На правах рукописи

Белоногов Владимир Андреевич

Прямые и обратные задачи тепломассопереноса в слоистых средах

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ханты-Мансийск — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Югорский государственный университет»

Научный руководитель:

Пятков Сергей Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», профессор инженерной школы цифровых технологий

Официальные оппоненты:

Имомназаров Холматжон Худайназарович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией вычислительных задач геофизики

Лазарев Нюргун Петрович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова», главный научный сотрудник

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Защита состоится 31 октября 2023 г. в 15:00 часов на заседании Диссертационного совета 24.1.055.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, факс: (383)333-16-12, e-mail: igil@hydro.nsc.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте http://www.hydro.nsc.ru Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 28.07.2023 года.

Учёный секретарь
Диссертационного совета
24.1.055.01, д.ф.-м.н. Прок Прокудин Дмитрий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта и вопросам корректности обратных задач по определению коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения.

Основное внимание уделено системам уравнений тепломассопереноса (конвекции-диффузии), т.е. параболическим системам второго порядка, возникающим при описании процессов диффузии, фильтрации, тепло- и массопереноса и в самых разных других областях.

Первые результаты об обобщенной разрешимости и простейшие результаты о дифференциальных свойствах решений задач дифракции для параболических и эллиптических уравнений второго порядка были получены Ладыженской О.А. и Олейник О.А. в 50-60 годы. Также эти вопросы изучались в работах Шефтель З.Г., Schechter M.A., Житарашу Н.В. и ряда других авторов.

Отметим, что задачи сопряжения с условиями типа дифракции возникают во многих приложениях, прежде всего в теории упругости - например, задачи, связанные с контактным взаимодействием упругих тел.

Задачи, рассматриваемые в работе, не являются задачами дифракции в смысле классического определения. Работ, посвященных теоретическим результатам для таких задач, немного. Сошлемся прежде всего на работы Simon L., Номировского Д.А., Jovanovi B. В них получены теоремы существования и единственности обобщенных решений в том числе и в квазилинейном случае. В отличии от них мы исследуем вопрос о регулярной разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта в классах Соболева.

В эллиптическом случае вопрос о регулярной разрешимости в случае p=2 некоторых модельных задач, входящих в наш класс, был исследован в работах Шадриной Н.Н. Имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта, можно отметить работы Акимова И.А, Поповой Т.С., Манаповой А.Р., Лубышева Ф.В., Калмановича В.В. и др. авторов.

Среди последних работ по обратным задачам можно выделить работы Кабанихина С.И., Kirsch A., Klibanov M.V., Beilina L., Прилепко А.И., Вабишевича П.Н., Романова В.Г., Алифанова О.М., Пестова Л.М., Кожанова А.И., Abreu L. A. S., Mohebbi F. и других, ряд из них посвящен численным решениям обратных задач. Стоит отметить, что очень часто численные методы основаны на сведении обратной задачи к некоторой задаче оптимального управления, и в конечном счёте решение строится при помощи регуляризации и минимизации некоторого функционала. Однако функционал в нелинейном случае не всегда является выпуклым, и фактически не очень понятно, даёт ли его минимизация решение искомой задачи. Поэтому теоретическое исследование задачи и построение на этой основе новых численных методов имеет большое значение.

Обратные задачи в многослойных средах возникают во многих прикладных задачах, среди которых можно выделить задачи сейсморазведки (например, определение расположения и мощности залежей полезных ископаемых), определения свойств материалов (механических, теплофизических), идентификации полимерных и композитных материалов, задачи рентгеновской и акустической томографии и ряд других. В настоящее время существует множество различных постановок обратных задач и для некоторых классов обратных задач уже имеются теоремы единственности, разрешимости или, по крайней мере, оценки устойчивости, т.е. они исследованы достаточно полно. В связи с большим количеством практических приложений имеется большое количество работ, посвященных численному решению такого типа задач в различных постановках.

Исследуемые в работе задачи возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов аэрокосмических аппаратов, задачи акустики, исследование композитных материалов, задачи экологии (например, задачи описания температурных режимов почв северных территорий) и т.п.

Однако насколько нам известно, теоретических результатов о разрешимости (или единственности решений) обратных задач об определении коэффициента теплообмена (термического сопротивления) в многослойных средах в литературе не имеется. Отметим, что практически нет и аналогичных результатов в случае задач конвективного теплообмена определения коэффициента теплообмена, входящего в граничное условие, а не в условие сопряжения за исключением некоторых модельных случаев (можно сослаться на работы Костина А.Б. и Прилепко А.И.).

В данной работе мы изучаем вопросы корректности рассматриваемых обратных задач, в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений. Вместе со стандартной постановкой мы рассматриваем также и случай цилиндрической пространственной области, часто возникающий в приложениях. (см. работы Drenchev L.B., Ozisik M.N., Zhuo L., Lesnik D., Акимов И.А. и др., посвященные численному решению задачи).

В целом можно сказать, что полученные ранее теоретические результаты связаны с некоторыми модельными ситуациями и, в основном, в одномерном случае, а также с численными методами решения подобных задач. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Целью диссертационной работы является исследование вопросов регулярной разрешимости и единственности решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических и эллиптических уравнений и систем и вопросов корректности обратных задач определения коэффициента теплопередачи для математических моделей тепломассопереноса в многослойных средах с точечными данными переопределения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических систем уравнений.
2. Исследовать вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для эллиптических уравнений второго порядка.
3. Исследовать вопросы существования и единственности решений обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений.

Научная новизна:

1. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для параболических систем уравнений в классах Соболева.
2. Исследованы вопросы регулярной разрешимости (теоремы существования и единственности и оценки устойчивости решений) задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для эллиптического уравнения второго порядка в классах Соболева.
3. Доказана корректность в классах конечной гладкости обратной задачи определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости.
4. Доказана корректность в пространствах Соболева стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела

сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта, получены теоремы существования и единственности решений задачи.

Теоретическая и практическая значимость работы определяется тем, что теоретические результаты работы развивают теорию задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических и эллиптических уравнений и систем, а также теорию обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений и систем, указываются новые подходы к их решению, результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении обратных задач для математических моделей, описываемых параболическими и эллиптическими уравнениями и системами, в частности моделей экологии, фильтрации, динамики популяции, фазовых полей, моделей, описывающих процессы механической дисперсии и молекулярной диффузии и ряда других. Предложенные подходы конструктивны и могут быть использованы при построении новых численных алгоритмов решения обратных задач тепломассопереноса.

Методология и методы исследования. При исследовании обратных параболических задач в основном использовались методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, использовались классические результаты о разрешимости параболических задач (L_p-теория), методы повышения гладкости решений при повышении гладкости данных, основанные на методе конечных разностей, методы доказательства разрешимости параболических задач, основанные на использовании и получении априорных оценок шаудеровского типа, интерполяционные свойства Соболевских пространств и, в частности, интерполяционные неравенства различного типа.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для параболических систем уравнений.
2. Исследованы вопросы существования и единственности регулярных решений задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта для эллиптических уравнений второго порядка.
3. Исследованы вопросы существования и единственности решений обратных задач об определении коэффициентов теплопередачи на границе разделов сред по точечным данным переопределения для параболических и эллиптических уравнений.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех приведенных утверждений, подтверждается исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и получили одобрение на 10 российских и международных научных конференциях в виде устных докладов:

1. Российско-французский семинар «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Ханты-Мансийск, 25–29 августа 2019 года).
2. 8-ая международная научная конференция «Информационные технологии и системы» (Ханты-Мансийск, 17-21 марта 2020 года).
3. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики» (Якутск, 12–17 июля 2021 года).
4. Евразийская конференция по прикладной математике (Новосибирск, 16-21 декабря 2021 года).
5. Всероссийский научный семинар «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 5 - 10 июля 2022 года).
6. XXIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 24–28 октября 2022 года).
7. Научная конференция «Современные проблемы обратных задач» (Новосибирск, 19 - 23 декабря 2022 года).
8. Всероссийский научный семинар «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 18 марта 2023 года).
9. Семинар «Краевые задачи механики сплошных сред» (Новосибирск, 4 апреля 2023 года).
10. Семинар «Избранные вопросы математического анализа» (Новосибирск, 10 апреля 2023 года).

Личный вклад. Все основные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации, получены автором самостоятельно, о чем свидетельствуют публикации по материалам исследований. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора, отражающий полученные в диссертационной работе результаты, составляет более 75

Публикации. Основные результаты по теме работы изложены в девяти печатных изданиях [1–9], четыре из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [2, 3, 6, 7], четыре — в тезисах докладов [1, 4, 5, 9].

Содержание работы

Во **введении** приведена постановка задачи, обоснована актуальность темы данной диссертационной работы, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

В самом общем случае рассматриваемая система второго порядка имеет вид

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где u - вектор длины h, $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ, a_{ij}, a_i, a_0 — $h \times h$-матрицы-функции, $h \in \mathbb{N}$. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = \varphi \ \ (S = \Gamma \times (0,T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x,t)u$ и γ_i, σ есть $h \times h$ матрицы, и условиями сопряжения:

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x,t) - \alpha_1(x,t)u^+(x,t) - \alpha_2(x,t)u^-(x,t) = g^+(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(x,t) - \beta_1(x,t)u^+(x,t) - \beta_2(x,t)u^-(x,t) = g^-(x,t), \quad (x,t) \in S_0, \tag{4}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0,t) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\nu_j$, $u^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} u(x,t)$, и ν - внешняя единичная нормаль к ∂G^-. Далее, иногда используем обозначение $u^\pm = u|_{G^\pm}$ и записываем функцию u в виде вектора $u = (u^+, u^-)$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(4).

Отдельно мы рассматриваем один частный, но важный случай, когда условие $\overline{G^-} \subset G$ не выполнено. В этом случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0,l)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1},\ \partial\Omega \in C^2$), причем $G^+ = \cup_i G^{2i}$, $G^- = \cup_i G^{2i-1}$, $G^i = \Omega \times (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0 < l_1 < \ldots, < l_m = l$. Этот частный случай очень часто возникает в приложениях. Опишем постановку задачи. Пусть

$$Lu = a_{nn}(t,x)u_{x_nx_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u,$$

а уравнение (1) имеет вид

$$Mu = u_t - Lu = f. \tag{5}$$

Введём обозначения: $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0,l)$, $S^0 = (0,T) \times \Gamma^0$. Уравнение (5) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{6}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x)\ (x \in G),\ R_0u(t,x',0) = \varphi_0, \quad R_1u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{7}$$

где $R_0u = u$ или $R_0u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно $R_1u = u$ или $R_1u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$R_i^+u = (u_{x_n} - \alpha_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i-0} = g_i^+, \tag{8}$$

$$R_i^-u = (u_{x_n} - \beta_i^1(t,x')u)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(t,x')u|_{x_n=l_i+0} = g_i^-,\ i = 1,2,...,m-1. \tag{9}$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (5), удовлетворяющего условиям (6)– (9).

В качестве приложений полученных результатов для параболических уравнений, мы рассматриваем также одну задачу сопряжения в стационарном случае. Рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$-Lu = f(x),\ Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u - \lambda u, \tag{10}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Считаем, что область G разделена на две области G^+ и G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$. Для простоты здесь считаем, что Γ_0 состоит из одной компоненты связности. Уравнение (10) дополняется краевыми условиями:

$$Bu|_\Gamma = g, \tag{11}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)n_j\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x)u$ и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) - \beta(u^+ - u^-)(x_0) = g^+(x_0),\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(x_0), \quad x_0 \in \Gamma_0, \tag{12}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\nu_j$, $u^\pm = \lim_{x\in G^\pm,\ x\to x_0\in\Gamma_0} u(x)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. Задача состоит в нахождении решения уравнения (10), удовлетворяющего условиям (11), (12).

Второй класс задач, который мы рассматриваем – обратные задачи об определении коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения. Как и в случае задач сопряжения, мы рассмотрим три различных случая. В первом случае мы рассматриваем параболические уравнения вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{13}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ и случае область G разделена на две области G^+ и G^- такие, что $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Здесь множество G^- может быть и многосвязным, соответственно пусть Γ_i $(i = 1, 2, \dots, r_0)$ компоненты связности множества Γ_0 и $S_i = (0,T) \times \Gamma_i$. Уравнение (13) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = g \ \ (S = \Gamma \times (0,T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{14}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(t,x)u$ и условиями сопряжения

$$B_i^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_i} - \beta_i(u^+ - u^-)\Big|_{S_i} = g_i^+, \ \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_i} = \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_i}, \ i \le r_0 \tag{15}$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x_0) = \lim_{x \in G^\pm, \ x \to x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}\nu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^+(t,x_0)u_{x_i}^+\nu_j$, $u_{x_i}^\pm = \lim_{x \in G^\pm, \ x \to x_0 \in \Gamma_0} u_{x_i}(t,x)$, $a_{ij}^\pm = \lim_{x \in G^\pm, \ x \to x_0 \in \Gamma_0} a_{ij}(x,t)$ и n, ν - внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(b_i,t) = \varphi_i(t) \ (i = 1, 2, \dots, r_1), \quad u^-(b_i,t) = \varphi_i(t) \ (i = r_1+1, \dots, r), \tag{16}$$

где $b_i \in \Gamma_0$, $\{b_i\}$ – некоторый набор точек. Задача в данном случае состоит в нахождении решения уравнения (13), удовлетворяющего условиям (14)-(16) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t,x)$ $(i = 1, 2, \dots, r_0)$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Во втором случае в качестве пространственной области берем цилиндрическую область $G = \Omega \times (0,l)$, описанную выше. Пусть $S^0 = (0,T) \times \Gamma^0$, $\Gamma^0 = \partial\Omega \times (0,l)$. Уравнение (13) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_{S^0} = \varphi, \tag{17}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_j}\nu_i + \sigma u$;

$$u(0,x) = u_0(x) \ (x \in G), \ R_0 u(t,x',0) = \varphi_0, \quad R_1 u(t,x',l) = \varphi_1, \tag{18}$$

где $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$B_i^+ u = \frac{\partial u_i^+}{\partial N} - \beta_i(u_i^+ - u_i^-) = g_i^+, \ \frac{\partial u_i^+}{\partial N} = \frac{\partial u_i^-}{\partial N}, \ i = 1, \dots, m-1, \tag{19}$$

где $\frac{\partial u_i^\pm}{\partial N}(t,x') = \lim_{x_n\to l_i\pm 0} a_{nn}u_{x_n}(t,x',x_n), u_i^\pm = \lim_{x_n\to l_i\pm 0} u(t,x',x_n)$. Пусть $x_{ij} = (x'_{ij}, l_j) \in \Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$ $(j = 1,2,\dots,m-1, \quad i = 1,2,\dots,N_j,)$ – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u(t,x'_{ij},x_n)|_{x_n=l_j+0} = \varphi_{ij}(t),\ i = 1,2,\dots,M_j,$$
$$u(t,x'_{ij},x_n)|_{x_n=l_j-0} = \varphi_{ij}(t),\ i = M_j+1,\dots,N_j. \quad (20)$$

Здесь задача состоит в нахождении решения уравнения (13), удовлетворяющего условиям (17)-(20) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t,x')$ $(i = 1,2,\dots,m-1,\ x' = (x_1,x_2,\dots,x_{n-1}))$, где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

Рассмотрим третий случай – случай эллиптического уравнения (10). В этом случае мы предполагаем, что коэффициент β в (12) представим в виде $\beta = \sum_{i=1}^{r} \beta_j\Phi_j(x)$, где функции Φ_j заданы, а постоянные β_j считаются неизвестными. Рассматриваемая задача состоит в нахождении решения задачи (10)-(12) и неизвестных постоянных β_j таких, что

$$u^+(b_i) = \psi_i\ (i = 1,2,\dots,r_1),\quad u^-(b_i) = \psi_i\ (i = r_1+1,\dots,r), \quad (21)$$

Первая глава состоит четырех параграфов. В ней рассматривается задача (1)-(4).

В первом параграфе главы приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов главы.

Во втором параграфе главы рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения (1)-(4) в случае $G^- \subset G$.

Пусть $p \in (1,\infty)$. Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q),\quad a_0 \in L_r(Q),\ a_{ij} \in C(Q^\pm),\ i,j = 1,2,\dots,n, \quad (22)$$

где $q > n+2$ при $p \le n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \le (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$.

Условие (22) означает, что функции a_{ij} могут допускать при переходе через Γ_0 разрывы первого рода. Обозначим через $a_{ij}^\pm$ предельные значения функций $a_{ij}|_{G^\pm}$ на Γ_0. Далее предположим, что

$$\gamma_i, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}),\ s_0 = 1/2 - 1/2p; \quad (23)$$

$$a_{ij}^\pm, \alpha_k, \beta_k \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0})\ \ (k = 1,2,\ i,j = 1,2\dots,n) \quad (24)$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^{\pm}), \quad \varphi \in W_p^{k_0,2k_0}(S), \; g^{\pm} \in W_p^{s_1,2s_1}(S_0) \; (s_1 = 1 - 1/p). \quad (25)$$

Условия согласования на внешней границе Γ имеют вид: при $p > 3/2$ в случае условия Дирихле и при $p > 3$ в случае условия с косой производной, выполнено равенство

$$\varphi(x, 0) = B(x, 0, \partial_x) u_0|_{\Gamma}. \quad (26)$$

Пусть $u_0^{\pm} = u_0|_{G^{\pm}}$. Условия согласования на Γ_0 записываются в виде: если $p > 3$, то

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} - \alpha_1(x,0)u_0^+ - \alpha_2(x,0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^+(x,0), \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_0^-}{\partial N} - \beta_1(x,0)u_0^+ - \beta_2(x,0)u_0^-|_{\Gamma_0} = g^-(x,0), \quad (28)$$

Рассмотрим вспомогательные задачи

$$Mu^+ = f(x,t), \; (x,t) \in Q^+, \; Bu^+|_S = \varphi, \; \frac{\partial u^+}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^+, \; u^+|_{t=0} = 0; \quad (29)$$

$$Mu^- = f(x,t), \quad (x,t) \in Q^-, \; \frac{\partial u^-}{\partial N}\Big|_{S_0} = g^-, \; u^-|_{t=0} = 0, \quad (30)$$

где исходные данные удовлетворяют условиям согласования (26)-(28).

Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (22)-(28)*, выполнено условие параболичности для оператора L и для задач* (29), (30) *выполнены условия Лопатинского. Тогда существует единственное решение задачи* (1)-(4) *такое, что $u|_{Q^{\pm}} \in W_p^{1,2}(Q^{\pm})$.*

В третьем параграфе главы также рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева задач сопряжения для параболических систем второго порядка с условиями сопряжения типа неидеального контакта, но в цилиндрической пространственной области $G = \Omega \times (0, l), (\partial\Omega \in C^2)$. Считаем, что

$$a_i \in L_q(Q), \quad a_0 \in L_r(Q), \; a_{ij} = a_{ji}, \; a_{ij} \in C(Q^k) \; (i,j = 1, \ldots, n), \quad (31)$$

где $q > n+2$ при $p \leq n+2$ и $q = p$ при $p > n+2$, $r > (n+2)/2$ при $p \leq (n+2)/2$ и $r = p$ при $p > (n+2)/2$, и функции $a_{ij}|_{Q^k}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^k})$ $(k = 1, \ldots, m)$. Вообще говоря, функции a_{ij} могут допускать при переходе через плоскости $x_n = l_k$ разрывы первого рода. Далее предположим, что

$$\alpha_i^k(x',t), \beta_i^k(x',t) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}) \;\; (k = 1, 2; \; i = 1, 2 \ldots, m-1). \quad (32)$$

$$\sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_i), \tag{33}$$

и $\sigma|_{S_i}$ допускают продолжение до функции класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$.

$$\sigma_0, \sigma_1 \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}). \tag{34}$$

$$u_0(x) \in \cap_{i=1}^m W_p^{2-2/p}(G^i), \quad \varphi \in \cap_{i=1}^m W_p^{k_0,2k_0}(S_i), \tag{35}$$

где $k_0 = 1 - 1/2p$, если $Ru = u$ и $k_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае.

$$\varphi_0 \in W_p^{k_1,2k_1}(Q^0), \ \varphi_1 \in W_p^{k_2,2k_2}(Q^0), \tag{36}$$

где $k_1 = 1 - 1/2p$, если $R_0 u = u$ и $k_1 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае, и, аналогично, $k_2 = 1 - 1/2p$, если $R_1 u = u$ и $k_2 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае. Пусть также

$$g_i^{\pm} \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0); \ i = 1, 2, ..., m-1. \tag{37}$$

Условия согласования при $t = 0$ имеют вид:

$$R(0,x)u_0|_{\partial\Omega} = \varphi(0,x), \ \ R_0(0,x')u_0(x',0) = \varphi_0(0,x'), \ R_1(0,x')u_0(x',l) = \varphi_1(0,x'), \tag{38}$$

где каждое из равенств выполняется при $p > 3/2$, если соответствующий оператор R, R_0 или R_1 задает условие Дирихле, и при $p > 3$ в противном случае;
при $p > 3$ считаем, что

$$g_i^+(0,x') = (u_{0x_n} - \alpha_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i+0} - \alpha_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i-0}, \tag{39}$$

$$g_i^-(0,x') = (u_{0x_n} - \beta_i^1(0,x')u_0)|_{x_n=l_i-0} - \beta_i^2(0,x')u_0|_{x_n=l_i+0}. \tag{40}$$

В случае $Ru \neq u$ дополнительно потребуем, чтобы

$$a_{ij}|_{Q^k} \in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(Q^k) \ (i,j = 1,\dots,n, \ k = 1,\dots,m) \tag{41}$$

и $a_{ij}|_{Q^k}$ допускают продолжение до функций класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^k})$.

Приведем несколько условий, гарантирующих параболичность задачи и выполнение условия Лопатинского. Пусть $A_0(t,x,\xi) = a_{nn}\xi_n^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Условие сильной эллиптичности: существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$Re\,\langle A_0(t,x,\xi)\eta,\eta\rangle \geq \delta_0|\xi|^2|\eta|^2 \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \eta \in \mathbb{C}^h. \tag{42}$$

Условие нормальной сильной эллиптичности: выполнено условие (42) и существует постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что

$$Re \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(t,x)(\xi_i u + \eta_i v), \xi_j u + \eta_j v\rangle \geq \delta_1 |Im\langle\ u,v\rangle| \ \forall (t,x) \in Q, \tag{43}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^h, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких что $\langle \xi, \eta \rangle = 0, |\xi| = |\eta| = 1$.

Для функций $\varphi(t, x', x_n)$ положим

$$S_{\alpha,\beta}(\varphi) = \int_\alpha^\beta \int_0^\delta \int_{\partial\Omega} |\varphi(t, x', \tau)|^2 d\Gamma \frac{d\tau}{\tau} dt,$$

где $0 \le \alpha < \beta \le T$.

Введем дополнительные обозначения:

$$\begin{gathered} J_i^+(\varphi, g_i^+) = \quad S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t, x', l_i + \tau) - \alpha_i^1 \varphi(t, x', l_i + \tau) - \\ \alpha_i^2 \varphi(t, x', l_i - \tau) - g_i^+(t, x' + \tau n(x'))), \\ J_i^-(\varphi, g_i^-) = \quad S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t, x', l_i - \tau) - \beta_i^1 \varphi(t, x', l_i - \tau) - \\ \beta_i^2 \varphi(t, x', l_i + \tau) - g_i^-(t, x' + \tau n(x'))), \ i = 1, 2, \dots, m-1, \\ J_m^-(\varphi, \varphi_1) = J^{0,T}(\varphi, \varphi_1), \ J_0^+(\varphi, \varphi_0) = J_{0,T}(\varphi, \varphi_0), \\ I_0^+(\varphi, \varphi_0) = S_{0,T}(-\varphi_{x_n}(t, x', \tau) + \sigma_0 \varphi(t, x', \tau) - \varphi_0(t, x' + \tau n(x'))), \\ I_m^-(\varphi, \varphi_1) = S_{0,T}(\varphi_{x_n}(t, x', l - \tau) + \sigma_1 \varphi(t, x', l - \tau) - \varphi_1(t, x' + \tau n(x'))). \end{gathered}$$

Далее, мы будем предполагать, что:

B) если $R_i u = u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru = u$, то $\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $p > 2$ и $R_i u = u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru \neq u$, то $R(t, x', r_i)\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$; если $p > 2$, $R_i u \neq u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru = u$, то $R_i \varphi(t, x', r_i) = \varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega}$; если $p > 2$ и $Ru = u$, то $R_i^+ \varphi = g_i^+(t, x')|_{\partial\Omega}$ и $R_i^- \varphi = g_i^-(t, x')|_{\partial\Omega}$; если $p = 2$, $R_0 u = u$ и $Ru \neq u$, или $R_1 u = u$ и $Ru \neq u$, то $J_0^+(\varphi, \varphi_0) < \infty$ или $J_m^-(\varphi, \varphi_1) < \infty$, соответственно; если $p = 2$ и $Ru = u$, то предположим, что $J_i^\pm(\varphi, g_i^\pm) < \infty$ $(i = 1, 2, \dots, m-1)$ и если $R_0 u \neq u$ или $R_1 u \neq u$, то $I_0^+(\varphi, \varphi_0) < \infty$ или соответственно, $I_m^-(\varphi, \varphi_1) < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, \min_i(l_i - l_{i-1}))$, $\delta < \delta_0$.

Теорема 2. *Пусть* $p \neq 3/2, p \neq 3$, *выполнены условия* (31)-(40), B) *и условие* (42) *если* $Ru = u$ *и* (43), (41) *если* $Ru \neq u$. *Тогда существует единственное решение задачи* (5)-(9) *такое, что* $u|_{Q^i} \in W_p^{1,2}(Q^i)$.

В четвертом параграфе мы приведем результаты аналогичные параграфу 2, но в эллиптическом случае.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. В ней рассматривается вопросы корректности обратных задач об определении коэффициентов теплообмена, входящих в условие сопряжения.

В первом параграфе главы 2, как и ранее, приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых при доказательстве основных результатов данной главы.

Во втором параграфе рассматривается обратная задача (13)-(16) определения коэффициентов теплообмена на границе раздела сред, входящих в условие сопряжения типа неидеального контакта. Мы считаем, что параметр $p > n+2$ зафиксирован.

Рассматривая задачу (13)-(16), мы предполагаем, что число компонент связности границ Γ, Γ_0 конечно,

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2, \quad \Gamma_\delta \in C^3. \tag{44}$$

и для любой координатной окрестности U_i точки b_i имеем, что $\overline{U_i} \subset G$ и $\overline{U_i} \cap \Gamma_0 = \{y : |y'| \leq \delta, y_n = \gamma(y')\}$, где y – локальная система координат в точке b_i. Чтобы достичь последнего, мы всегда можем уменьшить параметр δ. Включение (44) означает, что $\Gamma_i \in C^2$ для всех i, аналогично для компонент связности Γ. Для компонент связности множества Γ мы не вводим отдельных обозначений.

Рассмотрим вспомогательные задачи сопряжения, где $u^\pm = u|_{G^\pm}$,

$$Mu = f(x,t), \ (x,t) \in Q, \ Bu|_S = g, \ u|_{t=0} = u_0, \tag{45}$$

$$B_i^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N} - \beta_i(u^+ - u^-) = g_i^+, \ \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N}, \ (t,x) \in S_i, \ i \leq r_0. \tag{46}$$

Считаем, что выполнены условия

$$a_i \in L_p(Q) \ (i \geq 0), \ a_{ij} \in C(Q^\pm) \ (\ i,j = 1,\ldots,n), \ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}); \tag{47}$$

функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$ и

$$a_{ij}^\pm|_{\Gamma_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}), \ a_{ij}|_\Gamma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S}), \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{48}$$

где $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$ и последнее включение выполнено, если $Bu \neq u$ в (14);

$$a_i \in L_\infty(0,T; W_p^1(G_\delta^\pm)) \ (i \geq 0), \ a_{ij} \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G_\delta^\pm)) \ (i,j = 1,2,\ldots,n). \tag{49}$$

Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где y – локальная система координат в точке b_i. При выполнении условия (44) преобразование $x = x(y(z)) = x^i(z)$ и обратное к нему принадлежат классу C^3. Для удобства всюду ниже считаем, что на Γ_0 ось y_n локальной системы координат в каждой точке направлена вне области G^-. Пусть $U' = \{z : |z'| < \delta, -\delta_1 < z_n < \delta_1\}$, $U^{+(-)} = \{z \in U' : z_n > 0 (z_n < 0)\}$ и $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$. Положим $Q_0^\tau = (0,\tau) \times U'$, $Q_0 = (0,T) \times U'$ $Q_0^\pm(\tau) = (0,\tau) \times U^\pm$ и $S_{01}^\tau = (0,\tau) \times B'_\delta$, $S_{01} = (0,T) \times B'_\delta$.

Мы считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^{\pm}),\ g_i^+ \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ g(0,x) = B(0,x,\partial_x)u_0|_{\Gamma},\ g \in W_p^{k_0,2k_0}(S). \tag{50}$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 1, \dots, r_0$.

Пусть $u_0^{\pm} = u_0|_{G^{\pm}}$. Предположим, что

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \beta_i(u_0^+ - u_0^-) + g_i^+(0,x),\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N},\ (t,x) \in S_i,\ f \in L_p(Q), \tag{51}$$

где $i \le r_0$. Пусть U_i – координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma_0$, выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Тогда мы также предполагаем, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, \dots, r_0$,

$$\begin{aligned} &\nabla_{z'}\varphi_i f(t, x^i(z)) \in L_p(Q_0),\ \nabla_{z'}\varphi_i u_0^{\pm}(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U^{\pm})\ (i \le r), \\ &\qquad \nabla_{z'}\varphi_k g_j^+(t, x^k(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_{01})\ (k \in N_j = \{k : b_k \in \Gamma_j\}), \\ &\qquad \nabla_{z'} a_{kl}^{\pm}(x^i(z',0)) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_{01}),\ \ (k,l = 1,2\dots,n,\ \varepsilon_0 > 0). \end{aligned} \tag{52}$$

Отметим, что условие (52) не зависит от введённой локальной системы координат y и системы координат z. Приведем условия на данные. Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t,x)$ при всех допустимых i, j обладают свойствами

$$\Phi_{ij} \in W_p^{s_0,2s_0}(S_i),\ \Phi_{ij} \in L_p(0,T; W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i)) \cap W_p^1(\Gamma_\delta \cap \Gamma_i; W_p^{1/2-1/2p}(0,T)). \tag{53}$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k = \Phi_{kj}(t, b_i)$ $(j = 1, 2, \dots, m_k,\ i \in N_k = \{i:\ b_i \in \Gamma_k\})$. Считаем, что число номеров во множестве N_k равно m_k и таким образом матрица Φ_k квадратная. В силу теорем вложения $\Phi_{kj}(t, b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(b_i) \ne u_0^-(b_i)\ (i \in N_k), |det\, \Phi_k| \ge \delta_1 > 0\ \forall t \in [0,T], k = 1, \dots, r_0. \tag{54}$$

$$u_0^+(b_i) = \varphi_i(0)\ (i = 1, 2, \dots, r_1),\ \ u_0^-(b_i) = \varphi_i(0)\ \ (i = r_1 + 1, \dots, r), \tag{55}$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все условия, гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (15) в точке $(0, b_j)$. Имеем

$$B_k^+ u_0 = \frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N} - \beta_k(0,b_j)(u_0^+(b_j) - u_0^-(b_j)) = g_k^+(0,b_j), \tag{56}$$

где $\beta_k(0,b_j) = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{ki}(0)\Phi_{ki}(0,b_j)$. Положим $\alpha_{ki}(0) = \alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k = \vec{F}_k,\ \ F_{kj} = (\frac{\partial u_0^+(b_j)}{\partial N} - g^+(0,b_j))/(u_0^+(b_j) - u_0^-(b_j)),\ j \in N_k,$$

$$\vec{\alpha}_k = (\alpha^k_1, \dots, \alpha^k_{m_k}), \quad \vec{F}_k = (F_{k1}, \dots, F_{km_k}),$$

которая в силу (54) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Положим $\beta_{0k} = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha^k_i \Phi_{ki}(t,x)$, $\alpha_k = \beta_k - \beta_{0k}$. Условия согласования на Γ_0 имеют вид

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \beta_{0i}(0,x)(u_0^+ - u_0^-) + g_i^+(0,x), \ \frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}, \ (t,x) \in \Gamma_i. \qquad (57)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (44), (47)–(55), (57). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (13)-(16) *такое, что* $u|_{Q^{\pm}_{\tau_0}} \in W_p^{1,2}(Q^{\pm}_{\tau_0})$, $\alpha_{ij}(t) \in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(i = 1,2,\dots,r_0, \ j = 1,2,\dots,N_i)$

<u>В третьем параграфе</u> рассматривается обратная задача определения коэффициента теплообмена, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта в случае цилиндрической области G.

Мы предполагаем, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad a_0 \in L_p(Q), \quad i = 0,\dots,n, \qquad (58)$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q^k}), \quad i,j = 1,\dots,n, k = 1,2,\dots,m, \qquad (59)$$

$$a_{ij}|_{S_0} \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}), \ \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}), \ i,j = 1,\dots,n, \ k = 1,\dots,m, \qquad (60)$$

$$\sigma_j \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}) \ (j = 0,1), \qquad (61)$$

где $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал) и включения $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$ означают, что $a_{ij}|_{S_0}, \sigma \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(S_i)$ и эти функции допускают непрерывное продолжение на $\overline{S_i}$ класса $C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_i})$. При переходе через плоскости $x_n = l_i$ оно вообще говоря имеют разрывы первого рода. Считаем здесь, что $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{nj} = a_{jn} = 0$ для всех i,j. Фиксируем допустимый параметр δ. Дополнительно предположим, что

$$a_i \in L_\infty(0,T; W_p^1(G_\delta^\pm)) \ (i = 0,1,\dots,n), \ a_{ij} \in L_\infty(0,T; W_\infty^1(G_\delta^\pm)), \qquad (62)$$

где $i,j = 1,2,\dots,n$. Построим функции $\varphi_{ij}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_{ij}(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(x_{ij})$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(x_{ij})$, положим $\varphi(x) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}(x)$ $(i = 1,2,\dots,N_j, \ j = 1,2,\dots,m-1)$. Считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm), \ g_i^+ \in W_p^{s_0,2s_0}(Q^0), \ \varphi(0,x) = R(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma, \ \varphi \in W_p^{k_0,2k_0}(S_i). \qquad (63)$$

где $k_0 = s_0$ в случае условий третьей краевой задачи и $k_0 = s_1$ в случае условий Дирихле, $i = 1, \dots, m-1$. Условия согласования при $t = 0$ записываются в виде:

$$B_i^+ u_0 = \frac{\partial u_{0i}^+}{\partial N} - \beta_i(u_{0i}^+ - u_{0i}^-) = g_i^+(0, x'),\ \frac{\partial u_{0i}^+}{\partial N} = \frac{\partial u_{0i}^-}{\partial N},\ i = 1, \dots, m-1, \quad (64)$$

где $\frac{\partial u_{0i}^\pm}{\partial N}(x') = a_{nn} u_{0x_n}(x', l_i \pm 0), u_{0i}^\pm = u_0(x', l_i \pm 0)$. Пусть также

$$f \in L_p(Q),\ a_{nn}(t, x', l_i \pm 0) \in C^{s_0+\varepsilon_0, 2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{Q^0}),\ i = 1, \dots, m-1. \quad (65)$$

$$\nabla_{x'} \varphi f(t,x) \in L_p(Q),\ \nabla_{x'} \varphi u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm),\ \nabla_{x'} \varphi g_i^+(t, x') \in W_p^{s_0, 2s_0}(Q^0),$$
$$\nabla_{x'} a_{nn}(t, x', l_i \pm 0) \in W_p^{s_0, 2s_0}((0,T) \times (B_\delta(x_{ji}) \cap \Gamma^i)), \quad (66)$$

где $i = 1, 2 \dots, m-1,\ j = 1, \dots, N_i$. Нам понадобятся дополнительные условия согласования

A) если $R_i u = u$ $(i = 0,1)$ и $Ru = u$, то $\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$ $(r_0 = 0, r_1 = l)$; если $R_i u = u$ $(i = 0,1)$ и $Ru \neq u$, то $R(t, x', r_i)\varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x', r_i)$; если $R_i u \neq u$ $(i = 0, 1)$ и $Ru = u$, то $R_i \varphi(t, x', r_i) = \varphi_i(t, x')|_{\partial\Omega}$; если $Ru = u$, то $B_i^+ \varphi = g_i^+(t, x')|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial \varphi_i^+}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_i^-}{\partial N},\ i = 1, \dots, m-1$, где $\frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial N} = a_{nn} \varphi_{x_n}(t, x', l_i \pm 0)$.

Пусть $p \in (n+2, \infty)$. Приведем условия на исходные данные. Ряд этих условий мы уже сформулировали в предыдущем пункте. Пусть $B'_\delta(x'_{ij}) = \{x' : |x' - x'_{ij}| < \delta\}$, $U_{i=1}^{N_j} B'_\delta(x'_{ij}) = \Omega_{\delta j}$. Считаем, что функции $\Phi_{ij}(t, x')$ при всех допустимых i, j обладают свойствами

$$\Phi_{ij} \in W_p^{s_0, 2s_0}(Q^0) \cap H_T^{2,1/2}(\Omega_{\delta j}),$$
$$H_\tau^{2,1/2}(\Omega_{\delta j}) = L_p(0, \tau; W_p^{2-1/p}(\Omega_{\delta j})) \cap W_p^1(\Omega_{\delta j}; W_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)). \quad (67)$$

Пусть $\Phi_k(t)$ - матрица с элементами $\phi_{ij}^k = \Phi_{jk}(t, x'_{ik})$ $(i, j = 1, 2, \dots, N_k)$. В силу теорем вложения $\Phi_{jk}(t, x'_{ik}) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$. Дополнительные условия на данные имеют вид

$$u_0^+(x_{ij}) \neq u_0^-(x_{ij})\ (j = 1, 2, \dots, m-1;\ i = 1, 2, \dots, N_j),$$
$$|det\, \Phi_k| \geq \delta_1 > 0\ \forall t \in [0,T], \forall k = 1, \dots, m-1. \quad (68)$$

$$u_0^+(x_{ij}) = \varphi_{ij}(0)\ (j = 1, 2, \dots, m-1;\ i = 1, 2, \dots, M_j),$$
$$u_0^-(x_{ij}) = \varphi_{ij}(0)\ \ (j = 1, 2, \dots, m-1;\ i = M_j + 1, \dots, N_j), \quad (69)$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Однако это не все данные гарантирующие разрешимость задачи. Рассмотрим равенство (19) в точке $(0, x_{ij})$. Имеем

$$B_k^+ u_0 = \frac{\partial u_{0j}^+(x'_{ij})}{\partial N} - \beta_k(0, x'_{ij})(u_{0j}^+(x'_{ij}) - u_{0j}^-(x'_{ij})) = g_j^+(0, x'_{ij}), \quad (70)$$

где $\beta_k(0,x'_{jk}) = \sum_{i=1}^{N_k}\alpha_{ik}(0)\Phi_{ik}(0,x'_{jk})$. Положим $\alpha_{ik}(0) = \alpha_i^k$. Отсюда имеем систему

$$\Phi_k(0)\vec{\alpha}_k = \vec{F}_k, \quad F_{kj} = (\frac{\partial u_{0j}^+(x'_{jk})}{\partial N} - g_j^+(0,x'_{jk}))/(u_{0j}^+(x'_{jk}) - u_{0j}^-(x'_{jk})),$$
$$j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m-1,$$
$$\vec{\alpha}_k = (\alpha_1^k,\ldots,\alpha_{N_k}^k), \quad \vec{F}_k = (F_{k1},\ldots,F_{kN_k}),$$

которая в силу условия (68) имеет единственное решение $\vec{\alpha}_k$. Положим $\beta_{0k} = \sum_{i=1}^{N_k}\alpha_i^k\Phi_{ik}(t,x)$, $\alpha_k = \beta_k - \beta_{0k}$. Условия согласования на Γ_0 имеют вид

$$\frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \beta_{0j}(0,x')(u_{0j}^+ - u_{0j}^-) + g_j^+(0,x'),\ \frac{\partial u_{0j}^+}{\partial N} = \frac{\partial u_{0j}^-}{\partial N},\ (t,x) \in \Gamma^j. \qquad (71)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (58)-(69), (71) *и условие А). Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (13), (17)-(20) *такое, что* $u|_{Q_{\tau_0}^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^\pm)$, $\alpha_{ij}(t) \in W_p^{1/2-1/2p}(0,\tau_0)$ $(j = 1,2,\ldots,m-1,\ i = 1,2,\ldots,N_j)$.

В четвертом параграфе мы приведем результаты аналогичные параграфу 2, но в эллиптическом случае.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертационной работы, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Пяткову С.Г. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор также благодарит преподавателей инженерной школы цифровых технологий ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» за полезные советы и помощь в работе.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема "Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды код темы: FENG-2023-0004)

Публикации автора по теме диссертации

1. Белоногов В.А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Сборник тезисов российско-французского семинара «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019. С. 14.

2. Белоногов В.А., Пятков С.Г. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Известия вузов. Математика. 2020. Т. 7. С. 18–32.
3. Belonogov V., Pyatkov S. On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain // Сибирские электронные математические известия. 2021. Vol. 18. P. 176–206.
4. Белоногов В.А. Разрешимость задач сопряжения типа неидеального контакта в цилиндрической пространственной области // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки РФ и ЯАССР, д. т. н., профессора Э. А. Бондарева, 2021. С. 207-209.
5. Белоногов В.А. О некоторых классах обратных задач об определении коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сборник тезисов Евразийской конференции по прикладной математике, 2021. С. 26.
6. Белоногов В.А., Пятков С.Г. О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63. С. 252–271.
7. Белоногов В.А. Об идентификации коэффициента теплообмена в слоистой среде // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14. С. 13–26.
8. Белоногов В.А., Пятков С.Г. О некоторых классах стационарных обратных задач определения коэффициента теплообмена для математических моделей тепломассопереноса // Вестник Югорского государственного университета. 2022. Т. 64. С. 101–117.
9. Белоногов В.А. Определение коэффициента теплопередачи в слоистых средах в цилиндрической пространственной области // Тезисы XXIII всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, 2022. С. 8-9.

Белоногов Владимир Андреевич
Прямые и обратные задачи тепломассопереноса в слоистых средах
Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук
Подписано в печать 24.07.2023. Заказ № 203
Формат 60×84/16. Объем 1,3 п.л. Тираж 75 экз.
Экспресс типография
640018, г. Курган, ул.Советская, 128, офис 505
Тел. 8(3522) 46-11-14. E-mail: er-express@mail.ru