводить тестирование численных расчетов гидродинамических задач, создавать новые численные схемы расчетов специальных краевых задач.

Методология и методы исследования. Для реализации поставленных задач были использованы методы теории дифференциальных уравнений, группового анализа. Для визуализации и проверки некоторых полученных результатов использовалась система компьютерной математики Maple.

Положения, выносимые на защиту:
– оптимальная система неподобных подалгебр и примеры вложенных подалгебр и подмоделей;
– инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов;
– редукция двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям;
– всевозможные инвариантные подмодели ранга 1, некоторые точные решения на данных подмоделях;
– результаты группового анализа инвариантной подмодели ранга 2 квазилинейной системы гидродинамического типа;
– исследования движения частиц для некоторых полученных решений в целом.

Степень достоверности результатов, полученных в работе, обусловлена применением апробированных аналитических методов группового анализа дифференциальных уравнений и строгостью математических доказательств.

Апробация результатов. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих конференциях, семинарах и научных школах:

- Международная школа-конференция MOGRAN 16 «Современный групповой анализ», 28 октября – 2 ноября 2013 г., г. Уфа.
- Первая международная научная конференция «Наука будущего», 16 – 21 сентября 2014 г., г. Санкт-Петербург.
- Международная школа-конференция MOGRAN 18 «Lie groups and computation methods in nonlinear problems of mathematical modelling», 27 июля – 5 августа 2015 г., Китай, г. Шэньян.
- VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 7 – 11 сентября 2015 г., г. Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева.
- Международные (47-я, 50-я Всероссийские) молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений», 31 января – 6 февраля 2016 г., 3 – 9 февраля 2019 г., г. Екатеринбург.
- Первая, Вторая летние школы-конференции «Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения», 26 – 29 июня 2016 г., Респ. Башкортостан, д. Верхнебиккузино; 25 – 30 июня 2018 г., Респ. Башкортостан, озеро Кандрыкуль.
- VIII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, 5 – 10 сентября 2016 г., г. Новороссийск, пос. Дюрсо.
- Уфимская международная математическая конференция, 27 – 30 сентября 2016 г., г. Уфа.
- IX, X Международные школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», 3 – 7 октября 2016 г., 16 – 20 октября 2018 г., г. Уфа.
- V Всероссийская научно-практическая, VIII Международная молодежная научно-практическая конференции «Математическое моделирование процессов и систем», 17 – 19 ноября 2016 г., 4 – 7 октября 2018 г., г. Стерлитамак.

- Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, 24 – 27 мая 2017 г., г. Уфа.
- Международные конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», 12 – 16 марта 2018 г., 18 – 22 марта 2019 г., Респ. Башкортостан, озеро Банное.
- 9-ая Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», 5 – 7 декабря 2018 г., г. Москва.
- Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», 13 – 17 мая 2019 г., г. Новосибирск.
- Научный семинар Института механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, 2019 г., г. Уфа.
- Научный семинар Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, 2019 г., г. Уфа.
- Научный семинар Института гиродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова, 2019 г., г. Новосибирск.
- Научный семинар Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.М. Блохина, 2019 г., г. Новосибирск.

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в 21 работе: в 10 статьях [1–10], в тезисах 11 докладов. Из них 4 работы [1–4] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ, в том числе переводные версии работ [1,4] входят в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus. Из совместной публикации [2] в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации составляет 136 страниц машинописного текста, в том числе 13 рисунков, 18 таблиц. Список литературы состоит из 106 наименований.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю С.В. Хабирову за постановку задачи и ценные замечания, высказанные во время неоднократных обсуждений представленных результатов.

Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 18-29-10071) и средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме исследования, отмечаются актуальность темы исследований, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, степень достоверности, апробация результатов; сформулированы основные положения, выносимые на защиту. Перечислены все публикации автора по теме диссертации и приведена структура диссертации.

Первая глава посвящена построению оптимальной системы неподобных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, равного сумме функций плотности и энтропии. По полученным подалгебрам из оптимальной системы построены три подграфа вложенных подалгебр. Для выделенной цепочки вложенных подалгебр подграфа показано вложение решений подмоделей.

В п.1.1 рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений гидродинамического типа

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где t, $\vec{x}$ — независимые переменные; ∇ — градиент; $D = \partial_t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; уравнение состояния имеет вид[2]

$$p = f(\rho) + h(S), \tag{2}$$

где S — функция энтропии.

Уравнение состояния (2) может быть записано через внутреннюю энергию ε или температуру T из термодинамического тождества[5] $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$:

$$\varepsilon = \int \frac{f(\rho)}{\rho^2}d\rho - \frac{h(S)}{\rho} + H(S), \quad T = H'_S - \frac{h'_S}{\rho},$$

где $H(S)$ — произвольная функция.

Из термодинамического тождества с учетом (2) выводятся уравнения для термодинамических величин S, T и ε при $h' \neq 0$

$$DS = 0, \quad DT + \rho^{-1}h'(S)\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad D\varepsilon + \rho^{-1}p\mathrm{div}\vec{u} = 0.$$

Энтропия S определена с точностью до замены $h(S) \to S$ (преобразование эквивалентности).

[5] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

Система уравнений (1) с учетом (2) инвариантна относительно группы Галилея G_{11}, расширенной равномерным растяжением и переносом по p:

$$\begin{gathered} \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a}; \quad t' = t + a_0; \\ \vec{x}\,' = O\vec{x}, \quad \vec{u}\,' = O\vec{u}, \quad OO^T = E, \quad \det O = 1; \\ \vec{x}\,' = \vec{x} + t\vec{b}, \quad \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{b}; \quad t' = ct, \quad \vec{x}\,' = c\vec{x}; \quad p' = p + p_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Группе преобразований (3) соответствует 12-мерная алгебра Ли L_{12} с базисом из операторов, записанных в декартовой системе координат[6]

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\ X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \\ X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \\ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_1 = \gamma\partial_p, \quad \gamma = const. \end{gathered}$$

В п.1.2 выводится правило построения неподобных подалгебр различных размерностей в алгебре Ли $L_{12} = L_{11} \oplus \{Y_1\}$, которая является прямой суммой двух идеалов. При построении подалгебр используются внутренние автоморфизмы алгебры Ли L_{11}[6] и внешний автоморфизм алгебры Ли L_{12}, действующий на коэффициент при операторе Y_1:

$$y^{0\prime} = b_1 y^0. \tag{4}$$

Перечислить подалгебры в L_{12} можно следующим образом. Нужно выбрать подалгебры $\{Z_2, ..., Z_n\}$, $n \leq 12$ из оптимальной системы L_{11}. Далее, приписать к базисным операторам оператор $Z_1 + Y_1$, где из Z_1 вычтена линейная комбинация операторов $Z_2, ..., Z_n$. Вид оператора Z_1 уточняется вычислением коммутаторов по формуле $[Z_1 + Y_1, Z_j] = [Z_1, Z_j] = \sum_{k=2}^{n} c_{1j}^k Z_k, j = 2..n, k = 2..n$. Простейший вид для Z_1 получается внутренними автоморфизмами алгебры Ли L_{11} и внешним автоморфизмом (4), сохраняющими операторы $Z_2, ..., Z_n$.

Замечание 1.1. *Если $Z_1 = 0$, то это тривиальная подалгебра алгебры Ли L_{12}, которая не заносится в оптимальную систему подалгебр.*

[6]Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. — Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. — 659 с.

Теорема 1.1. *Все неподобные нетривиальные подалгебры алгебры Ли L_{12} сводятся в Таблицу А.1 из 309 подалгебр (Приложение А), в которой r — размерность подалгебры, i — порядковый номер подалгебры данной размерности. В предпоследней колонке указан номер подалгебры из L_{11}, по которой построена подалгебра в L_{12}. Если вычеркнуть Y_1 из последнего оператора базиса подалгебры из L_{12}, то получится подалгебра из L_{11}, номер которой указан в последней колонке Таблицы А.1.*

Таблица А.1 — Оптимальная система неподобных подалгебр для алгебры Ли L_{12}

r	i	Базис подалгебры	i (L_{11})	
			r–1, i	r, i
2	1	$b4 + c7 + 11, Y_1 + a4 + 7$	1.1	2.1
	2	$a4 + 7, Y_1 + b4 + 11$	1.2, 1.3	2.1
	3	$10, Y_1 + 7 + a11$	1.10	2.2, 2.5
	4	$4 + 10, Y_1 + a1 + 7$	1.9	2.3
	5	$7 + c(4 + 10), Y_1 + a1 + 4 + 10$	1.5	2.3
	6	$1 + 7, Y_1 + 10$	1.4	2.4

...

В качестве примера приведен фрагмент Таблицы А.1.

Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} насчитывает 221 представителя[7].

Приводятся примеры вычисления подалгебр из оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_{12} (Таблица А.1).

В п.1.3 представлены подграфы вложенных подалгебр, построенные по оптимальной системе подалгебр для L_{12}. Всего построено три подграфа: основной подграф $\Gamma_7(L_{12})$, промежуточный подграф $\Gamma_5(7.11, 7.13)$ и конечный подграф $\Gamma_1(5.10)$

Подграф $\Gamma_7(L_{12})$ включает в себя все подалгебры размерностей от 7 до 11 включительно. Из данного подграфа выбрана подалгебра 7.11 в объединении с подалгеброй 7.13 в качестве вершины для подграфа $\Gamma_5(7.11, 7.13)$. В нее вкладываются все подалгебры размерностей 6 и 5. В данном подграфе подалгебра 5.10 выбрана в качестве вершины подграфа $\Gamma_1(5.10)$, в которую вкладываются подалгебры размерностей меньше 5.

В п.1.4 для подмоделей цепочки вложенных подалгебр подграфа $\Gamma_1(5.10)$ доказаны следующие утверждения.

[7] Хабиров С. В. Лекции аналитические методы в газовой динамике. — Уфа: БГУ, 2013. — 224 с.

Утверждение 1.1. *Все решения инвариантной подмодели* 2.10 *вкладываются в решения инвариантной подмодели* 1.8 *при выборе согласованных инвариантов.*

Утверждение 1.2. *При* $c = 1$, $v \neq y_2 w$ *все решения регулярной частично инвариантной подмодели ранга 1 дефекта 1 для подалгебры* 4.6 *редуцируются к решениям инвариантной подмодели для подалгебры* 2.10.

Утверждение 1.3. *При* $c \neq 1$ *решения частично инвариантной подмодели* 4.6 *не редуцируются к решениям инвариантной подмодели* 1.8*, а значит, и к решениям подмодели* 2.10.

Утверждение 1.4. *Регулярная частично инвариантная подмодель ранга 0 дефекта 1 для подалгебры* 5.10 *имеет решение*

$$u = bp_0 + a\ln|y|, \quad v = w = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad S = S_0, \tag{5}$$

с точностью до галилеева переноса по x *и* z*. Решение* (5) *также является решением подмодели 4.6.*

Во второй главе по подалгебрам алгебры Ли L_{12} построены инвариантные подмодели ранга 3 и 2 в каноническом виде эволюционного и стационарного типов. Для двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 доказана редукция к инвариантным подмоделям. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр алгебры Ли L_{12}, по которым построены все инвариантные подмодели ранга 1 и получены некоторые точные решения.

В п.2.1 приведен алгоритм построения инвариантных подмоделей ненулевого ранга.

В п.2.2 доказана следующая теорема, в которой функции-инварианты одномерных подалгебр обозначаются через u_1, v_1, w_1, ρ, p_1, $S_1 = p_1 - f(\rho)$, а инварианты из независимых переменных — через x_1, y_1, z_1 (или t).

Теорема 2.1. *Инвариантные подмодели ранга 3 алгебры Ли* L_{12} *в каноническом виде могут быть представлены с помощью двух типов систем: эволюционного типа (*t*–инвариант)*

$$\begin{gathered}
Du_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1, \quad Dv_1 + a_2\rho^{-1}p_{1y_1} = b_2,\\
Dw_1 = b_3,\\
D\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho b_4,\\
DS_1 = b_5 \text{ или } Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5,
\end{gathered}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}$, *или стационарного типа*

$$Du_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1, \quad Dv_1 + a_2\rho^{-1}p_{1y_1} = b_2,$$
$$Dw_1 + a_3\rho^{-1}p_{1z_1} = b_3,$$
$$D\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho b_4,$$
$$DS_1 = b_5 \text{ или } Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5,$$

где $D = u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1} + w_1\partial_{z_1}$*;* a_i*,* $i = 1, 2, 3$*;* b_j*,* $j = 1..5$ *– коэффициенты подмоделей.*

В п.2.3 получены представления решений и коэффициенты инвариантных подмоделей ранга 3 канонического вида алгебры Ли L_{12}.

В п.2.4 приведен пример вычисления инвариантной подмодели ранга 3 из п.2.3.

В п.2.5 доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Инварианты можно выбрать так, что инвариантная подмодель ранга 2 алгебры Ли* L_{12} *будет иметь канонический вид эволюционного типа*

$$D_1u_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1, \quad D_1v_1 = b_2, \quad D_1w_1 = b_3,$$
$$D_1\rho + \rho u_{1x_1} = \rho b_4,$$
$$D_1S_1 = b_5, \quad \text{или} \quad D_1p_1 + \rho f_\rho u_{1x_1} = \rho f_\rho b_4 + b_5,$$

где $D_1 = \partial_t + u_1\partial_{x_1}$*;* a_1 *— коэффициенты от независимой переменной* t *или* $a_1 = const$*;* b_j*,* $j = 1..5$ *— коэффициенты от линейных (квадратичных) функций инвариантных скоростей, обратной степени плотности, переменных* t*,* x_1 *или* $b_j = const$*.*

Теорема 2.3. *Инварианты можно выбрать так, что канонический вид инвариантной подмодели ранга 2 стационарного типа алгебры Ли* L_{12} *будет следующим*

$$D_1u_1 + a_1\rho^{-1}p_{1x_1} = b_1, \quad D_1v_1 + a_2\rho^{-1}p_{1y_1} = b_2, \quad D_1w_1 = b_3,$$
$$D_1\rho + \rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho b_4,$$
$$D_1S_1 = b_5, \quad \text{или} \quad D_1p_1 + \rho f_\rho(u_{1x_1} + v_{1y_1}) = \rho f_\rho b_4 + b_5,$$

где $D_1 = u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}$*; коэффициенты* a_i*,* $i = 1, 2$ *— функции независимых переменных* x_1*,* y_1*; коэффициенты* b_j*,* $j = 1..5$ *— линейные (квадратичные) функции инвариантных скоростей, обратной степени плотности или постоянные.*

В п.2.6 получены представления решений и коэффициенты инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида алгебры Ли L_{12}.

В п.2.7 приведены примеры вычисления инвариантных подмоделей ранга 2 из п.2.6. Показано, что канонический вид подмодели может быть не единственным.

В п.2.8 доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Регулярные частично инвариантные подмодели, построенные по подалгебрам* 2.38, 2.39 *алгебры Ли* L_{12} *[1], редуцируются к инвариантным подмоделям ранга 3 11-мерной (подалгебра* 1.12*) и 12-мерной (подалгебра* 1.12*) алгебр Ли соответственно.*

В п.2.9 доказана теорема.

Теорема 2.5. *3-мерные подалгебры алгебры Ли* L_{12} *[1] порождают следующие подмодели: 15 инвариантных подмоделей ранга 1 в случае, когда переменная* t *– инвариант; 31 инвариантную подмодель ранга 1, для которых* t *не является инвариантом; 24 частично инвариантных подмодели ранга 2 дефекта 1.*

Построены все инвариантные подмодели ранга 1, перечисленные в Приложении В. С помощью некоторых из них получены новые точные решения системы (1) с учетом (2) с точностью до преобразований (3). $\gamma = 0$ в случае L_{11}, $\gamma = 1$ в случае L_{12}. Подмодель 3.35 задает решение

$$u = -a\frac{y}{t} + \rho_0 z - \frac{a\gamma}{2}t,\ v = \frac{y}{t} - \frac{\gamma}{2}t,\ w = 0,\ \rho = \frac{1}{t},\ p = \gamma\frac{y}{t} + \frac{\gamma^2}{2}t + f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Подмодель 3.36 дает решение

$$u = -by + az - \frac{b\gamma}{2\rho_0}t^2,\ v = -\frac{\gamma}{\rho_0}t,\ w = 0,\ \rho = \rho_0,\ p = \gamma y + \frac{\gamma^2}{2\rho_0}t^2.$$

Подмодель 3.45 дает решение

$$u = \frac{x}{t} - \frac{\gamma}{2}t,\ v = b\frac{x}{t} + \frac{\gamma b}{2}t,\ w = 0,\ \rho = \frac{1}{t},\ p = \frac{\gamma}{t}x + \frac{\gamma^2}{2}t + f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Подмодель 3.47 дает решение

$$u = -\frac{\gamma}{\rho_0}t,\ v = b\left(x + \frac{\gamma}{2\rho_0}t^2\right),\ w = 0,\ \rho = \rho_0,\ p = \gamma\left(x + \frac{\gamma}{2\rho_0}t^2\right).$$

Третья глава посвящена изучению инвариантной подмодели ранга 2 эволюционного типа алгебры Ли L_{12}: вычислены интегралы, преобразования эквивалентности системы. В случае системы не типа Коши выяснено условие задания начальных данных. Для полученных двух типов точных решений подмодели описано движение частиц в целом.

В п.3.1 рассматривается подалгебра из оптимальной системы подалгебр [1] под номером 2.36 $X_3 + X_4 = \partial_z + t\partial_x + \partial_u,\ X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p$. Инварианты подалгебры $t, y, u - z, v, w, \rho, p - x + tz$ задают представление инвариантного решения:

$$u = v_1 + z,\ v = u_1,\ w = w_1,\ \rho,\ p = p_1 + x - tz, \tag{6}$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 функции переменных t, y.

Подстановка (6) в (1) с учетом (2) приводит к инвариантной подмодели ранга 2:

$$\begin{gathered} Du_1 + \rho^{-1}p_{1y} = 0, \quad Dv_1 = -\rho^{-1} - w_1, \quad Dw_1 = t\rho^{-1}, \\ D\rho + \rho u_{1y} = 0, \quad Dp_1 + \rho f_\rho u_{1y} = tw_1 - v_1, \end{gathered} \tag{7}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y$.

Вводится замена переменных: $t = t(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ так, чтобы $D = \partial_\xi$. Отсюда следует $t_\xi = 1, u_1 = y_\xi \Rightarrow t = \xi + \eta$. Якобиан обратной замены $\xi = \xi(t, y)$, $\eta = \eta(t, y)$ имеет вид $I = t_\xi y_\eta - t_\eta y_\xi = y_\eta - y_\xi \neq 0$. Инвариантная подмодель (7) записывается в новых переменных. Получаются два интеграла системы

$$\rho(y_\eta - y_\xi) = R(\eta) > 0,$$
$$p_1 = f(\rho) - w_1 - (\xi + \eta)v_1 + Q(\eta).$$

Система (7) в новых переменных приводится к системе из четырех уравнений для четырех функций:

$$\begin{gathered} u_{1\xi} + RV_\xi = u_{1\eta}, \quad v_{1\xi} = -w_1 - V, \quad w_{1\xi} = V(\xi + \eta), \\ -Ru_{1\xi} + g'V_\xi = g'V_\eta - w_{1\eta} - (\xi + \eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q', \end{gathered} \tag{8}$$

где $V = \rho^{-1}$, $f(\rho) = g(V)$, $f' = -V^2 g'$.

Производные по переменной ξ от всех функций определяются из уравнений (8) при условии

$$g' + R^2 \neq 0. \tag{9}$$

В этом случае (8) есть система типа Коши, для которой можно поставить задачу с начальными данными.

Если условие (9) не выполнено, то функция $V = V(\eta)$ зависит от одной переменной η при условии $R \neq \text{const}$.

Если $g' = -R^2 = \text{const}$, то $g = -R^2V + G$ должна быть линейной функцией (специальное уравнение состояния). В этом случае (8) линейная система.

К исходным переменным t, y по решению системы (8) можно вернуться, вычислив криволинейный интеграл $y = \int u_1 d\xi + (u_1 + RV)d\eta$ по любому пути в области определения гладкого решения, тогда получится зависимость $y = y(\xi, \eta)$ и вместе с равенством $t = \xi + \eta$ получится замена переменных, которая по заданному решению (8) дает решение (7).

Задача с начальными данными на нехарактеристической кривой поставлена корректно, т. е. существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных в некоторой окрестности кривой.

В п.3.2 система (8) приведена к симметрическому виду, откуда следует справедливость теоремы единственности задачи Коши в характеристической области[7] для рассматриваемой подмодели в предположении ее гиперболичности.

В п.3.3 система (8) представлена в матричном виде. Найдены характеристики для каждого корня характеристического уравнения:

$$C_0 : \eta = \text{const}, \quad C_+ : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 - |g'|^{-\frac{1}{2}}R, \quad C_- : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 + |g'|^{-\frac{1}{2}}R, \tag{10}$$

и выписаны условия на характеристиках

$$\begin{aligned}
&C_0 : v_{1\xi} = -w_1 - V, \quad w_{1\xi} = (\xi + \eta)V;\\
&C_+ : \gamma D_+ u_1 + (\xi + \eta)D_+ v_1 + D_+ w_1 + \gamma^2 D_+ V =\\
&= w_1 \gamma^{-1} R(\xi + \eta) + Q', \quad \text{где } D_+ = -(1 + R\gamma^{-1})\partial_\xi + \partial_\eta;\\
&C_- : -\gamma D_- u_1 + (\xi + \eta)D_- v_1 + D_- w_1 + \gamma^2 D_- V =\\
&= -w_1 \gamma^{-1} R(\xi + \eta) + Q', \quad \text{где } D_- = (R\gamma^{-1} - 1)\partial_\xi + \partial_\eta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (10), (11) для 7 неизвестных функций образуют замкнутую характеристическую форму гиперболической системы. Она является основой для численных расчетов краевых задач по методу характеристик.

Теорема 3.1. *В случае $g' < 0$ система* (8) *гиперболическая, а в случае $g' \geqslant 0$ не гиперболическая.*

В п.3.4 рассматривается система (8) при $g' = -R^2 = const$. Обозначим $R = R_0$. В этом случае неизвестно, как ставить задачу с начальными данными. После введения замены $\overline{u} = u_1 + R_0 V$ и выражения $\overline{u}_\xi$ из первого уравнения и подстановки его в четвертое уравнение, система (8) примет вид:

$$\begin{gathered}\overline{u}_\xi = \overline{u}_\eta - R_0 V_\eta, \quad v_{1\xi} = -w_1 - V, \quad w_{1\xi} = (\xi+\eta)V,\\ -(\xi+\eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q' = R_0(2R_0V_\eta - \overline{u}_\eta) + w_{1\eta},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\overline{u}$, v_1, w_1, V зависят от переменных ξ, η. В системе (12) неизвестные функции представляются в виде степенных рядов по переменной ξ:

$$\overline{u} = \sum_{k\geq 0} \overline{u}_k(\eta)\xi^k,\ v_1 = \sum_{k\geq 0} v_{1k}(\eta)\xi^k,\ w_1 = \sum_{k\geq 0} w_{1k}(\eta)\xi^k,\ V = \sum_{k\geq 0} V_k(\eta)\xi^k.$$

Теорема 3.2. *Для нахождения функций $\overline{u}$, v_1, w_1, V необходимо задать начальные данные:*

$$\overline{u}\Big|_{\xi=0} = u_0(\eta), \quad v_1\Big|_{\xi=0} = v_{10}(\eta), \quad w_1\Big|_{\xi=0} = w_{10}(\eta), \quad V\Big|_{\xi=0} = V_0(\eta),$$

$$V\Big|_{\eta=0} = c(\xi) = V_0(0) + \sum_{i\geq 1} c_i\xi^i, \quad c(0) = V_0(0).$$

Разложение в ряд функции $c(\xi)$ определит константы c_i, $i \geq 1$. Для непрерывности функции V необходимо, чтобы выполнялось равенство $c(0) = V_0(0)$.

В п.3.5 рассматривается система (8) в случае не типа Коши при $g'(V) = -R^2(\eta) < 0 \Rightarrow V = V(\eta)$. Тогда система (8) переопределена. Изучение ее совместности приводит к двум типам решений, в каждом из которых остается по 4 существенных постоянных в силу (3).

В п.3.6 описано движение частиц в целом в простейших случаях для двух типов решений, полученных в п.3.5. Первый тип решений при $A_{20} = A_{10} = 0$ описывает изобарическое движение вдоль траекторий с неменяющейся величиной движущегося объема из одних и тех же частиц. При этом дозвуковая область движения исчезает со временем. Второй тип решений при $A_{00} = A_{10} = A_{20} = 0$, $A_{40} = k$ описывает движение частиц под действием поршня.

В п.3.7 рассматривается система (8) с уравнением состояния $p = -R^2V + h(S)$, $R = \text{const}$. В этом случае система является линейной. В обозначениях $u^1 = u_1$, $u^2 = v_1$, $u^3 = w_1$, $u^4 = V$, $Q' = q(\eta)$ система (8) примет вид:

$$\begin{gathered}u^1_\xi + Ru^4_\xi = u^1_\eta, \quad u^2_\xi = -u^3 - u^4, \quad u^3_\xi = (\xi+\eta)u^4,\\ R^2u^4_\eta - Ru^1_\eta + (\xi+\eta)(u^2_\eta + u^3) + u^3_\eta = q, \quad q_\xi = 0, \quad q_{u_i} = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

где $q = q(\eta)$ — произвольный элемент.

Разыскиваются преобразования эквивалентности системы (13). Оператор преобразований эквивалентности, продолженный на производные, входящие в систему (13), разыскивается в виде[6]

$$
\begin{gathered}
X = \zeta^\xi \partial_\xi + \zeta^\eta \partial_\eta + \zeta^{u^i} \partial_{u^i} + \zeta^q \partial_q + (\widetilde{D}_\xi \zeta^{u^i} - u^i_\xi \widetilde{D}_\xi \zeta^\xi - u^i_\eta \widetilde{D}_\xi \zeta^\eta) \partial_{u^i_\xi} + \\
+ (\widetilde{D}_\eta \zeta^{u^i} - u^i_\xi \widetilde{D}_\eta \zeta^\xi - u^i_\eta \widetilde{D}_\eta \zeta^\eta) \partial_{u^i_\eta} + (D_\xi \zeta^q - q_\xi D_\xi \zeta^\xi - q_\eta D_\xi \zeta^\eta - q_{u^i} D_\xi \zeta^{u^i}) \partial_{q_\xi} + \\
+ (D_{u^i} \zeta^q - q_\xi D_{u^i} \zeta^\xi - q_\eta D_{u^i} \zeta^\eta - q_{u^i} D_{u^j} \zeta^{u^j}) \partial_{q_{u^i}} + \ldots,
\end{gathered}
$$

где координаты оператора ζ^ξ, ζ^η, ζ^{u^i}, ζ^q зависят от переменных ξ, η, u^i, q, а операторы полного дифференцирования, действующие в своих пространствах, таковы:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{D}_\xi = \partial_\xi + u^i_\xi \partial_{u^i} + (q_\xi + q_{u^i} u^i_\xi) \partial_q, \quad \widetilde{D}_\eta = \partial_\eta + u^i_\eta \partial_{u^i} + (q_\eta + q_{u^i} u^i_\eta) \partial_q, \\
D_\xi = \partial_\xi + q_\xi \partial_q, \quad D_{u^i} = \partial_{u^i} + q_{u^i} \partial_q.
\end{gathered}
$$

Таким образом, можно считать

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{u^i} = C u^i + \zeta^i(\xi, \eta), \quad \zeta^\xi = C_1, \quad \zeta^\eta = -C_1, \quad \zeta^q = Cq + h(\eta), \\
&\zeta^1_\xi = \zeta^1_\eta - R\zeta^4_\xi, \quad \zeta^2_\xi = -\zeta^3 - \zeta^4, \quad \zeta^3_\xi = (\xi + \eta)\zeta^4, \\
&R^2 \zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi + \eta)(\zeta^3 + \zeta^2_\eta) + \zeta^3_\eta = h(\eta).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Теорема 3.3. *Алгебра Ли преобразований эквивалентности системы* (13) *бесконечномерна и задается базисом*

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta, \quad X_2 = u^i \partial_{u^i} + q \partial_q, \\
X_{h(\eta)} = h(\eta) \partial_q + \zeta^i \langle h(\eta) \rangle \partial_{u^i}, \quad X_\infty = \zeta^i_0(\xi, \eta) \partial_{u^i},
\end{gathered}
$$

где $\zeta^i \langle h(\eta) \rangle$ *— частное решение неоднородной системы* (14), $\zeta^i_0(\xi, \eta)$ *— общее решение однородной системы* (14) *при* $h = 0$.

Замечание 3.1. *Ядро допускаемых алгебр системы* (13) *для произвольной функции* $q(\eta) \neq 0$ *порождается операторами* X_1, X_∞, $X_q = \zeta^i \langle q(\eta) \rangle \partial_{u^i}$. *При* $q = 0$ *добавляется растяжение* $X_2 = u^i \partial_{u^i}$. *Любое точное решение неоднородной системы порождает преобразование эквивалентности, приводящее систему к однородной.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований квазилинейных дифференциальных уравнений гидродинамического типа с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии, впервые реализовано следующее:

1. Построена оптимальная система неподобных подалгебр 12-мерной алгебры Ли, допускаемой квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных. По оптимальной системе построены три подграфа вложенных подалгебр. Для цепочки вложенных подалгебр одного из подграфов показано вложение подмоделей, состоящих из дифференциальных уравнений с различным числом независимых переменных.
2. Доказано, что существует канонический вид для 13 инвариантных подмоделей с тремя независимыми переменными (ранга 3) и для 39 инвариантных подмоделей с двумя независимыми переменными (ранга 2) эволюционного и стационарного типов. Доказана редукция двух частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям 11-мерной и 12-мерной алгебр Ли. Вычислены инварианты всех 3-мерных подалгебр 12-мерной алгебры Ли и построены все инвариантные подмодели ранга 1 — системы из обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены некоторые точные решения динамических систем дифференциальных уравнений.
3. Для инвариантной подмодели ранга 2 квазилинейной системы гидродинамического типа в результате применения качественной теории дифференциальных уравнений найдены интегралы, симметрический гиперболический вид и преобразования эквивалентности системы. В случае системы не типа Коши для специального уравнения состояния выяснено условие задания начальных данных. Для плотности, зависящей от одной лагранжевой переменной, получено два типа решений переопределенной инвариантной подмодели ранга 2. Одни решения описывают изобарическое движение вдоль траекторий с постоянной плотностью и исчезающей дозвуковой областью. Другие решения описывают движение частиц под действием поршня.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, входящие в Перечень ВАК РФ

1. Сираева, Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов / Д. Т. Сираева // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, вып 1. — С. 94–107.
2. Сираева, Д. Т. Инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа / Д. Т. Сираева, С. В. Хабиров // Челябинский физико-математический журнал. — 2018. — Т. 3, вып. 1. — С. 38–57.

3. Сираева, Д. Т. Классификация стационарных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Челябинский физико-математический журнал. — 2019. — Т. 4, вып. 1. — С. 18–32.
4. Сираева, Д. Т. Канонический вид инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа идеальной гидродинамики / Д. Т. Сираева // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, вып. 2. — С. 70–80.

Публикации в остальных изданиях, материалы конференций

5. Сираева, Д. Т. Движение объема частиц, соответствующее инвариантному решению подмодели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. — 2016. — Т. 11, вып 2. — С. 205–209.
6. Сираева, Д. Т. Распространение возмущений звуковой волны на инвариантном решении модели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: IX Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых (г. Уфа, 3–7 октября 2016 г.): сборник трудов. Математика. Физика. Химия. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. — С. 35—42.
7. Сираева, Д. Т. Постановка задачи с начальными данными для инвариантной подмодели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, 17–19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак. Ч. III. — Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. — С. 118–122.
8. Сираева, Д. Т. Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям / Д. Т. Сираева // Многофазные системы. — 2018. — Т. 13, № 3. — С. 59–63.
9. Сираева, Д.Т. Подмодели гидродинамического типа с двумя независимыми переменными / Д. Т. Сираева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы VIII Межд. молодежн. науч.-практ. конф., 4 - 7 октября 2018 г., г. Уфа. Часть III. — Уфа: БашГУ, 2018. — С. 149–153.
10. Сираева, Д. Т. Построение инвариантных подмоделей ранга 2 уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния специального вида / Д. Т. Сираева // Волны и вихри в сложных средах: 9-ая международная конференция-школа молодых ученых; 5 - 7 декабря 2018 г. Москва: Сборник материалов школы. — М.: ООО «Премиум-принт», 2018. — С. 141–143.

Сираева Дилара Тахировна

ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С ДАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ СУММЫ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ И ЭНТРОПИИ

Специальность 01.01.02 –
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук