

На правах рукописи

Шишмарев Константин Александрович

**ПОВЕДЕНИЕ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА КАНАЛА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ**

01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Барнаул

2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Алтайский государственный университет".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Папин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты:

Стурова Изольда Викторовна, доктор физико-математических наук, с.н.с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория гидроаэроупругости, главный научный сотрудник.

Чубаров Леонид Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, отдел вычислительных технологий, главный научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится “___” _____ 2019 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан “___” _____ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук

Рудой Евгений Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Проблемы, связанные с ледовым покровом широко исследуются на протяжении последнего столетия. Реология льда и его термодинамические свойства описаны в работах Мальмгрена Ф. «О свойствах морского льда» (1930г.), Цурикова В.Л. «Жидкая фаза в морских льдах» (1976г.), «Морской лед» (1997г.) и др. Однако известно, что в различных ситуациях лед ведет себя совершенно по-разному. Его свойства зависят от его структуры, толщины, температуры, солености образующей его жидкости. Кроме того, геометрия и природа задач, возникающих в каждом конкретном случае совершенно различны. Поэтому при прогнозировании поведения ледового покрова не существует единой модели. Наиболее изученным является поведение ледового покрова под действием изгибно-гравитационных (гидроупругих) волн. Многочисленные исследования, проведенные как в нашей стране (Букатов А.Е., Козин В.М., Коробкин А.А., Стурова И.В., Ткачева Л.А., Хабахпашева Т.И. и др.), так и за рубежом (Faltinsen O.M., Kashiwagi M., Meylan M., Squire V.A. и др.), посвящены образованию гидроупругих волн, распространяющихся в ледовом покрове, а также взаимодействию этих волн с морскими и прибрежными сооружениями, такие как вертикальные колонны платформ и стенки. Однако, проведенные до настоящего времени исследования не включали в себя множество задач, в частности, задачи о поведении ледового покрова в канале при наличии двух параллельных жестких стенок.

Степень разработанности темы исследования

Задача об определении прогибов ледового покрова изучена ранее для бесконечной плавающей ледовой пластины ¹. Задача исследовалась в рамках линейной теории гидроупругости ^{1, 2, 3} и в рамках нелинейной модели ^{4, 5}. Прикладные задачи, такие как посадка самолета на ледовую пластину, исследованы в ^{6, 7}. Задача движения внешних нагрузок в реках и каналах изучена

¹Squire, V. Moving loads on ice plates / V. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne. – Kluwer Academic Publishers – 1996.

²Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова / Д.Е. Хейсин. – Л.: Гидрометеиздат. – 1967. – 215 с.

³Nevel, D. E. Moving loads on a floating ice sheet / DE Nevel. – No. CRREL-RR-261. Cold regions research and engineering lab. Hanover NH. – 1970.

⁴Plotnikov, P. I. Modelling nonlinear hydroelastic waves / P. I. Plotnikov, J. F. Toland // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2011. – 369.1947. – p. 2942-2956.

⁵Guyenne, P. Asymptotic Modeling and Numerical Simulation of Solitary Waves in a Floating Ice Sheet / P. Guyenne, E.I. Părău // The 25th International Offshore and Polar Engineering Conference. ISOPE. – 2015.

⁶Kashiwagi, M. Transient responses of a VLFS during landing and take-off of an airplane / M. Kashiwagi // Journal of Marine Science and Technology. – 2004. – 9(1). – p. 14-23.

⁷Pogorelova, A.V. Stress-strain state of ice cover during aircraft takeoff and landing / A.V. Pogorelova, V.M. Kozin, A.A. Matyushina // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2015. – 56.5. – p. 920-926.

в гораздо меньшей степени. Данная задача является важной, т.к. лабораторные эксперименты с движущимися нагрузками проводятся в ледовых бассейнах конечной ширины, которую необходимо учитывать при интерпретации результатов. Рассматриваемая задача имеет практическую значимость для узких водных путей, рек, каналов и замороженных гаваней⁸. Основная цель решения таких задач – определение прогибов и деформаций в ледовом покрове, зная параметры которых можно совершать безопасную транспортировку грузов по ледовому покрову, или наоборот предсказывать разрушение льда в определенных местах ледового покрова.

Несколько экспериментов с искусственным ледовым покровом и с наличием стенок описано в⁸. Получено, что численные результаты с использованием метода конечных элементов качественно похожи на результаты экспериментов, но заметно отличаются от них в значениях амплитуд колебаний, что объяснялось краевыми условиями на стенках. В работе⁹ показано, что деформации и напряжения в ледовом покрове, которые вызваны движением внешней нагрузки вблизи одной вертикальной стенки, сильно зависят от расстояния между нагрузкой и стенкой. Для исследования поведения ледового покрова в канале при разных скоростях движения внешней нагрузки необходимо найти критические скорости. Критическая скорость определяется как минимальная фазовая скорость периодической гидроупругой волны, распространяющейся вдоль канала¹⁰. При движении нагрузки с такой скоростью прогибы и деформации в ледовом покрове могут возрасти на порядок.

Наряду с рассмотренными задачами движения внешней нагрузки, еще одним большим классом задач является изучение взаимодействия льда и погруженного в жидкость тела^{11, 12, 13, 14, 15}. Это может быть как движение подводного объекта, так и периодические колебания погруженных тел. При этом могут рассматриваться ледовый покров, свободная поверхность и их

⁸Козин, В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты / В.М. Козин. – М.: Академия Естествознания. – 2007. – 355 с.

⁹Brocklehurst, P. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall / P. Brocklehurst, A. A. Korobkin, E. I. Părău // J Eng Math. – 2010. – 68. – p. 215-231.

¹⁰Korobkin, A. A. Waves propagating along a channel with ice cover / A. A. Korobkin, T. I. Khabakhpasheva, A. A. Papin // Eur J Mech B/Fluids. – 2014. – 47. – p. 166-175.

¹¹Savin, A. A. Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid / A. A. Savin, A. S. Savin // Fluid Dyn. – 2015. – 50. – p. 613-620.

¹²Il'ichev, A. T. Process of establishing a plane-wave system on ice cover over a dipole moving uniformly in an ideal fluid column / A. T. Il'ichev, A. S. Savin // Theor. and Math. Phys. – 2017. – 193. – p. 1801-1810.

¹³Pogorelova, A. V. Unsteady motion of a source in a fluid under a floating plate / A. V. Pogorelova // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2011. – 52 (5). – p. 717-726.

¹⁴Sturova, I.V. Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya / I.V. Sturova // Journal of Fluid Mechanics. – 2015. – 784. – p. 373-3-95.

¹⁵Ткачева, Л.А. Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова / Л.А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – 56(6). – с. 173-186.

различные комбинации. При постановке задач можно учитывать конструкции, ограничивающие область с жидкостью, и рассматривать неограниченную жидкость. Задача движения подводного тела в канале в описанных работах не рассматривалась.

Цели и задачи исследования

Целью работы является математическое исследование прогибов и деформаций в ледовом покрове при движении внешней нагрузки вдоль замороженного прямоугольного канала, в частности, исследование влияния параметров задачи на характеристики прогибов и деформаций, определение областей с максимальными деформациями и исследование свойств вынужденных гидроупругих волн, формирующих прогибы ледового покрова.

Научная новизна

Научная новизна исследуемой задачи состоит, в первую очередь, в учете двух жестких стенок и соответствующих краевых условий на этих стенках. В отличие от задачи с неограниченным ледовым покровом, в канале существует счетное число критических скоростей движения нагрузки¹⁰. Вследствие этого осложняется анализ прогибов и деформаций в ледовом покрове. Все результаты являются новыми, подтверждаются строгими рассуждениями с использованием развитого математического аппарата гидродинамики и теории гидроупругости и согласуются друг с другом.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты носят теоретический и прикладной характер и представляют интерес для специалистов в области гидродинамики, гидроупругости и уравнений в частных производных. Работа вносит вклад в изучение взаимодействия ледового покрова, конструкций и движущихся внешних нагрузок. Результаты для задачи в канале развивают теорию гидроупругости и значительно дополняют результаты задач о движении внешних нагрузок по неограниченному ледовому покрову. Полученные численные результаты и асимптотические формулы для прогибов ледового покрова могут использоваться для оценки возможных максимальных деформаций в ледовом покрове. Результаты работы могут применяться для анализа проводимых экспериментов в ледовых бассейнах. С теоретической точки зрения работа вносит вклад в изучение систем уравнений в частных производных для системы «деформируемое тело – жидкость» и развитие методов решения данных систем.

Методология и методы исследования

Для решения задач, поставленных в диссертации, используется математический аппарат механики сплошной среды, гидродинамики и линейной теории гидроупругости. Задачи формулируются в рамках линейной теории

гидроупругости [Squire, 1996]. В диссертации используется классический метод разбиения задачи на гидродинамическую (связанную с расчетом течения жидкости) и упругую (связанную с описанием деформаций тела и напряжений в нем) составляющие и сопряжение этих частей, приводящее к одновременному решению связанной задачи о динамическом поведении системы «упругое тело – жидкость». В постановке упругой составляющей используются уравнения колебаний тонких упругих или вязкоупругих пластин, в постановке гидродинамической составляющей используются уравнения невязкой и несжимаемой жидкости. Для решения задач гидроупругости используются методы разложения прогибов льда в ряды по специально выбранным системам ортогональных функций. В ходе исследования задач применялось преобразование Фурье, а разложения проводились для преобразованных функций. Также использовались методы решения краевых задач уравнений математической физики. При численном и аналитическом анализе решения в виде квадратур использовались классические методы численного интегрирования и методы асимптотического анализа интегралов, зависящих от большого параметра. Доказательство теоремы единственности классического решения рассматриваемой задачи проведено методами функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет». На защиту выносятся следующие результаты:

1. Численное исследование задачи о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль вязкоупругой ледовой пластины в канале. Построение решения в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Анализ влияния параметров задачи на полученные результаты.

2. Доказательство единственности классического решения нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова в канале под действием внешней нагрузки.

3. Аналитическое решение нестационарной задачи о движении внешней нагрузки вдоль упругой ледовой пластины в канале при больших временах. Анализ полученных аналитических формул для прогибов ледового покрова. Численное исследование нестационарной задачи о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль упругой ледовой пластины в канале при конечных временах.

4. Анализ корректности гипотез линейной теории гидроупругости в постановке задачи о взаимодействии вязкоупругого ледового покрова и движущегося диполя подо льдом в канале с учетом нелинейных кинематического

условия и интеграла Коши-Лагранжа. Сведение оригинальной постановки к трем разным случаям, в которых сохраняется условие малых колебаний ледового покрова. Численное исследование задачи прямолинейного движения диполя с малой интенсивностью под вязкоупругой ледовой пластиной вдоль канала.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена:

Использованием классических подходов механики сплошных сред, гидродинамики и теории гидроупругости при построении и анализе математических моделей; проверкой корректности результатов численных расчетов различными способами: тестированием сходимости численных решений вариацией числа гидроупругих мод, вариацией интервала интегрирования и шага по параметру преобразования Фурье; опубликованием результатов исследований в ведущих зарубежных и отечественных журналах и обсуждением результатов на многочисленных международных и всероссийских конференциях. Основные результаты работы докладывались на семинарах:

ИВТ СО РАН "Информационно-вычислительные технологии" (руководители: академик Ю.И. Шокин, профессор В.М. Ковеня), Новосибирск, 2019; ИГиЛ СО РАН "Математические модели механики сплошных сред" (руководители: член.-корр. РАН, профессор П.И. Плотников, д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтов), Новосибирск, 2018; ИМ СО РАН "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики" (руководитель: д.ф.-м.н. А.М. Блохин), Новосибирск, 2018; ИГиЛ СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководитель: член.-корр. РАН, профессор В.В. Пухначев), Новосибирск, 2016; "Задачи индустриальной и прикладной математики" (руководитель: д.ф.-м.н. А.А. Папин), Барнаул, 2014-2019; кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета, Барнаул, 2014-2019; а также на следующих научных конференциях:

Всероссийская конференция "Полярная механика", (Новосибирск, 2012; Санкт-Петербург, 2014; Владивосток, 2016; Санкт-Петербург, 2017; Новосибирск, 2018); региональная конференция "МАК: Математики – Алтайскому краю" (Барнаул, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018); международная научная программа "Mathematics of sea ice phenomena" (Великобритания, Кембридж, 2017); всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва", посвященной 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017); всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами; теория, эксперимент, приложения" (Бийск,

2011, 2014; Барнаул, 2017); международная школа-конференция "Соболевские чтения" (Новосибирск, 2016); 7th International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology (Сплит, Хорватия, 2015); международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" к 115 летию М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2015); международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2014, 2015, 2018); международная научно-студенческая конференция (Новосибирск, 2011, 2012);

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 печатных изданиях [1-15], 10 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 – в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus.

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, численном исследовании, обсуждении полученных результатов, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 131 страницу. Диссертация содержит 40 рисунков, 1 таблицу. Список литературы содержит 90 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность задачи взаимодействия ледового покрова и внешних нагрузок с учетом наличия жестких стенок, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, а также ее научная новизна и практическая значимость, представлены основные положения, выносимые на защиту, обоснована достоверность результатов и описан личный вклад автора работы.

Первая глава диссертации посвящена численному и аналитическому исследованию прогибов и деформаций в ледовом покрове в результате движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала. В параграфе 1.1 сформулирована постановка задачи. Рассматривается задача определения прогибов ледового покрова прямоугольного канала бесконечной длины под действием движущейся внешней нагрузки. Канал имеет конечные глубину H , $-H < z < 0$ и ширину $2L$, $-L < y < L$, в направлении x канал неограничен, $Oxyz$ – декартова система координат. Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_l и покрыт льдом. Ледовый

покров рассматривается как тонкая вязкоупругая пластина в рамках модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала с постоянной толщиной h_i и жесткостью $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона. Ледовый покров закреплен на стенках канала, $y = \pm L$. Внешняя нагрузка моделируется движущимся с постоянной скоростью U локализованным гладким распределением давления по верхней поверхности ледового покрова. Система уравнений, описывающая рассматриваемую задачу, имеет вид:

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w = -P + p(x, y, 0, t), \quad (1)$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t(x, y, 0, t) - \rho_l g w \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (2)$$

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0), \quad (3)$$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (4)$$

$$P_1(\tilde{x}) = (\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1)/2 \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1), \quad P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = (\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1)/2 \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1), \quad P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1).$$

Здесь $w(x, y, t)$ – прогиб ледового покрова (вертикальное смещение из положения равновесия $z = 0$), τ – время запаздывания, $\nabla^4 = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4/\partial y^4$, $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_i – плотность льда, $p(x, y, 0, t)$ – гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность ледового покрова, $P(x, y, t)$ – внешняя нагрузка, $\tilde{x} = (x - Ut)/L$, $\tilde{y} = y/L$, t – время, P_0 – амплитуда внешнего давления, c_1 и c_2 – безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующие размер области приложения давления к ледовой пластине, g – модуль ускорения силы тяжести и $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения жидкости в канале, вызванного прогибом пластины.

Система уравнений (1) – (4) дополняется краевыми условиями

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad (5)$$

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad w, \varphi \rightarrow 0 \quad (|(x - Ut)/L| \rightarrow \infty), \quad (6)$$

В первой и второй главах рассматривается симметричное движение нагрузки: $P_1(\tilde{x}) = P_1(-\tilde{x})$, $P_2(\tilde{y}) = P_2(-\tilde{y})$. Задача (1) – (6) решается в системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ – безразмерные переменные, $\tilde{z} = z/L$), движущейся совместно с нагрузкой, в которой прогибы и деформации предполагаются не зависящими от времени. Решение полученной безразмерной системы зависит от семи безразмерных параметров, которые описывают соотношение

сторон канала, характеристики льда и внешнюю нагрузку. Целью решения задачи является нахождение прогибов ледового покрова и на их основе определение максимальных деформаций в ледовом покрове для заданных значений этих параметров. В линейной теории гидроупругости деформации изменяются линейно по толщине ледовой пластины и в середине пластины деформации равны нулю. В данной работе рассматриваются только положительные деформации, которые соответствуют удлинению и растяжению ледового покрова. Максимальные деформации вычисляются на основе найденных прогибов льда w как максимальное собственное значение тензора деформаций для пластины. Использование линейной теории гидроупругости для определения деформаций в ледовом покрове является корректным, если выполнено условие $w_x^2 + w_y^2 \ll 1$ и деформации не превышают критического значения ϵ_{cr} для рассматриваемых параметров льда. В данной работе используется значение $\epsilon_{cr} = 8 \cdot 10^{-5}$, используемое в ¹⁶.

В параграфе 1.2 представлен метод решения задачи. Задача решается с использованием преобразования Фурье в направлении x . Затем образ Фурье прогибов льда $w^F(\xi, y)$, где ξ – параметр преобразования Фурье, ищется в виде разложения на нормальные моды колебаний упругой балки поперек канала $\psi_j(y)$ с коэффициентами разложения $a_j(\xi)$. Функции $\psi_j(y)$ являются решением спектральной задачи

$$\psi_j^{IV} = \lambda_j^4 \psi_j \quad (-1 < y < 1), \quad \psi_j = \psi_j' = 0 \quad (y = \pm 1). \quad (7)$$

Функции $\psi_j(y)$ ортонормированы. В итоге задача сводится к бесконечной алгебраической системе линейных уравнений для коэффициентов $a_j(\xi) = a_j^R(\xi) + ia_j^I(\xi)$, которая решается методом редукции. Прогиб $w(x, y)$ определяется применением обратного преобразования Фурье к $w^F(\xi, y)$

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(y) \int_0^{\infty} (a_j^R(\xi) \cos(\xi x) - a_j^I(\xi) \sin(\xi x)) d\xi. \quad (8)$$

Бесконечный ряд в (8) ограничивается N_{mod} членами. Бесконечная область интегрирования ограничивается системой конечных интервалов $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ с фиксированным шагом $\Delta\xi$. Соответствующие интегралы решаются аналитически с использованием линейной аппроксимации функций $a_j^R(\xi)$ и $a_j^I(\xi)$ на каждом интервале $[\xi_n, \xi_{n+1}]$.

¹⁶Brocklehurst, P. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall / P. Brocklehurst, A. A. Korobkin, E. I. Părău // J Eng Math. – 2010. – 68. – p. 215-231.

В параграфе 1.3 приведены основные результаты численного исследования задачи и соответствующие графики. Сформулированная задача решается численно для пресноводного льда со следующими параметрами: $\rho_i = 917 \text{ кг/м}^3$, $E = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.1 \text{ с}$, $h_i = 0.1 \text{ м}$ и $H = 2 \text{ м}$. Внешняя нагрузка приложена к площадке $2 \text{ м} \times 2 \text{ м}$. Скорость движения нагрузки U и полуширина канала L варьируются в расчетах. Представлено исследование влияния скорости движения нагрузки, коэффициента запаздывания и ширины канала на получаемые результаты. Исследована зависимость качественного формирования прогибов льда в зависимости от соотношения скорости движения нагрузки и критических скоростей. Если скорость нагрузки меньше первой критической скорости для периодических гидроупругих волн в канале ¹⁰ (в канале счетное число критических скоростей и они могут быть упорядочены по возрастанию), то прогиб формируется в локальной области под нагрузкой. Если скорость движения нагрузки больше n числа критических скоростей, но меньше $n + 1$ критической скорости, то в зависимости от числа n прогиб льда формируется в виде совокупности гидроупругих волн, распространяющихся от нагрузки и затухающих с увеличением расстояния. Пример расчетов безразмерных прогибов ледового покрова и распределения деформаций как функции от x вдоль центральной линии канала $y = 0$ и вдоль стенок $y = \pm L$ показаны на Рисунке 1. Для скорости нагрузки $U = 7 \text{ м/с}$ только одна периодическая гидроупругая волна с волновым числом $k \approx 0.43 \text{ м}^{-1}$ имеет фазовую скорость, равную скорости движения нагрузки. Это волновое число соответствует длине волны 14.6 м , которое равно расстоянию между двумя последующими пиками прогибов льда на Рисунке 1. Прогибы и деформации в пластине становятся очень малыми позади нагрузки на расстоянии 20 м . Максимальные деформации достигаются на стенках канала. Для рассмотренных параметров задачи и критического значения 8×10^{-5} ожидается, что при $U = 7 \text{ м/с}$ лед начнет разрушаться в непосредственной близости от стенок канала для $P_0 > 4 \text{ кПа}$. Также в данном параграфе исследовано поведение прогибов льда при движении со скоростью, близкой к критической, и показано, что влияние жестких стенок является важным фактором и для очень широких каналов.

В параграфе 1.4 на основе рассмотрения двух упрощенных моделей проведено исследование влияния гидродинамического давления на получаемые результаты. Показано, что для задач взаимодействия ледового покрова и внешних нагрузок в канале динамическая компонента давления жидкости имеет важнейшее значение и должна учитываться даже для пластин большой толщины и медленной скорости движения внешней нагрузки.

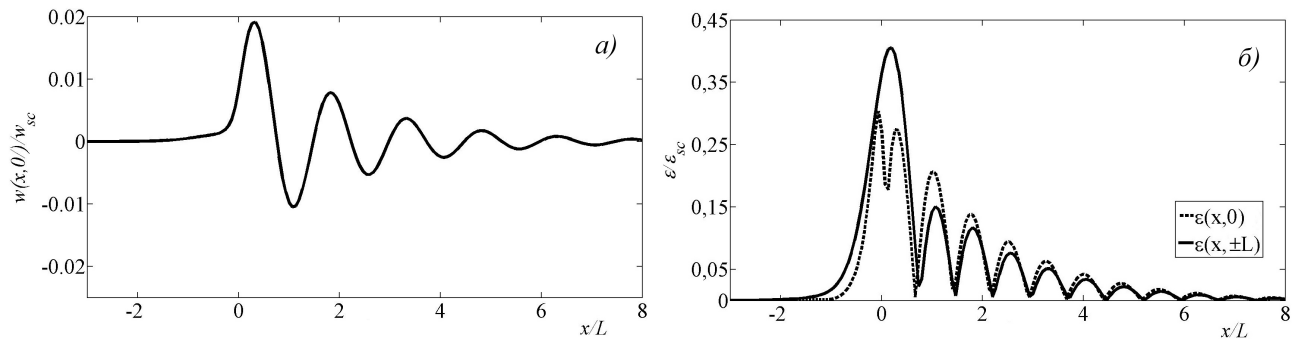


Рис. 1: Прогибы ледовой пластины вдоль центральной линия канала (а) и деформации (б) для скорости движения нагрузки $U = 7$ м/с. Здесь $L = 10$ м, $h_i = 10$ см и $H = 2$ м. Деформации вдоль центральной линии показаны пунктирной линией, а деформации на стенках – сплошной линией (б).

В параграфе 1.5 доказана единственность классического решения задачи о колебаниях ледового покрова в канале в результате движения внешней нагрузки. Рассмотрены случаи упругой и вязкоупругой ледовой пластины. Система уравнений (1) – (6) дополняется начальными условиями. При этом внешняя нагрузка (4) может иметь произвольную форму. Под классическим решением полученной системы уравнений понимается пара функций $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$, определенных на Ω_T и Π_T и обладающих свойствами: (а) функции w и φ удовлетворяют рассматриваемой системе уравнений и краевым и начальным условиям как непрерывные в Ω_T и Π_T функции; (б) функции w , w_x , φ и φ_x стремятся к 0 при $|x| \rightarrow \infty$; (в) существуют непрерывные в области Π_T производные функции w до третьего порядка, и данные производные ограничены при $|x| \rightarrow \infty$. Здесь $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $\Pi_T = \Pi \times [0, T]$, $t \in [0, T]$ и Ω и Π области, занимаемые каналом и пластиной соответственно. Основным результатом данного параграфа состоит в следующей теореме.

Теорема 1. *Классическое решение рассматриваемой задачи единственно.*

При доказательстве теоремы используются методы и подходы, развитые в ¹⁷.

Во **второй главе** рассматривается нестационарная задача о движении внешней нагрузки по упругому ледовому покрову вдоль замороженного канала. В параграфе 2.1 сформулирована постановка задачи о нестационарных прогибах ледового покрова в канале. Постановка задачи аналогична постановке параграфа 1.1 первой главы с некоторыми изменениями. Во первых, ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной в рамках теории Кирхгофа-Лява и коэффициент запаздывания τ отсутствует. Во вторых, система уравнений (1) – (6) дополняется начальными условиями при $t = 0$.

¹⁷Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука. – 2008. – 365 с.

Нагрузка движется с постоянной скоростью U , вызывает прогиб льда и может создавать нестационарные гидроупругие волны, распространяющиеся от нагрузки. Эти волны затухают в отдалении от нагрузки при конечных временах. Требуется определить поведение прогибов льда $w(x, y, t)$ и распределение максимальных деформаций $\varepsilon(x, y, t)$ в ледовом покрове при больших временах для заданных параметров задачи.

В параграфе 2.2 приведен метод решения рассматриваемой задачи и вывод асимптотических формул. Первый этап решения повторяет метод из первой главы – к уравнениям системы применяется преобразование Фурье вдоль канала. При этом предварительное обезразмеривание не проводится, а зависимость от времени искомым функций сохраняется. Далее задача решается введением дисперсионных соотношений (частот) $\omega_n(\xi)$ периодических гидроупругих волн в канале и разложением образа Фурье прогибов льда на гидроупругие моды колебаний ледового покрова в канале. Эти моды описывают поведение системы вода-лед для заданного канала и не зависят от внешней нагрузки и ее скорости. Свойства гидроупругих мод позволяют разрешить преобразованное уравнение пластины и разделить переменные y и t . Дальнейшее решение приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения коэффициентов разложения $a_n(\xi, t)$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2(\xi) a_n = H_n(\xi) e^{-i\xi U t}. \quad (9)$$

Здесь $H_n(\xi)$ – функция, определенная в ходе решения. Начальные условия для уравнений (9) следуют из начальных условий для $w(x, y, t)$. После определения $a_n(\xi, t)$ решение для прогибов льда выписывается в виде суммы интегралов обратного преобразования Фурье, слагаемые в которых могут иметь особенности. В сумме эти слагаемые компенсируют друг друга (особенность отсутствует). Далее интеграл от каждого слагаемого исследуется в отдельности при больших временах. Интегралы с особенностями понимаются в смысле главного значения. Основным результатом данной главы является вывод асимптотических формул, дающих простую интерпретацию формирования прогибов льда. Прогибы льда представляются в виде суммы функций $w_n(X, y, t)$, $X = x - Ut$. Функции $w_n(X, y, t)$ при больших временах t представляются в виде суммы локальных прогибов $w_n^{(loc)}(X, y)$ в окрестности нагрузки и двух волн, распространяющихся от нагрузки

$$w_n(X, y, t) = w_n^{(loc)}(X, y) - A_1^{(n)} \psi_n(\xi_1^{(n)}, y) \sin[\xi_1^{(n)} X] G_1^{(n)}(X) - A_2^{(n)} \psi_n(\xi_2^{(n)}, y) \sin[\xi_2^{(n)} X] G_2^{(n)}(X). \quad (10)$$

Произведения $\psi_n(\xi_1^{(n)}, y) \sin[\xi_1^{(n)} X]$ и $\psi_n(\xi_2^{(n)}, y) \sin[\xi_2^{(n)} X]$ в (10) соответствуют n -ой моде гидроупругой волны, распространяющейся в канале. Волновые числа этих волн такие, что соответствующие фазовые скорости равны скорости движения нагрузки U . Абсолютные значения $A_1^{(n)}$ и $A_2^{(n)}$ являются амплитудами этих волн. Число таких волн, их амплитуды и волновые числа вычисляются в ходе решения задачи.

В параграфе 2.3 приведены результаты численного исследования асимптотического решения. Вычисления проведены для экспериментального ледового бассейна в Приамурском государственном университете имени Шолом Алейхема. Параметры бассейна: $H = 1$ м, $L = 1.5$ м, $h_i = 3$ мм, $\rho_l = 1024$ кг/м³, $\rho_i = 920$ кг/м³, $E = 4.2 \cdot 10^9$ Н/м² и $\nu = 0.33$ (см. ¹⁸). Внешняя нагрузка приложена к области 20×20 см² и движется вдоль центральной линии ледового бассейна. Численный анализ асимптотических формул показывает, что короткие волны генерируются перед нагрузкой, а длинные волны – сзади нагрузки. Короткие волны имеют меньшую амплитуду, но большую кривизну. Получено, что деформации вдоль центральной линии канала спереди нагрузки всегда выше, чем деформации на стенках. Однако деформации на стенках больше деформаций вдоль центральной линии сзади нагрузки.

В параграфе 2.4 проведено численное исследование нестационарных прогибов льда при конечных временах рассматриваемой в данной главе задачи. Предложен алгоритм, позволяющий привести решение, полученное с помощью обратного преобразования Фурье, к аналитическим формулам в виде суммы стационарных и нестационарных прогибов при конечных временах в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Важным значением является количество мод, для которых скорость движения нагрузки больше минимальной фазовой скорости. Такие моды вносят качественное отличие в формирование прогибов льда. Остальные моды с более высокими номерами имеют корректирующий характер и важны только для определения поведения ледового покрова вблизи нагрузки. Показано, что при увеличении времени решение для нестационарных прогибов ледовой пластины выходит на установившийся режим в системе координат, связанной с нагрузкой.

В третьей главе рассматривается задача определения прогибов льда и деформаций в ледовом покрове, вызванных движением подводного тела вдоль замороженного канала. Подводное тело моделируется трехмерным диполем с постоянной интенсивностью, движущимся с постоянной скоростью.

¹⁸Zemlyak, V. L. The Research on Deformed State of Hummocked Ice Caused by Motion of a Submarine Vessel / V. L. Zemlyak, V. M. Kozin, N. O. Baurin, K. I. Ipatov // Proceedings of the Twenty-seventh International Ocean and Polar Engineering Conference San Francisco, CA, USA, June 25-30, 2017. – p. 1332-1337.

Диполь, движущийся в канале с жесткими стенками, моделирует сферическое твердое тело, если интенсивность диполя достаточно мала. Для диполя с большой интенсивностью форма соответствующего трехмерного подводного твердого тела также может быть определена.

В параграфе 3.1 сформулирована постановка задачи. Рассматривается система уравнений (1) – (6) со следующими изменениями. Гидродинамическое давление задано нелинейным интегралом Коши-Лагранжа

$$p(x, y, z, t) = -\rho_l \left(\partial\varphi_{tot}/\partial t + |\nabla\varphi_{tot}|^2/2 + gz \right). \quad (11)$$

Здесь φ_{tot} – итоговый потенциал скорости течения в канале, определяемый по формуле $\varphi_{tot}(x, y, z, t) = \varphi^D(X, y, z) + \varphi^E(X, y, z, t)$, где φ^D – потенциал скорости течения в канале, вызванный диполем и φ^E – потенциал скорости течения в канале, вызванный прогибом ледового покрова. Потенциал φ_{tot} удовлетворяет условиям непротекания на стенках и дне канала, нелинейному кинематическому условию на границе лед-жидкость

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{tot}}{\partial z} \quad (z = w(x, y, t)), \quad (12)$$

и уравнению Лапласа в области течения жидкости, исключая небольшую окрестность диполя, где

$$\varphi_{tot} \sim -I \frac{x - x_0(t)}{r^3}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (13)$$

Здесь I – интенсивность диполя, $x_0(t), y_0, z_0$ – координаты диполя. Потенциал $\varphi^D(X, y, z)$ определяется методом зеркальных отображений. Целью исследования является решение рассматриваемой задачи при больших временах в рамках линейной теории гидроупругости, когда прогиб ледового покрова $w(X, y)$ и потенциал $\varphi^E(X, y, z)$ не зависят от времени t . Эти функции затухают при $|X| \rightarrow \infty$ в рамках модели вязкоупругой пластины. Выделяется несколько случаев, характеризующихся одной формулой для масштабов прогибов ледового покрова

$$w_{sc} = L \text{Fr}^2 \varepsilon^3 \min(\mu^4, 1). \quad (14)$$

Здесь $\text{Fr} = U/\sqrt{gL}$ – число Фруда, $\varepsilon = R/L$ – безразмерный параметр, который описывает интенсивность диполя, R – радиус соответствующей сферы в неограниченной жидкости, $\mu = L/L_c$ – безразмерная жесткость ледового покрова, $L_c = (D/\rho_l g)^{1/4}$. Условие малых прогибов льда $w_{sc}/L \ll 1$ выполнено когда, как минимум, один из этих параметров мал. Постановка для каждого случая рассматривается по отдельности.

В параграфе 3.2 приведен алгоритм численного решения случая, в котором рассматривается движение диполя с малой интенсивностью. Система безразмерных уравнений, описывающих прогиб ледовой пластины в системе координат, движущейся совместно со слабым диполем, близка по постановке к задаче движения внешней нагрузки вдоль канала с постоянной скоростью, рассмотренной в первой главе. Вместо внешней нагрузки используется распределение давления по поверхности пластины от диполя $(\partial\tilde{\varphi}^D/\partial\tilde{x})(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ в правой части уравнения пластины. Решение полученной стационарной задачи зависит от четырех безразмерных параметров, описывающих канал, лед, жидкость и от безразмерных координат диполя \tilde{y}_0, \tilde{z}_0 . Требуется определить установившийся прогиб ледового покрова $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и распределение деформаций в ледовом покрове $\tilde{\varepsilon}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Метод решения повторяет метод из первой главы с учетом введения нечетных балочных функций для исследования несимметричного поперек канала движения диполя.

В параграфе 3.3. приведены результаты численного исследования задачи. Основной упор сделан на анализ влияния размещения диполя в сечении канала на искомые функции. Задача взаимодействия ледового покрова в канале и движущегося диполя решается численно для пресноводного льда с параметрами, использованными в главе 1. Скорость U и координаты диполя в сечении канала y_0 и z_0 изменяются в представленных расчетах. Показано, что деформации в ледовом покрове сильно зависят от расположения диполя в сечении канала и асимметричности траектории его движения. Максимальные деформации достигаются, в большинстве случаев, над диполем и спереди него, или возле стенки, если диполь движется вблизи одной из стенок.

В заключении приведены основные результаты работы:

1. Для задачи движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль вязкоупругого ледового покрова в канале построено решение в виде бегущей волны. Проведено исследование полученного решения, в частности, определена зависимость формирования прогибов льда от скорости движения нагрузки и ее соотношения к критическим скоростям гидроупругих волн, оценено влияние жестких стенок на характеристики прогибов и деформаций в ледовом покрове. Определено влияние размеров канала, скорости движения нагрузки, гидродинамического давления и значения коэффициента запаздывания на получаемые результаты. Показано, что учет стенок канала важен как для узких, так и для широких каналов.

2. Доказана единственность классического решения для нестационарной задачи о колебаниях ледового покрова в канале под действием внешней нагрузки.

3. Для нестационарной задачи движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль упругого ледового покрова в канале построено аналитическое решение при больших временах. Проведен анализ полученных аналитических формул для прогибов ледового покрова. С использованием численных и аналитических методов решена нестационарная задача о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль замороженного канала при конечных временах. Поведение нестационарных прогибов льда исследовано при разных значениях времени. Получена согласованность результатов задач, рассмотренных в пунктах 1 и 3.

4. Проведено исследование корректности гипотез линейной теории гидроупругости в постановке задачи о взаимодействии вязкоупругого ледового покрова и движущегося диполя подо льдом в канале с учетом нелинейных кинематического условия и интеграла Коши-Лагранжа. Оригинальная постановка сведена к трем разным случаям, в которых сохраняется условие малых колебаний ледового покрова. С использованием численных и аналитических методов решена задача прямолинейного движения диполя с малой интенсивностью под вязкоупругой ледовой пластиной вдоль канала. Оценено влияние расположения диполя в сечении канала на прогибы и деформации в ледовом покрове.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. Ice response to an underwater body moving in a frozen channel // *Applied Ocean Research* 91 (2019) 101877.
2. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Applied Ocean Research*. – 2019. Vol. 86. – p. 154–165.
3. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления // *Вычислительные технологии*. – 2019. – 24 (2). – с. 111–128.
4. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A. The ice response to an oscillating load moving along a frozen channel // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2018. – 193, 012072.
5. Shishmarev K.A., Papin A.A. Uniqueness of a solution of an ice plate oscillation problem in a channel // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. – 2018. – 11(4). – p. 449–458.

6. Шишмарев К.А. Математическая модель взаимодействия ледового покрова и гидродинамического диполя в канале // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. № 1 (93). – с. 148–151.
7. Шишмарев К.А. Устойчивость решения по начальным данным задачи о колебаниях ледового покрова в канале // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – № 4 (96). – с. 159–163.
8. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A. Deflection of ice cover caused by an underwater body moving in channel // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 894. № 1. – 012109.
9. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2016. – V. 59. – p. 313–326.
10. Папин А.А., Шишмарев К.А. Однозначная разрешимость задачи об упругих колебаниях ледового покрова в канале // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. № 1 (89). – с. 157–162.
11. Шишмарев К.А. Влияние ширины канала на вязкоупругие колебания ледового покрова под действием движущейся нагрузки // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – № 1 (89). – с. 196–201.
12. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. № 1-1 (85). – с. 126–131.
13. Шишмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – № 1-2 (85). – с. 189–194.
14. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1-1 (73). – с. 55–59.
15. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1-2 (73). – с. 23–27.

Подписано в печать 2019 г. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ
Отпечатано в типографии АлтГУ,
656049, Барнаул, улица Димитрова, 66
тел.: (8-3852)36-70-67

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997