Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Макридин Захар Владимирович

ВЕТВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент
Макаренко Николай Иванович

Новосибирск — 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. В настоящей диссертации рассматриваются два типа задач математической теории нелинейных волн. Первый тип связан с построением семейств асимптотических периодических решений системы слабосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при переходе к бегущей переменной в модельной системе зацепленных уравнений Кортевега – де Фриза. В задачах второго типа исследуются способы построения трехмерных законов сохранения коммутирующих интегрируемых гидродинамических цепочек и их редукций. Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью развития математических методов для получения точных и асимптотических решений консервативных систем уравнений, возникающих при моделировании различных физических процессов.

Степень разработанности темы исследования. Известно, что описание длинных волн малой амплитуды в невязкой стратифицированной жидкости сводится к линейному уравнению в частных производных с разделяющимися переменными четвертого порядка. Задача Штурма–Лиувилля, возникающая при нахождении спектра волновых мод, имеет счетный набор простых собственных значений и соответствующих им собственных функций, удовлетворяющих условиям ортогональности. Собственные значения определяют дисперсионные кривые в пространстве частот и волновых чисел. Частота Брента – Вяйсяля $N(z)$ (частота плавучести), которая характеризует профиль стратификации, играет ключевую роль в поведении дисперсионных кривых. А именно, если стратификация является однородной, т.е. $N(z) = N_0 \equiv const$, то все кривые отделены друг от друга. Аналогичный вывод можно сделать в случае, когда функция $N(z)$ имеет только один максимум. Однако, при наличии нескольких локальных максимумов появляются точки, в малой окрестности которых лежат две и более дисперсионных кривых. Этот феномен называется резонансом Эккарта [1]. Натурные наблюдения [2] показывают, что профили стратификации действительно могут иметь множество локальных максимумов. Данное обстоятельство определяет не только слоистую структуру океана, но и возможность перекачки энергии по вертикали между различными слоями.

Для описания слабонелинейных эффектов при наличии резонанса Эккарта между двумя модами в работе [3] (см. также [4]) была выведена модель зацепленных уравнений Кортевега – де Фриза (система Гира – Гримшоу)

$$
\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_1 A_{1\tau} + \hat{\gamma}_{11}\, A_1 A_{1s} + \hat{\delta}_{11} A_{1sss} + \hat{\nu}_{211}\big\{A_1 A_2\big\}_s + \hat{\gamma}_{21}\, A_2 A_{2s} + \hat{\delta}_{21} A_{2sss} = 0,\\
&\hat{\alpha}_2 A_{2\tau} + \hat{\gamma}_{22}\, A_2 A_{2s} + \hat{\delta}_{22} A_{2sss} + \hat{\nu}_{122}\big\{A_1 A_2\big\}_s\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \hat{\gamma}_{12}\, A_1 A_{1s} + \hat{\delta}_{12} A_{1sss} + \hat{\alpha}_2 \Delta_2 A_{2s} = 0,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\gamma}_{ij}$, $\hat{\delta}_{ij}$ и $\hat{\nu}_{ijk}$ зависят от параметров фонового течения, а Δ_2 – отвечает за разность собственных значений в следующем порядке по амплитуде.

При отсутствии резонанса Эккарта слабонелинейные эффекты описываются уравнением Кортевега – де Фриза, которое допускает специальный вид решений — уединенные волны. Поэтому вполне естественно посмотреть, как себя ведет подобный класс решений в рамках системы Гира – Гримшоу. Численные расчеты [3], [5] показывают, что существует два принципиально разных вида совместного движения солитонов в соседных слоях: синхронизованное движение, т.е. решения для обеих компонент A_1 и A_2 движутся с постоянной одинаковой скоростью (бегущие волны), и перескакивающие солитоны (“leapfrogging solitary waves”), когда решения каждой из компонент $A_{1,2}$ обмениваются энергией друг с другом периодическим образом. Последний тип движения был впервые обнаружен в работе [6] также при изучении резонанса Эккарта, однако полученная в ходе исследования система зацепленных уравнений типа “Intermediate Long Wave” оказалась менее информативной, чем система Гира – Гримшоу. Отметим здесь также работу [7], в которой перескакивающие солитоны наблюдались экспериментально.

Аналитическое построение решений системы Гира – Гримшоу с произвольными коэффициентами $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\gamma}_{ij}$, $\hat{\delta}_{ij}$ и $\hat{\nu}_{ijk}$ весьма затруднительно. Поэтому имеющиеся работы сводятся к рассмотрению частных случаев как модельных систем, так и уравнений возникающих в приложениях. Наиболее популярной является редуцированная система

$$\begin{aligned} A_{1\tau} + \hat{\mu}_1\, A_1 A_{1s} + \hat{\lambda}_1 A_{1sss} + \hat{\Delta}_1 A_{1s} + \hat{\kappa}_1 A_{2s} = 0, \\ A_{2\tau} + \hat{\mu}_2\, A_2 A_{2s} + \hat{\lambda}_2 A_{2sss} + \hat{\Delta}_2 A_{2s} + \hat{\kappa}_2 A_{1s} = 0, \end{aligned}$$

поскольку она получена в рамках изучения конкретных геофизических течений [8–10], а также в задаче о генерации внутренней волны второй моды за счет взаимодействия волны первой моды с топографией [11] в трехслойной жидкости.

При поиске решений типа бегущих волн редуцированная система Гира – Гримшоу сводится к четырехмерной динамической системе, спектр линейного оператора которой довольно разнообразен и существенно зависит от параметров, входящих в уравнения. Это значит, что имеется множество различных типов таких волн. В работах [12–14] при помощи метода нормальных форм изучались решения, ответвляющиеся от точек спектра следующих типов:

(а) двойное нулевое собственное значение и пара вещественных разного знака;
(б) двойное нулевое собственное значение и пара чисто мнимых;
(в) пара чисто мнимых двойных собственных значений;
(г) пара вещественных собственных значений разного знака и пара чисто мнимых.

В случае (а) редуцированная система имеет решение в виде классической уединенной волны (гомоклиническая траектория). От точек спектра типа (б) ответвляется решение, называемое обобщенной уединенной волной, т.е. солитон с осциллирующими на бесконечности хвостами. В случаях (в) и (г) возникают солитоны огибающей и вложенные солитоны (локализованные периодические структуры) соответственно. Кроме того, в работе [12] исследованы некоторые вырождения случая (в), которые приводят к решениям типа кинков (уступообразная волна с профилем типа гиперболического тангенса) и более сложным структурам. Дальнейшее изучение [15] возможных решений привело к построению волн типа плато с рябью на концах и в центральном ядре. Такие решения явились результатом резонансного взаимодействия длинных волн с периодическими волнами малой амплитуды.

Нестационарные решения (перескакивающие солитоны) редуцированной системы Гира – Гримшоу изучались в работах [16–18] при помощи асимптотических разложений в предположении, что зацепляющие члены малы. В работе [19] исследовалась устойчивость решений типа классических уединенных волн в системе специального вида

$$
\begin{aligned}
u_t + (K_1 u + F_1'(u) + \varepsilon(K_3 v + G_u(u,v)))_x = 0,\\
v_t + (K_2 v + F_2'(v) + \varepsilon(K_4 u + G_v(u,v)))_x = 0,
\end{aligned}
$$

где функции F_1, F_2 и G являются бесконечно гладкими, и все их первые и вторые производные в нуле равны нулю. Далее K_1, K_2 и K_3 являются скалярными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами: $K_1 = \partial_x^2$, $K_2 = c_1 + c_2 K_1$ и $K_3 = c_3 + c_4 K_1$, а параметр ε является малым. Для систем такого вида было доказано существование четырех типов классических солитонных решений: первый тип — это решение, в котором компонента u порядка $O(1)$, а v порядка $O(\varepsilon)$; второй тип такой же, что и первый, только компоненты u и v меняются ролями; решения третьего типа имеют обе компоненты порядка $O(1)$ и четвертый тип представляет перескакивающие солитоны. Оказалось, что первые два типа решений орбитально устойчивы, а решения третьего и четвертого типов линейно неустойчивы. Отметим еще работы [20; 21], в которых исследуется система зацепленных уравнений Островского — обобщение системы Гира – Гримшоу на случай вращающейся жидкости.

Метод нормальных форм не является единственным способом построения решений бифуркационных задач. В настоящей работе будет использоваться альтернативный метод Ляпунова – Шмидта, который позволяет свести исходную задачу к эквивалентной конечномерной системе нелинейных неявных функций (уравнений разветвления). Данная система с вырожденной линейной частью наиболее эффективно может быть исследована в одномерном случае благодаря методу диаграммы Ньютона, который позволяет представить решение исходной задачи в виде ряда по определенным целым или дробным степеням малого параметра. Многомерное обобщение этого метода (многогранники Ньютона) изложено в монографии [22].

Работа с многопараметрической системой уравнений разветвления значительно упрощается, если исходная задача обладает дополнительной структурой такой, как групповая симметрия. Данное обстоятельство было впервые замечено и использовано в работе [23] при исследовании свободной конвекции в жидкости, заполняющей ограниченную область. Оказывается, что если ядро линейного оператора и его дефектное подпространство инвариантны относительно допускаемой исходными уравнениями компактной группы, то система уравнений разветвления наследует групповую инвариантность [24]. Тогда, выбирая параметрические семейства инвариантных решений, можно понизить размерность системы уравнений разветвления. Редуцированная система во многих случаях перестает быть вырожденной, что позволяет применить теорему о неявной функции. Здесь стоит отметить, что свойство компактности допускаемой группы [25–28] является существенным, поскольку оно используется при построении инвариантного проектора на дефектное подпространство. Однако, в некоторых частных случаях удается работать и с некомпактными группами (см. Глава 2 параграф 3).

Свойство инвариантности ядра выполняется далеко не всегда. В этом случае полезным оказывается понятием косимметрии, если она допускается исходными уравнениями. Согласно оригинальной работе [29] косимметрия — это векторное поле, ортогональное данному. Условие ортогональности дает дополнительное линейное соотношение между уравнениями разветвления и позволяет выделить подсистему линейно независимых уравнений меньшей размерности, что также дает возможность воспользоваться теоремой о неявной функции. Таким образом, наличие косимметрии тоже обеспечивает существование параметрических семейств решений [30], но, в отличие от групп симметрий, не существует никакого алгоритма, позволяющего отыскать косимметрию для данной системы уравнений. Исключение составляют потенциальные системы, для которых исходное операторное уравнение является градиентом функционала, инвариантного относительно действия непрерывной группы Ли. Тогда косимметриями являются инфинитезимальные операторы соответствующей алгебры Ли (см. [31]).

При детальном анализе уравнений разветвления возникают достаточные условия существования орбит ответвляющихся решений. Эти условия формулируются в терминах функции Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова аналогично случаю динамических систем из теории нелинейных колебаний [32–34]. Корни этих функций, зависящих от нелинейных членов исходных уравнений, дают искомый сдвиг фазы в синхронизованных волновых пакетах или указывают пространственное местоположение захваченных волн над препятствиями [35]. В рамках задач теории волновых движений подобные условия можно трактовать как нелинейное дисперсионное соотношение, поскольку оно связывает волновые параметры с бифуркационными.

Другой класс задач, рассматриваемых в диссертации, связан с теорией интегрируемых n-компонентных систем гидродинамического типа, т.е. гиперболических систем уравнений вида

$$u_t = V(u)u_x,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $V(u)$ — матрица размера $n \times n$. Такие системы естественным образом возникают в приложениях к газовой динамике, механике жидкости, химической кинетике, дифференциальной геометрии и т.д. [36–39]. Существует множество примеров систем гидродинамического типа, которые записываются в диагональном виде (в инвариантах Римана). Для случая $n = 2$ переход к диагональным переменным возможен всегда, в противном случае существует критерий существования инвариантов Римана, который заключается в равенстве нулю тензора Хаантьеса [40], компоненты которого вычисляются из компонент матрицы $V(u)$. Дальнейшее развитие теории сконцентрировалось вокруг диагонализируемых систем, поскольку для них было введено понятие следующее интегрируемости [41;42]. А именно,

n-компонентная диагональная система гидродинамического типа

$$r_{it} = \mu_i(r) r_{ix}, \quad i = 1, \ldots, n$$

является интегрируемой, если и только если характеристические скорости μ_i удовлетворяют свойству полугамильтоновости:

$$\partial_k \left(\frac{\partial_j \mu_i}{\mu_j - \mu_i} \right) = \partial_j \left(\frac{\partial_k \mu_i}{\mu_k - \mu_i} \right), \quad \partial_k \equiv \partial / \partial r_k, \quad k \neq i \neq j.$$

Далее, если система интегрируема, то она допускает бесконечное число гидродинамических законов сохранения (т.е. плотности и токи зависят только от r_i) и коммутирующих потоков, которые тоже являются диагональными системами гидродинамического типа. Более того, решение интегрируемой системы может быть найдено в неявном виде с помощью обобщенного метода годографа [42].

Отдельный класс систем гидродинамического типа представляет собой случай, когда матрица $V(u)$ (и соответственно, вектор-функция u) имеет бесконечный размер. Такие системы называются гидродинамическими цепочками. Ярким примером служит цепочка Бенни, полученная в [43]. В этой же работе было показано, что цепочка Бенни может быть представлена в виде бесконечного числа законов сохранения, а в [44; 45] построены все коммутирующие цепочки. Позднее [46] выяснилось, что цепочка Бенни допускает бесконечное число гидродинамических редукций — n-компонентных систем гидродинамического типа. Причем все эти редукции являются диагонализируемыми и для них свойство полугамильтоновости выполняется автоматически.

Поскольку для гидродинамических цепочек вычисление инвариантов Римана (а значит и проверка свойства полугамильтоновости) весьма проблематично, то наличие бесконечного числа интегрируемых гидродинамических редукций выбирается в качестве определения интегрируемости. В последующих работах [47; 48] были исследованы и другие гидродинамические цепочки, редукции которых возникают в приложениях. Вопросы классификации интегрируемых гидродинамических цепочек дивергентного вида

$$u_{1t} = (f(u_1,u_2))_x\,, \quad u_{2t} = (g(u_1,u_2,u_3))_x\,, \quad u_{3t} = (h(u_1,u_2,u_3,u_4))_x\,, \quad \ldots$$

рассматривались в работе [49]. Было показано, что равенство нулю тензора Хаантьеса приводит к переопределенной системе уравнений на функцию g, выполнение которой является необходимым и достаточным условием интегрируемости (что в общем случае неверно). Стоит отметить, что критерий интегрируемости, использующий тензор Хаантьеса, является эффективным только в случае, если все строки матрицы $V(u)$ содержат конечное число ненулевых элементов, каждый из которых зависит от конечного числа переменных u_i.

Для трехмерных обобщений систем гидродинамического типа, т.е. гиперболических систем уравнений вида

$$u_t + A(u)u_x + B(u)u_y = 0$$

определение интегрируемости несколько меняется. Аналогично цепочкам, указанная система называется интегрируемой [50], если она допускает бесконечное число интегрируемых гидродинамических редукций. Только под редукциями здесь понимаются пары коммутирующих N-компонентных диагональных систем (число компонент N произвольно), решения которых описывают нелинейное взаимодействие N простых волн или N-кратные волны [36; 51–60]. Заметим, что такой тип решений можно рассматривать, как бездисперсионный аналог многофазных (или конечнозонных) решений.

Указанное определение интегрируемости трехмерных гиперболических систем оказалось весьма удачным с точки зрения их классификации [61–63] и др. Аналогично двумерному случаю, трехмерные интегрируемые уравнения вкладываются в пару коммутирующих гидродинамических цепочек. В качестве примера можно рассмотреть уравнение Хохлова – Заболоцкой (бездисперсионный предел уравнения Кадомцева – Петвиашвили), которое может быть получено из пары коммутирующих цепочек Бенни [47; 64]. В работе [65] была проведена классификация гидродинамических цепочек указанного выше вида с функцией $f = u_2$, которые имеют бесконечное число коммутирующих потоков. Выяснилось, что функция g должна удовлетворять системе уравнений, которая в точности совпадает с системой из работы [49]. Кроме того, проверка интегрируемости уравнения $u_{tt} = g(u_{xx}, u_{xt}, u_{xy})$ снова приводит к той же системе на функцию g (см. [66]).

В двумерном случае интегрируемые системы уравнений (простейший пример — уравнение Кортевега – де Фриза) имеют бесконечное число двумерных законов сохранения, которые порождают соответствующие многофазные (конечнозонные) решения [67]. В трёхмерном случае интегрируемые системы уравнений (простейший пример — уравнение Кадомцева – Петвиашвили) имеют как двумерные, так и трёхмерные законы сохранения. Однако, если процедура построения двумерных законов сохранения как для двумерных так и для трёхмерных интегрируемых систем хорошо изучена, то построение бесконечного набора трёхмерных законов сохранения для дисперсионных трёхмерных интегрируемых систем связано со значительными вычислительными трудностями из-за учёта высших производных.

В связи с этим внимание в диссертации было сосредоточено на бездисперсионных трёхмерных интегрируемых уравнениях Хохлова – Заболоцкой и Михалева, которые могут быть представлены в качестве квазилинейных систем уравнений в частных производных первого порядка. Для указанных уравнений объём вычислений значительно сокращается (по сравнению с дисперсионными уравнениями), что позволяет их довести до конца. Изучение связи построенных трёхмерных законов сохранения и частных решений трёхмерных интегрируемых систем будет продолжено в дальнейшем.

Отметим, что существуют законы сохранения, плотности и токи которых содержат не только зависимые функции и их высшие производные, но и независимые переменные. Способы построения таких законов сохранения хорошо изучены [68–71], однако их существование не является свойством интегрируемых уравнений.

Цели и задачи исследования. Целью настоящей работы является исследование семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза, а также исследование трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева. В диссертации рассматривается следующий ряд задач:

- построение и обоснование асимптотики семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза, в частности, получение достаточных условий синхронизации мод;
- изучение асимптотического поведения полученных семейств решений в пределе малой амплитуды и вырождения достаточных условий синхронизации;
- построение трехмерных законов сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой;
- построение бесконечных наборов трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева;
- построение бесконечных наборов трехмерных законов сохранения для редукций пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории бифуркаций, группового анализа и переопределенных систем уравнений в частных производных.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены достаточные условия существования параметрических семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза и исследована их асимптотика.
2. Для указанных семейств решений изучен предельный случай малой амплитуды, в частности, проанализировано вырождение достаточных условий существования.
3. Построены трехмерные законы сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой.
4. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения

для пар коммутирующих гидродинамических цепочек Бенни и Михалева.

5. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для редукций пар коммутирующих цепочек Бенни и Михалева.

Личный вклад автора. Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, изложенных в совместных публикациях, на равноправной основе: постановке задач, доказательстве теорем, обсуждении полученных результатов и оформлении публикаций.

Научная новизна. В работе получены достаточные условия существования семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза. Выписана асимптотика указанных решений и исследован предел малой амплитуды. Построены трехмерные законы сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для пар двумерных коммутирующих цепочек Бенни и Михалева и их редукций. Указанные научные результаты являются новыми и подтверждены доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в развитие методов построения точных и асимптотических решений нелинейных уравнений, а также могут служить основой для дальнейших теоретических и численных исследований.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических доказательств.

Апробация работы. Представленные результаты докладывались и обсуждались на конференциях:

– Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, 29 февраля - 2 марта, 2016, г. Новосибирск;

– Physics and mathematics of nonlinear phenomena: 50 years of Inverse Scattering Transform, June 17-24, 2017, Gallipoli, Italy;
– Dispersive hydrodynamics and oceanography: from experiments to theory, August 27 - September 1, 2017, Les Houches, France;
– Международная конференция “Динамика в Сибири”, 26 февраля - 4 марта, 2017, г. Новосибирск;
– Summer school on symmetry, similarity and conservation laws in solid an fluid mechanics, April 16-20, 2018, Cargese, France;
– Modern treatment of symmetries, differential equations and applications, January 14-18, 2019, Nakhon Ratchasima, Thailand;
– Всероссийская конференция и школа для молодых ученых “Математические проблемы механики сплошных сред”, посвященные 100-летию академика РАН Л.В. Овсянникова, 13-17 мая, 2019, г. Новосибирск;
– IX-th International Conference “Solitons, collapses and turbulence: achievements, developments and perspectives” in honor of Vladimir Zakharov’s 80th birthday & Scientific school for young scientists “Nonlinear days”, August 5-9, 2019, Yaroslavl, Russia;
– 11-th International work-shop “Waves in inhomogeneous media and integrable system” September 27-29, 2021, Kaliningrad, Russia.

Кроме того, результаты диссертации сообщались и обсуждались на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН Плотникова П. И. и д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманюка Е. В. (ИГиЛ СО РАН); акад. РАН Тайманова И. А. (ИМ СО РАН); д.ф.-м.н. Ткачева Д. Л. и д.ф.-м.н. Трахинина Ю. Л. (ИМ СО РАН).

Публикации. Результаты по теме диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах из списка ВАК [72–77].

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц, список литературы содержит 122 наименования.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, приведен обзор литературы по теме, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, охарактеризованы новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована достоверность и приведена апробация результатов.

Первая глава содержит предварительные сведения из теории бифуркаций и теории интегрируемых систем уравнений в частных производных, которые необходимы для дальнейшего изложения результатов исследований.

Во **второй главе** представлены результаты по построению и обоснованию асимптотики решений типа периодических бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза. Получены достаточные условия синхронизации мод, а также изучено их асимптотическое поведение в пределе малой амплитуды.

В **третьей главе** получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных цепочек Бенни и Михалева и их редукций. Кроме того, построены трехмерные законы сохранения для уравнения Хохлова – Заболоцкой.

Глава 3 и параграфы 4 и 5 главы 1 имеют свою независимую от остальных разделов диссертации систему обозначений.

В **приложении** дан подробный вывод системы Гира – Гримшоу, обобщенной на случай произвольного числа зацепленных мод.

Заключение содержит краткий обзор основных результатов, полученных в диссертационной работе.

Благодарности. Автор выражает большую благодарность своим учителям: д.ф.-м.н. Николаю Ивановичу Макаренко и к.ф.-м.н. Максиму Валентиновичу Павлову за постановку задач и активное внимание к работе.

Глава 1. Предварительные сведения

1.1 Система зацепленных уравнений КдФ

Уравнение Кортевега – де Фриза является канонической моделью для описания слабонелинейных длинных внутренних волн малой амплитуды [78–80]. В системе отсчета, связанной с линейными волнами, распространяющимися со скоростью c, уравнение принимает форму

$$\hat{\alpha} A_\tau + \hat{\gamma}\, A A_s + \hat{\delta} A_{sss} = 0. \tag{1.1}$$

где $A(\tau{,}s)$ — амплитудная функция линейной моды $\varphi(z)$, соответствующей собственному значению c задачи Штурма – Лиувилля

$$\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_z\Big\}_z + \rho_0 N^2\varphi = 0, \quad (-h < z < 0), \tag{1.2}$$

$$\varphi = 0, \quad (z=-h), \qquad (u_0-c)^2\varphi_z = g\varphi, \quad (z=0). \tag{1.3}$$

Здесь $N^2 = -g\rho_{0z}/\rho_0$ — частота Брента – Вяйсяля, которая определяется плотностной стратификацией жидкости $\rho_0(z)$, $u_0(z)$ — фоновое сдвиговое течение, причем $u_0 \neq c$ (т. е. предполагается отсутствие критического слоя). Коэффициенты в уравнении (1.1) выражаются через модальную функцию φ и параметры фонового течения следующим образом

$$\hat{\alpha} = \int\limits_{-h}^{0} 2\rho_0(u_0-c)\varphi_z^2 dz, \quad \hat{\delta} = -\int\limits_{-h}^{0} \rho_0(u_0-c)^2\varphi^2 dz,$$

$$\hat{\gamma} = -\int\limits_{-h}^{0} 3\rho_0(u_0-c)^2\varphi_z^3 dz.$$

В теории внутренних волн уравнение (1.2) часто называется уравнением Тейлора – Голдстейна. Вертикальное перемещение частиц жидкости дается формулой

$$\zeta(z,s,\tau) = \varepsilon^2 A(\tau,s)\varphi(z) + \varepsilon^4 \zeta_2(z,s,\tau) + \ldots,$$

где $\varepsilon^2 = \alpha$ — амплитудный параметр, а нелинейная поправка ζ_2 находится из неоднородной краевой задачи

$$\Big\{\rho_0(u_0 - c)^2 \zeta_{2sz}\Big\}_z + \rho_0 N^2 \zeta_{2s} = G_1, \quad (-h < z < 0), \tag{1.4}$$

$$\zeta_{2s} = 0, \quad (z = -h), \qquad \rho_0(u_0 - c)^2 \zeta_{2sz} - g\rho_0\zeta_{2s} = G_2, \quad (z = 0). \tag{1.5}$$

Функции G_1 и G_2 являются нелинейными выражениями от $A(\tau,s)$ и $\varphi(z)$ и их производных. В итоге проверка условия разрешимости задачи (1.4), (1.5) приводит к уравнению (1.1).

Описанная процедура изначально предполагает наличие одной волновой моды, изолированной от остальных мод. Нас интересует ситуация, в которой имеется m различных мод, фазовые скорости которых отличаются на величину более высокого порядка малости по ε, т. е. $c_1 = c$, $c_i = c + \varepsilon^2 \Delta_i$, $(i = 2,\ldots,m)$. Данный процесс называется сильным взаимодействием внутренних слабонелинейных волн. В этом случае вертикальное перемещение будет задаваться в форме

$$\zeta(z,s,\tau) = \varepsilon^2 \zeta_1(z,s,\tau) + \varepsilon^4 \zeta_2(z,s,\tau) + \ldots,$$

где

$$\zeta_1 = A_1(\tau,s)\varphi_1(z) + \sum_{i=2}^{m} A_i(\tau,\xi_i)\varphi_i(z), \quad \xi_i = s + \Delta_i \tau.$$

Далее применяя аналогичную технику при $m = 2$, получаем систему зацепленных уравнений Кортевега – де Фриза:

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_1 A_{1\tau} + \hat{\gamma}_{11} A_1 A_{1s} + \hat{\delta}_{11} A_{1sss} + \hat{\nu}_{211}\big\{A_1 A_2\big\}_s \\ &\qquad\qquad + \hat{\gamma}_{21} A_2 A_{2s} + \hat{\delta}_{21} A_{2sss} = 0, \\ &\hat{\alpha}_2 A_{2\tau} + \hat{\gamma}_{22} A_2 A_{2s} + \hat{\delta}_{22} A_{2sss} + \hat{\nu}_{122}\big\{A_1 A_2\big\}_s \\ &\qquad\qquad + \hat{\gamma}_{12} A_1 A_{1s} + \hat{\delta}_{12} A_{1sss} + \hat{\alpha}_2 \Delta_2 A_{2s} = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь коэффициенты даются выражениями

$$\hat{\alpha}_k = \int\limits_{-h}^{0} 2\rho_0(u_0 - c)\varphi_{kz}^2 dz, \quad \hat{\delta}_{ik} = -\int\limits_{-h}^{0} \rho_0(u_0 - c)^2\varphi_i\varphi_k dz,$$

$$\hat{\nu}_{ijk} = -\int\limits_{-h}^{0} 3\rho_0(u_0 - c)^2\varphi_{iz}\varphi_{jz}\varphi_{kz}dz, \quad \hat{\gamma}_{ik} = -\int\limits_{-h}^{0} 3\rho_0(u_0 - c)^2\varphi_{iz}^2\varphi_{kz}dz.$$

Подробный вывод системы вида (1.6) для произвольного числа взаимодействующих мод m дан в Приложении.

1.2 Необходимые факты теории ветвления

В данном параграфе излагаются необходимые сведения из нелинейного функционального анализа и теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах в условиях групповой инвариантности [25; 27; 81–85].

Пусть $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ — вещественные банаховы пространства и $\mathscr{U} \subset \mathscr{E}$ — открытое множество. Допустим, что задано гладкое отображение $\mathbb{F} : \mathscr{U} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathscr{F}$, где ε_0 — вещественное число. Рассматривается задача о возмущении известного при $\varepsilon = 0$ решения $w_0 \in \mathscr{U}$ уравнения

$$\mathbb{F}(w;\varepsilon) = \mathbb{A}\vartheta - \mathbb{R}(\vartheta;\varepsilon) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $w = w_0 + \vartheta$ и $\mathbb{A} = \mathbb{F}'_w(w_0;0)$ — производная Фреше оператора $\mathbb{F}$ по w в точке $w = w_0$. Нелинейное отображение

$$\mathbb{R}(\vartheta;\varepsilon) = \mathbb{A}\vartheta - \mathbb{F}(w_0 + \vartheta;\varepsilon) \tag{1.8}$$

по построению удовлетворяет условию $\mathbb{R}(0;0) = \mathbb{R}'_\vartheta(0;0) = 0$. Далее предполагается, что линейный оператор $\mathbb{A} : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ является фредгольмовым, т. е. его ядро $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$ конечномерно, образ $\operatorname{Im}\mathbb{A}$ замкнут в $\mathscr{F}$ и $\dim\operatorname{Ker}\mathbb{A} = \operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathbb{A} = n \geq 1$. Пусть элементы $\{e_j\}_{j=1}^n$ образуют базис в $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$, а $\{z_j\}_{j=1}^n$ — базис в дополнении $\mathscr{Y}$ к образу оператора $\mathbb{A}$. Тогда существуют соответствующие биортогональные системы функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{E}^*$ и $\{\phi_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{F}^*$, выбор которых определяет проекторы $\mathbb{P} : \mathscr{E} \to \operatorname{Ker}\mathbb{A}$ и $\mathbb{Q} : \mathscr{F} \to \mathscr{Y}$, действующие по формулам

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \big\langle\, \cdot\,,\gamma_i \big\rangle\, e_i, \qquad \mathbb{Q} = \sum_{j=1}^{n} \big\langle\, \cdot\,,\phi_j \big\rangle\, z_j. \tag{1.9}$$

Указанные проекторы порождают разложение пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ в прямые суммы замкнутых подпространств

$$\mathscr{E} = \operatorname{Ker}\mathbb{A} \oplus \mathscr{X}, \qquad \mathscr{F} = \operatorname{Im}\mathbb{A} \oplus \mathscr{Y}.$$

Положим

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma, \qquad \sigma \in \mathscr{X},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — вещественные параметры, и подействуем проекторами $\mathbb{Q}$ и $(\mathbb{I} - \mathbb{Q})$ на уравнение (1.7). Тогда получаем равносильную систему уравнений в проекциях на подпространства $\operatorname{Im}\mathbb{A}$ и $\mathscr{Y}$

$$\widetilde{\mathbb{A}}\sigma - (\mathbb{I} - \mathbb{Q})\mathbb{R}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma; \varepsilon\right) = 0, \qquad \mathbb{Q}\mathbb{R}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma; \varepsilon\right) = 0. \tag{1.10}$$

Здесь $\widetilde{\mathbb{A}} : \mathscr{X} \to \operatorname{Im}\mathbb{A}$ является сужением оператора $\mathbb{A}$ на подпространство $\mathscr{X} \subset \mathscr{E}$. Согласно теореме о неявных отображениях, существует единственное малое решение $\sigma = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n; \varepsilon)$ первого уравнения в (1.10). В итоге получаем n-мерную систему функциональных уравнений на коэффициенты $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$$\mathbb{Q}\mathbb{R}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma(\xi; \varepsilon); \varepsilon\right) = 0. \tag{1.11}$$

Вспоминая определения проектора $\mathbb{Q}$, получаем систему из n вещественных уравнений

$$\beta_j(\xi,\varepsilon) = \left\langle \mathbb{R}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma(\xi;\varepsilon);\varepsilon\right),\phi_j \right\rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{1.12}$$

которая называется системой уравнений разветвления Ляпунова – Шмидта. Таким образом, верна следующая

Теорема 1.1 *Пусть оператор* $\mathbb{A}$ *— фредгольмов, а отображение* $\mathbb{R}(\theta;\varepsilon)$ *является гладким в окрестности точки* $(0,0) \in \mathscr{U} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, *причем* $\mathbb{R}(0,0) = \mathbb{R}'_\vartheta(0,0) = 0$. *Тогда формула*

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sigma(\xi;\varepsilon), \tag{1.13}$$

где отображение σ *определено из первого уравнения системы* (1.10), *устанавливает взаимнооднозначное соответствие между малыми решениями уравнения* (1.7) *и системы* (1.12).

Необходимо отметить, что по построению матрица Якоби $\partial\beta_i/\partial\xi_j$ системы (1.12), вычисленная в точке $(\xi,\varepsilon) = (0,0)$, является нулевой матрицей. Однако существуют методы, позволяющие понизить размерность системы (1.12), что дает возможность применять теорему о неявных отображениях. Применение теоретико-групповых методов, использующих свойства симметрии исходного уравнения (1.7), является наиболее эффективной техникой понижения размерности (редукции) системы уравнений разветвления. Именно об этой технике пойдет речь далее, но сперва необходимо дать

Определение 1.1 *Отображение* $\mathbb{F}$ *называется эквивариантом относительно пары представлений* T_g *и* L_g *группы* G *(или инваринтаным относительно группы преобразований* G*), если равенство*

$$\mathbb{F}(T_g w;\varepsilon) = L_g \mathbb{F}(w;\varepsilon) \tag{1.14}$$

выполнено для всех $w \in \mathscr{E}$ *и* $g \in G$.

Согласно данному определению, если отображение $\mathbb{F}$ является эквивариантом, то для любого решения $w = w(\varepsilon)$ уравнения $\mathbb{F}(w;\varepsilon) = 0$ существует орбита решений $T_g w(\varepsilon)$.

Поскольку в конструкции Ляпунова – Шмидта мы работаем с эквивалентным операторным уравнением, в котором выделена линейная часть, то требуется выяснить, какими свойствами обладает производная Фреше $\mathbb{A} = \mathbb{F}'_w(w_0;0)$ эквивариантного отображения $\mathbb{F}$. Дифференцируя равенство (1.14) по w в точке $(w_0;0)$, получаем

$$\mathbb{F}'_w(T_g w_0;0)T_g = L_g \mathbb{F}'_w(w_0;0).$$

Отсюда ясно, что если $T_g w_0 = w_0$ для всех $g \in G$, то линейный оператор тоже является эквивариантом, т. е. $\mathbb{A}T_g = L_g\mathbb{A}$. Кроме того, по построению эквивариантом является еще и оператор $\mathbb{R}$ (см. (1.8)). Ввиду вышесказанного, ядро линейного оператора $\mathbb{A}$ является инвариантным подпространством для представления T_g. Таким образом, T_g индуцирует представление группы G, действующее в конечномерном пространстве $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$. В самом деле, для элемента $w \in \operatorname{Ker}\mathbb{A}$ имеем

$$T_g w = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\,(T_g e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g) e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g)\xi_j \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{\xi}_i e_i.$$

То есть набор коэффициентов $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_n)$ преобразованного элемента ядра дается равенством

$$\hat{\xi} = \mathcal{A}_g \xi, \qquad \mathcal{A}_g = \bigl\{a_{ij}(g)\bigr\}. \tag{1.15}$$

Явный вид элементов матрицы $\mathcal{A}_g$ можно получить при помощи биортогональной системы функционалов $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$:

$$\bigl\langle T_g e_j\,,\gamma_k \bigr\rangle = \bigl\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g) e_i\,,\gamma_k \bigr\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g) \bigl\langle e_i\,,\gamma_k \bigr\rangle = a_{kj}(g). \tag{1.16}$$

Для фредгольмова оператора $\mathbb{A}$ пространство $\mathscr{E}$ представляется в виде прямой суммы $\mathscr{E} = \operatorname{Ker}\mathbb{A} \oplus \mathscr{X}$. В отличие от ядра, дополняющее его подпространство $\mathscr{X}$, вообще говоря, не является инвариантным относительно действия представления T_g. Это следует из того, что проектор на ядро линейного оператора в общем случае не перестановочен с оператором T_g. Однако, для компактных групп G существует способ построения инвариантного проектора, который основывается на конструкции интеграла Хаара по группе. Таким образом, верна следующая

Лемма 1.1 *Пусть T_g — представление компактной группы Ли G, действующей в банаховом пространстве $\mathscr{E}$ и непрерывное по $g \in G$. Тогда существует проектор на инвариантное подпространство $Ker\mathbb{A} \subset \mathscr{E}$ такой, что прямое дополнение к $Ker\mathbb{A}$ инвариантно относительно T_g.*

Здесь условие компактности группы G является существенным, поскольку оно гарантирует сходимость интеграла Хаара. Аналогичным образом можно выбрать проектор на подпространство $\mathscr{Y} \subset \mathscr{F}$, инвариантный относительно действия представления L_g. При этом в $\mathscr{Y}$ действует конечномерное представление $\mathcal{B}_g$, матрица которого имеет вид

$$\mathcal{B}_g = \big\{b_{kj}(g)\big\} = \big\langle L_g z_j \,,\phi_k\big\rangle, \qquad k,j = 1,\ldots,n.$$

Отметим, что существуют конкретные ситуации, когда инвариантные проекторы можно выбрать и для некомпактных групп. Поэтому все дальнейшие рассуждения будут проводиться в рамках ситуации, когда пространства $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ раскладываются в прямые суммы замкнутых подпространств, инвариантных относительно представлений T_g и L_g соответственно. Так что примем следующее

Условие I *Проекторы $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$, порождающие разложения пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ в прямые суммы, коммутируют с операторами T_g и L_g соответственно.*

В рамках выполнения данного условия система уравнений разветвления (1.12) наследует групповую инвариантность исходного уравнения (1.7), т. е. имеет место

Теорема 1.2 *Пусть уравнение* (1.7) *инвариантно относительно группы G и выполнено условие I. Тогда система уравнений разветвления* (1.12) *также инвариантна относительно группы G:*

$$\beta(\mathcal{A}_g\xi,\varepsilon) = \mathcal{B}_g\beta(\xi,\varepsilon). \tag{1.17}$$

Итак, если $\xi = \xi(\varepsilon)$ — есть малое решение системы (1.12), то согласно данной теореме $\mathcal{A}_g\xi(\varepsilon)$ — тоже является малым решением.

Если группа G действует в подпространстве $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$, то оно расслаивается на орбиты $\mathscr{O}(w) = \{T_g w \mid g \in G\}$. Обозначим через $\mathscr{L}_j$ подпространства в $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$ такие, что $\dim\mathscr{L}_j = l_j < n = \dim\operatorname{Ker}\mathbb{A}$.

Определение 1.2 *Семейство $\mathscr{L} = \left\{\mathscr{L}_j\right\}_{j=1}^{p}$ называется семейством порождающих подпространств для $Ker\,\mathbb{A}$, если для всех $w \in Ker\,\mathbb{A}$ существуют номер j т. ч. $1 \leq j \leq p$, элемент $w_* \in \mathscr{L}_j$ и элемент группы $g \in G$, для которых верно равенство $w = T_g w_*$.*

Будем называть систему $\mathscr{L}$ *минимальной*, если число p нельзя уменьшить.

Определение 1.3 *Группа G действует в $Ker\,\mathbb{A}$ l-стационарно, если система $\mathscr{L}$ состоит из одного подпространства размерности $l < n$.*

Теперь мы располагаем всей необходимой информацией для того, чтобы сформулировать теорему о редукции.

Теорема 1.3 (о редукции) *Если в ядре $Ker\,\mathbb{A}$ имеется система порождающих подпространств $\mathscr{L} = \{\mathscr{L}_j\}_{j=1}^{p}$ и группа G действует в подпространстве $\mathscr{Y}$ l-стационарно, то все малые решения уравнения* (1.7) *принадлежат одному из p семейств*

$$\vartheta^{(k)}(\varepsilon) = T_g\left\{\sum_{j=1}^{l_k}\xi_j(\varepsilon)e_j^{(k)} + \sigma^{(k)}(\xi(\varepsilon);\varepsilon)\right\}, \tag{1.18}$$

где $\left\{e_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{l_k}$ — базис в $\mathscr{L}_k$, а $\sigma^{(k)}(\xi_1(\varepsilon),\ldots,\xi_{l_k}(\varepsilon);\varepsilon) \in \mathscr{X}$. При этом система уравнений разветвления (1.12) *сводится к системе из $l < n$*

уравнений.

1.3 Ветвление решений системы слабосвязанных осцилляторов

Как видно из предыдущего раздела, свойство инвариантности ядра линейного оператора относительно допускаемой исходным уравнением группы является ключевым при редукции системы уравнений разветвления. Для наглядности проиллюстрируем описанную схему редукции на известном примере [86] системы слабосвязанных осцилляторов. Рассмотрим операторное уравнение

$$\mathbb{F}(w;\varepsilon) = -\frac{dw}{dt} + \Lambda w + f(w;\varepsilon) = 0, \tag{1.19}$$

где неизвестная вектор-функция $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathscr{R}^n$ содержит четное число компонент $n = 2s$, вещественный параметр ε принадлежит интервалу $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathscr{R}$, а матрица Λ выглядит следующим образом:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1 J & & & 0 \\ & \omega_2 J & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_s J \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частоты $\omega_1, \ldots, \omega_s$ предполагаются рационально независимыми, а аналитическая вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$ удовлетворяет условию $f(w,0) = 0$.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.19) является линейной гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H(w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \omega_i \Big\{ w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2 \Big\}$$

и имеет периодическое решение

$$w_0(t;\varrho_0) = \varrho_0 \left(\theta e^{i\omega_1 t} + \overline{\theta} e^{-i\omega_1 t}\right). \tag{1.20}$$

Здесь $\theta = (1,i,0,\ldots,0)$ — комплексный собственный вектор матрицы Λ, соответствующий ее собственному значению $i\omega_1$, черта обозначает комплексное сопряжение, а вещественный амплитудный параметр ϱ_0 зависит от константы уровня $H(x_0) = h_0$.

Будем искать периодическое по t решение w исходного уравнения (1.19) с неизвестным периодом $T(\varepsilon) = 2\pi/\omega(\varepsilon)$ в виде возмущения

$$w(t;\omega,\varrho_0,\varepsilon) = w_0(t;\varrho_0) + \varepsilon\vartheta(t;\omega,\varrho_0,\varepsilon).$$

Частота $\omega(\varepsilon) = \omega_1 + \varepsilon\omega'(0) + \varepsilon^2\omega_*(\varepsilon)$ предполагается аналитической функцией по ε. Заменой независимой переменной $\tau = \omega(\varepsilon)t$ указанная задача сводится к поиску 2π-периодического решения эквивалентного операторного уравнения:

$$\mathbb{A}\vartheta = \mathbb{R}(\vartheta;\varepsilon,\omega), \tag{1.21}$$

где $\mathbb{A}$ — линейный оператор, действующий по формуле

$$\mathbb{A}w = \frac{dw}{d\tau} - \mathcal{C}w, \qquad \mathcal{C} = \omega_1^{-1}\Lambda, \tag{1.22}$$

а нелинейное отображение $\mathbb{R}$ определено следующим образом:

$$\mathbb{R}(\vartheta;\varepsilon,\omega) = \frac{1}{\varepsilon\omega_1}\Big\{\big(\omega_1 - \omega\big)\frac{dw_0}{d\tau} + \varepsilon\big(\omega_1 - \omega\big)\frac{d\vartheta}{d\tau} + f(w_0 + \varepsilon\vartheta;\varepsilon)\Big\} \tag{1.23}$$

Пусть $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ — банаховы пространства 2π-периодических гладких и, соответственно, непрерывных вещественных вектор-функций $\vartheta(\tau)$, которые представимы в виде равномерно сходящихся рядов Фурье

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vartheta^{(n)} e^{in\tau}, \qquad \vartheta^{(n)} \in \mathscr{C}^m : \vartheta^{(-n)} = \overline{\vartheta}^{\,(n)},\ n = 0,1,2,\ldots$$

с конечными нормами

$$\|\vartheta\|_{\mathscr{E}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(1+|n|\big)\big|\vartheta^{(n)}\big|, \qquad \|\vartheta\|_{\mathscr{F}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\vartheta^{(n)}\big|.$$

Обозначим через $\mathscr{U} \subset \mathscr{E}$ окрестность точки $w_0 \in \mathscr{E}$. Для аналитического оператора $\mathbb{R} : \mathscr{U} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \times \mathscr{R} \to \mathscr{F}$ выполняется оценка

$$\big\|\mathbb{R}(\vartheta;\varepsilon,\omega)\big\|_{\mathscr{F}} \le {\omega_1}^{-1}\Big\{C_\omega\big(|\varepsilon|\big)\Big(2\varrho_0\sqrt{2} + \|\vartheta\|_{\mathscr{E}}\Big) + C_f\big(\|\vartheta\|_{\mathscr{E}};|\varepsilon|\big)\Big\}$$

с мажорантными функциями C_ω и C_f. Имеет место следующая лемма, которая является частным случаем более общих теорем (см., например, [87]).

Лемма 1.2 *Пусть частоты $\omega_1,\dots,\omega_s$ удовлетворяют неравенству $\big|\omega_1^{-1}\omega_j\big| < 2$ для всех $j = 2,\dots,s$. Тогда уравнение $\mathbb{A}\vartheta = f$ с вектор-функцией $f(\tau) \in \mathscr{F}$ имеет 2π-периодическое решение $\vartheta(\tau) \in \mathscr{E}$, если и только если $f(\tau)$ удовлетворяет условию ортогональности*

$$\int_0^{2\pi} \big(f(\tau)\cdot\theta\big)\, e^{-i\tau}\, d\tau = 0. \tag{1.24}$$

Здесь θ — комплексный собственный вектор из (1.20), а $(f\cdot\theta)$ обозначает эрмитово скалярное произведение. Если условие (1.24) выполнено, то все вещественные 2π-периодические решения $\vartheta(\tau)$ определяются формулой

$$\vartheta(\tau) = \xi\,\theta e^{i\tau} + \overline{\xi}\,\overline{\theta} e^{-i\tau} + \vartheta_*(\tau), \tag{1.25}$$

где решение ϑ_* неоднородного уравнения $\mathbb{A}\vartheta = f$ имеет вид

$$\begin{aligned}\vartheta_*(\tau) = \mathcal{C}^{-1}f^{(0)} - \frac{1}{2}i\,\big(f^{(1)}\cdot\overline{\theta}\big)\,\overline{\theta}e^{i\tau}& \\ + \frac{1}{2}i\,\big(f^{(-1)}\cdot\theta\big)\,\theta e^{-i\tau} + \sum_{|n|\ge 2}\big(inI - \mathcal{C}\big)^{-1}f^{(n)}e^{in\tau}&\end{aligned} \tag{1.26}$$

с единичной матрицей I. Для этого решения верна оценка

$$\big\|\vartheta_*(\tau)\big\|_{\mathscr{E}} \le C\big\|f(\tau)\big\|_{\mathscr{F}}.$$

Условие на частоты $|\omega_1^{-1}\omega_j| < 2$ гарантирует отсутствие малых знаменателей в элементах блочно-диагональной матрицы $(inI - \mathcal{C})^{-1}$ из формулы (1.26). Согласно лемме 1.2, линейный оператор $\mathbb{A}$ является фредгольмовым с вещественным ядром

$$\operatorname{Ker}\mathbb{A} = \Big\{\operatorname{Re}\theta e^{i\tau}, \operatorname{Im}\theta e^{i\tau}\Big\}.$$

Следуя конструкции Ляпунова – Шмидта, отыскание малых решений уравнения (1.19) в виде $\vartheta = \xi\,\theta e^{i\tau} + \overline{\xi}\,\overline{\theta}e^{-i\tau} + \sigma$ сводится к решению системы уравнений разветвления для комплексного коэффициента $\xi \in \mathscr{C}$

$$\mathbb{Q}\mathbb{R}\big(\xi\,\theta e^{i\tau} + \overline{\xi}\,\overline{\theta}e^{-i\tau} + \sigma(\tau;\xi,\overline{\xi},\varepsilon,\omega);\varepsilon,\omega\big) = 0, \tag{1.27}$$

где нелинейное отображение $\sigma = \sigma(\tau;\xi,\overline{\xi},\varepsilon,\omega)$ определено неявно уравнением

$$\sigma = \widetilde{\mathbb{A}}^{-1}\big(\mathbb{I} - \mathbb{Q}\big)\mathbb{R}\big(\xi\,\theta e^{i\tau} + \overline{\xi}\,\overline{\theta}e^{-i\tau} + \sigma;\varepsilon,\omega\big). \tag{1.28}$$

Здесь оператор $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1}$ действует в соответствии с формулой (1.26).

Опишем схему теоретико-групповой редукции системы уравнений разветвления. Исходное уравнение (1.19) автономно, а значит является эквивариантным для представления группы трансляций по времени:

$$\mathbb{F}(T_g w;\varepsilon) = T_g\mathbb{F}(w;\varepsilon), \qquad T_g w(\tau) = w(\tau + g), \quad w \in \mathscr{E}.$$

Важно отметить, что решение невозмущенной системы не является стационарной точкой представления T_g. Однако, оператор $\mathbb{A}$ является линейным оператором с постоянными коэффициентами и поэтому выполняется равенство $\mathbb{A}T_g = T_g\mathbb{A}$. Кроме того, оператор $\mathbb{R}(\vartheta;\omega,\varepsilon)$ формально не является эквивариантом представления T_g, но структура уравнения (1.19) такова, что $\mathbb{R}(\vartheta;\omega,\varepsilon) = \mathbb{R}_*(w_0+\varepsilon\vartheta;\omega,\varepsilon)$ (см. (1.23)) причем

$$T_g\mathbb{R}_*(w_0+\varepsilon\vartheta;\omega,\varepsilon) = \mathbb{R}_*(T_g\left\{w_0+\varepsilon\vartheta\right\};\omega,\varepsilon).$$

Таким образом, для использования схемы редукции, описанной в разделе 1.2, формально необходимо работать с уравнением

$$\mathbb{A}\vartheta = \mathbb{R}_*(w_0+\varepsilon\vartheta;\omega,\varepsilon). \tag{1.29}$$

Соответственно, формулы (1.27) и (1.28) принимают вид

$$\sigma = \widetilde{\mathbb{A}}^{-1}\big(\mathbb{I}-\mathbb{Q}\big)\mathbb{R}_*\Big(w_0+\varepsilon\big(\xi\,\theta e^{i\tau}+\overline{\xi}\,\overline{\theta}e^{-i\tau}+\sigma\big);\varepsilon,\omega\Big). \tag{1.30}$$

$$\mathbb{Q}\mathbb{R}_*\Big(w_0+\varepsilon\big(\xi\,\theta e^{i\tau}+\overline{\xi}\,\overline{\theta}e^{-i\tau}+\sigma\big);\varepsilon,\omega\Big) = 0. \tag{1.31}$$

Линейный оператор $\mathbb{A}$ коммутирует с представлением T_g, которое в ядре $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$ действует по формуле $T_g w = e^{ig}w$ для любой функции $w\in\operatorname{Ker}\mathbb{A}$. Таким образом, T_g индуцирует представление $\mathcal{A}_g\xi = e^{ig}\xi$ компактной группы Ли $SO(2)$. Указанное представление действует 1-стационарно в пространстве параметров $\xi\in\mathscr{C}$ в том смысле, что любой вектор комплексной плоскости можно повернуть так, чтобы он оказался на вещественной оси. В итоге мы можем воспользоваться теоремой о редукции, согласно которой все малые решения уравнения (1.29) можно представить в виде орбиты

$$\vartheta(\tau) = T_g\Big\{|\xi|\big(\theta\,e^{i\tau}+\overline{\theta}\,e^{-i\tau}\big)+\sigma(\tau;\xi,\overline{\xi},\varepsilon,\omega)\Big\} \tag{1.32}$$

с произвольным параметром $g\in[0,2\pi]$. Без ограничения общности зафиксируем здесь $g=0$. В этом случае система уравнений разветвления сильно упрощается. В главном порядке при $\varepsilon=0$ (1.31) сводится к паре независимых скалярных уравнений

$$\varrho_0\,\omega'(0)+\Gamma(\varrho_0) = 0 \qquad \Psi(\varrho_0) = 0 \tag{1.33}$$

с гладкими функциями Γ и Ψ. При этом функция Ψ имеет вид

$$\Psi(\varrho_0) = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \cos\tau \, \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}(w_0; 0) - \sin\tau \, \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}(w_0; 0) \right\} d\tau \tag{1.34}$$

с компонентами f_1,f_2 нелинейной вектор-функции f из (1.19). Выражение (1.34) есть аналог функции Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова [32–34] для системы (1.19). После того, как из уравнений (1.33) найдены значения ϱ_0 и $\omega\,'(0)$, система (1.31) принимает вид

$$\begin{cases} |\xi|\Psi\,'(\varrho_0) + \Pi_1(\omega\,'(0),\varrho_0) + \varepsilon\chi_1(|\xi|;\varepsilon,\varrho_0,\omega_*) = 0, \\ |\xi|\Pi_2(\omega\,'(0),\varrho_0) - \varrho_0\omega_* + \Pi_3(\omega\,'(0),\varrho_0) + \varepsilon\chi_2(|\xi|;\varepsilon,\varrho_0,\omega_*) = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Здесь явный вид гладких функций Π_j $(j = 1{,}2{,}3)$ и χ_j $(j = 1{,}2)$ особой роли не играет. Таким образом, если $\Psi\,'(\varrho_0) \neq 0$ и параметр ε достаточно мал, то мы можем воспользоваться теоремой о неявной функции для определения параметров $|\xi|$ и ω_* из уравнений (1.35). В итоге, переходя обратно к переменной t, мы получаем следующий результат:

Теорема 1.4 *Если амплитудный параметр ϱ_0 в формуле* (1.20) *является простым корнем функции Ψ из* (1.34) *и ε — достаточно мало, то в классе $\mathscr{E}$ существует гладкое 2π-периодическое решение $\vartheta(\tau)$ уравнения* (1.21).

Из данной теоремы, путем перехода обратно к переменной t, следует существование гладкого $T(\varepsilon)$-периодического решения исходной системы (1.19).

Если ϱ_0 является кратным корнем функции Ψ, то бифуркации решений определяются нелинейными членами более высокого порядка в системе (1.19). Вычислению соответствующих вариаций методом нормальных форм в случае систем малой размерности посвящена работа [88].

Приведенная здесь схема редукции системы уравнений разветвления несколько отличается от той, что описана в разделе 1.2. Это вызвано тем, что решение невозмущенной системы не является стационарной точкой представления группы переносов по времени. Такая ситуация является типичной при исследовании бифуркации нетривиальных решений. В этом случае свойство инвариантности ядра перестает быть простым следствием эквивариантности исходной системы уравнений, и его необходимо проверять непосредственно.

1.4 Интегрируемые системы гидродинамического типа

Системой гидродинамического типа [89] называется система квазилинейных уравнений в частных производных

$$u_t = V(u)u_x, \tag{1.36}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — искомая вектор-функция, а $V(u) = \{v_{ij}(u)\}$ — матрица $n \times n$. Для интегрируемости таких систем требуется существование инвариантов Римана, в которых система (1.36) записывается в форме

$$r_{it} = \mu_i(r) r_{ix}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.37}$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n)$.

Определение 1.4 *Система* (1.37) *называется полугамильтоновой [41; 42], если для всех $i \neq j \neq k$ выполнено равенство*

$$\partial_k \left(\frac{\partial_j \mu_i}{\mu_j - \mu_i} \right) = \partial_j \left(\frac{\partial_k \mu_i}{\mu_k - \mu_i} \right), \quad \partial_k \equiv \partial / \partial r_k. \tag{1.38}$$

Определение 1.5 *Система*

$$r_{iy} = w_i(r) r_{ix}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.39}$$

называется коммутирующим с (1.37) *потоком, если для всех $i = 1, \ldots, n$*

выполнено равенство $(r_i)_{ty} = (r_i)_{yt}$ *эквивалентное следующему*

$$\frac{\partial_k w_i}{w_k - w_i} = \frac{\partial_k \mu_i}{\mu_k - \mu_i}, \quad i \neq k. \tag{1.40}$$

Теорема 1.5 *Если выполнено свойство полугамильтоновости* (1.38), *то система* (1.37) *имеет бесконечное число законов сохранения* $(f(r))_t = (g(r))_x$ *и коммутирующих потоков* (1.39). *Характеристические скорости коммутирующих потоков удовлетворяют системе линейных уравнений* (1.40) *[41; 42]*

Иными словами, если для (1.37) выполнено свойство полугамильтоновости, то система (1.40), определяющая коммутирующие потоки w_i совместна и имеет бесконечное число решений.

Теорема 1.6 (обобщенный метод годографа) *Гладкое решение* $r_i(x,t)$ *системы*

$$w_i(r) = \mu_i(r)t + x, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.41}$$

является решением полугамильтоновой системы (1.37). *Обратно, любое решение* $r_i(x,t)$ *системы* (1.37) *локально, в окрестности точки* (x_0,t_0) *такой, что* $r_{ix}(x_0,t_0) \neq 0$ *для всех* i, *представимо как решение системы* (1.41) *для* $w_i(r)$ *— скоростей коммутирующего с* (1.37) *потока [41; 42].*

В теории интегрируемых систем важным является понятие римановой поверхности. Предположим, что исходная система (1.36) может быть записана в симметричной консервативной форме:

$$u_{it} = \partial_x \varphi(u_1, \ldots, u_n; u_i), \quad i,j = 1, \ldots, n, \tag{1.42}$$

где функция $\varphi(u_1, \ldots, u_n; p)$ является симметричной относительно перестановки индексов первых n переменных и нелинейной по p [90]. Далее введем матрицу $\mathcal{A} = \{a_{ij}(u; p)\}$, элементы которой определяются следующим образом

$$a_{ij}(u;p) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\Big|_{p=u_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\Big|_{p=u_j},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Определение 1.6 *Функция $\lambda = \lambda(u_1,\ldots,u_n;p)$, определяемая из системы n уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u;p)\frac{\partial \lambda}{\partial u_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0, \quad i = 1,\ldots,n$$

называется уравнением римановой поверхности.

Деформация римановой поверхности, т. е. эволюция относительно независимых переменных x и t, определяется уравнением Гиббонса [91]

$$\lambda_t - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial p}(p_t - \partial_x \varphi(u;p)). \tag{1.43}$$

Отсюда легко видеть, что если рассматривать λ, как независящий от x и t параметр (который в общем случае является комплексным), то уравнение (1.43) сводится к производящему уравнению законов сохранения

$$p_t = \partial_x \varphi(u;p),$$

где $p = p(x,t;\lambda)$.

Определим n решений $r_i = \lambda(u;p_i)$ (где $i = 1,\ldots,n$) уравнения $\partial\lambda/\partial p \equiv 0$. Эти n значений уравнения римановой поверхности определяют систему гидродинамического типа

$$r_{it} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\Big|_{p=p_i} \right) r_{ix}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

которая есть ничто иное как (1.37). Значения $p = p_i$ выражаются через r_k. Таким образом, если известно уравнение римановой поверхности, то, найдя ее точки ветвления, можно определить инварианты Римана.

Предположим, что система (1.42) является полугамильтоновой, тогда она обладает n бесконечными сериями законов сохранения

$$p_t^{(k)} = \partial_x \varphi(u; p^{(k)}), \quad p^{(k)} = u^k + \lambda P_1^{(k)}(u) + \lambda^2 P_2^{(k)}(u) + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, уравнение римановой поверхности помимо инвариантов Римана дает еще дополнительную информацию о структуре множества законов сохранения.

Важно отметить, что поиск уравнения римановой поверхности равно как и инвариантов Римана сводится к решению линейных уравнений в частных производных, что не всегда возможно. В этом случае можно пользоваться критерием диагонализируемости матрицы $V(u)$ системы (1.36) (см. [40]). Прежде чем его сформулировать введем два определения:

Определение 1.7 *Тензором Нинхейса матрицы* $V(u) = \{v_{ij}(u)\}$ *называется тензор, элементы которого определяются следующим образом*

$$\mathcal{N}_{jk}^i = \sum_p \left(v_{pj} \frac{\partial v_{ik}}{\partial u_p} - v_{pk} \frac{\partial v_{ij}}{\partial u_p} - v_{ip} \left(\frac{\partial v_{pk}}{\partial u_j} - \frac{\partial v_{pj}}{\partial u_k} \right) \right) \tag{1.44}$$

Определение 1.8 *Тензором Хаантьеса матрицы* $V(u) = \{v_{ij}(u)\}$ *называется тензор, элементы которого определяются следующим образом*

$$\mathcal{H}_{jk}^i = \sum_p \sum_r \Big(\mathcal{N}_{pr}^i v_{pj} v_{rk} - \mathcal{N}_{jr}^p v_{ip} v_{rk} - \mathcal{N}_{rk}^p v_{ip} v_{rj} + \mathcal{N}_{jk}^p v_{ir} v_{rp} \Big) \tag{1.45}$$

Теорема 1.7 (критерий диагонализируемости) *Система гидродинамического типа* (1.36)*, матрица* $V(u)$ *которой имеет различные собственные значения, приводится к диагональной форме тогда и только тогда, когда все элементы тензора Хаантьеса* (1.45) *равны нулю.*

1.5 Трехмерные интегрируемые уравнения и системы

В окончательном виде определение интегрируемости трехмерных квазилинейных систем уравнений в частных производных дано в [50], а именно:

Определение 1.9 *Гиперболическая система уравнений*

$$u_t + A(u)u_x + B(u)u_y = 0 \tag{1.46}$$

называется интегрируемой, если она допускает бесконечное (т.е. для любого N) число N-компонентных редукций вида

$$u = u(r_1, \ldots, r_N),$$

где функции r_i удовлетворяют паре коммутирующих диагональных систем

$$r_{it} = \mu_i(r)r_{ix}, \quad r_{iy} = \eta_i(r)r_{ix}, \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{1.47}$$

В теореме 1.6 для обоснования формулы (1.41) формально требуется только равенство (1.40). Тогда формулу (1.41) нетрудно обобщить на пару коммутирующих уравнений (1.47): решение системы (1.47) задается в неявном виде уравнениями

$$\nu_i(r) = x + \mu_i(r)t + \eta_i(r)y, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.48}$$

где ν_i – характеристические скорости общего коммутирующего с (1.47) потока, удовлетворяющие системе линейных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial_k \nu_i}{\nu_k - \nu_i} = \frac{\partial_k \mu_i}{\mu_k - \mu_i} = \frac{\partial_k \eta_i}{\eta_k - \eta_i}, \quad i \neq k. \tag{1.49}$$

Глава 2. Ветвление периодических решений типа бегущих волн слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза

2.1 Постановка задачи

Рассматривается система уравнений

$$u_t + 3uu_x + u_{xxx} = \varepsilon\left(\Phi_u(u,v,\varepsilon)\right)_x,$$
$$v_t + 3vv_x + v_{xxx} = \varepsilon\left(\Phi_v(u,v,\varepsilon)\right)_x.$$

Делая подстановку $u = u(\bar{t})$, $v = v(\bar{t})$ с бегущей независимой переменной $\bar{t} = x - t$ и опуская знак черты, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' = H_u(u,v;\varepsilon), \qquad v'' = H_v(u,v;\varepsilon), \qquad (\cdot)' = d/dt, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \subset \mathscr{R}$ — малый параметр, а H имеет вид

$$H(u,v;\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 - u^3 - v^3\right) + \varepsilon\Phi(u,v;\varepsilon).$$

Предполагается, что функция Φ является аналитической и удовлетворяет условиям

$$\Phi(0,0;\varepsilon) = \Phi_u(0,0;\varepsilon) = \Phi_v(0,0;\varepsilon) = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ система (2.1) распадается на два стационарных уравнения КдФ и имеет решение в виде кноидальных волн, которые сдвинуты по фазе[1]

$$u_0(t) = \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\, cn^2(rt;m), \quad v_0(t;\nu) = u_0(t+\nu), \quad \nu \in \mathscr{R}, \tag{2.2}$$

[1] В общем случае решение v_0 второго уравнения не обязано иметь вид $v_0 = u_0(t+\nu)$, однако, мы ограничиваемся именно этим случаем.

где cn — эллиптическая функция Якоби с параметрами r и m, которые определены по формулам

$$r = \frac{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}{2}, \quad m^2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1},$$

а числа $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ являются простыми корнями кубического полинома $-u^3 + u^2 + 2h = 0$ (возникающего при однократном интегрировании распавшейся системы (2.1)) с фиксированной константой интегрирования h. Для дальнейших рассуждений удобно ввести новые параметры $\delta = \alpha_3 - \alpha_2$ и $\lambda = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда в формулах (2.2) получаем

$$r = \frac{\sqrt{\delta + \lambda}}{2}, \quad m^2 = \frac{\delta}{\delta + \lambda}.$$

Отметим, что параметр δ имеет смысл амплитуды волны и пока считается фиксированным. Благодаря инвариантности исходной системы (2.1) относительно переносов по времени фазовый сдвиг ν является произвольным для системы в главном порядке по ε. Наша задача заключается в поиске значения фазового параметра ν, которое обеспечивает ответвление решений при возмущении по ε. Будем искать $T(\varepsilon,\delta)$-периодическое решение $w = (u,v)$ в виде

$$w(t;\omega,\nu,\delta,\varepsilon) = w_0(t;\nu,\delta) + \varepsilon w_1(t;\omega,\nu,\delta,\varepsilon), \tag{2.3}$$

где $w_0 = (u_0, v_0)$.

Заменой независимой переменной $\tau = \omega(\varepsilon,\delta)t$, где частота $\omega(\varepsilon,\delta)$ определяется формулой $\omega(\varepsilon,\delta) = T_0(\delta)/T(\varepsilon,\delta)$, задача сводится к поиску $T_0(\delta)$-периодических решений с периодом $T_0(\delta) = T(0,\delta)$ операторного уравнения вида (1.7) для возмущения $w_1 = (u_1, v_1)$:

$$\mathbb{A}w_0 + \varepsilon\mathbb{A}w_1 = \frac{3}{2}w_0^2 + \varepsilon\mathbb{R}(w_1;\delta,\varepsilon,\omega,\nu), \quad w_0^2 = (u_0^2,v_0^2) \tag{2.4}$$

с линейной частью

$$\mathbb{A}w_1 = \big(u_1'' + (3u_0 - 1)u_1, v_1'' + (3v_0 - 1)v_1\big), \quad (\cdot)' = d/d\tau. \tag{2.5}$$

Здесь частота $\omega(\varepsilon,\delta)$ ищется аналитической по параметрам δ и ε, причем $\omega(0,\delta) = 1$. Компоненты нелинейного оператора $\mathbb{R} = \big(R_1,R_2\big)$ определены следующим образом:

$$R_1(u_1,v_1;\delta,\varepsilon,\omega,\nu) = \tag{2.6}$$
$$\varepsilon^{-1}\big(1-\omega^2\big)\big(u_0'' + \varepsilon u_1''\big) - \frac{3}{2}\varepsilon u_1^2 + \Phi_u(u_0+\varepsilon u_1, v_0+\varepsilon v_1;\varepsilon),$$
$$R_2(u_1,v_1;\delta,\varepsilon,\omega,\nu) = \tag{2.7}$$
$$\varepsilon^{-1}\big(1-\omega^2\big)\big(v_0'' + \varepsilon\, v_1''\big) - \frac{3}{2}\varepsilon v_1^2 + \Phi_v(u_0+\varepsilon u_1, v_0+\varepsilon v_1;\varepsilon).$$

Определим функциональные классы следующим образом. Для целого числа $k \geq 0$ обозначим через $\mathscr{H}^k$ пространство Соболева $\mathscr{W}_2^k[0,T_0(\delta)]$ вещественных $T_0(\delta)$-периодических функций $u(\tau)$ с нормой

$$\big\|u\big\|_k^2 = \big\|u\big\|^2_{\mathscr{L}_2[0,T_0]} + \big\|u'\big\|^2_{\mathscr{L}_2[0,T_0]} + \ldots + \big\|u^{(k)}\big\|^2_{\mathscr{L}_2[0,T_0]}.$$

Всюду далее будем предполагать, что число $k \geq 1$, так как в этом случае норма обладает свойством мультипликативности (см. [92–94]), что позволяет оценивать нелинейные члены. Для пар $w = (u,v)$ будем использовать пространства

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{H}^{k+2} \times \mathscr{H}^{k+2}, \quad \mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^{k} \times \mathscr{H}^{k},$$

норма в которых задается суммой норм скалярных функций u и v в соответствующих пространствах.

Заметим, что пространство решений уравнения $\mathbb{A}w = 0$ является линейной оболочкой следующих векторов:

$$e_1 = (u_0',0), \quad e_2 = (0,v_0'), \quad e_3 = (u_*,0), \quad e_4 = (0,v_*), \tag{2.8}$$

где u_0 и v_0 — решения невозмущенной системы, а u_*, v_* определяются по формуле Лиувилля

$$u_*(\tau) = u_0'(\tau) \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \frac{ds}{u_0'^2(s)}, \qquad v_* = u_*(\tau+\nu), \tag{2.9}$$

где τ_* выбирается так, чтобы $u_0'(\tau_*) \neq 0$. Здесь векторы e_3 и e_4 в общем случае не являются периодическими функциями, а значит ядро линейного оператора $\mathbb{A}$ двумерное при конечных δ. Однако, при $\delta = 0$ оператор $\mathbb{A}$ принимает вид

$$\mathbb{A}w = (u'' + u,\, v'' + v),$$

и размерность его ядра увеличивается вдвое. Такое скачкообразное изменение размерности свидетельствует о неравномерности предельного перехода по параметру δ. Поэтому мы будем рассматривать случаи $\delta = O(1)$ и $\delta \to 0$ по отдельности в рамках применения конструкции Ляпунова – Шмидта.

2.2 Ветвление решений типа кноидальных волн

При изучении бифуркации данного типа волн амплитуда δ является конечной величиной, поэтому в последующих выкладках этот параметр не будет играть особой роли и его можно опустить. Неизвестный период $T(\varepsilon)$ ищется в форме

$$T(\varepsilon) = \frac{2K(m)}{r\omega(\varepsilon)},$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и выполняется равенство $\omega(0) = 1$ (см. сразу после формулы (2.5)).

Зафиксируем окрестность $\mathscr{U}$ точки $w_0 = (u_0,v_0)$ в пространстве $\mathscr{E}_0$ (напомним, что параметр δ в определении функциональных классов $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{F}_0$ считается фиксированным). Заметим, что в силу свойств эллиптических функций Якоби функция u_0 является аналитической по τ, так что заведомо $u_0 \in \mathscr{H}^{k+2}$. Тогда нелинейный оператор $\mathbb{R} : \mathscr{U} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \times \mathscr{R}^2 \to$

$\mathscr{F}_0$ является аналитическим, и для него в силу мультипликативности используемой нормы верна оценка

$$\begin{aligned}\big\|\mathbb{R}(w_1;\varepsilon,\omega,\nu)\big\|_{\mathscr{F}_0} \le C_\omega\big(|\varepsilon|\big)\Big(C_0+|\varepsilon|\,\big\|w_1\big\|_{\mathscr{E}_0}\Big)&\\ -\frac{3}{2}|\varepsilon|\,\big\|w_1\big\|^2_{\mathscr{E}_0}+C_\Phi\big(\big\|w_1\big\|_{\mathscr{E}_0};|\varepsilon|,C_0\big)&,\end{aligned}$$

где константа $C_0 = C_0(\nu)$ такая, что $\big\|w_0\big\|_{\mathscr{E}_0} \le C_0(\nu)$, а C_ω и C_Φ являются мажорантными аналитическими функциями. Введем линейный интегральный оператор $\mathbb{G}_0$, действующий на произвольную гладкую функцию $g(\tau)$ по формуле

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_\nu g(\tau) = -v_0'(\tau)\int\limits_0^{\tau+\nu} u_*(s)g(s-\nu)\,ds - v_*(\tau)\int\limits_{\tau+\nu}^{T_0} u_0'(s)g(s-\nu)\,ds&\\ +\frac{1}{BT_0}\,v_*(\tau)\int\limits_0^{T_0} u_*(s)g(s-\nu)\,ds,&\end{aligned} \tag{2.10}$$

где функции $u_*(\tau)$ и $v_*(\tau)$ определены в (2.9), а константа B имеет вид:

$$B = \frac{\big(m'^4+m'^2\big)K(m)-\big(1+m^4+m'^4\big)E(m)}{K(m)m'^4}.$$

Здесь $m'^2 = 1-m^2$, а через $K(m)$ и $E(m)$ обозначены полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Верна следующая лемма:

Лемма 2.1 *Уравнение* $\mathbb{A}w = f$ *с оператором* $\mathbb{A}$ *из* (2.5) *и вектор-функцией* $f = \big(f_1,f_2\big)$ *из пространства* $\mathscr{F}_0$ *имеет* T_0*-периодическое решение* $w(\tau) \in \mathscr{E}_0$*, если и только если компоненты вектор-функции* f *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int\limits_0^{T_0} f_1(s)u_0'(s)\,ds = 0, \qquad \int\limits_0^{T_0} f_2(s)v_0'(s;\nu)\,ds = 0. \tag{2.11}$$

Если равенства (2.11) *выполнены, то все* T_0*-периодические решения* $w =$

(u,v) *определяются формулами*

$$u(\tau) = \xi_1 u_0'(\tau) + \mathbb{G}_0 f_1(\tau), \quad v(\tau;c) = \xi_2 v_0'(\tau;\nu) + \mathbb{G}_\nu f_2(\tau), \quad \xi_1,\xi_2 \in \mathscr{R}, \tag{2.12}$$

где $\mathbb{G}_0$ *вычисляется по формуле* (2.10) *при* $\nu = 0$. *При этом верны оценки*

$$\big\|\mathbb{G}_0 f_1\big\|_{k+2} \le C_1 \big\|f_1\big\|_k, \quad \big\|\mathbb{G}_\nu f_2\big\|_{k+2} \le C_2 \big\|f_2\big\|_k.$$

Доказательство. Доказательство леммы сводится к доказательству утверждения для каждого из скалярных уравнений системы $\mathbb{A}w = f$. Рассмотрим уравнение

$$v'' + (3v_0 - 1)v = f_2(\tau) \tag{2.13}$$

и допустим, что оно имеет решение v. Тогда

$$\int_0^{T_0} f_2\, v_0'\, d\tau = \int_0^{T_0} \big(v'' + (3v_0 - 1)v\big) v_0'\, d\tau = \int_0^{T_0} \big(v_0''' + (3v_0 - 1)v_0'\big) v\, d\tau = 0.$$

Таким образом, необходимость условия ортогональности доказана.

Проверим достаточность. Пусть выполнены условия (2.11). Уравнение (2.13) имеет периодическое решение $v_0'(\tau) = u_0'(\tau + \nu)$. Второе линейно независимое решение имеет вид (см. (2.9))

$$v_*(\tau) = u_0'(\tau + \nu) \int_{\tau_*}^{\tau+\nu} \frac{ds}{u_0'^2(s)}. \tag{2.14}$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено при помощи метода вариации постоянной. В итоге общее решение неоднородного уравнения (2.13) принимает форму

$$v(\tau) = \xi_2 v_0'(\tau) + \eta_2 v_*(\tau) \\ - v_0'(\tau) \int\limits_0^{\tau+\nu} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu)\, ds - v_*(\tau) \int\limits_{\tau+\nu}^{T_0} u_0'(s) f_2(s-\nu)\, ds.$$

Здесь константа η_2 неизвестна и подлежит определению. Условие периодичности требует выполнения равенства $v(\tau + T_0) - v(\tau) = 0$, которое эквивалентно следующему соотношению:

$$\eta_2 \Big\{ v_*(\tau + T_0) - v_*(\tau) \Big\} = \Big\{ v_*(\tau+T_0) - v_*(\tau) \Big\} \int\limits_{\tau+\nu+T_0}^{T_0} u_0'(s) f_2(s-\nu) ds \\ + v_0'(\tau) \left\{ \int\limits_0^{\tau+\nu+T_0} - \int\limits_0^{\tau+\nu} \right\} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds \\ - v_*(\tau) \left\{ \int\limits_{\tau+\nu}^{T_0} - \int\limits_{\tau+\nu+T_0}^{T_0} \right\} u_0'(s) f_2(s-\nu) ds.$$

Далее рассуждения аналогичны проведенным в работе [95]. Так как f_2 является периодической функцией и для нее выполнены условия ортогональности, то верны следующие равенства:

$$\left\{ \int\limits_{\tau+\nu}^{T_0} - \int\limits_{\tau+\nu+T_0}^{T_0} \right\} u_0'(s) f_2(s-\nu) ds = \int\limits_0^{T_0} u_0'(s) f_2(s-\nu) ds = 0,$$

Воспользуемся утверждением теоремы 5.1 в [95], в силу которого выполнено функциональное соотношение

$$v_*(\tau + T_0) - v_*(\tau) = B T_0\, u_0'(\tau + \nu). \tag{2.15}$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\left\{ \int\limits_{0}^{\tau+\nu+T_0} - \int\limits_{0}^{\tau+\nu} \right\} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds = \left\{ \int\limits_{2T_0}^{\tau+\nu+T_0} - \int\limits_{2T_0}^{\tau+\nu} \right\} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds.$$

Первый интеграл в его правой части вычисляется с помощью формулы (2.15) следующим образом:

$$\int\limits_{2T_0}^{\tau+\nu+T_0} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds = \int\limits_{T_0}^{\tau+\nu} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds + BT_0 \int\limits_{T_0}^{\tau+\nu} u_0'(s) f_2(s-\nu) ds.$$

В конечном итоге, подставив все полученные выражения в формулу $v(\tau + T_0) - v(\tau) = 0$, мы получаем явный вид константы η_2:

$$\eta_2 = \frac{1}{BT_0} \int\limits_{0}^{T_0} v_*(s-\nu) f_2(s-\nu) ds.$$

Учитывая, что $u_*(\tau+\nu) = v_*(\tau)$, мы приходим к требуемой формуле (2.10) для оператора Грина $\mathbb{G}_\nu$. Оценка этого интегрального оператора в интересующем нас случае пространства Соболева $\mathscr{H}^{k+2}$ устанавливается следующим образом. Запишем указанный оператор в виде

$$\mathbb{G}_\nu f_2(\tau) = \int\limits_{0}^{T_0} \mathcal{G}_\nu(\tau,s) f_2(s-\nu) ds,$$

где

$$\mathcal{G}_\nu(\tau,s) = \frac{1}{BT_0} v_*(\tau) u_*(s) - \begin{cases} u_0'(\tau) u_*(s), \ s \le \tau+\nu, \\ u_0'(s) u_*(\tau), \ s \ge \tau+\nu. \end{cases}$$

В работах [95; 96] доказана оценка функции Грина в классах непрерывных четных периодических функций, из которой следует неравенство

$$\int\limits_{0}^{T_0} \left| \mathcal{G}_\nu(\tau,s) \right| d\tau \le C_3$$

с константой $C_3 = C_3(T_0;\kappa)$, откуда сразу получаем

$$\big\|\mathbb{G}_\nu f_2\big\|_{\mathscr{L}_2[0,T_0]} \le C_4 \big\|f_1\big\|_{\mathscr{L}_2[0,T_0]}.$$

Аналогично получается оценка нормы первой производной $\big(\mathbb{G}_\nu f_2\big)'(\tau)$ в $\mathscr{L}_2[0,T_0]$, а вторая производная решения $\mathbb{G}_\nu f_2(\tau)$ оценивается в силу уравнения (2.13). Индукция по k дает искомую оценку в утверждении леммы 2.1. $\square$

Отметим, что в случае симметричных волн собственная функция $u_0'(\tau)$ является нечетной, поэтому соответствующее условие ортогональности из (2.11) выполняется автоматически для четных правых частей. Сдвиг фазы в главном члене асимптотики по ε приводит к потере симметрии волны, поэтому указанные условия разрешимости здесь являются существенными.

Согласно лемме 2.1, линейный оператор $\mathbb{A} : \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0$ является фредгольмовым и имеет двумерное ядро, порожденное элементами e_1 и e_2. Следуя схеме Ляпунова – Шмидта, отыскание малых решений $w_1 = (u_1,v_1)$ уравнения (2.4) в виде $w_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma$ эквивалентно решению конечномерной системы уравнений разветвления

$$\mathbb{QR}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma; \omega,\nu,\varepsilon) = 0. \tag{2.16}$$

Здесь отображение $\sigma = \sigma(\tau;\xi_1,\xi_2,\omega,\nu,\varepsilon)$ определяется из первого уравнения (1.10) с оператором $\widetilde{\mathbb{A}}^{-1}$, действующим по формуле (2.10), а проектор $\mathbb{Q}$ дается выражением

$$\mathbb{Q}w(\tau) = \frac{1}{||e_1||^2_{\mathscr{F}_0}} \left(\int\limits_0^{T_0} w(s)\cdot e_1 ds \right) e_1 + \frac{1}{||e_2||^2_{\mathscr{F}_0}} \left(\int\limits_0^{T_0} w(s)\cdot e_2 ds \right) e_2$$

с вектор-функцией $w = (u,v)$. Ввиду неавтономности линейного оператора (2.5) указанное ядро не инвариантно относительно группы переносов $T_g w = w(\tau + g)$, $w = (u,v)$. Однако, инвариантным является потенциал исходной системы (2.1)

$$l(w;\varepsilon) = \int\limits_0^{T(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2}\, u'^2(s) + \frac{1}{2}\, v'^2(s) + H(u(s),v(s);\varepsilon) \right\} ds.$$

В этой ситуации в силу леммы из работы [31] верно тождество

$$\langle \nabla l(w;\varepsilon), Xw \rangle_\varepsilon = 0,$$

где $\langle \cdot,\cdot \rangle_\varepsilon$ — скалярное произведение в пространстве $\mathscr{L}_2[0,T(\varepsilon)] \times \mathscr{L}_2[0,T(\varepsilon)]$, оператор ∇l есть производная Фреше гладкого функционала l, а $X = \partial_\tau$ — инфинитезимальный оператор группы сдвигов по времени. Согласно основному определению, введенному в работах [29;97], оператор X является косимметрией для оператора ∇l. В этом случае имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} 0 = \langle \nabla l(w;\varepsilon), Xw \rangle_\varepsilon = \langle \mathbb{A} w_1 - \mathbb{R}(w_1;\omega,\nu,\varepsilon), Xw \rangle_0 \\ = -\langle \mathbb{QR}(w_1;\omega,\nu,\varepsilon), Xw \rangle_0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $w = w_0 + \varepsilon w_1$, а $w_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma(\xi_1,\xi_2,\omega,\nu,\varepsilon)$. Это значит, что система уравнений разветвления наследует свойство косимметрии. Наличие косимметрии обеспечивает ответвление параметрических семейств решений. В общем случае известно [31], [98] что если потенциальный оператор имеет лагранжиан l, инвариантный относительно действия непрерывной группы Ли, тогда косимметриями являются инфинитезимальные операторы соответствующей алгебры Ли, факторизованной по стационарной подгруппе невозмущенного решения w_0.

Таким образом, по теореме о редукции, доказанной в [31], двумерная система уравнений разветвления для исходных уравнений (2.1) сводится к одному скалярному уравнению

$$\int\limits_0^{T_0} \left\{ \varepsilon^{-1}\big(1-\omega^2\big)\big(u_0'' + \varepsilon u_1''\big) - \frac{3}{2}\,\varepsilon u_1^2 + \Phi_u(u_0 + \varepsilon u_1, v_0 + \varepsilon v_1, \varepsilon) \right\} u_0'(\tau)\, d\tau = 0. \tag{2.18}$$

В главном порядке при $\varepsilon = 0$ данное уравнение записывается в виде

$$\Psi(\nu) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{T_0} \Phi_u(u_0(\tau),u_0(\tau+\nu),0)\, u_0'(\tau) d\tau = 0, \tag{2.19}$$

где функция $\Psi(\nu)$ здесь является функцией Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова. Как видно, наличие корня у функции $\Psi(\nu)$ является необходимым условием существования решения вида (2.3). Пусть указанное условие выполнено. Тогда неявное отображение, определяющее зависимость $(\xi_1,\xi_2;\varepsilon,\omega,\nu) \to (u_1,v_1)$, в главном порядке при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$u_1 = \xi_1 u_0' + \mathbb{G}_0 R_1^0, \qquad u_1 = \xi_2 v_0' + \mathbb{G}_c R_2^0, \tag{2.20}$$

где R_1^0 и R_2^0 — компоненты (2.6) нелинейного оператора $\mathbb{R}$, вычисленные в пределе при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, с учетом формул (2.20) уравнение разветвления (2.18) принимает окончательную форму

$$\Psi'(\nu)(\xi_1 - \xi_2) + \Gamma(\omega,\nu) + \varepsilon\Pi(\xi_1,\xi_2;\omega,\nu,\varepsilon) = 0. \tag{2.21}$$

Здесь явный вид гладких функций Γ и Π не существенен для анализа. Ясно теперь, что при $\Psi'(\nu) \neq 0$ уравнение (2.21) единственным образом определяет параметр ξ_2 как функцию параметров ξ_1, ω, ν и ε. При этом параметры ξ_1 и ω являются свободными в ответвляющейся орбите решений. В конечном итоге мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.1 *Если фазовый параметр ν в формуле* (2.2) *является простым корнем функции Ψ из* (2.19)*, то при достаточно малых ε в классе $\mathscr{E}_0$ существует T_0-периодическое решение $w_1(\tau)$ операторного уравнения* (2.4)*.*

Переход обратно к переменной t влечет существование гладкого $T(\varepsilon)$-периодического решения вида $w_0 + \varepsilon w_1$ исходной системы (2.1).

Отметим, что для решений типа уединенной волны аналогичный результат был получен ранее в работах [31], [19] по той же схеме редукции с помощью косимметрии. Кроме того, в работе [19] показано, что устойчивость ответвляющихся орбит решений зависит от знака производной $\Psi'(\nu)$.

2.3 Гармонические волны малой амплитуды

Как было отмечено в параграфе 2.1, в пределе при $\delta = 0$ линейный неавтономный оператор $\mathbb{A}$ меняет свою структуру, и его ядро становится четырехмерным. Кроме того, при $\delta = 0$ подпространство $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$ оказывается инвариантным относительно представления группы сдвигов по времени, допускаемой исходной системой (2.1). В этом случае схема ветвления претерпевает заметные изменения.

2.3.1 Асимптотика невозмущенного решения

Обратимся к решению (2.2) исходной невозмущенной системы (2.1). По теореме Виета константы α_i удовлетворяют системе

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2h.$$

Тогда, используя формулы

$$r = \frac{\sqrt{\delta+\lambda}}{2}, \quad m^2 = \frac{\delta}{\delta+\lambda}$$

и считая δ малым параметром, из формул Виета получаем

$$\lambda = -\frac{1}{2}\delta \pm \left(1 - \frac{3}{8}\delta^2 - \frac{9}{128}\delta^4\right) + \dots,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\delta \pm \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\delta^2 - \frac{3}{128}\delta^4\right) + \dots$$

В указанных формулах следует выбирать знак + поскольку предельные волны являются гармоническими пакетами. В итоге формулы (2.2) принимают вид

$$u_0(t;\delta) = \frac{2}{3} + \delta\phi(t;\delta), \quad v_0(t;\nu,\delta) = u_0(t+\nu;\delta), \tag{2.22}$$

где функция ϕ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению

$$\phi'' + \phi + \frac{3}{2}\delta\phi^2 = 0. \tag{2.23}$$

Ясно, что это уравнение можно проинтегрировать в явном виде и, как и ранее, получить эллиптическую функцию Якоби. После чего можно было бы воспользоваться ее асимптотическим разложением при $\delta \to 0$. Однако, мы хотим остаться в рамках конструкции Ляпунова – Шмидта, чтобы более полно исследовать алгебраический факт скачкообразного изменения размерности ядра фредгольмова оператора в этом предельном переходе.

При $\delta = 0$ невозмущенное уравнение (2.23) имеет 2π-периодическое решение $\phi_0 = \varrho\cos(t + \nu_*)$. Решение возмущенного уравнения с периодом $T_0(\delta) = 2\pi/\mu(\delta)$, где $\mu(0) = 1$, будем искать в виде $\phi = \phi_0 + \delta\phi_1$. Вводя новую переменную $y = \mu(\delta)t$, мы переходим к эквивалентной задаче о нахождении 2π-периодических решений уравнения

$$A_0\phi_1 = R_0(\phi_1; \varrho,\nu_*,\mu_*,\delta), \quad \mu_* = \delta^{-1}(1 - \mu^2). \tag{2.24}$$

Здесь

$$A_0\phi_1 = \phi_1'' + \phi_1, \quad R_0 = \mu_*(\phi_0'' + \delta\phi_1'') - \frac{3}{2}(\phi_0 + \delta\phi_1)^2, \quad (\,\cdot\,)' = d/dy. \tag{2.25}$$

В качестве функциональных классов выбираются пространства Соболева вещественных 2π-периодических функций $\mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ с $k \geq 1$. Нелинейный оператор $R_0 : \mathscr{U}_0 \times \mathscr{R}^3 \times (-\delta_0,\delta_0) \to \mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ является аналитическим с оценкой

$$\begin{aligned}\big\|R_0(\phi_1; \varrho,\nu_*,\mu_*,\delta)\big\|_{k,0,0} \leq \\ C_{\mu_*}\big(|\delta|\big)\Big(C_{\phi_0} + |\delta|\,\big\|\phi_1\big\|_{k+2,0,0}\Big) - \frac{3}{2}\Big(C_{\phi_0} + |\delta|\,\big\|\phi_1\big\|_{k+2,0,0}\Big)^2,\end{aligned}$$

где $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{W}_2^{k+2}[0,2\pi]$ — окрестность точки ϕ_0, C_{μ_*} является мажорантной функцией, а константа $C_{\phi_0} = C_{\phi_0}(\varrho,\nu_*)$ такая, что $\big\|\phi_0\big\|_{k+2,0,0} \leq C_{\phi_0}(\varrho,\nu_*)$. Имеет место стандартная

Лемма 2.2 *Уравнение $A_0\phi = f_1$ с оператором A_0 из (2.25) и функцией $f_1(y)$ из пространства $\mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ имеет 2π-периодическое решение $\phi(y) \in \mathscr{W}_2^{k+2}[0,2\pi]$, если и только если функция f_1 удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_0^{T_0} f_1(s)\cos s\,ds = 0, \qquad \int\limits_0^{T_0} f_1(s)\sin s\,ds = 0. \tag{2.26}$$

Если равенства (2.26) выполнены, то все 2π-периодические решения ϕ определяются выражением

$$\phi = \kappa_1\cos y + \kappa_2\sin y + \mathcal{G}_0 f_1(y), \quad \xi_1,\xi_2 \in \mathscr{R}, \tag{2.27}$$

где оператор $\mathcal{G}_0$ действует по формуле

$$\mathcal{G}_0 f_1(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} s\sin{(y-s)}f_1(s)\,ds + \int\limits_0^{y}\sin{(y-s)}f_1(s)\,ds. \tag{2.28}$$

При этом верна оценка $\|\mathcal{G}_0 f_1\|_{k+2,0,0} \le C_5\|f_1\|_{k,0,0}$ с некоторой константой C_5.

Таким образом, линейный оператор $A_0 : \mathscr{W}_2^{k+2}[0,2\pi] \to \mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ является фредгольмовым с двумерным ядром $\operatorname{Ker} A_0 = \{\cos y, \sin y\}$. Тогда согласно схеме Ляпунова – Шмидта поиск решения уравнения (2.24) в виде $\phi_1 = \kappa_1\cos y + \kappa_2\sin y + \sigma_0$ с коэффициентами $\kappa_1,\kappa_2 \in \mathscr{R}$ сводится к двумерной системе уравнений разветвления

$$QR_0(\kappa_1\cos y + \kappa_2\sin y + \sigma_0; \varrho,\nu_*,\mu_*,\delta) = 0, \tag{2.29}$$

где проектор Q действует по формуле

$$Q\phi(y) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\phi(s)\cos s\,ds\right)\cos y + \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\phi(s)\sin s\,ds\right)\sin y,$$

а нелинейное отображение σ_0 определяется из неявного уравнения

$$\sigma_0 = \widetilde{A}_0^{-1}(I - Q)R_0(\kappa_1 \cos y + \kappa_2 \sin y + \sigma_0; \varrho,\nu_*,\mu_*,\delta)$$

с оператором $\widetilde{A}_0^{-1}$, действующим по формуле (2.28).

В данной ситуации схема редукции системы уравнений разветвления опирается на свойство инвариантности ядра оператора A_0. А именно, исходное уравнение (2.23) является автономным, а значит мы можем положить фазовый сдвиг $\nu_* = 0$ в главном порядке по δ. Кроме того, линейный оператор A_0 коммутирует с представлением группы $T_g\phi(y) = \phi(y + g)$. Таким образом, указанное представление T_g индуцирует представление компактной группы Ли $SO(2)$, которое действует 1-стационарно в пространстве параметров $\kappa = (\kappa_1,\kappa_2) \in \mathscr{R}^2$ в том смысле, что любой вектор плоскости $\mathscr{R}^2$ можно повернуть так, чтобы он оказался строго на одной из осей. Наконец, в уравнении (2.24) нелинейные оператор R_0 имеет вид $R_0(\phi_1; \varrho,\mu_*,\delta) = \hat{R}_0(\phi_0 + \delta\phi_1; \varrho,\mu_*,\delta)$, причем оператор $\hat{R}_0$ коммутирует с T_g. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой о редукции [24], согласно которой все малые решения уравнения $A_0\phi_1 = \hat{R}_0(\phi_0 + \delta\phi_1; \varrho,\mu_*,\delta)$ можно представить в виде орбиты

$$\phi_1(y) = T_g\Big\{|\kappa| \cos y + \sigma_0(y; |\kappa|,\varrho,\mu_*,\delta)\Big\} \tag{2.30}$$

с произвольным $g \in [0,2\pi]$. В качестве представителя этой орбиты без ограничения общности можно взять элемент с $g = 0$. Тогда система уравнений разветвления приводится к виду

$$Q\hat{R}_0\big(\varrho \cos y + \delta(|\kappa| \cos y + \sigma_0(y; |\kappa|,\varrho,\mu_*,\delta)); \varrho,\mu_*,\delta\big) = 0. \tag{2.31}$$

Заметим далее, что оператор $\hat{R}_0$ является также инвариантным относительно группы растяжений:

$$\begin{aligned} L_a\hat{R}_0\big(\varrho \cos y + \delta(|\kappa| \cos y + \sigma_0); \varrho,\mu_*,\delta\big) &= L_aR_0\big(|\kappa| \cos y + \sigma_0; \varrho,\mu_*,\delta\big) \\ &= R_0\big(L_a(|\kappa| \cos y + \sigma_0); L_{a/2}\varrho,L_{a/2}\mu_*,L_{-a/2}\delta\big), \end{aligned}$$

где $L_a\varphi = e^a\varphi$. Инвариантами данной группы являются

$$y = y, \quad \gamma = \delta\mu_*, \quad \varrho_* = \delta\varrho, \quad \kappa_* = \delta^2|\kappa|, \quad \hat{\sigma}_0 = \sigma_0(\varrho + \delta|\kappa|)^{-2}. \tag{2.32}$$

Отсюда следует, что отображение σ_0 может быть представлено в инвариантном виде $\sigma_0 = (\varrho + \delta|\kappa|)^2\hat{\sigma}_0$, где $\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_0(y;\gamma,\varkappa)$ с параметром $\varkappa = \varrho_* + \kappa_*$. При этом функция $\hat{\sigma}_0$ должна удовлетворять фактор-уравнению

$$\hat{\sigma}_0 = \widetilde{A}_0^{-1}(I - Q)\Big\langle \gamma_*(-\cos y + \varkappa\hat{\sigma}_0'') - \frac{3}{2}(\cos y + \varkappa\hat{\sigma}_0)^2 \Big\rangle, \quad \gamma_* = \gamma\varkappa^{-1},$$

которое не меняется при замене $y \to -y$, что указывает на четность функции $\hat{\sigma}_0$. Таким образом, переписывая систему (2.31) в терминах инвариантов (2.32), получаем, что одно из уравнений удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

$$\gamma_* - \frac{15}{8}\varkappa + \frac{19}{32}\gamma_*\varkappa^2 - \frac{1755}{512}\varkappa^3 + \ldots = 0.$$

Тогда по теореме о неявных отображениях имеем $\gamma_* = \gamma_*(\varkappa)$. В итоге принимая во внимание формулу (2.24) для частоты $\mu = \mu(\varkappa)$, окончательно получаем выражение для решения u_0

$$u_0(t;\varkappa) = \frac{2}{3} + \varkappa\cos(\mu t) + \varkappa^2\left\{\frac{1}{4}\cos(2\mu t) - \frac{3}{4}\right\} + \ldots, \tag{2.33}$$

где параметр $\varkappa = \delta\varrho + \delta^2|\kappa|$ является инвариантом группы растяжений. Ясно, что решение v_0 будет определяться по аналогичной формуле (2.33) с фазовым сдвигом c, который является искомым параметром.

2.3.2 Схема ветвления для возмущенной системы

Обратимся теперь к исходным уравнениям (2.1). Сделаем замену $\tau = \Omega t$, где частота $\Omega(\varkappa,\varepsilon)$ является аналитической функцией, причем $\Omega(\varkappa,0) = \mu(\varkappa)$.

При $\varepsilon = 0$ имеем систему

$$\mu^2 u_0'' - u_0 + \frac{3}{2}u_0^2 = 0, \quad \mu^2 v_0'' - v_0 + \frac{3}{2}v_0^2 = 0,$$

решение которой при $\varkappa \to 0$ дается формулами (см. (2.22))

$$u_0(\tau;\varkappa) = \frac{2}{3} + \varkappa\phi_*(\tau;\varkappa), \quad v_0(\tau;\varkappa,c) = \frac{2}{3} + \varkappa\psi_*(\tau;\varkappa,\nu), \tag{2.34}$$

где $\psi_* = \phi_*(\tau+\nu)$. Далее переписываем (2.1) в эквивалентном операторном виде, выделив линейную часть на решении w_0 при $\varkappa = \varepsilon = 0$:

$$\mathbb{A}_0 w = \hat{\mathbb{R}}(w;\varepsilon,\varkappa,\Omega,\nu). \tag{2.35}$$

Здесь линейный оператор имеет вид $\mathbb{A}_0 = (A_0,A_0)$ с A_0 из (2.25), а нелинейный оператор $\hat{\mathbb{R}}$ записывается в форме

$$\hat{\mathbb{R}}(w;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu) = (1-\Omega^2)w'' + 2w - \frac{3}{2}w^2 + \varepsilon\nabla_w\Phi(w;\varepsilon), \tag{2.36}$$

где

$$w^2 = (u^2,v^2), \quad \nabla_w = (\partial_u,\partial_v).$$

Ищем решение в виде (см. (2.3))

$$w = \frac{2}{3} + \varkappa\theta_* + \varepsilon w_1, \quad \theta_* = (\phi_*,\psi_*), \quad w_1 = (u_1,v_1). \tag{2.37}$$

Тогда операторное уравнение (2.4) для w_1 принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0 w_1 &= \mathbb{R}(w_1;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu) \\ &\stackrel{def}{=} -\frac{2}{3} - \varkappa\varepsilon^{-1}\mathbb{A}_0\theta_* + \varepsilon^{-1}\hat{\mathbb{R}}\Big(\frac{2}{3} + \varkappa\theta_* + \varepsilon w_1;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu\Big).\end{aligned} \tag{2.38}$$

Заметим, что для линейного оператора $\mathbb{A}$ из (2.4) справедливо очевидное равенство $\mathbb{A}w = \mathbb{A}_0 w + 3\varkappa\theta_* w$, где обозначено $\theta_* w = (\phi_* u, \psi_* v)$.

В качестве функциональных классов для целого $k \geq 1$ возьмем пространства

$$\mathscr{E}_{2\pi} = \mathscr{H}_{2\pi}^{k+2} \times \mathscr{H}_{2\pi}^{k+2}, \quad \mathscr{F}_{2\pi} = \mathscr{H}_{2\pi}^{k} \times \mathscr{H}_{2\pi}^{k},$$

где $\mathscr{H}_{2\pi}^{k}$ — пространство Соболева $\mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ вещественных 2π-периодических функций $u(\tau)$ с нормой

$$\left\|u\right\|_{k,2\pi}^2 = \left\|u\right\|_{\mathscr{L}_2[0,2\pi]}^2 + \left\|u'\right\|_{\mathscr{L}_2[0,2\pi]}^2 + \ldots + \left\|u^{(k)}\right\|_{\mathscr{L}_2[0,2\pi]}^2.$$

По лемме 2.2 оператор $\mathbb{A}_0 : \mathscr{E}_{2\pi} \to \mathscr{F}_{2\pi}$ является фредгольмовым с четырехмерным ядром, порожденным векторами

$$e_1 = (\cos\tau,0), \quad e_2 = (\sin\tau,0), \quad e_3 = (0,\cos(\tau+\nu)), \quad e_2 = (0,\sin(\tau+\nu)).$$

Применение метода Ляпунова – Шмидта для $w_1 = \sum\limits_{i=1}^{4} b_i e_i + \sigma$ приводит к системе уравнений разветвления

$$\mathbb{QR}\Big(\sum_{i=1}^{4} b_i e_i + \sigma; \varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu\Big) = 0 \tag{2.39}$$

с проектором $\mathbb{Q}$, действующим по формуле

$$\mathbb{Q}w(\tau) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{2\pi} w(s)\cdot e_i ds\right) e_i.$$

Нелинейное отображение $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$ находится из неявного уравнения

$$\sigma = \widetilde{\mathbb{A}}_0^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbb{R}\Big(\sum_{i=1}^{4} b_i e_i + \sigma; \varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu\Big).$$

Поскольку (2.35) является эквивариантом преобразования T_g группы переносов по времени. Тогда решение w_1 можно представить в виде орбиты

$$w_1 = T_g\Big\{\varrho_1 e_1 + \varrho_2 e_3 + \sigma(\varrho_1,\varrho_2;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu)\Big\}, \quad T_g w(\tau) = w(\tau+g),$$

где g, как и ранее, полагаем равным нулю. Выпишем компоненты оператора $\mathbb{R} = (R_1,R_2)$, вычисленные на указанной орбите решений, в явном виде:

$$\begin{aligned}R_1 =& -\varkappa\Omega_*\phi_*'' - 3\varkappa\phi_*(\varrho_1\cos\tau + \sigma_1)\\&+ (1-\mu^2-\varepsilon\Omega_*)(-\varrho_1\cos\tau + \sigma_1'') - \frac{3}{2}\varepsilon(\varrho_1\cos\tau+\sigma_1)^2\\&+\Phi_u\left(\frac{2}{3}+\varkappa\phi_*+\varepsilon(\varrho_1\cos\tau+\sigma_1), \frac{2}{3}+\varkappa\psi_*+\varepsilon(\varrho_2\cos(\tau+\nu)+\sigma_2),\varepsilon\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_2 =& -\varkappa\Omega_*\psi_*'' - 3\varkappa\psi_*(\varrho_2\cos(\tau+\nu) + \sigma_2)\\&+ (1-\mu^2-\varepsilon\Omega_*)(-\varrho_2\cos(\tau+\nu) + \sigma_2'') - \frac{3}{2}\varepsilon(\varrho_2\cos(\tau+\nu)+\sigma_2)^2\\&+\Phi_v\left(\frac{2}{3}+\varkappa\phi_*+\varepsilon(\varrho_1\cos\tau+\sigma_1), \frac{2}{3}+\varkappa\psi_*+\varepsilon(\varrho_2\cos(\tau+\nu)+\sigma_2),\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Здесь параметр Ω_* определяется соотношением $\Omega^2 = \mu^2 + \varepsilon\Omega_*$. Тогда компоненты отображения $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$ определяются, соответственно, из уравнений

$$\begin{aligned}\sigma_1''+\sigma_1 =& R_1(\tau,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu) - \frac{1}{\pi}\cos\tau\int_0^{2\pi} R_1(s,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu)\,\cos s\,ds\\&-\frac{1}{\pi}\sin\tau\int_0^{2\pi} R_1(s,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu)\,\sin s\,ds,\\ \sigma_2''+\sigma_2 =& R_2(\tau,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu) - \frac{1}{\pi}\cos(\tau+\nu)\int_0^{2\pi} R_2(s,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu)\,\cos(s+\nu)\,ds\\&-\frac{1}{\pi}\sin(\tau+\nu)\int_0^{2\pi} R_2(s,\sigma_1,\sigma_2;\Xi,\nu)\,\sin(s+\nu)\,ds,\end{aligned} \tag{2.41}$$

где обозначено $\Xi = (\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon)$. Согласно формулам (2.24), (2.32), а также (2.33) функции μ, ϕ_* и ψ_* представляются в виде сходящихся рядов

$$\mu(\varkappa) = 1+\sum_{k\ge1}\mu_k\varkappa^{2k},\quad \phi_*(\tau;\varkappa) = \sum_{k\ge0}\phi_k(\tau)\varkappa^k,\quad \psi_*(\tau;\varkappa,\nu) = \sum_{k\ge0}\psi_k(\tau;\nu)\varkappa^k.$$

Аналитические функции σ_1 и σ_2 будем искать в виде

$$\sigma_1 = \sum_{i+j+k+l+m\geq 0} \sigma_{1,ijklm}(\tau,\nu)\varrho_1^i\varrho_2^j\Omega_*^k\varkappa^l\varepsilon^m,$$

$$\sigma_2 = \sum_{i+j+k+l+m\geq 0} \sigma_{2,ijklm}(\tau,\nu)\varrho_1^i\varrho_2^j\Omega_*^k\varkappa^l\varepsilon^m.$$

Тогда из системы (2.41) получаем выражения для коэффициентов $\sigma_{1,ijklm}$ и $\sigma_{2,ijklm}$, где свободные коэффициенты и коэффициенты при линейных членах имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\sigma_{1,00000} = \Phi_u^0 \equiv const, \quad \sigma_{2,00000} = \Phi_v^0 \equiv const,\\ \sigma_{1,10000} = \sigma_{1,01000} = \sigma_{1,00100} = \sigma_{1,00010} = 0, \quad \sigma_{1,00001} = \Sigma_1 \equiv const,\\ \sigma_{2,10000} = \sigma_{2,01000} = \sigma_{2,00100} = \sigma_{2,00010} = 0, \quad \sigma_{2,00001} = \Sigma_2 \equiv const.\end{gathered} \tag{2.42}$$

После того, как определены компоненты $\sigma_1(\Xi)$ и $\sigma_2(\Xi)$ отображения σ, остается разрешить систему уравнений разветвления:

$$\beta_1(\Xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R_1(s,\sigma_1(\Xi),\sigma_2(\Xi);\Xi,\nu)\,\cos s\,ds = 0,$$

$$\beta_2(\Xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R_1(s,\sigma_1(\Xi),\sigma_2(\Xi);\Xi,\nu)\,\sin s\,ds = 0,$$

$$\beta_3(\Xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R_2(s,\sigma_1(\Xi),\sigma_2(\Xi);\Xi,\nu)\,\cos(s+\nu)\,ds = 0,$$

$$\beta_4(\Xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R_2(s,\sigma_1(\Xi),\sigma_2(\Xi);\Xi,\nu)\,\sin(s+\nu)\,ds = 0.$$

Для каждого уравнения данной системы будем использовать аналитическое представление

$$\beta_s(\Xi) = \sum_{i+j+k+l+m\geq 0} \beta_{s,ijklm}(\nu)\varrho_1^i\varrho_2^j\Omega_*^k\varkappa^l\varepsilon^m, \quad s = 1\ldots,4.$$

Заметим, что если в формулах (2.40) положить $\varkappa = \varepsilon = 0$, то компоненты R_1 и R_2 нелинейного оператора $\mathbb{R}$ будут постоянными, а значит система уравнений разветвления удовлетворяется тождественно. Стало быть, имеет место равенство

$$\beta_{s,ijk00}(\nu) \equiv 0, \quad i+j+k \geq 0, \quad s = 1, \ldots ,4.$$

Далее, если в (2.40) положить $\varrho_1 = \varrho_2 = \Omega_* = \varkappa = 0$, то коэффициенты $\sigma_{1,0000m}$ и $\sigma_{2,0000m}$ являются постоянными для всех $m \geq 0$. Отсюда заключаем, что

$$\beta_{s,0000m}(\nu) \equiv 0, \quad m \geq 0, \quad s = 1, \ldots ,4.$$

Учитывая все вышесказанное, система уравнений разветвления выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\beta_1(\Xi) =& \varkappa a_1(\nu) + \varkappa\Omega_* + b_1\varepsilon\varrho_1 + \varepsilon\varrho_2\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varepsilon\varkappa a_2(\nu) \\
&+ \varkappa g_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\[2ex]
\beta_2(\Xi) =& -\sin\nu\left(\varkappa\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varrho_2\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varkappa b_2\right) \\
&+ \varkappa g_2(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_2(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\[2ex]
\beta_3(\Xi) =& \varkappa a_3(\nu) + \varkappa\Omega_* + b_3\varepsilon\varrho_2 + \varepsilon\varrho_1\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varepsilon\varkappa a_4(\nu) \\
&+ \varkappa g_3(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_3(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\[2ex]
\beta_4(\Xi) =& \sin\nu\left(\varkappa\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varrho_1\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varkappa b_4\right) \\
&+ \varkappa g_4(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_4(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Здесь $\Phi^0_{uv} = \Phi_{uv}(2/3,2/3,0)$. Функции g_i и h_i, разложения которых начинаются с квадратичных членов, обозначают остатки соответствующих рядов, коэффициенты b_i являются постоянными, а a_i зависят от фазы ν.

Рассмотрим уравнения $\beta_2 = 0$ и $\beta_4 = 0$. Легко видеть, что если данные уравнения удовлетворены, то выполнено условие $\sin\nu = 0$.

Обратно, если параметр ν является корнем уравнения $\sin\nu = 0$, то компоненты компоненты R_1 и R_2 нелинейного оператора $\mathbb{R}$ являются четными функциями по τ, и тогда уравнения $\beta_2(\Xi) = 0$, $\beta_4(\Xi) = 0$ удовлетворяются тождественно. Далее, за счет косимметрического тождества (2.17) уравнения в системе (2.43) являются линейно зависимыми. Следовательно, мы можем исключить, например, уравнение $\beta_3(\Xi) = 0$. Заметим теперь, что если положить

$$\Omega_* = \Omega_0 - \varepsilon a_2(\nu) + \varepsilon\Omega_{**},$$

то уравнение $\beta_1(\Xi)$ можно расщепить, т. е.

$$\beta_1(\Xi) = \varkappa\Theta_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\varkappa) + \varepsilon\Theta_2(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\Omega_{**},\varkappa,\varepsilon).$$

Отсюда получаем

$$\Theta_1 = a_1(\nu) + \Omega_0 + g_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\varkappa) = 0, \tag{2.44}$$

$$\Theta_2 = b_1\varrho_1 + \varrho_2\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varkappa\Omega_{**} + h_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\Omega_{**},\varkappa,\varepsilon) = 0. \tag{2.45}$$

Таким образом, если $\nu = \pm\pi n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, то уравнения $\beta_2(\Xi) = 0$ и $\beta_4(\Xi) = 0$ удовлетворяются тождественно. Следовательно из (2.44) по теореме о неявной функции можно выразить Ω_0 через параметры ϱ_1, ϱ_2 и $\varkappa$. Наконец, подставляя Ω_0 в (2.45), по теореме о неявной функции определяем ϱ_2 через остальные параметры.

Отметим, что, как и в случае кноидальных волн, параметры ϱ_1 и Ω_{**} остаются свободными, а функция Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова принимает следующий простой вид:

$$\widetilde{\Psi}(\nu) = \sin\nu. \tag{2.46}$$

В итоге мы приходим к утверждению:

Теорема 2.2 *Если фазовый параметр ν в формуле* (2.34) *принимает одно из значений $\nu = \pm\pi n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, то при достаточно малых δ и ε в классе $\mathscr{E}_{2\pi}$ существует гладкое 2π-периодическое решение $w_1(\tau)$*

операторного уравнения (2.38).

Вновь, переходя к исходной переменной t, мы получаем существование гладкого $T(\varepsilon,\delta)$-периодического решения системы (2.1) вида $w = 2/3 + \varkappa(\delta)\theta_* + \varepsilon w_1$. Таким образом, даже в этом вырожденном случае, простые корни функции $\widetilde{\Psi}$ гарантируют существование зацепленных волн. Ясно, что из всех этих корней интерес представляют только корни $\nu = 0$ (синфазная синхронизация мод периодических волн) и $\nu = \pi$ (сдвиг на половину периода).

Интересно заметить, что формальное разложение функции $\Psi(\nu)$ из (2.19) по параметру $\varkappa$ приводит к соотношению

$$\Psi(\nu) = \pi\varkappa^2\Phi^0_{uv}\widetilde{\Psi}(\nu) + O(\varkappa^3).$$

Также необходимо отметить, что в наших рассуждениях предполагалось неравенство $\Phi^0_{uv} \neq 0$. В противном случае следует анализировать разложения уравнений разветвления в более высоких порядках.

Глава 3. Законы сохранения интегрируемых систем уравнений

3.1 Иерархия цепочки Бенни

Цепочка Бенни была впервые получена в работе [43] при изучении системы уравнений, описывающей длинные волны на поверхности идеальной жидкости в поле силы тяжести в приближении “мелкой воды”. В терминах так называемых моментов A_k

$$A_k = \int\limits_0^{h(x,t)} U^k(x,t,y)dy,$$

где $U(x,t,y)$ – горизонтальная компонента скорости, а $h(x,t)$ – высота жидкости, цепочка Бенни имеет вид

$$(A_0)_t = (A_1)_x\,, \quad (A_k)_t = (A_{k+1})_x + kA_{k-1}\,(A_0)_x\,, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{3.1}$$

Также в [43] было показано, что система (3.1) может быть переписана в консервативной форме. Более глубокое изучение цепочки Бенни проведено в работах [44; 45; 91], где была указана компактная конструкция построения законов сохранения. А именно, рассмотрим формальный ряд

$$\lambda(x,t;p) = p + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(x,t)}{p^{k+1}}. \tag{3.2}$$

Полагая $p = p(x,t)$, нетрудно убедиться, что (3.2) удовлетворяет уравнению Гиббонса

$$\lambda_t - p\lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial p}\left\{p_t - \left(\frac{1}{2}p^2 + A_0\right)_x\right\}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.3) независимо. Тогда имеется три случая:

(a) если λ является независимой переменной наряду с переменными x

и t, то из (3.3) получаем уравнение

$$p_t = \left(\frac{1}{2}p^2 + A_0\right)_x, \tag{3.4}$$

которое является производящим уравнением законов сохранения;

(б) если p является независимой переменной наряду с переменными x и t, то из (3.3) получаем уравнение

$$\lambda_t = p\lambda_x - (A_0)_x\lambda_p, \tag{3.5}$$

которое называется кинетическим уравнением Власова;

(в) если в качестве зависимых переменных взять $r_i = \lambda(A_0,A_1,\ldots;p_i)$, где p_i являются корнями уравнения $\partial\lambda/\partial p = 0$, то из (3.3) получаем систему гидродинамического типа, записанную в диагональной форме:

$$r_{it} = p_i\, r_{ix}. \tag{3.6}$$

Таким образом, подставляя ряд (3.2) в уравнение Власова (3.5) получаем цепочку Бенни. Далее, вводя обратный к (3.2) ряд

$$p(x,t;\lambda) = \lambda - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x,t)}{\lambda^{k+1}} \tag{3.7}$$

и подставляя его в (3.4), получаем двумерные законы сохранения цепочки Бенни:

$$(H_0)_t = (H_1)_x\,, \quad (H_k)_t = \left(H_{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{k-1} H_m H_{k-m-1}\right)_x, \tag{3.8}$$

где $k = 1,2,\ldots$. Легко показать, что каждый коэффициент H_k является полиномом от моментов A_k:

$$H_0 = A_0, \quad H_1 = A_1, \quad H_2 = A_0^2 + A_2, \quad H_3 = 3A_0A_1 + A_3, \ldots$$

Для построения полной иерархии цепочки Бенни необходимо уметь строить все коммутирующие с ней цепочки. В работе [44] введен дифференциальный оператор, позволяющий это сделать, а именно, все коммутирующие цепочки задаются формулой

$$\partial_{t^m} A_k = (kA_{k+n-1}\partial_x + n\partial_x A_{k+n-1})\frac{\partial H_{m+1}}{\partial A_n}, \quad k,m,n = 0,1,2,\dots, \tag{3.9}$$

где $t^0 \equiv x$, $t^1 \equiv t$. Консервативная форма записи всех цепочек (3.9) была получена при изучении редукции Захарова в работе [99]:

$$\partial_{\tau(\zeta)} p(\lambda) = \partial_x \ln\left(p(\lambda) - p(\zeta)\right), \tag{3.10}$$

где $p(\lambda)$ – укороченное обозначение ряда (3.7), $p(\zeta)$ определяется также как $p(\lambda)$, но с формальной заменой параметра λ на ζ, наконец, $\partial_{\tau(\zeta)}$ – формальный ряд, который имеет вид

$$\partial_{\tau(\zeta)} = \frac{1}{\zeta}\partial_{t^0} + \frac{1}{\zeta^2}\partial_{t^1} + \frac{1}{\zeta^3}\partial_{t^2} + \dots$$

Действительно, разлагая формулу (3.10) по параметру ζ, получаем производящие уравнения законов сохранения каждой из цепочек (3.9):

$$p_{t^0} = p_x, \quad p_{t^1} = \left(\frac{p^2}{2} + H_0\right)_x, \quad p_{t^2} = \left(\frac{p^3}{3} + H_0\, p + H_1\right)_x,$$

$$p_{t^3} = \left(\frac{p^4}{4} + H_0\, p^2 + H_1\, p + \frac{1}{2}H_0^2 + H_2\right)_x, \dots$$

Таким образом, мы имеем формулу (3.9) для бесконечного набора коммутирующих потоков цепочки Бенни и производящую формулу (3.10) законов сохранения, наличие которых определяет интегрируемость цепочки Бенни.

3.1.1 Трехмерные законы сохранения

Рассмотрим цепочку Бенни, записанную в консервативной форме, вместе с первым коммутирующим потоком:

$$(H_0)_t = (H_1)_x\,, \quad (H_l)_t = \left(H_{l+1} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{l-1} H_m H_{l-m-1}\right)_x\,,$$

$$(H_0)_y = (H_2)_x\,, \quad (H_1)_y = (H_3 - H_0H_1)_x\,, \tag{3.11}$$

$$(H_k)_y = \left(H_{k+2} + H_0H_k - \sum_{m=0}^{k} H_m H_{k-m} + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{k-2} H_{k-m-2}\sum_{s=0}^{m} H_s H_{m-s}\right)_x\,,$$

где $l = 1{,}2,\ldots$, $k = 2{,}3,\ldots$ и $y \equiv t^2$. В работе [73] было показано, что пара (3.11) допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения вида

$$(a_k(H_0,\ldots,H_k))_y + (b_k(H_0,\ldots,H_{k+1}))_t + (c_k(H_0,\ldots,H_{k+1}))_x = 0. \tag{3.12}$$

Здесь a_k, b_k и c_k – полиномы относительно H_i, и $k = 0{,}1,\ldots$. В самом деле, раскрывая производные в (3.12) в явном виде и используя формулы (3.11), получаем операторное уравнение на функции a_k,b_k,c_k, записанное в следующей форме

$$\mathcal{D}_k u_k = 0, \quad \mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} D^k_{1,1} & D^k_{2,1} & D^k_{3,1} \\ D^k_{1,2} & D^k_{2,2} & D^k_{3,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D^k_{1,k+3} & D^k_{2,k+3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -H_0\partial_1 & \partial_0 \\ 0 & \partial_0 & \partial_1 \\ \partial_0 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

где $u_k = (a_k, b_k, c_k)^T$, дифференциальные операторы $D^k_{i,j}$ при $k > 2$ имеют вид

$$D^k_{1,1} = \sum_{s=1}^{k} (H_s - 2F_{s-1})\,\partial_s,\;\; D^k_{2,1} = -\sum_{s=0}^{k} H_s\partial_{s+1},\;\; D^k_{3,r} = \partial_{r-1},\; 1 \le r \le k+2,$$

$$D^k_{1,2} = -H_0\partial_1 - 2\sum_{s=2}^{k} F_{s-2}\partial_s, \quad D^k_{2,q} = \partial_{q-2} - \sum_{s=0}^{k+1-q} H_s\partial_{s+q}, \quad 2 \le q \le k+1,$$

$$D^k_{1,p} = \partial_{p-3} - H_0\partial_{p-1} - 2\sum_{s=0}^{k-p} F_s\partial_{s+m}, \quad 3 \le p \le k, \quad D^k_{1,k+1} = \partial_{k-2} - H_0\partial_k,$$

$$D^k_{1,k+2} = \partial_{k-1}, \quad D^k_{1,k+3} = \partial_k, \quad D^k_{2,k+2} = \partial_k, \quad D^k_{2,k+3} = \partial_{k+1}.$$

Здесь $\partial_i \equiv \partial/\partial H_i$, а F_i — токи законов сохранения (3.8), то есть $\partial_t H_i = \partial_x F_i$ для всех $i = 0,1,\ldots$. При вычислении элементов первых двух столбцов матрицы $\mathcal{D}_k$ для $k \le 2$, будем использовать формулы, в которых отсутствуют индексы p и q соответственно.

Система (3.13) является переопределенной системой квазилинейных уравнений в частных производных. Для того чтобы решить данную систему, необходимо сначала исключить функцию c_k при помощи проверки условий совместности, а затем по аналогии избавиться от функции b_k. В конечном итоге получается система уравнений на третьи производные функции a_k. Данная система находится в инволюции, что проверяется непосредственно для каждого фиксированного k. В итоге получается, что функция a_k является полиномом от H_i. Оставшиеся функции b_k и c_k восстанавливаются в квадратурах.

Пользуясь описанной в [73] процедурой, были выписаны в явном виде первые 10 законов сохранения:

$$a_1 = H_0^2, \qquad b_1 = -2H_0H_1,$$

$$a_2 = H_0H_1, \qquad b_2 = \frac{1}{3}H_0^3 - H_2H_0 - H_1^2,$$

$$a_3 = \frac{1}{6}H_0^3 + \frac{1}{2}H_1^2, \qquad b_3 = -H_1H_2,$$

$$a_4 = H_0H_2 - \frac{1}{6}H_0^3, \qquad b_4 = H_1H_0^2 - H_3H_0 - H_1H_2,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}H_1H_0^2 + H_1H_2, \qquad b_5 = \frac{H_0^4}{6} - H_2^2 - H_1H_3,$$

$$a_6 = \frac{1}{2}H_0H_1^2 + \frac{1}{2}H_2^2, \qquad b_6 = \frac{1}{3}H_1H_0^3 - \frac{H_1^3}{3} - H_2H_3$$

$$a_7 = H_0H_3 - \frac{1}{2}H_0^2H_1, \qquad b_7 = -\frac{H_0^4}{6} + H_2H_0^2 + H_1^2H_0 - H_4H_0 - H_1H_3,$$

$$a_8 = \frac{1}{2}H_2H_0^2 + H_1H_3, \qquad b_8 = \frac{1}{3}H_1H_0^3 + \frac{H_1^3}{3} - H_2H_3 - H_1H_4$$

$$a_9 = \frac{1}{3}H_1^3 + H_0H_2H_1 + H_2H_3, \qquad b_9 = \frac{1}{3}H_2H_0^3 + H_1^2H_0^2 - H_3^2 - H_1^2H_2 - H_2H_4,$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}H_2H_1^2 + \frac{1}{2}H_0H_2^2 + \frac{H_3^2}{2} \qquad b_{10} = \frac{1}{3}H_0H_1^3 - H_2^2H_1 + H_0^2H_2H_1 - H_3H_4$$

$$c_1 = H_1^2 - \frac{2}{3}H_0^3, \qquad c_6 = \frac{H_0^5}{15} - \frac{1}{3}H_2H_0^3 - H_1H_3H_0 + \frac{H_3^2}{2} + \frac{1}{2}H_1^2H_2,$$

$$c_2 = H_1H_2 - H_0^2H_1, \qquad c_7 = \frac{1}{6}H_1H_0^3 - \frac{1}{2}H_3H_0^2 - H_1H_2H_0 - \frac{2H_1^3}{3} + H_1H_4,$$

$$c_3 = \frac{1}{2}H_2^2 - \frac{1}{2}H_0^2H_2, \qquad c_{10} = \frac{H_1^4}{6} + \frac{1}{2}H_0^3H_1^2 - \frac{1}{2}H_0H_2H_1^2 - \frac{1}{2}H_4H_1^2 - H_0^2H_3H_1 + H_2H_3H_1 + \frac{H_2^3}{6} + \frac{H_4^2}{2} - H_0H_2H_4$$

$$c_4 = -\frac{1}{2}H_2H_0^2 - H_1^2H_0 + H_1H_3,$$

$$c_5 = -\frac{1}{6}H_1H_0^3 - \frac{1}{2}H_3H_0^2 - H_1H_2H_0 + \frac{H_1^3}{3} + H_2H_3,$$

$$c_8 = -\frac{H_0^5}{30} + \frac{1}{6}H_2H_0^3 - \frac{1}{2}H_1^2H_0^2 - \frac{1}{2}H_4H_0^2 - H_2^2H_0 + H_2H_4,$$

$$c_9 = \frac{1}{3}H_1H_0^4 - \frac{1}{3}H_3H_0^3 - H_1H_2H_0^2 - H_2H_3H_0 - H_1H_4H_0, + H_1H_2^2 + H_3H_4,$$

Нетрудно заметить, что выписанные законы сохранения могут быть разделены согласно следующему правилу: один закон сохранения вида

$$(a_0(H_0))_y + (b_0(H_0,H_1))_t + (c_0(H_0,H_1))_x = 0,$$

два — вида

$$(a_1(H_0,H_1))_y + (b_1(H_0,H_1,H_2))_t + (c_1(H_0,H_1,H_2))_x = 0,$$

три закона сохранения записываются в форме

$$(a_2(H_0,H_1,H_2))_y + (b_2(H_0,H_1,H_2,H_3))_t + (c_2(H_0,H_1,H_2,H_3))_x = 0,$$

наконец, четыре закона сохранения имеют вид

$$(a_3(H_0,H_1,H_2,H_3))_y + (b_3(H_0,H_1,H_2,H_3,H_4))_t + (c_3(H_0,H_1,H_2,H_3,H_4))_x = 0,$$

Эта ситуация нетипична в сравнении с двумерными законами сохранения (например (3.8)), где имеется только один закон сохранения вида

$$(a_k(H_0,\dots,H_k))_t + (b_k(H_0,\dots,H_k,H_{k+1}))_x = 0.$$

Данное обстоятельство указывает на то, что производящая функция трехмерных законов сохранения (если бы она была известна) не может зависеть только от одного параметра. Следующая теорема показывает, что таких параметра два:

Теорема 3.1 *Производящая функция трехмерных законов сохранения*

$$(a_k(H_0,\dots,H_k))_y + (b_k(H_0,\dots,H_k,H_{k+1}))_t + (c_k(H_0,\dots,H_k,H_{k+1}))_x = 0$$

для первых двух коммутирующих цепочек Бенни (3.11) *зависит от двух произвольных параметров, т.е.*

$$\Big((p(\lambda)-p(\zeta))^3\Big)_y - \Big((p(\lambda)-p(\zeta))^3(p(\lambda)+p(\zeta))\Big)_t \tag{3.14}$$

$$+\left((p(\lambda)-p(\zeta))^3\left(\frac{1}{5}p^2(\lambda)+\frac{3}{5}p(\lambda)p(\zeta)+\frac{1}{5}p^2(\zeta)-H_0\right)\right)_x = 0,$$

где $p(\lambda)$ *определяется рядом* (3.7)*, а производные* p_y *и* p_t *вычисляются по формулам:*

$$p_t = \left(\frac{1}{2}p^2 + H_0\right)_x, \quad p_y = \left(\frac{1}{3}p^3 + H_0 p + H_1\right)_x.$$

Доказательство. Будем искать производящую функцию в следующем виде

$$(a(p,q))_y + (b(p,q,H_0))_t + (c(p,q,H_0))_x = 0,$$

где $p \equiv p(\lambda)$, $q \equiv p(\zeta)$. Тогда все первые производные $c_p \equiv \partial c/\partial p$, $c_q \equiv \partial c/\partial q$ и $c_0 \equiv \partial c/\partial H_0$ можно выразить через первые производные функций a и b, т.е.

$$c_p = -\big(p^2 + H_0\big)a_p - pb_p, \quad c_q = -\big(q^2 + H_0\big)a_q - qb_q,$$
$$c_0 = -qa_q - pa_p - b_q - b_p.$$

Здесь $\big(c_p\big)_q = c_{pq} \equiv \partial^2 c/\partial p\partial q$ и т.д. Проверка условий совместности

$$\big(c_p\big)_q = \big(c_q\big)_p, \quad \big(c_p\big)_0 = \big(c_0\big)_p, \quad \big(c_q\big)_0 = \big(c_0\big)_q$$

приводит к выражениям, в которых вторые производные функции b выражены только через производные функции a:

$$b_{pp} = -2pa_{pp}, \quad b_{pq} = -\big(p+q\big)a_{pq}, \quad b_{qq} = -2qa_{qq},$$
$$b_{0p} = -a_{pq} - a_{pp}, \quad b_{0q} = -a_{qq} - a_{pq}, \quad b_{00} = 0,$$

где $\big(b_{0p}\big)_q = b_{0pq} \equiv \partial^3 b/\partial p\partial q\partial H_0$ и т.д. Снова проверяя условия совместности

$$\big(b_{pp}\big)_q = \big(b_{pq}\big)_p, \quad \big(b_{pp}\big)_0 = \big(b_{p0}\big)_p, \quad \big(b_{pq}\big)_q = \big(b_{qq}\big)_p,$$
$$\big(b_{pq}\big)_0 = \big(b_{p0}\big)_q, \quad \big(b_{p0}\big)_q = \big(b_{q0}\big)_p,$$
$$\big(b_{qq}\big)_0 = \big(b_{q0}\big)_q,$$

получаем систему в инволюции:

$$a_{ppp} = -\frac{a_{pq}}{p-q}, \quad a_{ppq} = \frac{a_{pq}}{p-q}, \quad a_{pqq} = -\frac{a_{pq}}{p-q}, \quad a_{qqq} = \frac{a_{pq}}{p-q}, \qquad (3.15)$$

которая может быть немедленно проинтегрирована

$$da_{pq} = \frac{a_{pq}}{p-q}dp - \frac{a_{pq}}{p-q}dq = a_{pq}d\ln(p-q).$$

Отсюда видно, что $a_{pq} = p - q$ с точностью до постоянного множителя. Тогда система (3.15) приводится к

$$a_{ppp} = -1, \quad a_{ppq} = 1, \quad a_{pqq} = -1, \quad a_{qqq} = 1,$$

решение которой имеет вид $a = -(p-q)^3/6$. Постоянной $-1/6$ можно пренебречь. В итоге получаем ответ $a = (p-q)^3$. Функции b и c восстанавливаются тривиальным образом. □

Описанная конструкция является оптимальной с точки зрения вычислений, поскольку необходимо лишь вычислять коэффициенты разложения. В предыдущем же случае проверка условий совместности требовалась при построении каждого k-го закона сохранения.

3.1.2 Уравнение Хохлова – Заболоцкой

Уравнение Хохлова – Заболоцкой так же известное, как бездисперсионный предел уравнения Кадомцева – Петвиашвили или уравнение Линя – Рейсснера – Цяня [100], имеет вид

$$u_{tt} = (u_y - uu_x)_x. \tag{3.16}$$

В гидродинамических переменных уравнение (3.16) переписывается в виде квазилинейной системы первого порядка

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_y - uu_x \tag{3.17}$$

и допускает три локальных закона сохранения [61]

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_y - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x, \quad (uv)_t = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_y.$$

Помимо этого уравнение Хохлова – Заболоцкой является уравнением Эйлера – Лагранжа с лагранжианом $S = \psi_t^2 - \psi_x\psi_y + \psi_x^3/3$, где $u = \psi_x$ и $v = \psi_t$. В этом случае законов сохранения становится четыре и они имеют вид [101]

$$\begin{aligned}\left(-\psi_t^2-\psi_x\psi_y+\frac{1}{3}\psi_x^3\right)_t+(\psi_t\psi_y-\psi_x^2\psi_t)_x+(\psi_x\psi_t)_y=&0,\\(\psi_y\psi_t)_t+\left(-\frac{1}{2}\psi_y^2+\frac{1}{2}\psi_x^2\psi_y\right)_x+\left(-\frac{1}{2}\psi_t^2-\frac{1}{6}\psi_x^3\right)_y=&0,\\(\psi_x\psi_t)_t+\left(-\frac{1}{2}\psi_t^2+\frac{1}{3}\psi_x^3\right)_x+\left(-\frac{1}{2}\psi_x^2\right)_y=&0,\\(\psi_t)_t+\left(\frac{\psi_x^2}{2}-\psi_y\right)_x=&0.\end{aligned}$$

Следует отметить, что данные законы сохранения не могут быть выражены только через полевые переменные u и v. Вводя новую функцию Ω такую, что $\psi=\Omega_x$, последний закон сохранения интегрируется и мы получаем исходное уравнение (3.16) в терминах функции Ω

$$\Omega_{xy}=\Omega_{tt}+\frac{\Omega_{xx}^2}{2}. \tag{3.18}$$

Оставшиеся три закона сохранения переписываются в соответствии со введенными обозначениями.

Ранее локальные законы сохранения (плотности и токи которых зависят от вторых производных функции Ω) не изучались ни для уравнения (3.18), ни для уравнений более общего типа $F(\Omega_{xx},\Omega_{xt},\Omega_{xy},\Omega_{yt},\Omega_{yy},\Omega_{tt})=0$. Поэтому будем искать законы сохранения уравнения (3.18) прямым способом, т.е. в виде $a_y+b_t+c_x=0$, где a, b, и c являются функциями от $\Omega_{xx},\Omega_{xt},\Omega_{xy},\Omega_{yt},\Omega_{yy}$. Зависимость от Ω_{tt} исключена, поскольку Ω_{tt} выражается из (3.18). Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial\Omega_{xx}}\Omega_{xxy}+\frac{\partial a}{\partial\Omega_{xt}}\Omega_{xty}+\frac{\partial a}{\partial\Omega_{xy}}\Omega_{xyy}+\frac{\partial a}{\partial\Omega_{yt}}\Omega_{yyt}\\&+\frac{\partial a}{\partial\Omega_{yy}}\Omega_{yyy}+\frac{\partial b}{\partial\Omega_{xx}}\Omega_{xxt}+\frac{\partial b}{\partial\Omega_{xt}}\Omega_{xtt}+\frac{\partial b}{\partial\Omega_{xy}}\Omega_{xty}+\frac{\partial b}{\partial\Omega_{yt}}\Omega_{ytt}\\&+\frac{\partial b}{\partial\Omega_{yy}}\Omega_{yyt}+\frac{\partial c}{\partial\Omega_{xx}}\Omega_{xxx}+\frac{\partial c}{\partial\Omega_{xt}}\Omega_{xxt}+\frac{\partial c}{\partial\Omega_{xy}}\Omega_{xxy}+\frac{\partial c}{\partial\Omega_{yt}}\Omega_{xyt}+\frac{\partial c}{\partial\Omega_{yy}}\Omega_{xyy}=0.\end{aligned}$$

Учитывая дифференциальные следствия уравнения (3.18)

$$\Omega_{xtt} = \Omega_{xxy} - \Omega_{xx}\Omega_{xxx}, \;\; \Omega_{ytt} = \Omega_{xyy} - \Omega_{xx}\Omega_{xxy},$$

расщепляем по производным функции Ω:

$$\begin{gathered} c_\alpha - \alpha b_\beta = 0, \quad c_\beta + b_\alpha = 0, \quad c_\gamma + b_\beta - \alpha b_\delta + a_\alpha = 0, \\ c_\delta + b_\gamma + a_\beta = 0, \quad c_\tau + b_\delta + a_\gamma = 0, \\ b_\tau + a_\delta = 0, \quad a_\tau = 0. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Здесь использованы обозначения $\alpha = \Omega_{xx}$,$\beta = \Omega_{xt}$,$\gamma = \Omega_{xy}$,$\delta = \Omega_{yt}$,$\tau = \Omega_{yy}$. Последнее уравнение в (3.19) влечет независимость функции a от τ. Теперь необходимо проверить условия совместности

$$\begin{array}{rrrr} \left(c_\alpha\right)_\beta = \left(c_\beta\right)_\alpha, & \left(c_\alpha\right)_\gamma = \left(c_\gamma\right)_\alpha, & \left(c_\alpha\right)_\delta = \left(c_\delta\right)_\alpha, & \left(c_\alpha\right)_\tau = \left(c_\tau\right)_\alpha, \\ & \left(c_\beta\right)_\gamma = \left(c_\gamma\right)_\beta, & \left(c_\beta\right)_\delta = \left(c_\delta\right)_\beta, & \left(c_\beta\right)_\tau = \left(c_\tau\right)_\beta, \\ & & \left(c_\gamma\right)_\delta = \left(c_\delta\right)_\gamma, & \left(c_\gamma\right)_\tau = \left(c_\tau\right)_\gamma, \\ & & & \left(c_\delta\right)_\tau = \left(c_\tau\right)_\delta, \end{array}$$

которые приводят к системе уравнений на вторые производные функции b. Принимая во внимание следствия уравнения $b_\tau + a_\delta = 0$ из (3.19), получаем

$$\begin{aligned} & b_{\alpha\alpha} = 2\alpha a_{\alpha\beta}, && b_{\alpha\gamma} = \alpha a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\beta} + \alpha a_{\alpha\delta}, \\ & b_{\alpha\beta} = b_\tau - a_{\alpha\alpha} + \alpha a_{\beta\beta}, && b_{\beta\gamma} = -a_{\beta\beta} - a_{\alpha\gamma} + \alpha a_{\beta\delta}, \\ & b_{\beta\beta} = -2a_{\alpha\beta}, && b_{\gamma\gamma} = 2\alpha a_{\gamma\delta} - 2a_{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{\alpha\delta} = \alpha a_{\beta\delta} - a_{\alpha\gamma}, && b_{\alpha\tau} = -a_{\alpha\delta}, && b_{\delta\tau} = -a_{\delta\delta}, \\ & b_{\beta\delta} = -a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\delta}, && b_{\beta\tau} = -a_{\beta\delta}, && b_{\tau\tau} = 0. \\ & b_{\gamma\delta} = -a_{\gamma\gamma} - a_{\beta\delta} + \alpha a_{\delta\delta}, && b_{\gamma\tau} = -a_{\gamma\delta}, && \\ & b_{\delta\delta} = -2a_{\gamma\delta}, && && \end{aligned}$$

Вновь проверяя условия совместности $\left(b_{\alpha\alpha}\right)_\beta = \left(b_{\alpha\beta}\right)_\alpha$ и т.д., получаем линейную систему в инволюции на третьи производные a_{ijk}:

$$a_{\alpha\alpha\alpha} = \alpha^2 a_{\delta\delta} - \alpha a_{\gamma\gamma} - \alpha a_{\beta\delta} + a_{\beta\beta} - a_{\alpha\gamma},$$

$$a_{\alpha\alpha\beta} = -2\alpha a_{\gamma\delta} + a_{\beta\gamma} + a_{\alpha\delta}$$

$$a_{\alpha\beta\beta} = -\alpha a_{\delta\delta} + a_{\gamma\gamma} + 2a_{\beta\delta},$$

$$a_{\beta\beta\beta} = 2a_{\gamma\delta},$$

$$a_{\alpha\alpha\gamma} = -\alpha a_{\delta\delta\delta} + a_{\beta\delta}, \quad a_{\alpha\alpha\delta} = 0, \quad a_{\alpha\delta\delta} = 0,$$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = 2a_{\gamma\delta}, \quad a_{\alpha\beta\delta} = a_{\delta\delta}, \quad a_{2\delta\delta} = 0,$$

$$a_{\beta\beta\gamma} = a_{\delta\delta}, \quad a_{\beta\beta\delta} = 0, \quad a_{\gamma\delta\delta} = 0,$$

$$a_{\alpha\gamma\gamma} = a_{\delta\delta}, \quad a_{\alpha\gamma\delta} = 0, \quad a_{\delta\delta\delta} = 0,$$

$$a_{\beta\gamma\gamma} = 0, \quad a_{2\gamma\delta} = 0,$$

$$a_{\gamma\gamma\gamma} = 0, \quad a_{\gamma\gamma\delta} = 0.$$

Интегрирование указанной системы приводит к законам сохранения:

$$a_1 = \Omega_{xx}\Omega_{xt},$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\Omega_{xx}^3 + \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2,$$

$$a_3 = \Omega_{xx}^2,$$

$$a_4 = \Omega_{xx}\Omega_{xy} - \frac{1}{6}\Omega_{xx}^3,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt}\Omega_{xy},$$

$$a_6 = \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Omega_{xt}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{xy}^2,$$

$$a_7 = \frac{1}{2}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^2 + \Omega_{yt}\Omega_{xx},$$

$$a_8 = \frac{1}{2}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt}^2\Omega_{xx} + \Omega_{xt}\Omega_{yt},$$

$$b_1 = \frac{1}{3}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xy}\Omega_{xx} - \Omega_{xt}^2,$$

$$b_2 = -\Omega_{xt}\Omega_{xy},$$

$$b_3 = -2\Omega_{xx}\Omega_{xt},$$

$$b_4 = -\Omega_{xt}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yt},$$

$$b_5 = \frac{1}{6}\Omega_{xx}^4 - \Omega_{xt}^2\Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2 - \Omega_{xt}\Omega_{yt},$$

$$b_6 = \frac{1}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{xx} - \Omega_{xy}\Omega_{yt} - \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3,$$

$$b_7 = \frac{1}{6}\Omega_{xx}^4 - \Omega_{xt}^2\Omega_{xx} - \Omega_{yy}\Omega_{xx} - \Omega_{xt}\Omega_{yt},$$

$$a_9 = \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3 + 2\Omega_{xx}\Omega_{xy}\Omega_{xt} + \Omega_{xy}\Omega_{yt},$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xt}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{xy}\Omega_{xt}^2 + \\ + \Omega_{xx}\Omega_{yt}\Omega_{xt} + \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Omega_{xy}^2 + \\ + \frac{1}{2}\Omega_{yt}^2$$

$$c_1 = \Omega_{xt}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}^2\Omega_{xt},$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\Omega_{xy}^2 - \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xy},$$

$$c_3 = \Omega_{xt}^2 - \frac{2}{3}\Omega_{xx}^3,$$

$$c_4 = \Omega_{xt}\Omega_{yt} - \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xy},$$

$$c_5 = -\frac{2}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2 + \\ + \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3 + \Omega_{xy}\Omega_{yt},$$

$$c_8 = \frac{2}{15}\Omega_{xx}^5 - \frac{2}{3}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^2 - \\ - \frac{1}{2}\Omega_{yy}\Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt}^2\Omega_{xy} + \Omega_{xy}\Omega_{yy},$$

$$c_9 = -\frac{2}{3}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^2 + \\ + \Omega_{xt}\Omega_{xy}^2 + \Omega_{xt}^2\Omega_{yt} + \Omega_{yt}\Omega_{yy},$$

$$b_8 = \frac{2}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{xx} \\ - \Omega_{xy}\Omega_{yt} - \Omega_{xt}\Omega_{yy} - \frac{2}{3}\Omega_{xt}^3,$$

$$b_9 = \frac{2}{3}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt}\Omega_{yt}\Omega_{xx} - \Omega_{yt}^2 \\ - \Omega_{xy}^2\Omega_{xx} - 2\Omega_{xt}^2\Omega_{xy} - \Omega_{xy}\Omega_{yy},$$

$$b_{10} = \frac{1}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^4 + \frac{1}{3}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt}\Omega_{xy}^2 \\ - \Omega_{xt}\Omega_{yy}\Omega_{xx} - \frac{2}{3}\Omega_{xt}^3\Omega_{xx} \\ - \Omega_{xt}^2\Omega_{yt} - \Omega_{yt}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\Omega_{yt}\Omega_{xx},$$

$$c_6 = \frac{1}{15}\Omega_{xx}^5 - \frac{1}{3}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^3 - \\ - \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{yt}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{xy},$$

$$c_7 = -\frac{2}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2 + \\ + \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3 + \Omega_{xt}\Omega_{yy},$$

$$c_{10} = \frac{1}{18}\Omega_{xx}^6 - \frac{2}{3}\Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^3 \\ - \frac{1}{3}\Omega_{yy}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{xy}^2\Omega_{xx}^2 + \frac{1}{6}\Omega_{xt}^4 \\ + \frac{1}{6}\Omega_{xy}^3 + \frac{1}{2}\Omega_{yy}^2 + \Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{yt} \\ + \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{yy} - \Omega_{xt}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2.$$

Данные формулы естественно переписать в терминах пары коммутирующих цепочек (3.11), вводя функцию Ω так, чтобы $\Omega_{xx} = H_0$, $\Omega_{xt} = H_1$, $\Omega_{xy} = H_2$. Оставшиеся вторые производные также можно выразить через плотности H_k:

$$\Omega_{yt} = H_3 - H_0H_1, \quad \Omega_{yy} = \frac{1}{3}H_0^3 - H_0H_2 - H_1^2 + H_4.$$

В конечном итоге становится видно, что выписанные 10 законов сохранения совпадают с первыми десятью законами сохранения для пары коммутирующих цепочек (3.11).

Этот факт не случаен поскольку, как было сказано во введении, уравнение Хохлова – Заболоцкой тесно связано с цепочкой Бенни.

3.1.3 Гидродинамические редукции

В работе [46] было доказано, что цепочка Бенни допускает бесконечное число решений вида $A_k(r)$, где компоненты вектор-функции $r = (r_1, \dots, r_N)$ удовлетворяют диагональной системе уравнений

$$r_{it} = \chi_i(r) r_{ix}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.20}$$

Такие решения, которые называются гидродинамическими редукциями, должны быть совместны с самой цепочкой Бенни. Как оказалось, все моменты $A_k(r)$ могут быть найдены подстановкой в систему (3.1), кроме $A_0(r)$. Функция A_0 должна удовлетворять так называемой системе Гиббонса – Царева:

$$(\chi_i - \chi_k)^2 \frac{\partial^2 A_0}{\partial r_i \partial r_k} = 2 \frac{\partial A_0}{\partial r_k} \frac{\partial A_0}{\partial r_i}, \quad (\chi_k - \chi_i) \frac{\partial \chi_i}{r_k} = \frac{\partial A_0}{\partial r_k}, \quad i \neq k. \tag{3.21}$$

В дальнейшем было показано [90], что существуют и консервативные редукции вида

$$u_{it} = \left(\frac{1}{2} u_i^2 + A_0(u) \right)_x, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.22}$$

В этом случае аналог системы Гиббонса – Царева записывается следующим образом:

$$(u_i - u_k) \frac{\partial^2 A_0}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial A_0}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_0}{\partial u_j} \right) - \frac{\partial A_0}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_0}{\partial u_j} \right) \tag{3.23}$$

для всех $i \neq k$. Рассмотрим цепочку Бенни (3.1) и первый коммутирующий с ней поток из (3.9):

$$(A_0)_y = (A_2)_x + A_0(A_0)_x + A_0(A_0)_x, \tag{3.24}$$

$$(A_k)_y = (A_{k+2})_x + A_0(A_k)_x + (k+1)A_k(A_0)_x + kA_{k-1}(A_1)_x, \quad k = 1{,}2,\ldots$$

и подставим в нее $A_0(u)$, которая удовлетворяет (3.23), и $A_i(u)$, вычисленные с помощью цепочки Бенни. Тогда прямым вычислением получаем, что система (3.24) примет вид

$$u_{iy} = \left(\frac{1}{3}u_i^3 + A_0(u)u_i + A_1(u)\right)_x \quad i = 1,\ldots,N. \tag{3.25}$$

Кроме того, пара коммутирующих систем (3.22) и (3.25) являются также и редукциями уравнения Хохлова – Заболоцкой (3.16), поскольку оно получается исключением моментов A_1 и A_2 из первых уравнений

$$(A_0)_t = (A_1)_x, \quad (A_1)_t = (A_2)_x + A_0(A_0)_x, \quad (A_0)_y = (A_2)_x + 2A_0(A_0)_x$$

цепочек (3.1) и (3.24).

В качестве примера будем работать с “waterbag” редукцией [46], которая возникает при численных расчетах кинетических уравнений [102; 103]. В этом случае выражения для A_k имеют вид

$$A_k(u) = \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m(u_m)^{k+1}, \quad \sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m = 0, \tag{3.26}$$

где ε_k произвольные постоянные. Подстановка указанных выражений в ряд (3.2) приводит к уравнению Римановой поверхности, ассоциированной с парой коммутирующих систем (3.22), (3.25) при выполнении равенств (3.26):

$$\lambda = p - \sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m \ln(p - u_m). \tag{3.27}$$

Таким образом, пара коммутирующих двумерных систем гидродинамического типа (3.22), (3.25) допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения (3.14), где зависимость $p(\lambda)$ устанавливается из (3.27).

Важно отметить, что в отличие от пары коммутирующих цепочек (3.11) любая пара N компонентных двумерных редукций допускает не просто бесконечное число трехмерных законов сохранения, а N^2 бесконечных серий. В самом деле, разлагая в (3.27) функцию p в ряд Бурмана – Лагранжа [104] в окрестности каждой точки u_m, получаем N ветвей:

$$p^{(m)}(\lambda) = u_m + \lambda_m P_1^{(m)} + \lambda_m^2 P_2^{(m)} + \ldots,$$

где $\lambda_m = e^{-\lambda/\varepsilon_m}$ является локальным параметром разложения для всех $m = 1, \ldots, N$. При этом все коэффициенты ряда, которые являются плотностями двумерных законов сохранения $P_i^{(m)}$, могут быть найдены прямо из (3.27). Например,

$$P_1^{(m)} = e^{u_m/\varepsilon_m} \prod_{j\neq m} (u_m - u_j)^{-\varepsilon_j/\varepsilon_m}.$$

Тогда подстановка $p(\zeta) = p^{(m)}(\zeta) = u_m + \zeta_m P_1^{(m)} + \zeta_m^2 P_2^{(m)} + \ldots$ в производящее уравнение (3.14) дает N бесконечных серий однопараметрических производящих уравнений:

$$\Big(\big(p(\lambda) - u_m\big)^3\Big)_y - \Big(\big(p(\lambda) + u_m\big)\big(p(\lambda) - u_m\big)^3\Big)_t + \left(\big(p(\lambda) - u_m\big)^3 \left(\frac{1}{5}p^2(\lambda) + \frac{3}{5}u_m p(\lambda) + \frac{1}{5}u_m^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j u_j\right)\right)_x = 0,$$

$$\Big(3\big(p(\lambda) - u_m\big)^2 p_1^{(m)}\Big)_y - \Big(2\big(p(\lambda) + 2u_m\big)\big(p(\lambda) - u_m\big)^2 p_1^{(m)}\Big)_t + \left(\left(2u_m p(\lambda) + u_m^2 + 3\sum_{j=1}^N \varepsilon_j u_j\right)\big(p(\lambda) - u_m\big)^2 p_1^{(m)}\right)_x = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Наконец подстановка $p(\lambda) = p^{(l)}(\lambda) = u_l + \lambda_l P_1^{(l)} + \lambda_l^2 P_2^{(l)} + \ldots$ в указанные N бесконечных серий однопараметрических производящих уравнений приводит к N^2 бесконечных серий трехмерных законов сохранения.

Например, первые $N(N+1)/2$ трехмерных законов сохранения имеют вид

$$\left(\left(p_1^{(m)}\right)^3\right)_y - \left(2u_m\left(p_1^{(m)}\right)^3\right)_t + \left(\left(p_1^{(m)}\right)^3\left(u_m^2 + \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j u_j\right)\right)_x = 0,$$

$$\left((u_l - u_m)^3\right)_y - \left((u_l + u_m)(u_l - u_m)^3\right)_t + \left((u_l - u_m)^3\left(\frac{1}{5}u_l^2 + \frac{3}{5}u_m u_l + \frac{1}{5}u_m^2 + \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j u^j\right)\right)_x = 0,$$

где $l \neq m$.

3.2 Иерархия цепочки Михалева

Цепочка Михалева впервые была получена в работе [105], однако, полное ее исследование было проведено в [47] в рамках изучения систем гидродинамического типа следующего вида

$$r_{it} = \left(r_i - \varepsilon\sum_{m=1}^{n} r_m\right) r_{ix}, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{3.28}$$

где ε — некоторая константа, а число уравнений n является произвольным. Для всей иерархии было найдено производящее уравнение

$$\partial_{\tau(\zeta)} p(\lambda) = \frac{\zeta}{\zeta - \lambda}\left(\frac{p(\lambda)}{p(\zeta)}\right)_x. \tag{3.29}$$

Здесь $p(\zeta)$ определяется так же как $p(\lambda)$, но с формальной заменой λ на ζ, $p(\lambda)$ — формальный ряд

$$p(\lambda) = 1 + \frac{\sigma_1}{\lambda} + \frac{\sigma_2}{\lambda} + \ldots, \tag{3.30}$$

а $\partial_{\tau(\zeta)}$ имеет вид

$$\partial_{\tau(\zeta)} = \partial_{t^0} + \frac{1}{\zeta}\partial_{t^1} + \frac{1}{\zeta^2}\partial_{t^2} + \ldots$$

Подставляя разложение по ζ в уравнение (3.29), получаем производящие уравнения коммутирующих цепочек:

$$p_{t^0} = p_x, \quad p_{t^k} = \left(p\sum_{m=0}^{k}\alpha_m\lambda^{k-m}\right)_x, \quad k = 1{,}2, \ldots, \tag{3.31}$$

где $x \equiv t^0$, а α_i зависят от σ_j следующим образом:

$$\alpha_1 = -\sigma_1, \quad \alpha_l = -\sigma_l - \sum_{m=1}^{l-1}\alpha_m\sigma_{l-m}, \quad l = 2{,}3, \ldots \tag{3.32}$$

Важно отметить, что все цепочки в иерархии Михалева являются линейно вырожденными (т. е. имеет хотя бы одну линейно вырожденную гидродинамическую редукцию [106]), а токи законов сохранения (3.31) зависят от производящей функции p линейно.

3.2.1 Трехмерные законы сохранения

Зная теперь, как получается производящее уравнение трехмерных законов сохранения для пары коммутирующих цепочек иерархии Бенни (3.11), можно попытаться найти аналогично уравнение для первых двух коммутирующих цепочек из иерархии Михалева (3.31):

$$p_t = \Big((\lambda - u)p\Big)_x, \quad p_y = \Big((\lambda^2 - \lambda u - v)p\Big)_x, \tag{3.33}$$

где $y \equiv t^2$. После подстановки ряда (3.30) в (3.33) получаем $u = \sigma_1$, $v = \sigma_2 - \sigma_1^2$ и бесконечный набор двумерных законов сохранения:

$$\Big(\sigma_k\Big)_t = \Big(\sigma_{k+1} - \sigma_1\sigma_k\Big)_x, \ \Big(\sigma_k\Big)_y = \Big(\sigma_{k+2} - \sigma_1\sigma_{k+1} + \big(\sigma_1^2 - \sigma_2\big)\sigma_k\Big)_x. \tag{3.34}$$

Теорема 3.2: *Пара коммутирующих цепочек Михалева* (3.34) *допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения*

$$\big(\sigma_k\sigma_m\big)_y+\Big(\sigma_1\sigma_k\sigma_m-\big(\sigma_k\sigma_{m+1}+\sigma_m\sigma_{k+1}\big)\Big)_t \tag{3.35}$$

$$+\Big(\sigma_{k+1}\sigma_{m+1}-\sigma_1\big(\sigma_k\sigma_{m+1}+\sigma_m\sigma_{k+1}\big)+\sigma_2\sigma_k\sigma_m\Big)_x=0,\ \ k,m=1,2,\ldots$$

Доказательство. По аналогии с теоремой 3.1 будем искать производящую формулу трехмерных законов сохранения в виде

$$\big(A(p,q)\big)_y+\big(B(p,q,\sigma_1)\big)_t+\big(C(p,q,\sigma_1,\sigma_2)\big)_x=0,$$

где $p\equiv p(\lambda)$ и $q\equiv p(\zeta)$. Далее, учитывая (3.33), выражаем первые производные $\partial C/\partial p\equiv C_p$, $\partial C/\partial q\equiv C_q$, $\partial C/\partial\sigma_1\equiv C_1$ и $\partial C/\partial\sigma_2\equiv C_2$ через производные функций A и B:

$$C_p=\big(\sigma_1-\lambda\big)B_p-\big(\lambda^2-\sigma_1\lambda+\sigma_1^2-\sigma_2\big)A_p,\quad C_2=-B_1+pA_p+qA_q,$$
$$C_1=pB_p+qB_q+2\sigma_1B_1-\big(2\sigma_1p-\lambda p\big)A_p-\big(2\sigma_1q-\lambda q\big)A_q,$$
$$C_q=\big(\sigma_1-\zeta\big)B_q-\big(\zeta^2-\sigma_1\zeta+\sigma_1^2-\sigma_2\big)A_q.$$

Равенства смешанных производных

$$\begin{aligned}\big(C_p\big)_q=\big(C_q\big)_p,\quad \big(C_p\big)_1=\big(C_1\big)_p,\quad \big(C_p\big)_2=\big(C_2\big)_p,\\ \big(C_q\big)_1=\big(C_1\big)_q,\quad \big(C_q\big)_2=\big(C_2\big)_q,\\ \big(C_1\big)_2=\big(C_2\big)_1,\end{aligned}$$

приводят к уравнениям на вторые производные функции B:

$$B_{pp}=\big(\sigma_1-2\lambda\big)A_{pp},\quad B_{pq}=\big(\sigma_1-\lambda-\zeta\big)A_{pq},\quad B_{p1}=qA_{pq}+pA_{pp},$$
$$B_{qq}=\big(\sigma_1-2\zeta\big)A_{qq},\quad B_{q1}=qA_{qq}+pA_{pq},\quad B_{11}=0,$$

Из проверки условий совместности получаем систему

$$A_{ppp} = A_{ppq} = A_{pqq} = A_{qqq} = 0,$$

которая, очевидно, находится в инволюции. Таким образом, мы получили, что производящее уравнение трехмерных законов сохранения для пары коммутирующих цепочек (3.34) имеет вид

$$\begin{aligned}\big(p(\lambda)p(\zeta)\big)_y + \Big(\big(\sigma_1 - \lambda - \zeta\big)p(\lambda)p(\zeta)\Big)_t \\ + \Big(\big(\sigma_2 - (\lambda+\zeta)\sigma_1 + \lambda\,\zeta\big)p(\lambda)p(\zeta)\Big)_x = 0,\end{aligned} \tag{3.36}$$

а также зависит от двух произвольных параметров λ,ζ. Принимая во внимание разложение (3.30) и раскладывая производящее уравнение сначала по λ, получаем бесконечное число однопараметрических производящих уравнений трехмерных законов сохранения ($k = 1,2,\ldots$):

$$\big(\sigma_k p(\zeta)\big)_y + \Big(\big(\sigma_k(\sigma_1 - \zeta) - \sigma_{k+1}\big)p(\zeta)\Big)_t + \Big(\big(\sigma_k(\sigma_2 - \zeta\sigma_1) + \sigma_{k+1}(\zeta - \sigma_1)\big)p(\zeta)\Big)_x = 0.$$

Разложение по параметру ζ данных уравнений приводит к законам сохранения (3.35), где первые несколько из них имеют вид

$$\begin{gathered}\big(\sigma_1^2\big)_y + \big(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2\big)_t + \big(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2\big)_x = 0,\\ \big(\sigma_1\sigma_2\big)_y + \big(\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2^2\big)_t + \big(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_3\big)_x = 0,\\ \big(\sigma_2^2\big)_y + \big(\sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3\big)_t + \big(\sigma_2^3 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2\big)_x = 0,\end{gathered} \tag{3.37}$$

$$\begin{gathered}\big(\sigma_1\sigma_3\big)_y + \big(\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3\big)_t + \big(\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1^2\sigma_4\big)_x = 0,\\ \big(\sigma_2\sigma_3\big)_y + \Big(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_4 - \sigma_3^2\Big)_t + \Big(\sigma_3\sigma_4 - \sigma_1\sigma_2\sigma_4 - \sigma_1\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3\Big)_x = 0,\\ \big(\sigma_3^2\big)_y + \Big(\sigma_1\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_4\Big)_t + \Big(\sigma_4^2 - 2\sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3^2\Big)_x = 0,\\ \ldots\end{gathered}$$

$\square$

3.2.2 Уравнение Михалева

Для того чтобы получить уравнение Михалева, необходимо сначала вывести иерархию коммутирующих уравнений в частных производных, эквивалентную иерархии цепочки Михалева. Рассмотрим высшие коммутирующие потоки и выберем только первое уравнение в каждом из них:

$$(\sigma_1)_{t^k} = -(\alpha_k)_x,$$

где α_k определены в (3.32). Введем потенциал w так, что

$$\sigma_1 = w_x, \quad \alpha_k = -w_{t^k}.$$

Тогда все σ_i выражаются через первые производные потенциала w:

$$\sigma_2 = w_x^2 + w_t, \quad \sigma_3 = w_x^3 + 2w_x w_t + w_y,$$

$$\sigma_4 = w_x^4 + 3w_x^2 w_t + w_t^2 + 2w_x w_y + w_z, \quad \ldots$$

А значит весь бесконечный набор цепочек (3.31) преобразуется в бесконечный набор коммутирующих уравнений в частных производных второго порядка на функцию w. В частности, из первой цепочки в (3.34) получаем уравнение Михалева:

$$w_{xy} = w_{tt} + w_x w_{xt} - w_t w_{xx}. \tag{3.38}$$

Соответственно, трехмерные законы сохранения также переписываются в терминах функции w, в частности, формулы (3.37) принимают вид:

$$\left(w_x^2\right)_y - \left(w_x(w_x^2 + 2w_t)\right)_t + \left(w_t(w_x^2 + w_t)\right)_x = 0,$$

$$\left(w_x(w_x^2 + w_t)\right)_y - \left(w_x^4 + 3w_x^2 w_t + w_x w_y + w_t^2\right)_t + \left(w_t(w_x^3 + 2w_x w_t + w_y)\right)_x = 0,$$

$$\big((w_x^2+w_t)^2\big)_y-\big((w_x^2+w_t)(w_x^3+3w_xw_t+2w_y)\big)_t$$
$$+\big(w_x^4w_t+3w_x^2w_t^2+2w_xw_tw_y+w_t^3+w_y^2\big)_x=0,$$

$$\big(w_x(w_x^3+2w_xw_t+w_y)\big)_y-\big(w_x^5+4w_x^3w_t+2w_x^2w_y+(3w_t^2+w_z)w_x+w_tw_y\big)_t$$
$$+\big(w_t(w_x^4+3w_x^2w_t+w_t^2+2w_xw_y+w_z)\big)_x=0,$$

$$\big((w_x^2+w_t)(w_x^3+2w_xw_t+w_y)\big)_y$$
$$-\big(w_x^6+5w_x^4w_t+3w_x^3w_y+w_x^2(6w_t^2+w_z)+5w_xw_tw_y+w_y^2+w_t^3+w_tw_z\big)_t$$
$$+\big(w_x^5w_t+4w_x^3w_t^2+3w_x^2w_tw_y+w_x\big(3w_t^3+w_y^2+w_tw_z\big)+2w_t^2w_y+w_yw_z\big)_x=0,$$

$$\big((w_x^3+2w_xw_t+w_y)^2\big)_y$$
$$-\big((w_x^3+2w_xw_t+w_y)(w_x^4+4w_x^2w_t+3w_xw_y+2w_t^2+2w_z)\big)_t$$
$$+\big(w_x^6w_t+5w_x^4w_t^2+4w_x^3w_yw_t+w_x^2(6w_t^3+w_y^2+2w_tw_z)+w_x(6w_t^2w_y+2w_yw_z)\big)_x$$
$$+\big(w_t^4+2w_t^2w_z+w_tw_y^2+w_z^2\big)_x=0,$$
$$\cdots\cdots\cdot$$

Нетрудно видеть, что первые три закона сохранения являются законами сохранения уравнения Михалева, которое само может быть записано в консервативной форме

$$(w_x)_y-(w_x^2+w_t)_t+(w_xw_t)_x=0.$$

Таким образом, уравнение Михалева, записанное в потенциальной форме, допускает четыре закона сохранения, так же как и уравнение Хохлова – Заболоцкой [101].

3.2.3 Гидродинамические редукции

Рассмотрим в качестве редукций класс систем, который в литературе называется ε-системы:

$$r_{it} = \Big(r_i - u\Big) r_{ix}, \quad r_{iy} = \Big(r_i^2 - u r_i - v\Big) r_{ix}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.39}$$

где (ε_i — произвольные постоянные)

$$u = \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m, \quad v = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m \right)^2 .$$

Производящая функция плотностей двумерных законов сохранения $p(\lambda) \equiv p(\lambda; r)$ находится в квадратурах напрямую из (3.33) (см. [47]):

$$p(\lambda) = \prod_{m=1}^{N} (\lambda - r_m)^{-\varepsilon_m}.$$

Допустим теперь, что все константы $\varepsilon_i = 1$. Соответствующая пара линейно вырожденных коммутирующих систем гидродинамического типа (3.39) допускает производящее уравнение трехмерных законов сохранения (3.36). А так как выражение для $p(\lambda)$ конечное, то мы можем проинтегрировать производящее уравнение $A_y + B_t + C_x = 0$, предварительно домноженное на произвольные аналитические функции $R(\lambda)$ и $L(\zeta)$, по параметрам λ и ζ (которые являются комплексными) вокруг каждого простого полюса $\lambda = r_k$, $\zeta = r_m$, то есть:

$$A = \oint \oint R(\lambda) L(\zeta) p(\lambda) p(\zeta) d\lambda d\zeta,$$

$$B = \oint \oint R(\lambda) L(\zeta) \big(u - \lambda - \zeta\big) p(\lambda) p(\zeta) d\lambda d\zeta,$$

$$C = \oint \oint R(\lambda) L(\zeta) \big(v + u^2 - (\lambda + \zeta) u + \lambda \zeta\big) p(\lambda) p(\zeta) d\lambda d\zeta.$$

Указанные интегралы вычисляются в явном виде:

$$A = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)},$$

$$\begin{aligned} B = -\sum_{k=1}^{N} \frac{r_k R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)} - \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{r_m L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)} \\ + u\sum_{k=1}^{N} \frac{R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \\ - u\sum_{k=1}^{N} \frac{R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{r_m L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{r_m L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)} \\ + (v + u^2)\sum_{k=1}^{N} \frac{R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)} \\ - u\sum_{k=1}^{N} \frac{r_k R_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \cdot \sum_{m=1}^{N} \frac{L_m(r_m)}{\prod\limits_{q\neq m}(r_m - r_q)}, \end{aligned}$$

где аналитические функции $R_k(r_k)$, $L_m(r_m)$ локальными представлениями функций R и L соответственно. Таким образом, пара коммутирующих систем гидродинамического типа (3.39), в которой все $\varepsilon_i = 1$, допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения, зависящих от $2N$ произвольных функций одного аргумента.

3.2.4 Конечномерные (ОДУ) редукции

Пара коммутирующих систем гидродинамического типа, рассматриваемые в предыдущем параграфе (т.е. (3.39) со всеми $\varepsilon_i = 1$), имеет общее решение в виде (см. [107; 108]):

$$x = \sum_{m=1}^{N} \int^{r_m} \frac{\xi^{N-1} d\xi}{S_m(\xi)}, \quad t = \sum_{m=1}^{N} \int^{r_m} \frac{\xi^{N-2} d\xi}{S_m(\xi)}, \quad y = \sum_{m=1}^{N} \int^{r_m} \frac{\xi^{N-3} d\xi}{S_m(\xi)},$$
$$0 = \sum_{m=1}^{N} \int^{r_m} \frac{\xi^{k} d\xi}{S_m(\xi)}, \quad k = 0, \ldots, N-4,$$

где $S_k(r_k)$ — произвольные функции. В самом деле, вычисляя первые производные $\partial x/\partial r_k$, $\partial t/\partial r_k$, $\partial y/\partial r_k$ и подставляя обратные выражения

$$r_{kx} = \frac{S_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)}, \quad r_{kt} = \Big(r_k - u\Big)\frac{S_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)},$$
$$r_{ky} = \Big(r_k^2 - u r_k - v\Big)\frac{S_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)} \tag{3.40}$$

обратно в (3.39) с $\varepsilon_i = 1$, получаем тождество. В частном случае (E_k – произвольные параметры)

$$S_k(r_k) = \sqrt{P_{2N+1}(r_k)} = \sqrt{\prod_{m=1}^{2N+1}(r_k - E_m)},$$

три коммутирующих обыкновенных дифференциальных уравнения (3.40) определяют N-фазное решение уравнения Кортевега–де Фриза (см. [107;108] и формулы с номерами 2.3.12, 2.4.3 в работе [109]; также см. стр. 139 в [109]). Таким образом, пара коммутирующих ОДУ (3.40)

$$r_{kx} = \frac{S_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)}, \quad r_{kt} = \Big(r_k - u\Big)\frac{S_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k - r_p)}$$

допускает бесконечно много двумерных законов сохранения (см. [110]; $T_k(r_k)$ — произвольные функции)

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{T_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k-r_p)}\right)_t=\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{(r_k-u)T_k(r_k)}{\prod\limits_{p\neq k}(r_k-r_p)}\right)_x,$$

в то время как тройка коммутирующих ОДУ (3.40) допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения $A_y+B_t+C_x=0$, представленных в предыдущем параграфе.

3.2.5 Дисперсионные редукции

Уравнение Михалева принадлежит классу бездисперсионных уравнений, допускающих дисперсионные редукции [106; 111–114]. В частности, это значит, что оно допускает решения, которые не опрокидываются за конечное время [115–117]. Более подробная теория изложена в работе [106], а в данном разделе мы лишь покажем связь между уравнением Михалева и парой коммутирующих уравнений Кортевега – де Фриза.

Рассмотрим пару уравнений

$$4\varepsilon^2\psi_{xx}=(\lambda+2u)\psi,\quad \psi_t=(\lambda-u)\psi_x+\frac{1}{2}u_x\psi, \tag{3.41}$$

где ε — произвольная константа. Условие совместности $\left(\psi_{xx}\right)_t=\left(\psi_t\right)_{xx}$ приводит к уравнению Кортевега – де Фриза

$$u_t=\left(-\frac{3}{2}u^2+\epsilon^2u_{xx}\right)_x. \tag{3.42}$$

Далее вводится функция $p(\lambda)=\left(\psi_1\psi_2\right)^{-1}$, где ψ_1 и ψ_2 — два линейно независимых решения первого уравнения в (3.41) и тогда второе уравнение в (3.41) преобразуется в

$$p_t = \Big((\lambda - u)p\Big)_x. \tag{3.43}$$

В свою очередь, первое уравнение в (3.41) становится (см. [118–121])

$$\epsilon^2\big(p^{-1}(\lambda)\big)_{xxx} = (\lambda + 2u)\big(p^{-1}(\lambda)\big)_x + p^{-1}(\lambda)u_x. \tag{3.44}$$

При $\lambda \to \infty$ для решений ψ_1 и ψ_2 имеется стандартная асимптотика

$$\psi_1 \to \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\varepsilon}x\right), \ \ \psi_2 \to \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\varepsilon}x\right).$$

Следовательно, функция $p(\lambda) = \big(\psi_1\psi_2\big)^{-1}$ на бесконечности раскладывается в ряд (3.30) (см. [47; 111–113]), подстановка которого в (3.43) дает первый набор двумерных законов сохранения из (3.34), в которых $u = \sigma_1$ и все плотности $\sigma_k = \sigma_k(u,u_x,u_{xx},...)$ находятся из (3.44).

По аналогии рассмотрим пару уравнений

$$4\epsilon^2\psi_{xx} = (\lambda + 2u)\psi, \quad \psi_y = (\lambda^2 - \lambda u - v)\psi_x + \frac{1}{2}(\lambda u_x + v_x)\psi, \tag{3.45}$$

где

$$v = -\frac{3}{2}u^2 + \epsilon^2 u_{xx}. \tag{3.46}$$

Условие совместности $\big(\psi_{xx}\big)_y = \big(\psi_y\big)_{xx}$ дает первый коммутирующий поток из иерархии КдФ пятого порядка:

$$u_y = \left(\frac{5}{2}u^3 - \frac{5}{2}\epsilon^2 u_x^2 - 5\epsilon^2 u u_{xx} + \epsilon^4 u_{xxxx}\right)_x. \tag{3.47}$$

В терминах функции $p(\lambda)$ пара линейных уравнений

$$\psi_t = (\lambda - u)\psi_x + \frac{1}{2}u_x\psi, \quad \psi_y = (\lambda^2 - \lambda u - v)\psi_x + \frac{1}{2}(\lambda u_x + v_x)\psi$$

принимает консервативную форму

$$p_t = \Big((\lambda - u)p\Big)_x, \quad p_y = \Big((\lambda^2 - \lambda u - v)p\Big)_x. \tag{3.48}$$

Проверяя условие совместности полученных уравнений, получаем систему

$$u_t = v_x, \quad u_y = v_t + uv_x - vu_x, \tag{3.49}$$

которая при замене $u = w_x$, $v = w_t$ дает уравнение Михалева (3.38). Таким образом, подстановка (3.46) переводит систему (3.49) в пару коммутирующих уравнений Кортевега – де Фриза (3.42), (3.47), которая допускает бесконечное число двумерных законов сохранения (3.34). Кроме того, пара коммутирующих уравнений Кортевега–де Фриза (3.42), (3.47) допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения

$$\big(A_k(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\big)_y + \big(B_k(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1})\big)_t + \big(C_k(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+2})\big)_x = 0,$$

которые вычисляются с помощью подстановки ряда (3.30) в производящее уравнение (3.36). В свою очередь, при подстановке (3.30) в (3.44) определяются все $\sigma_k = \sigma_k(u,u_x,u_{xx},...)$:

$$\sigma_1 = u, \quad \sigma_2 = u^2 + v, \quad \sigma_3 = \epsilon^2 v_{xx} + \frac{\epsilon^2}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u^3, \quad \ldots$$

Приложение A

В данном разделе дается вывод системы уравнений типа Гира – Гримшоу для общего случая сильного взаимодействия m мод внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости.

Рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в слое конечной глубины $-h < z < \eta(x,t)$, ограниченного ровным дном $z = -h$ и свободной границей $z = \eta(x,t)$. Функция η есть отклонение свободной границы от невозмущенной поверхности $z = 0$. Уравнения движения записываются в виде

$$u_x + w_z = 0, \tag{A.1a}$$

$$\rho_t + u\rho_x + w\rho_z = 0, \tag{A.1b}$$

$$\rho\,(u_t + uu_x + wu_z) = -\,p_x, \tag{A.1c}$$

$$\rho\,(w_t + uw_x + ww_z) = -\,p_z - g\rho. \tag{A.1d}$$

Здесь u и w — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно, ρ — плотность жидкости, p — давление, а постоянная g — ускорение силы тяжести. Система уравнений (A.1) имеет точное решение

$$u = u_0(z), \quad w = w_0 = 0, \quad \rho = \rho_0(z), \quad p = p_0(z) \tag{A.2}$$

с произвольными функциями u_0, ρ_0 и давлением p_0, связанным с ρ_0 уравнением гидростатики

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0. \tag{A.3}$$

Для описания волнового движения в рассматриваемой области задаются граничные условия:

$$w = 0, \quad (z = -h), \tag{A.4a}$$

$$p_0 + p = 0, \quad (z = \eta), \tag{A.4b}$$

$$\eta_t + u\eta_x = w, \quad (z = \eta). \tag{A.4c}$$

Введем дополнительную переменную $\zeta = \zeta(x,z,t)$, которая отражает вертикальное отклонение частиц и удовлетворяет уравнению

$$\zeta_t + u\zeta_x + w\zeta_z = w. \tag{A.5}$$

Тогда к граничным условиям (A.4) следует добавить соотношение

$$\zeta = \eta, \quad (z = \eta). \tag{A.6}$$

Малые возмущения

$$u = u_0 + u', \quad w = w', \quad \zeta = \zeta', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'$$

сдвигового течения описываются линеаризованной системой уравнений

$$u'_x + w'_z = 0, \tag{A.7a}$$

$$\rho'_t + u_0\rho'_x + w'\rho_{0z} = 0, \tag{A.7b}$$

$$\rho_0 \left(u'_t + u_0 u'_x + w' u_{0z}\right) = -\, p'_x, \tag{A.7c}$$

$$\rho_0 \left(w'_t + u_0 w'_x\right) = -\, p'_z - g\rho', \tag{A.7d}$$

$$\zeta'_t + u_0\zeta'_x = w'. \tag{A.7e}$$

Тогда, выделяя в исходных уравнениях (A.1), (A.5) линейную часть, соответствующую уравнениям (A.7), получаем систему

$$u_x + w_z = 0, \tag{A.8a}$$

$$g\left(\rho_t + u_0\rho_x\right) - \rho_0 N^2 w = -\, g\left(u\rho_x + w\rho_z\right), \tag{A.8b}$$

$$\rho_0\left(u_t + u_0 u_x + w u_{0z}\right) + p_x = f_1, \tag{A.8c}$$

$$\rho_0\left(w_t + u_0 w_x\right) + p_z + g\rho = f_2, \tag{A.8d}$$

$$\zeta_t + u_0\zeta_x - w = -\, u\zeta_x - w\zeta_z, \tag{A.8e}$$

где частота Брента – Вяйсяля N^2 определяется по формуле $N^2 = -g\rho_{0z}/\rho_0$, а правые части задаются следующим образом:

$$f_1 = -\left(\rho_0+\rho\right)\left(uu_x+wu_z\right)-\rho\left(u_t+u_0u_x+wu_{0z}\right), \tag{A.9}$$

$$f_2 = -\left(\rho_0+\rho\right)\left(uw_x+ww_z\right)-\rho\left(w_t+u_0w_x\right). \tag{A.10}$$

Соответственно, граничные условия приобретают форму

$$w=0, \qquad (z=-h), \tag{A.11a}$$

$$p_0+p=0, \qquad (z=\eta), \tag{A.11b}$$

$$\zeta=\eta, \qquad (z=\eta), \tag{A.11c}$$

$$\eta_t+u_0\eta_x-w=-\,u\eta_x, \qquad (z=\eta), \tag{A.11d}$$

Далее рассматривается длинноволновое приближение, т. е. вводятся новые независимые переменные $X=\varepsilon x, T=\varepsilon t$ с параметром $\varepsilon \ll 1$ и в уравнениях движения (A.8) вертикальная компонента скорости w заменяется на произведение εw. Таким образом, получаем систему

$$u_X+w_z=0, \tag{A.12a}$$

$$g\left(\rho_T+u_0\rho_X\right)-\rho_0N^2w=-\,g\left(u\rho_X+w\rho_z\right), \tag{A.12b}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\left(u_T+u_0u_X+wu_{0z}\right)+p_X &= -\left(\rho_0+\rho\right)\left(uu_X+wu_z\right) \\ &\quad -\rho\left(u_T+u_0u_X+wu_{0z}\right),\end{aligned} \tag{A.12c}$$

$$\begin{aligned}p_z+g\rho &= -\,\varepsilon^2\rho_0\left(w_T+u_0w_X\right)-\varepsilon^2\rho\left(w_T+u_0w_X\right) \\ &\quad -\varepsilon^2\left(\rho_0+\rho\right)\left(uw_X+ww_z\right),\end{aligned} \tag{A.12d}$$

$$\zeta_T+u_0\zeta_X-w=-\,u\zeta_X-w\zeta_z, \tag{A.12e}$$

и граничные условия

$$w=0, \qquad (z=-h), \tag{A.13a}$$

$$p_0+p=0, \qquad (z=\eta), \tag{A.13b}$$

$$\zeta=\eta, \qquad (z=\eta), \tag{A.13c}$$

$$\eta_T+u_0\eta_X-w=-\,u\eta_X, \qquad (z=\eta). \tag{A.13d}$$

Согласно линейной теории функцию ζ можно искать в виде ζ $=$

$\varphi(z)A\left(X-cT\right)$. Тогда линеаризованная система (A.12), (A.13) в главном порядке по ε удовлетворяется тождественно, если и только если модальная функция φ и фазовая скорость c являются решением задачи Штурма – Лиувилля

$$\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_z\Big\}_z+\rho_0N^2\varphi=0,\quad(-h<z<0),\tag{A.14}$$

$$\varphi=0,\quad(z=-h),\qquad(u_0-c)^2\varphi_z=g\varphi,\quad(z=0).\tag{A.15}$$

После того, как найдены φ и c, амплитуда A может быть определена при помощи начальных данных. В общем случае, если рассматриваемая стратификация является устойчивой ($N^2>0$), то существует [122] счетный набор различных собственных значений c_n и соответствующих им собственных функций φ_n, $(n=1{,}2,\ldots)$. При этом выполняются условия ортогональности

$$\int\limits_{-h}^{0}\rho_0\Big\{c_i+c_j-2u_0\Big\}\varphi_i\varphi_j dz=\delta_{ij},\tag{A.16}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Таким образом, решение дается суперпозицией линейных мод.

Как известно, линейная теория не отражает в полной мере влияние нелинейных эффектов на распространение волн. Например, учет нелинейных членов с течением времени приводит к опрокидыванию волны. С другой стороны, этот эффект будет компенсироваться дисперсионными членами. В итоге баланс нелинейных и дисперсионных членов приводит к эволюционным уравнениям типа Кортевега – де Фриза. Формальный вывод таких моделей предполагает специальный асимптотический анализ. Введем переменные

$$\tau=\varepsilon^2T,\quad s=X-cT.\tag{A.17}$$

Мы будем рассматривать сильное взаимодействие m мод. Это значит, что фазовые скорости отличаются на величину второго порядка малости по ε, т. е. $c_1=c$, $c_i=c+\varepsilon^2\Delta_i$, $(i=2,\ldots,m)$. Основные величины будем искать в виде рядов

$$\Big\{\zeta,u,w,p,\rho,\eta\Big\} = \varepsilon^2\Big\{\zeta_1,u_1,w_1,p_1,\rho_1,\eta_1\Big\} + \varepsilon^4\Big\{\zeta_2,u_2,w_2,p_2,\rho_2,\eta_2\Big\} + \dots . \tag{A.18}$$

Функция ζ_1 представляется в форме

$$\zeta_1 = A_1(\tau,s)\varphi_1 + \sum_{i=2}^{m} A_i(\tau,\xi_i)\varphi_i(z), \quad \xi_i = s + \Delta_i\tau. \tag{A.19}$$

где скорости c_i и соответствующие им собственные функции φ_i находятся из задачи (A.14), (A.15) для всех $i = 1,\dots,m$. Подставляя указанные разложения в систему (A.12), (A.13), записанную в переменных (A.17), в главном порядке по ε получаем уравнения

$$u_{1s} + w_{1z} = 0, \tag{A.20a}$$

$$g\rho_{1s}(u_0 - c) - \rho_0 N^2 w_1 = 0, \tag{A.20b}$$

$$\rho_0\big(u_{1s}(u_0 - c) + w_1 u_{0z}\big) + p_{1s} = 0, \tag{A.20c}$$

$$p_{1z} + g\rho_1 = 0, \tag{A.20d}$$

$$(u_0 - c)\zeta_{1s} - w_1 = 0. \tag{A.20e}$$

Здесь использовался очевидный факт, что $\partial A_i/\partial s = \partial A_i/\partial \xi_i$, $(i = 2,\dots,m)$. Отсюда получаем явные выражения для всех величин в главном порядке:

$$\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m} A_i\varphi_i, \tag{A.21}$$

$$w_1 = (u_0 - c)\sum_{i=1}^{m} A_{is}\varphi_i, \tag{A.22}$$

$$u_1 = -\sum_{i=1}^{m} A_{is}\Big\{(u_0 - c)\varphi_i\Big\}_z, \tag{A.23}$$

$$g\rho_1 = \rho_0 N^2 \zeta_1, \tag{A.24}$$

$$p_1 = \rho_0(u_0 - c)^2 \sum_{i=1}^{m} A_i\varphi_{iz}. \tag{A.25}$$

В следующем порядке система имеет вид

$$u_{2s} + w_{2z} = 0, \tag{A.26a}$$

$$g\rho_{2s}(u_0 - c) - \rho_0 N^2 w_2 = - g\left(\rho_{1\tau} + u_1\rho_{1s} + w_1\rho_{1z}\right), \tag{A.26b}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\big(u_{2s}(u_0 - c) + w_2 u_{0z}\big) + p_{2s} = &- \rho_0\left(u_{1\tau} + u_1 u_{1s} + w_1 u_{1z}\right)\\ &- \rho_1\big(u_{1s}\left(u_0 - c\right) + u_{0z}w_1\big),\end{aligned} \tag{A.26c}$$

$$p_{2z} + g\rho_2 = - \rho_0 w_{1s}\left(u_0 - c\right), \tag{A.26d}$$

$$(u_0 - c)\zeta_{2s} - w_2 = - \zeta_{1\tau} - u_1\zeta_{1s} - w_1\zeta_{1z}. \tag{A.26e}$$

Отсюда получаем выражения

$$u_{2s} = - w_{2z}, \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}p_{2s} = &- \rho_0\big(u_{2s}(u_0 - c) + w_2 u_{0z}\big) - \rho_0\left(u_{1\tau} + u_1 u_{1s} + w_1 u_{1z}\right)\\ &- \rho_1\big(u_{1s}\left(u_0 - c\right) + u_{0z}w_1\big),\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$g\rho_2 = - p_{2z} - \rho_0 w_{1s}\left(u_0 - c\right). \tag{A.29}$$

Подставляя (A.29) в уравнение (A.26b), приходим к равенству

$$- (u_0 - c)p_{2sz} - \rho_0 N^2 w_2 = \rho_0(u_0 - c)^2 w_{1ss} - g(\rho_{1\tau} + u_1\rho_{1s} + w_1\rho_{1z}). \tag{A.30}$$

Далее дифференцируем (A.28) по переменной z и подставляем в (A.30), используя формулы (A.27) и (A.26e). Таким образом, мы исключили все функции, кроме ζ_2, и получили уравнение

$$\Big\{\rho_0(u_0 - c)^2\zeta_{2sz}\Big\}_z + \rho_0 N^2\zeta_{2s} = F_1.$$

Здесь

$$\begin{aligned}F_1 = &\, g(u_0 - c)^{-1}(\rho_{1\tau} + u_1\rho_{1s} + w_1\rho_{1z})\\ &- \rho_0 N^2(u_0 - c)^{-1}(\zeta_{1\tau} + u_1\zeta_{1s} + w_1\zeta_{1z}) - \rho_0(u_0 - c)w_{1ss}\\ &+ \Big\{\rho_1\big(u_{1s}(u_0 - c) + u_{0z}w_1\big) + \rho_0(u_{1\tau} + u_1 u_{1s} + w_1 u_{1z})\Big\}_z\\ &+ \Big\{\rho_0 u_{0z}(\zeta_{1\tau} + u_1\zeta_{1s} + w_1\zeta_{1z}) - \rho_0(u_0 - c)\big\{\zeta_{1\tau} + u_1\zeta_{1s} + w_1\zeta_{1z}\big\}_z\Big\}_z.\end{aligned}$$

Вычисляя F_1 в явном виде с учетом формул (A.21)–(A.25), получаем

$$\begin{aligned} F_1 = & -2\sum_{i=1}^{m}\Big\{\rho_0(u_0-c)\varphi_{iz}\Big\}_z A_{i\tau} - \sum_{i=1}^{m}\rho_0(u_0-c)^2\varphi_i A_{isss} \\ & + \sum_{i=1}^{m} P_i^1 A_i A_{is} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} Q_{ij}^1 \{A_i A_j\}_s - 2\sum_{i=2}^{m}\Delta_i\Big\{\rho_0(u_0-c)\varphi_{iz}\Big\}_z A_{is}, \end{aligned} \tag{A.31}$$

где

$$\begin{aligned} P_i^1 = & \, 3\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}^2\Big\}_z + 2\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}\Big\}_z\varphi_{iz} \\ & - 2\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\big\{\varphi_i\varphi_{iz}\big\}_z\Big\}_z, \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^1 = & \, 3\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}\varphi_{jz}\Big\}_z - \rho_0(u_0-c)^2\big(\varphi_{iz}\varphi_{jzz} + \varphi_{jz}\varphi_{izz}\big) \\ & - \Big\{\rho_0(u_0-c)^2\big(\varphi_i\varphi_{jzz} + \varphi_j\varphi_{izz}\big)\Big\}_z. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Аналогичная процедура проделывается для граничных условий. А именно, подставляем разложения (A.18) в равенства (A.13). Тогда в главном порядке по ε получаем уравнения

$$w_1 = 0, \qquad (z=-h), \tag{A.34a}$$

$$-g\rho_0\eta_1 + p_1 = 0, \qquad (z=0), \tag{A.34b}$$

$$\zeta_1 = \eta_1, \qquad (z=0), \tag{A.34c}$$

$$(u_0-c)\eta_{1s} = w_1 \qquad (z=0), \tag{A.34d}$$

из которых следует, что $\eta_1 = \zeta_1$ при $z=0$. В следующем порядке граничные условия записываются в форме

$$w_2 = 0, \qquad (z=-h), \tag{A.35a}$$

$$g\rho_0\eta_2 - p_{1z}\eta_1 + \frac{1}{2}g\rho_{0z}\eta_1^2 = p_2, \qquad (z=0), \tag{A.35b}$$

$$(u_0-c)\eta_{2s} + \eta_{1\tau} + u_1\eta_{1s} - w_{1z}\eta_1 + u_{0z}\eta_1\eta_s = w_2, \qquad (z=0), \tag{A.35c}$$

$$\zeta_2 + \zeta_{1z}\eta_1 = \eta_2 \qquad (z=0). \tag{A.35d}$$

Далее дифференцируем (A.35b) по переменной s. Тогда, используя равенства (A.27), (A.28) и (A.26e), получаем граничные условия на функцию ζ_2:

$$\zeta_{2s} = 0, \quad (z = -h), \qquad \rho_0(u_0 - c)^2\zeta_{2sz} - g\rho_0\zeta_{2s} = F_2, \quad (z = 0),$$

где

$$\begin{aligned} F_2 = \rho_1\big((u_0 - c)u_{1s} + u_{0z}w_1\big) \\ &- p_{1sz}\eta_1 - p_{1z}\eta_{1s} + g\rho_{0z}\eta_1\eta_{1s} + g\rho_0\eta_1\zeta_{1sz} + g\rho_0\zeta_{1z}\eta_{1s} \\ &+ \rho_0(u_0 - c)(\zeta_{1s\tau} + u_{1z}\zeta_{1s} + u_1\zeta_{1sz} + w_{1z}\zeta_{1z} + w_1\zeta_{1zz}) \\ &+ \rho_0 u_{0z}(\zeta_{1\tau} + u_1\zeta_{1s} + w_1\zeta_{1z}) + \rho_0(u_{1\tau} + u_1u_{1s} + w_1u_{1z}). \end{aligned}$$

С учетом выражений (A.21)–(A.25) правая часть F_2 принимает вид

$$\begin{aligned} F_2 = &- 2\sum_{i=1}^{m}\rho_0(u_0 - c)\varphi_{iz}A_{i\tau} + \sum_{i=1}^{m}\rho_0(u_0 - c)^2P_i^2A_iA_{is} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\rho_0(u_0 - c)^2Q_{ij}^2\left\{A_iA_j\right\}_s - 2\sum_{i=2}^{m}\Delta_i\rho_0(u_0 - c)\varphi_{iz}A_{is}. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Здесь

$$P_i^2 = 3\varphi_{iz}^2 - 2\varphi_i\varphi_{izz}, \quad Q_{ij}^2 = 3\varphi_{iz}\varphi_{jz} - \varphi_i\varphi_{jzz} - \varphi_j\varphi_{izz}. \tag{A.37}$$

В конечном итоге мы получили неоднородную краевую задачу для функции ζ_2:

$$\Big\{\rho_0(u_0 - c)^2\zeta_{2sz}\Big\}_z + \rho_0N^2\zeta_{2s} = F_1, \quad (-h < z < 0), \tag{A.38}$$

$$\zeta_{2s} = 0, \quad (z = -h), \qquad \rho_0(u_0 - c)^2\zeta_{2sz} - g\rho_0\zeta_{2s} = F_2, \quad (z = 0), \tag{A.39}$$

где правые части F_1 и F_2 определяются по формулам (A.31), (A.32), (A.33) и (A.36), (A.37) соответственно. Напомним, что мы имеем дело с набором из m мод φ_i с соответствующими собственными значениями c_i, $(i = 1, \ldots, m)$. Зафиксируем номер k, тогда для фазовой скорости c_k общее решение уравнения (A.38) имеет вид:

$$\zeta_{2s} = B_{ks}\varphi_k + \varphi_k \int\limits_{-h}^{z} F_1 \psi_k dz - \psi_k \int\limits_{-h}^{z} F_1 \varphi_k dz, \tag{A.40}$$

где $B_k = B_k(\tau,s)$ — амплитудные функции, φ_k — решение задачи (A.14), (A.15) для $c = c_k$, а ψ_k — линейно независимое с φ_k решение однородного уравнения, которое может быть вычислено по формуле Лиувилля. Отсюда, в частности, следует, что $\psi_k \neq 0$ при $z = -h$. Осталось удовлетворить граничным условиям (A.39), из которых вытекает следующее условие совместности

$$\int\limits_{-h}^{0} F_1 \varphi_k dz - F_2 \varphi_k \Big|_{z=0} = 0. \tag{A.41}$$

Рассмотрим коэффициент при $A_i A_{is}$ в левой части выражения (A.41) для некоторого номера i:

$$\hat{\gamma}_{ik} = \int\limits_{-h}^{0} 3\Big\{\rho_0 (u_0 - c)^2 \varphi_{iz}^2\Big\}_z \varphi_k dz + \int\limits_{-h}^{0} 2\Big\{\rho_0 (u_0 - c)^2 \varphi_{iz}\Big\}_z \varphi_{iz} \varphi_k dz$$
$$- \int\limits_{-h}^{0} 2\Big\{\rho_0 (u_0 - c)^2 \big\{\varphi_i \varphi_{iz}\big\}_z\Big\}_z \varphi_k dz - \rho_0 (u_0 - c)^2 \Big\{3\varphi_{iz}^2 - 2\varphi_i \varphi_{izz}\Big\}\Big|_{z=0}.$$

Интегрирование по частям и использование граничных условий (A.15) приводит к равенству

$$\hat{\gamma}_{ik} = -\int\limits_{-h}^{0} 3\rho_0 (u_0 - c)^2 \varphi_{iz}^2 \varphi_{kz} dz$$
$$+ \int\limits_{-h}^{0} 2\rho_0 (u_0 - c)^2 \varphi_i \varphi_{izz} \varphi_{kz} dz - \int\limits_{-h}^{0} 2\rho_0 (u_0 - c)^2 \varphi_{iz} \varphi_{izz} \varphi_k dz.$$

Далее воспользуемся равенством, которое справедливо для всех $i, j, l =$

$1,2,\ldots,m$:

$$\int\limits_{-h}^{0}\Big\{\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}\Big\}_z\varphi_{jz}\varphi_l dz=-\int\limits_{-h}^{0}\rho_0 N^2\varphi_i\varphi_{jz}\varphi_l dz \tag{A.42}$$

$$=g\rho_0\varphi_i\varphi_{jz}\varphi_l\Big|_{z=0}-\int\limits_{-h}^{0}\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}\varphi_{jzz}\varphi_l dz-\int\limits_{-h}^{0}\varphi_{iz}\varphi_{jz}\varphi_{lz}dz.$$

Таким образом получаем окончательное выражение для $\hat{\gamma_{ik}}$

$$\hat{\gamma}_{ik}=-\int\limits_{-h}^{0}3\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}^2\varphi_{kz}dz. \tag{A.43}$$

Аналогично вычисляется коэффициент при $(A_iA_j)_s$. В конечном итоге, используя свойство ортогональности (A.16), а также тот факт, что $c_k=c$ при $k=1$ и $c_k=c+\varepsilon^2\Delta_k$ при $k=2,\ldots,m$, в главном порядке получаем уравнение

$$\hat{\alpha}_k A_{k\tau}+\hat{\gamma}_{kk}\,A_kA_{ks}+\hat{\delta}_{kk}A_{ksss}+\hat{\alpha}_k\Delta_k A_{ks}+\sum_{i\neq k}\hat{\nu}_{ikk}\big\{A_iA_k\big\}_s \tag{A.44}$$

$$+\sum_{i\neq k}\hat{\gamma}_{ik}\,A_iA_{is}+\sum_{i\neq k}\hat{\delta}_{ik}A_{isss}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k}\hat{\nu}_{ijk}\big\{A_iA_j\big\}_s=0,$$

где

$$\hat{\alpha}_k=\int\limits_{-h}^{0}2\rho_0(u_0-c)\varphi_{kz}^2dz,\quad \hat{\delta}_{ik}=-\int\limits_{-h}^{0}\rho_0(u_0-c)^2\varphi_i\varphi_k dz,$$

$$\hat{\nu}_{ijk}=-\int\limits_{-h}^{0}3\rho_0(u_0-c)^2\varphi_{iz}\varphi_{jz}\varphi_{kz}dz,$$

а коэффициент $\hat{\gamma}_{ik}$ вычисляется по формуле (A.43). В конечном итоге, варьируя индекс k от 1 до m и учитывая, что $\Delta_1=0$, получаем искомую систему зацепленных уравнений Кортевега – де Фриза (многомодовый аналог системы Гира – Гримшоу).

Заключение

Основные результаты диссертационного исследования состоят в следующем:

1. Для модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза получены достаточные условия существования орбит периодических решений типа бегущих волн и исследована их асимптотика. Показано, что указанные условия определяют фазовый сдвиг волн как простой корень функционала, зависящего от нелинейных членов.
2. Для построенных семейств решений изучен предельный случай, когда амплитуда волн стремится к нулю. Найдена асимптотика функции Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова, в терминах которой формулируется достаточное условие существования синхронизированных мод.
3. Доказано, что трехмерное уравнение Хохлова – Заболоцкой допускает десять локальных трехмерных законов сохранения, которые вычислены в явном виде. Показана их связь с трехмерными локальными законами сохранения пары коммутирующих цепочек Бенни.
4. Доказано существование бесконечного числа трехмерных локальных законов сохранения для пар коммутирующих цепочек Бенни и Михалёва. Для этих цепочек построены производящие уравнения трехмерных законов сохранения, которые зависят от двух параметров.
5. Доказано, что N-компонентные редукции пар коммутирующих цепочек Бенни и Михалёва допускают N^2 бесконечных серий трехмерных законов сохранения. Вычисление этих серий в случае цепочек Бенни основано на особенностях римановых поверхностей, а в случае цепочек Михалёва следует из вида общего аналитического решения, заданного с произволом в $2N$ функций одного аргумента.

Список литературы

1. *Eckart C.* Internal waves in the ocean // *The physics of fluids.* — 1961. — Vol. 4, no. 7. — P. 791–799.

2. Stratified flows and internal waves in the Central West Atlantic / K.S. Grigorenko, N.I. Makarenko, E.G. Morozov et al. // Journal of Physics: Conference Series. — Vol. 722. — 2016. — P. 012011.

3. *Gear J. A., Grimshaw R.* Weak and strong interactions between internal solitary waves // *Studies in Applied Mathematics.* — 1984. — Vol. 70, no. 3. — P. 235–258.

4. *Grimshaw R.* Coupled Korteweg–de Vries equations // Without Bounds: A Scientific Canvas of Nonlinearity and Complex Dynamics. — Springer, 2013. — P. 317–333.

5. *Gear J. A.* Strong interactions between solitary waves belonging to different wave modes // *Studies in Applied Mathematics.* — 1985. — Vol. 72, no. 2. — P. 95–124.

6. *Liu A.K., Kubota T., Ko D.R.S.* Resonant transfer of energy between nonlinear waves in neighboring pycnoclines // *Studies in Applied Mathematics.* — 1980. — Vol. 63, no. 1. — P. 25–45.

7. *Weidman P.D., Johnson M.* Experiments on leapfrogging internal solitary waves // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1982. — Vol. 122. — P. 195–213.

8. *Mitsudera H.* Eady solitary waves: a theory of type B cyclogenesis // *Journal of the atmospheric sciences.* — 1994. — Vol. 51, no. 21. — P. 3137–3154.

9. *Gottwald G., Grimshaw R.* The formation of coherent structures in the context of blocking // *Journal of the atmospheric sciences.* — 1999. — Vol. 56, no. 21. — P. 3640–3662.

10. *Gottwald G., Grimshaw R.* The effect of topography on the dynamics of interacting solitary waves in the context of atmospheric blocking // *Journal of the atmospheric sciences.* — 1999. — Vol. 56, no. 21. — P. 3663–3678.

11. *Liu Z., Grimshaw R., Johnson E.* Resonant coupling of mode-1 and mode-2 internal waves by topography // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2021. — Vol. 908.

12. *Champneys A.R., Groves M.D., Woods P.D.* A global characterization of gap solitary-wave solutions to a coupled KdV system // *Physics Letters A.* — 2000. — Vol. 271, no. 3. — P. 178–190.

13. *Grimshaw R., Iooss G.* Solitary waves of a coupled Korteweg-de Vries system // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2003. — Vol. 62, no. 1-2. — P. 31–40.

14. Multi-pulse embedded solitons as bound states of quasi-solitons / K. Kolossovski, A.R. Champneys, A.V. Buryak, R.A. Sammut // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2002. — Vol. 171, no. 3. — P. 153–177.

15. *Fochesato C., Dias F., Grimshaw R.* Generalized solitary waves and fronts in coupled Korteweg–de Vries systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2005. — Vol. 210, no. 1-2. — P. 96–117.

16. *Malomed B. A.* "Leapfrogging" solitons in a system of coupled KdV equations // *Wave Motion.* — 1987. — Vol. 9, no. 5. — P. 401–411.

17. *Kivshar Y. S., Malomed B. A.* Solitons in a system of coupled Korteweg-de Vries equations // *Wave Motion.* — 1989. — Vol. 11, no. 3. — P. 261–269.

18. *Gottwald G., Grimshaw R., Malomed B.A.* Parametric envelope solitons in coupled Korteweg-de Vries equations // *Physics Letters A.* — 1997. — Vol. 227, no. 1-2. — P. 47–54.

19. *Wright J. D., Scheel A.* Solitary waves and their linear stability in weakly coupled KdV equations // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* — 2007. — Vol. 58, no. 4. — P. 535–570.

20. *Alias A., Grimshaw R., Khusnutdinova K.R.* On strongly interacting internal waves in a rotating ocean and coupled Ostrovsky equations // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* — 2013. — Vol. 23, no. 2. — P. 023121.

21. *Alias A., Grimshaw R., Khusnutdinova K.R.* Coupled Ostrovsky equations for internal waves in a shear flow // *Physics of Fluids.* — 2014. — Vol. 26, no. 12. — P. 126603.

22. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — Наука, 1979.

23. *Юдович В. И.* Свободная конвекция и ветвление // *Прикл. математика, механика.* — 1967. — Т. 31, № 1. — С. 101–111.

24. *Логинов Б. В., Треногин В. А.* Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений // *Математический сборник.* — 1971. — Т. 85, № 3 (7. — С. 440–454.

25. *Логинов Б. В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. — ФАН, 1985.

26. *Логинов Б. В.* Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия.* — 1998. — № 4. — С. 15–70.

27. *Рудин У.* Функциональный анализ. — ЛАНЬ, 2005.

28. *Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D. G.* Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Volume II. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 69.

29. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // *Математические заметки.* — 1991. — Т. 49, № 5. — С. 142–148.

30. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Применение метода Ляпунова–Шмидта в задаче ответвления цикла от семейства равновесий системы с мультикосимметрией // *Сибирский математический журнал.* — 2000. — Т. 41, № 1. — С. 136–149.

31. *Макаренко Н. И.* О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений // Доклады Академии наук. — Т. 348. — 1996. — С. 302–304.

32. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // *Acta mathematica.* — 1890. — Vol. 13, no. 1. — P. A3–A270.

33. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // *ЖЭТФ.* — 1934. — Т. 4, № 9. — С. 234.

34. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Труды Московского математического общества.* — 1963. — Т. 12. — С. 3–52.

35. *Denisenko D. S., Makarenko N. I.* Trapped solitary waves over an uneven bottom // *The European Physical Journal Plus.* — 2020. — Vol. 135, no. 8. — P. 1–16.

36. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. — Ин-т компьютер. исслед., 2003.

37. *Majda A.* Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 53.

38. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — Наука, 1986.

39. *Gavrilyuk S.L., Makarenko N.I., Sukhinin S.V.* Waves in continuous media. — Springer, 2017.

40. *Haantjes J.* On Xm-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae (Proceedings). — Vol. 58. — 1955. — P. 158–162.

41. *Царев С. П.* О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Доклады Академии наук. — Т. 282. — 1985. — С. 534–537.

42. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // *Известия Российской академии наук. Серия математическая.* — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 1048–1068.

43. *Benney D.J.* Some properties of long nonlinear waves // *Studies in Applied Mathematics.* — 1973. — Vol. 52, no. 1. — P. 45–50.

44. *Купершмидт Б. А., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1977. — Т. 11, № 3. — С. 31–42.

45. *Купершмидт Б. А., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнения // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1978. — Т. 12, № 1. — С. 25–37.

46. *Gibbons J., Tsarev S. P.* Reductions of the Benney equations // *Physics Letters A.* — 1996. — Vol. 211, no. 1. — P. 19–24.

47. *Pavlov M. V.* Integrable hydrodynamic chains // *Journal of Mathematical Physics.* — 2003. — Vol. 44, no. 9. — P. 4134–4156.

48. *Pavlov M. V.* The Kupershmidt hydrodynamic chains and lattices // *International Mathematics Research Notices.* — 2006. — Vol. 2006. — P. 46987.

49. *Ferapontov E.V., Marshall D.G.* Differential-geometric approach to the integrability of hydrodynamic chains: the Haantjes tensor // *Mathematische Annalen.* — 2007. — Vol. 339, no. 1. — P. 61–99.

50. *Ferapontov E.V., Khusnutdinova K. R.* On the integrability of (2+ 1)-dimensional quasilinear systems // *Communications in mathematical physics.* — 2004. — Vol. 248, no. 1. — P. 187–206.

51. *Burnat M.* Method of Riemann invariants for multi-dimensional non-elliptic systems // *Academie Polonaise des sciences bulletin, serie des sciences techniques.* — 1969. — Vol. 17, no. 11-1. — P. 1019.

52. *Burnat M.* The method of characteristics and Riemann invariants for multidimensional hyperbolic systems // *Siberian Mathematical Journal.* — 1970. — Vol. 11, no. 2. — P. 210–232.

53. *Burnat M.* The method of Riemann invariants and its applications to the theory of plasticity. I // *Archiwum Mechaniki Stosowanej.* — 1971. — Vol. 23, no. 6. — P. 817–838.

54. *Burnat M.* The method of Riemann invariants and its applications to the theory of plasticity. II // *Commun. Arch. Mech. Stos.* — 1972. — Vol. 24, no. 1. — P. 3–26.

55. *Dinu L.* Some remarks concerning the Riemann invariance, Burnat-Peradzynski and Martin approaches // *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* — Vol. 35. — P. N3.

56. *Grundland A. M., Żelazny R.* Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. I. Theory of simple waves and simple states. Examples of applications // *Journal of mathematical physics.* — 1983. — Vol. 24, no. 9. — P. 2305–2314.

57. *Grundland A. M., Żelazny R.* Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. II. Riemann invariants for the problem of simple wave interactions // *Journal of mathematical physics.* — 1983. — Vol. 24, no. 9. — P. 2315–2328.

58. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. — Наука. Сиб. отд-ние, 1984.

59. *Peradzynski Z.* Riemann invariants for nonplanar k-waves // *Academie Polonaise des sciences bulletin, serie des sciences techniques.* — 1971. — Vol. 19, no. 10. — P. 717–724.

60. *Peradzynski Z.* Nonlinear plane k-waves and Riemann invariants // *Academie Polonaise des sciences bulletin, serie des sciences techniques.* — 1971. — Vol. 19, no. 9. — P. 625–632.

61. *Ferapontov E.V., Khusnutdinova K. R.* The characterization of two-component (2+ 1)-dimensional integrable systems of hydrodynamic type // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2004. — Vol. 37, no. 8. — P. 2949.

62. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R., Tsarev S. P.* On a class of three-dimensional integrable Lagrangians // *Communications in mathematical physics.* — 2006. — Vol. 261, no. 1. — P. 225–243.

63. *Ferapontov E. V., Hadjikos L., Khusnutdinova K. R.* Integrable equations of the dispersionless Hirota type and hypersurfaces in the Lagrangian Grassmannian // *International Mathematics Research Notices.* — 2010. — Vol. 2010, no. 3. — P. 496–535.

64. *Kodama Y., Gibbons J.* A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. II // *Physics Letters A.* — 1989. — Vol. 135, no. 3. — P. 167–170.

65. *Павлов М. В.* Классификация интегрируемых егоровских гидродинамических цепочек // *Теоретическая и математическая физика.* — 2004. — Т. 138, № 1. — С. 55–70.

66. *Ферапонтов Е. В., Хуснутдинова К. Р., Павлов М. В.* Классификация интегрируемых (2+1)-мерных квазилинейных иерархий // *Теоретическая и математическая физика.* — 2005. — Т. 144, № 1. — С. 35–43.

67. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54–66.

68. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Наука, 1978.

69. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.

70. *Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др.* Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. — Изд-во Изд-во Факториал Пресс, 2005.

71. *Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C.* Applications of symmetry methods to partial differential equations. — Springer, 2010.

72. *Макаренко Н. И., Макридин З. В.* Периодические колебания и волны в нелинейных слабо связанных системах с дисперсией // *Труды Математического института имени ВА Стеклова.* — 2018. — Т. 300, № 0. — С. 158–167.

73. *Макридин З. В.* Эффективный алгоритм нахождения многомерных законов сохранения для интегрируемых систем гидродинамического типа // *Теоретическая и математическая физика.* — 2018. — Т. 194, № 2. — С. 320–330.

74. *Makridin Z. V., Pavlov M. V.* Multi-dimensional conservation laws and integrable systems // *Studies in Applied Mathematics.* — 2019. — Vol. 143, no. 4. — P. 339–355.

75. *Makridin Z. V., Pavlov M. V.* Multi-dimensional conservation laws and integrable systems II // *Studies in Applied Mathematics.* — 2022. — Vol. 148, no. 2. — P. 813–824.

76. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Synchronization of traveling waves in a dispersive system of weakly coupled equations // Journal of Physics: Conference Series. — Vol. 722. — 2016. — P. 012028.

77. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Bifurcation of periodic solutions to nonlinear dispersive systems with symmetry and cosymmetry // AIP Conference Proceedings. — Vol. 2153. — 2019. — P. 020011.

78. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. — John Wiley & Sons, 2011.

79. *Grimshaw R.* Environmental stratified flows. No. 3. — Springer Science & Business Media, 2002.

80. *Helfrich K. R., Melville W. K.* Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2006. — Vol. 38. — P. 395–425.

81. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.

82. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу: Пер. с англ. — Мир, 1977.

83. *Vanderbauwhede A.* Local bifurcation and symmetry. — Pitman Boston, 1982.

84. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — Физматлит, 2002.

85. *Buffoni B., Toland J. F.* Analytic theory of global bifurcation. — Princeton University Press, 2016.

86. The constrained Liapunov-Schmidt procedure and periodic orbits / M. Golubitsky, J. E. Marsden, I. Stewart, M. Dellnitz // *Fields Institute Communications.* — 1995. — Vol. 4. — P. 81–127.

87. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Наука., 1970.

88. *Брюно А. Д.* Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой // *Математические заметки.* — 1990. — Т. 48, № 5. — С. 35–46.

89. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Доклады Академии наук. — Т. 270. — 1983. — С. 781–785.

90. *Pavlov M.V.* Algebro-geometric approach in the theory of integrable hydrodynamic type systems // *Communications in mathematical physics.* — 2007. — Vol. 272, no. 2. — P. 469–505.

91. *Gibbons J.* Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 1981. — Vol. 3, no. 3. — P. 503–511.

92. *Налимов В. И., Пухначев В. В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей:(Спцкурс для студентов НГУ). — Изд-во Новосибирск. ун-та, 1975.

93. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. — Springer Science & Business Media, 1997. — Vol. 26.

94. *Lannes D.* The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics. — American Mathematical Soc., 2013. — Vol. 188.

95. *Тер-Крикоров А.М.* Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // *Прикладная математика и механика.* — 1960. — Т. 24, № 4. — С. 622–636.

96. *Littman W.* On the existence of periodic waves near critical speed // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1957. — Vol. 10, no. 2. — P. 241–269.

97. *Юдович В. И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // *Математические заметки.* — 1996. — Т. 60, № 2. — С. 313–317.

98. *Логинов Б. В., Коноплева И. В., Русак Ю. Б.* Симметрия и потенциальность в общей задаче теории ветвления // *Известия высших учебных заведений. Математика.* — 2006. — № 4. — С. 30–40.

99. *Павлов М. В.* Точная интегрируемость системы уравнений Бенни // Доклады Академии наук. — Т. 339. — 1994. — С. 311–313.

100. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // *Journal of Mathematics and Physics*. — 1948. — Vol. 27, no. 1-4. — P. 220–231.

101. *Burovskiy P.A., Ferapontov E.V., Tsarev S.P.* Second-order quasilinear PDEs and conformal structures in projective space // *International Journal of Mathematics*. — 2010. — Vol. 21, no. 06. — P. 799–841.

102. *Chesnokov A. A., Pavlov M. V.* The Russo–Smereka kinetic equation: Conservation laws, reductions and numerical solutions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2015. — Vol. 303. — P. 50–58.

103. Stability of shear shallow water flows with free surface / A.A. Chesnokov, G.A. El, S. L. Gavrilyuk, M. V. Pavlov // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2017. — Vol. 77, no. 3. — P. 1068–1087.

104. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.

105. *Михалев В. Г.* О гамильтоновом формализме иерархий типа Кортевега–де Фриза // *Функциональный анализ и его приложения*. — 1992. — Т. 26, № 2. — С. 79–82.

106. *Pavlov M. V.* Integrable dispersive chains and energy dependent Schrödinger operator // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2014. — Vol. 47, no. 29. — P. 295204.

107. *Ферапонтов Е. В.* Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей // *Математический сборник*. — 1990. — Т. 181, № 9. — С. 1220–1235.

108. *Ferapontov E. V.* Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariats // *Physics Letters A*. — 1991. — Vol. 158, no. 3-4. — P. 112–118.

109. *Dubrovin B. A., Matveev V. B., Novikov S. P.* Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties // *Russian mathematical surveys.* — 1976. — Vol. 31, no. 1. — P. 59.

110. *Павлов М. В.* Гамильтонов формализм слабонелинейных систем гидродинамики // *Теоретическая и математическая физика.* — 1987. — Т. 73, № 2. — С. 316–320.

111. *Alonso L. M., Shabat A. B.* Towards a theory of differential constraints of a hydrodynamic hierarchy // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* — 2003. — Vol. 10, no. 2. — P. 229–242.

112. *Alonso L. M., Shabat A. B.* Energy-dependent potentials revisited: a universal hierarchy of hydrodynamic type // *Physics Letters A.* — 2002. — Vol. 300, no. 1. — P. 58–64.

113. *Алонсо Л. М., Шабат А. Б.* Гидродинамические редукции и решения универсальной иерархии // *Теоретическая и математическая физика.* — 2004. — Т. 140, № 2. — С. 216–229.

114. *Адлер В. Э., Шабат А. Б.* Модельное уравнение теории солитонов // *Теоретическая и математическая физика.* — 2007. — Т. 153, № 1. — С. 29–45.

115. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — Наука., 1968.

116. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R., Klein C.* On linear degeneracy of integrable quasilinear systems in higher dimensions // *Letters in Mathematical Physics.* — 2011. — Vol. 96, no. 1. — P. 5–35.

117. *Marvan M., Pavlov M. V.* Integrable dispersive chains and their multi-phase solutions // *Letters in Mathematical Physics.* — 2019. — Vol. 109, no. 5. — P. 1219–1245.

118. *Hermite Ch.* Sur l'équation de Lamé. — Ch. Cours d'analyse de l' Ecole polytechn. Paris, 32-e lecon, 1872-1873.

119. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриса // *Математический сборник.* — 1974. — Т. 95, № 3 (11. — С. 331–356.

120. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Асимптотика резольвенты штурм–лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега–де Фриза. // *Успехи математических наук.* — 1975. — Т. 30, № 5 (185. — С. 67–100.

121. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Об операторах Хилла с конечным числом лакун // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1975. — Т. 9, № 1. — С. 69–70.

122. *Yih C.-S.* Stratified flows. — Elsevier, 2012.