На правах рукописи

Неустроева Любовь Владимировна

Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ханты-Мансийск — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Югорский Государственный Университет»

Научный руководитель:

Пятков Сергей Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор инженерной школы цифровых технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Любанова Анна Шоломовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем автоматики, автоматизированного управления и проектирования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Пененко Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Защита состоится 31 октября 2023 г. в 16:30 часов на заседании Диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: igil@hydro.nsc.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте http://www.hydro.nsc.ru Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Автореферат разослан « 21 » августа 2023 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета
24.1.055.01, д.ф.-м.н. Прокудин Дмитрий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию обратных задач об определении точечных источников в математических моделях тепломассопереноса с использованием точечных условий переопределения. Основное внимание уделено моделям основанным на параболических уравнениях второго порядка, возникающим при описании процессов конвенции-диффузии, фильтрации, экологии и в других областях. Неизвестная правая часть в искомом параболическом уравнении имеет вид суммы дельта-функций Дирака, умноженных на функции зависящие от времени (мощности источников). Основные результаты основаны на асимптотических представлениях функции Грина эллиптических краевых задач с параметром, полученным в диссертационной работе.

Задачи об асимптотике решений эллиптических задач с параметром являются классическими. Подобные задачи возникают, например, при построении асимптотики при $t \to \infty$ решения задачи Коши для соответствующего гиперболического уравнения, в задачах рассеивания, при построении коротковолновой асимптотики в задачах диффракции и других областях. В работах Бабича В.М., Вайнберга Б.Р., Буслаева В.С., Олимпиева И.В. и др. авторов было показано, что решение эллиптической задачи с параметром является мероморфной функцией параметра в некоторой области с разрезом или на всей плоскости и получен ряд асимптотических представлений резольвенты. В частности, авторы рассматривали аналитические свойства решений задачи для произвольных эллиптических операторов второго порядка с переменными коэффициентами и для некоторых классов операторов высокого порядка. В качестве приложений рассматривались гиперболические задачи. Имеется значительное количество недавних обобщений этих результатов, возникающих при описании распространения электромагнитных волн, в теории упругости и т.д. Отметим, что практически во всех вышеупомянутых работах считалось, что все коэффициенты соответствующих уравнений бесконечно дифференцируемы. Кроме того, в связи с приложениями, основное внимание в работах было уделено случаю, в котором исследуется уравнение $Lu + \lambda u = \delta(x - x_0)$ ($\lambda = k^2$, k - вещественно или лежит в некотором секторе, содержащем вещественную ось, L – эллиптический оператор, например, $Lu = \Delta u$) и практически все работы об асимптотическом представлении рассматривают случай, когда комплексный параметр лежит не в том секторе, который нам необходим. В наших результатах в отличие от вышеприведенных построены асимптотические представления решений в областях вида $k = i\lambda$,

$|\arg\lambda| \leq \pi - \delta_0$, $\delta_0 > 0$, которые возникают при построении решений параболических уравнений и систем после применения преобразования Лапласа. Предполагается, что коэффициенты исследуемого уравнения имеют некоторою естественную фиксированную гладкость. Кроме того, наши результаты имеют немного другой характер, вместо асимптотических рядов, сходимость которых полностью не исследуется, рассматривается некоторые асимптотические представления главного члена разложения решения с оценкой остатка.

Обратные задачи возникают при исследовании многих прикладных задач и имеют постоянно расширяющиеся области приложения, среди которых можно выделить задачи сейсморазведки (например, определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых), определения свойств материалов (механических, теплофизических), идентификации полимерных и композитных материалов, задачи рентгеновской и акустической томографии и ряд других задач. В настоящее время существует множество различных постановок обратных задач и некоторые классы обратных задач хорошо изучены, имеются теоремы единственности, разрешимости или, по крайней мере, оценки устойчивости. Выделим основные направления исследований. Среди работ, посвящённых параболическим уравнениям и системам можно выделить классические работы Лаврентьева М.М., Прилепко А.И., Орловского Д.Г., Денисова А.М., Камынина В.Л., Исакова В., Кабанихина С.И., M. Yamomoto, Кожанова А.И., Lorenzi A., Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. Романов В.Г., Яхно В., Белишева М.И., Клибанова М.И., Uhlman G., Пестова Л.Н. и многих других авторов. Имеется большое количество работ, посвященных различным обобщениям, в том числе обратным задачам для абстрактных эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Можно сослаться на работы Орловского Д.Г., Фавини А., Горбачук М.Л., Бухгейма А.Л., Федорова В.Е. и других. Основные классы исследуемых задач отличаются по виду условий переопределения: интегральные условия с данными зависящими от времени и (или) пространственных переменных, условие финального переопределения (в этом случае решение задаётся в финальный момент времени), оператор Дирихле-Неймана или Неймана-Дирихле, эволюционные данные переопределения (в этом случае данные зависят от времени, как правило решение или его производные задаются на некоторых пространственных многообразиях или в отдельных точках). Как раз к этому классу задач относятся рассматриваемые в диссертации задачи. Среди работ, посвященных численному решению обратных задач, в том числе в постановках близким к рассматриваемым, выделим прежде всего работы Кабанихина С.И., Вабишевича П.Н., Пененко В.В., Пененко А.В., Алифанова О.М.

Рассматриваемые в работе задачи возникают в задачах тепломассопереноса, диффузии, фильтрации, экологии и во многих других областях. В теории тепломассопереноса решение параболического уравнения u - концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует объемную плотность источников (стоков) и их расположение. В самой общей постановке задачи определению подлежат как сами мощности точечных источников $N_i(t)$, так и их местоположение x_i и их число m. Описание моделей такого сорта можно найти, например, в известной монографии Марчука Г.И. (Mathematical Models in Environmental Problems. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986). Отметим, что обратные задачи об определении источников делается на два класса. Типичной является ситуация, когда правая часть есть достаточно гладкая функция. В этом случае, случае распределённых источников, легко описать условия, когда задача является корректной и само решение u достаточно регулярно (в пространствах Соболева или Гельдера). Имеются результаты, полученные как для некоторых модельных уравнений, так и в достаточно общей ситуации. Можно сослаться на результаты Прилепко А.И., Пяткова С.Г., Cannon J.R., Engl H.W., Scherzer O., Yamamoto M., Иванчова М.И. и др.

В случае точечных источников, рассматриваемых в работе, практически нет результатов посвященных каким-либо теоремам существования и единственности решений. Тем не менее, в связи с большим количеством приложений, таким обратных задачам посвящено огромное количество работ. Однако, основные результаты связаны с методами численного решения подобных задач, причем многие из них далеко не всегда обоснованы. Очень часто численные методы основаны на сведении обратной задачи к некоторой задаче оптимального управления и в конечном счёте решение строится при помощи регуляризации и минимизации некоторого функционала. Отметим, однако, что функционал в случае, если определяются не только мощности источников, а еще и их местоположение, не является выпуклым, и фактически не очень понятно даёт ли его минимизация решение искомой задачи. Это относится, например, и к простейшей модельной задаче об определении точечного источника, например, источника загрязнения в водоеме или атмосфере. Можно строить примеры, когда постановки оказываются некорректными в том смысле, что имеет место несуществование решений или их неединственность. Ряд из них построен в настоящей диссертации. Отметим также, что решение соответствующей задачи управления и минимизации соответствующего функционала, как правило, требует больших вычислительных возможностей. Поэтому теоретическое исследование задачи и построение на основе новых теоретических результатов надежных численных методов имеет большое значение.

Некоторые теоретические результаты по исследованию модельных задач, рассмотренных в диссертации, имеются в работах Badia A.El., Ha-Duong T., Hamdi A., Ling L. и Takeuchi T. Была получена теорема единственности решений в одномерном случае, когда определяется один источник, построен ряд интересных алгоритмов построения решения как в одномерном так и многомерном случае, однако рассматриваются модельные параболические операторы и области. Как оказалось, можно решить задачу и при помощи асимптотических представлений решений стационарных задач, приведенных выше и в случае более широких классов параболических уравнений. В целом, стоит отметить, что на данный момент имеется практически нет работ, посвящённых вопросам корректности рассматриваемых обратных задач, основные полученные ранее результаты связаны с некоторыми модельными ситуациями и, в основном, в одномерном случае, с численными методами решения подобных задач и с оценками устойчивости. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решений в задачах об определении точечных источников с условиями переопределения точечного типа на основе асимптотических представлений функции Грина эллиптических задач с параметром.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Построение асимптотических представлений функции Грина эллиптических задач с параметром. Исследование свойств функции Грина в смысле принадлежности определенным функциональным классам.
2. Доказательство теорем существования и единственности решений различных классов обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения. Получение оценок устойчивости.
3. Исследование вопросов единственности решений в модельных ситуациях. Построение примеров неединственности. Описание свойств решений и методов их построения в задачах об определении точечных источников по точечным условиям переопределения.

Научная новизна:

1. При достаточно слабых условиях гладкости на коэффициенты уравнения построены асимптотические представления функций Грина эллиптических задач с комплексным параметром.

2. Исследованы обратные задачи идентификации объёмной плотности источников примесей по точечным замерам. Получены условия единственности решений и условия на данные гарантирующие существование решений в классах Соболева. Результаты диссертации позволяют строить новые численные алгоритмы определения источников.
3. Получены новые условия единственности и неединственности решений обратных задач в общем случае. Построены примеры неединственности и описаны алгоритмы, позволяющие строить решение обратных задач.

Теоретическая и практическая значимость диссертации определяется тем, что теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для параболических уравнений и математических моделей тепломассопереноса, указывают новые подходы в их решении и могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей, описываемых параболическими уравнениями и системами, в частности моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, моделей, описывающих процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряда других. Результаты также могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

Методология и методы исследования. При исследовании обратных параболических задач в основном использовались методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, использовались классические результаты о разрешимости параболических задач (L_p-теория), теория интегральных уравнений, методы основанные на преобразовании Лапласа, методы теории функций комплексного переменного, интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

Основные положения, выносимые на защиту:
1. Построены асимптотические представления функции Грина эллиптических задач с параметром и исследованы ее свойства.
2. Получены теоремы существования, единственности и оценки устойчивости решений различных классов обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения.
3. Описаны свойства решений и условий единственности решений обратных задач об определении точечных источников по точечным условиям переопределения.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЮГУ, а также на восьми научных и научно-практических конференциях:

1. Российско-Французский семинар "Дифференциальыне уравнения и математическое моделирование"(Ханты-Мансийск, 2019).
2. 8 Всероссийская научная конференция "Информационные технологии и системы"(Ханты-Мансийск, 2020).
3. Всероссийско научно-практическая конференция с международным участием "Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики" (Якутск, 2020).
4. Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышёва (Обнинск, 2021).
5. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики" (Якутск, 2021).
6. XXII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2021).
7. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск, 2021).
8. II Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ – 22) посвященной 90-летию БГПИ-БГУ (г. Улан-Удэ, 2022).

Личный вклад. Все основные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации, получены автором самостоятельно, о чем свидетельствуют публикации по материалам исследований. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора, отражающий полученные в диссертационной работе результаты, составляет более 75 процентов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ. Из них 3 в периодических изданиях, рекомендованных ВАК РФ [1–3], 3 работы в изданиях, входящих в международные системы цитирования Scopus и WoS) [4–6] и пять — в тезисах докладов [7–11].

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

Первая глава состоит из трех параграфов. В ней рассматривается асимптотика решений эллиптических задач с параметром.

Соответствующее эллиптическое уравнение имеет вид

$$L = L_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \ n = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $L_0 u = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u$ в случае $n = 2, 3$ и $L_0 u = -a(x) u_{xx} + b(x) u_x + c(x) u$ в случае $n = 1$. Краевые условия записываются в виде

$$Bu|_{\Gamma} = 0, \ \Gamma = \partial G, \ n = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u$, ν – единичная внешняя нормаль к Γ и δ — дельта-функции Дирака. Область G совпадает с $\mathbb{R}^n$, полупространством $\mathbb{R}^n_+$, или областью в $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ с компактной границей $\Gamma \in C^2$. Предполагается, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|arg\,\lambda| \leq \pi - \delta_0$, $\delta_0 \in (0, \pi)$.

В первом параграфе главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

Во втором параграфе главы рассматривается асимптотика функции Грина в одномерном случае. Рассматривается уравнение

$$L_0 u - \lambda u = \delta(x - x_0), \quad |\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0, \quad \delta_0 \in (0, \pi), \tag{3}$$

где $L_0 u = a(x) u_{xx} - b(x) u_x - c(x) u)$, $x \in G = (a, b)$, $\lambda_0 \geq 0$ и δ – дельта-функции Дирака. Для простоты будем считать, что либо интервал (a, b) имеет конечную длину, либо $(a, b) = \mathbb{R}$, либо $(a, b) = (0, \infty)$. Оставшиеся случаи сводятся к этим при помощи линейной замены переменных. Уравнение (3) дополняется граничными условиями

$$B_1 u(a) = \varphi_1, \quad B_2 u(b) = \varphi_2, \tag{4}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1 u = u$ или $B_1 u = u_x + \sigma u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2 u = u$ или $B_2 u = u_x + \sigma u$ $(\sigma = const)$. В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0$ или $\lim_{x \to +\infty} u(x, t) = 0$, соответственно. Последние равенства понимаются в смысле принадлежности решения некоторому пространству Лебега (пространству $W_2^1(a,b)$). Условия на коэффициенты оператора L_0 имеют вид

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_1^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_1^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{5}$$

в случае интервала (a,b) конечной длины и

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_\infty^2(a,b), \quad b \in C\big([a,b]\big) \cap W_\infty^1(a,b), \quad c \in L_\infty(a,b) \tag{6}$$

в противном случае.

Положим $r(\xi) = 1/\sqrt{a(\xi)}, r_1(\xi) = \frac{-1}{2}(ar'r - br^2)(\xi)$. Далее знак $\approx$ в выражении $a(\lambda) \approx b(\lambda)$ означает, что выполнено равенство $a(\lambda) = b(\lambda)\big(1+O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)\big)$ при соответствующих параметрах λ.

Основной результат этого параграфа представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Фиксируем $\delta_0 \in (0,\pi)$. Найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для всех комплексных чисел λ таких, что $|\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $v \in W_2^1(a,b)$ задачи (3), (4), где $\varphi_i = 0$, на любом компакте $[c,d] \subset (a,b)$ допускающее представление*

$$v(y_1) = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\sqrt{\lambda}\,\Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Big| + \int_{x_1}^{y_1} r_1(\xi)\,d\xi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \tag{7}$$

Пусть граничное условие в точке a есть условие Неймана, тогда

$$v(a) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\int_a^{x_1} (\sqrt{\lambda} r(\xi) + r_1(\xi))\,d\xi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big), \tag{8}$$

Пусть граничное условие в точке b есть условие Неймана, тогда

$$v(b) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda a(x_1)}} \exp\Big(-\int_{x_1}^{b} (\sqrt{\lambda} r(\xi) - r_1(\xi))\,d\xi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big). \tag{9}$$

Третий параграф главы посвящён вопросу об асимптотическом представлении решений эллиптических задач с комплексным параметром, входящим в уравнение для некоторого естественного класса областей в двухмерном и трехмерном случаях. Выписан первый член асимптотики. Результаты применяются при исследовании некоторых задач об определении точечных источников в задачах тепломассопереноса. Рассматривается уравнение

$$L = L_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,\ n = 2,3, \tag{10}$$

где $L_0 u = -\Delta u + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u$. Краевые условия записываются в виде

$$Bu|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial G,\ n = 2,3, \tag{11}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u$, ν – внешняя единичная нормаль к Γ и δ — дельта-функция Дирака.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$ при $n = 2$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ при $n = 3$. Скобками $(\cdot, \cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Введем функцию

$$\psi = \frac{1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau.$$

Относительно коэффициентов уравнения (10) и граничного оператора (которые считаются вещественными) мы предположим, что

$$a_i \in W^2_\infty(G)\ (i = 1, \ldots, n),\ \nabla\psi, \Delta\psi, a_0 \in L_\infty(G),\ \sigma \in C^1(\Gamma) \tag{12}$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}^n_+$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W^2_\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 2. *Пусть $G = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ и условия (12) выполнены. Фиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение $u_n(x)$ $(n = 2, 3)$ задачи (10), (11) такое, что $e^{-\psi}u_n \in W^1_p(G) \cap W^2_q(G_\varepsilon)$ при всех $p \in (1, n/(n-1))$, $q < \infty$ и $\varepsilon > 0$ $(G_\varepsilon = \{x \in G :\ |x - x_0| > \varepsilon\})$ и решение допускает в любой области вида $0 < \varepsilon \leq |x - x_0| \leq R < \infty$ представление*

$$u_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{13}$$

$$u_{2x_i}(x) = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O\big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\big)\Big); \tag{14}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)\Big); \tag{15}$$

$$u_{3x_i}(x) = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{4\pi|x - x_0|}\Big(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O\big(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\big)\Big). \tag{16}$$

Теорема 3. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия (12) выполнены. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такой что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение u_n задачи (10), (11), где $Bu = u$, из класса описанного в теореме 2, и справедливы представления (13), (15) в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in K : |x - x_0| \geq \varepsilon > 0\}$ (K – компакт, такой что $K \subset G$ и для любого $x \in K$ отрезок прямой, соединяющей $x \in K$ и x_0 находится на положительном расстоянии от границы Γ).*

Теорема 4. *Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ и условия (12) выполнены. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение u_n задачи (10),(11), где $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$, из класса описанного в теореме 2 и справедливы представления (13), (15) в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in G : 0 < \varepsilon \leq |x - x_0| \leq \rho(x_0, \Gamma) - \varepsilon\}$.*

В следующих двух теоремах рассматривается случай $G = \mathbb{R}^n_+$. Мы предполагаем, что найдется постоянная $M_0 \geq 0$ такая, что

$$|\tilde{\sigma}(x')| \leq M_0(1 + |x'|)^{-1} \ \ \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{17}$$

Теорема 5. *Пусть $G = \mathbb{R}^n_+$, $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и условия (12) выполнены. Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \pi)$. Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех λ с $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ существует единственное решение u_n задачи (10), (11), где $Bu = u$ или $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n}$, из класса описанного в теореме 2, и справедливы представления (13), (15) на каждом компакте $K \subset G$ не содержащем x_0.*

Теорема 6. *Пусть $G = \mathbb{R}^n_+$, $\delta_0 \in (0, \pi)$ и условия (12), (17) выполнены (последнее условие должно быть выполнено в случае условий третьей краевой задачи). Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение u_n задачи (10),(11) (в этом случае $Bu = u$ или $Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sigma(x')u$), принадлежащее классу описанному в теореме 2, и справедливы представления (13), (15) в любой области вида $K_\varepsilon = \{x \in K : 0 < \varepsilon \leq |x - x_0|\}$, где $K \subset G$ компакт.*

Пусть G – область с компактной границей $\Gamma \in C^2$ или $G = \mathbb{R}^n_+$. Положим $K_{x_0,\delta_0} = \{x \in G : \ -|x - x_0| + \rho(x, \Gamma) \geq \delta_0\}$, где $\delta_0 > 0$ - некоторая фиксированная постоянная. Фиксируем также постоянную $\delta_1 \in (0, \pi)$ и пусть, как и ранее,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau.$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (12) и $\delta_1 \in (0, \pi)$. Тогда найдутся $\lambda_0 \geq 0$, $\delta_2 > 0$ такие, что при $|arg\,(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_1$ существует единственное решение u_n задачи (10), (11) такое, что $u_n \in W^1_p(G)$ для всех $p \in (1, n/(n-1))$, $u_n \in W^2_2(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ и для $x \in \{x \in K_{x_0,\delta_0} : |x - x_0| \geq \varepsilon_0, |x| \leq R\}$, где $R, \varepsilon_0 > 0$ постоянные, имеет место представление*

$$u_2(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 2); \tag{18}$$

$$u_3(x, \lambda) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi_0(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})\ (n = 3). \tag{19}$$

Вторая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматривается обратные задачи об определении точечных источников по точечным данным переопределения. Основные результаты работы связаны вопросом об определении вместе с решением правой части специального вида в уравнении

$$u_t + L_0 u = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i) + f_0(t, x) = F(t, x), \tag{20}$$

где $L_0 u = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u$ в случае $n = 2, 3$ и $L_0 u = -a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$ в случае $n = 1$, $(x, t) \in Q = (0, T) \times G$, область G при $n = 2, 3$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, полупространством $\mathbb{R}^n_+$, или областью в $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) с компактной границей $\Gamma \in C^2$. В случае $n = 1$ $G = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$). Уравнение (20) дополняется краевыми и начальными условиями

$$Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = (0, T) \times \Gamma, \tag{21}$$

где либо $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$, либо $Bu = u$ (ν единичная внешняя нормаль к Γ). Заданы также условия переопределения

$$u(y_j, t) = \psi_j(t), \; j = 1, 2, \ldots, s. \tag{22}$$

В первом параграфе главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых при доказательстве основных результатов данной главы.

Во втором параграфе рассматривается задача об определении вместе с решением правой части специального вида в параболическом уравнении

$$Lu = u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x, t), \quad (x, t) \in G \times (0, T), \tag{23}$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функция $u(x, t)$ — концентрация загрязняющего вещества в водоеме или воздухе, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in G$ — точечные источники и r — число этих источников. Мы считаем, что $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $T \leq \infty$. Чтобы определить неизвестные источники, уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями:

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{24}$$

$$B_1 u(t, a) = \varphi_1(t), \quad B_2 u(t, b) = \varphi_2(t), \tag{25}$$

где если $a \neq -\infty$, то $B_1 u = u$ или $B_1 u = u_x + \sigma u$, соответственно, если $b \neq +\infty$, то $B_2 u = u$ или $B_2 u = u_x + \sigma u$ ($\sigma = const$). В случае $a = -\infty$ или $b = +\infty$ краевые условия заменяются на условия $\lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0$ или

$\lim_{x\to+\infty} u(x,t)=0$, соответственно. В качестве условий переопределения мы берем условия вида

$$u(t,y_j)=\psi_j(t),\quad j=1,2,\ldots,s. \tag{26}$$

Предположим, что

$$a\in C^1\big([a,b]\big)\cap W_1^2(a,b),\quad b\in C\big([a,b]\big)\cap W_1^1(a,b),\quad c\in L_\infty(a,b) \tag{27}$$

в случае интервала (a,b) конечной длины и

$$a\in C^1\big([a,b]\big)\cap W_\infty^2(a,b),\quad b\in C\big([a,b]\big)\cap W_\infty^1(a,b),\quad c\in L_\infty(a,b) \tag{28}$$

в противном случае. Естественным образом также считаем, что найдутся постоянные $M_1,M_2>0$ такие, что $M_1\le a(\xi)\le M_2$ для всех ξ. Далее, для простоты считаем, что либо интервал (a,b) имеет конечную длину, либо $(a,b)=\mathbb{R}$, либо $(a,b)=(0,\infty)$. Оставшиеся случаи сводятся к этим при помощи линейной замены переменных. В качестве условий на данные берутся следующие условия:

(C) $\varphi_i\in W_2^{3/4}(0,T)$ или $\varphi_i\in W_2^{1/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле или условие третьей краевой задачи; $u_0{\in}W_2^1(a,b)$, $f\in L_2(Q)$.

Условия согласования представимы в виде:

(D) если условие в точке $x=a$ $(x=b)$ является условием Дирихле, то $\varphi_1(0)=u_0(t,a)$ $\big($соответственно $\varphi_2(0)=u_0(t,b)\big)$.

Построим вспомогательную функцию Φ как решение задачи (23)-(25), где $N_i\equiv 0$ при $i=1,2,\ldots,r$. В некоторой степени функция Φ характеризует вклад от известных распределенных источников загрязнения. Сделав замену $\omega=u-\Phi$, мы сведем задачу (23)-(26), к задаче

$$\begin{gathered}\omega_t-L_0\omega=\sum_{i=1}^r N_i(t)\delta(x-x_i),\quad (x,t)\in Q,\ B_1\omega(t,a)=0,\ B_2\omega(t,b)=0,\\ \omega(0,x)=0,\ \omega(t,y_j)=\tilde\psi_j(t)=\psi_j-\Phi(y_j,t),\ j=1,2,\ldots,s.\end{gathered} \tag{29}$$

Рассмотрим функцию $V_\delta(t)$ $(\delta>0)$ такую, что

$$L(V_\delta)(\lambda)=e^{-\sqrt{\lambda}\delta}/\sqrt{\lambda},\quad \lambda^\alpha=|\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda},\ -\pi<\arg\lambda<\pi,\ \lambda=\sigma+i\gamma.$$

Определим класс функций

$$H_\delta=\big\{\psi(t)=\int_0^t\psi_0(\tau)V_\delta(t-\tau)\,d\tau:\ \psi_0\in L_2(0,T)\big\}.$$

Следующая теорема – теорема о разрешимости задачи (23)-(26), где $r=1$ и $s=1$ и определению подлежат решение u и интенсивность N_1.

Теорема 8. *Пусть $r = 1$ и $s = 1$, $\tilde{\psi}_1 \in H_{\delta_0}$ с $\delta_0 = \left|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\right|$, выполнены условия* (27), (28), (C) *и* (D) *и* $T < \infty$. *Тогда существует единственное решение (u, N_1) задачи* (23)-(26) *такое, что $u \in L_2\big(0,T; W_2^1(a,b)\big)$, $(u-\Phi)_t \in L_2\big(0,T;\tilde{W}_2^{-1}(a,b)\big)$, $u \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$. Пусть $T = \infty$, $r = 1$, $s = 1$, выполнены условия* (27), (28) *и* (D). *Тогда найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_1$, $fe^{-\lambda t} \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(a,b)$, $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{3/4}(0,T)$, если данное i-е условие представляет собой условие Дирихле и $e^{-\lambda t}\varphi_i \in W_2^{1/4}(0,T)$ $(i = 1,2)$ в противном случае и справедливо представление*

$$\tilde{\psi}_1 = \int_0^t \psi_0(\tau) V_{\delta_0}(t-\tau)\,d\tau \quad \text{с} \quad \delta_0 = \Big|\int_{x_1}^{y_1} r(\xi)\,d\xi\Big|,\ \ \psi_0(\tau)e^{-\lambda\tau} \in L_2(0,\infty),$$

то существует единственное решение (u, N_1) задачи (23)-(26), *где $r = 1$ и $s = 1$ такие, что $ue^{-\lambda t} \in L_2\big(0,T; W_2^1(a,b)\big)$, $(u-\Phi)_t e^{-\lambda t} \in L_2\big(0,T;\tilde{W}_2^{-1}(a,b)\big)$, $ue^{-\lambda t} \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.*

Здесь под $\tilde{W}_2^{-1}(a,b)$ понимаем двойственное пространство к подпространству $\tilde{W}_2^1(a,b)$ пространства $W_2^1(a,b)$, состоящего из функций удовлетворяющих тем граничным условиям в (29), которые имеют смысл.

Пусть $r = 1$. Перейдем к задаче одновременного определения точки x_1 и функции $N_1(t)$. Нам понадобятся уже две точки y_1 и y_2, т. е. $s = 2$ в (26), такие, что $a \leq y_1 < x_1 < y_2 \leq b$. Таким образом, мы рассматриваем задачу (23)-(26), с $r = 1$ и $s = 2$, причем как функция $N_1(t)$, так и точка x_1 считаются неизвестными. Как и выше, построим функцию Φ и сведем задачу к задаче (29).

Теорема 9. *Пусть выполнены выполнены условия* (27), (28), (C), (D) *в случае $T < \infty$ и условия* (27), (28) *и* (D) *в случае $T = \infty$. Пусть (u^i, N^i) — решения уравнения*

$$u_t^i - L_0 u^i = N^i(t)\delta(x - x_i) + f, \quad (x,t) \in Q = (a,b)\times(0,T),$$

удовлетворяющие краевым условиям (24), (25) *и условиям переопределения* (26) *с $s = 2$ из класса, указанного в теореме 8, причем $x_i \in (y_1, y_2)$ $(i = 1,2)$. Тогда $x_1 = x_2$ и $N^1 = N^2$, если $N^1 \not\equiv 0$ или $N^2 \not\equiv 0$.*

Рассмотрим случай $r = 1, s = 2$ и задачу определения решения обратной задачи - величин (u, N_1, x_1). Построив функцию Φ как это сделано выше, мы придем к задаче (29). Как мы уже отмечали, возможен случай $y_1 = a$ (в случае $a \neq -\infty$), соответственно, случай $y_2 = b$ (в случае $b \neq +\infty$). Тогда в первом случае мы берем $B_1 u|_{x=a} = u_x(a,t)$, а во втором $B_2 u|_{x=b} = u_x(b,t)$. В следующей теореме мы приведем асимптотические формулы для нахождения точки x_1.

Пусть $\Phi_i(\lambda) = L(\tilde{\psi}_i)$, где L – преобразование Лапласа, $i = 1,2$.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9 на данные и пусть* (u, N_1, x_1) *— решения задачи* (23)-(26), *где* $T = \infty$, *из класса указанного в теореме 8, причем* $N_1 \not\equiv 0$ *и* $y_1 < x_1 < y_2$. *Тогда найдется* $\lambda_2 > 0$ *такое, что на* $[\lambda_2, \infty)$ *множества нулей функций* $\Phi_1(\lambda)$ *и* $\Phi_2(\lambda)$ *совпадают и не имеют конечной предельной точки, существует конечный предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} = A,$$

и справедливы равенства: если $y_1 = a$ *и* $y_2 < b$, *то*

$$\int_a^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_a^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{2\Phi_2(\lambda)} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_a^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big); \quad (30)$$

если $y_1 > a$ *и* $y_2 = b$, *то*

$$\int_{x_1}^{b} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{b} r(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{b} r_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{2\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big); \quad (31)$$

в оставшихся случаях

$$\int_{y_1}^{x_1} r(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} r(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{y_1}^{y_2} r_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big). \quad (32)$$

Аналог теоремы 10 в случае конечного промежутка $[0, T]$ также имеет место, но величина $O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$ заменяется на $o\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)$.

В третьем параграфе рассматривается теорема существования и единственности при n=2,3. Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), \quad u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0) \text{ если } Bu = u. \quad (33)$$

Введем функции

$$\varphi_j(x) = \frac{-1}{2}\int_0^1 (\vec{a}(y_j + \tau(x - y_j)), (x - y_j))\,d\tau$$

и предположим что

$$a_i \in W_\infty^2(G)\ (i = 1, \dots, n),\ \nabla\varphi_j, \Delta\varphi_j\ (j = 1, \dots, s), a_0 \in L_\infty(G),\ \sigma \in C^1(\Gamma), \quad (34)$$

причем в случае, $G = \mathbb{R}^n_+$ дополнительно потребуем, чтобы $\sigma(x') = \sigma_{0x_n}|_{x_n=0}$ для некоторой функции $\sigma_0 \in W_\infty^2(\mathbb{R}^n_+)$.

В случае $T = \infty$, мы предполагаем, что

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{1/4,1/2}(S), \text{ если } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\ (\sigma \in C^1(\Gamma)), \quad (35)$$

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \quad f_0 e^{-\lambda t} \in L_2(G), \quad (36)$$

для некоторого достаточно большого λ. В случае конечного T мы требуем, чтобы

$$g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \quad f_0 \in L_2(G), \tag{37}$$

$$g(x,t) \in W_2^{1/4,1/2}(S), \quad \sigma \in C^1(\Gamma). \tag{38}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t + Lu = f_0(t,x), \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{39}$$

Если $T = \infty$ и выполнены условия (33), (34), то найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для любых $\lambda \geq \lambda_0$, если выполнено (35), (36), то существует единственное решение w_0 задачи (39) такое, что $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. Если $T < \infty$, требуем чтобы было выполнены условия (33), (34), (37), (38). В этом случае решение w_0 существует и принадлежит классу $W_2^{1,2}(Q)$. Сделав замену $v = u - w_0$ мы сведем задачу (20)-(22) к задаче

$$v_t + Lv = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \quad Lu = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a_0(x) u, \tag{40}$$

$$Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad S = (0,T) \times \Gamma, \tag{41}$$

$$v(t, y_j) = \tilde{\psi}_i = \psi_j(t) - w_0(t, y_j), \ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{42}$$

Пусть $\delta_j = min_i r_{ij}, j = 1, 2, \ldots, s$, где $r_{ij} = |x_i - y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji} = e^{\varphi_j(x_i)}$ если $|x_i - y_j| = \delta_j$ и $a_{ji} = 0$ в противном случае. Условие корректности записывается в виде

$$det A_0 \neq 0. \tag{43}$$

Фиксируем $p \in (1, n/(n-1))$. Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_j(t) = \int_0^t V_{\delta_j}(t - \tau)\psi_{0j}(\tau) d\tau, \ \psi_{0j} e^{-\lambda t} \in L_2(0,T), \tag{44}$$

где $V_\gamma(t)$ определяется своим преобразованием Лапласа

$$\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}, n = 3; \hat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}\gamma), n = 2.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ это функция Ханкеля и $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2} e^{iarg\ \lambda/2}$ – ветвь корня аналитическая в плоскости с разрезом $arg\ \lambda = \pi$. Не так трудно установить, что $V_\gamma(t) = \frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$ при $n = 2$ и, при $n = 3$, $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}}$.

Пусть $W_{q,B}^1(G)$ подпространство $W_q^1(G)$, состоящее из функций $u \in W_q^1(G)$ удовлетворяющих однородному условию Дирихле на $\Gamma = \partial G$ в случае, если $Bu = u$ и $W_{q,B}^1(G) = W_q^1(G)$ в противном случае. Под пространством $W_{p,B}^{-1}(G)$ понимаем сопряженное пространство к $W_{q,B}^1(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Введем множество $K = \{y \in G : \ \rho(y, \cup_{i=1}^m x_i) \leq \rho(y, \Gamma)\}$.

Теорема 11. *Пусть $T = \infty$, $m = s$, выполнены условия* (33), (34) *и* $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, s$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *и выполнении условий* (35), (36), (44) *существует единственное решение задачи* (20)-(22) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 *есть решение вспомогательной задачи* (39), $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $e^{-\lambda t} \vec{N} \in L_2(0, \infty)$, $e^{-\lambda t} w \in L_2(0, \infty; W^1_{p,B}(G))$, $e^{-\lambda t} w_t \in L_2(0, \infty; W^{-1}_{p,B}(G))$, $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Аналог этой теоремы в случае $T < \infty$ имеет вид

Теорема 12. *Пусть $T < \infty$, $m = s$, выполнены условия* (33), (34), (37), (38), (44) *с* $\lambda = 0$ *и* $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, s$. *Тогда существует единственное решение задачи* (20)-(22) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 *есть решение вспомогательной задачи* (39), $w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $\vec{N} \in L_2(0, \infty)$, $w \in L_2(0, \infty; W^1_{p,B}(G))$, $w_t \in L_2(0, \infty; W^{-1}_{p,B}(G))$, $w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Далее в параграфе приведятся несколько теорем единственности решений задачи (20)-(22) в различных постановках. Во-первых, приводится теорема единственности для решений задачи (20)-(22) об определении мощностей источников, считая что число m и точки $\{x_i\}$ заданы. Далее, рассмотривается единственность определения решений в общей постановке но для модельной задачи в случае $G = \mathbb{R}^n$ и при дополнительном предположении, что мощности N_i не зависят от времени.

Примеры, показывающие точность полученных результатов, некоторые свойства решений и алгоритмы их нахождения будут приведены **в четвертом параграфе**.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Пяткову С.Г. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор также благодарит преподавателей инженерной школы цифровых технологий ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» за полезные советы и помощь в работе.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы: FENG-2023-0004).

Публикации автора по теме диссертации

1. Пятков С.Г. Неустроева Л.В. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников // Математические заметки СВФУ. 2020. Т. 27. С. 21–40.
2. Neustroeva L. On uniqueness in the problems of determining point sources in mathematical models of heat and mass transfer // Bulletin of the South Ural state university. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. 2022. Vol. 14. P. 31–43.
3. Пятков С.Г. Неустроева Л.В. О разрешимости обратных задач об определении точечных источников // Математические заметки СВФУ. 2022. Т. 22.
4. Neustroeva L., Pyatkov S. On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. Vol. 66, n.6-7. P. 964–987.
5. Neustroeva L., Pyatkov S. On recovering a point source in some heat and mass transfer problems // AIP CONFERENCE PROCEEDINGS. 2328, 020006. https://doi.org/10.1063/5.0042357. 2021.
6. Neustroeva L., Pyatkov S. On solvability of some inverse problems of recovering point sources // AIP CONFERENCE PROCEEDINGS. 2022 2528, 020005. https://doi.org/10.1063/5.0106699. 2023.
7. Неустроева Л.В. Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса // Сборник тезисов российско-французского семинара «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019. С. 43.
8. Неустроева Л.В. О некоторых асимптотических представлениях и их приложениях // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, д. т. н., профессора Э. А. Бондарева, 2021. С. 246-247.
9. Неустроева Л.В. Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса // Тезисы XXII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 2021. С. 24-25.
10. Неустроева Л.В. Обратные параболических задачи об определении точечных источников // Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естество знания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского

математика, академика П. Л. Чебышёва, Обнинск, 2021. С. 315-317.

11. Неустроева Л.В. Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса // II Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» посвященной 90-летию БГПИ-БГУ, г. Улан-Удэ, 2022. С. 67-68.

Неустроева Любовь Владимировна
Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса
Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук
Подписано в печать 18.08.2023. Заказ № 279
Формат 60×84/16. Объем 1,3 п.л. Тираж 75 экз.
Экспресс типография
640018, г. Курган, ул. Советская, д. 128, офис 505
Тел.: 8(3522)46-11-14. E-mail: er-express@mail.ru