

На правах рукописи

Резанова Екатерина Валерьевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
С УЧЕТОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА НА ГРАНИЦАХ  
РАЗДЕЛА**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет», г. Барнаул.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент, Гончарова Ольга Николаевна.

**Официальные оппоненты:**

**Демин Виталий Анатольевич**, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский государственный национальный исследовательский университет», заведующий кафедрой теоретической физики.

**Марчук Игорь Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», декан механико-математического факультета;

**Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Защита диссертации состоится «\_\_\_» «\_\_\_\_\_» 2019 г. в \_\_\_\_\_ на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте [www.hydro.nsc.ru](http://www.hydro.nsc.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» «\_\_\_\_\_» 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д 003.054.04, д-р физ.-мат. наук

Рудой Евгений Михайлович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Конвективные течения играют значительную роль как в природных, так и технологических процессах. Проектирование современных систем охлаждения микроэлектронного оборудования или создание новых материалов, обладающих специальными свойствами, требуют тщательного изучения поведения жидких сред. Конвективные процессы достаточно сложны для исследования в связи с наличием большого количества факторов, влияющих на характер течений. Наиболее существенными среди этих факторов являются тепло- и массоперенос через границы раздела. Несмотря на большое количество теоретических и экспериментальных исследований, конвективные течения с испарением через границу раздела в условиях совместного действия спутных потоков газа, гравитации, капиллярных и термокапиллярных эффектов, все еще остаются не до конца изученными.

Одним из способов математического моделирования течений жидкостей в областях с границами раздела является построение, анализ и использование точных решений определяющих уравнений. Именно точные решения имеют особую ценность, поскольку дают возможность достаточно быстро изучить степень влияния различных физических факторов на характер течений и интенсивность испарения либо конденсации. Точные решения специального вида позволяют проводить апробацию математических моделей, прогнозировать исход экспериментов и выполнять качественное сравнение теоретических и экспериментальных данных. Немаловажную роль при исследовании течений жидкости, содержащей примеси, играет учет взаимно обратных эффектов Соре (термодиффузии) и Дюфура (диффузионной теплопроводности). Последний из названных эффектов пренебрежимо слаб в жидкостях, но может иметь заметное влияние в газах. Еще одним фактором, определяющим интенсивность и характер совместных течений жидкости и спутных газовых потоков, является действие дополнительных касательных напряжений на границах раздела.

При математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса в областях с межфазными границами или поверхностями раздела одним из наиболее важных вопросов является формулировка условий на границе раздела. Изучение течений на основе новых, уточненных, математических моделей необходимо для понимания роли отдельных механизмов и закономерностей их влияния на характеристики конвективного теплообмена. В свою очередь, более глубокое понимание базовых аспектов физических явлений является основой для построения универсальных моделей, позволяющих до-

статочно полно описывать конвективные процессы, протекающие в условиях совместного влияния разнородных физико-химических факторов. Возрастающая сложность математических моделей подразумевает построение не только точных решений изучаемых задач, но и численных алгоритмов их решения.

**Цель диссертационной работы** заключается в аналитическом и численном исследовании конвективных течений жидкостей в областях с границами раздела различной геометрии, в том числе сопровождающихся тепло- и массопереносом через межфазные границы, а также в анализе влияния управляющих воздействий на основные характеристики возникающих конвективных режимов.

**Научная новизна** работы состоит в том, что в ней впервые

1. представлены новые точные решения системы уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска, описывающие двухслойные течения с испарением на термокапиллярной границе раздела с учетом эффектов Соре и Дюфура в газопаровой среде. Выделены классы течений: чисто термокапиллярное, смеанное и пуазейлевское. Изучены механизмы, определяющие структуру течений. Получено условие возникновения возвратных течений вблизи границы раздела, связывающее значения продольного градиента температуры на границе раздела и расход газа. Изучено влияние расхода газа, тепловой нагрузки, эффекта термодиффузии, различных типов условий для концентрации пара и температуры на твердых стенках на основные характеристики возникающих режимов течения (поля скоростей и температур в системе, концентрация пара в газе, массовая скорость испарения). Проведено сравнение аналитических расчетов на основе точного решения с результатами экспериментов; получены качественные и количественные совпадения.
2. В рамках новых постановок на основе уравнений Навье—Стокса и переноса тепла и уравнений конвекции Обербека—Буссинеска, а также уточненных условий на границе раздела с учетом испарения численно исследован процесс стекания жидкого слоя по наклонной, нагреваемой подложке при умеренных числах Рейнольдса. Получены эволюционные уравнения, определяющие положение свободной границы, построен алгоритм их численного решения. Исследовано влияние интенсивности гравитационного поля, угла наклона подложки и особенностей граничного теплового режима на скорость утоньшения слоя жидкости.
3. Проведено аналитическое и численное моделирование процесса переноса

тепла в слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами на основе точных решений уравнений Навье—Стокса в трехмерном случае. Построен численный алгоритм решения задачи о деформации свободного слоя под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений, включающий алгоритмы расчета компонент скорости и распределения температуры на подвижных сетках. Исследовано влияние различных типов граничного теплового режима и дополнительных касательных напряжений на особенности динамики слоя и процессы переноса тепла.

4. Проведено математическое моделирование динамики сферически симметричного слоя вязкой несжимаемой жидкости, содержащего газовый пузырек в условиях кратковременной невесомости. Впервые численно исследована задача в полной, тепловой и квазиизотермической постановках о формировании сферической оболочки в зависимости от внешнего теплового режима, давления и начальной плотности газа. Численные эксперименты проведены для задачи о формировании стеклянной оболочки, содержащей углекислый газ.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа вносит вклад в теорию конвекции жидкостей и явлений тепломассопереноса на границах раздела. Точные решения специального вида позволяют оценить влияние испарения, эффекта термодиффузии, граничного теплового режима, расхода газа на изменение структуры течений. Результаты по изучению влияния эффектов испарения, затрат энергии на преодоление деформации поверхности термокапиллярными силами на характер течений тонкой плёнки по нагретой подложке развивают имеющиеся результаты, полученные в рамках классической постановки. Решение задачи о формировании сферических микробаллонов находит важное применение при разработке композиционных материалов (сферопласта) и сенсibilизаторов эмульсионных взрывчатых веществ. Полученные результаты могут использоваться при планировании и анализе экспериментов по исследованию конвективных течений при нормальной, пониженной гравитации и в невесомости с учетом спутного потока газа и испарения жидкости.

**Положения, выносимые на защиту.** Автор диссертационной работы защищает:

1. результаты исследования двухслойных конвективных течений с испарением на основе новых точных решений, сравнение аналитических расчетов и экспериментальных данных по испарению жидкости на границе

раздела, в том числе на основе количественных характеристик (массовой скорости испарения жидкости);

2. результаты численного исследования стекания тонкого слоя жидкости по наклонной нагретой подложке, сравнение результатов, полученных с использованием различных математических моделей;
3. результаты численного исследования растекания свободного слоя жидкости под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений;
4. результаты численного моделирования динамики сферического жидкого слоя, содержащего растворенный газ и газовый пузырек, в рамках полной математической модели с учетом диффузионных и тепловых процессов и её квазиизотермического приближения.

**Методы исследования.** В работе применяются методы общей теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, гидродинамики. Для построения точных решений использовался математический аппарат общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного решения задач применялись конечно-разностные методы стабилизирующей поправки и Рунге—Кутты, численные алгоритмы типа "предиктор—корректор" решения интегро-дифференциальных уравнений. При реализации конечно-разностных схем использовались методы прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений, включая разработанный вариант метода прогонки с параметрами. Для проведения численных расчетов использованы авторские коды на языке FORTRAN.

**Достоверность результатов** обеспечивается корректной постановкой задач, использованием физически обоснованных математических моделей для описания конвективных течений жидкостей, сравнением результатов настоящей работы с теоретическими результатами других авторов, сопоставлением с результатами физических экспериментов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

XVIII, XIX, XX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2013, 2015, 2017); XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); Марчуковских научных чтениях (Новосибирск, 2017); Всероссийской научной конференции с элементами школы молодых ученых "Теплофизика и физическая гидрогазодинамика" (Ялта, Республика Крым, 2016); International Symposium and School of

Young Scientists "Interfacial Phenomena and Heat Transfer" (Novosibirsk, Russia, 2016); Sixth, Seventh International Marangoni Association Conferences (Haifa, Israel, 2012; Wien, Austria, 2014); Sixth International Symposium "Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics" (ESPCI, Paris, France, 2015); Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 2014); Всероссийской конференции "XXXI Сибирский теплофизический семинар" (Новосибирск, 2014); VIII международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Новосибирск, 2015); V, VI Всероссийских конференциях с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения" (Бийск, 2014; Барнаул, 2017); XIII, XIV Всероссийских школах-конференциях "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Новосибирск, 2014, 2016); Международной молодежной научной конференции "Тепломассоперенос в системах обеспечения тепловых режимов энергонасыщенного технического и технологического оборудования" (Томск, 2016); VI, VII Международных молодежных научно-практических конференциях с элементами научной школы "Прикладная математика и фундаментальная информатика" (Омск, 2017, 2018); Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководитель семинара: чл-корр. РАН, профессор В.В. Пухначев); Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Численные методы в механике сплошной среды" (руководители семинара: доктор физ.-мат. наук А.Л. Куперштох и доктор физ.-мат. наук, В.В. Остапенко); Семинаре Института гидродинамики СО РАН "Математические модели механики сплошных сред" (руководители семинара: чл-корр. РАН, профессор П.И. Плотников и доктор физ.-мат. наук В.Н. Старовойтов); Объединенном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и Сибирского федерального университета "Математическое моделирование в механике" (руководитель семинара: доктор физ.-мат. наук, профессор В.К. Андреев).

Исследования по теме диссертационной работы выполнялись в рамках следующих проектов Российского фонда фундаментальных исследований: № 14-08-00163 "Теоретическое и экспериментальное исследование процессов тепломассопереноса в двухслойных конвективных течениях с испарением"; № 17-08-00291 "Неклассические задачи термокапиллярной конвекции в двухслойных системах"; № 18-41-242005 "Теоретическое и экспериментальное исследование процессов тепломассообмена в двухфазных системах термическо-

го контроля".

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 14 основных статей, входящих в издания из перечня ВАК, из них 10 статей в журналах, включенных в международные базы цитирования Scopus и Web of Science.

**Личный вклад автора.** Все результаты, представленные в диссертации, получены лично автором или при его непосредственном участии. Автором проведены аналитические и численные расчеты, их обработка, сравнение с экспериментальными данными. Интерпретация полученных результатов и подготовка основных публикаций проводилась автором самостоятельно либо совместно с научным руководителем и соавторами.

**Структура работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и пяти приложений. Общий объем диссертации 158 страниц, включая 34 рисунка, 9 таблиц. Список литературы содержит 133 наименования.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, сформулированы цели исследования, приводятся общая характеристика работы и литературный обзор.

В **первой главе** изучается двухслойное течение жидкости и смеси газа и пара в бесконечном горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми верхней и нижней стенками с учетом процесса испарения жидкости на термокапиллярной границе раздела. При описании течения газопаровой смеси в верхнем слое учитываются эффекты диффузионной теплопроводности и термодиффузии.

В разделе 1.1 осуществляется построение аналогов точного решения типа Остроумова-Бириха вида

$$u_i = u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = (A + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), \quad C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y). \quad (1)$$

Решение (1) представлено с учетом условия непрерывности температуры на границе раздела. В качестве математической модели течения используется система уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска. В верхнем слое системы определяющие соотношения дополняются уравнением диффузии для описания процесса переноса пара, понимаемого как пассивная примесь.

Раздел 1.2 посвящен формулировке граничных условий задачи. На верхней и нижней границах выполняются условия прилипания, на нижней стенке



канала задано линейное относительно продольной координаты распределение температуры ( $T_1|_{y=-l} = A_1x + \vartheta^-$ ;  $A_1, \vartheta^- = const$ ). На верхней стенке поддерживается линейное по продольной координате распределение температуры ( $T_2|_{y=h} = A_2x + \vartheta^+$ ;  $A_2, \vartheta^+ = const$ ) либо эта граница предполагается теплоизолированной. Условие для концентрации пара на верхней стенке канала задано в одном из двух вариантов: отсутствие потока пара или полное поглощение пара. На термокапиллярной границе раздела считаются выполненными кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, соотношение баланса массы с учетом эффекта Соре и условие теплопереноса с учетом эффекта Дюфура. Концентрация насыщенного пара определяется с помощью следствия уравнений Менделеева—Клапейрона и Клапейрона—Клаузиуса. В верхнем слое системы полагается заданным расход газа.

В разделе 1.3 исследуется влияние различных типов условий для температуры и концентрации пара, а также эффекта термодиффузии на профили течения и распределение температуры и концентрации пара. Следует отметить, что тип граничного условия для концентрации пара на верхней границе канала оказывает принципиальное влияние на схему определения констант интегрирования и зависимостей между коэффициентами, определяющими вид точного решения. Использование условия нулевого потока пара на верхней границе обеспечивает возможность определения одного из температурных градиентов через значения двух других градиентов. Условие полной абсорбции пара на верхней границе в присутствии эффекта термодиффузии позволяет произвольным образом задать один из продольных градиентов температуры, а два других вычислять через него с помощью условий связи. В отсутствие эффекта Соре продольный градиент температуры на границе раздела сред равен нулю, один из продольных градиентов на твердых стенках канала задается произвольным образом, а другой линейно зависит от него.

В разделе 1.4 изучено влияние продольных градиентов температуры, расхода газа, типа системы "жидкость—газ", заполняющей канал, на структуру течения, распределение тепла в системе и концентрацию пара в верхнем слое канала. Исследованы рабочие среды "НFE7100—азот" и "этанол—воздух". Получено условие возникновения возвратных течений вблизи границы раздела в виде явной зависимости скорости на границе раздела от расхода газа при линейном распределении температуры на верхней стенке канала и условии полного поглощения пара. На рисунке 1 демонстрируется влияние значения продольного градиента температуры на возникновение возвратных течений в системе "этанол-воздух". Показано последовательное изменение

профиля скорости при уменьшении продольного градиента температуры на границе раздела сред с "термокапиллярного" (рис. 1а) на смешанный (рис. 1б) и далее на "пуазейлевский" (рис. 1в)<sup>1</sup>.

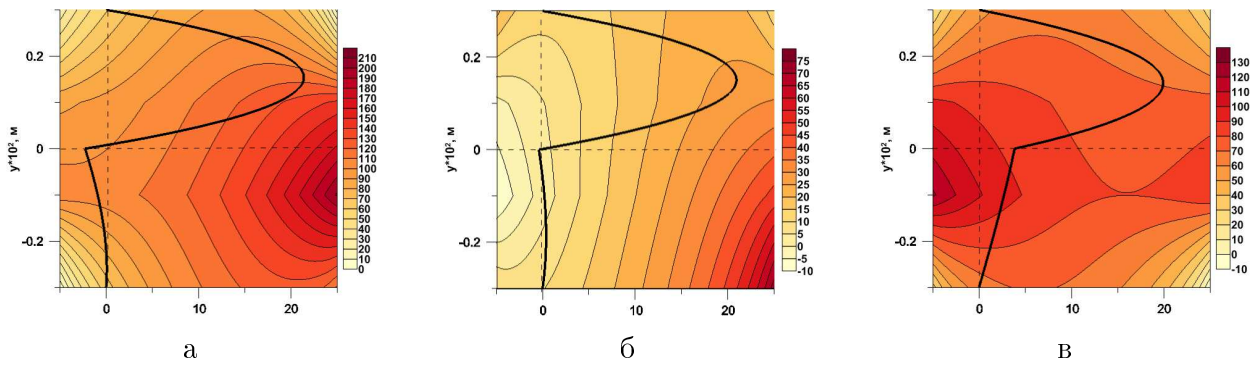


Рис. 1: Профили скорости и распределение температуры в системе "этанол—воздух" ,  $Q = 5.625 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с),  $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$  м: а —  $A = 3 \cdot 10^2$  К/м; б —  $A = 1.7792 \cdot 10^2$  К/м; в —  $A = -1 \cdot 10^2$  К/м.

Исследована зависимость интенсивности испарения жидкости от различных физических факторов системы; проведено сравнение аналитических результатов с экспериментальными данными. На рисунке 2 представлен пример зависимости величины массовой скорости испарения жидкости от продольного градиента температуры на границе раздела, толщины жидкого слоя (рисунок 2а) и расхода газа (рисунок 2б) для системы "этанол—воздух". Значения рабочих физических параметров выбраны исходя из условий экспериментов, проводимых в Институте теплофизики СО РАН. Показано, что существуют такие значения продольных градиентов температуры  $A$ , при которых массовая скорость испарения жидкости  $M$  имеет локальный максимум относительно толщины жидкого слоя  $l$ . Подобное поведение величины  $M$  с изменением толщины  $l$  подтверждается результатами экспериментов<sup>2</sup>. Аналитические и экспериментальные результаты имеют качественно одинаковый характер: рост массы испаряющейся жидкости  $M$  с ростом расхода газа  $Q$ . Кроме того существуют такие значения продольных градиентов температуры  $A$ , при которых результаты теоретических и экспериментальных исследований количественно близки.

**Во второй главе** изучается динамика тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по наклонной, неравномерно нагретой подложке в условиях спутного потока газа. Течение сопровождается испарением на тер-

<sup>1</sup>Napolitano, L.G. Plane marangoni—poiseuille flow two immiscible fluids / L.G. Napolitano // Acta Astronaut. 1980. № 7. P. 461-478. (вводится классификация двухслойных течений).

<sup>2</sup>Lyulin, Yu.V. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress / Yu.V. Lyulin, O.A. Kabov // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2014. V. 70 P. 599-609.

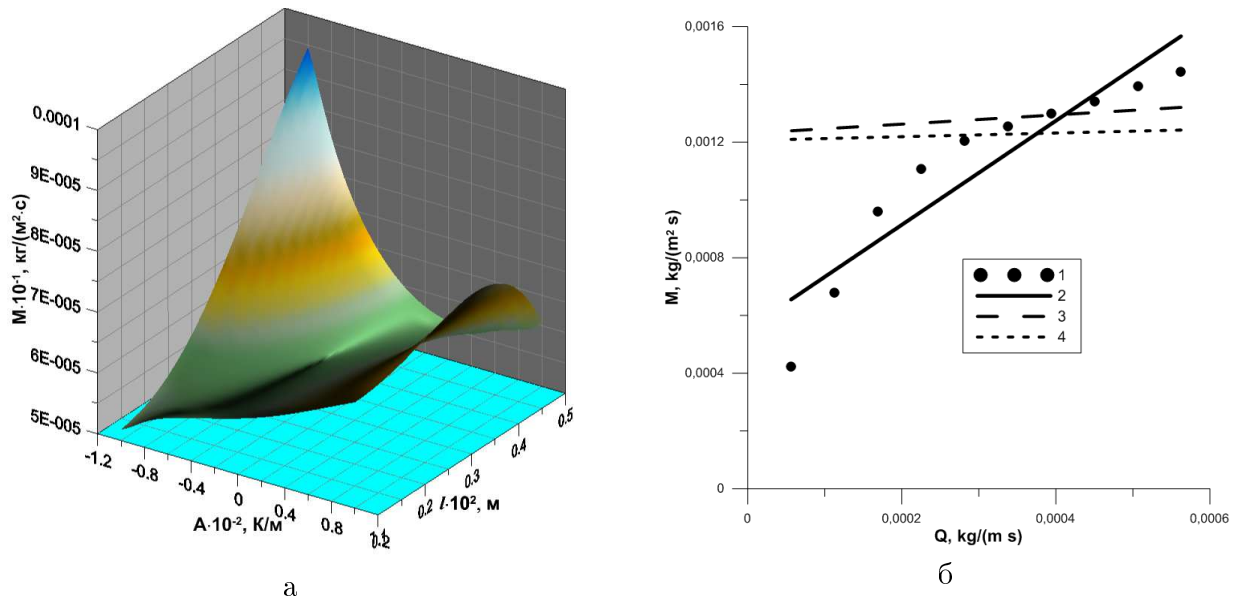


Рис. 2: Зависимость интенсивности испарения жидкости от: а — от продольного градиента температуры и толщины жидкого слоя,  $Q = 4.5 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с),  $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$  м; б — расхода газа,  $h = l = 0.3 \cdot 10^{-2}$  м (1 — экспериментальные данные, 2 — линия тренда экспериментальных данных, 3 — расчеты при  $A = -50$  К/м, 4 — расчеты при  $A = -20$  К/м).

мокапиллярной границе раздела. Динамические процессы в газе не принимаются во внимание (односторонняя модель), вместе с тем, касательные напряжения, создаваемые газом, могут учитываться на границе раздела. Математические модели течений тонких слоев испаряющейся жидкости основаны на длинноволновом приближении основополагающих уравнений.

В разделе 2.1 предложена математическая модель течения тонкого слоя жидкости на основе системы уравнений Навье—Стокса и уравнения переноса тепла, а также кинематического, динамических и энергетического условий на термокапиллярной границе сформулированных в бщем виде. На твердой непроницаемой подложке выполнено условие прилипания для скорости жидкости, и задано неоднородное распределение температуры. Локальный поток массы через границу раздела определяется с помощью уравнения Герца—Кнудсена. Построены аналитические решения задач для главных и первых членов разложений искомых функций по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (отношение поперечной характерной длины к продольной). Проведен параметрический анализ задачи. Получено эволюционное уравнение для определения толщины слоя жидкости.

Раздел 2.2 посвящен моделированию стекания жидкого слоя на основе уравнений конвекции Обербека—Буссинеска и полных условий на границе раздела (если  $Re = O(1)$ ). Толщина слоя жидкости в данном случае опреде-

ляется, исходя из эволюционного уравнения вида

$$\begin{aligned}
& h_t + h_x \left[ \frac{1}{24} \gamma_2 \cos \alpha A_x h^4 + \frac{1}{6} (\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_x + \gamma_1 \sin \alpha A) h^3 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} ((C_0)_x + \gamma_1 \sin \alpha \Theta_0) h^2 + C_1 h \right] + \left[ \frac{1}{120} \gamma_2 \cos \alpha A_{xx} h^5 + \frac{1}{24} (\gamma_2 \cos \alpha (\Theta_0)_{xx} + \right. \\
& \left. + \gamma_1 \sin \alpha A_x) h^4 + \frac{1}{6} ((C_0)_{xx} + \gamma_1 \sin \alpha (\Theta_0)_x) h^3 + \frac{1}{2} (C_1)_x h^2 \right] + E_0 \alpha_J (Ah + \Theta_0) = 0,
\end{aligned}$$

где  $z = h(x, t)$  — уравнение, задающее границу раздела,  $\alpha$  — угол наклона подложки,  $\Theta_0(x, t)$  — функция, определяющая нагрев твердой подложки;  $A, C_0, C_1$  зависят от толщины слоя  $h$ ;  $E_0, \alpha_J, \gamma_1, \gamma_1$  — безразмерные комплексы, отвечающие влиянию испарения и силы тяжести на течение жидкости. Уравнение представлено с учетом главных членов разложения по степеням  $\varepsilon$ .

В разделе 2.3 представлен алгоритм численного решения эволюционного уравнения, определяющего положение границы раздела. Решается тестовая задача на промежутке  $[-L; L]$ . На границах расчетной области полагаются выполненными периодические условия:  $h|_{x=-L} = h|_{x=L}$ ,  $h_x|_{x=-L} = h_x|_{x=L}$ ,  $h_{xx}|_{x=-L} = h_{xx}|_{x=L}$ . Для численного решения уравнения для толщины жидкого слоя применяется неявная конечно-разностная схема, и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений методом пятиточечной прогонки и прогонки с параметрами.

В разделе 2.4 содержатся результаты численных исследований течений тонкого испаряющегося слоя этанола. Рисунок 3а демонстрирует влияние слагаемого, отвечающего затратам энергии на преодоление деформации поверхности, вызываемой действием термокапиллярных сил вдоль межфазной границы, на изменение толщины жидкого слоя. На рисунке 3б представлено сравнение результатов моделирования течения тонкого слоя, проводимого с помощью математических моделей, основанных на уравнениях Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска. В случае, когда в качестве математической модели используется система Обербека—Буссинеска, наблюдается более интенсивное утоньшение слоя жидкости с течением времени.

**Третья глава** посвящена исследованию динамики слоя вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости со свободными границами и распределения тепла в нем в трехмерном случае. Границы слоя являются плоскими, движущимися параллельными поверхностями, подверженными неоднородному нагреву и действию термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений, индуцируемых внешней средой.

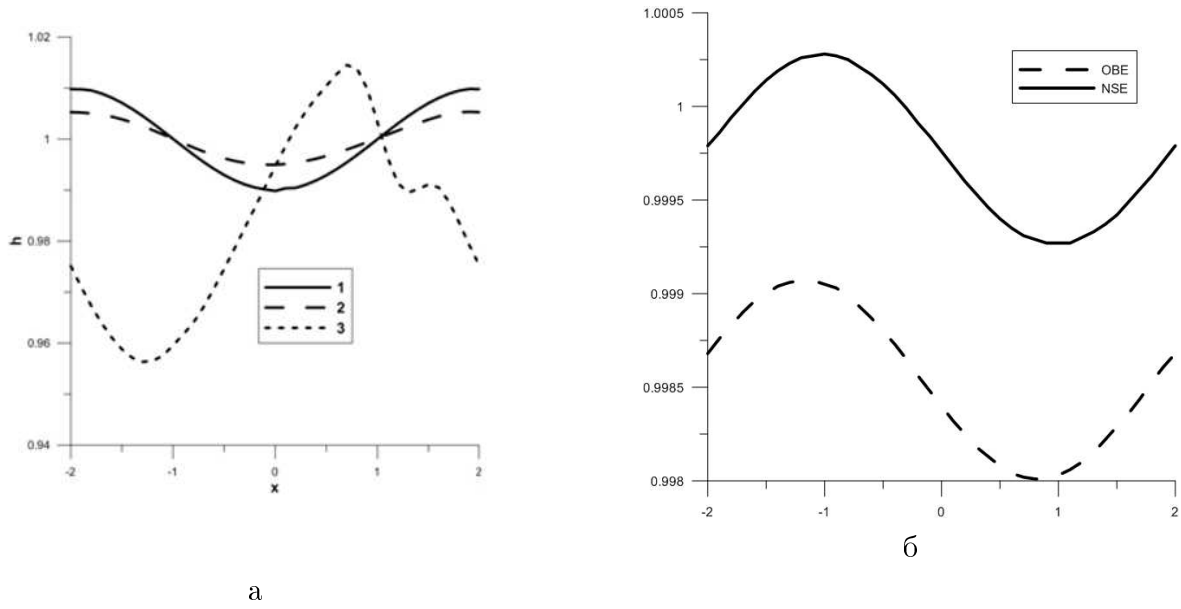


Рис. 3: а — изменение характера течения тонкого слоя: 1 — начальное положение границы раздела; 2 — положение границы раздела при  $t = 10^{-3}$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0$ ; 3 — положение границы раздела при  $t = 10^{-3}$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0.3$ ; б — положение границы раздела при условиях нестационарного нагрева; использованы математические модели, основанные на уравнениях Обербека—Буссинеска (ОБЕ) и Навье—Стокса (НСЕ) (на осях отмечены безразмерные величины).

В разделе 3.1 приводится постановка задачи на основе уравнений Навье—Стокса и переноса тепла. На свободных подвижных границах  $z = -Z(t)$ ,  $z = Z(t)$  выполнены кинематическое и динамические условия, учитывающие тангенциальные напряжения, индуцируемые внешней средой, а также квадратичное относительно продольных координат  $x$  и  $y$  распределение температуры. Задача дополнена начальными условиями, определяющими состояние слоя в момент времени  $t = 0$ . Поле скоростей определено на основе точных решений уравнений Навье—Стокса вида

$$u = (f + g)x, \quad v = (f - g)y, \quad w = -2 \int_0^z f(\alpha, t) d\alpha, \quad (2)$$

где функции  $f(z, t)$  и  $g(z, t)$  удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений. Функция  $Z(t)$ , задающая положение свободной границы, также определяется, исходя из интегро-дифференциального уравнения.

Раздел 3.2 посвящен описанию численного алгоритма определения положения свободной границы с помощью двухэтапного метода "предиктор-корректор". Для численного нахождения функций  $f(z, t)$  и  $g(z, t)$ , задающих поле скоростей вида (2), строится трехшаговый алгоритм "предиктор-корректор".

Численно рассчитывается распределение температуры в бесконечном слое. Задача сводится к расчету функции температуры в параллелепипеде. На искусственно введенных "вертикальных" торцах расчетной области заданы "мягкие" условия для температуры. В разделе 3.3 представлена схема второго порядка аппроксимации для расчета температуры в слое, основанная на методе стабилизирующей поправки.

Раздел 3.4 содержит численные исследования динамики жидкого слоя и распределения тепла в нем на примере жидкости типа этанол. Изучена динамика слоя жидкости в случае разных зависимостей от времени функций, определяющих граничный тепловой режим и дополнительные касательные напряжения. Рисунок 4 демонстрирует распределение температуры в слое в различные моменты времени в случае, когда дополнительные касательные напряжения по одной из продольных координат усиливают действие термокапиллярных сил, а по второй — ослабляют.

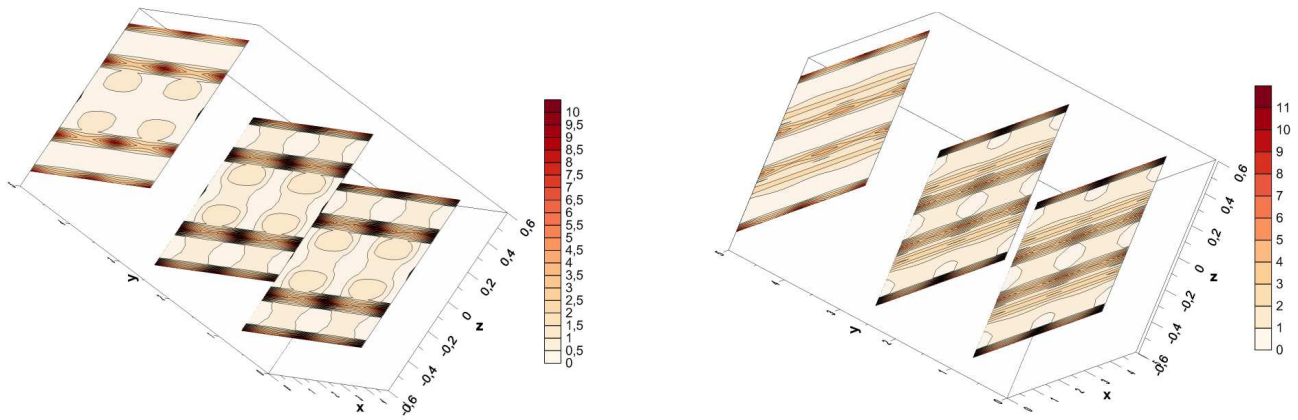


Рис. 4: Распределение тепла в слое при  $A_0 = -0.1$ ,  $B_0 = 0.1$ ,  $\tau_0 = 0.1$  а — в момент времени  $t = 0.05$ ; б — в момент времени  $t = 0.1$

**Четвертая глава** посвящена задаче о динамике сферической оболочки вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободными поверхностями и заключающей внутри себя газовый пузырек. Газ, растворенный в жидкости, представляет собой пассивную добавку, а сама жидкость с растворенным в ней газом есть вязкая несжимаемая жидкость. Вследствие условия невесомости рассматривается сферически симметричный процесс.

В разделе 4.1 представлена математическая модель процесса формирования сферического микробаллона, основанная на уравнениях Навье-Стокса, переноса тепла и диффузии в размерной постановке. Задача рассматривается в области  $R_1(t) < r < R_2(t)$ . На свободных границах выполнены кинематические и динамические условия, концентрация газа на границах связана

с давлением вне области согласно закону Генри. Условие баланса энергии и условие теплообмена с внешней средой задаются на внутренней и внешней границах, соответственно. Внутри газового пузырька ( $0 < r < R_1(t)$ ) выполняется уравнение Менделеева-Клапейрона. Коэффициенты кинематической вязкости, диффузии, температуро- и теплопроводности, поверхностного натяжения, а также коэффициенты в законе Генри являются функциями, зависящими от температуры. В силу уравнения неразрывности, осуществляется переход к новой функции скорости  $V(t)$  такой, что радиальная скорость жидкости  $v(r, t)$  равна  $r^{-2}V(t)$ . Раздел 4.2 содержит описание постановки задачи в безразмерном виде.

Алгоритм численного решения задачи изложен в разделе 4.3. Определение неизвестных функций  $R_1(t), V(t), \rho(t)$  ( $\rho$  — плотность газа в пузырьке) осуществляется методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного нахождения распределения концентрации газа в жидкости  $C$  и температуры  $T$  осуществляется переход к задаче на плоскости лагранжевых координат. Для этого вводится новая безразмерная пространственная переменная  $x$ :  $x = (r^3 - R_1^3(t)) \cdot (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-1}$ . Функции  $C$  и  $T$  вычисляются с помощью неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации для уравнений диффузии и переноса тепла, соответственно. Для реализации схемы используется метод прогонки (для расчета функции температуры — метод прогонки с параметром, в качестве которого выступают значения  $T(t, R_1(t))$  температуры на внутренней границе слоя). Для каждой из схем применяется критерий сходимости итерационного процесса вида:  $\max_i |C_i^{s+1} - C_i^s| / \max_i |C_i^{s+1}| \leq \varepsilon$ .

В разделе 4.4 рассматривается квазиизотермическая постановка задачи, когда диффузионные процессы преобладают по сравнению с тепловыми. При этом сохраняется учет зависимости коэффициентов диффузии, кинематической вязкости, поверхностного натяжения и коэффициента в законе Генри от температуры.

Раздел 4.5 содержит результаты численных исследований по моделированию формирования сферического микробаллона жидкого стекла, содержащего пузырек углекислого газа в полной и квазиизотермической постановке. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием полной модели и результатов задачи, решенной без учета диффузии газа. Исследовано влияние на динамику сферического слоя внешнего давления и количества газа в пузырьке в начальный момент времени. На рисунке 5 представлено изменение функции  $R_1(t)$  при различных значениях плотности газа в пузырьке в начальный момент времени. Увеличение плотности газа способствует более

интенсивному расширению сферического слоя. В случае, когда учитываются и диффузионные, и тепловые процессы, функция  $R_1(t)$  принимает наибольшие значения. Тепловые процессы вносят больший вклад в расширение сферического слоя, чем диффузионные.

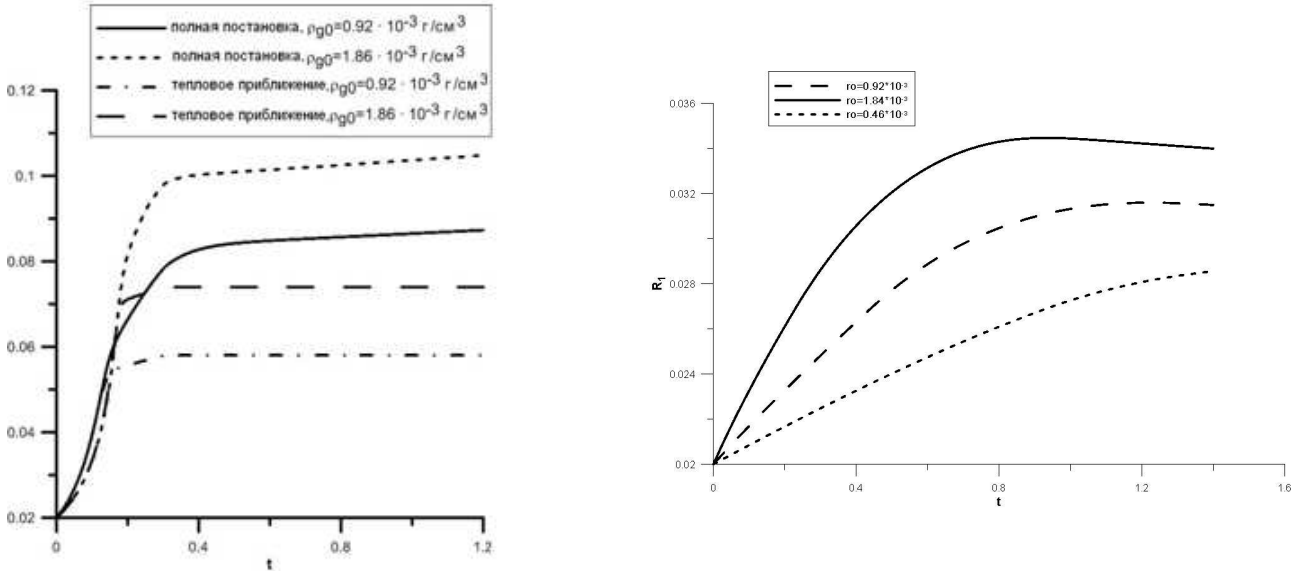


Рис. 5: Динамика внутренней границы слоя при различных значениях начальной плотности газа в пузырьке: а — в случае полной и тепловой постановок, б — в случае квазиизотермической постановки.

В **заклучении** отражены основные результаты по теме диссертационного исследования. В качестве основных научных результатов можно выделить следующие:

1. В рамках различных постановок задачи испарительной конвекции построены точные решения определяющих уравнений для описания течений в двухслойной системе с учетом испарения на термокапиллярной границе и эффектов Соре и Дюфура в газопаровом слое. Изучено влияние расхода газа и продольного градиента температуры на реализуемость течений чисто термокапиллярного, смешанного и пуазейлевского типов в двухслойной системе с испарением. Исследована зависимость характера течения от выбора условий для концентрации пара и физических параметров задачи. Проведено сравнение аналитических и экспериментальных результатов влияния тепловой нагрузки, толщины жидкого слоя и расхода газа на интенсивность испарения. Получены качественные и количественные совпадения аналитических и экспериментальных результатов.



2. Построены математические модели течения тонкого слоя жидкости по наклонной подложке с учетом испарения, капиллярных, термокапиллярных и гравитационных сил, дополнительных касательных напряжений. Получены эволюционные уравнения определяющие положение свободной границы, построен алгоритм численного исследования процесса стекания жидкого слоя при использовании моделей, основанных на уравнениях Навье—Стокса и Обербека—Буссинеска. Выявлено влияние сил плавучести, гравитационных сил, угла наклона подложки и учет дополнительного слагаемого в условии на границе раздела на качественную и количественную картину течения.
3. Построена трехмерная математическая модель динамики свободного слоя процесса вязкой несжимаемой жидкости и распределения тепла в нем на основе точных решений уравнений Навье—Стокса. Предложен алгоритм численного решения задачи о растекании жидкого слоя под действием термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений. Разработана схема численного нахождения распределения тепла в "центральной" части слоя (параллелепипеде). Численно исследовано влияние термокапиллярных сил и дополнительных касательных напряжений на характер течения и распределение температуры в исследуемой области в трехмерном случае.
4. Исследована математическая модель динамики сферически симметричного слоя вязкой несжимаемой жидкости, заключающего в себе газовый пузырек. Рассмотрены случаи полной постановки задачи и ее квазиизотермического приближения. Построены алгоритмы численного расчета задач. Представлено сравнение численных результатов, полученных в случае решения задачи в полной, тепловой и квазиизотермической постановках. Исследовано влияние давления вне сферической оболочки и начальной плотности газа в пузырьке на изменения радиуса жидкого слоя.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. Резанова Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // Известия АлтГУ. 2013. № 1/2(77). С. 42-47.
2. Goncharova O.N. , Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. Vol. 1, № 3. P. 317-338.

3. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 68-79.
4. Резанова Е.В. Математическое моделирование двухслойных течений с учетом эффектов Соре и Дюфура на примере точных решений // Известия АлтГУ. 2014. № 1/2(81). С. 57-61.
5. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Моделирование двухслойных течений жидкости и газа с учетом испарения // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 5. С. 655-661.
6. Goncharova O.N., Rezanova E.V. Modeling of two-layer fluid flows with evaporation at the interface in the presence of the anomalous thermocapillary effect // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2016. V. 9(1). P. 48-59.
7. Родионова А.В., Резанова Е.В. Исследование устойчивости двухслойного течения жидкости // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 4. С. 16-25.
8. Резанова Е.В. Численное исследование течения тонкого слоя жидкости с испарением // Известия АлтГУ. 2016. № 1(89). С. 168-172.
9. Rezanova E.V. Numerical investigation of the liquid film flows with evaporation at thermocapillary interface // MATEC Web of Conferences. 2016. № 84. 00032.
10. Rezanova E.V. The liquid film flow with evaporation: numerical modelling // MATEC Web of Conferences. 2016. № 72. 01095.
11. Rezanova E.V. Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // EPJ Web of Conferences. 2017. № 159. 00047.
12. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Шефер И.А. Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 23-35.
13. Резанова Е.В., Шефер И.А. О влиянии тепловой нагрузки на характеристики течения с испарением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. № 2(70). С. 83-92.

14. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газ с учетом испарения // Теплофизика высоких температур. 2017. № 55(6). С. 720-732.

Подписано в печать                    2019 г. Формат  $60 \times 84^{1/16}$  .  
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 2,0.  
Тираж 100 экз. Заказ  
Отпечатано в типографии АлтГУ,  
656038, Барнаул, проспект Ленина, 46  
тел. (8-3852)36-70-67  
Лицензия на полиграфическую деятельность  
ПЛД №28-35 от 15.07.97 г.