

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Титова Анастасия Афанасьевна

**ЗАДАЧА О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НАД
СИНГУЛЯРНЫМ СТОКОМ**

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Старовойтов Виктор Николаевич

Новосибирск — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Формулировка задачи в общем виде	15
1.1 Постановка задачи	15
1.2 Преобразование задачи	18
1.2.1 Комплексная формулировка задачи	18
1.2.2 Задача в полукруге D^*	22
1.2.3 Метод Леви-Чивита	26
1.2.4 Формулы обращения Гильберта	35
1.2.5 Уравнение для s_0	37
1.3 Полная формулировка задачи в терминах τ и θ	38
1.3.1 Математическая постановка задачи	38
1.3.2 Форма свободной границы	39
1.3.3 Определение поля скорости жидкости	41
1.4 Формулировка задачи в виде операторного уравнения	42
1.4.1 Преобразование формулы обращения Гильберта	43
1.4.2 Формулировка задачи в виде операторного уравнения	44
1.4.3 Свойства функции μ	47
1.4.4 Свойства оператора H	49
Глава 2. Исследование задачи с точечным стоком на плоском горизонтальном дне	57
2.1 Однозначная разрешимость операторного уравнения	57
2.2 Решение исходной задачи	63
2.2.1 Гладкость решения	63
2.2.2 Исследование формы свободной границы	66
Глава 3. Доказательство разрешимости задачи с точечным стоком во впадине на дне	73
3.1 Разрешимость вспомогательной задачи со срезкой	73

3.2	Переход от задачи со срезкой к исходной задаче	79
3.3	Определение параметра s_0	84
Глава 4. Доказательство разрешимости задачи с точечным		
	стоком в вершине треугольного выступа на дне	89
4.1	Однозначная разрешимость операторного уравнения	89
4.2	Определение параметра s_0	94
4.3	Исследование формы свободной границы	100
Заключение		105
Список литературы		106
Приложение А. Дополнительные сведения		113

Введение

К задачам со свободной границей относится большой круг классических задач о движении идеальной жидкости с частично заданными границами. В работе речь будет идти только о плоских задачах, поскольку в двумерном случае разработано много различных методов исследования. Следует отметить, что существуют работы, в которых исследуются трёхмерные задачи со свободной границей (см., например, [1–3]). Однако многие методы, используемые в двумерных задачах, не подходят для изучения трёхмерных задач. Эти задачи требуют дополнительного исследования.

Задачи со свободными границами часто исследуются в предположении, что жидкость несжимаемая, а течение потенциально. В результате такого подхода потенциал скорости подчиняется уравнению Лапласа в области течения, что позволяет воспользоваться теорией аналитических функций комплексного переменного, в частности, техникой конформных отображений. Неизвестная часть границы определяется с помощью заданных на ней краевых условий. Первое условие заключается в том, что эта граница свободна от напряжений (динамическое условие), а второе — в том, что вектор поля скорости жидкости направлен по касательной к ней (кинематическое условие). Второе условие означает, что свободная граница является линией тока, то есть на ней справедливо уравнение Бернулли.

Задачи со свободными границами представляют большой раздел гидродинамики и входят в классические учебники (см. [4–8]). Решение многих задач по этой тематике можно найти в монографиях Л. Н. Сретенского [3], В. Н. Монахова [9], Д. В. Маклакова [10], Дж. Лайтхилла [11] и Дж. Уизема [12]. Там же содержится обширная библиография по этому вопросу.

В научной литературе существует большое количество численных и механических исследований плоских поверхностных гравитационных волн в однородной несжимаемой жидкости, вызванных различными возмущениями. Для нас особый интерес представляют работы об установившемся потоке с

источником или стоком в канале жидкости конечной глубины и бесконечной длины [13–24]. Дж.-М. Ванден-Броек и Дж. Келлер в работе [13] исследовали задачи со свободной границей со стоком, погруженным в жидкость и на дне, имеющем уклон в обе стороны от точки стока. Г. Хокинг в своих работах занимался исследованием задач с точечным источником и точечным стоком на плоском горизонтальном дне [14–16]. Также в этих работах он рассматривал случаи, когда сток находится в вершине наклонного дна или в потоке над плоским горизонтальным дном. Случаи наклонного дна и потока бесконечной глубины рассматривались и в других работах (см., например, [25; 26]).

Поток жидкости в задачах со свободными границами обычно характеризуется числом Фруда:

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gh}},$$

где V — характерная скорость жидкости, g — ускорение свободного падения, а h — характерная длина. В данной диссертационной работе будет предполагаться, что на бесконечности скорость жидкости стремится к равномерному потоку скорости V и высоты h , которые будут взяты в качестве характерных величин.

Можно выделить два основных свойства установившегося течения со стоком в канале жидкости глубины h и бесконечной длины. Первое свойство состоит в том, что при достаточно больших значениях числа Фруда не существует волн, уходящих на бесконечность. Свойство монотонности свободной поверхности было установлено численно уже в первых статьях на эту тему (см., например, [13; 14; 17; 18]). Такое поведение свободной границы можно объяснить следующим образом. Скорость распространения возмущений (волн) по поверхности жидкости в линейной задаче равна \sqrt{gh} . Волны на поверхности генерируются стоком. При достаточно больших числах Фруда скорость волны меньше, чем направленная к стоку скорость потока, поэтому волна «затягивается» в сток и исчезает с поверхности (см. [14; 16; 27]). В общем случае, волны возникают в течениях с малым числом Фруда, то есть в так называемом докритическом случае (см., например, [13]). Как отмечено в работах [20; 22; 27; 28], в случае источника

волны присутствуют всегда.

Второе, не столь очевидное, свойство течения заключается в том, что на свободной границе над стоком образуется касп. Этот факт также был обнаружен численно в уже упомянутых работах [13; 14; 17; 18]. Следует заметить, что при малых числах Фруда над стоком образуется критическая точка, в которой скорость жидкости равна нулю. Наличие критической точки является типичным для задачи со стоком на дне, которое имеет уклон в обе стороны от точки стока (см. [25] и также [13–15; 26]).

Математические исследования задач со свободными границами проводились во многих работах. Первые точные результаты о существовании волн установившегося вида были получены А. И. Некрасовым [29; 30]. Им был применён метод Леви-Чивита [31]. Этот метод заключается в том, что сначала область течения конформно отображается на верхний единичный полукруг, причём свободная граница переходит на полуокружность, а затем определяется течение в полукруге. Далее, функция скорости представляется в виде комплексной экспоненты, вещественная часть степени которой отвечает за величину скорости, а мнимая — за направление. После подстановки этой функции в уравнение Бернулли и его дифференцирования получается уравнение, которое теперь называется уравнением Некрасова [29; 30]. Впоследствии близкие результаты при других предположениях были получены Т. Леви-Чивита [32; 33] и Д. Я. Стройком [34; 35]. Следует отметить, что А. И. Некрасов и его последователи изучали гладкие решения этого уравнения, однако есть случай, когда на свободной поверхности образуется излом, что соответствует так называемым волнам Стокса предельной амплитуды [36–42]. Некоторые результаты, полученные в этих работах [41; 42], оказались востребованы в данной диссертационной работе. Обширную библиографию по этому вопросу можно найти в книге Л. Н. Сретенского [3].

Существенным вкладом в исследование волновых движений явилась книга Л. В. Овсянникова и его соавторов [43]. На примере плоской задачи о волнах в однослойной жидкости Л. В. Овсянниковым изложено обоснование теории мелкой воды (в малом по времени) в классах аналитических функций [44]. Н. И. Макаренко был проведён предельный переход из трёх-

мерной модели неустановившейся волны к уравнениям двухслойной мелкой воды, что существенно расширило классы задач, в которых применима эта теория (см. [45]). Кроме того, Н. И. Макаренко и его соавторы занимались доказательством разрешимости задач со свободными границами в течении стратифицированной жидкости [46–48]. Решение задачи о волнах, вызванных движением круглого цилиндра над горизонтальным дном, было получено в работах [49; 50]. В уже упомянутой ранее книге В. И. Налимовым была рассмотрена приближенная модель теории неустановившихся течений [51]. Им также была доказана разрешимость задачи об обтекании финитного препятствия на горизонтальном дне в случае докритического течения и установлено, что на бесконечности происходит волнообразование [52]. Кроме того, он занимался исследованием задачи о вытекающем из-под горизонтального щита течении идеальной несжимаемой жидкости [53; 54].

Следует также упомянуть и другие близкие по тематике исследования работы. Задачи об уединённой волне изучались во многих работах (см., например, [12; 55–59]). Доказательство существования уединённой волны было дано М. А. Лаврентьевым [55] и К. О. Фридрихсом и Д. Г. Хайерсом [56] с применением методов теории конформных преобразований. Неединственность решения этой задачи была доказана П. И. Плотниковым [59]. Разрешимость задачи со свободной границей течения жидкости над неровным дном в сверхкритическом случае была получена Р. Жербе с помощью топологических методов [60]. В. Н. Монахов занимался исследованием задач со свободными границами для эллиптических систем уравнений. В его монографии [9] рассмотрены различные вопросы по этой теме, в частности, установлена разрешимость задачи об истечении жидкости из-под полигонального щита. В работах Е. В. Семенко [61–63] задача о стационарном течении невязкой несжимаемой жидкости над узким препятствием и задача о гидравлическом скачке исследуются с применением преобразования Фурье, что позволяет получить аналитическое представление решения задачи. О. М. Киселевым в работе [64] доказано существование сверхкритического течения в канале с полигональным неровным дном.

Диссертационная работа посвящена математическому исследованию задачи со свободной границей, в которой течение жидкости вызвано расположенным на дне сингулярным стоком. Следует отметить, что задачи с сингулярностями в потоке идеальной жидкости уже рассматривались. В частности, в книге М. Л. Милн-Томсона [4] построено решение задачи о точечном стоке в идеальной жидкости в полосе с заданными непроницаемыми прямыми границами. Плоская задача об источнике в потоке идеальной жидкости со свободной границей исследовалась в монографии Д. В. Маклакова [10]. Также в этой работе доказано существование волн на свободной поверхности при обтекании точечного вихря. Задача о сверхкритическом обтекании вихря также исследовалась в работе А. М. Тер-Киркорова [65]. Задача об обтекании вихря потоком жидкости бесконечной глубины рассматривалась в работе О. М. Киселева и В. А. Лазарева [66]. Несмотря на то, что математические исследования задач со свободными границами проводились во многих работах, задача со свободной границей и точечным стоком в потоке никем ранее не рассматривалась.

Общий метод исследования задачи примерно соответствует работам А. И. Некрасова [29; 30], Г. Кеди и Дж. Норбери [42] и состоит в том, что с помощью метода Леви-Чивита получено уравнение типа Некрасова, которое точно описывает свободную границу. Следует отметить, что уравнение Некрасова включает в себя две неизвестные функции, поэтому оно дополняется одной из формул обращения Гильберта [67; 68]. Таким образом, получается система интегро-дифференциальных уравнений, которая после некоторых преобразований переписывается в виде нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Существенной особенностью задачи с сингулярным стоком является то, что полученное уравнение типа Некрасова не является однородным, то есть у него нет решения, тождественно равного нулю. Поэтому нет возможности искать достаточно малые решения этого уравнения. В этом и состоит отличие задачи со стоком от работ по волнам на поверхности потока тяжёлой идеальной жидкости (работы без особенностей, процитированные выше). Стоит ещё отметить, что возможен вывод различных форм уравнения типа Некрасова. Они эквивалентны, однако требуют различных подходов к исследованию.

Не все эти варианты оказались удачными. Был выбран тот, который дал возможность доказать разрешимость задачи.

Разрешимость исходной задачи при определённых условиях эквивалентна разрешимости в гильбертовом пространстве уравнения, упомянутого выше. Эти условия продиктованы корректностью преобразований, производимых при выводе уравнения. В частности, свободная граница не должна опрокидываться. В работе показывается, что эти условия выполняются, если число Фруда не является слишком малым.

Рассмотрены три варианта задачи: случай с плоским горизонтальным дном; случай со стоком во впадине на дне канала; случай, когда сток находится в вершине выступа на дне. В случае плоского горизонтального дна разрешимость задачи в гильбертовом пространстве устанавливается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, а затем с помощью принципа сжимающих отображений доказывается его единственность. Следует отметить, что ограничение снизу на число Фруда, которое гарантирует существование решения, значительно ниже, чем то, которое получено для его единственности. Доказано, что свободная поверхность является аналитической всюду кроме точки каспа. Вблизи точки каспа получена асимптотика свободной границы.

В случае задач с неровным дном не удалось получить столь полные результаты. Разрешимость задачи доказана с ограничениями на высоту выступа и на глубину ямки. Дело в том, что в этих случаях задача ещё больше усложняется и включает нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода. Тем не менее, используемые ограничения носят конкретный характер, а не просто доказано, что задача разрешима в случае дна, достаточно мало отличающегося от плоского.

Цели и задачи исследования. Основной целью работы является доказательство разрешимости задачи со свободной границей о течении идеальной несжимаемой жидкости, вызванном сингулярным стоком на дне, а также исследование свойств решения и формы свободной границы.

Методы исследования. Исследование проводилось с использованием теории функций комплексной переменной, анализа Фурье и теории

дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

— Выведена математическая постановка двумерной стационарной задачи со свободной границей потока идеальной несжимаемой жидкости с точечным стоком на дне для трёх видов дна: плоское горизонтальное, с треугольной впадиной и с треугольным выступом. Задача приведена к общему виду и записана эквивалентная формулировка в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве с некоторыми параметрами (число Фруда и геометрические характеристики выступа). Установлены некоторые свойства для входящего в уравнение оператора, а также выведены априорные оценки решения.

— Исследована задача со свободной границей и точечным стоком на плоском горизонтальном дне. Доказана однозначная разрешимость задачи, когда число Фруда превышает некоторое конкретное значение. Установлено, что на свободной границе в точке над стоком образуется касп. Проведено доказательство аналитичности свободной границы всюду кроме точки каспа. Исследована асимптотика свободной границы вблизи точки каспа, а также доказано, что не происходит её опрокидывание.

— Проведено исследование задачи со свободной границей и точечным стоком во впадине на дне. Доказана разрешимость задачи «в малом», а именно при выполнении некоторого условия на параметры задачи. Показано, что при этих условиях не происходит опрокидывания свободной границы.

— Исследована задача со свободной границей и точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне. Доказана разрешимость задачи «в малом», то есть при некотором условии на параметры задачи. Установлено, что при достаточно больших значениях числа Фруда не происходит опрокидывание свободной границы.

Личный вклад автора. Автор диссертационной работы принимал активное участие в получении результатов, отражённых в совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, доказательстве теорем, обсуждении полученных результатов, а также оформлении

результатов в виде публикаций. Результаты, представленные в третьей и четвёртой главах, получены автором самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Научная новизна. Выработан общий подход к решению задачи со свободной границей с точечным стоком на дне. Доказана однозначная разрешимость задачи со свободной границей с сингулярным стоком в случае плоского дна, а также доказана разрешимость задачи, когда сток находится во впадине или в вершине треугольного выступа на дне. Все основные результаты диссертации являются новыми, подтверждены полными доказательствами и представляют научный интерес.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших математических и численных исследований задач со свободными границами о потоке идеальной несжимаемой жидкости, инициированном стоком на дне, а также связанных с ними неоднородных операторных уравнений.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, основана на строгости математических доказательств.

Апробация работы. Представленные в диссертации результаты докладывались и обсуждались на 9 научных конференциях:

- Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, посвящённая 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, 29 февраля–2 марта 2016, г. Новосибирск;
- 54-ая международная научная студенческая конференция (МНСК), 16–20 апреля 2016, г. Новосибирск;
- Russian-French Workshop “Mathematical Hydrodynamics”, August 22–27, 2016, Novosibirsk;
- XI всероссийская конференция молодых ученых “Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии”, 20–23 марта, 2017, Кемеровская обл., пос. Шерегеш;

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 6–11 июля, 2018, г. Суздаль;
- Международная школа-конференция “Соболевские чтения”, посвящённая 110-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева 10–16 декабря 2018, г. Новосибирск;
- Международная конференция “Математика в приложениях” в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова, 4–10 августа 2019, г. Новосибирск;
- IX Международная конференция по математическому моделированию, посвящённая 75-летию Владимира Николаевича Врагова, 27 июля–01 августа 2020, г. Якутск;
- IX Международная конференция, посвящённая 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, 7–11 сентября 2020, г. Новосибирск.

Результаты диссертации сообщались и обсуждались на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН Плотникова П. И. и д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманюка Е. В. (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. Ткачёва Д. Л. (ИМ СО РАН); на конкурсе научных работ молодых учёных ИГиЛ СО РАН.

Кроме того, некоторые результаты диссертации были представлены в виде серии докладов “Free surface of an ideal fluid flow with a singular sink” на семинаре факультета математики и прикладной математики в Критском университете, г. Ираклион, Греция, с 01 октября 2019 по 29 ноября 2019г.

Публикации. Результаты по теме диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах [69–72].

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 76 наименований работ, и приложения. Главы разделены на параграфы, параграфы — на пункты. Полный объём диссертации составляет 114 страниц и содержит 10 рисунков. Нумерация формул и рисунков в диссертации двойная: первое число — номер главы, в которой приводится формула или рисунок, второе

число — порядковый номер формулы или рисунка в пределах главы.

Краткое содержание диссертации. В диссертационной работе рассмотрена задача со свободной границей о течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной непроницаемым дном снизу и свободной поверхностью сверху. Течение вызвано расположенным на дне точечным стоком, заданной интенсивности. В работе рассматривается три случая задачи, отличающиеся формой дна: плоское горизонтальное, с треугольной впадиной и с треугольным выступом.

В первой главе параграф 1.1 посвящён математической формулировке задачи в физической плоскости. Вводится параметр, характеризующий угол наклона сторон треугольной впадины (выступа). Плоское дно соответствует нулевому значению этого параметра. В параграфе 1.2 задача переписывается в комплексной форме и область течения жидкости конформно отображается на верхний единичный полукруг. Далее, ведётся исследование течения в полукруге. В параграфе 1.3 представлена полная математическая формулировка задачи в новых переменных, а также показано, как вернуться назад к физическим переменным. В параграфе 1.4 получена эквивалентная формулировка задачи в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Доказаны некоторые вспомогательные утверждения и оценки.

Во второй главе проведено исследование разрешимости задачи со свободной границей и точечным стоком на плоском горизонтальном дне. В параграфе 2.1 с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке доказано существование решения задачи для чисел Фруда, превышающих некоторое конкретное значение. Далее, с помощью принципа сжимающих отображений доказана единственность решения уравнения для несколько бóльших чисел Фруда. В параграфе 2.2 с помощью теоремы Х. Леви доказано, что свободная граница является аналитической всюду, кроме точки над стоком, где она имеет касп. Чтобы показать, что конформное отображение является взаимно однозначным и существует решение исходной задачи, было установлено при каких значениях числа Фруда не происходит опрокидывания свободной границы. Кроме того, в этом параграфе исследована асимптотика свободной границы при приближении к точке над стоком.

В третьей главе задача со свободной границей рассматривается в случае, когда сток находится в треугольной впадине на дне. Сначала, в параграфе 3.1, с помощью принципа сжимающих отображений доказывается разрешимость вспомогательной задачи со срезкой, а затем, в параграфе 3.2, показывается, что при определённых условиях от срезки можно отказаться. В параграфе 3.3 доказывается зависимость решения операторного уравнения от параметров, характеризующих геометрию треугольной впадины, и существование решения исходной задачи.

В четвёртой главе задача со свободной границей рассматривается в случае, когда точечный сток находится в вершине треугольного выступа на дне. Метод доказательства, используемый в этой главе, отличается от предыдущей главы. В параграфе 4.1 с помощью принципа сжимающих отображений доказано, что существует единственное решение этого операторного уравнения при некотором условии на число Фруда. В параграфе 4.2 показано, что решение непрерывно зависит от параметра, характеризующего треугольный выступ, и доказано, что при определённых значениях исходных параметров существует решение задачи. В параграфе 4.3 проведено исследование формы свободной границы. Установлено, что не происходит опрокидывания свободной границы при заданных числах Фруда.

Глава 1. Формулировка задачи в общем виде

В данной работе исследуется двумерная задача об установившемся течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченном свободной поверхностью сверху и непроницаемым дном снизу. Течение вызвано расположенным на дне точечным стоком интенсивности $m > 0$. Будут рассмотрены различные варианты задачи, отличающиеся друг от друга только формой дна. Для удобства в этой главе мы запишем общую формулировку этих случаев.

1.1 Постановка задачи

Для описания постановки задачи будем использовать прямоугольную декартову систему координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с началом O в точке стока. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область течения жидкости, ограниченная сверху свободной границей Γ и дном Γ_0 снизу (см. рис. 1.1). Предполагается, что течение симметрично относительно оси Oy .

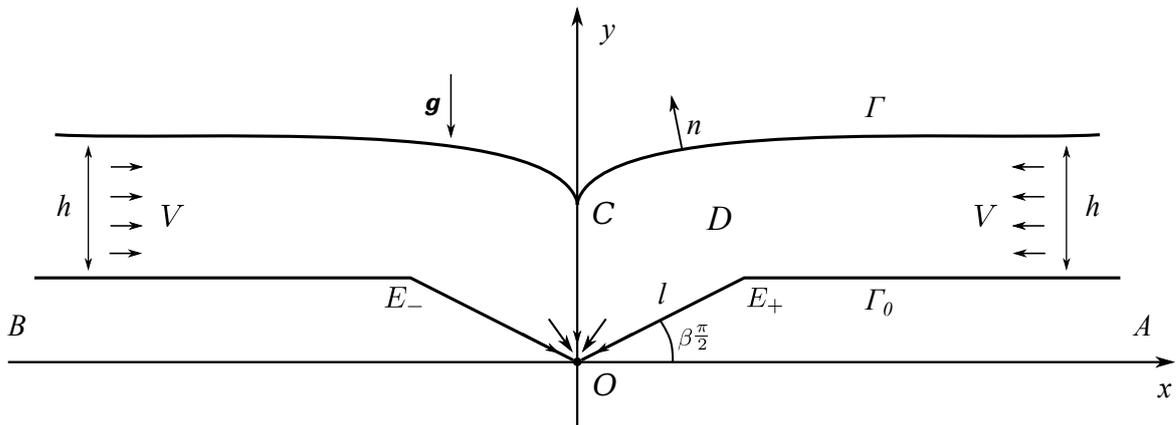


Рисунок 1.1 — Картина течения в физической плоскости.

Дно Γ_0 имеет следующий вид: на промежутках (B, E_-) и (E_+, A) дно горизонтальное, где A и B — бесконечно удалённые точки; отрезки $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$ образуют симметричный наклон, $E_- = (-l \cos \beta \frac{\pi}{2}, l \sin \beta \frac{\pi}{2})$

и $E_+ = (\ell \cos \beta \frac{\pi}{2}, \ell \sin \beta \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-1, 1)$ — параметр угла наклона, ℓ — длина отрезков $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$.

В зависимости от параметра $\beta \in (-1, 1)$ будут рассматриваться три случая задачи: при $\beta = 0$ дно является горизонтальной прямой (см. рис 1.2а), при $\beta > 0$ на дне образуется треугольная впадина, в нижней точке которой находится сток (см. рис 1.2б), а при $\beta < 0$ сток расположен в вершине треугольного выступа (см. рис 1.2в).

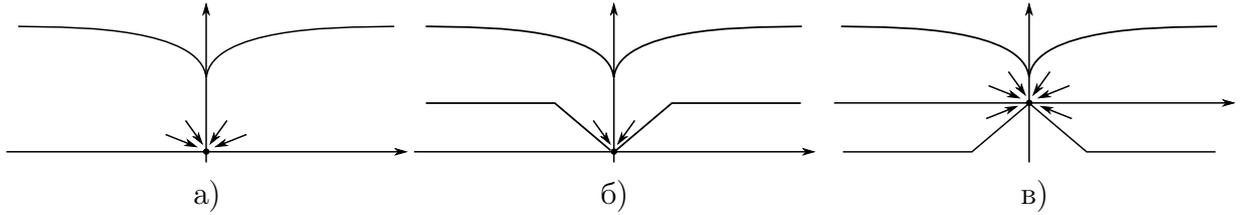


Рисунок 1.2 — Картина течений рассматриваемых в работе задач.

а) при $\beta = 0$; б) при $\beta > 0$; в) при $\beta < 0$.

На жидкость действует сила тяжести $\rho \mathbf{g}$, где $\rho = const$ — плотность жидкости, $\mathbf{g} = (0, -g)$, g — величина ускорения свободного падения. Требуется определить поле скорости жидкости $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, а также форму свободной границы Γ . Поле скорости \mathbf{v} удовлетворяет в D стационарным уравнениям Эйлера идеальной несжимаемой жидкости:

$$v_x \partial_x \mathbf{v} + v_y \partial_y \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0, \quad (1.2)$$

где p — давление. Эти уравнения необходимо дополнить краевыми условиями, которые описаны ниже.

Во всех точках дна Γ_0 кроме точки O выполняется условие непротекания. Это означает, что скорость является касательной к границе:

$$v_y = 0 \quad \text{на} \quad (B, E_-) \cup (E_+, A), \quad (1.3a)$$

$$v_x \sin \frac{\pi}{2} \beta + v_y \cos \frac{\pi}{2} \beta = 0 \quad \text{на} \quad (E_-, O), \quad (1.3b)$$

$$-v_x \sin \frac{\pi}{2} \beta + v_y \cos \frac{\pi}{2} \beta = 0 \quad \text{на} \quad (O, E_+). \quad (1.3c)$$

В точке O находится сток интенсивности m , поэтому поле скорости

при приближении к этой точке имеет следующую асимптотику (см. [73, гл. III, § 2]):

$$\left(\mathbf{v}(x, y) + \frac{m}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$.

Поскольку верхняя граница Γ является неизвестной, на ней ставится не одно, а два условия. Первое условие — кинематическое:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.5)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к Γ . Второе условие на Γ — динамическое. Оно состоит в том, что давление на Γ постоянно и совпадает с атмосферным. Поскольку в уравнения Эйлера входит только градиент давления, давление определяется с точностью до произвольной постоянной. Поэтому будем считать, что

$$p = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (1.6)$$

Нам осталось определить поведение жидкости в бесконечно удалённых точках A и B (см. рис. 1.1). Будем предполагать, что на бесконечности течение жидкости стремится к равномерному потоку глубины h и постоянной скорости $V > 0$:

$$\mathbf{v}(x, y) \rightarrow (\mp V, 0) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (1.7)$$

Значение постоянной V не может быть произвольным. В силу несжимаемости жидкости, эта постоянная должна быть связана с интенсивностью стока следующим соотношением:

$$2Vh = \frac{(1 - \beta)}{2} m. \quad (1.8)$$

В правой части стоит коэффициент $(1 - \beta)/2$, поскольку только часть стока (с углом $\pi(1 - \beta)$) отводит жидкость из области D .

Кроме того, будет предполагаться, что поле скорости является потенциальным. Это значит, что существует называемая потенциалом скорости скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y)$, такая что $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, то есть

$v_x = \partial_x \varphi$ и $v_y = \partial_y \varphi$. Это предположение является довольно существенным упрощением задачи. Обычно оно оправдывается следующими соображениями. Если при рассмотрении нестационарной задачи в начальный момент жидкость покоилась, то её завихренность (ротор поля скорости) в этот момент должна равняться нулю. В двумерном случае завихренность сохраняется вдоль траекторий частиц жидкости, поэтому она будет равна нулю в D и во все последующие моменты времени. Из односвязности области D поле скорости будет потенциальным. Если предположить, что при неограниченном возрастании времени течение становится установившимся, то оно будет решением стационарной задачи. При этом его потенциальность сохранится. Конечно, стабилизация решения совсем не является очевидным фактом и требует строго обоснования. Мы, однако, этого делать не будем и просто постулируем потенциальность скорости.

1.2 Преобразование задачи

1.2.1 Комплексная формулировка задачи

Уравнение потенциального течения в области D

В силу уравнения неразрывности (1.2) потенциал скорости является гармонической в D функцией:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{в } D. \quad (1.9)$$

Кроме того, из уравнения неразрывности (1.2) следует, что существует скалярная функция $\psi = \psi(x, y)$, такая что $v_x = \partial_y \psi$ и $v_y = -\partial_x \psi$. Эта функция постоянна вдоль линии тока и называется функцией тока. Она

тоже является гармонической в D :

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{в } D. \quad (1.10)$$

Следует отметить, что функция тока и потенциал скорости определяются с точностью до произвольных постоянных.

Если φ и ψ уже известны, то можно вычислить поле скорости. После этого давление можно найти из уравнения (1.1). Давление, однако, нас не интересует, и мы не будем его определять. Поэтому достаточно ограничиться решением уравнения (1.9) или (1.10) с соответствующим образом переписанными краевыми условиями. Здесь мы столкнемся с небольшой трудностью, связанной с тем, что условие (1.6) включает в себя давление и его необходимо записать в другом виде.

Краевые условия на Γ_0 и Γ

Из краевых условий (1.3) и (1.5) следует, что каждая из границ Γ_0 и Γ состоит из двух линий тока. Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_0^+ &= \Gamma_0 \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, & \Gamma_0^- &= \Gamma_0 \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}, \\ \Gamma^+ &= \Gamma \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, & \Gamma^- &= \Gamma \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция ψ постоянна на Γ_0^+ , Γ_0^- , Γ^+ и Γ^- . Поскольку задача симметрична относительно оси Oy , вектор скорости на интервале (O, C) этой оси направлен вертикально (вниз). Следовательно, этот интервал тоже является линией тока. Функция ψ определена с точностью до константы, поэтому без ограничения общности мы можем положить, что она обращается в нуль в точке C . Из непрерывности функции тока всюду за исключением точки O мы получим, что

$$\psi|_{\Gamma} = \psi|_{(O, C)} = 0. \quad (1.11)$$

Рассмотрим линии тока Γ_0^+ и Γ_0^- . Разность значений функции тока в двух точках области совпадает с расходом потока жидкости через кривую, соединяющую эти точки. Поэтому

$$\psi|_{\Gamma_0^+} = Vh, \quad \psi|_{\Gamma_0^-} = -Vh. \quad (1.12)$$

Нам осталось переписать условие (1.6) в форме, не включающей давление. Для этого воспользуемся принципом Бернулли. Поскольку Γ^+ и Γ^- являются линиями тока, величина $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p/\rho + gy$ сохраняет на Γ постоянное значение. В силу того, что $p = 0$ на Γ , получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}(x, y)|^2 + gy = K = \text{const} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (1.13)$$

Постоянную K можно определить, устремив в этом равенстве x к $\pm\infty$:

$$K = \frac{1}{2}V^2 + g\left(h + \ell \sin \beta \frac{\pi}{2}\right).$$

Безразмерная постановка задачи

Перепишем задачу в безразмерной форме. Для этого введём число Фруда

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gh}}.$$

Величина V не является исходным параметром задачи, поэтому, используя соотношение (1.8), мы получим, что

$$\text{Fr}^2 = (1 - \beta)^2 \frac{m^2}{16gh^3}.$$

Для краткости введём новое обозначение:

$$\alpha = \frac{\text{Fr}^2}{2}. \quad (1.14)$$

Взяв h и V в качестве характерных величин и оставив для безразмерных величин прежние обозначения, мы получим (1.9), (1.10) и (1.11). При этом для безразмерной скорости мы получим те же самые выражения: $v_x = \partial_x \varphi = \partial_y \psi$, $v_y = \partial_y \varphi = -\partial_x \psi$, где x , y , φ и ψ — безразмерные величины.

Условия (1.12) и (1.13) переписутся следующим образом:

$$\psi|_{\Gamma_0^+} = 1, \quad \psi|_{\Gamma_0^-} = -1, \quad (1.15)$$

$$\alpha |\mathbf{v}(x, y)|^2 + y = \alpha + \left(1 + \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma. \quad (1.16)$$

Наконец, (1.4) и (1.7) примут такой вид:

$$\left(\mathbf{v}(x, y) + \frac{2}{(1-\beta)\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\mathbf{r}| \rightarrow 0, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{v}(x, y) \rightarrow (\mp 1, 0) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Заметим, что $y \rightarrow 1 + \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если $(x, y) \in \Gamma$.

Комплексная формулировка задачи

В силу двумерности поставленной задачи удобно воспользоваться комплексными переменными. Заметим, что функции φ и ψ удовлетворяют системе уравнений Коши–Римана. Поэтому комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ является в D аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Комплексная скорость $v = v_x - iv_y$ является производной комплексного потенциала по z : $v = dw/dz$. Принцип Бернулли (1.16) в комплексной формулировке примет следующий вид:

$$\alpha |v(z)|^2 + \text{Im } z = \alpha + \left(1 + \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при } z \in \Gamma. \quad (1.18)$$

Условие (1.17) переписывается так:

$$\left(v(z) + \frac{2}{(1-\beta)\pi} \frac{1}{z}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (1.19)$$

Комплексная формулировка остальных краевых условий на Γ_0 и Γ не вызывает затруднений.

1.2.2 Задача в полукруге D^*

Конформное отображение области D на полукруг D^*

С помощью конформного отображения переведём область D в единичный верхний полукруг D^* с центром в нуле плоскости комплексного переменного t (см. рис. 1.3). Обозначим это отображение через F . Поскольку область D является неизвестной, мы на данном этапе не можем определить и отображение F . Однако для каждой области D указанного вида такое отображение существует и определено единственным образом. Это следует из классической теоремы о конформных отображениях А.1 (см. в прил. А). Доказательство этой теоремы приведено, например, в [73, гл. II, § 3].

Отображение F определяется однозначно по трём точкам на границе, поэтому будем задавать его таким образом, чтобы точка O переходила в точку $O^*(t = 0)$, точка C — в точку $C^*(t = i)$, бесконечно удалённые точки A и B — в точки $A^*(t = 1)$ и $B^*(t = -1)$ соответственно. Мы задаём четыре точки, а не три, поскольку задача симметрична относительно оси Oy .

Нижняя граница Γ_0 при отображении F переходит в горизонтальный диаметр $\Gamma_0^* = [B^*, A^*]$, а свободная граница Γ переходит в полуокружность

$$\Gamma^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z = G(e^{i\sigma}), \sigma \in [0, \pi]\}. \quad (1.20)$$

Обозначим через $E_+^*(t = s_0)$ и $E_-^*(t = -s_0)$ образы точек E_+ и E_-

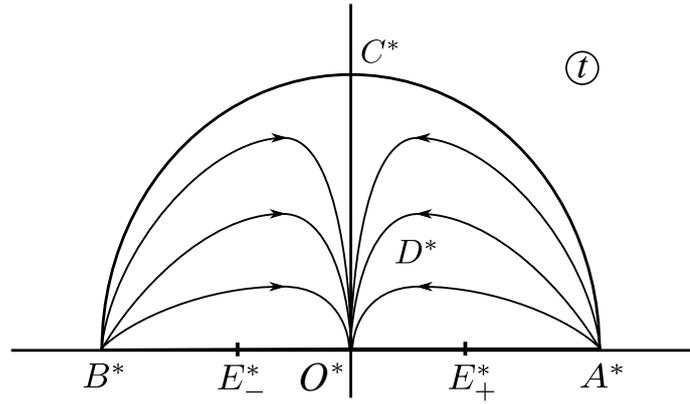


Рисунок 1.3 — Схема течения в единичном полукруге D^* .

соответственно, где s_0 — положительное вещественное число из интервала $(0, 1)$. Значение s_0 , вообще говоря, не известно и должно быть определено в процессе решения задачи.

Течение в полукруге D^*

Обозначим через G обратное к F отображение. Тогда функция $w^*(t) = w(G(t))$ является комплексным потенциалом течения в области D^* и на границах Γ^* и Γ_0^* будут выполняться условия непротекания. В точке O^* плоскости t по-прежнему будет точечный сток, а в точках A^* и B^* — одинаковые точечные источники (см. рис. 1.3).

Справедливо и обратное утверждение. Если w^* есть комплексный потенциал течения в D^* , причём в точках A^* и B^* находятся два одинаковых точечных источника, а в точке O^* — точечный сток, то функция $w(z) = w^*(F(z))$ является комплексным потенциалом течения в области D .

Для вычисления комплексного потенциала $w^* = \varphi^* + i\psi^*$ отобразим полукруг D^* на верхнюю полуплоскость с помощью функции Жуковского:

$$T = -\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = -\frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Точка O^* перейдёт в бесконечно удалённую точку, точки A^* , B^* и C^* — в

точки $T = -1, T = 1$ и $T = 0$ соответственно. Вся граница области D^* за исключением точки O^* перейдёт в вещественную прямую плоскости комплексной переменной T . Всюду на вещественной прямой кроме точек $T = \pm 1$ выполняется условие непротекания, а в этих точках расположены одинаковые источники некоторой интенсивности $M > 0$ (см. рис. 1.4).

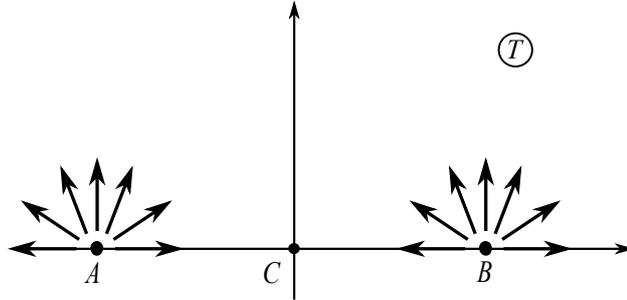


Рисунок 1.4 — Схема течения в верхней полуплоскости комплексной переменной T .

Комплексный потенциал такого течения будет иметь вид:

$$W(T) = \frac{M}{2\pi} (\ln(T - 1) + \ln(T + 1) + \gamma_0) = \frac{M}{2\pi} (\ln(T^2 - 1) + \gamma_0),$$

где γ_0 — комплексная постоянная, которую мы можем выбрать по своему усмотрению. Она появилась вследствие того, что комплексный потенциал определён с точностью до аддитивной константы. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} w^*(t) = W(T(t)) &= \frac{M}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right) + \frac{M\gamma_0}{2\pi} \\ &= \frac{M}{\pi} (\ln(t + 1) + \ln(t - 1) - \ln 2t + \gamma_0/2). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Видим, что в точках $t = -1$ и $t = 1$ находятся источники интенсивности $M/2$, а в точке $t = 0$ — сток такой же интенсивности. Это соответствует предполагаемой ранее картине течения в D^* (см. рис. 1.3). Проверим, что кривые Γ_0^* и Γ^* являются линиями тока. Сначала рассмотрим Γ^* . Эта кривая является частью окружности единичного радиуса, поэтому на ней $t = e^{i\sigma}$, где $\sigma \in (0, \pi)$. При таких значениях t мы будем иметь следующее

выражение для функции тока:

$$\psi^*(e^{i\sigma}) = \text{Im } w^*(e^{i\sigma}) = \frac{M}{\pi} \text{Im} \left(\ln(i \sin \sigma) + \frac{\gamma_0}{2} \right) = \frac{M}{2\pi} (\pi + \text{Im } \gamma_0).$$

Видим, что функция ψ^* является постоянной на Γ^* , поэтому эта кривая является линией тока. Возьмём постоянную γ_0 такой, чтобы ψ^* была равна нулю на Γ^* :

$$\gamma_0 = -\pi i. \quad (1.22)$$

Для того, чтобы показать, что Γ_0^* тоже является линией тока, перепишем выражение для w^* , используя определение логарифма:

$$w^*(t) = \frac{M}{\pi} \left(\ln |t+1| + \ln |t-1| - \ln 2|t| + i \left(\arg(t+1) + \arg(t-1) - \arg t - \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Значения аргумента мы будем брать из промежутка $(-\pi, \pi]$. Таким образом, для функции тока ψ^* мы получаем следующее представление:

$$\psi^*(t) = \frac{M}{\pi} \left(\arg(t+1) + \arg(t-1) - \arg t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Если $t \in (O^*, A^*)$, то $\arg(t+1) = 0$, $\arg(t-1) = \pi$ и $\arg t = 0$. Поэтому $\psi^*(t) = M/2 = \text{const}$ при $t \in (O^*, A^*)$. Следовательно, интервал (O^*, A^*) является линией тока. Если $t \in (B^*, O^*)$, то $\arg(t+1) = 0$, $\arg(t-1) = \pi$ и $\arg t = \pi$. Поэтому $\psi^*(t) = -M/2 = \text{const}$ при $t \in (B^*, O^*)$. Следовательно, интервал (B^*, O^*) тоже является линией тока.

Теперь мы можем определить постоянную M . Поскольку $\psi^*(F(z)) = \psi(z)$ и $F(\Gamma_0) = \Gamma_0^*$, из (1.15) будет следовать, что $M = 2$.

Таким образом, окончательное выражение для комплексного потенциала течения в полукруге D^* выглядит следующим образом:

$$w^*(t) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) - i = \frac{2}{\pi} \left(\ln(t+1) + \ln(t-1) - \ln 2t - i\pi/2 \right). \quad (1.23)$$

Заметим, что

$$\frac{dw^*(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}. \quad (1.24)$$

1.2.3 Метод Леви-Чивита

Функция Ω

В предыдущем пункте мы полностью определили течение в полукруге D^* . Если бы нам было известно отображение F , то мы смогли бы определить и комплексный потенциал течения в плоскости переменной z и, тем самым, решить задачу. Для определения этого отображения воспользуемся уравнением Бернулли (1.18), которое до настоящего момента оставалось неостребованным. Однако, сначала мы преобразуем искомую функцию.

Поскольку $w(z) = w^*(F(z))$,

$$v(z) = \frac{dw}{dz}(z) = \frac{dw^*}{dt}(F(z)) \frac{dF}{dz}(z).$$

Поэтому

$$v(G(t)) = \frac{dw^*}{dt}(t) \frac{dF}{dz}(G(t)) = \frac{dw^*}{dt}(t) \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)^{-1}. \quad (1.25)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{v(G(t))} \frac{dw^*}{dt}(t). \quad (1.26)$$

Если мы сможем определить функцию $v(G(t))$, то из этого уравнения найдём и отображение G .

Функция $v(z)$, как производная аналитической функции $w(z)$, сама является аналитической в области D . Из условия (1.19) следует, что $v(z)$ имеет полюс первого порядка в точке $O(z = 0)$. Функция G ведёт себя как $t^{1-\beta}$ в окрестности точки $t = 0$, так как область D имеет в точке $O(z = 0)$ излом. Поэтому функция $v(G(t))$ является аналитической в области D^* и, как следует из отмеченных выше свойств отображения G , имеет особенность порядка $1 - \beta$ в точке $O^*(t = 0)$. При стремлении t к точкам $A^*(t = 1)$ и $B^*(t = -1)$ функция $v(G(t))$ остаётся ограниченной и стремится к -1 и 1 соответственно.

Для краткости введём обозначение:

$$u(t) = v(G(t)). \quad (1.27)$$

Эта функция определена в D^* . Следуя методу Леви-Чивита, введём функцию

$$\widehat{\Omega}(t) = \hat{\theta}(t) + i\hat{\tau}(t)$$

с вещественными $\hat{\theta}$ и $\hat{\tau}$, такую что

$$u(t) = -(t + s_0)^{-\beta/2}(t - s_0)^{-\beta/2}t^{-(1-\beta)} e^{-i\widehat{\Omega}(t)}. \quad (1.28)$$

Функция $\widehat{\Omega}$ является аналитической в D^* , поскольку мы выделили особенности функции $u(t)$ перед экспонентой. Заметим, что функция $\hat{\theta}$ определена с точностью до постоянной $2\pi k$, где k — целое число. Мы зафиксируем одну ветвь этой функции, выбрав её значение в точке $t = 1$, а именно, $\hat{\theta}(1) = 0$.

Поясним, почему выбрана именно такая особенность функции u в точке $t = 0$. Выше было отмечено, что $G(t) \sim t^{1-\beta}$ вблизи точки $t = 0$ и $dG/dt \sim t^{-\beta}$. Согласно (1.25), $u(t) \sim t^{-1}t^\beta = t^{-(1-\beta)}$. Эта особенность и фигурирует в (1.28). Заметим, что если перейти к переменной z , сделав замену переменной $t = F(z)$ (то есть $z \sim t^{1-\beta}$ вблизи точки $t = 0$), то у функции $v(z)$ получим особенность z^{-1} в точке $z = 0$, что соответствует как раз точечному стоку в этой точке.

Краевое условие на Γ_0^*

Здесь мы определим значения функции $\hat{\theta}$ на границе Γ_0^* . Поскольку $-1 = e^{i\pi}$ и $t = |t| e^{i\sigma}$, где $\sigma = \arg t \in [0, \pi]$, представление (1.28) может быть переписано так:

$$u(t) = |t + s_0|^{-\beta/2}|t - s_0|^{-\beta/2}|t|^{-(1-\beta)} e^{\hat{\tau}(t)} e^{i(\pi - \vartheta(t) - \hat{\theta}(t))},$$

где $\vartheta(t) = (1 - \beta) \arg t + \frac{\beta}{2} \arg(t + s_0) + \frac{\beta}{2} \arg(t - s_0)$. На дне Γ_0 мы знаем направление скорости, которое удовлетворяет условиям (1.3). Чтобы найти $\hat{\theta}$ на Γ_0^* , заметим, что

$$v(G(t)) = v_x(G(t)) - iv_y(G(t)) = \operatorname{Re} u(t) + i \operatorname{Im} u(t).$$

Поэтому

$$v_x(G(t)) = -|t + s_0|^{-\beta/2} |t - s_0|^{-\beta/2} |t|^{-(1-\beta)} e^{\hat{\tau}(t)} \cos(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)),$$

$$v_y(G(t)) = -|t + s_0|^{-\beta/2} |t - s_0|^{-\beta/2} |t|^{-(1-\beta)} e^{\hat{\tau}(t)} \sin(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)).$$

Заметим, что отрезок $\Gamma_0^* = [B^*, A^*]$ лежит на вещественной оси, поэтому на ней $t = s \in [-1, 1]$. Обозначим через $\hat{\theta}_0$ след функции $\hat{\theta}$ на Γ_0^* . Таким образом, $\hat{\theta}_0$ определена на отрезке $[-1, 1]$. Граница Γ_0^* состоит из четырёх промежутков $(-1, -s_0)$, $(-s_0, 0)$, $(0, s_0)$ и $(s_0, 1)$, каждый из которых мы рассмотрим отдельно.

1. Пусть $s \in (-1, -s_0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t + s_0) = \arg(t - s_0) = \pi$, $v_x(G(t)) > 0$ и $v_y(G(t)) = 0$. Поэтому $\vartheta(t) = \pi$ и

$$\cos(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)) < 0 \quad \text{и} \quad \sin(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (-1, -s_0).$$

2. Пусть $s \in (-s_0, 0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t - s_0) = \pi$, $\arg(t + s_0) = 0$ и

$$v_x(G(t)) = |v(G(t))| \cos \frac{\pi}{2} \beta, \quad v_y(G(t)) = -|v(G(t))| \sin \frac{\pi}{2} \beta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2} \beta &= -\cos \left(\pi - \frac{\beta}{2} \pi + \hat{\theta}(t) \right), \\ \sin \frac{\pi}{2} \beta &= \sin \left(\pi - \frac{\beta}{2} \pi + \hat{\theta}(t) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\frac{\pi}{2}\beta = \frac{\beta}{2}\pi - \hat{\theta}(t)$ и

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (-s_0, 0).$$

3. Пусть $s \in (0, s_0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t + s_0) = 0$, $\arg(t - s_0) = \pi$ и

$$v_x(G(t)) = -|v(G(t))| \cos \frac{\pi}{2}\beta, \quad v_y(G(t)) = -|v(G(t))| \sin \frac{\pi}{2}\beta.$$

Поэтому

$$\cos \frac{\pi}{2}\beta = \cos \left(\frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t) \right), \quad (1.29a)$$

$$\sin \frac{\pi}{2}\beta = -\sin \left(\frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t) \right). \quad (1.29b)$$

Отсюда получим, что $\frac{\pi}{2}\beta = \frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)$ и

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (0, s_0).$$

4. Пусть $s \in (s_0, 1)$. В этом случае $\arg t = \arg(t + s_0) = \arg(t - s_0) = 0$, $v_x(G(t)) < 0$ и $v_y(G(t)) = 0$. Поэтому $\cos \hat{\theta}(t) > 0$ и $\sin \hat{\theta}(t) = 0$, откуда следует, что

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (s_0, 1).$$

Таким образом,

$$\hat{\theta}(t) = \text{Im}(i\hat{\Omega}(t)) = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im} t = 0. \quad (1.30)$$

Уравнение Бернулли на Γ^*

Тождество Бернулли (1.18) на границе Γ^* примет следующий вид:

$$\alpha |v(G(t))|^2 + \text{Im} G(t) = \alpha + 1 + \frac{\ell}{h} \sin \frac{\pi}{2}\beta. \quad (1.31)$$

Поскольку Γ^* есть часть единичной окружности, точки на ней представимы в виде $t = e^{i\sigma}$, где $\sigma \in [0, \pi]$. Подставив это представление в (1.31) и продифференцировав по σ , мы получим:

$$\alpha \frac{d|v(G(e^{i\sigma}))|^2}{d\sigma} + \operatorname{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma \in (0, \pi). \quad (1.32)$$

Вычислим $\operatorname{Im} dG(e^{i\sigma})/d\sigma$. Сначала заметим, что

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = \left. \frac{dG}{dt} \right|_{t=e^{i\sigma}} i e^{i\sigma},$$

Используя равенства (1.24), (1.26), (1.27) и (1.28), найдём, что

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{u(t)} \frac{dw^*}{dt} = -\frac{2}{\pi} e^{i\hat{\Omega}(t)} \frac{(t+s_0)^{\beta/2}(t-s_0)^{\beta/2}}{t^\beta} \frac{t^2+1}{t^2-1}. \quad (1.33)$$

Следовательно,

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{i((1-\beta)\sigma + \hat{\Omega}(t))} (t+s_0)^{\beta/2}(t-s_0)^{\beta/2} \Big|_{t=e^{i\sigma}} \operatorname{ctg} \sigma.$$

Для краткости введём следующие обозначения:

$$\tau(\sigma) = \hat{\tau}(e^{i\sigma}), \quad \theta(\sigma) = \hat{\theta}(e^{i\sigma}), \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (1.34)$$

В этих обозначениях, поскольку $\hat{\Omega}(e^{i\sigma}) = \theta(\sigma) + i\tau(\sigma)$,

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} e^{i((1+\beta)\sigma + \theta(\sigma))} (e^{i\sigma} + s_0)^{\beta/2} (e^{i\sigma} - s_0)^{\beta/2} \operatorname{ctg} \sigma.$$

Заметим, что $e^{i\sigma} \pm s_0 = \cos \sigma \pm s_0 + i \sin \sigma$. Поэтому

$$(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = \cos 2\sigma - s_0^2 + i \sin 2\sigma,$$

$$|e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2}.$$

Введём вещественные функции $\varrho(\sigma)$ и $\phi(\sigma)$, такие что

$$(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = (\varrho(\sigma) e^{i\phi(\sigma)})^2 = \varrho^2(\sigma) e^{2i\phi(\sigma)},$$

то есть

$$\varrho^2(\sigma) = |e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2},$$

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\arg(e^{i\sigma} + s_0) + \arg(e^{i\sigma} - s_0)).$$

Тогда

$$\operatorname{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \varrho^\beta(\sigma) \sin((1 - \beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma.$$

Теперь обратимся к первому слагаемому в левой части равенства (1.32). Учитывая (1.28), получим, что

$$|v(G(e^{i\sigma}))|^2 = |u(e^{i\sigma})|^2 = |e^{i\sigma} + s_0|^{-\beta} |e^{i\sigma} - s_0|^{-\beta} e^{2\tau(\sigma)} = \varrho^{-2\beta}(\sigma) e^{2\tau(\sigma)}.$$

После подстановки полученных выражений в (1.32) и небольших преобразований, получим следующую форму уравнения Бернулли при $\sigma \in (0, \pi)$:

$$\frac{d\varrho^{-3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma} - \frac{3}{\alpha\pi} \sin((1 - \beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma = 0. \quad (1.35)$$

Свойства функций τ и θ

Для начала исследуем свойства симметрии функций $\hat{\tau}$ и $\hat{\theta}$. Введём следующие обозначения: если $a = a_1 + ia_2$ с вещественными a_1 и a_2 , то положим

$$\tilde{a} = -a_1 + ia_2.$$

Другими словами, $\tilde{a} = -\bar{a}$, где $\bar{a} = a_1 - ia_2$ — комплексно сопряжённое к a число. Заметим также, что $\tilde{\tilde{a}} = \bar{\bar{a}} = -a$.

В силу симметрии задачи функции $u(t)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$u(\tilde{t}) = \widetilde{u(t)}, \quad u(\bar{t}) = \overline{u(t)}, \quad u(-t) = -u(t), \quad t \in D^*.$$

Исходя из постановки задачи, функция v_x является нечётной по x , а функция v_y — чётной:

$$v_x(-x, y) = -v_x(x, y), \quad v_y(-x, y) = v_y(x, y).$$

Поэтому функция комплексной скорости $v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\widetilde{v(z)} = -v_x(x, y) - iv_y(x, y) = v_x(-x, y) - iv_y(-x, y) = v(\tilde{z}), \quad z \in D.$$

Поскольку G является симметричным относительно вещественной оси конформным отображением, для него справедливо такое же соотношение:

$$\widetilde{G(t)} = G(\tilde{t}), \quad t \in D^*.$$

Так как $u(t) = v(G(t))$, получим, что

$$\widetilde{u(t)} = u(\tilde{t}), \quad t \in D^*.$$

Из этого соотношения легко следует, что

$$\hat{\tau}(\tilde{t}) = \hat{\tau}(t), \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} (1 - \beta) \arg \tilde{t} + \frac{\beta}{2} \arg(\tilde{t} + s_0) + \frac{\beta}{2} \arg(\tilde{t} - s_0) + \hat{\theta}(\tilde{t}) \\ = \pi - (1 - \beta) \arg t - \frac{\beta}{2} \arg(t + s_0) - \frac{\beta}{2} \arg(t - s_0) - \hat{\theta}(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\arg \tilde{t} = \pi - \arg t$ и

$$\arg(\tilde{t} + s_0) + \arg(\tilde{t} - s_0) = \pi - \arg(t - s_0) + \pi - \arg(t + s_0),$$

последнее равенство можно переписать так:

$$\hat{\theta}(\tilde{t}) = -\hat{\theta}(t). \tag{1.37}$$

Нетрудно видеть, что условия (1.36) и (1.37) для функций τ и θ , определённых в (1.34), записываются в следующем виде:

$$\tau(\pi - \sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(\pi - \sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (1.38)$$

Из симметричности отображения G относительно вещественной оси также следует, что для него справедливо соотношение:

$$\overline{G(t)} = G(\bar{t}), \quad t \in D^*.$$

Тогда

$$v(\overline{G(t)}) = \overline{v(G(t))} = \overline{u(t)}$$

и

$$\hat{\tau}(\bar{t}) = \hat{\tau}(t).$$

Это условие для функции τ , используя равенство (1.36), записывается в виде:

$$\tau(\pi + \sigma) = \tau(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (1.39)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (1.35) нам потребуется знать значения функций θ и τ в некоторых точках. Из (1.30) следует, что

$$\theta(0) = \theta(\pi) = 0,$$

а из (1.37) — что $\theta(\pi/2) = 0$.

Поскольку $u(t) \rightarrow -1$ при $t \rightarrow 1$,

$$-(1 - s_0^2)^{-\beta/2} e^{-\hat{\theta}(1)} e^{\hat{\tau}(1)} = -1.$$

Используя (1.30) и (1.38), найдём, что

$$\hat{\tau}(1) = \hat{\tau}(-1) = \ln(1 - s_0^2)^{\beta/2},$$

то есть

$$\tau(0) = \tau(\pi) = \ln(1 - s_0^2)^{\beta/2}.$$

Значение $\tau(\pi/2)$ нам неизвестно.

Уравнение Некрасова

Продолжим преобразование уравнения Бернулли. Проинтегрировав уравнение (1.35) от 0 до произвольного σ , мы получим:

$$\varrho^{-3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} - \varrho^{-3\beta}(0) e^{3\tau(0)} = \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma \sin((1-\beta)s + \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds.$$

Заметим, что $\varrho^2(0) = 1 - s_0^2$ и $e^{3\tau(0)} = (1 - s_0^2)^{3\beta/2}$. Поэтому

$$\varrho^{-3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} = 1 + \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma \sin((1-\beta)s + \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds.$$

Далее,

$$\frac{d\varrho^{-3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma} = \varrho^{-3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} \left(3\tau'(\sigma) - 3\beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} \right),$$

где $\tau'(\sigma) = d\tau(\sigma)/d\sigma$. Подставив это выражение в (1.35), мы придём к уравнению типа уравнения Некрасова:

$$\tau'(\sigma) = \beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\sin((1-\beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \sin((1-\beta)s + \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds}. \quad (1.40)$$

Уравнение Некрасова включает две неизвестные функции τ и θ , поэтому необходимо найти ещё какое-либо соотношение, которое их связывает. Для этого воспользуемся формулами обращения Гильберта.

1.2.4 Формулы обращения Гильберта

Функции τ и θ , определённые в (1.34), являются следами на верхней полуокружности окружности вещественной и мнимой частей аналитической в полукруге D^* функции $i\hat{\Omega} = -\hat{\tau} + i\hat{\theta}$. Поскольку $\hat{\theta}$ равна нулю при $Im t = 0$, функция $i\hat{\Omega}$ с помощью принципа симметрии Шварца может быть аналитически продолжена на единичный круг $D_{\circ}^*(|t| < 1)$. Мы оставим за продолженными функциями прежние обозначения, а функции τ и θ будем считать заданными на отрезке $[-\pi, \pi]$. Из принципа симметрии Шварца следует, что

$$\tau(-\sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi]. \quad (1.41)$$

Поскольку $\hat{\Omega}$ является аналитической функцией в круге D_{\circ}^* , для её предельных значений на окружности справедливы формулы обращения Гильберта (см., [67, гл. 1, §6] или [68, гл. 3, §33]):

$$\tau(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds + \hat{\tau}(0), \quad (1.42)$$

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds + \hat{\theta}(0), \quad (1.43)$$

где $\sigma \in [-\pi, \pi)$. Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения.

Нам достаточно одного дополнительного уравнения к уравнению Некрасова. Мы будем использовать только (1.43), поскольку значение $\hat{\tau}(0)$ нам неизвестно. Таким образом, как следует из (1.30), $\hat{\theta}(0) = 0$. Поэтому

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds. \quad (1.44)$$

Как было показано ранее, функции τ и θ обладают некоторыми свойствами симметрии, которые позволяют записать формулу обращения Гильберта (1.44) с интегралом по четверти окружности. Сначала, используя симметрию функций τ и θ , преобразуем эту формулу таким образом, чтобы она включала только интеграл по интервалу $(0, \pi)$. Запишем формулу (1.44)

В таком виде:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds.$$

Проведём замену переменной $s = \pi + \gamma$ во втором интеграле и воспользуемся свойством (1.39):

$$\int_\pi^{2\pi} \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds = \int_0^\pi \tau(\pi+\gamma) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma-\sigma}{2} \right) d\gamma = - \int_0^\pi \tau(\gamma) \operatorname{tg} \frac{\gamma-\sigma}{2} d\gamma.$$

Применив тригонометрическую формулу

$$\operatorname{ctg} \sigma - \operatorname{tg} \sigma = 2 \operatorname{ctg} 2\sigma,$$

мы в итоге получим:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau(s) \operatorname{ctg}(s-\sigma) ds. \quad (1.45)$$

Теперь преобразуем эту формулу таким образом, чтобы в ней присутствовал интеграл только по интервалу $(0, \pi/2)$. Как следует из (1.45),

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) \operatorname{ctg}(s-\sigma) ds + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \tau(s) \operatorname{ctg}(s-\sigma) ds. \quad (1.46)$$

Используя (1.38), легко получить, что

$$\int_{\pi/2}^\pi \tau(s) \operatorname{ctg}(s-\sigma) ds = - \int_0^{\pi/2} \tau(s) \operatorname{ctg}(s+\sigma) ds.$$

Поэтому

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s-\sigma) - \operatorname{ctg}(s+\sigma)) ds. \quad (1.47)$$

1.2.5 Уравнение для s_0

Нам осталось определить параметр s_0 . Пусть s — параметр длины дуги на Γ_0^* , отсчитываемый от точки стока направо. Интегрируя уравнение (1.33) по отрезку вещественной оси от 0 до s_0 и учитывая (1.29) и (1.30), мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{h} \left(\cos \beta \frac{\pi}{2} + i \sin \beta \frac{\pi}{2} \right) \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} \left(\cos \beta \frac{\pi}{2} + i \sin \beta \frac{\pi}{2} \right) ds. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\ell}{h} = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds.$$

Из этого уравнения можно найти s_0 . Функцию $\hat{\tau}$ можно определить в круге D_0^* с помощью формулы Пуассона (см. [74, с. 125]):

$$\hat{\tau}(s) = \frac{(1 - |s|^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tau(\sigma)}{|e^{i\sigma} - s|^2} d\sigma.$$

С помощью замены переменных и свойств (1.38) функции $\hat{\tau}$, нетрудно переписать эту формулу с интегралом по четверти окружности:

$$\hat{\tau}(s) = \frac{(1 - |s|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\sigma) \left(\frac{1}{|e^{i\sigma} - s|^2} + \frac{1}{|e^{i\sigma} + s|^2} \right) d\sigma.$$

Заметим, что $\hat{\tau}$ зависит от s_0 , поскольку от s_0 зависит функция τ .

1.3 Полная формулировка задачи в терминах τ и θ

1.3.1 Математическая постановка задачи

В этом пункте мы соберём все полученные уравнения и сформулируем задачу в терминах функций τ и θ , определённых в (1.34). В силу симметричности течения относительно мнимой оси, задачу (1.1)–(1.8) можно сформулировать в терминах функций τ и θ при $\sigma \in (0, \pi/2)$:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds, \quad (1.48)$$

$$\tau'(\sigma) = \beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\omega(\sigma)}{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds}, \quad (1.49)$$

где

$$\omega(\sigma) = \sin((1 - \beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma, \quad (1.50)$$

$$\varrho^2(\sigma) = |e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2}, \quad \varrho \geq 0, \quad (1.51)$$

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\arg(e^{i\sigma} + s_0) + \arg(e^{i\sigma} - s_0)). \quad (1.52)$$

Функции τ и θ должны удовлетворять краевым условиям:

$$\tau(0) = \tau(\pi) = \ln(1 - s_0^2)^{\beta/2}, \quad \theta(0) = \theta(\pi/2) = 0. \quad (1.53)$$

Восстановить функции τ и θ на всём промежутке $[0, 2\pi]$ можно, используя свойства симметрии:

$$\tau(\pi - \sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(\pi - \sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (1.54)$$

$$\tau(-\sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi]. \quad (1.55)$$

Заметим также, что функции τ и θ зависят от неизвестного параметра

$s_0 \in (0, 1)$, значение которого можно найти, решив следующее уравнение:

$$\frac{\ell}{h} = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds, \quad (1.56)$$

где значения функции $\hat{\tau}$ можно вычислить с помощью формулы Пуассона:

$$\hat{\tau}(s) = \frac{(1 - |s|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\sigma) \left(\frac{1}{|e^{i\sigma} - s|^2} + \frac{1}{|e^{i\sigma} + s|^2} \right) d\sigma. \quad (1.57)$$

Таким образом, мы получили эквивалентную постановку исходной задачи в виде системы (1.49)–(1.57).

1.3.2 Форма свободной границы

Прежде чем приступить к доказательству разрешимости системы (1.49)–(1.57), проведём небольшое исследование формы свободной границы. Свободную границу Γ можно определить в параметрическом виде:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \tilde{x}(\sigma), y = \tilde{y}(\sigma), \sigma \in (0, \pi)\}.$$

Для краткости введём функцию:

$$\eta(\sigma) = (1 - \beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma). \quad (1.58)$$

Поскольку

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} e^{i\eta(\sigma)} \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)},$$

из (1.20) следует, что функции \tilde{x} и \tilde{y} находятся из следующих соотношений:

$$\frac{d\tilde{x}(\sigma)}{d\sigma} = \operatorname{Re} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \cos(\eta(\sigma)) \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)}, \quad (1.59a)$$

$$\frac{d\tilde{y}(\sigma)}{d\sigma} = \operatorname{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \sin(\eta(\sigma)) \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)}, \quad (1.59b)$$

$$\tilde{x}(\pi/2) = 0, \quad \tilde{y}(0) = 1 + \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}.$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{d\tilde{y}(\sigma)}{d\sigma} \left(\frac{d\tilde{x}(\sigma)}{d\sigma} \right)^{-1} = \operatorname{tg}(\eta(\sigma)),$$

то есть $\eta(\sigma) + \pi k$ есть угол наклона касательной к Γ в точке $(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma))$, где k — некоторое целое число. Поскольку при $\sigma = 0$ угол равен 0, получим, что $k = 0$ при $\sigma \in [0, \pi/2)$. При $\sigma = \pi$ угол равен π , поэтому $k = 0$ при $\sigma \in (\pi/2, \pi]$. Таким образом, $\eta(\sigma)$ есть угол наклона свободной границы Γ , изображенный на рис. 1.5. На этом рисунке также изображён касательный вектор $\mathbf{q} = (d\tilde{x}/d\sigma, d\tilde{y}/d\sigma)$.

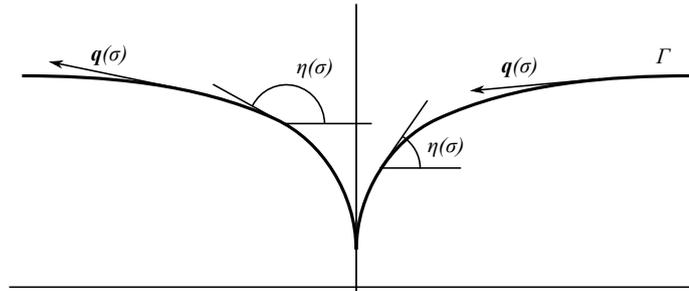


Рисунок 1.5 — Угол $\eta(\sigma)$ между осью x и касательной к Γ и вектор $\mathbf{q} = (d\tilde{x}/d\sigma, d\tilde{y}/d\sigma)$.

Из (1.52) и (1.53) вытекает, что $\eta(0) = 0$ и $\eta(\pi/2) = \pi/2$. Из последнего, в частности, следует, что в точке над стоком образуется касп, то есть касательная к свободной границе становится вертикальной.

Заметим, что из (1.59b) следует, что функция $\tilde{y}(\sigma)$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$, однако функция $\tilde{x}(\sigma)$ может вести себя таким образом, что происходит опрокидывание свободной границы. Эта ситуация показана

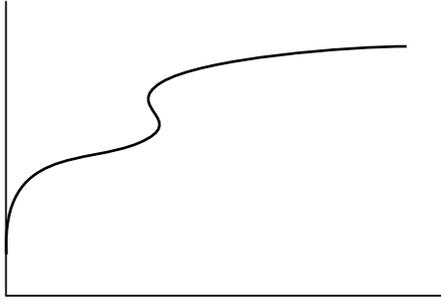


Рисунок 1.6 — Возможная форма свободной границы с $\eta(\sigma_0) \geq \pi/2$ для некоторых $\sigma_0 \in (0, \pi/2)$.

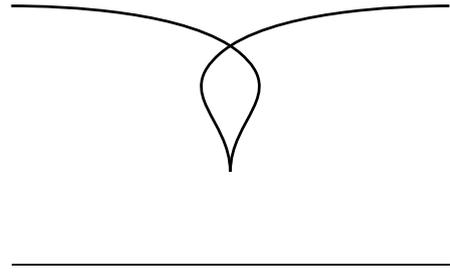


Рисунок 1.7 — Отсутствие инъективности отображений G и F в случае опрокидывания при σ близких к $\pi/2$.

на рис. 1.6. Более того, опрокидывание при σ близких к $\pi/2$ означает, что отображения G и F не являются взаимно однозначными (см. рис. 1.7). Это означает, что решение системы (1.49)–(1.57), если оно существует, то оно не будет давать решения исходной задачи. Поэтому нам необходимо будет показать, что такая ситуация невозможна, а именно, угол наклона $\eta(\sigma)$ свободной границы меньше $\pi/2$, если приведённое число Фруда α не слишком мало.

1.3.3 Определение поля скорости жидкости

Если мы хотим найти поле скорости, то необходимо провести дополнительные построения. Используя значения функций τ и θ на всём отрезке $[0, 2\pi]$, найдём гармонические в единичном круге D_\circ^* функции $\hat{\tau}$ и $\hat{\theta}$, которые на границе круга равны τ и θ соответственно.

В круге $D_{\circ}^* = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq 1\}$ определим функции

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}(t) &= \widehat{\tau}(t) + i\widehat{\theta}(t), \\ u(t) &= -(t + s_0)^{-\beta/2}(t - s_0)^{-\beta/2}t^{-(1-\beta)} e^{-i\widehat{\Omega}(t)}, \\ w^*(t) &= \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) - i, \\ v^*(t) &= \frac{dw^*(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}\end{aligned}$$

и, используя соотношения

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{v^*(t)}{u(t)} = -\frac{2}{\pi} e^{i\widehat{\Omega}(t)} \frac{(t + s_0)^{\beta/2}(t - s_0)^{\beta/2}}{t^{\beta}} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \quad \text{и} \quad G(0) = 0,$$

найдём отображение $z = G(t)$.

Далее, определим отображение $F(z)$, решив следующую задачу:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \left(G'(t) \right)^{-1} \Big|_{t=F(z)}, \quad F(0) = 0.$$

После этого находим комплексный потенциал и поле комплексной скорости в плоскости переменной z :

$$w(z) = w^*(F(z)), \quad v(z) = \frac{dw(z)}{dz}.$$

Но для начала нам необходимо установить разрешимость системы уравнений (1.49)–(1.57).

1.4 Формулировка задачи в виде операторного уравнения

Поскольку система (1.49)–(1.57) довольно сложна для исследования, в этом параграфе мы переформулируем её в виде нелинейного операторного уравнения в банаховом пространстве. Затем в следующих главах будет доказано, что при выполнении некоторых условий данная система имеет

решение.

1.4.1 Преобразование формулы обращения Гильберта

Уравнение (1.48) включает интеграл, понимаемый в смысле главного значения. Нам удобнее переписать это уравнение в виде, включающем интеграл с интегрируемым ядром. Поскольку $\operatorname{ctg} \sigma = (\ln |\sin \sigma|)'$, с помощью интегрирования по частям интеграл из этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \tau'(s) (\ln |\sin(s + \sigma)| - \ln |\sin(s - \sigma)|) ds = \int_0^{\pi/2} \tau'(s) \ln \left| \frac{\sin(s + \sigma)}{\sin(s - \sigma)} \right| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.48) может быть записано так:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \tau'(s) ds, \quad \sigma \in [0, \pi/2], \quad (1.60)$$

где

$$K(s, \sigma) = \ln \left| \frac{\sin(s + \sigma)}{\sin(s - \sigma)} \right|. \quad (1.61)$$

Отметим, что $K(0, \sigma) = K(s, 0) = K(\pi/2, \sigma) = K(s, \pi/2) = 0$, поэтому $\theta(0) = \theta(\pi/2) = 0$.

Ядро K можно представить и в другом виде. Используя тригонометрические тождества

$$\operatorname{tg} \sigma_1 + \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{\sin(\sigma_1 + \sigma_2)}{\cos \sigma_1 \cos \sigma_2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \sigma_1 - \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)}{\cos \sigma_1 \cos \sigma_2},$$

мы получим следующее равенство:

$$\frac{\sin(s + \sigma)}{\sin(s - \sigma)} = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} \sigma}.$$

Отсюда следует, что

$$K(s, \sigma) = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} \sigma} \right|. \quad (1.62)$$

В некоторых ситуациях выражение (1.62) удобнее, чем (1.61). Например, из (1.62) сразу следует, что $K(s, \sigma) \geq 0$ для всех тех s и σ из отрезка $[0, \pi/2]$, для которых это ядро определено.

1.4.2 Формулировка задачи в виде операторного уравнения

Теперь введём новую неизвестную функцию:

$$\zeta(\sigma) = 3\tau'(\sigma) - \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^{3\beta}(\sigma). \quad (1.63)$$

Из (1.49) следует, что

$$\tau'(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left(\beta \ln \varrho(\sigma) + \frac{1}{3} \ln \left(\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение от 0 до произвольного $\sigma \in (0, \pi/2)$ и учитывая (1.49) и (1.63), мы получим, что

$$\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds = \frac{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds}{\alpha\pi}.$$

Выражение (1.50) переписывается следующим образом

$$\omega(\sigma) = \sin \left(\sigma - \beta \left(\sigma - \phi(\sigma) - H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma) \right) + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \right) \operatorname{ctg} \sigma,$$

где оператор H имеет следующий вид

$$(H\zeta)(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \zeta(s) ds. \quad (1.64)$$

Из этого равенства сразу вытекает, что

$$\zeta(\sigma) = \frac{3 \sin \left(\sigma - \beta \left(\sigma - \phi(\sigma) - H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma) \right) + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \right) \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha \pi \exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds}.$$

Исследуем функцию $\sigma - \phi(\sigma) - H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma)$. Для этого на всей комплексной плоскости \mathbb{C} рассмотрим функцию

$$\Psi_0(t) = \ln \frac{t}{(t + s_0)^{1/2} (t - s_0)^{1/2}}.$$

Эта функция имеет логарифмические особенности в точках $t = 0$ и $t = \pm s_0$, однако является однозначной и аналитической в области с разрезом $\mathbb{C} \setminus [-s_0, s_0]$. При этом $\Psi_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \Psi_0(1/t).$$

Эта функция является однозначной и аналитической в единичном круге D_\circ^* , причём $\Psi(0) = 0$. Поэтому для Ψ справедливы формулы обращения Гильберта:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi(e^{i\sigma}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} \Psi(e^{is}) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds, \\ \operatorname{Im} \Psi(e^{i\sigma}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \Psi(e^{is}) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds, \end{aligned}$$

где $\sigma \in [-\pi, \pi)$. Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения. Нетрудно показать, что функции ϱ и ϕ , определённые в (1.51) и (1.52), обладают следующими свойствами:

$$\varrho(-\sigma) = \varrho(\sigma), \quad \phi(-\sigma) = -\phi(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi).$$

Из этих свойств следует, что

$$\begin{aligned}\Psi(e^{i\sigma}) &= \ln \left| \frac{e^{-i\sigma}}{(e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}(e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2}} \right| + i \arg \left(\frac{e^{-i\sigma}}{(e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}(e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2}} \right) \\ &= -\ln \varrho(-\sigma) + i \left(\arg(e^{-i\sigma}) - \arg((e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}) - \arg((e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2}) \right) \\ &= -\ln \varrho(\sigma) + i \left(-\sigma + \phi(\sigma) \right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$-\ln \varrho(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-s + \phi(s)) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds, \quad (1.65)$$

$$-\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \varrho(s) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds. \quad (1.66)$$

Рассмотрим формулу (1.66). Поскольку $\varrho(-\sigma) = \varrho(\sigma)$ и $\varrho(\pi - \sigma) = \varrho(\sigma)$, так же как в п. 1.2.4 мы получим, что

$$-\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \varrho(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds,$$

то есть

$$-\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \frac{d}{ds} \ln \varrho(s) ds = H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma).$$

Введём функцию μ :

$$\mu(\sigma) = 2(\phi(\sigma) - \sigma) = 2H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2]. \quad (1.67)$$

Тогда, как следует из (1.49) и (1.60), функция (1.63) удовлетворяет уравнению

$$\zeta = \Phi(\zeta), \quad (1.68)$$

где Φ — нелинейный оператор, определённый следующим образом

$$\Phi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta ds}, \quad \sigma \in (0, \pi/2]. \quad (1.69)$$

Мы будем искать решения уравнения (1.68) в банаховом пространстве $L^2(0, \pi/2)$ с нормой

$$\|\zeta\| = \left(\int_0^{\pi/2} |\zeta(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Далее, из соображений краткости, будем обозначать $L^2(0, \pi/2)$ через L^2 .

Перед тем как приступить к доказательству разрешимости операторного уравнения, исследуем свойства функции μ и получим априорные оценки для оператора H .

1.4.3 Свойства функции μ

Выясним свойства функции μ , определённой в (1.67). Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{ctg} 2\phi(\sigma) = \frac{\cos 2\sigma - s_0^2}{\sin 2\sigma} = \operatorname{ctg} 2\sigma - \frac{s_0^2}{\sin 2\sigma}.$$

Из этого равенства следует, что $\mu(\sigma) > 0$ (так как $\phi(\sigma) > \sigma$) при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Легко обнаружить, что

$$\mu(0) = \mu(\pi/2) = 0. \quad (1.70)$$

Выведем ещё некоторые свойства функции μ . Продифференцируем следующее равенство по σ :

$$\ln(e^{2i\sigma} - s_0^2) = \ln(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = \ln \varrho^2(\sigma) e^{2i\phi(\sigma)} = 2 \ln \varrho(\sigma) + 2i\phi(\sigma).$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\sigma} \ln(e^{2i\sigma} - s_0^2) = 2 \frac{s_0^2 \sin 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4} + 2i \frac{1 - s_0^2 \cos 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4},$$

приравняв вещественную и мнимую части, получим, что

$$\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho(\sigma) = \frac{s_0^2 \sin 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4}, \quad \phi'(\sigma) = \frac{1 - s_0^2 \cos 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4}. \quad (1.71)$$

Нам ещё понадобятся вторые производные:

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} \ln \varrho(\sigma) = \frac{2s_0^2(1 + s_0^4) \cos 2\sigma - 4s_0^4}{(1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4)^2}, \quad \phi''(\sigma) = -\frac{2s_0^2(1 - s_0^4) \sin 2\sigma}{(1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4)^2}.$$

Заметим, что $\phi''(\sigma) < 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, то есть функция ϕ является вогнутой на этом интервале. Это утверждение справедливо и для функции μ . При этом

$$\phi'(0) = \frac{1 - s_0^2}{1 - 2s_0^2 + s_0^4} = \frac{1}{1 - s_0^2} \quad \text{и} \quad \mu'(0) = 2(\phi'(0) - 1) = \frac{2s_0^2}{1 - s_0^2}. \quad (1.72)$$

Нетрудно заметить, что функция μ зависит от параметра s_0 . На рис. 1.8 показано поведение функции $\mu(\sigma)$ при различных s_0 .

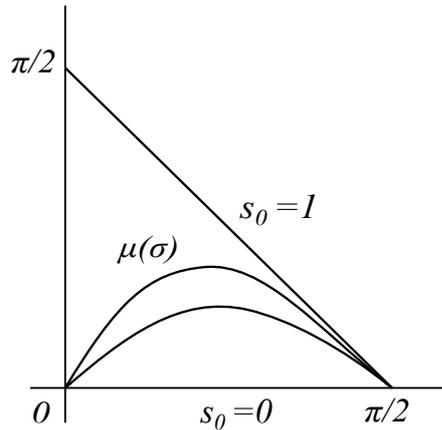


Рисунок 1.8 — График функции $\mu(\sigma)$ при разных значениях s_0 .

В дальнейшем при $\beta > 0$ мы будем использовать условие, заключающееся в том, что

$$\beta\mu(\sigma) \leq \sigma \quad \text{при} \quad \sigma \in [0, \pi/2]. \quad (1.73)$$

Учитывая вышесказанное, это условие будет выполнено, если

$$\beta\mu'(0) \leq 1, \quad (1.74)$$

то есть при

$$\beta \leq \frac{1 - s_0^2}{2s_0^2} \quad (1.75)$$

или эквивалентно

$$s_0^2 \leq \frac{1}{1 + 2\beta}. \quad (1.76)$$

Кроме того, поскольку функция μ' достигает своего максимума в точке $\sigma = 0$, из условия (1.74) будет следовать следующая оценка:

$$\beta\mu'(\sigma) \leq 1 \quad \text{для } \sigma \in [0, \pi/2]. \quad (1.77)$$

Нам ещё понадобится вычислить $\mu(\pi/4)$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{ctg} \arg(e^{i\pi/4} \pm s_0) = 1 \pm s_0\sqrt{2}.$$

Используя тригонометрические тождества, получим следующее:

$$\operatorname{ctg} \mu(\pi/4) = \operatorname{ctg} (2\phi(\pi/4) - \pi/2) = \frac{-1}{\operatorname{ctg} 2\phi(\pi/4)} = \frac{1}{s_0^2}$$

или

$$\operatorname{tg} \mu(\pi/4) = s_0^2.$$

1.4.4 Свойства оператора H

Сначала напомним некоторые факты из теории рядов Фурье. Хорошо известно, что на отрезке $[0, \pi/2]$ в пространстве L^2 полными являются тригонометрические системы $\{\cos 2k\sigma\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\sin 2k\sigma\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому для любой функции $f \in L^2$ и для почти всех $\sigma \in [0, \pi/2]$ справедливы представления:

$$f(\sigma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\sigma, \quad f(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\sigma,$$

где

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s) \cos 2ks \, ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s) \sin 2ks \, ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для каждого из этих разложений справедливы неравенство Бесселя и равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \frac{4}{\pi} \|f\|^2, \quad \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{4}{\pi} \|f\|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{4}{\pi} \|f\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{4}{\pi} \|f\|^2.$$

Для ядра K хорошо известно следующее представление:

$$K(s, \sigma) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\sigma \sin 2ks}{k},$$

которое справедливо во всех точках, где определено ядро $K(s, \sigma)$, то есть при $\sigma + s$ и $\sigma - s$ отличных от πm , $m \in \mathbb{Z}$. Вообще говоря, это представление встречается во многих работах (см., например, [38] или [41]). Однако мы смогли найти доказательство только в [30]. Это довольно редкая книга, по этой причине, мы приведём доказательство в виде леммы А.1 (см. прил. А). Заметим, что наше доказательство отличается от того, что представлено в [30]. Используя это представление, мы докажем несколько полезных оценок для оператора H .

Лемма 1.1. *Оператор $H : L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным и*

$$\|Hw\| \leq \frac{1}{2} \|w\|$$

для всех $w \in L^2$.

▷ То, что оператор H является ограниченным в L^2 следует из того (см. [21]), что

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} |K(s, \sigma)|^2 d\sigma ds < \infty.$$

Докажем оценку. Поскольку $w \in L^2$, для почти всех $\sigma \in [0, \pi/2]$ справедливо

представление в виде ряда Фурье:

$$w(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin 2k\sigma, \quad (1.78)$$

где c_m — коэффициенты Фурье. Если w_n — частичная сумма этого ряда, то

$$(Hw_n)(\sigma) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2k} \sin 2k\sigma.$$

Используя неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, мы получим, что

$$\frac{4}{\pi} \|Hw_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{c_k^2}{4k^2} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \frac{1}{4} \frac{4}{\pi} \|w\|^2.$$

Из этой оценки, в силу того, что $Hw_n \rightarrow Hw$ в L^2 при $n \rightarrow \infty$, сразу следует доказываемое неравенство. \triangleleft

Лемма 1.2. Пусть $w \in L^2$ и $u = Hw$. Тогда $u' \in L^2$ и $\|u'\| = \|w\|$.

\triangleright Здесь мы будем использовать такие же обозначения, что и в доказательстве леммы 1.1. Поскольку $w \in L^2$, имеет место представление в виде ряда Фурье (1.78). Обозначим через w_n частичную сумму этого ряда и через u_n функцию Hw_n . В силу леммы 1.1, $u_n \rightarrow u$ в L^2 при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что

$$u'_n(\sigma) = \sum_{k=1}^n c_k \cos 2k\sigma \quad \text{и} \quad u'_n(\sigma) - u'_m(\sigma) = \sum_{k=m+1}^n c_k \cos 2k\sigma$$

для $m < n$. Как следствие второго равенства, мы находим, что

$$\|u'_n - u'_m\|^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{k=m+1}^n c_k^2.$$

Поскольку ряд Фурье в (1.78) сходится в L^2 , из критерия Коши следует, что последовательность $\{u'_n\}$ сходится в L^2 . Очевидно, u' является пределом.

Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ в следующем равенстве

$$\|u'_n\|^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n c_k^2$$

позволяет сделать вывод, что $\|u'\|^2 = \|w\|^2$ в силу равенства Парсеваля. \triangleleft

В качестве следствия из этой леммы докажем следующее утверждение:

Лемма 1.3. Пусть $w \in L^2$ и $u = Hw$. Тогда $u \in C^{0,1/2}[0, \pi/2]$,

$$|u(\sigma) - u(s)| \leq \|w\| |\sigma - s|^{1/2}, \quad |u(\sigma)| \leq \|w\| |\sigma|^{1/2}, \quad |u(\sigma)| \leq \|w\| |\pi/2 - \sigma|^{1/2}$$

для всех $\sigma, s \in [0, \pi/2]$.

\triangleright Воспользовавшись предыдущей леммой и неравенством Гёльдера, мы получим:

$$|u(\sigma) - u(s)| = \left| \int_s^\sigma u'(t) dt \right| \leq \|u'\| |\sigma - s|^{1/2} \leq \|w\| |\sigma - s|^{1/2}.$$

Второе и третье неравенства в утверждении леммы сразу следует из первого. Достаточно только заметить, что, в силу свойств ядра K , $u(0) = 0$ и $u(\pi/2) = 0$. \triangleright

Лемма 1.4. Пусть $w \in L^2$. Тогда функции f и h , определённые следующим образом

$$f(\sigma) = \frac{(Hw)(\sigma)}{\sin \sigma} \quad \text{и} \quad h(\sigma) = \frac{\int_0^s w(\sigma) d\sigma}{\sin s},$$

принадлежат L^2 и справедливы оценки:

$$\|f\| \leq 2\|w\|, \tag{1.79}$$

$$\|h\| \leq 2\|w\|. \tag{1.80}$$

\triangleright Начнём с доказательства неравенства (1.79). Поскольку $w \in L^2$, для почти всех $\sigma \in [0, \pi/2]$ справедливо представление в виде ряда Фурье:

$$w(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin 2k\sigma, \tag{1.81}$$

где c_m — коэффициенты Фурье. Обозначим через w_n частичную сумму этого ряда и определим следующие функции:

$$u_n(\sigma) = (Hw_n)(\sigma), \quad f_n(\sigma) = \frac{u_n(\sigma)}{\sin \sigma}, \quad \phi_{nm}(\sigma) = u_n(\sigma) - u_m(\sigma)$$

для $m < n$. Нетрудно видеть, что

$$u_n(\sigma) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin 2k\sigma}{k} \int_0^{\pi/2} w_n \sin 2ks \, ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \frac{\sin 2k\sigma}{k}.$$

Сначала покажем, что последовательность $\{f_k\}$ сходится в L^2 . Для этого воспользуемся критерием Коши. Поскольку

$$\frac{1}{\sin^2 s} = -(\operatorname{ctg} s)', \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \phi_{nm}(0) = 0,$$

причём $\operatorname{ctg} s = O(s^{-1})$ и $\phi_{nm}(s) = O(s)$ при $s \rightarrow 0$, с помощью интегрирования по частям и неравенства Гёльдера мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\phi_{nm}(s)}{\sin s} \right)^2 ds &= \int_0^{\pi/2} 2 \phi_{nm}(s) \phi'_{nm}(s) \operatorname{ctg} s \, ds \leq \\ &\leq \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\phi_{nm}(s)}{\sin s} \right)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/2} (2 \phi'_{nm}(s) \cos s)^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\|f_n - f_m\| = \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\phi_{nm}(s)}{\sin s} \right)^2 ds \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_0^{\pi/2} (\phi'_{nm}(s))^2 ds \right)^{1/2} = 2\|\phi'_{nm}\|.$$

Заметим, что $\phi'_{nm} = u'_n - u'_m$ и $u'_n(\sigma) = \sum_{k=1}^n c_k \cos 2k\sigma$. Поэтому

$$\|\phi'_{nm}\|^2 = \frac{\pi}{4} \sum_{k=m+1}^n c_k^2.$$

Таким образом,

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \pi \sum_{k=m+1}^n c_k^2. \quad (1.82)$$

Поскольку ряд в (1.81) сходится в L^2 , равенство Парсеваля позволяет утверждать, что сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Поэтому из критерия Коши и неравенства (1.82) следует, что последовательность $\{f_k\}$ сходится в L^2 . Таким образом, нетрудно получить следующую оценку:

$$\|f_n\|^2 \leq \pi \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq 4\|w\|^2, \quad (1.83)$$

которая справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $w_n \rightarrow w$ в L^2 , согласно лемме 1.3 $u_n = Hw_n \rightarrow Hw$ в $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$. Отсюда следует, что $f_n(s) \rightarrow f(s)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $s \in (0, \pi/2]$. В силу (1.83) и теоремы Фату (см. [21]) мы получаем, что $f \in L^2$ и $\|f\| \leq 2\|w\|$.

Совершенно аналогично доказывается утверждение, касающееся функции h , и неравенство (1.80). Лемма доказана. \triangleleft

Лемма 1.5. Пусть $w \in L^2$ и $W(\sigma) = \int_0^\sigma w(s) ds$. Тогда $W \in C^{0,1/2}[0, \pi/2]$ и для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$|W(\sigma)| \leq \|w\| \sigma^{1/2}.$$

\triangleright Поскольку $W'(\sigma) = w(\sigma)$ для почти всех $\sigma \in [0, \pi/2]$,

$$|W(\sigma) - W(s)| = \left| \int_s^\sigma W'(t) dt \right| \leq \|W'\| |\sigma - s|^{1/2} = \|w\| |\sigma - s|^{1/2}.$$

Неравенство в утверждении леммы следует из того, что $W(0) = 0$. \triangleleft

Лемма 1.6. Если $w \in L^2$, $(w \sin \sigma)' \in L^2$ и $w(\pi/2) = 0$, то $((Hw)' \sin \sigma)' \in L^2$ и $\|((Hw)' \sin \sigma)'\| \leq \|(w \sin \sigma)'\|$.

\triangleright Пусть $w(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin 2k\sigma$ и w_n — это n -ая частичная сумма этого ряда. Используя хорошо известные тригонометрические формулы, нетрудно определить, что

$$w_n(\sigma) \sin \sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (\cos(2k-1)\sigma - \cos(2k+1)\sigma) = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \cos(2k-1)\sigma,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{2}, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \quad k = 2, \dots, n, \quad \gamma_{n+1} = -\frac{c_n}{2}.$$

Функциональные системы $\{\cos(2k-1)\sigma\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{\sin(2k-1)\sigma\}_{k \in \mathbb{N}}$ являются, вообще говоря, не полными в L^2 . По крайней мере, мы не можем представить доказательство этого факта. Если бы это было так, то неравенство в утверждении леммы должно было быть заменено равенством. Однако эти системы являются ортогональными в L^2 и

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(2k-1)\sigma \, d\sigma = \int_0^{\pi/2} \sin^2(2k-1)\sigma \, d\sigma = \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $w_n \rightarrow w$ в L^2 при $n \rightarrow \infty$, получаем следующие равенства:

$$w(\sigma) \sin \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(2k-1)\sigma, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 = \frac{4}{\pi} \|w \sin \sigma\|^2.$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции $(w \sin \sigma)' \in L^2$ относительно системы $\{\sin(2k-1)\sigma\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} (w(\sigma) \sin \sigma)' \sin(2k-1)\sigma \, d\sigma \\ &= -(2k-1) \int_0^{\pi/2} w(\sigma) \sin \sigma \cos(2k-1)\sigma \, d\sigma = -\frac{\pi}{4} \gamma_k (2k-1). \end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 (2k-1)^2 \leq \frac{4}{\pi} \|(w \sin \sigma)'\|^2. \quad (1.84)$$

Точно как в доказательстве леммы 1.1, мы находим, что

$$(Hw_n)'(\sigma) \sin \sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (\sin(2k+1)\sigma - \sin(2k-1)\sigma) = -\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \sin(2k-1)\sigma$$

и, как в следствие, что

$$((Hw_n)'(\sigma) \sin \sigma)' = - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k (2k-1) \cos(2k-1)\sigma.$$

Это равенство и (1.84) дают следующую оценку

$$\|((Hw_n)' \sin \sigma)'\| \leq \| (w \sin \sigma)' \|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $((Hw_n)' \sin \sigma)'$ сходится слабо к $((Hw)' \sin \sigma)'$ в L^2 при $n \rightarrow \infty$, из этой оценки вытекает утверждение леммы. \triangleleft

В следующих главах будет установлена разрешимость исходной задачи. При разных β методы доказательства разрешимости задачи будут отличаться.

Глава 2. Исследование задачи с точечным стоком на плоском горизонтальном дне

В этой главе будет рассмотрена задача с точечным стоком на плоском горизонтальном дне, то есть при $\beta = 0$ (см. рис. 1.2а). В этом случае операторное уравнение (1.68) для системы (1.49)–(1.57) примет следующий вид:

$$\zeta = \Phi(\zeta), \quad (2.1)$$

где

$$\Phi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin\left(\sigma + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)\right) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta ds}, \quad \sigma \in (0, \pi/2]. \quad (2.2)$$

Для доказательства единственности операторного уравнения будет применена теорема Шаудера о неподвижной точке, а затем — принцип сжимающих отображений. Также в этой главе будет проведено исследование гладкости решения, формы свободной границы и её асимптотики вблизи точки над стоком.

2.1 Однозначная разрешимость операторного уравнения

Приступим к доказательству разрешимости операторного уравнения (2.1). Как ранее было сказано, будем искать решения этого уравнения в банаховом пространстве L^2 . Для доказательства разрешимости получим вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. Пусть $w \in L^2$ и $g(\sigma) = \sin\left(\sigma + \frac{1}{3}(Hw)(\sigma)\right) \operatorname{ctg} \sigma$. Тогда $g \in L^2$ и справедлива оценка

$$\|g\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|.$$

▷ Для доказательства оценки заметим, что $|\sin \sigma| \leq |\sigma|$ для всех

$\sigma \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$|g(\sigma)| \leq \left| \sigma + \frac{1}{3} (Hw)(\sigma) \right| \operatorname{ctg} \sigma \leq \sigma \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1}{3} \left| \frac{Hw(\sigma)}{\sin \sigma} \right| \cos \sigma$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Поскольку

$$\int_0^{\pi/2} (\sigma \operatorname{ctg} \sigma)^2 d\sigma = \pi \ln 2 - \frac{\pi^3}{24} < 1 \quad (2.3)$$

и $|\cos \sigma| \leq 1$, воспользовавшись леммой 1.4, получаем

$$\|g\| \leq 1 + \frac{1}{3} \left\| \frac{Hw}{\sin \sigma} \right\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|.$$

◁

Лемма 2.2. Если w_1 и w_2 — неотрицательные функции из L^2 , то

$$\|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|.$$

▷ Для каждого $\lambda \in [0, 1]$ введём обозначение: $v_\lambda = w_1 + \lambda(w_2 - w_1)$.

Тогда

$$\frac{dv_\lambda}{d\lambda} = w_2 - w_1$$

и

$$\Phi(w_2) - \Phi(w_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \Phi((1 - \lambda)w_1 + \lambda w_2) d\lambda = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) d\lambda,$$

Нетрудно посчитать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \frac{d}{d\lambda} \frac{\sin(\sigma + \frac{1}{3} H v_\lambda)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} = \\ &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \left(\frac{\cos(\sigma + \frac{1}{3} H v_\lambda) \frac{1}{3} H (w_2 - w_1)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} - \frac{\sin(\sigma + \frac{1}{3} H v_\lambda) \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} \right). \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность функции v_λ , мы получим:

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{1}{\alpha\pi} \left\| \frac{H(w_2 - w_1)}{\sin \sigma} \right\| + \frac{3}{\alpha\pi} \left\| \frac{\int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\sin \sigma} \right\|.$$

Тогда, как следует из леммы 1.4,

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{2}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| + \frac{6}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| = \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|,$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что

$$\|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)\| \leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| d\lambda.$$

◁

Теперь мы можем приступить к доказательству существования и единственности решения операторного уравнения (2.1). Сначала исследуем его разрешимость.

Теорема 2.1. *Для любого $\alpha \geq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\right) \approx 0,76$ существует неотрицательная функция $\zeta \in L^2$, удовлетворяющая уравнению (2.1). Эта функция удовлетворяет оценкам:*

$$0 \leq \sigma + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \leq \pi \text{ почти для всех } \sigma \in (0, \pi/2), \quad \|\zeta\| \leq \frac{9\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Чтобы доказать разрешимость задачи (2.1), мы сначала рассмотрим приближённую задачу. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ введём функцию $q_k : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что

$$q_k(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{1}{k}, & \sigma \in [0, 1/k], \\ \operatorname{ctg} \sigma, & \sigma \in (1/k, \pi/2], \end{cases}$$

и исследуем задачу

$$\zeta = \Phi_k(\zeta), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi_k(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin \left(\sigma + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \right) q_k(\sigma)}{\exp \int_0^\sigma \zeta ds}, \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке А.2 (см. в прил. А) мы покажем, что уравнение (2.5) имеет решение $\zeta_k \in L^2$. Возьмём следующее выпуклое замкнутое множество

$$B_R^+ = \{\zeta \in L^2 \mid \|\zeta\| \leq R, \zeta \geq 0\}$$

в пространстве L^2 и докажем существование такого $R > 0$, что $\Phi_k(B_R^+) \subset B_R^+$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Пусть R — некоторое положительное число и $\zeta \in B_R^+$. Тогда

$$\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds \geq 1 \quad (2.6)$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$ и в силу леммы 2.1

$$\|\Phi_k(\zeta)\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \|\zeta\|\right) \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right).$$

Для того, чтобы $\|\Phi_k(\zeta)\| \leq R$, достаточно взять R , удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right) \leq R.$$

Таким образом, если

$$R \geq \frac{3}{\alpha\pi - 2}, \quad (2.7)$$

то из того, что $\zeta \in B_R^+$, следует, что $\|\Phi_k(\zeta)\| \leq R$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь необходимо установить неотрицательность функции $\Phi_k(\zeta)$. Так как $q_k(\sigma) \geq 0$ при $\sigma \in [0, \pi/2]$, для неотрицательности $\Phi_k(\zeta)$ достаточно показать, что

$$0 \leq \sigma + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \leq \pi.$$

Левое неравенство справедливо для неотрицательной функции ζ , поскольку $K \geq 0$ и H — положительный оператор. Правое неравенство, как следует из леммы 1.3, будет выполнено, если

$$\|\zeta\| \gamma(\sigma) \leq 3(\pi - \sigma),$$

где $\gamma(\sigma) = \min\{s^{1/2}, (\pi/2 - \sigma)^{1/2}\}$. Таким образом, для того, чтобы функция $\Phi_k(\zeta)$ была неотрицательной, нам достаточно взять $\zeta \in B_R^+$ с

$$R \leq \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \frac{3(\pi - \sigma)}{\gamma(\sigma)} = \frac{9\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.8)$$

Взяв теперь R_* , удовлетворяющее неравенствам (2.7) и (2.8), мы получим, что $\Phi_k(B_{R_*}^+) \subset B_{R_*}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Такое R_* существует, если

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\right) \approx 0,76. \quad (2.9)$$

Оценка, полученная в лемме 2.2, справедлива не только для оператора Φ , но и для каждого из операторов Φ_k . Поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ оператор Φ_k является непрерывным на неотрицательных функциях в L^2 . Установим его компактность. Если M — ограниченное множество в $B_{R_*}^+$, то, как следует из лемм 1.3 и 1.5, $\Phi_k(\zeta)$ будет непрерывной по Гёльдеру с показателем $1/2$ для каждого $\zeta \in M$. Таким образом, $\Phi_k(M)$ будет ограниченным множеством в $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\text{diam } \Phi_k(M)$ в $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$, вообще говоря, зависит от k . Поскольку $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$ компактно вкладывается в L^2 , множество $\Phi_k(M)$ будет компактным в L^2 . Следовательно оператор Φ_k является компактным на $B_{R_*}^+$.

Таким образом, Φ_k удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера, поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует функция $\zeta_k \in B_{R_*}^+ \subset L^2$, которая является решением уравнения (2.5).

Поскольку согласно теореме Алаоглу А.3 (см. в прил. А) множество $B_{R_*}^+$ компактно в L^2 относительно слабой топологии, существует подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{\zeta_k\}$, сходящаяся слабо в L^2 к некоторой функции $\zeta \in B_{R_*}^+$. Из лемм 1.3 и 1.5 следует, что функции $H\zeta_k$ и $\int_0^\sigma \zeta_k(s) ds$ ограничены равномерно по k в пространстве $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$. Поэтому, снова выбирая подпоследовательность, мы можем утверждать, что $H\zeta_k \rightarrow H\zeta$ и $\int_0^\sigma \zeta_k(s) ds \rightarrow \int_0^\sigma \zeta(s) ds$ в пространстве $C^0[0, \pi/2]$. Это следует из компактности вложения $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$ в $C^0[0, \pi/2]$. Последовательность $\{\zeta_k\}$, однако,

в этом пространстве не сходится, так как функции ζ_k удовлетворяют уравнению (2.5), а в определении оператора Φ_k присутствует множитель q_k , который не сходится в $C^0[0, \pi/2]$. Но q_k сходится к $\operatorname{ctg} \sigma$ в пространстве $C^0[\delta, \pi/2]$ для любого $\delta > 0$. Поэтому ζ_k сходится к ζ в пространстве $C^0[\delta, \pi/2]$ для любого $\delta > 0$. Переходя поточечно к пределу при $k \rightarrow \infty$ в уравнении (2.5), мы получим, что

$$\zeta(\sigma) = \Phi(\zeta)(\sigma)$$

для любого $\sigma > \delta$. В силу произвольности δ функция ζ является решением уравнения (2.1). Теорема доказана. \square

Теперь перейдём к доказательству единственности решения операторного уравнения (2.1).

Теорема 2.2. *Для любого $\alpha > 8/\pi \approx 2,55$ существует единственная неотрицательная функция $\zeta \in L^2$, удовлетворяющая уравнению (2.1).*

Доказательство. Обозначим через ζ_* решение задачи (2.1), существование которого доказано с помощью теоремы Шаудера. Другими словами, $\zeta_* = \Phi(\zeta_*)$. Это решение является неотрицательным, поэтому, как следует из леммы 2.2,

$$\|\Phi(\zeta) - \zeta_*\| = \|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_*)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|\zeta - \zeta_*\|$$

для любой неотрицательной функции ζ из L^2 . Если, кроме того, $\zeta = \Phi(\zeta)$, то

$$\|\zeta - \zeta_*\| = \|\Phi(\zeta) - \zeta_*\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|\zeta - \zeta_*\|.$$

При $8/(\alpha\pi) < 1$ единственно возможная функция ζ , удовлетворяющая этому неравенству, совпадает с ζ_* . Таким образом, при

$$\alpha > 8/\pi \approx 2,55$$

операторное уравнение (2.1) имеет единственное положительное решение в L^2 . Теорема доказана. \square

2.2 Решение исходной задачи

Как было сказано в п. 1.3.1, решение исходной задачи может быть построено, если мы знаем функции τ и θ . Предположим, что $\zeta_* \in L^2$ является неотрицательным решением операторного уравнения (2.1), существование которого было доказано в предыдущем параграфе. Определим функции τ и θ следующим образом:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma), \quad \tau'(\sigma) = \frac{1}{3} \zeta_*(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2). \quad (2.10)$$

Эти формулы полностью соответствуют обозначениям, введённым в п. 1.4.2. Заметим, что у нас есть дифференциальное уравнение для функции τ , по этой причине нам нужно граничное условие $\tau(0) = 0$, которое берётся из (1.53). Функции τ и θ , определённые выше, удовлетворяют уравнениям (1.48) и (1.49). Согласно леммам 1.3 и 1.5, эти функции из $C^{0,1/2}[0, \pi/2]$.

2.2.1 Гладкость решения

На самом деле функции τ и θ имеют более высокую гладкость, чем указано выше. Сначала мы докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.3. Пусть w — неотрицательная функция из L^2 и при $\sigma \in (0, \pi/2)$ функция $v(\sigma) = \sin \sigma \Phi(w)(\sigma)$. Тогда $v' \in L^2$ и справедлива оценка

$$\|v'\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(\sqrt{\pi} + \frac{4}{3} \|w\| \right).$$

▷ Нетрудно видеть, что

$$v'(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{1}{\exp \int_0^\sigma w(s) ds} \left(\cos\left(\sigma + \frac{1}{3}Hw\right) \left(1 + \frac{1}{3}(Hw)'\right) \cos \sigma - \sin\left(\sigma + \frac{1}{3}Hw\right) \left(\sin \sigma + w(\sigma) \cos \sigma\right) \right).$$

Поскольку предполагалось, что w является неотрицательной, из леммы 1.2 вытекает, что $v' \in L^2$. Оценка следует из того, что $\|(Hw)'\| = \|w\|$. \triangleleft

Теперь мы применим леммы 1.6 и 2.3 для доказательства дифференцируемости функций τ и θ .

Теорема 2.3. Пусть τ и θ — функции, определённые в (2.10). Тогда

1. $(\tau' \sin \sigma)' \in L^2$, $\|(\tau' \sin \sigma)'\| \leq 7/(\alpha\sqrt{\pi})$, $\tau \in C^{1,1/2}[\delta, \pi/2]$ для всех $\delta \in (0, \pi/2)$ и $\tau'(\pi/2) = 0$;
2. $(\theta' \sin \sigma)' \in L^2$, $\|(\theta' \sin \sigma)'\| \leq 7/(\alpha\sqrt{\pi})$ и $\theta \in C^{1,1/2}[\delta, \pi/2]$ для всех $\delta \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Сначала отметим, что $\zeta_*(\pi/2) = 0$, так как ζ_* удовлетворяет (2.1) и $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$. Из леммы 2.3 следует, что функция $(\zeta_*(\sigma) \sin \sigma)'$ из L^2 и

$$\|(\zeta_* \sin \sigma)'\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} (\sqrt{\pi} + \frac{4}{3} \|\zeta_*\|).$$

Из второй оценки в (2.4) следует, что

$$\|(\zeta_* \sin \sigma)'\| \leq \frac{21}{\alpha\sqrt{\pi}}.$$

Далее, как следствие леммы 1.6, мы заключаем, что $((H\zeta_*)' \sin \sigma)' \in L^2$ и

$$\|((H\zeta_*)' \sin \sigma)'\| \leq \|(\zeta_* \sin \sigma)'\| \leq \frac{21}{\alpha\sqrt{\pi}}.$$

Утверждение теоремы следует из (2.10) и теорем вложения. \square

Замечание. Теорема 2.3 устанавливает гладкость функций τ и θ на $[\delta, \pi/2]$ для любого $\delta \in (0, \pi/2)$. Однако условия симметрии (1.54) и (1.55)

позволяют нам определить эти функции также на $[0, \pi]$. Таким образом, $\tau, \theta \in C^{1,1/2}[\delta, \pi - \delta]$ для любого $\delta \in (0, \pi/2)$. •

Гладкость функций τ и θ может быть дополнительно улучшена. Далее, мы покажем, что эти функции являются аналитическими. Для этого мы используем классический результат Х. Леви [75], который сформулирован ниже в виде леммы. Обратим внимание, что в этой лемме и в доказательстве следующей теоремы декартовы переменные x и y отличаются от физических переменных, используемых в начале данной работы. Эти символы были использованы в [75].

Лемма 2.4. Пусть $U(x, y)$ является гармонической вблизи начала координат $y < 0$ и $V(x, y)$ является сопряжённой гармонической функцией к U . Предположим, что $U, V, \partial U/\partial x$ существуют и непрерывны в полукружности $y \leq 0$ начала координат. Если граничные значения на $y = 0$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A(x, U, V, \partial U/\partial x),$$

в котором A является аналитической функцией для всех четырёх аргументов для всех значений, тогда $U(x, y)$ и $V(x, y)$ аналитически продолжаются через $y = 0$.

Теорема 2.4. Функции τ и θ являются аналитическими на $(0, \pi)$.

Доказательство. Функции τ и θ являются следами сопряжённых гармонических на единичном круге D_o^* функций $\hat{\tau}$ и $\hat{\theta}$. Кроме того, эти функции непрерывно дифференцируемы на $(0, \pi)$ и удовлетворяют уравнению (1.35) (при $\beta = 0$). Условия Коши–Римана, записанные в полярных координатах (ϱ, σ) вместе с (1.35), подразумевают, что

$$\frac{\partial \hat{\theta}(t)}{\partial \varrho} = A(\sigma, \hat{\theta}, \hat{\tau}) \quad (2.11)$$

при $\varrho = |t| = 1$ и $\sigma \in (0, \pi)$, где $A(\sigma, \hat{\theta}, \hat{\tau}) = \frac{1}{\alpha\pi} e^{-3\hat{\tau}(t)} \sin(\sigma + \hat{\theta}(t)) \operatorname{ctg} \sigma$ является аналитической функцией своих аргументов.

Возьмём произвольное $\sigma_0 \in (0, \pi)$. Существует конформное дробно-линейное отображение $(x, y) \mapsto t = f(x, y)$, которое переводит нижнюю полуплоскость $y < 0$ в единичный круг D^* и такое, что $f(0) = e^{i\sigma_0}$. Если мы введём $U(x, y) = \hat{\theta}(f(x, y))$ и $V(x, y) = \hat{\tau}(f(x, y))$, то в новых переменных уравнение (2.11) примет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A(x, U, V, \partial U / \partial x),$$

с аналитической функцией A . Из леммы 2.4 следует, что функции $U(x, 0)$ и $V(x, 0)$ являются аналитическими. Поскольку обратное отображение f^{-1} является конформным, функции θ и τ являются аналитическими в окрестности точки σ_0 . Утверждение теоремы следует из произвольности σ_0 . \square

2.2.2 Исследование формы свободной границы

Из (2.10) нетрудно получить, что функция η , отвечающая за угол наклона свободной границы, принимает следующий вид:

$$\eta(\sigma) = \sigma + \theta(\sigma) = \sigma + \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

В силу свойств оператора H , $\theta(0) = \theta(\pi/2) = 0$, следует, что $\eta(0) = 0$ и $\eta(\pi/2) = \pi/2$. Решение ζ_* уравнения (2.1), существование которого установлено в теореме 2.1, удовлетворяет первому неравенству из (2.4). Это значит, что $0 \leq \eta(\sigma) \leq \pi$ для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Однако как было описано в п. 1.3.2, нам необходимо показать, что угол наклона η меньше $\pi/2$, если приведённое число Фруда α не слишком мало. Этот вопрос часто встречается в задачах со свободной границей (см., например, [38; 42]). Для получения оценки такого рода обычно используется принцип максимума для субгармонической функции. Мы не смогли реализовать этот подход из-за наличия сингулярного стока, который вызывает неограниченность

соответствующих функций. По этой причине здесь будет предложено ещё одно доказательство этого факта, основанное на оценках решения. Конечно, эти оценки не являются оптимальными и могут быть улучшены.

Для краткости введём следующие обозначения:

$$\nu_0(\sigma) = \sin \eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma, \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Нетрудно видеть, что $\nu_0(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, $\nu_0(\pi/2) = 0$ и, как следует из леммы 2.1, ν_0 лежит в L^2 .

Лемма 2.5. *Функция $(\nu_0(\sigma) \sin \sigma)'$ лежит в L^2 и*

$$\|(\nu_0 \sin \sigma)'\| \leq \sqrt{\pi} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\|.$$

▷ Поскольку

$$(\nu_0(\sigma) \sin \sigma)' = (\sin \eta(\sigma) \cos \sigma)' = \eta'(\sigma) \cos \eta(\sigma) \cos \sigma - \sin \eta(\sigma) \sin \sigma$$

и $\eta' = 1 + (H\zeta_*)'/3$, получаем следующую оценку:

$$|(\nu_0(\sigma) \sin \sigma)'| \leq |\cos \sigma| + \frac{1}{3} |(H\zeta_*)'(\sigma)| + |\sin \sigma|, \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

Следовательно, в силу леммы 1.2, имеем:

$$\|(\nu_0 \sin \sigma)'\| \leq \sqrt{\pi} + \frac{1}{3} \|(H\zeta_*)'\| \leq \sqrt{\pi} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\|.$$

◁

Теорема 2.5. *Если $\alpha > 5/\sqrt{8} \approx 1,768$, то $\eta(\sigma) < \pi/2$ для всех $\sigma \in (0, \pi/2)$.*

Доказательство. Так как ζ_* является положительным решением (2.1) и H — положительный оператор,

$$\eta(\sigma) = \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} H\left(\frac{\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_* ds}\right) \leq \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} H(\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma) = \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} H\nu_0. \quad (2.12)$$

Таким образом, $\eta(\sigma) < \pi/2$, если

$$(H\nu_0)(\sigma) < \alpha\pi(\pi/2 - \sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2). \quad (2.13)$$

Наша цель — доказать эту оценку.

Из леммы 1.6 следует, что

$$\|((H\nu_0)' \sin \sigma)'\| \leq \|(\nu_0 \sin \sigma)'\|.$$

Поскольку $(H\nu_0)'(\sigma) \sin \sigma = 0$ при $\sigma = 0$, имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |(H\nu_0)'(\sigma) \sin \sigma| &= \left| \int_0^\sigma ((H\nu_0)'(s) \sin s)' ds \right| \\ &\leq \sigma^{1/2} \|((H\nu_0)' \sin \sigma)'\| \leq \sigma^{1/2} \|(\nu_0 \sin \sigma)'\| \end{aligned}$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Из леммы 2.5 и второй оценки в (2.4) следует, что

$$|(H\nu_0)'(\sigma)| \leq \|(\nu_0 \sin \sigma)'\| \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma} \leq A_0 \phi(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2],$$

где

$$A_0 = \frac{5}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \phi(\sigma) = \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma}.$$

Заметим, что $\phi(\pi/2) = \phi(\pi/4) = \sqrt{\pi/2}$ и $\phi(\sigma) < \sqrt{\pi/2}$ при $\sigma \in (\pi/4, \pi/2)$.

Следовательно, поскольку $(H\nu_0)(\pi/2) = 0$, при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2]$

$$|(H\nu_0)(\sigma)| = \left| \int_\sigma^{\pi/2} (H\nu_0)'(s) ds \right| \leq A_0 \int_\sigma^{\pi/2} \phi(s) ds \leq A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma \right). \quad (2.14)$$

Таким образом, оценка (2.13) справедлива при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2]$, если

$$\alpha > A_0/\sqrt{2\pi} = 5/\sqrt{8} \approx 1,768. \quad (2.15)$$

Для того чтобы получить подобную оценку для $\sigma \in (0, \pi/4)$, мы применим другое доказательство. Благодаря определению функции ν_0

и (2.12), мы имеем:

$$\nu_0(\sigma) \leq \eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma \leq \sigma \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} \cos \sigma \frac{(H\nu_0)(\sigma)}{\sin \sigma}.$$

Как следует из (2.3) и леммы 2.1,

$$\|\nu_0\| \leq 1 + \frac{2}{\alpha\pi} \|\nu_0\|.$$

Следовательно,

$$\|\nu_0\| \leq \frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2}.$$

Из леммы 1.3 следует, что

$$|(H\nu_0)(\sigma)| \leq \|\nu_0\| \sigma^{1/2} \leq \frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sigma^{1/2}.$$

Таким образом, оценка (2.13) верна для $\sigma \in (0, \pi/4)$, если

$$\frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \leq \alpha\pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi^{3/2}} + \frac{2}{\pi} \approx 0,996. \quad (2.16)$$

Из оценок (2.15) и (2.16) следует, что (2.13) справедливо при α , удовлетворяющих неравенству (2.15). Теорема доказана. \square

Замечание. Можно заметить значительную разницу между неравенствами (2.15) и (2.16), выведенными для $\sigma \in [\pi/4, \pi/2]$ и $\sigma \in (0, \pi/4)$ соответственно. Может показаться, что мы можем улучшить утверждение теоремы, если разделим интервал $(0, \pi/2)$ на число, которое отличается от $\pi/4$. Однако наш метод доказательства не позволяет нам значительно улучшить оценку (2.14) и, как следствие, (2.15). Дело в том, что функция ϕ в (2.14) почти постоянна на $[\pi/4, \pi/2]$ и мало чем отличается от $\sqrt{\pi/2}$. Более того, $\phi(\pi/2) = \sqrt{\pi/2}$. \bullet

Оценки, полученные в доказательстве предыдущей теоремы, позво-

ляют определить асимптотику угла наклона при $\sigma \rightarrow \pi/2$, то есть в окрестности каспа.

Теорема 2.6. *Если $\alpha > \alpha_0 = 5/\sqrt{8} \approx 1,768$, то есть, α удовлетворяет тому же неравенству, что и в теореме 2.5, то*

$$\eta(\sigma) = \pi/2 - \gamma(\pi/2 - \sigma) + o(\pi/2 - \sigma) \quad \text{при } \sigma \rightarrow \pi/2^-,$$

где $\gamma \in [1 - \alpha_0/\alpha, 1]$ является константой.

Доказательство. Как следует из теоремы 2.3 (и из теоремы 2.4), функция η дифференцируема и γ является её производной в точке $\sigma = \pi/2$. Основное утверждение теоремы состоит в том, что $\gamma \neq 0$. Таким образом, мы должны оценить $\gamma = \eta'(\pi/2)$. Сначала мы оцениваем γ снизу. Благодаря (2.12) и (2.14), мы имеем:

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{\sigma \nearrow \pi/2} \frac{\eta(\sigma) - \eta(\pi/2)}{\sigma - \pi/2} \geq \lim_{\sigma \nearrow \pi/2} \frac{\sigma + (\alpha\pi)^{-1} (H\nu_0)(\sigma) - \pi/2}{\sigma - \pi/2} \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha\pi} \lim_{\sigma \nearrow \pi/2} \frac{(H\nu_0)(\sigma)}{\sigma - \pi/2} \geq 1 - \frac{1}{\alpha\pi} A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha}. \end{aligned}$$

Чтобы получить оценку γ сверху, заметим, что $\eta(\sigma) = \sigma + \theta(\sigma)$ и $\theta(\sigma) \geq 0$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$. Следовательно,

$$\gamma = \lim_{\sigma \nearrow \pi/2} \frac{\sigma + \theta(\sigma) - \pi/2}{\sigma - \pi/2} = 1 + \lim_{\sigma \nearrow \pi/2} \frac{\theta(\sigma)}{\sigma - \pi/2} \leq 1.$$

□

Заметим, что из оценок в предыдущем доказательстве вытекает, что

$$-\alpha_0/\alpha \leq \theta'(\pi/2) \leq 0.$$

Это означает, что $\theta'(\pi/2)$ стремится к 0 при $\alpha \rightarrow \infty$.

Было бы также интересно изучить асимптотику свободной границы в окрестности каспа в исходных переменных x и y . Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.7. Пусть выполняется условие теоремы 2.6, то есть $\alpha > \alpha_0 = 5/\sqrt{8} \approx 1,768$. Если свободная граница Γ описывается уравнением $y = q(x)$ для $x \geq 0$ с некоторой функцией q , тогда

$$q(x) = y_0 + a x^{2/3} + o(x^{2/3}) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

где $y_0 = \tilde{y}(\pi/2)$ является y -координатой точки, в которой находится касн, $a = 3^{2/3} \sqrt{c_0}/(2\gamma^{2/3})$, $c_0 = e^{-\tau(\pi/2)}$, и γ определяется в теореме 2.6.

Доказательство. Свободная граница описывается параметрически с помощью функций $\tilde{x}(\sigma)$ и $\tilde{y}(\sigma)$, которые удовлетворяют (1.59). В правой части (1.59) функции являются аналитическими от σ . Если в разложении в степенной ряд мы оставим только члены начального порядка, то мы получим, что

$$\frac{d\tilde{x}(\sigma)}{d\sigma} = -e^{-\tau(\sigma)} \cos \eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma = -c_0 \gamma (\pi/2 - \sigma)^2 + o((\pi/2 - \sigma)^2), \quad (2.18a)$$

$$\frac{d\tilde{y}(\sigma)}{d\sigma} = -e^{-\tau(\sigma)} \sin \eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma = -c_0 (\pi/2 - \sigma) + o((\pi/2 - \sigma)^2) \quad (2.18b)$$

при $\sigma \rightarrow \pi/2$, где $c_0 = e^{-\tau(\pi/2)}$ и β определяется в теореме 2.6. Здесь мы использовали теорему 2.6 и следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \sigma &= \pi/2 - \sigma + O((\pi/2 - \sigma)^3), \\ \cos \eta(\sigma) &= \sin (\gamma(\pi/2 - \sigma) + o(\pi/2 - \sigma)) = \gamma(\pi/2 - \sigma) + o(\pi/2 - \sigma), \\ \sin \eta(\sigma) &= \cos (\gamma(\pi/2 - \sigma) + o(\pi/2 - \sigma)) = 1 + O((\pi/2 - \sigma)^2), \\ e^{-\tau(\sigma)} &= c_0 + O((\pi/2 - \sigma)^2) \end{aligned}$$

при $\sigma \rightarrow \pi/2$. Поскольку $\tilde{x}(\pi/2) = 0$ и $\tilde{y}(\pi/2) = y_0$, из уравнений (2.18) следует, что

$$\tilde{x}(\sigma) = \frac{c_0 \gamma}{3} (\pi/2 - \sigma)^3 + \omega_x ((\pi/2 - \sigma)^3), \quad (2.19a)$$

$$\tilde{y}(\sigma) = y_0 + \frac{c_0}{2} (\pi/2 - \sigma)^2 + \omega_y ((\pi/2 - \sigma)^3), \quad (2.19b)$$

где $\omega_x(s) = o(s)$ и $\omega_y(s) = o(s)$ при $s \rightarrow 0$. Заметим, что функции ω_x и ω_y являются дифференцируемыми и $\omega'_x(0) = \omega'_y(0) = 0$. Из теоремы об обратной функции следует, что существует дифференцируемая функция $s = s(x)$, такая что

$$\frac{c_0\gamma}{3} s(x) + \omega_x(s(x)) = x$$

для x близких к 0. Это означает, что уравнение (2.19a) выполняется при $(\pi/2 - \sigma)^3 = s(x)$. Кроме того, так как $s(0) = 0$ и $s'(0) = 3/(c_0\gamma)$,

$$s(x) = \frac{3}{c_0\gamma} x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Подстановка этих выражений в (2.19b) дает:

$$\begin{aligned} q(x) &= y_0 + \frac{c_0}{2} \left(\frac{3}{c_0\gamma} x + o(x) \right)^{2/3} + \omega_y \left(\frac{3}{c_0\gamma} x + o(x) \right) \\ &= y_0 + \frac{3^{2/3}}{2} \frac{\sqrt{c_0}}{\gamma^{2/3}} x^{2/3} + o(x^{2/3}) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Глава 3. Доказательство разрешимости задачи с точечным стоком во впадине на дне

В этой главе рассматривается задача с точечным стоком, который находится на дне треугольной впадины, то есть случай, когда $\beta > 0$ (см. рис. 1.2б). Формулировка операторного уравнения в этом случае полностью совпадает с формулировкой исходной задачи (1.68). Для доказательства разрешимости сначала будет установлена разрешимость вспомогательной задачи со срезкой, а затем, показано, что от неё можно отказаться.

3.1 Разрешимость вспомогательной задачи со срезкой

Мы хотим доказать, что существует положительное решение операторного уравнения (1.68). Но поскольку в операторе Φ из (1.68) значение функции синус может быть отрицательным, мы рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\Phi_s(\zeta) = \zeta, \quad (3.1)$$

где

$$\Phi_s(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin\left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta(\sigma))\right) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds}, \quad \sigma \in (0, \pi/2), \quad (3.2)$$

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \pi/2, & x \geq \pi/2, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Заметим, что для положительности синуса нам было бы достаточно срезать его аргумент числом π . В дальнейшем, в п. 3.2, мы объясним выбор $\pi/2$.

Для доказательства разрешимости задачи со срезкой (3.1) получим вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. Пусть $q(\sigma) = \phi(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma$ при $\sigma \in [0, \pi/2]$, где функция ϕ определена в (1.52). Тогда $q \in L^2$ и справедлива оценка:

$$\|q\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2}. \quad (3.4)$$

▷ Поскольку $1/\sin^2 s = -(\operatorname{ctg} s)'$, $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$ и $\phi(0) = 0$, с помощью интегрирования по частям и неравенства Гёльдера получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= \int_0^{\pi/2} (\phi(s) \operatorname{ctg} s)^2 ds \leq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\phi(s)}{\sin s} \right)^2 ds = \int_0^{\pi/2} 2\phi(s)\phi'(s) \operatorname{ctg} s ds \\ &\leq \left(\int_0^{\pi/2} (2\phi'(s))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi/2} q^2(s) ds \right)^{1/2} = 2\|\phi'\| \cdot \|q\|, \end{aligned}$$

из которого следует, что $\|q\| \leq 2\|\phi'\|$. Кроме того, учитывая (1.71) и (1.72), нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\phi'(s))^2 ds &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2s_0^2 \cos 2s + s_0^4 \cos^2 2s}{(1 - 2s_0^2 \cos 2s + s_0^4)^2} ds \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{1 - 2s_0^2 \cos 2s + s_0^4} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{(1 - s_0^2)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1 - s_0^2)^2}, \end{aligned}$$

то есть

$$\|\phi'\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - s_0^2}, \quad (3.5)$$

откуда следует доказываемая оценка. ◁

Лемма 3.2. Пусть $w \in L^2$. Тогда функция Z , определённая следующим образом

$$Z(\sigma) = \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(Hw)(\sigma)) \right) \operatorname{ctg} \sigma,$$

принадлежит L^2 и выполняется оценка:

$$\|Z\| \leq 1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2} + \frac{2}{3}\|w\|. \quad (3.6)$$

▷ Для доказательства неравенства (3.6) заметим, что $|\sin \sigma| \leq |\sigma|$

для всех $\sigma \in \mathbb{R}$. Следовательно, применяя (1.67), получим, что

$$\begin{aligned} |Z(\sigma)| &\leq (|\sigma + 2\beta\phi(\sigma) - 2\beta\sigma| + \frac{1}{3}|Hw(\sigma)|) \operatorname{ctg} \sigma \\ &\leq (1 + 2\beta)|\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + 2\beta|\phi(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{3}|\cos \sigma| \left| \frac{Hw(\sigma)}{\sin \sigma} \right| \end{aligned}$$

для всех $\sigma \in (0, \pi/2]$. Из неравенств $|\cos \sigma| \leq 1$ и (2.3), используя леммы 1.4 и 3.1, следует утверждение леммы. \triangleleft

Лемма 3.3. *Если w_1 и w_2 являются неотрицательными функциями из L^2 , то*

$$\|\Phi_s(w_2) - \Phi_s(w_1)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|. \quad (3.7)$$

\triangleright Пользуясь положительностью функций w_1 и w_2 и неравенством $|\sin \sigma| \leq 1$, несложно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &|\Phi_s(w_2) - \Phi_s(w_1)| \\ &\leq \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \left(\left| \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hw_2) \right) - \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hw_1) \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \exp \left(- \int_0^\sigma w_2(s) ds \right) - \exp \left(- \int_0^\sigma w_1(s) ds \right) \right| \right). \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в правой части этого неравенства, используя липшицевость синуса и функции S , получим, что

$$\begin{aligned} &\left| \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hw_2) \right) - \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hw_1) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{3} |Hw_2 - Hw_1| = \frac{1}{3} |H(w_2 - w_1)|. \end{aligned}$$

Перейдём к исследованию второго слагаемого. Пусть $v_\lambda = w_1 + \lambda(w_2 - w_1)$, где $\lambda \in [0, 1]$, и $Q(w) = \exp \left(- \int_0^\sigma w(s) ds \right)$. Тогда $dv_\lambda/d\lambda = w_2 - w_1$ и

$$Q(w_2) - Q(w_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} Q(v_\lambda) d\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\lambda}Q(v_\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left(\exp \left(- \int_0^\sigma v_\lambda(s) ds \right) \right) = \exp \left(- \int_0^\sigma v_\lambda ds \right) \cdot \left(- \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds \right)$$

и $\exp \left(- \int_0^\sigma v_\lambda ds \right) \leq 1$, найдём, что

$$\left| \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} Q(v_\lambda) d\lambda \right| \leq \left| \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds \right|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Phi_s(w_2) - \Phi_s(w_1)| &\leq \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha \pi} \left(\frac{1}{3} |H(w_2 - w_1)| + \left| \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds \right| \right) \\ &\leq \frac{3}{\alpha \pi} \left(\frac{1}{3} \left| \frac{H(w_2 - w_1)}{\sin \sigma} \right| + \left| \frac{\int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\sin \sigma} \right| \right). \end{aligned}$$

Тогда, используя оценки, полученные в лемме 1.4, мы имеем

$$\|\Phi_s(w_2) - \Phi_s(w_1)\| \leq \frac{3}{\alpha \pi} \left(\frac{2}{3} \|w_2 - w_1\| + 2 \|w_2 - w_1\| \right) = \frac{8}{\alpha \pi} \|w_2 - w_1\|.$$

◁

Теперь мы можем приступить к доказательству существования и единственности решения операторного уравнения со срезкой (3.1). Отметим, что мы будем искать решение уравнения (3.1) при произвольных значениях $\beta \in (0, 1)$ и $s_0 \in (0, 1)$.

Теорема 3.1. *Для произвольных $s_0 \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha > 8/\pi \approx 2,55$ существует единственная неотрицательная функция $\zeta_* \in L^2$, удовлетворяющая уравнению (3.1), и справедлива оценка:*

$$\|\zeta_*\| < \frac{1}{2} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2} \right). \quad (3.8)$$

Доказательство. Для доказательства однозначной разрешимости операторного уравнения (3.1) воспользуемся принципом сжимающих

отображений. Возьмём следующее множество

$$B_R^+ = \{\zeta \in L^2 \mid \|\zeta\| \leq R, \zeta \geq 0\}$$

в пространстве L^2 . Сначала покажем существование $R > 0$, для которого $\Phi(B_R^+) \subset B_R^+$.

Пусть R — некоторое положительное число и $\zeta \in B_R^+$. Поскольку $\|\zeta\| \leq R$, из неравенства (2.6) и леммы 3.2 следует, что

$$\|\Phi_s(\zeta)\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2} + \frac{2}{3}R\right).$$

Неравенство $\|\Phi_s(\zeta)\| \leq R$ справедливо, если

$$\frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2} + \frac{2}{3}R\right) \leq R.$$

Таким образом, если взять

$$R = \frac{3}{\alpha\pi - 2} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2}\right), \quad (3.9)$$

то мы получим, что $\|\Phi_s(\zeta)\| \leq R$ для всех $\zeta \in B_R^+$. Кроме того, функция $\Phi_s(\zeta)$ является неотрицательной, поскольку $\text{ctg}(\sigma) \geq 0$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$. Таким образом, число R существует при $\alpha > 2/\pi$.

Теперь покажем, что Φ является сжимающим отображением в B_R^+ . Возьмём две произвольные неотрицательные функции ζ_1 и ζ_2 , определённые в B_R^+ . Поскольку $B_R^+ \subset L^2$, из леммы 3.3 следует, что

$$\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|\zeta_1 - \zeta_2\|,$$

то есть Φ является сжимающим при $\alpha > 8/\pi$. Заметим, что если α удовлетворяет этому неравенству, то она удовлетворяет и неравенству $\alpha > 2/\pi$. То есть Φ является сжимающим отображением B_R^+ в себя и существует единственная функция $\zeta_* \in B_R^+$, являющаяся решением операторного уравнения (3.1). Оценка (3.8) следует из того, что $\|\zeta_*\| \leq R$ и $\alpha > 8/\pi$.

Теорема доказана. \square

Вообще говоря, оператор Φ_s зависит от s_0 , поскольку функция μ , входящая в его определение, зависит от s_0 . Таким образом, решение ζ_* операторного уравнения (3.1) будет зависеть от s_0 . Существование параметра s_0 будет доказано в п. 3.3, при этом нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда для функции $\zeta_* \in L^2$, являющейся решением операторного уравнения (3.1), справедлива следующая оценка:*

$$\int_0^\sigma \zeta_*(s) ds \leq \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{16}(1+3\sqrt{2}) + \frac{\beta\sqrt{\pi}}{8}(1-3\sqrt{2}) + \frac{\beta\pi(6+\sqrt{2})}{8(1-s_0^2)} \right). \quad (3.10)$$

\triangleright Из (3.1) следует, что

$$\zeta_*(\sigma) \exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds = \frac{3}{\alpha\pi} \sin \left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta_*(\sigma)) \right) \operatorname{ctg} \sigma. \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds \right) = \zeta_* \exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds.$$

Проинтегрируем (3.11) от 0 до произвольного σ и получим:

$$\exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds = 1 + \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma \sin \left(S(s + \beta\mu(s) + \frac{1}{3}H\zeta_*(s)) \right) \operatorname{ctg} s ds.$$

Используя (1.79), (3.4) и (2.3), получим следующие оценки:

$$\int_0^\sigma s \operatorname{ctg} s ds \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\sigma \operatorname{ctg} \sigma\| < \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\sigma \phi(s) \operatorname{ctg} s ds \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\phi(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma\| \leq \frac{\pi}{1-s_0^2},$$

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma H\zeta_*(s) \operatorname{ctg} s \, ds &\leq \left(\int_0^\sigma \left(\frac{H\zeta_*(s)}{\sin s} \right)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\sigma \cos^2 s \, ds \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\| \frac{H\zeta_*(s)}{\sin s} \right\| \leq \sqrt{\pi} \|\zeta_*\|. \end{aligned}$$

При $\alpha > 8/\pi$, учитывая (3.8) и полученные оценки, найдём:

$$\begin{aligned} \exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) \, ds &\leq 1 + \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma (s + 2\beta\phi(s) - 2\beta s + \frac{1}{3} H\zeta_*(s)) \operatorname{ctg} s \, ds \\ &< 1 + \frac{3}{8} \left((1 - 2\beta) \int_0^\sigma s \operatorname{ctg} s \, ds + 2\beta \int_0^\sigma \phi(s) \operatorname{ctg} s \, ds + \frac{1}{3} H\zeta_*(s) \operatorname{ctg} s \, ds \right) \\ &< 1 + \frac{3}{8} \left((1 - 2\beta) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{2\beta\pi}{1 - s_0^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{16} (1 + 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\sqrt{\pi}}{8} (1 - 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\pi(6 + \sqrt{2})}{8(1 - s_0^2)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует утверждение леммы. \triangleleft

3.2 Переход от задачи со срезкой к исходной задаче

В предыдущем пункте мы доказали, что существует единственное решение ζ_* операторного уравнения (3.1). Определим при $\sigma \in [0, \pi/2]$ функции θ , τ и η следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(\sigma) &= \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma), \\ \tau'(\sigma) &= \frac{1}{3} \zeta_*(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^\beta(\sigma), \\ \eta(\sigma) &= \sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma). \end{aligned}$$

Если функция ζ_* является решением задачи без срезки (1.68), то функции τ и θ будут решением исходной задачи, а функция η будет отвечать за угол наклона свободной границы. Однако для того чтобы срезка S в уравнении (3.1) отсутствовала, необходимо, чтобы η лежала в пределах

от 0 до π . Доказательство этого факта и является целью данного пункта. Но тут есть ещё один вопрос, связанный с углом наклона. Дело в том, что если этот угол превышает $\pi/2$, то возможно опрокидывание свободной границы и нарушение взаимно однозначности отображения F (см. п. 1.3.2). Поэтому мы покажем, что η лежит в пределах от 0 до $\pi/2$ при некоторых достаточно больших значениях α .

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Для краткости введём следующую функцию:

$$\nu_+(\sigma) = \sin(S(\eta(\sigma))) \operatorname{ctg} \sigma, \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Нетрудно видеть, что $\nu_+(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, $\nu_+(\pi/2) = 0$ и, как следует из леммы 3.2, $\nu_+ \in L^2$.

Лемма 3.5. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Функция $(\nu_+(\sigma) \sin \sigma)'$ принадлежит пространству L^2 и

$$\|(\nu_+ \sin \sigma)'\| < \left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{6}\right) + \beta\left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} \frac{\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2}.$$

▷ Используя (1.67) и неравенства $|\cos(S(\eta))| \leq 1$ и $|\sin(S(\eta))| \leq 1$, нетрудно получить, что для почти всех $\sigma \in [0, \pi/2]$:

$$|(\nu_+(\sigma) \sin \sigma)'| \leq (1 + 2\beta)|\cos \sigma| + 2\beta|\phi'(\sigma)| + \frac{1}{3}|(H\zeta_*)'| + |\sin \sigma|.$$

Следовательно, поскольку норма в L^2 функций косинус и синус равняется $\sqrt{\pi}/2$, в силу лемм 1.2 и 3.4 мы имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|(\nu_+ \sin \sigma)'\| &\leq \sqrt{\pi}(1 + \beta) + 2\beta\|\phi'(\sigma)\| + \frac{1}{3}\|(H\zeta_*)'\| \\ &= \sqrt{\pi}(1 + \beta) + \frac{\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} + \frac{1}{3}\|\zeta_*\| < \sqrt{\pi}(1 + \beta) + \frac{\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} + \frac{1}{6}\left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2}\right), \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы. ◁

Теорема 3.2. Для любого $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, где

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{\pi} + 1/6}{\sqrt{2\pi}} + \beta \frac{\sqrt{\pi} + 1/3}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{1 - s_0^2} \right) \frac{1 + s_0^2}{1 + s_0^2 - 2\beta s_0^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi} + \frac{1 + 2\beta + 2\beta\sqrt{2\pi}/(1 - s_0^2)}{\pi^{3/2}/2 - 2\beta\pi^{1/2}\mu(\pi/4)},$$

функция $\eta(\sigma) < \pi/2$ для всех $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Поскольку ζ_* является неотрицательным решением операторного уравнения (1.68) и H — линейный положительный оператор,

$$\begin{aligned} \eta(\sigma) &= \sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H \left(\frac{\sin(S(\eta)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_* ds} \right) \\ &\leq \sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H(\sin(S(\eta)) \operatorname{ctg} \sigma) = \sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H\nu_+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, если

$$(H\nu_+)(\sigma) < \alpha\pi(\pi/2 - \sigma - \beta\mu(\sigma)) \quad \text{при } \sigma \in (0, \pi/2), \quad (3.13)$$

то $\eta(\sigma) < \pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Наша цель заключается в доказательстве оценки (3.13).

В силу леммы 1.6,

$$\|((H\nu_+)'\sin\sigma)'\| \leq \|(\nu_+\sin\sigma)'\|.$$

Поскольку $(H\nu_+)'\sin\sigma = 0$ при $\sigma = 0$, получим:

$$\begin{aligned} |(H\nu_+)'\sin\sigma| &= \left| \int_0^\sigma ((H\nu_+)'(s)\sin s)' ds \right| \\ &\leq \sigma^{1/2} \|((H\nu_+)'\sin\sigma)'\| \leq \sigma^{1/2} \|(\nu_+\sin\sigma)'\| \end{aligned}$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Из леммы 3.5 следует, что

$$|(H\nu_+)'\sin\sigma| \leq \|(\nu_+\sin\sigma)'\| \frac{\sigma^{1/2}}{\sin\sigma} \leq A\xi(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2],$$

где

$$A = \left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{6}\right) + \beta\left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{3}\right) + \frac{4\beta\sqrt{2\pi}}{3(1-s_0^2)} \quad \text{и} \quad \xi(\sigma) = \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma}.$$

Заметим, что $\xi(\pi/2) = \xi(\pi/4) = \sqrt{\pi/2}$ и $\xi(\sigma) < \sqrt{\pi/2}$ при $\sigma \in (\pi/4, \pi/2)$.

Поскольку $(H\nu_+)(\pi/2) = 0$,

$$|(H\nu_+)(\sigma)| = \left| \int_{\sigma}^{\pi/2} (H\nu_+)'(s) ds \right| \leq A \int_{\sigma}^{\pi/2} \xi(s) ds \leq A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)$$

при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$. Следовательно, если

$$A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) < \alpha \pi \left(\frac{\pi}{2} - \sigma - \beta \mu(\sigma)\right),$$

то при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$ выполняется оценка (3.13). Это условие можно переписать в виде ограничения на α :

$$\alpha > \frac{A}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \beta \frac{\mu(\sigma)}{\pi/2 - \sigma}\right)}.$$

Правая часть неравенства достигает своего наибольшего значения при $\sigma \rightarrow \pi/2$. Поэтому, используя (1.72) и правило Лопиталья, найдём, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pi/2} \left(1 - \beta \frac{\mu(\sigma)}{\pi/2 - \sigma}\right) = \left(1 + \beta \lim_{\sigma \rightarrow \pi/2} \mu'(\sigma)\right) = \left(1 - \frac{2\beta s_0^2}{1 + s_0^2}\right).$$

Следовательно, оценка (3.13) справедлива при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$, если

$$\alpha > \alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{\pi} + 1/6}{\sqrt{2\pi}} + \beta \frac{\sqrt{\pi} + 1/3}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{3} \frac{\beta}{1 - s_0^2}\right) \frac{1 + s_0^2}{1 + s_0^2 - 2\beta s_0^2}. \quad (3.14)$$

Чтобы получить оценку (3.13) при $\sigma \in (0, \pi/4)$, мы применим другой подход. В силу определения функции ν_+ и (3.12), имеем:

$$\begin{aligned} |\nu_+(\sigma)| &\leq |\eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma| \leq \left| \sigma \operatorname{ctg} \sigma + \beta \mu(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1}{\alpha \pi} \cos \sigma \frac{(H\nu_+)(\sigma)}{\sin \sigma} \right| \\ &\leq |\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + 2\beta |\phi(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma| + 2\beta |\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{\alpha \pi} \left| \frac{(H\nu_+)(\sigma)}{\sin \sigma} \right|. \end{aligned}$$

Как следует из леммы 1.4 и оценок (2.3) и (3.4),

$$\|\nu_+\| \leq 1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} + \frac{2}{\alpha\pi} \|\nu_+\|.$$

Следовательно,

$$\|\nu_+\| \leq \frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} \right).$$

Из леммы 1.3 вытекает, что

$$|(H\nu_+)(\sigma)| \leq \|\nu_+\| \sigma^{1/2} \leq \frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} \right) \sigma^{1/2}.$$

Таким образом, если

$$\frac{\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1-s_0^2} \right) \sigma^{1/2} \leq \alpha\pi \left(\pi/2 - \sigma - \beta\mu(\sigma) \right),$$

то при $\sigma \in (0, \pi/4)$ будет справедлива оценка (3.13). В силу неотрицательности функции μ последнее неравенство выполняется, если

$$\alpha\pi - 2 \geq \frac{\left(1 + 2\beta + 2\beta\sqrt{2\pi}/(1-s_0^2) \right) \sigma^{1/2}}{\pi/2 - \sigma - \beta\mu(\sigma)},$$

то есть для

$$\alpha \geq \alpha_2 = \frac{2}{\pi} + \frac{1 + 2\beta + 2\beta\sqrt{2\pi}/(1-s_0^2)}{\pi^{3/2}/2 - 2\beta\pi^{1/2}\mu(\pi/4)}. \quad (3.15)$$

Из оценок (3.14) и (3.15) следует, что при конкретных β и s_0 неравенство (3.13) справедливо для $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Теорема доказана. \square

Таким образом, при выполнении условий теорем 3.1 и 3.2 существует решение операторного уравнения (1.68). Теперь чтобы доказать существование функций τ и θ , образующих решение задачи (1.49)–(1.57), нам необходимо доказать существование параметра s_0 , удовлетворяющего уравнению (1.56).

3.3 Определение параметра s_0

Будем рассматривать тройку параметров $s_0 \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha > 8/\pi$. Для удобства введём множество

$$\Omega_+ = \{(s_0, \alpha, \beta) \mid s_0, \beta \in (0, 1), \alpha \in (8/\pi, +\infty)\}.$$

Лемма 3.6. *Решение $\zeta_* \in L^2$ операторного уравнения (1.68) зависит непрерывно в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega_+$.*

▷ Из (1.52) видно, что функция ϕ , а значит, и функция μ , непрерывно зависит от параметра s_0 на интервале $(0, 1)$. Отсюда следует, что оператор Φ на B_R^+ непрерывно зависит параметров (s_0, α, β) . Из теорем 3.1–3.2 следует, что отображение Φ является сжимающим. Согласно теореме об устойчивости неподвижной точки сжимающего отображения (см., например, [76, § 7]), мы получим, что решение ζ_* операторного уравнения $\zeta_* = \Phi(\zeta_*)$, непрерывно зависит в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega_+$. ◁

Для того чтобы решить исходную задачу (1.49)–(1.57), нам необходимо определить параметр s_0 , являющийся решением уравнения (1.56) при фиксированных α и β . Для краткости, перепишем уравнение (1.56) в следующем виде:

$$\frac{\ell}{h} = Y_+(s_0, \alpha, \beta), \quad (3.16)$$

где

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds.$$

Лемма 3.7. *Функция $Y_+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.*

▷ Для доказательства этого свойства воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Пусть

$$\Omega_{+,\delta} = \{(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega_+ \mid s_0 \in (\delta, 1 - \delta), \beta \in (0, 1 - \delta)\},$$

где δ — некоторое малое положительное число.

Функция $\hat{\tau}$ является гармонической в круге D_o^* , причём τ — её граничное значение. Из (1.53) и (1.63) мы получаем, что

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{3} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds + \ln \varrho^\beta(\sigma),$$

где $\varrho(\sigma) = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/4}$. Отсюда, в силу леммы 3.6, вытекает, что функция τ , а значит, и функция $\hat{\tau}$ зависят непрерывным образом от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega_{+, \delta}$. Далее, для наглядности вместо $\hat{\tau}(s)$ мы будем писать $\hat{\tau}(s, s_0, \alpha, \beta)$.

Чтобы воспользоваться теоремой Лебега необходимо найти интегрируемую мажоранту подынтегрального выражения в определении функции $Y_+(s_0, \alpha, \beta)$. Воспользуемся заменой переменных $p = s/s_0$ и получим:

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \frac{s_0}{1 - s_0} \int_0^1 \frac{(1 - s_0)(1 - p^2)^{\beta/2}}{p^\beta} \frac{1 + (ps_0)^2}{1 - (ps_0)^2} e^{-\hat{\tau}(ps_0, s_0, \alpha, \beta)} dp. \quad (3.17)$$

Заметим, что функция $s_0/(1 - s_0)$, стоящая в этом выражении перед интегралом, является непрерывной на множестве $\Omega_{+, \delta}$.

Поскольку функция $\hat{\tau}$ является гармонической в D_o^* , её максимум и минимум лежат на границе круга. Следовательно, из симметричности функции τ относительно мнимой и вещественной осей получим следующую оценку:

$$\tau_* = \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) \leq \hat{\tau}(t, s_0, \alpha, \beta) \leq \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \tau^*, \quad t \in D_o^*. \quad (3.18)$$

Поскольку $p \in (0, 1)$, получим: $(1 - p^2)^{\beta/2} < 1$, $(1 - (ps_0)^2) > (1 - s_0)$ и $(1 + (ps_0)^2) < 2$. Тогда подынтегральное выражение интеграла из (3.17) можно оценить сверху функцией $2e^{-\tau_*} p^{-(1-\delta)}$. Нетрудно видеть, что она интегрируема на интервале $(0, 1)$. Следовательно, эта функция является интегрируемой мажорантой и мы можем применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В силу произвольности δ функция $Y_+(s_0, \alpha, \beta)$ зависит непрерывным образом от (s_0, α, β) и на Ω_+ . \triangleleft

Теорема 3.3. *Существует такая положительная ограниченная функция*

$C_+ : [0, 1] \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, что при выполнении условий $\alpha > 8/\pi$, $\beta \in (0, 1)$ и

$$0 < \frac{\ell}{h} < \max_{s_0 \in (0,1)} C_+(\beta, s_0), \quad (3.19)$$

найдётся параметр $s_0^* \in (0, 1)$, который удовлетворяет уравнению (3.16).

Доказательство. Для доказательства разрешимости уравнения (3.16) относительно s_0 будем использовать теорему о промежуточном значении. Сначала заметим, что для всех α и β

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s_0 \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Теперь оценим функцию $Y_+(s_0, \alpha, \beta)$ снизу по s_0 . Из (3.18) получим, что

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) \geq \frac{2}{\pi} e^{-\tau^*} I(s_0),$$

где

$$I(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds.$$

Оценим $I(s_0)$ снизу. Пусть $\gamma \in (0, s_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} -\gamma + \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} &= \int_0^\gamma \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds = \int_0^\gamma \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \\ &\leq \frac{\gamma^\beta}{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta/2}} \int_0^\gamma \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \leq \frac{\gamma^\beta}{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta/2}} I(s_0). \end{aligned}$$

Положив $\gamma = s_0/2$, найдём, что

$$I(s_0) \geq I_*(s_0) = -\frac{s_0}{2} + \ln \frac{1 + s_0/2}{1 - s_0/2}.$$

Функция I_* является ограниченной на $[0, 1]$, $I_*(0) = 0$ и $I_*(1) = -1/2 + \ln 3$.

Оценим теперь $e^{-\tau^*}$. Нетрудно видеть, что

$$\tau^* = \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \frac{1}{3} \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds + \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \ln \varrho^\beta(\sigma).$$

Используя оценку (3.10) и неравенство $\varrho(\sigma) \leq \varrho(\pi/2)$ при $\sigma \in [0, \pi/2]$,

ПОЛУЧИМ:

$$\tau^* \leq \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{16} (1 + 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\sqrt{\pi}}{8} (1 - 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\pi(6 + \sqrt{2})}{8(1 - s_0^2)} \right) + \frac{\beta}{2} \ln(1 + s_0^2)$$

и

$$e^{-\tau^*} \geq (1 + s_0^2)^{-\beta/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{16} (1 + 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\sqrt{\pi}}{8} (1 - 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\pi(6 + \sqrt{2})}{8(1 - s_0^2)} \right)^{-1/3}.$$

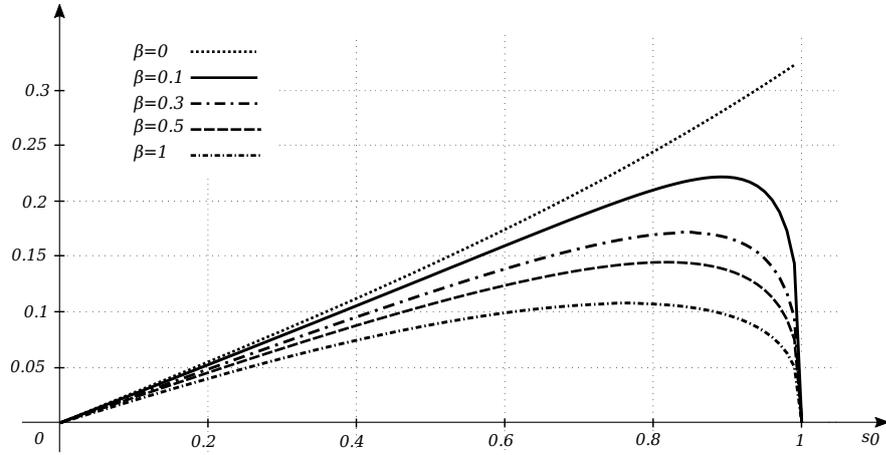


Рисунок 3.1 — Поведение функции $C_+(\beta, s_0)$ при различных β .

Тогда

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) \geq C_+(\beta, s_0), \quad (3.21)$$

где

$$C_+(\beta, s_0) = \frac{2I_*(s_0)}{\pi(1 + s_0^2)^{\beta/2}} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{16} (1 + 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\sqrt{\pi}}{8} (1 - 3\sqrt{2}) + \frac{\beta\pi(6 + \sqrt{2})}{8(1 - s_0^2)} \right)^{-1/3}.$$

Следовательно, из непрерывности функции $Y_+(s_0, \alpha, \beta)$ на Ω_+ , доказанной в лемме 3.7, и из оценок (3.20) и (3.21) следует, что при фиксированном β существует параметр $s_0^* \in (0, 1)$, такой что уравнение (3.16) разрешимо, если $0 < \ell/h < \max_{s_0 \in (0,1)} C_+(\beta, s_0)$. На рис. 3.1 представлено поведение функции $C_+(\beta, s_0)$ при различных β . Теорема доказана. \square

Таким образом, мы можем перейти от задачи (3.1) к операторному уравнению (1.68), которое эквивалентно исходной задаче (1.49)–(1.57) при $\beta > 0$. Тогда из теорем 3.1–3.3 следует, что существует решение задачи с точечным стоком во впадине на дне канала.

Глава 4. Доказательство разрешимости задачи с точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне

В этой главе рассматривается задача со стоком на дне треугольного выступа, то есть случай, когда $\beta < 0$ (см. рис. 1.2в). Для удобства введём новый параметр $\beta^* > 0$, такой что $\beta^* = -\beta$ и $\beta^* \in (0, 1)$. Тогда формулировка операторного уравнения (1.68) в этом случае примет следующий вид:

$$\zeta = \Phi(\zeta), \quad (4.1)$$

где

$$\Phi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin(\sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta ds} \quad (4.2)$$

при $\sigma \in (0, \pi/2]$. Оператор H определён в (1.64), а функция μ — в (1.67). Будем искать решения уравнения (4.1) в банаховом пространстве L^2 . Разрешимость операторного уравнения (4.1) будет доказана с помощью принципа сжимающих отображений.

4.1 Однозначная разрешимость операторного уравнения

При доказательстве разрешимости операторного уравнения (4.1) будет использоваться условие (1.73). Это условие связано не с механическими, а с математическими трудностями возникающими при решении задачи. Для начала получим вспомогательные результаты.

Лемма 4.1. Пусть выполняется условие (1.73), то есть для $\sigma \in [0, \pi/2]$ $\beta^*\mu(\sigma) \leq \sigma$, и $w \in L^2$. Тогда функция g , определённая следующим образом

$$g(\sigma) = \sin(\sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(Hw)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma,$$

принадлежит L^2 и выполняется оценка:

$$\|g\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|. \quad (4.3)$$

▷ Для доказательства неравенства (4.3) заметим, что $|\sin \sigma| \leq |\sigma|$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$. Кроме того, $0 \leq \sigma - \beta^* \mu(\sigma) \leq \sigma$, так как $\mu \geq 0$ и выполняется условие (1.73). Следовательно,

$$|g(\sigma)| \leq (|\sigma - \beta^* \mu(\sigma)| + \frac{1}{3} |Hw|(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma \leq (\sigma + \frac{1}{3} |Hw|(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma$$

для всех $\sigma \in (0, \pi/2]$. Поскольку $|\cos \sigma| \leq 1$ и выполняется оценка (2.3), используя лемму 1.4, получим, что

$$\|g\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|.$$

◁

Лемма 4.2. Если w_1 и w_2 — неотрицательные функции из L^2 , то

$$\|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|.$$

▷ Пусть $v_\lambda = w_1 + \lambda(w_2 - w_1)$ для каждого $\lambda \in [0, 1]$. Тогда $dv_\lambda/d\lambda = w_2 - w_1$ и

$$\Phi(w_2) - \Phi(w_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) d\lambda.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \frac{d}{d\lambda} \frac{\sin(\sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} H v_\lambda)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} = \\ &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \left(\frac{\cos(\sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} H v_\lambda) \frac{1}{3} H (w_2 - w_1)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} H v_\lambda) \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание неотрицательность функции v_λ , мы получим

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{1}{\alpha\pi} \left\| \frac{H(w_2 - w_1)}{\sin \sigma} \right\| + \frac{3}{\alpha\pi} \left\| \frac{\int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\sin \sigma} \right\|.$$

Из этого неравенства и леммы 1.4 вытекает следующая оценка:

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{2}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| + \frac{6}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| = \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|,$$

откуда сразу следует требуемое неравенство. \triangleleft

Теперь мы можем приступить к доказательству существования и единственности решения операторного уравнения (4.1). Отметим, что мы будем искать решение операторного уравнения при определённых значениях параметров. Зафиксируем некоторое произвольное значение $s_0 \in (0,1)$. При доказательстве следующей теоремы будем использовать условие (1.73), которое эквивалентно (1.75) и (1.76).

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (1.73), то есть $\beta^* \mu(\sigma) \leq \sigma$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$. Для любого $\alpha > 8/\pi \approx 2,55$ существует единственная неотрицательная функция $\zeta_* \in L^2$, удовлетворяющая уравнению (4.1), и для неё справедливы оценки:

$$0 \leq \sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma) \leq \pi \quad \text{при } \sigma \in [0, \pi/2], \quad (4.4)$$

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{9\sqrt{\pi}}{2} + \frac{6\beta^*}{\sqrt{\pi}} \mu(\pi/4). \quad (4.5)$$

Доказательство. Для доказательства однозначной разрешимости операторного уравнения (4.1) воспользуемся принципом сжимающих отображений. Возьмём следующее множество

$$B_R^+ = \{\zeta \in L^2 \mid \|\zeta\| \leq R, \zeta \geq 0\}$$

в пространстве L^2 . Сначала установим существование $R > 0$, для которого $\Phi(B_R^+) \subset B_R^+$.

Пусть R — некоторое положительное число и $\zeta \in B_R^+$. Тогда

$$\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds \geq 1 \quad \text{для всех } \sigma \in [0, \pi/2].$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$\|\Phi(\zeta)\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \|\zeta\|\right) \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right).$$

Неравенство $\|\Phi(\zeta)\| \leq R$ справедливо, если

$$\frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right) \leq R.$$

Таким образом, при

$$R \geq \frac{3}{\alpha\pi - 2} \tag{4.6}$$

мы получаем, что $\|\Phi(\zeta)\| \leq R$ для всех $\zeta \in B_R^+$.

Далее, нам нужно установить неотрицательность функции $\Phi(\zeta)$. Поскольку $\text{ctg}(\sigma) \geq 0$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$, этот факт является следствием следующего неравенства:

$$0 \leq \sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \leq \pi. \tag{4.7}$$

Если $\beta^* \mu(\sigma) \leq \sigma$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$, то левое неравенство справедливо для неотрицательной функции ζ , поскольку $K \geq 0$ и H — положительный оператор.

Как следует из леммы 1.3, правое неравенство справедливо всякий раз, когда

$$\|\zeta\| \gamma(\sigma) \leq 3(\pi - \sigma + \beta^* \mu(\sigma)),$$

где $\gamma(\sigma) = \min\{\sigma^{1/2}, (\pi/2 - \sigma)^{1/2}\}$. Следовательно, функция $\Phi(\zeta)$ неотрицательна, если $\beta^* \mu(\sigma) \leq \sigma$ при $\sigma \in [0, \pi/2]$ и $\zeta \in B_R^+$ с

$$R \leq \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \frac{3(\pi - \sigma + \beta^* \mu(\sigma))}{\gamma(\sigma)} = \frac{9\sqrt{\pi}}{2} + \frac{6\beta^*}{\sqrt{\pi}} \mu(\pi/4). \tag{4.8}$$

Взяв теперь R_* , удовлетворяющее неравенствам (4.6) и (4.8), получим,

что $\Phi(B_{R_*^+}) \subset B_{R_*^+}$. Такое число R_* существует, если

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi^{3/2} + 4\pi^{1/2}\beta^*\mu(\pi/4)}. \quad (4.9)$$

Теперь покажем, что Φ является сжимающим отображением в $B_{R_*^+}$. Возьмём две произвольные неотрицательные функции ζ_1 и ζ_2 , определённые в $B_{R_*^+}$. Поскольку $B_{R_*^+} \subset L^2$, из леммы 4.2 следует, что

$$\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|\zeta_1 - \zeta_2\|,$$

то есть Φ является сжимающим при

$$\alpha > 8/\pi. \quad (4.10)$$

Заметим, что если α удовлетворяет оценке (4.10), то она удовлетворяет и оценке (4.9). То есть Φ является сжимающим отображением $B_{R_*^+}$ в себя и существует единственная функция $\zeta_* \in B_{R_*^+}$, являющаяся решением операторного уравнения (4.1). Также отметим, что оценки (4.4) и (4.5) следуют из (4.7) и (4.8) соответственно. Теорема доказана. \square

Вообще говоря, оператор Φ зависит от s_0 , поскольку зависит от s_0 функция μ , входящая в его определение. Таким образом, решение ζ_* операторного уравнения (4.1) будет зависеть от s_0 .

Оценим решение операторного уравнения (4.1).

Лемма 4.3. Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Тогда для функции $\zeta_* \in L^2$, являющейся решением операторного уравнения (4.1), справедлива следующая оценка:

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2} < 1. \quad (4.11)$$

▷ Используя условие (1.73), получим:

$$\begin{aligned} |\zeta_*| &= |\Phi(\zeta_*)| = \frac{3}{\alpha\pi} \left| \frac{\sin(\sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta_*(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds} \right| \\ &\leq \frac{3}{\alpha\pi} \left| (\sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta_*(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma \right| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(|2\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{3}|H\zeta_*(\sigma)| \right). \end{aligned}$$

Используя лемму 4.1 и (2.3), получим следующую оценку:

$$\|\zeta_*\| = \|\Phi(\zeta_*)\| \leq \frac{6}{\alpha\pi} \|\sigma \operatorname{ctg} \sigma\| + \frac{1}{\alpha\pi} \left\| \frac{H\zeta_*}{\sin \sigma} \right\| \leq \frac{6}{\alpha\pi} + \frac{2}{\alpha\pi} \|\zeta_*\|.$$

Таким образом,

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2}.$$

Из (4.10) следует, что

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2} < 1.$$

◁

4.2 Определение параметра s_0

Будем рассматривать тройку параметров $s_0 \in (0, 1)$, $\beta^* \in (0, 1)$ и $\alpha > 8/\pi$. Введём множество

$$\Omega_- = \left\{ (s_0, \alpha, \beta^*) \mid s_0, \beta^* \in (0, 1), \alpha \in (8/\pi, +\infty), \beta^* \leq \frac{1 - s_0^2}{2s_0^2} \right\}.$$

Неравенство на β^* , фигурирующее в определении множества Ω_- , есть не что иное, как условие (1.75), эквивалентное условию (1.73) из теоремы 4.1.

Лемма 4.4. *Решение $\zeta_* \in L^2$ операторного уравнения (4.1) зависит непрерывно в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta^*) \in \Omega_-$.*

▷ Как было отмечено в п. 1.4.3, функция μ зависит от параметра s_0 . Поэтому, далее, мы будем писать $\mu(\sigma, s_0)$ вместо $\mu(\sigma)$. Запишем оператор Φ в такой форме, чтобы была видна его зависимость от параметров (s_0, α, β^*) :

$$\Phi(\zeta)(\sigma, s_0, \alpha, \beta^*) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin\left(\sigma - \beta^* \mu(\sigma, s_0) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)\right) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds}.$$

Видим, что Φ на $B_{R_*^+}$ непрерывно зависит от этих параметров. В теореме 4.1 мы доказали, что отображение Φ является сжимающим. Согласно теореме об

устойчивости неподвижной точки сжимающего отображения (см., например, [76, с. 44]), мы получим, что решение ζ_* операторного уравнения $\zeta_* = \Phi(\zeta_*)$, непрерывно зависит в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta^*) \in \Omega_-$. \triangleleft

Для того чтобы решить исходную задачу, нам необходимо определить параметр s_0 , являющийся решением уравнения (1.56) при фиксированных α и $\beta < 0$. Обозначим это решение через s_0^* . Уравнение (1.56) при $\beta = -\beta^*$, где $\beta^* \in (0, 1)$, переписется в следующем виде:

$$\frac{\ell}{h} = Y_-(s_0, \alpha, \beta^*), \quad (4.12)$$

где

$$Y_-(s_0, \alpha, \beta^*) = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{s^{\beta^*}}{(s_0^2 - s^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds. \quad (4.13)$$

Лемма 4.5. *Функция $Y_- : \Omega_- \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.*

\triangleright Для доказательства этого свойства воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Функция $\hat{\tau}$ является гармонической в круге D_\circ^* , причём τ — её граничное значение. Из (1.53) и (1.63) мы получаем, что

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{3} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds - \ln \varrho^{\beta^*}(\sigma),$$

где $\varrho(\sigma) = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/4}$. Отсюда, в силу леммы 4.4, вытекает, что функция τ , а значит, и функция $\hat{\tau}$ зависят непрерывным образом от параметров $(s_0, \alpha, \beta^*) \in \Omega_-$. Далее, для наглядности вместо $\hat{\tau}(s)$ мы будем писать $\hat{\tau}(s, s_0, \alpha, \beta^*)$.

Чтобы воспользоваться теоремой Лебега необходимо найти интегрируемую мажоранту подынтегрального выражения в определении функции $Y_-(s_0, \alpha, \beta^*)$. Воспользуемся заменой переменных $p = s/s_0$ в интеграле из определения (4.13):

$$Y_-(s_0, \alpha, \beta^*) = \frac{2}{\pi} \frac{s_0}{1 - s_0} \int_0^1 \frac{(1 - s_0)p^{\beta^*}}{(1 - p^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + (ps_0)^2}{1 - (ps_0)^2} e^{-\hat{\tau}(ps_0, s_0, \alpha, \beta^*)} dp. \quad (4.14)$$

Заметим, что функция $s_0/(1 - s_0)$, стоящая перед интегралом в (4.14),

является непрерывной на множестве Ω .

Поскольку функция $\hat{\tau}$ является гармонической в D_\circ^* , её максимум и минимум лежат на границе круга. Следовательно, из симметричности функции τ относительно мнимой и вещественной осей получим следующую оценку:

$$\tau_* = \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) \leq \hat{\tau}(t, s_0, \alpha, \beta^*) \leq \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \tau^*, \quad t \in D_\circ^*. \quad (4.15)$$

Поскольку $0 < p < 1$, получим, что

$$(1 - p^2)^{\beta^*/2} = (1 - p)^{\beta^*/2} (1 + p)^{\beta^*/2} > (1 - p)^{\beta^*/2} > (1 - p)^{1/2},$$

$$1 - (ps_0)^2 = (1 - ps_0)(1 + ps_0) > (1 - ps_0) > (1 - s_0),$$

$$1 + (ps_0)^2 < 2 \quad \text{и} \quad p^{\beta^*/2} < 1.$$

Тогда подынтегральное выражение интеграла из (4.14) можно оценить в следующем виде:

$$\frac{(1 - s_0) p^{\beta^*}}{(1 - p^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + (ps_0)^2}{1 - (ps_0)^2} e^{-\hat{\tau}(ps_0, s_0, \alpha, \beta^*)} < 2e^{-\tau_*} \varphi(p),$$

где $\varphi(p) = (1 - p)^{-1/2}$. Нетрудно видеть, что функция φ интегрируема на интервале $(0, 1)$. Следовательно, функция φ является интегрируемой мажорантой и мы можем применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Значит, функция $Y_-(s_0, \alpha, \beta^*)$ зависит непрерывным образом от (s_0, α, β^*) на Ω_- . \triangleleft

Теорема 4.2. *Существует такая положительная строго убывающая функция $C_- : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что:*

1. $C_-(\beta^*) \rightarrow +\infty$ при $\beta^* \rightarrow 0$ и $C_-(1) \approx 0,135$;
2. если $\alpha > 8/\pi$, $\beta^* \in (0, 1)$ и

$$0 < \frac{\ell}{h} < C_-(\beta^*), \quad (4.16)$$

то найдётся параметр s_0^* , такой что $(s_0^*, \alpha, \beta^*) \in \Omega_-$ и

$$Y_-(s_0^*, \alpha, \beta^*) = \frac{\ell}{h}. \quad (4.17)$$

Доказательство. Для доказательства разрешимости уравнения (4.17) будем использовать теорему о промежуточном значении. Напомним, что разрешимость операторного уравнения (4.1) была доказана при выполнении условия (1.73), которое можно записать следующим образом:

$$s_0 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+2\beta^*}}\right] \quad \text{при} \quad \beta^* \in (0, 1).$$

Сначала заметим, что для всех α и β^*

$$Y_-(s_0, \alpha, \beta^*) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s_0 \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Теперь исследуем поведение функции $Y_-(s_0, \alpha, \beta^*)$, когда s_0 стремится к правому концу интервала. Из (4.15) мы получаем, что

$$Y_-(s_0, \alpha, \beta^*) \geq \frac{2}{\pi} e^{-\tau^*} I(s_0),$$

где

$$I(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{s^{\beta^*}}{(s_0^2 - s^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds.$$

Оценим $I(s_0)$ снизу. Пусть $\beta^* \in (0, 1)$ и $\gamma \in (0, s_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_\gamma^{s_0} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds &= \int_\gamma^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta^*/2}}{s^{\beta^*}} \frac{s^{\beta^*}}{(s_0^2 - s^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \\ &\leq \frac{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta^*/2}}{\gamma^{\beta^*}} \int_\gamma^{s_0} \frac{s^{\beta^*}}{(s_0^2 - s^2)^{\beta^*/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \leq \frac{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta^*/2}}{\gamma^{\beta^*}} I(s_0). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_\gamma^{s_0} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds = -(s_0 - \gamma) + \ln \frac{1 + s_0}{1 - s_0} - \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma},$$

получим, что

$$I(s_0) \geq \frac{\gamma^{\beta^*}}{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta^*/2}} \left(-(s_0 - \gamma) + \ln \frac{1 + s_0}{1 - s_0} - \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right).$$

Положив $\gamma = s_0/2$, найдём, что

$$I(s_0) \geq I_*(s_0) = \frac{1}{3^{\beta^*/2}} \left(-\frac{s_0}{2} + \ln \frac{1 + s_0}{1 + s_0/2} + \ln \frac{1 - s_0/2}{1 - s_0} \right).$$

Функция I_* является строго возрастающей на $[0, 1)$, $I_*(0) = 0$ и $I_*(s_0) \rightarrow +\infty$ при $s_0 \rightarrow 1$.

Оценим теперь $e^{-\tau^*}$. Нетрудно видеть, что

$$\tau^* = \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \frac{1}{3} \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds - \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \ln \varrho^{\beta^*}(\sigma).$$

Согласно (4.11),

$$\int_0^\sigma \zeta_*(s) ds \leq \int_0^{\pi/2} \zeta_*(s) ds \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\zeta_*\| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Кроме того, $\varrho(\sigma) \geq \varrho(0)$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Поэтому

$$\tau^* \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\beta^*}{2} \ln(1 - s_0^2)$$

и

$$e^{-\tau^*} \geq \left(1 - \frac{1}{1 + 2\beta^*}\right)^{\beta^*/2} \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\}.$$

Следовательно,

$$Y_- \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta^*}}, \alpha, \beta^* \right) \geq C_-(\beta^*), \quad (4.19)$$

где

$$C_-(\beta^*) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\} \left(1 - \frac{1}{1 + 2\beta^*}\right)^{\beta^*/2} I_* \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta^*}} \right).$$

Функция $C_-(\beta^*)$ является строго убывающей на $(0, 1]$, $C_-(\beta^*) \rightarrow +\infty$ при

$\beta^* \rightarrow 0$ и $C_-(1) \approx 0,135$.

Таким образом, из непрерывности функции $Y_-(s_0, \alpha, \beta^*)$ на Ω_- , доказанной в лемме 4.5, и из оценок (4.18) и (4.19) следует существование параметра $s_0^* \in (0, 1)$, такого что уравнение (4.17) разрешимо, если

$$0 < \frac{\ell}{h} < C_-(\beta^*).$$

Теорема доказана. □

Замечание. В случае плоского горизонтального дна отсутствует ограничение на ℓ/h . В самом деле, ограничение (1.76) при $\beta^* = 0$ выполняется автоматически и $C_-(\beta^*) \rightarrow +\infty$ при $\beta^* \rightarrow 0$. Поэтому условие (4.16) в теореме 4.2 переписывается в следующем виде:

$$0 < \frac{\ell}{h} < +\infty.$$

Замечание. В безразмерных переменных глубина течения жидкости на бесконечности равна 1, а высота треугольного выступа равна $\frac{\ell}{h} \sin \beta^* \frac{\pi}{2}$. Обозначив величину выступа за h_0 , преобразуем условие (4.16) в следующем виде:

$$0 < h_0 < C_-(\beta^*) \sin \beta^* \frac{\pi}{2}.$$

Из графика функции $C_-(\beta^*) \sin \beta^* \frac{\pi}{2}$, приведённого на рис. 4.1, видно, что значение h_0 строго меньше 1. •

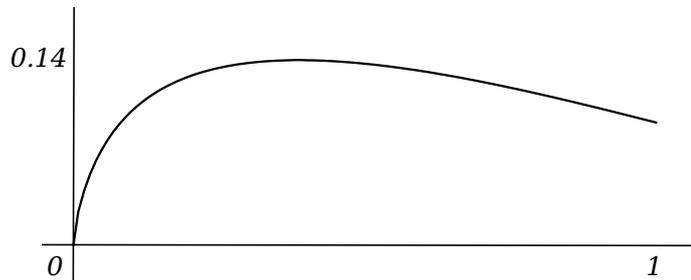


Рисунок 4.1 — График функции $C_-(\beta^*) \sin \beta^* \frac{\pi}{2}$ при $\beta^* \in [0, 1]$.

Мы показали, что для тройки параметров $(s_0^*, \alpha, \beta^*) \in \Omega_-$ существуют функции τ и θ , образующие решение задачи (1.48)–(1.57). Эти функции

определяются следующим образом:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{3}(H\zeta_*)(\sigma), \quad \tau'(\sigma) = \frac{1}{3}\zeta_*(\sigma) - \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^{\beta^*}(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2). \quad (4.20)$$

Единственность решения задачи доказать не удалось, поскольку не установлена монотонность функции $Y_-(s_0, \alpha, \beta^*)$ по параметру s_0 .

4.3 Исследование формы свободной границы

Разрешимость системы (1.48)–(1.57) может не давать разрешимость исходной задачи, поскольку для этого необходимо, чтобы существовали конформные отображения F и G . Если происходит опрокидывание свободной границы Γ , то есть угол наклона η к ней превышает $\pi/2$, то отображения F и G могут стать не взаимно однозначными (см. п. 1.3.2) и в этом случае решение операторного уравнения (4.1) не дает решения исходной задачи. В данном параграфе будет установлено, что опрокидывание невозможно, если число Фруда α не слишком мало.

Согласно (4.20),

$$\eta(\sigma) = \left(\sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma) \right), \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

Покажем, что $\eta < \pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$ при достаточно больших α . Заметим, что положительность η следует из условий теоремы 4.1.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Для краткости введём следующую функцию:

$$\nu_-(\sigma) = \sin(\eta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma, \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Нетрудно видеть, что $\nu_-(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, $\nu_-(\pi/2) = 0$ и, как следует из леммы 4.1, $\nu_- \in L^2$.

Лемма 4.6. Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Функция

$(\nu_-(\sigma) \sin \sigma)'$ принадлежит пространству L^2 и

$$\|(\nu_- \sin \sigma)'\| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\| < \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3}.$$

▷ Поскольку

$$(\nu_-(\sigma) \sin \sigma)' = (\sin(\eta(\sigma)) \cos \sigma)' = \cos(\eta(\sigma)) \eta'(\sigma) \cos \sigma - \sin(\eta(\sigma)) \sin \sigma$$

и

$$\eta' = 1 - \beta^* \mu' + (H\zeta_*)'/3,$$

справедлива следующая оценка:

$$|(\nu_-(\sigma) \sin \sigma)'| \leq \left| \left(1 - \beta^* \mu' + \frac{1}{3}(H\zeta_*)'\right) \cos(\eta(\sigma)) \cos \sigma \right| + |\sin(\eta(\sigma)) \sin \sigma|.$$

Согласно (1.76),

$$|(\nu_-(\sigma) \sin \sigma)'| \leq 2|\cos \sigma| + \frac{1}{3} |(H\zeta_*)'(\sigma)| + |\sin \sigma|.$$

Следовательно, в силу лемм 1.2 и 4.3 мы имеем:

$$\|(\nu_- \sin \sigma)'\| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|(H\zeta_*)'\| = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\| < \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3}.$$

◁

Теорема 4.1 гарантирует разрешимость операторного уравнения (1.68) при выполнении условия (1.73) и $\alpha > 8/\pi$. Однако отсутствие опрокидывания может быть доказано и при меньшей нижней границе числа α . При этом предполагается, что справедливы все оценки, полученные для существующего решения ζ_* .

Теорема 4.3. *Для любого*

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^{3/2}} \approx 1,355$$

функция $\eta(\sigma) < \pi/2$ для всех $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Поскольку ζ_* является неотрицательным решением

операторного уравнения (1.68) и H — линейный положительный оператор,

$$\begin{aligned} \eta(\sigma) &= \sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H \left(\frac{\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_* ds} \right) \\ &\leq \sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H(\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma) = \sigma - \beta^* \mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H\nu_-. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таким образом, если

$$(H\nu_-)(\sigma) < \alpha\pi (\pi/2 - \sigma + \beta^* \mu(\sigma)) \quad \text{при } \sigma \in (0, \pi/2), \quad (4.22)$$

то $\eta(\sigma) < \pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Докажем оценку (4.22).

В силу леммы 1.6,

$$\|((H\nu_-)' \sin \sigma)'\| \leq \|(\nu_- \sin \sigma)'\|.$$

Поскольку $(H\nu_-)'(\sigma) \sin \sigma = 0$ при $\sigma = 0$, получим:

$$\begin{aligned} |(H\nu_-)'(\sigma) \sin \sigma| &= \left| \int_0^\sigma ((H\nu_-)'(s) \sin s)' ds \right| \\ &\leq \sigma^{1/2} \|((H\nu_-)' \sin \sigma)'\| \leq \sigma^{1/2} \|(\nu_- \sin \sigma)'\| \end{aligned}$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Из леммы 4.6 следует, что

$$|(H\nu_-)'(\sigma)| \leq \|(\nu_- \sin \sigma)'\| \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma} \leq A \xi(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2],$$

где

$$A = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \xi(\sigma) = \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma}.$$

Заметим, что $\xi(\pi/2) = \xi(\pi/4) = \sqrt{\pi/2}$ и $\xi(\sigma) < \sqrt{\pi/2}$ при $\sigma \in (\pi/4, \pi/2)$.

Поскольку $(H\nu_-)(\pi/2) = 0$,

$$|(H\nu_-)(\sigma)| = \left| \int_\sigma^{\pi/2} (H\nu_-)'(s) ds \right| \leq A \int_\sigma^{\pi/2} \xi(s) ds \leq A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma \right)$$

при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$. Следовательно, если

$$A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) < \alpha\pi\left(\frac{\pi}{2} - \sigma + \beta^*\mu(\sigma)\right),$$

то при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$ выполняется оценка (4.22). Это условие можно переписать в виде ограничения на α :

$$\alpha > \frac{A}{\sqrt{2\pi}\left(1 + \beta^*\frac{\mu(\sigma)}{\pi/2 - \sigma}\right)}.$$

Таким образом, в силу неотрицательности функции μ на всём интервале, если

$$\alpha > \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \approx 1,194, \quad (4.23)$$

то при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$ будет справедлива оценка (4.22).

Чтобы получить оценку (4.22) при $\sigma \in (0, \pi/4)$, мы применим другой подход. В силу определения функции ν_- и (4.21), мы имеем:

$$\begin{aligned} |\nu_-(\sigma)| &\leq |\eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma| \leq \left| \sigma \operatorname{ctg} \sigma - \beta^*\mu(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} \cos \sigma \frac{(H\nu_-)(\sigma)}{\sin \sigma} \right| \\ &\leq 2|\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{\alpha\pi} \left| \frac{(H\nu_-)(\sigma)}{\sin \sigma} \right|. \end{aligned}$$

Как следует из леммы 1.4 и оценки (2.3),

$$\|\nu_-\| \leq 2 + \frac{2}{\alpha\pi} \|\nu_-\|.$$

Следовательно,

$$\|\nu_-\| \leq \frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2}.$$

Из леммы 1.3 вытекает, что

$$|(H\nu_-)(\sigma)| \leq \|\nu_-\| \sigma^{1/2} \leq \frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sigma^{1/2}.$$

Таким образом, если

$$\frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sigma^{1/2} \leq \alpha\pi \left(\frac{\pi}{2} - \sigma + \beta^* \mu(\sigma) \right),$$

то при $\sigma \in (0, \pi/4)$ будет справедлива оценка (4.22). В силу неотрицательности функции μ последнее неравенство выполняется, если

$$\frac{2}{\alpha\pi - 2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

то есть для

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^{3/2}} \approx 1,355. \quad (4.24)$$

Из оценок (4.23) и (4.24) следует, что (4.22) справедливо для таких α , которые удовлетворяют неравенству (4.24). Теорема доказана. \square

Заметим, что если α удовлетворяет оценке (4.10), то оно удовлетворяет и оценке (4.24). Таким образом, из теорем 4.1–4.3 следует, что решение задачи с точечным стоком в вершине треугольного выступа существует и не происходит опрокидывания свободной границы.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, можно сформулировать в следующем виде:

1. Для двумерной стационарной задачи со свободной границей и сингулярным стоком на дне получена эквивалентная формулировка в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве.

2. Доказана однозначная разрешимость задачи со свободной границей в случае, когда сток лежит плоском на горизонтальном дне. Установлена аналитичность свободной границы всюду за исключением точки над стоком. Показано, что в точке над стоком образуется касп. Проведено исследование формы свободной границы: установлено, что не происходит опрокидывания свободной границы, получены асимптотики угла наклона свободной границы и её формы вблизи точки каспа.

3. Доказана разрешимость задачи со свободной границей и сингулярным стоком во впадине на дне при выполнении некоторого условия на параметры задачи (число Фруда и геометрические характеристики впадины). Проведено исследование угла наклона свободной границы. Показано, что в точке над стоком образуется касп. Установлено условие, при котором не происходит опрокидывания свободной границы.

4. Доказана разрешимость задачи со свободной границей и точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне при выполнении некоторого условия на параметры задачи (число Фруда и геометрические характеристики выступа). Исследована форма свободной границы. Установлено, что в точке над стоком находится касп. Показано, что при данных условиях на параметры задачи не происходит опрокидывания свободной границы.

Полученные результаты вносят вклад в изучение краевых задач со свободными границами и могут быть полезны для дальнейшего численного и теоретического исследования более сложных систем.

Список литературы

1. *Плотников П. И.* О пространственных потенциальных течениях со свободной границей // *ДАН СССР*. — 1975. — Т. 224. — С. 1287–1289.
2. *Плотников П. И.* Трехмерные поверхностные волны // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Наука. Сиб. отделение*. — 1985. — С. 165–200.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977. — 816 с.
4. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964. — 660 с.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 778 с.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. — 948 с.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч.1. — М.: Физматгиз, 1963. — 584 с.
9. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977. — 424 с.
10. *Маклаков Д. В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. — М.: Янус-К, 1997. — 280 с.
11. *Лайтхилл Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1981. — 598 с.
12. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 638 с.

13. *Vanden-Broeck J. M., Keller J. B.* Free surface flow due to a sink // *J. Fluid Mech.* — 1987. — Vol. 175. — P. 109–117.
14. *Hocking G. C.* Cusp-like free-surface flows due to a submerged source or sink in the presence of a flat or sloping bottom // *J. Austr. Math. Soc. Ser. B.* — 1985. — Vol. 26. — P. 470–486.
15. *Hocking G. C.* Infinite Froude number solutions to the problem of a submerged source or sink // *J. Austral. Math. Soc. Ser. B.* — 1988. — Vol. 29. — P. 401–409.
16. *Hocking G. C.* Supercritical withdrawal from a two-layer fluid through a line source // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 297. — P. 37–47.
17. *Tuck E. O., Vanden-Broeck J. M.* A cusp-like free-surface flow due to a submerged source or sink // *J. Austr. Math. Soc.* — 1984. — Vol. 25. — P. 443–450.
18. *Forbes L. K., Hocking G. C.* Flow caused by a point sink in a fluid having a free surface // *J. Austr. Math. Soc. Ser. B.* — 1990. — Vol. 32. — P. 231–249.
19. *Forbes L. K., Hocking G. C.* Flow induced by a line sink in a quiescent fluid with surface-tension effects // *J. Austr. Math. Soc. Ser. B.* — 1993. — Vol. 34. — P. 377–401.
20. *Mekias H., Vanden-Broeck J. M.* Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface // *Phys. F. A3.* — 1991. — no. 11. — P. 2652–2658.
21. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
22. *Lustri C. J., McCue S. W., Chapman S. J.* Exponential asymptotics of free surface flow due to a line source // *IMA J. Appl. Math.* — 2013. — Vol. 78. — P. 697–713.

23. *Peregrine D. H.* A line source beneath a free surface // *Univ. Wisconsin Math. Res. Center. Tech. Summ. Reports.* — 1972. — Vol. 1248. — P. 1–12.
24. *Keeler H. P.* Free surface flow due to a submerged source: Ph.D. thesis / Faculty of Science Griffith University. — 2014. — 65 p.
25. *Dun C. R., Hocking G. C.* Withdrawal of fluid through a line sink beneath a free surface above a sloping boundary // *J. Eng. Math.* — 1995. — Vol. 29. — P. 1–10.
26. *Bouderah B., Mekias H.* Communication and forum: A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom // *Kybernetes.* — 2002. — Vol. 31. — P. 305–316.
27. *Mekias H., Vanden-Broeck J. M.* Supercritical free-surface flow with a stagnation point due to a submerged source // *Phys. F. A1.* — 1989. — no. 11. — P. 1694–1697.
28. *Hocking G. C., Forbes L. K.* Subcritical free-surface flow caused by a line source in a fluid of finite depth // *J. Eng. Math.* — 1992. — Vol. 26. — P. 455–466.
29. *Некрасов А. И.* О волнах установившегося вида // *Изв. ИВПИ.* — 1921. — Т. 3. — С. 52–65.
30. *Некрасов А. И.* Точная теория волн установившегося вида поверхности тяжелой жидкости. — М.: Изд. АН СССР, 1951. — 97 с.
31. *Levi-Civita T.* Scie e leggi di resistenza // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1907. — Vol. 23. — P. 1–37.
32. *Levi-Civita T.* Determinazione rigorosa delle onde irrotazionale periodiche in acqua profonda // *Atti Accad. Lincei.* — 1924. — Vol. 33. — P. 141–144.
33. *Levi-Civita T.* Determination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finite // *Math. Ann.* — 1925. — Vol. 93. — P. 264–313.
34. *Struik D. J.* Sur les ondes irrotationnelles dans les canaux // *Atti Accad. Lincei.* — 1925. — Vol. 16. — P. 522–527.

35. *Struik D. J.* Determination rigoureuse des ondes irrotacionelles permanentes das un canal a profondu finie // *Math. Ann.* — 1926. — Vol. 95. — P. 595–634.
36. *Toland J. F.* On the existence of a wave of greatest height and Stokes's conjecture // *Proc. Roy. Soc. London.* — 1978. — Vol. A363. — P. 469–485.
37. *Плотников П. И.* Обоснование гипотезы Стокса в теории поверхностных волн // *ДАН СССР.* — 1983. — Т. 269. — С. 80–83.
38. *Plotnikov P. I., Toland J. F.* Convexity of Stokes waves of extreme form // *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 2004. — Vol. 171. — P. 349–416.
39. *Плотников П. И., Толанд Дж. Ф.* Вторая гипотеза Стокса о волнах максимальной высоты // *Докл. АН.* — 2003. — Т. 390. — С. 318–320.
40. *Красовский Ю. П.* К теории установившихся волн конечной амплитуды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1961. — Т. 1, № 5. — С. 836–855.
41. *Fraenkel L. E.* A constructive existence proof for the extreme Stokes wave // *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 2007. — Vol. 183. — P. 187–214.
42. *Keady G., Norbury J.* On the existence theory for irrotational water waves // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1978. — Vol. 83. — P. 137–157.
43. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов, др. — Наука. Сиб. отд-ние, 1985. — 320 с.
44. *Овсянников Л. В.* Лагранжевы приближения в теории волн // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Наука. Сиб. отд-ние.* — 1985. — С. 10–77.
45. *Макаренко Н. И.* Обоснование трехмерной и двухслойной плоской моделей мелкой воды // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Наука. Сиб. отд-ние.* — 1985. — С. 78–96.

46. Макаренко Н. И. Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // *Прикл. Мех. Тех. Физ.* — 1999. — Vol. 40, no. 2. — P. 69–78.
47. Makarenko N. I., Maltseva J. L. Steady waves in a stratified flow over a combined obstacle // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* — 2014. — Vol. 55, no. 2. — P. 311–317.
48. Denisenko D. S., Makarenko N. I. Supercritical stratified flow over an uneven bottom // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2017. — Vol. 894, no. 1.
49. Makarenko N. I. Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface // *J. Offshore Mech. Arct. Eng.* — 2003. — Vol. 25, no. 1. — P. 72–75.
50. Kostikov V. K., Makarenko N. I. Unsteady free surface flow above a moving circular cylinder // *J. Eng. Math.* — 2018. — Vol. 112, no. 1. — P. 1–16.
51. Налимов В. И. Обоснование приближенных моделей теории плоских неустановившихся волн // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Наука. Сиб. отделение.* — 1985. — С. 97–127.
52. Налимов В. И. Стационарные поверхностные волны над неровным дном // *ДСС.* — 1982. — № 58. — С. 108–156.
53. Налимов В. И. Сверхкритические течения из-под щита // *Прикл. Мех. Тех. Физ.* — 1989. — № 2. — С. 77–81.
54. Налимов В. И. Докритические течения из-под щита // *Прикл. Мех. Тех. Физ.* — 1998. — № 1. — С. 54–60.
55. Лаврентьев М. А. До теории довгих хвиль // *Збір. праць ін-ту математики АН УРСР.* — 1947. — № 8. — С. 13–69.
56. Фридрихс К. О, Хайерс Д. Г. Существование уединенных волн // *Теория поверхностных волн. М.: Изд-во иностр. лит.* — 1959. — С. 145–184.

57. Лаврентьев М. А. К теории длинных волн // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. — 1975. — № 5. — С. 3–46.
58. Лаврентьев М. А. Математика и механика: Избр. тр. — М.: Наука, 1990. — 600 с.
59. Плотников П. И. Неединственность решений задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1991. — Т. 55. — С. 339–366.
60. Жербе Р. О точных решениях уравнений движения тяжелой жидкости со свободной поверхностью // *Теория поверхностных волн. М.: Изд-во иностр. лит.* — 1959. — С. 218–309.
61. Semenکو E. V. The Gakhov decomposition for pseudodifferential operators with degenerate symbol // *Siberian Math. J.* — 1997. — Vol. 38, no. 6. — P. 1184–1195.
62. Semenکو E. V. The analytic description of hydraulic jump in the linear theory of the shear shallow-water flows // *Phys. Fluids*. — 2019. — Vol. 31, no. 016101. — P. 1–12.
63. Semenکو E. V. The analytic description of a stationary flow over a narrow obstacle // *Phys. Fluids*. — 2020. — Vol. 32, no. 077106. — P. 1–7.
64. Киселев О. М. Течение тяжелой жидкости в канале // *Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та.* — 1990. — 107–136 с.
65. Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1958. — Т. 22, № 2. — С. 177–200.
66. Киселев О. М., Лазарев В. А. Вихрь и источник под свободной поверхностью при малых числах Фруда // *Тр. сем. по краев. задачам.* — 1968. — № 5. — С. 72–79.
67. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1970. — 640 с.

68. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: ФМЛ, 1962. — 600 с.
69. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Free-surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 722, no. 012035. — P. 1–7.
70. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Steady free surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink on the flat bottom // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* — 2019. — Vol. 49. — P. 111–136.
71. *Тимова А. А.* О форме свободной границы течения идеальной несжимаемой жидкости с точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2021. — Т. 18, № 1. — С. 207–236.
72. *Тимова А. А.* Задача о потоке идеальной жидкости с сингулярным стоком во впадине на дне // *Сиб. Журн. Индустр. Матем.* — 2021. — Т. 24, № 3. — С. 101–121.
73. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
74. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
75. *Lewy H.* A note on harmonic functions and a hydrodynamical application // *Proc. Amer. Math. Soc., JSTOR.* — 1952. — Vol. 3. — P. 111–113.
76. *Зорич В. А.* Математический анализ, ч. 2. — М.: МЦНМО, 1984. — 640 с.

Приложение А

Дополнительные сведения

Теорема А.1. *Существует одно и только одно конформное отображение $t = F(z)$ области D на область D^* , переводящее три граничные точки z_1, z_2, z_3 области D в три граничные точки t_1, t_2, t_3 области D^* . Точки z_k и t_k задаются произвольно, но с соблюдением порядка следования при обходе границы областей.*

Теорема А.2 (Теорема Шаудера о неподвижной точке). *Пусть оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства X в себя. Тогда, если A — вполне непрерывен на D , то он имеет на D неподвижную точку.*

Теорема А.3 (Теорема Алаоглу). *Всякий замкнутый шар в пространстве, сопряженном сепарабельному нормированному пространству, компактен в $*$ -слабой топологии.*

Следствие А.4. *Замкнутый шар в сепарабельном гильбертовом пространстве компактен в слабой топологии.*

Лемма А.1. *Пусть $\sigma + s$ и $\sigma - s$ не равны πt , $t \in \mathbb{Z}$, и*

$$K(s, \sigma) = \ln \left| \frac{\sin(\sigma + s)}{\sin(\sigma - s)} \right|.$$

Тогда

$$K(s, \sigma) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\sigma \sin 2ks}{k}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\sigma \sin 2ks}{k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k(\sigma - s)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k(\sigma + s)}{k} \\ &= A(\sigma - s) - A(\sigma + s), \end{aligned}$$

где

$$A(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{k}.$$

В силу признака Дирихле этот ряд сходится при всех $\varphi \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, поскольку

$$\sum_{k=1}^n \cos 2k\varphi = \frac{\cos(n+1)\varphi \sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, величина $A(\varphi)$ определена для всех $\varphi \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Введем функцию S комплексной переменной z :

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Нетрудно видеть, что $A(\varphi) = \operatorname{Re} S(e^{2i\varphi})$ для всех $\varphi \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. В то же время,

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} = \frac{1}{1-z} \quad \text{при } |z| < 1.$$

Отсюда следует, что $S(z) = -\ln(1-z)$ при $|z| < 1$. Таким образом, продолжая $S(z)$ по непрерывности в точки окружности $|z| = 1$ при $z \neq 1$, мы получим, что

$$A(\varphi) = -\ln 2|\sin \varphi| \quad \text{для всех } \varphi \neq \pi m, m \in \mathbb{Z},$$

откуда сразу следует утверждение леммы. □