

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Фанкина Ирина Владимировна

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ
ДВУСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С
ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ**

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Хлуднев Александр Михайлович

Новосибирск — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной	14
1.1 Постановка задачи	14
1.2 Существование решения задачи	21
1.3 Предельный переход по параметру жесткости верхнего слоя	28
1.3.1 Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$	28
1.3.2 Предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$	31
Глава 2. Задача равновесия для двуслойной конструкции с жестким слоем при наличии трещины	34
2.1 Постановка задачи	34
2.2 Предельный переход по параметру размера верхнего слоя . .	37
2.3 Управление размером жесткого слоя конструкции	41
2.3.1 Производная функционала энергии по длине трещины	41
2.3.2 Задача оптимального управления	43
Глава 3. Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с дефектом вдоль линии соединения слоев	47
3.1 Постановка задачи	47
3.2 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта	54
3.3 Предельный переход по параметру жесткости верхнего слоя	58
3.4 Краевая задача равновесия конструкции с жестким верхним слоем	60
3.5 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта в задаче равновесия конструкции с жестким верхним слоем	63

Глава 4. Задача равновесия для двуслойной конструкции, в которой верхний слой накрывает вершину дефекта	67
4.1 Постановка задачи	67
4.2 Предельный переход по параметру жесткости верхнего слоя	75
4.3 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта	79
4.4 Задача оптимального управления	83
Заключение	92
Список литературы	94

Введение

Многие конструкции, встречающиеся в практической деятельности, состоят из упругих тел, пластин и балок, соединенных между собой. При создании или эксплуатации в конструкциях могут возникать трещины. Наличие трещин в конструкции может существенно снизить показатели механических свойств изделия. Поэтому исследование математических моделей, описывающих деформирование конструкций с трещинами является актуальной проблемой.

Классический подход к моделированию трещин характеризуется тем, что на их берегах задаются линейные краевые условия. Как правило, это условия равенства вектора напряжений или вектора перемещений заданной функции на поверхности, соответствующей трещине:

$$u_i = f_i \quad \text{на } \gamma,$$

$$\sigma_{ij}\nu_j = g_i \quad \text{на } \gamma,$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ν_j – компоненты вектора нормали к описывающей трещину поверхности γ ; f_i, g_i – заданные функции. К настоящему времени накоплена обширная литература, связанная с изучением задач теории трещин с классическими краевыми условиями, [1–7]. Особенность краевых задач для упругих тел с трещинами заключается в том, что они ставятся в негладкой области. Исследованию краевых задач для эллиптических операторов в областях с негладкими границами посвящены работы [8–10].

Использование в модели линейных краевых условий часто приводит к физически противоречивому явлению взаимного проникания противоположных берегов трещины. С такой точки зрения наиболее подходящими для описания поведения тел с трещинами являются модели с нелинейными условиями, задаваемыми на скачок нормальной составляющей вектора перемещений и допускающими только касание или расхождение

берегов:

$$[u_i \nu_i] \geq 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (1)$$

Идейной основой введения краевых условий такого вида для описания поведения трещины послужила работа А. Синьорини (1933), в которой была поставлена задача о контакте упругого тела с жестким препятствием. При этом на границе контакта задавалось условие одностороннего ограничения на перемещения тела. В монографии [11] приводятся результаты, относящиеся к задаче Синьорини, а также можно найти обзор работ авторов, обобщивших одностороннюю задачу в различных направлениях. Задача Синьорини, которую можно свести к задаче минимизации функционала упругой энергии тела на выпуклом замкнутом множестве допустимых перемещений, удовлетворяющих одностороннему ограничению в области возможного контакта с жестким препятствием, положила начало развития теории вариационных неравенств, [12–17]. Изучение вариационной формулировки задачи позволяет ослабить требование на гладкость решения. Однако гладкость решения вариационной задачи зависит не только от гладкости данных задачи, но и от характера выпуклых ограничений, которыми определяется множество допустимых функций. Вопросы регулярности решений вариационных неравенств освещены, например, в [11; 15; 16; 18–20].

В дополнение к условию непроникания (1) на поверхности трещины в упругом теле возникают следующие ограничения: касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения на противоположных берегах трещины равны; кроме того, нормальные напряжения в случае расхождения берегов трещины равны нулю, а в случае контакта берегов трещины – отрицательны, причем заранее область контакта берегов неизвестна. Дополнительные условия естественным образом вытекают из вариационной формулировки задачи, в которой множество допустимых перемещений содержит функции, удовлетворяющие условию (1).

В соответствии с гипотезами моделей Кирхгофа – Лява и Тимошенко были получены условия непроникания, аналогичные (1), для берегов трещин в пластинах. Последние десятилетия характеризуются активным изучением задач равновесия в рамках моделей с нелинейными краевыми условиями,

которые описывают поведение упругих тел и пластин с трещинами без трения (см., например, [21–27]). Один из значимых результатов заключается в обосновании метода фиктивных областей. Метод является эффективным, в частности, при доказательстве разрешимости контактных задач с односторонними ограничениями (задача Синьорини) и задач равновесия упругих тел и пластин с трещинами, выходящими на внешнюю границу под нулевым углом, [28–36].

Стоит отметить работы, в которых используются более сложные краевые условия для описания поведения трещины. В статьях [37–40] исследуются модели для трещин с условиями непроникания и трения, которое задается неотрицательной, суммируемой с квадратом функцией или определяется в соответствии со статическим законом трения Кулона [41]. В [42–44] рассматриваются задачи равновесия упругих тел, в которых учитываются силы сцепления и непроникание между противоположными берегами трещин.

В недавней работе [45] были предложены нелинейные краевые условия для описания объекта, названного дефектом: на поверхности, соответствующей дефекту, выполняется условие (1), касательные напряжения совпадают на противоположных берегах дефекта и пропорциональны скачку касательных перемещений упругого тела; нормальные напряжения равны на противоположных берегах и не превосходят скачка нормальных перемещений. Причем в последнем условии выполняется равенство, если берега расходятся, и выполняется строгое неравенство, если берега контактируют. Также эти краевые условия содержат параметр повреждаемости, который характеризует дефект: чем больше его значение, тем слабее трение и сцепление берегов дефекта, и наоборот. Кроме того, модель с нелинейными краевыми условиями, описывающими трещину без трения на берегах, является предельной для модели с условиями, задаваемыми на дефекте; с этой точки зрения краевые условия, используемые для моделирования дефектов, являются более общими. В статьях [46;47] рассмотрены задачи равновесия для упругих тел с тонкими включениями при наличии дефектов.

Одной из важных проблем является исследование влияния различных

физических и геометрических параметров изучаемого объекта на дальнейшее развитие трещины. Для предсказания разрушения часто применяется энергетический критерий Гриффитса, в соответствии с которым трещина начнет распространяться, когда скорость освобождения энергии упругой деформации превзойдет прирост поверхностной энергии трещины [48; 49]. Другими словами, трещина в упругой среде станет развиваться, когда производная функционала энергии по длине трещины достигнет критического значения (заданный параметр, который характеризуется свойствами материала). В рамках данного подхода получены формулы производных функционала энергии по длине трещины для различных моделей упругих тел и пластин и изучен ряд соответствующих задач оптимального управления, см. например [27; 45; 50–62].

Первыми работами, в которых в рамках моделей с условиями непроникания изучались задачи равновесия для конструкций, состоящих из двух слоев, являются статьи [54; 55]. В [63] исследована задача о равновесии двуслойной конструкции со сквозной трещиной; в [64] произведено ее численное моделирование. Задачи равновесия для различных двуслойных конструкций, формулируемые в плоской постановке, изучались в работах [56; 57; 60; 65–67]. В [68] рассмотрена квазистатическая трехмерная задача о расслоении слоистой пластины.

Задачи равновесия двуслойных конструкций можно рассматривать как контактные задачи, в которых известна область контакта тел, являющихся слоями конструкции. В работе [69] изучается контактная задача для двух упругих пластин одинаковой формы, которые склеены на одном из берегов трещины, находящейся в нижней пластине, а вне линии склейки область контакта пластин заранее неизвестна; искомыми функциями в задаче являются как горизонтальные смещения, так и прогибы пластин. В [70] проводится анализ задачи с неизвестной областью контакта для двух вязкоупругих пластин, расположенных одна над другой, при наличии трещины в одной из пластин. В [71–74] исследованы задачи равновесия для двух пластин, расположенных под углом друг к другу, с возможным контактом между ними.

Цель работы. Основной целью диссертации является исследование свойств решений нелинейных краевых задач, описывающих равновесие двуслойных конструкций с трещинами и дефектами. Для достижения цели требовалось решить следующие задачи:

– Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с трещиной, выходящей на внешнюю границу под нулевым углом, установить существование решения; исследовать асимптотическое поведение решения при стремлении параметра жесткости верхнего слоя к нулю и к бесконечности.

– В задаче равновесия двуслойной конструкции с жестким слоем при наличии трещины осуществить предельный переход при стремлении параметра, характеризующего размер жесткого слоя, к нулю; доказать существование решения задачи оптимального управления, в которой целевой функционал – производная функционала энергии по длине трещины, а функцией управления является параметр размера жесткого слоя.

– Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом вдоль линии соединения слоев установить существование решения; выполнить переходы к пределу в случаях, когда параметр повреждаемости дефекта стремится к нулю и к бесконечности; перейти к пределу в задаче по параметру жесткости верхнего слоя; в предельной задаче равновесия для конструкции с жестким верхним слоем исследовать поведение решения при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности.

– Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину прямолинейного дефекта, установить существование решения; осуществить в задаче предельные переходы по параметру повреждаемости дефекта и параметру жесткости верхнего слоя; доказать разрешимость задачи оптимального управления, в которой функционал качества – производная функционала энергии по длине дефекта, функции управления – пара указанных параметров.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, вариационного исчисления, теории пространств Соболева и оптимального управления. В частности, для достижения поставленной цели исследуются вариационные формулировки задач равновесия.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с трещиной, выходящей на внешнюю границу под нулевым углом:
 - установлена разрешимость задачи;
 - получены предельные задачи равновесия конструкций для случаев, когда параметр жесткости верхнего слоя устремляется к нулю и к бесконечности.
- Для задачи равновесия двуслойной конструкции с жестким слоем при наличии трещины:
 - осуществлен переход к пределу при стремлении параметра размера жесткого слоя к нулю;
 - доказано существование решения задачи оптимального управления, в которой целевым функционалом является производная функционала энергии конструкции по длине трещины, а функцией управления выступает параметр размера верхнего слоя.
- Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом вдоль линии соединения слоев:
 - доказано существование решения задачи;
 - осуществлены предельные переходы при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности;
 - выполнен переход к пределу в задаче по параметру жесткости верхнего слоя;
 - в предельной задаче равновесия для конструкции с жестким верхним слоем проведен анализ поведения решения при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности.
- Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину прямолинейного дефекта:
 - доказана разрешимость задачи;
 - осуществлены предельные переходы по параметру повреждаемости дефекта;
 - проделаны переходы к пределу по параметру жесткости верхнего слоя;
 - доказано существование решения в задаче оптимального

управления, в которой функционал качества – производная функционала энергии конструкции по длине дефекта, функции управления – параметр повреждаемости дефекта и параметр жесткости верхнего слоя.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Постановка задач, представленных в диссертации, была предложена научным руководителем.

Научная новизна. В работе установлена разрешимость краевых задач с нелинейными граничными условиями, которые задаются на кривой и моделируют поведение берегов трещин при условии их непроникания друг в друга. Также проведен анализ зависимости решений задач равновесия от различных параметров, характеризующих геометрию и структуру конструкций. Все полученные результаты являются новыми. Они получены впервые для моделей конструкций, которые приводятся в работе.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, могут стать основой для дальнейшего теоретического и численного анализа задач.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается строгим математическим обоснованием, корректностью постановки задач и сравнением с результатами других авторов.

Апробация работы. Результаты, представляемые в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 10 научных конференциях:

- XI Всероссийская конференция молодых ученых “Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии”, 20 - 23 марта 2017, Кемеровская обл., пос. Шерегеш;
- VII Международная молодежная научная конференция “Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2017”, 27-29 ноября 2017, г. Томск;
- V Всероссийская конференция с международным участием “Полярная механика”, 9-11 октября 2018, г. Новосибирск;

- Десятая международная молодежная научная школа-конференция “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”, 10-13 октября 2018, г. Новосибирск;
- Международная школа-конференция “Соболевские чтения”, посвященная 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева, 10-16 декабря 2018, г. Новосибирск;
- Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященная 100-летию академика Л.В. Овсянникова “Математические проблемы механики сплошных сред”, 13-17 мая 2019, г. Новосибирск;
- Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова “Математика в приложениях”, 4-10 августа 2019, г. Новосибирск;
- Russia-Japan Workshop “Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications”, November 11-13, 2019, Novosibirsk;
- X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию Владимира Николаевича Врагова, 27 июля - 01 августа 2020, г. Якутск;
- IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”, 7-11 сентября 2020, г. Новосибирск.

Кроме того, результаты диссертации сообщались и обсуждались на спецсеминаре “Краевые задачи в областях с негладкими границами” ИГиЛ СО РАН (2016-2020 гг.) и на конкурсе научных работ молодых ученых ИГиЛ СО РАН (2016 г., 2018 г., 2019 г.).

Публикации. Содержание и результаты диссертационной работы отражены в 14 публикациях, из которых 4 работы – статьи [75–78] в рецензируемых российских изданиях, входящих в перечень ВАК; 10 публикаций – тезисы всероссийских и международных конференций.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 80 наименований работ. Главы разделены на параграфы, параграфы – на разделы. Диссертация изложена на 101 странице текста и содержит 9

рисунков. Нумерация формул и рисунков в диссертации двойная: первое число – номер главы, в которой приводится формула или рисунок; второе число – порядковый номер формулы или рисунка в пределах главы.

Краткое содержание диссертации. В диссертации представлены четыре краевые задачи, которые описывают равновесие различных двухслойных конструкций. Упругие слои конструкций моделируются как тела в плоском напряженном состоянии. Моделирование жестких слоев заключается в том, что вводится ограничение на структуру их перемещений. Для описания трещин и дефектов в конструкциях используются нелинейные краевые условия непроникания, которые задаются на соответствующих кривых.

В первой главе рассматривается задача о равновесии конструкции, в которой верхний слой приклеен по части края к нижнему. Вне линии склейки нижний слой закреплен по внешнему краю, а верхний – имеет свободный край. В нижнем слое вдоль линии соединения имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым углом. В параграфе 1.1 сформулирована задача равновесия в дифференциальном и вариационном виде. В параграфе 1.2 для задачи доказано существование решения, при этом применялся метод фиктивных областей. В параграфе 1.3 проведен анализ поведения решения задачи равновесия при стремлении параметра, характеризующего жесткость верхнего слоя, к нулю и к бесконечности.

Во второй главе изучается задача, описывающая равновесие двухслойной конструкции с жестким верхним слоем. Предполагается, что верхний слой приклеен по части края к нижнему. В нижнем упругом слое есть трещина вдоль линии соединения слоев. В параграфе 2.1 приводятся дифференциальная и вариационная постановки задачи. В параграфе 2.2 исследован случай, когда размер верхнего слоя стремится к нулю, получена формулировка предельной задачи. В параграфе 2.3 рассмотрен вопрос о влиянии размера верхнего слоя на дальнейшее развитие трещины в конструкции, который сформулирован в виде задачи оптимального управления. За основу задачи оптимального управления выбран энергетический критерий разрушения Гриффитса: функционалом качества является производная функционала энергии конструкции по длине

трещины, а функцией управления – параметр, характеризующий размер жесткого слоя. Доказано существование решения задачи.

В третьей главе исследуется краевая задача для конструкции с дефектом. Слои конструкции контактируют по заданной линии, на которой задается условие равенства перемещений. При этом в нижнем слое имеется дефект вдоль линии склейки. В параграфе 3.1 сформулирована задача равновесия, и с помощью вариационного подхода установлена ее разрешимость. В параграфе 3.2 осуществлен предельный переход в задаче при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности. Получены дифференциальные формулировки для соответствующих предельных задач. В параграфе 3.3 рассмотрен случай стремления параметра жесткости верхнего слоя к бесконечности, получена вариационная формулировка предельной задачи. В параграфе 3.4 выведена эквивалентная на классе гладких решений дифференциальная формулировка задачи, полученной в параграфе 3.3. В параграфе 3.5 осуществлены предельные переходы по параметру повреждаемости дефекта в задаче, полученной в параграфе 3.3.

В четвертой главе рассматривается задача равновесия для конструкции, в которой верхний слой приклеен по своему краю к нижнему слою и накрывает одну из вершин прямолинейного дефекта. В параграфе 4.1 приводятся дифференциальная и вариационная формулировки задачи равновесия, доказываются существование решения задачи. В параграфах 4.2 и 4.3 осуществлены предельные переходы по параметру, характеризующему жесткость верхнего слоя, а также по параметру повреждаемости дефекта. В параграфе 4.4 рассмотрена задача оптимального управления, формулируемая в соответствии с критерием Гриффитса: целевым функционалом выбрана производная функционала энергии конструкции по длине дефекта. В качестве функций управления выступают два параметра, указанные выше. Доказано, что задача оптимального управления имеет решение.

Глава 1. Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной

В этой главе исследуется задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с верхним слоем, приклеенным к нижнему по части края. В нижнем слое вдоль линии склейки имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым углом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, исключающие их взаимное проникание. Рассматривается вопрос о разрешимости задачи равновесия, а также – о поведении решения задачи в случае стремления параметра, характеризующего жесткость верхнего слоя, к нулю и к бесконечности.

1.1 Постановка задачи

Пусть на плоскости слоям соответствуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ соответственно (рис. 1.1). Предполагается, что слои соединяются по линии, которой соответствует

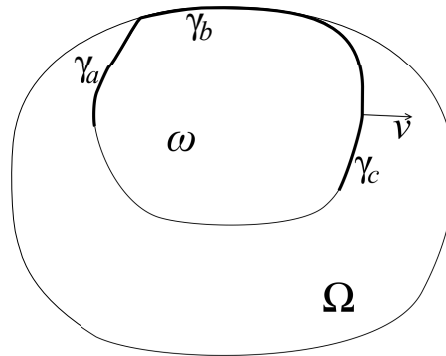


Рисунок 1.1 — Геометрия конструкции на плоскости.

гладкая кривая γ , не имеющая самопересечений, $\bar{\gamma} \subset \bar{\Omega}$ и $\bar{\gamma} \subset \partial\omega$. Кривую можно представить в виде объединения $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b \cup \gamma_c$ таким образом, что на γ_a слои сцеплены, γ_b соответствует общей границе слоев, вдоль γ_c имеется трещина. Кроме того, считается, что кривая γ_c выходит на внешнюю границу

$\partial\Omega$ под нулевым углом. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к $\partial\omega$, $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяются положительный и отрицательный берега γ^\pm . Наличие трещины предполагается на положительном берегу γ_c . Введем обозначения $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\Omega_{\gamma_c} = \Omega \setminus \bar{\gamma}_c$.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – симметричный и положительно определенный тензор модулей упругости нижнего слоя:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (1.1)$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}; \quad c = \text{const} > 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее предполагается, что все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть тензор модулей упругости верхнего слоя $B = \{b_{ijkl}\}$ обладает теми же свойствами. Кроме того, $a_{ijkl} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $b_{ijkl} \in L^\infty(\omega)$, $i, j, k, l = 1, 2$.

Пусть $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ – горизонтальные смещения точек нижнего и верхнего слоя соответственно, $u_\nu = u_i\nu_i, i = 1, 2$. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$ обозначим тензор деформаций,

$$\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2; \quad (1.3)$$

при этом $w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ – частная производная по соответствующей пространственной переменной x_j . Введем также обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Кроме того, для $P \in \{\sigma, p\}$ верно:

$$P\nu = (P_{1j}\nu_j, P_{2j}\nu_j), \quad P_\nu = P_{ij}\nu_j\nu_i, \quad P_\tau = P_{ij}\nu_j\tau_i. \quad (1.4)$$

Запись $[w] = w^+ - w^-$ означает скачок функции на γ , где w^\pm – следы функции w на берегах γ^\pm .

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции при наличии трещины под действием заданных внешних сил $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$

имеет вид:

Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_{\gamma_c}, \quad (1.5)$$

$$-\operatorname{div} p = g \quad \text{в} \quad \omega, \quad p = B\varepsilon(v) \quad \text{в} \quad \omega, \quad (1.6)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \gamma, \quad p\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \setminus \gamma, \quad (1.7)$$

$$u = v \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b, \quad [\sigma\nu] = p\nu \quad \text{на} \quad \gamma_a, \quad -\sigma\nu = p\nu \quad \text{на} \quad \gamma_b, \quad (1.8)$$

$$u^- = v, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c, \quad (1.9)$$

$$[\sigma_\nu] = p_\nu, \quad -\sigma_\tau^- = p_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_c. \quad (1.10)$$

Соотношения в (1.5), (1.6) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для слоев. Условия в (1.7) описывают поведение внешнего края нижнего и верхнего слоя вне линии склейки. Равенства в (1.8) соответствуют склейке слоев и совпадению усилий в слоях на линии склейки $\gamma_a \cup \gamma_b$. Второе условие в (1.9) обеспечивает непроникание берегов трещины γ^\pm друг в друга. Условия в (1.10) означают равенство нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих со стороны слоев на линии склейки γ_c .

В то же время, задачу равновесия двуслойной конструкции с трещиной можно записать в виде задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений:

$$\text{Найти такую} \quad (u, v) \in K, \quad \text{что} \quad \Pi(u, v) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K} \Pi(\bar{u}, \bar{v}). \quad (1.11)$$

При этом множество допустимых перемещений определяется следующим образом:

$$K = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega \setminus \gamma}(\Omega_{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \bar{u} = \bar{v} \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b; \\ \bar{u}^- = \bar{v}, \quad [\bar{u}_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c\},$$

где $H^1_{\partial\Omega\setminus\gamma}(\Omega_{\gamma_c})$ – пространство Соболева вида

$$H^1_{\partial\Omega\setminus\gamma}(\Omega_{\gamma_c}) = \{\bar{u} \in H^1(\Omega_{\gamma_c}) \mid \bar{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \gamma\};$$

функционал потенциальной энергии имеет вид:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v}.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.11) является существование решения вариационной задачи:

$$\text{Найти такую } (u, v) \in K, \text{ что} \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) \geq 0$$

$$\text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \quad (1.13)$$

Теорема 1.1. *Дифференциальная задача (1.5)-(1.10) эквивалентна вариационной задаче (1.12), (1.13) на классе гладких функций.*

Доказательство. Покажем, что из дифференциальной постановки (1.5) – (1.10) следует вариационное неравенство (1.12), (1.13). Пусть функция (u, v) есть решение краевой задачи (1.5)-(1.10), а (\bar{u}, \bar{v}) – произвольная функция из множества K . Домножим уравнения равновесия из (1.5) на $(\bar{u} - u)$, а из (1.6) на $(\bar{v} - v)$ и проинтегрируем по областям Ω_{γ} и ω соответственно. Суммируя полученные выражения и далее интегрируя по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u) (\bar{u} - u) + \int_{\gamma} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] - \int_{\Omega_{\gamma}} f (\bar{u} - u) + \\ + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\gamma} p \nu (\bar{v} - v) - \int_{\omega} g (\bar{v} - v) = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Принимая во внимание краевые условия (1.7)-(1.10), можно показать, что для слагаемых из (1.14) выполняется неравенство

$$\int_{\gamma} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] - \int_{\gamma} p\nu(\bar{v} - v) \leq 0,$$

и, следовательно, справедливо вариационное неравенство (1.13).

Проверим теперь обратное, а именно, из вариационной постановки задачи (1.12), (1.13) вытекают все условия формулировки (1.5)-(1.10). Пусть (u, v) – решение задачи (1.12), (1.13). Пусть функция (ξ, ζ) принадлежит пространству $C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$. Выбирая в (1.13) тестовые функции вида $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\xi, \zeta)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\xi, \zeta)$, заключаем, что уравнения равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad -\operatorname{div} p = g \quad \text{в } \omega$$

выполняются в смысле распределений.

Выберем в качестве тестовой функции в (1.13) поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$. В результате подстановки справедливо равенство

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} fu + \int_{\omega} p(v)\varepsilon(v) - \int_{\omega} gv = 0. \quad (1.15)$$

Подставим теперь в (1.13) функцию $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\xi, \zeta)$, $(\xi, \zeta) \in K$, и, учитывая (1.15), получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u)\varepsilon(\xi) + \int_{\omega} p(v)\varepsilon(\zeta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f\xi - \int_{\omega} g\zeta \geq 0. \quad (1.16)$$

Пусть U – окрестность произвольной точки множества γ_c (рис. 1.2). Предположим, что $\operatorname{supp}(\xi, \zeta) \subset \bar{U}$, тогда проинтегрировав по частям в (1.16), получим неравенство

$$-\int_{\gamma_c} \sigma_\nu^+ \xi_\nu - \int_{\gamma_c} \sigma_\tau^+ \xi_\tau \geq 0. \quad (1.17)$$

Поскольку $\xi_\nu \geq 0$ на γ_c по определению множества K , а ξ_τ – произвольная

на γ_c , заключаем, что верны условия $\sigma_\nu^+ \leq 0, \sigma_\tau^+ = 0$ на γ_c .

Пусть теперь в некоторой точке $b_0 \in \gamma_c$ выполняется условие $[u_\nu(b_0)] > 0$. Рассмотрим функцию $\theta \in H_{\partial\Omega \setminus \gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2$, $\text{supp } \theta \subset \overline{U_0}$, где U_0 – малая окрестность точки b_0 (рис. 1.2). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\mu\theta, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\mu\theta, 0)$, μ – малый положительный параметр, тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив поочередно такие функции (\bar{u}, \bar{v}) в качестве тестовой в (1.13) и далее проинтегрировав по частям, получим

$$\int_{\gamma_c} \sigma_\nu^+ \theta_\nu + \int_{\gamma_c} \sigma_\tau^+ \theta_\tau = 0,$$

откуда следует, что $\sigma_\nu^+(b_0) = 0$. Предполагая, что в точке $b_1 \in \gamma_c$ выполнено $\sigma_\nu^+(b_1) < 0$, получим равенство $[u_\nu(b_1)] = 0$. Таким образом, $\sigma_\nu^+[u_\nu] = 0$ на γ_c .

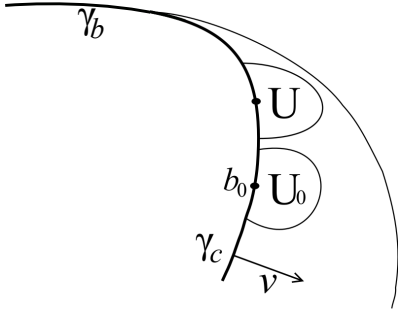


Рисунок 1.2 – Окрестности произвольной точки кривой γ_c и точки $b_0 \in \gamma_c$.

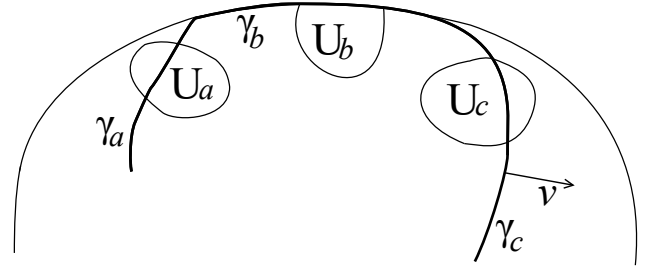


Рисунок 1.3 – Окрестности точек кривых γ_a, γ_b и γ_c .

Далее, если пробные функции в (1.13) имеют вид $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\psi, \eta)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\psi, \eta)$, где $(\psi, \eta) \in K$ и $[\psi_\nu] = 0$ на γ_c , то верно следующее равенство

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(\psi) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\eta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \psi - \int_{\omega} g \eta = 0. \quad (1.18)$$

Путем интегрирования по частям из (1.18) извлекаем

$$- \int_{\gamma} [\sigma_\nu \cdot \psi] + \int_{\partial\omega} p_\nu \cdot \eta = 0. \quad (1.19)$$

Теперь, налагая дополнительные условия на носитель функции (ψ, η) , можем получить условия на усилия из (1.8), (1.10). Если $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \overline{U_a}$, где U_a – окрестность некоторой точки множества γ_a (рис. 1.3), то (1.19) принимает вид

$$-\int_{\gamma_a} [\sigma\nu]\psi + \int_{\gamma_a} p\nu \cdot \eta = 0.$$

Из этого равенства, поскольку $\psi = \eta$ на γ_a , следует условие $[\sigma\nu] = p\nu$ на γ_a . Если $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \overline{U_b}$, где U_b – окрестность некоторой точки множества γ_b (рис. 1.3), то (1.19) обращается в

$$\int_{\gamma_b} \sigma\nu \cdot \psi + \int_{\gamma_b} p\nu \cdot \eta = 0.$$

Отсюда, в силу того, что $\psi = \eta$ на γ_b , следует равенство $-\sigma\nu = p\nu$ на γ_b . Если же $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \overline{U_c}$, где U_c – окрестность некоторой точки множества γ_c (рис. 1.3), то (1.19) примет вид

$$-\int_{\gamma_c} [\sigma\nu \cdot \psi] + \int_{\gamma_c} p\nu \cdot \eta = 0,$$

или с учетом равенства $[\psi_\nu] = 0$ на γ_c

$$-\int_{\gamma_c} [\sigma_\nu]\psi_\nu - \int_{\gamma_c} [\sigma_\tau\psi_\tau] + \int_{\gamma_c} p_\nu\eta_\nu + \int_{\gamma_c} p_\tau\eta_\tau = 0.$$

Из последнего равенства в силу условий $\sigma_\tau^+ = 0$, $\sigma_\nu^+ \leq 0$, $\sigma_\nu^+[u_\nu] = 0$ на γ_c , а также равенства $u^- = v$ на γ_c , следует, что $[\sigma_\nu] = p_\nu$ и $-\sigma_\tau = p_\tau$ на γ_c . Наконец, принимая во внимание полученные условия на γ , заключаем, что (1.19) влечет равенство $p\nu = 0$ на $\partial\omega \setminus \gamma$. То есть в предположении достаточной гладкости функций из вариационной постановки задачи (1.12), (1.13) вытекают все условия дифференциальной постановки (1.5)-(1.10). \square

1.2 Существование решения задачи

Как правило разрешимость задачи равновесия можно доказать, обращаясь к ее формулировке в виде задачи минимизации функционала энергии. Одним из достаточных условий существования решения задачи минимизации является наличие у минимизируемого функционала свойства коэрцитивности. В рассматриваемой задаче (1.11) не удастся установить коэрцитивность функционала $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ в связи с негладкостью границы области Ω_{γ_c} . Доказательство разрешимости задачи равновесия будет основано на методе фиктивных областей. При этом исходная область расширяется с помощью фиктивной таким образом, что будет возможным показать коэрцитивность функционала энергии для вспомогательной задачи, сформулированной в расширенной области.

Добавим фиктивную область Ω' с липшицевой границей $\partial\Omega'$ так, чтобы продолжение кривой γ_c разбивало полученную область $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$, $\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\Omega'$, на две подобласти D_1 и D_2 с липшицевыми границами ∂D_i , $\partial D_i \cap \partial\Omega' \neq \emptyset$, $\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \partial\Omega' \setminus (\gamma \cup \text{int}\Sigma)$, $i = 1, 2$. Пример возможного построения фиктивной области представлен на рисунке 1.4. Важно, что $\partial\Omega' \cap \gamma_b = \emptyset$. Введем обозначения $\Omega^{\gamma_c} = \Omega_{\gamma_c} \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$, $\Omega^\gamma = \Omega_\gamma \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$. Пусть модули упругости a_{ijkl}^λ в области Ω^{γ_c} зависят от

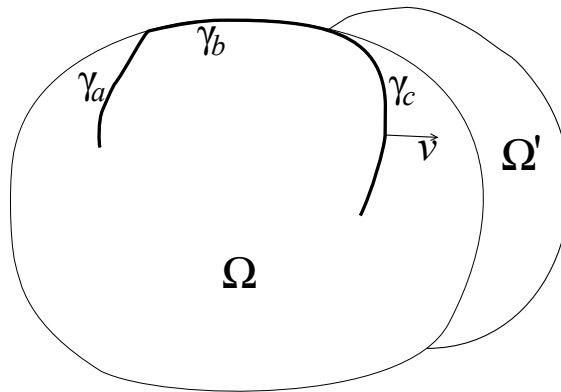


Рисунок 1.4 — Расширение исходной области с помощью фиктивной области Ω' .

малого положительного параметра λ и имеют вид

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Задача равновесия двуслойной конструкции, которой соответствует область $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$, при каждом $\lambda > 0$ формулируется следующим образом:

Найти такие функции $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $v^\lambda = (v_1^\lambda, v_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda)\}$, $p = \{p_{ij}(v^\lambda)\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\text{div } \sigma^\lambda = f \quad \text{в } \Omega^\gamma, \quad \sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(u^\lambda) \quad \text{в } \Omega^{\gamma_c}, \quad (1.20)$$

$$-\text{div } p = g \quad \text{в } \omega, \quad p = B \varepsilon(v^\lambda) \quad \text{в } \omega, \quad (1.21)$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^\gamma, \quad p\nu = 0 \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma, \quad (1.22)$$

$$u^\lambda = v^\lambda \quad \text{на } \gamma_a \cup \gamma_b, \quad [\sigma^\lambda \nu] = p\nu \quad \text{на } \gamma_a, \quad -\sigma^\lambda \nu = p\nu \quad \text{на } \gamma_b, \quad (1.23)$$

$$u^{\lambda-} = v^\lambda, \quad [u_\nu^\lambda] \geq 0, \quad \sigma_\tau^{\lambda+} = 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} \leq 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} [u_\nu^\lambda] = 0 \quad \text{на } \gamma_c, \quad (1.24)$$

$$[\sigma_\nu^\lambda] = p_\nu, \quad -\sigma_\tau^{\lambda-} = p_\tau \quad \text{на } \gamma_c. \quad (1.25)$$

Вариационная формулировка задачи (1.21)-(1.25) имеет вид:

$$\text{Найти такую } (u^\lambda, v^\lambda) \in \bar{K}, \text{ что} \quad (1.26)$$

$$\int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(\bar{v} - v^\lambda) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\lambda) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}$, (1.27)

где \bar{K} – множество возможных перемещений:

$$\bar{K} = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_{\partial\Omega^\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \bar{u} = \bar{v} \quad \text{на } \gamma_a \cup \gamma_b; \\ \bar{u}^- = \bar{v}, \quad [\bar{u}_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma_c\},$$

при этом $H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega_{\gamma_c})$ – пространство Соболева вида

$$H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega_{\gamma_c}) = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega_{\gamma_c}) \mid \tilde{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega^\gamma\}.$$

Покажем, что задача равновесия, сформулированная в расширенной области, разрешима.

Лемма 1.1. *Задача (1.26), (1.27) имеет единственное решение.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функционал энергии

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v}$$

и проверим его коэрцитивность на множестве \bar{K} . Справедливо выражение

$$\begin{aligned} \Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \\ & + \alpha \int_{\gamma_a} \bar{v}^2 - \alpha \int_{\gamma_a} \bar{v}^2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где α – положительный малый параметр. Продолжим кривую γ_c до границы $\partial\Omega^\gamma$ таким образом, что область $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$ разбивается на две подобласти D_1 и D_2 с липшицевыми границами ∂D_i , $\partial D_i \cap \partial\Omega^\gamma \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. В каждой области D_i выполняется первое неравенство Корна [22, гл. 1, § 1, п. 3], поэтому справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) \geq C_1 \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega_{\gamma_c})}^2.$$

Через C_1 и используемые далее в этой главе C_i , $i = 2, \dots, 19$, обозначаются постоянные, которые не зависят от оцениваемых функций. Параметр α выбирается так, чтобы была справедлива теорема о следе [79, гл. 3, § 5, п. 1] и, как следствие, выполнялось неравенство:

$$\frac{C_1}{2} \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega_{\gamma_c})}^2 - \alpha \int_{\gamma_a} \bar{u}^2 \geq 0.$$

Из [80, гл. 1, § 1, п. 3] следует, что одной из эквивалентных норм в пространстве $H^1(\omega)^2$ является норма

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2 = \int_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) + \int_{\gamma_a} \bar{v}^2,$$

при условии, что $mes \gamma_a > 0$, mes – мера Лебега. Поэтому для слагаемых из (1.28) верна оценка

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) + \alpha \int_{\gamma_a} (\bar{v})^2 \geq C_2 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2.$$

Таким образом, из (1.28) следует неравенство

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) \geq \frac{C_1}{2} \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2}^2 + C_2 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2 - C_3 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2} - C_4 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2},$$

которое означает, что функционал $\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ обладает свойством коэрцитивности. Кроме того, $\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом в силу непрерывности и выпуклости, а множество \bar{K} – слабо замкнуто, поэтому можно заключить, что задача минимизации

$$\inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}} \Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$$

имеет решение, и, следовательно, разрешима эквивалентная ей задача (1.26), (1.27).

Поскольку функционал $\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ является строго выпуклым, решение задачи (1.26), (1.27) единственно. \square

Далее, рассмотрим семейство вариационных задач, зависящих от параметра λ и перейдем в нем к пределу при стремлении λ к нулю.

Лемма 1.2. *В семействе задач типа (1.26), (1.27) можно осуществить предельный переход при $\lambda \rightarrow 0$.*

Доказательство. Выбирая в качестве тестовой функции в (1.27)

поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$, получаем уравнение

$$\int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) - \int_{\omega} g v^\lambda = 0,$$

из которого следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 = \\ = \int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} g v^\lambda + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где β – малый параметр, $\beta \in (0, \beta_0)$. Слагаемые в левой части (1.29) при $\lambda \in (0, \lambda_0)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 \geq \\ \geq C_5 \|u^\lambda\|_{H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2}^2 + C_6 \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)^2}^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Поскольку $u^\lambda = v^\lambda$ на γ_a , для правой части в (1.29) выполняется неравенство

$$\int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} g v^\lambda + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 \leq C_7 \|u^\lambda\|_{H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2} + C_8 \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)^2}. \quad (1.31)$$

Из (1.30) и (1.31) следуют равномерные оценки по $\lambda \in (0, \lambda_0)$ для (u^λ, v^λ) :

$$\|u^\lambda\|_{H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2} \leq C_9, \quad \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{10}$$

и, кроме того,

$$\|u^\lambda\|_{H^1(\Omega')^2}^2 \leq C_{11} \lambda.$$

Так как пространство $H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2$ рефлексивно, из полученных оценок следует, что для подпоследовательности последовательности (u^λ, v^λ) ,

которую обозначим так же, верны сходимости при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u^\lambda \rightarrow u^0 \text{ слабо в } H_{\partial\Omega^\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2, \quad v^\lambda \rightarrow v^0 \text{ слабо в } H^1(\omega)^2, \\ u^\lambda \rightarrow 0 \text{ сильно в } H^1(\Omega')^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Теперь, если в (1.27) выбрать тестовой из \bar{K} функцию $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$, продолженную нулем на область Ω' , то выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(\bar{v}) \geq \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \\ + \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\lambda). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Далее, переходя на основе (1.32) к нижнему пределу в (1.26) и (1.33) при $\lambda \rightarrow 0$, получим вариационную задачу

Найти такую $(u^0, v^0) \in K$, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u} - u^0) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^0) + \int_{\omega} p(v^0) \varepsilon(\bar{v} - v^0) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^0) \geq 0 \\ \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned}$$

□

Предельная задача с точностью до обозначений совпадает с задачей (1.12), (1.13), и ее решением является сужение предельной функции (u^0, v^0) из (1.32).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.3. *Решение задачи (1.12), (1.13) единственно.*

Доказательство. Пусть есть два решения $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in K$ задачи (1.12), (1.13).

Тогда для них выполняются неравенства

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_1)\varepsilon(u_2 - u_1) + \int_{\omega} p(v_1)\varepsilon(v_2 - v_1) \geq \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(u_2 - u_1) + \int_{\omega} g(v_2 - v_1),$$

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_2)\varepsilon(u_1 - u_2) + \int_{\omega} p(v_2)\varepsilon(v_1 - v_2) \geq \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(u_1 - u_2) + \int_{\omega} g(v_1 - v_2).$$

Из последних двух неравенств следуют равенства

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_1 - u_2)\varepsilon(u_1 - u_2) = 0, \quad \int_{\omega} p(v_1 - v_2)\varepsilon(v_1 - v_2) = 0.$$

которые означают, что $u_1 - u_2 = \rho_u \in R(\Omega_{\gamma_c})$, $v_1 - v_2 = \rho_v \in R(\omega)$, где $R(\omega)$ – пространство инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{\varrho = (\varrho_1, \varrho_2) \mid \varrho(x) = d(x_2, -x_1) + (c_1, c_2), \\ x = (x_1, x_2) \in \omega; d, c_1, c_2 = \text{const}\}.$$

Пространство $R(\Omega_{\gamma_c})$ определяется аналогично. Так как $\rho_u = 0$ на $\partial\Omega \setminus \gamma$, можно утверждать, что $\rho_u = 0$ в Ω_{γ_c} . В силу принадлежности функций $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ множеству K имеем

$$v_2 + \rho_v = v_1 = u_1 = u_2 = v_2 \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b.$$

То есть на $\gamma_a \cup \gamma_b$ функция ρ_v равна нулю, значит $\rho_v = 0$ в ω . Таким образом, $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. \square

Итак, в силу теоремы 1.1 и лемм 1.1, 1.2, 1.3 верно следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Существует единственное решение вариационной задачи равновесия (1.12), (1.13). При условии достаточной гладкости решение (1.12), (1.13) будет решением задачи (1.5)-(1.10).*

1.3 Пределный переход по параметру жесткости верхнего слоя

Исследуем вопрос о поведении решения задачи равновесия (1.5)-(1.10) при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю и к бесконечности. Пусть тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от положительного параметра δ : $B_\delta = \{\delta^{-1}b_{ijkl}\}$. Расширим область Ω до области $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int}\Sigma$ аналогично способу в параграфе 1.2. При этом тензор модулей упругости в расширенной области зависит от параметра δ .

1.3.1 Пределный переход при $\delta \rightarrow 0$

Пусть модули упругости a_{ijkl}^δ в области Ω^{γ_c} имеют вид

$$a_{ijkl}^\delta = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \delta^{-1}a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Тогда при каждом фиксированном $\delta \in (0, \delta_0)$ вариационная задача равновесия запишется в виде:

$$\text{Найти такую } (u_\delta, v_\delta) \in \bar{K}, \text{ что} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) + \\ & + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(\bar{v} - v_\delta) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v_\delta) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Определим множество допустимых функций K_0 для предельной формулировки задачи.

Множество K_0 имеет вид

$$K_0 = \{(\bar{u}, \bar{\rho}) \in H_{\partial\Omega\setminus\gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2 \times R(\omega) \mid \bar{u} = \bar{\rho} \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b; \\ \bar{u}^- = \bar{\rho}, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c\}.$$

Теорема 1.3. *Для последовательности решений (u_δ, v_δ) семейства задач типа (1.34), (1.35) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow 0$:*

$$u_\delta \rightarrow u_0 \text{ слабо в } H_{\partial\Omega\setminus\gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2, u_\delta \rightarrow 0 \text{ сильно в } H^1(\Omega')^2, \quad (1.36)$$

$$v_\delta \rightarrow \rho_0 \text{ слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (1.37)$$

При этом функция (u_0, ρ_0) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти } (u_0, \rho_0) \in K_0 \text{ такую, что} \quad (1.38)$$

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_0) \varepsilon(\bar{u} - u_0) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_0) - \int_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho_0) \geq 0 \\ \text{для всех } (\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0. \quad (1.39)$$

Доказательство. Выбирая в (1.35) в качестве (\bar{u}, \bar{v}) поочередно функции $(2u_\delta, 2v_\delta)$ и $(0, 0)$, получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f u_\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) - \int_{\omega} g v_\delta = 0. \quad (1.40)$$

Из уравнения (1.40) следуют оценки, равномерные по параметру $\delta \in (0, \delta_0)$:

$$\|u_\delta\|_{H_{\partial\Omega\setminus\gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2} \leq C_{12}, \quad \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{13},$$

а также

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Omega')^2}^2 \leq C_{14} \delta.$$

Следствием этих оценок являются сходимости (1.36) при $\delta \rightarrow 0$ для подпоследовательности последовательности (u_δ, v_δ) , которую обозначим так

же, а также

$$v_\delta \rightarrow v_0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) \leq C_{15} \delta,$$

из которого следует, что предельная функция v_0 в области ω является функцией пространства $R(\omega)$, $v_0 = \rho_0 \in R(\omega)$. Следовательно, выполняется сходимость (1.37). Выберем тестовой функцией в (1.35) функцию $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0$, $\bar{u} = 0$ в Ω' , тогда вариационное неравенство примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) - \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) - \\ - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) - \int_{\omega} g(\bar{\rho} - v_\delta) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Теперь, основываясь на сходимостях (1.36), (1.37) и учитывая, что $v_0 = \rho_0$ в области ω , можно осуществить переход к нижнему пределу в (1.34) и (1.41) при $\delta \rightarrow 0$ и получить предельную вариационную задачу вида (1.38), (1.39). Проводя рассуждения как при доказательстве леммы 1.3, можно показать, что решение задачи (1.38), (1.39) единственно. Тогда сходимости (1.36), (1.37) имеют место для всей последовательности решений (u_δ, v_δ) семейства задач типа (1.34), (1.35). \square

Задача (1.38), (1.39) описывает равновесие конструкции, которая состоит из упругого слоя с трещиной и жесткого слоя, которому соответствует область ω . Постановка задачи в дифференциальном виде, эквивалентная на классе гладких функций вариационной формулировке (1.38), (1.39), заключается в следующем:

Найти такие функции $u_0 = (u_{01}, u_{02})$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u_0)\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho_0 \in R(\omega)$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma = A\varepsilon(u_0) \quad \text{в } \Omega_{\gamma_c},$$

$$\begin{aligned}
& u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \gamma, \quad u_0 = \rho_0 \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b, \\
& u_0^- = \rho_0, \quad [u_{0\nu}] \geq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_{0\nu}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c, \\
& - \int_{\gamma_a} [\sigma\nu]\bar{\rho} + \int_{\gamma_b} \sigma\nu \cdot \bar{\rho} - \int_{\gamma_c} [\sigma\nu]\bar{\rho} = \int_{\omega} g\bar{\rho} \quad \text{для всех} \quad \bar{\rho} \in R(\omega).
\end{aligned}$$

1.3.2 Предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$

Пусть модули упругости a_{ijkl}^δ в области Ω^{γ_c} зависят от параметра δ следующим образом:

$$a_{ijkl}^\delta = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \delta a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Пусть внешние нагрузки, действующие на верхний слой, отсутствуют, $g = 0$. Тогда вариационная задача при каждом фиксированном δ примет вид

$$\text{Найти такую} \quad (u_\delta, v_\delta) \in \bar{K}, \quad \text{что} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) + \delta \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(\bar{v} - v_\delta) \geq 0 \\
& \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}. \quad (1.43)
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество

$$K_\infty = \{\bar{u} \in H_{\partial\Omega \setminus \gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2 \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c\}.$$

Теорема 1.4. *Для последовательности решений (u_δ, v_δ) семейства задач типа (1.42), (1.43) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow \infty$:*

$$\begin{aligned}
& u_\delta \rightarrow u_\infty \quad \text{слабо в} \quad H_{\partial\Omega^{\gamma_c}}^1(\Omega^{\gamma_c})^2, \quad u_\delta \rightarrow 0 \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega')^2, \\
& \frac{1}{\sqrt{\delta}} v_\delta \rightarrow v_\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2. \quad (1.44)
\end{aligned}$$

При этом функция u_∞ является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } u_\infty \in K_\infty, \text{ что} \quad (1.45)$$

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\infty) \varepsilon(\bar{u} - u_\infty) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\infty) \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in K_\infty. \quad (1.46)$$

Доказательство. Подставляя поочередно функции $(2u_\delta, 2v_\delta)$, $(0,0)$ вместо тестовой в (1.43), получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) + \delta \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f u_\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) = 0. \quad (1.47)$$

Добавим в (1.47) слагаемые $\pm \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2$, где α – положительный малый параметр. Тогда, учитывая цепочку неравенств, справедливую при $\delta > \delta_0$,

$$\frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) + \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2 \geq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) + \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2 \right) \geq \frac{1}{\delta} C_{16} \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2}^2,$$

получим оценки, равномерные по $\delta \in (\delta_0, \infty)$:

$$\|u_\delta\|_{H_{\delta\Omega_{\gamma_c}}^1(\Omega_{\gamma_c})^2} \leq C_{17}, \quad \frac{1}{\delta} \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2}^2 \leq C_{18}, \quad \|u_\delta\|_{H^1(\Omega')^2} \leq \frac{C_{19}}{\delta}.$$

Основываясь на установленных оценках, заключаем, что при $\delta \rightarrow \infty$ выполняются сходимости (1.44) для подпоследовательности последовательности (u_δ, v_δ) , которую обозначим так же.

Выберем такую функцию $\bar{u} \in K_\infty$, что $\bar{u} = \bar{v}$ на $\gamma_a \cup \gamma_b$ и $\bar{u}^- = \bar{v}$ на γ_c , $\bar{v} \in H^1(\omega)^2$, и продолжим ее нулем в область Ω' , тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив эту функцию в качестве тестовой в (1.43), перейдем к пределу в задаче (1.42), (1.43) при $\delta \rightarrow \infty$ на основе (1.44) и получим задачу вида (1.45), (1.46). Проводя рассуждения как при доказательстве леммы 1.3, можно показать, что решение задачи (1.45), (1.46) единственно. Тогда сходимости (1.44) имеют место для всей последовательности решений (u_δ, v_δ) семейства задач типа (1.42), (1.43).

□

В смысле достаточно гладких функций задача (1.45), (1.46) эквивалентна дифференциальной задаче:

Найти такие функции $u_\infty = (u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u_\infty)\}, i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u_\infty) \quad \text{в} \quad \Omega_{\gamma_c},$$

$$u_\infty = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \gamma, \quad \sigma\nu = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_b,$$

$$[u_{\infty\nu}] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu[u_{\infty\nu}] = 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c.$$

Предельная задача описывает равновесие упругого тела с трещиной, выходящей на внешнюю границу.

Глава 2. Задача равновесия для двуслойной конструкции с жестким слоем при наличии трещины

В этой главе рассматривается задача о равновесии двуслойных конструкций, состоящей из упругого и жесткого слоев. В упругом слое предполагается наличие трещины, проходящей вдоль линии, по которой соединяются части конструкции. Осуществлен предельный переход по параметру размера жесткого слоя конструкции. Рассмотрена задача оптимального управления, в которой функционалом качества является производная функционала энергии конструкции по длине трещины; параметром управления выступает параметр, характеризующий размер жесткого слоя.

2.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Упругий слой описывается множеством $\Omega \times [-h_1, 0] \subset \mathbb{R}^3$. Предполагается, что γ_l – гладкая кривая без самопересечений, $\bar{\gamma}_l \subset \Omega$ и $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}_l$; множество $\gamma_l \times [-h_1, 0]$ соответствует трещине в упругой части конструкции. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается нормаль единичной длины к γ_l ; $(\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор. Направлением нормали ν определяются положительный и отрицательный берега трещины. Кривая γ_l представима в виде объединения $\gamma_l = \gamma_l \cup \gamma_m$. Составляющая $\gamma_m \times [-h_1, 0]$ является прямолинейной частью трещины, $\gamma_m = (l, l') \times \{0\}$. Кривая γ_l соответствует линии контакта между слоями, $\gamma_l = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0, l), x_2 = q(x_1)\}$, где $q(x_1) \in C^{1,1}(0, l)$. Полагаем, что на γ_l отслоение имеется только на положительном берегу. Жесткий слой описывается множеством $\omega^\delta \times [0, h_2]$ с ограниченной областью $\omega^\delta = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0, l), q(x_1) - \delta < x_2 < q(x_1)\}$, параметр δ характеризует размер жесткого слоя и меняется в пределах полуинтервала

$(0, \delta_0]$. При любом $\delta \in (0, \delta_0]$ граница области $\partial\omega^\delta$ является липшицевой и $\gamma_l \subset \partial\omega^\delta$, а также $\omega^\delta \subset \omega^{\delta_0}$. Внешняя нормаль единичной длины к $\partial\omega^\delta$ на γ_l совпадает с нормалью к γ_l , обозначим ее также через ν . На рис. 2.1 приводится геометрия конструкции в плоскости Ox_1x_2 . Будем считать, что $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega^\delta)^2$ – заданные функции. Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$ – тензор модулей упругости нижнего слоя, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности (1.1), (1.2). Кроме того, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$.

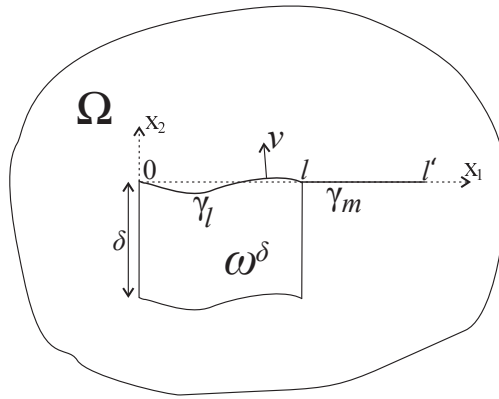


Рисунок 2.1 — Геометрия конструкции на плоскости.

Введем в рассмотрение пространство инфинитезимальных жестких перемещений на ω^δ :

$$R(\omega^\delta) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2), \\ x = (x_1, x_2) \in \omega^\delta; b, c_1, c_2 = \text{const}\}.$$

Задача равновесия для двухслойной конструкции с трещиной под действием внешних сил при каждом фиксированном $\delta \in (0, \delta_0]$ формулируется следующим образом:

Найти такие функции $u^\delta = (u_1^\delta, u_2^\delta)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u^\delta)\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho^\delta \in R(\omega^\delta)$, что

$$-\text{div } \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma - A\varepsilon(u^\delta) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (2.1)$$

$$u^\delta = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad u^{\delta-} = \rho^\delta \quad \text{на } \gamma_l, \quad (2.2)$$

$$[u_\nu^\delta] \geq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu^\delta] = 0 \quad \text{на } \gamma_l, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\tau}^{-} = 0, \quad [\sigma_{\nu}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_m, \quad (2.4)$$

$$\int_{\gamma_l} [\sigma_{\nu}] \varrho + \int_{\omega^{\delta}} g \varrho = 0 \quad \text{для всех} \quad \varrho \in R(\omega^{\delta}). \quad (2.5)$$

Здесь $u^{\delta} = (u_1^{\delta}, u_2^{\delta})$ – горизонтальные смещения точек нижнего слоя; $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$, $i, j = 1, 2$ – тензор деформаций, определяемый формулой (1.3); $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ – тензор напряжений, удовлетворяющий формулам (1.4). Через $[v] = v^{+} - v^{-}$ обозначается скачок функции на γ_l , где v^{\pm} – следы функции v на берегах трещины γ_l^{\pm} .

Соотношения в (2.1) – уравнения равновесия и обобщенный закон Гука для упругого слоя конструкции. Первое равенство в (2.2) соответствует закреплению нижнего слоя по внешнему краю; во втором условии задается структура перемещений на отрицательном берегу γ_l . Равенства и неравенства в (2.3) и (2.4) – условия, которые описывают трещину с учетом непроникания противоположных берегов. Условие (2.5) обеспечивает равновесие жесткого слоя конструкции.

Равновесие двуслойной конструкции можно описать с помощью вариационного подхода. Для того чтобы сделать это, введем множество допустимых перемещений

$$K_{\delta} = \{(v, \varrho) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2 \times R(\omega^{\delta}) \mid [v_{\nu}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_l, \quad v^{-} = \varrho \quad \text{на} \quad \gamma_l\}.$$

Через $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})$ обозначается пространство вида

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma}) = \{v \in H^1(\Omega_{\gamma}) \mid v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\}.$$

Рассмотрим функционал потенциальной энергии конструкции

$$\Pi^{\delta}(v, \varrho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(v) \varepsilon(v) - \int_{\Omega_{\gamma}} f v - \int_{\omega^{\delta}} g \varrho.$$

Тогда задача равновесия, сформулированная как задача минимизации функционала энергии, имеет следующий вид:

Найти такую $(u^\delta, \rho^\delta) \in K_\delta$, что

$$\Pi^\delta(u^\delta, \rho^\delta) = \inf_{(v, \varrho) \in K_\delta} \Pi^\delta(v, \varrho). \quad (2.6)$$

Задача (2.6) имеет единственное решение (u^δ, ρ^δ) , которое удовлетворяет вариационному неравенству:

$$\text{Найти такую } (u^\delta, \rho^\delta) \in K_\delta, \text{ что} \quad (2.7)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(v - u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(v - u^\delta) - \int_{\omega^\delta} g(\varrho - \rho^\delta) \geq 0$$

для всех $(v, \varrho) \in K_\delta$. (2.8)

Дифференциальная и вариационная формулировки задачи эквивалентны на классе гладких решений, поэтому из однозначной разрешимости задачи (2.7), (2.8) при условии достаточной гладкости решения следует, что задача (2.1)-(2.5) имеет единственное решение. Доказательство существования и единственности решения проводится способом, аналогичным приведенному в [57]. Соответствующие рассуждения приводить не будем.

2.2 Предельный переход по параметру размера верхнего слоя

Далее будет получена задача, являющаяся предельной для задач, описывающих равновесие конструкции с жестким слоем, в случае стремления параметра, характеризующего размер жесткого слоя, к нулю. Рассмотрим множество функций

$$K_0 = \{v \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \mid [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_l, v|_{\gamma_l^-} \in R(\gamma_l)\},$$

где

$$R(\gamma_l) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2), \\ x = (x_1, x_2) \in \gamma_l; b, c_1, c_2 = \text{const}\}.$$

Покажем, что верно следующее.

Теорема 2.1. *Для последовательности решений (u^δ, ρ^δ) семейства задач типа (2.7), (2.8) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow 0$:*

$$u^\delta \rightarrow u^0 \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad \rho^\delta \rightarrow \rho^0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega^{\delta_0})^2. \quad (2.9)$$

При этом функция u^0 является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } u^0 \in K_0, \quad \text{что} \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u} - u^0) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^0) \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in K_0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Из (2.7), (2.8) можно извлечь оценки, равномерные по $\delta \in (0, \delta_0]$. Для этого в (2.8) выберем в качестве тестовых функции $(v, \varrho) = (0, 0)$, $(v, \varrho) = 2(u^\delta, \rho^\delta)$ и получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) = \int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega^\delta} g \rho^\delta. \quad (2.12)$$

Для слагаемого в левой части (2.12) имеем в силу неравенства Корна [22, гл. 1, § 1, п. 3]

$$C_1 \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2}^2 \leq \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta). \quad (2.13)$$

Через C_1 и используемые далее в этой главе C_2, \dots, C_7 обозначаются постоянные, которые не зависят от оцениваемых функций. Поскольку $R(\omega^\delta)$ является подпространством пространства $H^1(\omega^\delta)^2$, в соответствии с [80, гл. 1, § 1, п. 3] при $\delta \in (0, \delta_0]$ верно следующее представление нормы для функции

$\varrho \in R(\omega^\delta)$:

$$\|\varrho\|_{H^1(\omega^\delta)}^2 = \int_{\gamma_l} \varrho^2 = \|\varrho\|_{L^2(\gamma_l)}^2.$$

Поэтому для слагаемых в правой части (2.12) верна оценка

$$\int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega^\delta} g \rho^\delta \leq C_2 \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)} + C_3 \|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma_l)}. \quad (2.14)$$

Так как $u^{\delta-} = \rho^\delta$ на γ_l по определению множества K_δ , по теореме о следе функции из пространства Соболева на границе [79, гл. 3, § 5, п. 1] имеем

$$\|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma_l)} \leq C_4 \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)},$$

что означает справедливость неравенства

$$C_2 \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)} + C_3 \|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma_l)} \leq C_5 \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)}. \quad (2.15)$$

Учитывая неравенства (2.13)-(2.15) для слагаемых в (2.12) и тот факт, что $\|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma_l)}$ является нормой функции ρ^δ в пространстве $H^1(\omega^{\delta_0})^2$, получаем равномерные по δ оценки:

$$\|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)} \leq C_6, \quad \|\rho^\delta\|_{H^1(\omega^{\delta_0})^2} \leq C_7. \quad (2.16)$$

В силу оценок (2.16) можно предполагать, выбирая при необходимости подпоследовательность последовательности (u^δ, ρ^δ) , которую обозначим так же, что при $\delta \rightarrow 0$ имеются сходимости (2.9).

Пусть $\bar{u} \in K_0$, значит $\bar{u}|_{\gamma^-} = \bar{\rho}$. Функцию $\bar{\rho}$ можно продолжить в область ω_δ , тогда $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_\delta$. Подставив такую функцию $(\bar{u}, \bar{\rho})$ в (2.8), получим неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) - \int_{\omega^\delta} g(\bar{\rho} - \rho^\delta) \geq 0. \quad (2.17)$$

На основе (2.9) перейдем к нижнему пределу в (2.7), (2.17) при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку ρ^δ ограниченная функция, в силу абсолютной непрерывности

интеграла Лебега справедливо следующее:

$$\left| \int_{\omega^\delta} g(\bar{\rho} - \rho^\delta) \right| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

С учетом (2.18) предельная вариационная задача будет иметь вид (2.10), (2.11).

Иначе (2.10), (2.11) можно записать в виде задачи минимизации функционала энергии:

Найти такую $u^0 \in K_0$, что

$$\Pi^0(u^0) = \inf_{v \in K_0} \Pi^0(v), \quad (2.19)$$

где функционал энергии определяется формулой

$$\Pi^0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(v) \varepsilon(v) - \int_{\Omega_\gamma} f v.$$

Так как функционал $\Pi^0(v)$ является строго выпуклым на множестве K_0 , решение задачи (2.10), (2.11) единственно. Поэтому сходимости (2.9) имеют место для всей последовательности решений (u^δ, ρ^δ) . \square

Формулировка (2.10), (2.11) соответствует задаче о равновесии упругого тела с трещиной и тонким жестким включением. Эквивалентная на классе гладких решений дифференциальная постановка задачи выглядит следующим образом:

Найти такие функции $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u^0)\}$, $\rho^0 \in R(\gamma_l)$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad \sigma - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad u^{0-} = \rho^0 \quad \text{на} \quad \gamma_l,$$

$$[u_\nu^0] \geq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu^0] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_l,$$

$$\sigma_\tau^- = 0, \quad [\sigma_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_m,$$

$$\int_{\gamma_l} [\sigma\nu]\bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех } \bar{\rho} \in R(\gamma_l).$$

2.3 Управление размером жесткого слоя конструкции

Рассмотрим задачу оптимального управления для двуслойной конструкции, где в качестве функции управления выступает параметр δ . Функционалом качества является производная функционала энергии по длине трещины. Согласно энергетическому критерию Гриффитса трещина в упругой части конструкции начнет развиваться в том случае, если производная функционала энергии по длине трещины достигнет критического значения κ (заданный параметр, определяемый свойствами материала). Задача заключается в том, чтобы найти такое значение параметра δ , при котором значение производной функционала энергии будет максимально удалено от κ .

2.3.1 Производная функционала энергии по длине трещины

Далее предполагается, что $f \in C^1(\bar{\Omega})^2$. Кроме того, считаем, что модули упругости a_{ijkl} – постоянные. В сформулированных задачах (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11) можно найти производную функционала энергии по параметру возмущения длины трещины. Обозначим через $\gamma_{l'}^t = \gamma_l \cup \{(l, l' + t) \times \{0\}\}$ возмущение трещины γ_l вдоль оси Ox_1 с помощью малого параметра t , $\Omega_\gamma^t = \Omega \setminus \overline{\gamma_{l'}^t}$. Рассмотрим преобразование независимых координат, которое взаимно-однозначно отображает возмущенную область Ω_γ^t на область Ω_γ :

$$y_1 = x_1 + t\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2, \quad x \in \Omega_\gamma, \quad y \in \Omega_\gamma^t,$$

где функция θ выбирается следующим образом: пусть B и B' – такие две малые окрестности точки $(l' + t, 0)$, что $B \subset B'$; тогда $\theta \in C_0^\infty(B')$ и $\theta = 1$ в B , а также θ может быть продолжена нулем на область Ω_γ .

В области Ω_γ^t рассмотрим возмущенную задачу к (2.6):
Найти такую $u_t^\delta \in K_\delta^t$, что

$$\Pi_t^\delta(u_t^\delta, \rho_t^\delta) = \inf_{(v, \varrho) \in K_\delta^t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^t} \sigma(v) \varepsilon(v) - \int_{\Omega_\gamma^t} f v - \int_{\omega^\delta} g \varrho \right\},$$

при этом функционал энергии имеет вид

$$\Pi_t^\delta(v, \varrho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^t} \sigma(v) \varepsilon(v) - \int_{\Omega_\gamma^t} f v - \int_{\omega^\delta} g \varrho;$$

множество допустимых перемещений следующее:

$$K_\delta^t = \{(v, \varrho) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma^t)^2 \times R(\omega^\delta) \mid [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_\nu^t, v^- = \varrho \text{ на } \gamma_l\}.$$

Следуя методу, описанному в [22], получаем, что при $\delta \in (0, \delta_0)$ существует производная функционала энергии по длине трещины

$$G(\delta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi_t^\delta(u_t^\delta, \rho_t^\delta) - \Pi^\delta(u^\delta, \rho^\delta)}{t},$$

которая определяется формулой

$$G(\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^\delta) \sigma_{ij}(u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^\delta \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^\delta. \quad (2.20)$$

Аналогично можно рассмотреть задачу, возмущенную по отношению к (2.19). Для этого введем множество допустимых перемещений

$$K_0^t = \{v \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma^t)^2 \mid [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_\nu^t, v|_{\gamma_i^-} \in R(\gamma_i)\}$$

В таком случае возмущенная задача минимизации имеет вид:

Найти такую $u_t^0 \in K_0^t$, что

$$\Pi_t^0(u_t^0) = \inf_{v \in K_0^t} \Pi_t^0(v),$$

где функционал энергии определяется формулой

$$\Pi_t^0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^t} \sigma(v) \varepsilon(v) - \int_{\Omega_\gamma^t} f v.$$

Формула производной для функционала энергии

$$G(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi_t^0(u_t^0) - \Pi^0(u^0)}{t}$$

имеет вид

$$G(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^0) \sigma_{ij}(u^0) - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^0 \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^0) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^0. \quad (2.21)$$

Таким образом, учитывая (2.21), можно сделать вывод, что формула (2.20) верна при $\delta \in [0, \delta_0]$.

2.3.2 Задача оптимального управления

Для каждого положительного малого параметра t верны соотношения

$$\frac{\Pi_t^\delta(u_t^\delta, \rho_t^\delta) - \Pi^\delta(u^\delta, \rho^\delta)}{t} \leq \frac{\Pi_t^\delta(u^\delta, \rho^\delta) - \Pi^\delta(u^\delta, \rho^\delta)}{t} = 0,$$

из которых следует, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ выполняется неравенство $G(\delta) \leq 0$. Также параметр $\kappa < 0$, поэтому наиболее безопасное состояние равновесия конструкции относительно развития трещины будет достигаться при наибольшем значении производной функционала энергии по длине

трещины. Задача нахождения оптимального параметра δ имеет вид:

$$\text{Найти } \delta^* \in [0, \delta_0] \text{ так, что } G(\delta^*) = \sup_{\delta \in [0, \delta_0]} G(\delta). \quad (2.22)$$

Тот факт, что такое значение δ^* найдется, можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.2. *Задача оптимального управления (2.22) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [0, \delta_0]$ – максимизирующая последовательность. Каждый параметр δ^n определяет размер области ω_{δ^n} . Последовательность $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена, а значит существует подпоследовательность последовательности $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, элементы которой обозначим также через δ^n , и существует $\delta^* \in [0, \delta_0]$, такие, что $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \delta^*$ при $n \rightarrow \infty$. Для простоты записи далее будет использовано обозначение $\delta \rightarrow \delta^*$ вместо $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \delta^*$, $n \rightarrow \infty$. Возможны следующие варианты:

1. $\delta \rightarrow 0$;
2. $\delta \rightarrow \delta'$, $\delta' \in (0, \delta_0]$.

Наибольший интерес вызывает случай, когда $\delta \rightarrow 0$, поскольку в этом случае имеем дело с предельной задачей, которая качественно отличается от исходной. Двуслойная конструкция, состоящая из упругого и жесткого слоев, в пределе при $\delta \rightarrow 0$ представляет собой упругое тело с тонким жестким включением.

Поэтому рассмотрим случай, когда $\delta \rightarrow 0$ и докажем, что предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} G(\delta) \quad (2.23)$$

существует. Для того, чтобы осуществить переход в (2.23), будет полезным доказать, что

$$u^\delta \rightarrow u^0 \text{ сильно в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2. \quad (2.24)$$

Для этого достаточно проверить сходимость

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) \rightarrow \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0) \varepsilon(u^0) \quad (2.25)$$

при $\delta \rightarrow 0$, которая означает сходимость норм. С этой целью, принимая во внимание сходимости в (2.9), с учетом (2.18) из (2.12) получим предельные соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega^\delta} g \rho^\delta \right) = \int_{\Omega_\gamma} f u^0 = \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0) \varepsilon(u^0).$$

Таким образом, выполнено (2.25). Из слабой сходимости для последовательности u^δ в (2.9) и сходимости норм (2.25) следует сильная сходимость (2.24).

Теперь, основываясь на сходимостях (2.9) и (2.24) можно осуществить предельный переход в (2.23) при $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} G(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^\delta) \sigma_{ij}(u^\delta) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^\delta \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^\delta \right] = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^0) \sigma_{ij}(u^0) - \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^0 \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^0) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^0. \quad (2.26) \end{aligned}$$

Полученное предельное выражение в (2.26) соответствует формуле (2.21) производной функционала энергии $G(0)$. Предельная функция u^0 в (2.26) является решением задачи (2.10), (2.11). Поскольку верна цепочка равенств и неравенств

$$\sup_{\delta \in [0, \delta_0]} G(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} G(\delta) = G(0) \leq \sup_{\delta \in [0, \delta_0]} G(\delta),$$

можно заключить, что $\delta = 0$ является решением задачи оптимального управления (2.22) в случае, когда $\delta \rightarrow 0$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\delta \rightarrow \delta'$, $\delta' \in (0, \delta_0]$. Аналогичным способом, как и при $\delta \rightarrow 0$, можно установить сходимость при $\delta \rightarrow \delta'$

$$u^\delta \rightarrow u^{\delta'} \quad \text{сильно в } H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)^2.$$

Опираясь на эту сходимость, можно осуществить предельный переход:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \delta'} G(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow \delta'} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^\delta) \sigma_{ij}(u^\delta) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^\delta \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^\delta \right] = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^{\delta'}) \sigma_{ij}(u^{\delta'}) - \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} u_{i,1}^{\delta'} \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^{\delta'}) - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_i^{\delta'}. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Предельное выражение в (2.27) представляет собой формулу производной функционала энергии (2.20) при $\delta = \delta'$. Предельная функция $u^{\delta'}$ является решением задачи (2.7), (2.8) при $\delta = \delta'$. И, в силу справедливости соотношений

$$\sup_{\delta \in [0, \delta_0]} G(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow \delta'} G(\delta) = G(\delta') \leq \sup_{\delta \in [0, \delta_0]} G(\delta),$$

значение параметра $\delta = \delta'$ является решением задачи оптимального управления (2.22) в случае, когда $\delta \rightarrow \delta'$, $\delta' \in (0, \delta_0]$. \square

Глава 3. Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с дефектом вдоль линии соединения слоев

В этой главе рассматривается задача равновесия двуслойной конструкции с дефектом. Слои склеены по заданной линии. Для верхнего слоя линия склейки является частью края. В нижнем слое вдоль линии соединения имеется дефект. На берегах дефекта задаются нелинейные краевые условия, содержащие параметр повреждаемости. С помощью вариационного подхода доказана разрешимость задачи. Осуществлен переход к пределу при стремлении параметра повреждаемости к нулю и к бесконечности. Получены дифференциальные формулировки для соответствующих предельных задач. Рассмотрен случай, когда параметр жесткости верхнего слоя стремится к бесконечности; проведен анализ полученной в пределе задачи.

3.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – области, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 3.1). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Гладкая кривая γ не имеет самопересечений и соответствует линии соединения слоев, $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\gamma} \subset \partial\omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$, $(\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяется знак берега γ^\pm . Считается, что вдоль γ^+ в нижнем слое имеется дефект, который характеризуется параметром повреждаемости δ , $\delta \in (0, \infty)$. Будет использовано обозначение $[h] = h^+ - h^-$ для скачка функции h на γ , где h^\pm – следы функции h на берегах γ^\pm .

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ и $B = \{b_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$ – тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности (1.1), (1.2). Кроме того, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ijkl} \in L^\infty(\omega)$.

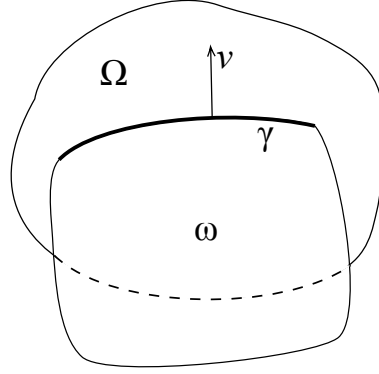


Рисунок 3.1 — Геометрия конструкции на плоскости.

Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ — перемещения точек нижнего и верхнего слоя соответственно. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$, $i, j = 1, 2$, будет обозначаться тензор деформаций, который определен формулой (1.3). Также вводится обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Для векторов напряжений и их касательных и нормальных компонент используются обозначения (1.4).

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом:

Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (3.1)$$

$$-\operatorname{div} p = g, \quad p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в } \omega, \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad p\nu = 0 \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma, \quad (3.3)$$

$$u^- = v, \quad [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.4)$$

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau], \quad \sigma_\nu^+ \leq \frac{1}{\delta}[u_\nu], \quad \left(\sigma_\nu^+ - \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.5)$$

$$\sigma_\nu^- + p_\nu = \sigma_\nu^+, \quad \sigma_\tau^- + p_\tau = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \quad \text{на } \gamma. \quad (3.6)$$

Соотношения в (3.1), (3.2) — это уравнения равновесия и уравнения состояния для слоев. Первое условие в (3.4) обеспечивает склейку слоев на γ^- , а второе — непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Ограничения в (3.5) задают связь между нормальными и касательными

составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ . Условия в (3.6) соответствуют равенству нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих на линии соединения слоев.

Задачу равновесия двуслойной конструкции можно сформулировать в виде задачи минимизации. Для этого рассмотрим функционал потенциальной энергии конструкции:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2.$$

Слагаемое $\frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2$ отвечает за работу сил сцепления берегов дефекта.

Рассмотрим также множество функций

$$K^e = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \bar{u}^- = \bar{v}, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Через $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)$ обозначается пространство Соболева

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Задача минимизации имеет вид:

$$\text{Найти такую } (u, v) \in K^e, \text{ что } \Pi(u, v) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K^e} \Pi(\bar{u}, \bar{v}). \quad (3.7)$$

Задача (3.7) имеет решение, поскольку множество K^e слабо замкнуто, а функционал $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ слабо полунепрерывен снизу. Также функционал $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ является коэрцитивным на множестве K^e . Действительно, представим $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{u}, \bar{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2 + \\ & + \alpha \int_{\gamma} \bar{v}^2 - \alpha \int_{\gamma} \bar{v}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Параметр α – положительный малый параметр, который выбирается таким образом, чтобы была справедлива теорема о следе функции из пространства Соболева на границе [79, гл. 3, § 5, п. 1]:

$$C_1 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2}^2 - \alpha \int_{\gamma} \bar{v}^2 \geq 0. \quad (3.9)$$

Через C_1 и используемые далее в этой главе C_2, \dots, C_{20} обозначаются постоянные, не зависящие от оцениваемых функций. По теореме об эквивалентном представлении нормы в пространстве Соболева из [80, гл. 1, § 1, п. 3] для слагаемых в (3.8) верно неравенство

$$\int_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) + \alpha \int_{\gamma} \bar{v}^2 \geq C_2 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2. \quad (3.10)$$

В силу (3.9) и (3.10), с учетом того, что $\frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{v}]^2 \geq 0$, представление (3.8) влечет оценку снизу:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) \geq C_3 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2}^2 + C_4 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2 - C_5 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2} - C_6 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2},$$

из которой следует коэрцитивность функционала энергии $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$. Решение (u, v) задачи (3.7) удовлетворяет вариационному неравенству:

$$\text{Найти такую } (u, v) \in K^e, \text{ что} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теорема 3.1. *Формулировки (3.1)-(3.6) и (3.11)-(3.12) задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом эквивалентны на классе гладких решений.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $(\theta, \eta) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$ и подставим поочередно в (3.12) тестовые функции вида $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\theta, \eta)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\theta, \eta)$. Тогда уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad -\operatorname{div} p = g \quad \text{в } \omega.$$

выполнены в смысле обобщенных функций.

Выберем в (3.12) функцию $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\varphi, 0)$. При этом функция φ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)$, $\varphi_\nu \geq 0$ на γ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{U^+}$, где U^+ – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 3.2). Проинтегрировав по частям в (3.12) при условии, что (\bar{u}, \bar{v}) имеет указанный

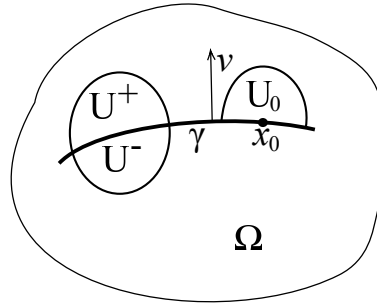


Рисунок 3.2 – Окрестности точек кривой γ .

вид, получим неравенство

$$-\int_{\gamma} \sigma \nu^+ \varphi + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u] \varphi \geq 0,$$

которое можно представить в виде

$$-\int_{\gamma} \sigma_\nu^+ \varphi_\nu + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\nu] \varphi_\nu - \int_{\gamma} \sigma_\tau^+ \varphi_\tau + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\tau] \varphi_\tau \geq 0.$$

В силу произвольности φ_τ и неотрицательности φ_ν заключаем, что

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta} [u_\tau], \quad -\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta} [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (3.13)$$

Подставим в (3.12) поочередно тестовые функции в виде $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\psi, \zeta)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\psi, \zeta)$, причем $(\psi, \zeta) \in K^e$, $[\psi_\nu] = 0$. Предположим, что $\operatorname{supp}(\psi, \zeta) \subset \overline{U^+ \cup U^-}$, где $U^+ \cup U^-$ – окрестность

некоторой точки множества γ (рис. 3.2). Тогда, проинтегрировав в (3.12) по частям при таких выбранных функциях в качестве (\bar{u}, \bar{v}) , получим равенство

$$-\int_{\gamma} [\sigma_{\nu}] \psi_{\nu} - \int_{\gamma} [\sigma_{\tau}] \psi_{\tau} + \int_{\gamma} p_{\nu} \zeta_{\nu} + \int_{\gamma} p_{\tau} \zeta_{\tau} + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau}] [\psi_{\tau}] = 0,$$

из которого, в силу свойств функции (ψ, ζ) и первого соотношения в (3.13), следует, что

$$[\sigma_{\nu}] = p_{\nu}, \quad [\sigma_{\tau}] = p_{\tau} \quad \text{на } \gamma. \quad (3.14)$$

Теперь опустим предположение о носителе функции (ψ, ζ) и получим из (3.12) равенство

$$-\int_{\gamma} [\sigma_{\nu} \cdot \psi] + \int_{\partial\omega} p_{\nu} \cdot \zeta + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau}] [\psi_{\tau}] = 0,$$

которое в силу первого соотношения в (3.13) и условий в (3.14) влечет равенство

$$p_{\nu} = 0 \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma. \quad (3.15)$$

Пусть для некоторой точки $x_0 \in \gamma$ выполняется условие $[u_{\nu}(x_0)] > 0$. Рассмотрим функцию $\vartheta \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2$, причем $\text{supp } \vartheta \subset \bar{U}_0$, где U_0 – малая окрестность точки $x_0 \in \gamma$ (рис. 3.2). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\mu\vartheta, 0)$, μ – малый положительный параметр, тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив поочередно такую функцию (\bar{u}, \bar{v}) и функцию $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\mu\vartheta, 0)$ в (3.12) и далее проинтегрировав по частям, получим

$$-\int_{\gamma} \sigma_{\nu}^+ \vartheta + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u] \vartheta = 0,$$

откуда следует, что $\sigma_{\nu}^+(x_0) + \frac{1}{\delta} [u_{\nu}(x_0)] = 0$. Предполагая, что в точке $x_1 \in \gamma$ выполняется $\sigma_{\nu}^+(x_1) + \frac{1}{\delta} [u_{\nu}(x_1)] < 0$, получим равенство $[u_{\nu}(x_1)] = 0$. Таким образом,

$$[u_{\nu}] \left(-\sigma_{\nu}^+ + \frac{1}{\delta} [u_{\nu}] \right) = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (3.16)$$

Покажем, что из (3.1)-(3.6) следует (3.11), (3.12). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) \in K^e$, а (u, v) – решение задачи (3.1)-(3.6). Тогда на основе уравнений равновесия из (3.1) и (3.2) получаем равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\omega} (-\operatorname{div} p - g)(\bar{v} - v) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0,$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) + \int_{\gamma} [\sigma \nu(\bar{u} - u)] - \\ - \int_{\gamma} p \nu(\bar{v} - v) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0. \quad (3.17)$$

Чтобы показать, что вариационное неравенство (3.12) является следствием равенства (3.17), необходимо проверить выполнение неравенства

$$\int_{\gamma} [\sigma \nu(\bar{u} - u)] - \int_{\gamma} p \nu(\bar{v} - v) - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] \leq 0.$$

Левую часть в последнем неравенстве можно записать в виде

$$\int_{\gamma} [\sigma_\nu](\bar{u} - u)_\nu^- + \int_{\gamma} \sigma_\nu^+[(\bar{u} - u)_\nu] + \int_{\gamma} [\sigma_\tau](\bar{u} - u)_\tau^- + \\ + \int_{\gamma} \sigma_\tau^+[(\bar{u} - u)_\tau] + \int_{\gamma} p_\nu(\bar{v} - v)_\nu + \int_{\gamma} p_\tau(\bar{v} - v)_\tau - \\ - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\nu][(\bar{u} - u)_\nu] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\tau][(\bar{u} - u)_\tau]. \quad (3.18)$$

В силу условий (3.5), (3.6) сумма в (3.18) неположительна, поэтому уравнение (3.17) влечет неравенство (3.12). Из уравнений (3.1), (3.2) с учетом всех условий в (3.3)-(3.6) следует постановка (3.11), (3.12). Таким

образом, установлена эквивалентность формулировок задачи равновесия (3.1)-(3.6) и (3.11), (3.12) на классе гладких решений. \square

3.2 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта

В этом пункте исследуется поведение решения задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом в случаях, когда параметр повреждаемости дефекта δ стремится к предельным значениям, $\delta = 0$ и $\delta = \infty$. При каждом фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ задача равновесия (3.11), (3.12) имеет вид:

$$\text{Найти такую } (u^\delta, v^\delta) \in K^e, \text{ что} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(\bar{v} - v^\delta) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\delta) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u^\delta][\bar{u} - u^\delta] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В результате поочередной подстановки в неравенство (3.20) функций $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u^\delta, v^\delta)$ получим соотношение

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(v^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u^\delta]^2 = \int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega} g v^\delta,$$

из которого следуют равномерные по $\delta \in (0, \infty)$ оценки

$$\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_7, \quad \|v^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_8, \quad (3.21)$$

а также

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_9 \delta. \quad (3.22)$$

Введем множество следующего вида:

$$K_0^e = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \bar{u} = \bar{v} \text{ на } \gamma\}.$$

Теорема 3.2. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач типа (3.19), (3.20) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow 0$:*

$$u^\delta \rightarrow u^0 \text{ слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad v^\delta \rightarrow v^0 \text{ слабо в } H^1(\omega)^2, \quad (3.23)$$

$$[u^\delta] \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\gamma) \quad ([u^0] = 0 \text{ п.в. на } \gamma). \quad (3.24)$$

При этом функция (u^0, v^0) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u^0, v^0) \in K_0^e, \text{ что} \quad (3.25)$$

$$\int_{\Omega} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega} f \bar{u} + \int_{\omega} p(v^0) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} = 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}) \in K_0^e$. (3.26)

Доказательство. Сходимости (3.23) и (3.24) при $\delta \rightarrow 0$ для подпоследовательности последовательности решений (u^δ, v^δ) , обозначаемой так же, являются следствием оценок (3.21) и (3.22). В силу сходимостей (3.23) и (3.24) предельная функция (u^0, v^0) является элементом множества K_0^e .

Пусть $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in K_0^e$. Подставив в (3.20) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^\delta, v^\delta) + (\tilde{u}, \tilde{v})$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^\delta, v^\delta) - (\tilde{u}, \tilde{v})$, получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(\tilde{v}) - \int_{\omega} g \tilde{v} = 0. \quad (3.27)$$

Учитывая сходимости (3.23) и (3.24), перейдем к пределу в (3.19) и (3.27) при $\delta \rightarrow 0$.

Предельная задача будет иметь вид

Найти такую $(u^0, v^0) \in K_0^e$, что

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} + \int_{\omega} p(v^0) \varepsilon(\tilde{v}) - \int_{\omega} g \tilde{v} = 0 \quad \text{для всех } (\tilde{u}, \tilde{v}) \in K_0^e.$$

Поскольку $[u^0] = 0$ на γ , в последнем уравнении можно заменить область интегрирования Ω_γ на Ω , тогда оно примет вид (3.26).

Решение задачи (3.25), (3.26) единственно. Это можно показать от противного, предположив, что $(u_1^0, v_1^0), (u_2^0, v_2^0)$ – два различных решения, для каждого из которых равенство (3.26) выполняется, в частности, при $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_1^0, v_1^0) - (u_2^0, v_2^0)$. Действуя как при доказательстве леммы 1.3, получим, что $(u_1^0, v_1^0) = (u_2^0, v_2^0)$. Тогда сходимости (3.23) и (3.24) выполняются для всей последовательности решений (u^δ, v^δ) . Теорема доказана. □

При условии достаточной гладкости решения предельная вариационная задача (3.25), (3.26) может быть представлена в следующем дифференциальном виде:

Найти такие функции $u^0, v^0, \sigma(u^0) = \{\sigma_{ij}(u^0)\}, p(v^0) = \{p_{ij}(v^0)\}, i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div} \sigma(u^0) = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma(u^0) - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$-\operatorname{div} p(v^0) = g \quad \text{в } \omega, \quad p(v^0) - B\varepsilon(v^0) = 0 \quad \text{в } \omega,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad p(v^0)\nu = 0 \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma,$$

$$u^0 = v^0, \quad [\sigma(u^0)\nu] = p(v^0)\nu \quad \text{на } \gamma.$$

Задача (3.25), (3.26) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции без дефекта в нижней пластине.

Рассмотрим теперь второй предельный случай.

Теорема 3.3. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач*

типа (3.19), (3.20) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow \infty$:

$$u^\delta \rightarrow u^\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad [u^\delta] \rightarrow [u^\infty] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma), \quad (3.28)$$

$$v^\delta \rightarrow v^\infty \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (3.29)$$

При этом функция (u^∞, v^∞) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u^\infty, v^\infty) \in K^e, \quad \text{что} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty) \varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) + \int_{\omega} p(v^\infty) \varepsilon(\bar{v} - v^\infty) - \\ - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\infty) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Доказательство. По теореме вложения имеем

$$\|u^{\delta\pm}\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{10} \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2},$$

поэтому

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{11}. \quad (3.32)$$

Оценки в (3.21) и (3.32) влекут сходимости (3.28) и (3.29) при $\delta \rightarrow \infty$ для подпоследовательности последовательности решений (u^δ, v^δ) , обозначаемой так же. В силу сходимостей (3.28) и (3.29) предельная функция (u^∞, v^∞) принадлежит множеству K^e . Осуществляя предельный переход в задаче (3.19), (3.20) на основе (3.28) и (3.29), получим вариационную задачу в виде (3.30), (3.31). Решение задачи (3.30), (3.31) единственно. Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1.3. Поэтому сходимости (3.28) и (3.29) справедливы для всей последовательности решений (u^δ, v^δ) . Таким образом, утверждения теоремы выполняются. \square

Предельная задача (3.30), (3.31) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции при наличии трещины с нулевым трением на положительном берегу γ . Дифференциальную формулировку задачи (3.30),

(3.31) можно найти в [57]. В работе [56] исследована аналогичная задача равновесия с условием $v = 0$ на $\partial\omega \setminus \gamma$.

3.3 Пределный переход по параметру жесткости верхнего слоя

Пусть коэффициенты упругости верхнего слоя зависят от параметра $\lambda \in (0, \lambda_0) : B^\lambda = \{\lambda^{-1}b_{ijkl}\}$. Тогда задача равновесия (3.11), (3.12) при каждом фиксированном λ примет следующий вариационный вид:

$$\text{Найти такую } (u^\lambda, v^\lambda) \in K^e, \quad \text{что} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_\omega p(v^\lambda) \varepsilon(\bar{v} - v^\lambda) - \int_\omega g(\bar{v} - v^\lambda) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u^\lambda][\bar{u} - u^\lambda] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Рассмотрим множество

$$K^r = \{(\bar{u}, \bar{\rho}) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega) \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0, \bar{u}^- = \bar{\rho} \text{ на } \gamma\},$$

где

$$\begin{aligned} R(\omega) = \{\varrho = (\varrho_1, \varrho_2) \mid \varrho(x) = d(x_2, -x_1) + (c_1, c_2), \\ x = (x_1, x_2) \in \omega; d, c_1, c_2 = \text{const}\}. \end{aligned}$$

Теорема 3.4. *Для последовательности решений (u^λ, v^λ) семейства задач типа (3.33), (3.34) имеют место сходимости при $\lambda \rightarrow 0$:*

$$u^\lambda \rightarrow u_0 \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, [u^\lambda] \rightarrow [u_0] \quad \text{сильно в } L^2(\gamma), \quad (3.35)$$

$$v^\lambda \rightarrow \rho_0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (3.36)$$

При этом функция (u_0, ρ_0) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u_0, \rho_0) \in K^r, \quad \text{что} \quad (3.37)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0) \varepsilon(\bar{u} - u_0) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_0) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u_0][\bar{u} - u_0] - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho_0) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$. (3.38)

Доказательство. Из вариационного неравенства (3.34) можно получить равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_\omega p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u^\lambda]^2 = \int_{\Omega_\gamma} f u^\lambda + \int_\omega g v^\lambda,$$

из которого следуют равномерные по $\lambda \in (0, \lambda_0)$ оценки

$$\|u^\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{12}, \quad \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{13}. \quad (3.39)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int_\omega p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) \leq C_{14} \lambda, \quad (3.40)$$

из которого следует, что предельная функция для v^λ при $\lambda \rightarrow 0$ является функцией пространства $R(\omega)$. Итак, в силу (3.39) и (3.40) выполняются сходимости (3.35) и (3.36) при $\lambda \rightarrow 0$ для подпоследовательности последовательности решений (u^λ, v^λ) , обозначаемой так же. Выбирая $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$ в качестве тестовой функции в (3.34) и переходя к пределу в задаче (3.33), (3.34) на основе сходимостей (3.35) и (3.36), получим вариационную задачу (3.37), (3.38). Решение задачи (3.37), (3.38) единственно, доказательство проводится от противного. Поэтому сходимости (3.35) и (3.36) имеют место для всей последовательности решений (u^λ, v^λ) .

Теорема верна. □

Предельная задача (3.37), (3.38) описывает равновесие конструкции, состоящей из нижнего упругого слоя с дефектом и верхнего жесткого слоя.

3.4 Краевая задача равновесия конструкции с жестким верхним слоем

Получим теперь дифференциальную формулировку задачи равновесия конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев. Обозначим решение (u_0, ρ_0) задачи (3.37), (3.38) через (u, ρ) . Пусть пробная функция в (3.38) поочередно принимает вид $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) + (\phi, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) - (\phi, 0)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$. Тогда из (3.38) следует, что в смысле распределений выполняется уравнение равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma.$$

Из неравенства (3.38) можно получить условия

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau], \quad -\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geq 0, \quad [u_\nu] \left(-\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \right) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma$$

тем же способом, которым ранее условия (3.13) и (3.16) были получены из неравенства (3.12). Опустим соответствующие рассуждения.

Далее, пусть $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) + (\eta, \zeta)$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) - (\eta, \zeta)$, $(\eta, \zeta) \in K^r$ и $[\eta_\nu] = 0$. Используя поочередно такие функции $(\bar{u}, \bar{\rho})$ в качестве тестовой и далее интегрируя по частям в (3.38), получим

$$-\int_\gamma [\sigma_\nu \cdot \eta] + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\eta] - \int_\omega g\zeta = 0.$$

Это соотношение можно записать в другом виде, добавив слагаемые

$$\pm \int_{\gamma} \sigma_{\tau}^{+} \eta_{\tau}^{-}:$$

$$- \int_{\gamma} [\sigma_{\nu}] \eta_{\nu} - \int_{\gamma} [\sigma_{\tau}] \eta_{\tau}^{-} - \int_{\gamma} \sigma_{\tau}^{+} [\eta_{\tau}] + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau}] [\eta_{\tau}] - \int_{\omega} g \zeta = 0.$$

Откуда, учитывая структуру функции (η, ζ) , получим

$$- \int_{\gamma} [\sigma_{\nu}] \zeta - \int_{\omega} g \zeta = 0 \quad \text{для всех } \zeta \in R(\omega).$$

Таким образом, из вариационной формулировки задачи равновесия двуслойной конструкции (3.37), (3.38) следуют условия, совокупность которых представляет собой дифференциальную формулировку задачи. А именно, требуется найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho \in R(\omega)$, что

$$- \operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_{\gamma}, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_{\gamma}, \quad (3.41)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad u^{-} = \rho, \quad [u_{\nu}] \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.42)$$

$$\sigma_{\tau}^{+} = \frac{1}{\delta} [u_{\tau}], \quad \sigma_{\nu}^{+} - \frac{1}{\delta} [u_{\nu}] \leq 0, \quad \left(\sigma_{\nu}^{+} - \frac{1}{\delta} [u_{\nu}] \right) [u_{\nu}] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.43)$$

$$\int_{\gamma} [\sigma_{\nu}] \bar{\rho} + \int_{\omega} g \bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех } \bar{\rho} \in R(\omega). \quad (3.44)$$

Уравнения в (3.41) – это уравнение равновесия и обобщенный закон Гука для упругого слоя. Условия в (3.42) соответствуют закреплению упругого слоя на внешней границе, а также равенству перемещений слоев на линии их соединения; последнее условие исключает взаимное проникание берегов дефекта. В (3.43) содержатся краевые условия на напряжения в зоне дефекта. Уравнение (3.44) описывает равновесие жесткого слоя.

Теорема 3.5. *Формулировки задачи равновесия (3.37)-(3.38) и (3.41)-(3.44) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Дифференциальная формулировка (3.41)-(3.44) выведена из вариационной постановки (3.37), (3.38). Нужно проверить,

что из (3.41)-(3.44) можно получить (3.37), (3.38). Для этого рассмотрим функцию $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$. Из (3.41) и (3.44) следует, что верно равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) - \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{\rho} - \rho) - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{u} - u) - \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{\rho} - \rho) - \\ - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u] = 0. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму слагаемых из (3.45):

$$\int_\gamma [\sigma \nu](\bar{u} - u) - \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{\rho} - \rho) - \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u],$$

которая представима в виде

$$\int_\gamma \sigma \nu^+[\bar{u} - u] + \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{u} - u)^- - \int_\gamma [\sigma \nu](\bar{\rho} - \rho) - \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u]. \quad (3.46)$$

В силу последних двух условий из (3.42) и условий (3.43), (3.44), сумма в (3.46) неположительна. Поэтому из равенства (3.45) следует выполнение неравенства

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u][\bar{u} - u] - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho) \geq 0,$$

которое совпадает с вариационным неравенством (3.38). Таким образом, из дифференциальной постановки задачи (3.41)-(3.44) следует ее вариационная постановка (3.37), (3.38), и, следовательно, формулировки эквивалентны

при условии достаточной гладкости решения задачи (3.37), (3.38). \square

3.5 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта в задаче равновесия конструкции с жестким верхним слоем

В этом пункте будут получены предельные задачи в случае стремления параметра повреждаемости δ к нулю и к бесконечности в задаче (3.37), (3.38). При каждом фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ задача равновесия в вариационной форме имеет вид:

Найти такую $(u^\delta, \rho^\delta) \in K^r$, что (3.47)

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(v - u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u^\delta][\bar{u} - u^\delta] - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho^\delta) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$. (3.48)

Из неравенства (3.48) можно получить соотношение

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u^\delta]^2 = \int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_\omega g \rho^\delta. \quad (3.49)$$

Поскольку норма для $\rho^\delta \in R(\omega)$ имеет вид

$$\|\rho^\delta\|_{H^1(\omega)^2}^2 = \int_\gamma (\rho^\delta)^2 = \|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma)}^2,$$

в силу теоремы вложения

$$\|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma)} = \|u^{\delta-}\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{15} \|u^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2}$$

для слагаемых в правой части (3.49) верна оценка

$$\int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega} g \rho^\delta \leq C_{16} \|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2}.$$

Кроме того, для слагаемых в левой части (3.49) выполняется неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u^\delta]^2 \geq C_{17} \|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2}^2.$$

Таким образом, из (3.49) следуют равномерные оценки по $\delta \in (0, \infty)$:

$$\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{18}, \quad \|\rho^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{19}, \quad (3.50)$$

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{20} \delta. \quad (3.51)$$

Рассмотрим множество функций

$$K_0^r = \{\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \bar{u} = \bar{\rho} \text{ на } \gamma, \bar{\rho} \in R(\omega)\}.$$

Теорема 3.6. *Для последовательности решений (u^δ, ρ^δ) семейства задач типа (3.47), (3.48) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow 0$:*

$$u^\delta \rightarrow u^0 \text{ слабо в } H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2, \quad \rho^\delta \rightarrow \rho^0 \text{ слабо в } H^1(\omega)^2, \quad (3.52)$$

$$[u^\delta] \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\gamma) \quad ([u^0] = 0 \text{ п.в. на } \gamma). \quad (3.53)$$

При этом функция u^0 является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } u^0 \in K_0^r, \text{ что} \quad (3.54)$$

$$\int_{\Omega} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega} f \bar{u} - \int_{\omega} g \bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in K_0^r. \quad (3.55)$$

Доказательство. На основе (3.50) и (3.51) получаем, что при $\delta \rightarrow 0$ выполняются сходимости (3.52), (3.53) для подпоследовательности последовательности решений (u^δ, ρ^δ) , обозначаемой так же. В силу

сходимостей (3.52) и (3.53) предельная функция u_0 является элементом пространства $H_0^1(\Omega)^2$. Пусть $\tilde{u} \in K_0^r$, тогда $\tilde{u}^- = \tilde{\rho}$ на γ , и $(\tilde{u}, \tilde{\rho}) \in K^r$. Подставив в (3.48) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u^\delta, \rho^\delta) + (\tilde{u}, \tilde{\rho})$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u^\delta, \rho^\delta) - (\tilde{u}, \tilde{\rho})$, получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} - \int_{\omega} g \tilde{\rho} = 0. \quad (3.56)$$

Переходя к пределу в (3.47), (3.56) при $\delta \rightarrow 0$ на основе (3.52), (3.53), получим задачу в виде

Найти такую $u^0 \in K_0^r$, что

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} - \int_{\omega} g \tilde{\rho} = 0 \quad \text{для всех } \tilde{u} \in K_0^r.$$

Предельная задача равносильна задаче (3.54), (3.55), поскольку $[u^0] = 0$ на γ . Решение задачи (3.54), (3.55) единственно, это можно показать, исходя из предположения о противном. Поэтому сходимости (3.52), (3.53) справедливы для всей последовательности решений (u^δ, ρ^δ) . Таким образом, теорема верна. □

При условии достаточной гладкости решения задачу (3.54), (3.55) можно сформулировать в эквивалентном дифференциальном виде: Найти такие функции u^0 , $\sigma(u^0) = \{\sigma_{ij}(u^0)\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho^0 \in R(\omega)$, что

$$-\operatorname{div} \sigma(u^0) = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma(u^0) - A \varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad u^0 = \rho^0 \quad \text{на } \gamma,$$

$$\int_{\gamma} [\sigma(u^0) \nu] \bar{\rho} + \int_{\omega} g \bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех } \bar{\rho} \in R(\omega).$$

Задача (3.54), (3.55) описывает равновесие конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоя, соединяющихся по линии, но без дефекта в упругом слое.

Рассмотрим случай, когда параметр повреждаемости δ стремится к бесконечности.

Теорема 3.7. *Для последовательности решений (u^δ, ρ^δ) семейства задач типа (3.47), (3.48) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow \infty$:*

$$u^\delta \rightarrow u^\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad [u^\delta] \rightarrow [u^\infty] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma), \quad (3.57)$$

$$\rho^\delta \rightarrow \rho^\infty \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (3.58)$$

При этом функция (u^∞, ρ^∞) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u^\infty, \rho^\infty) \in K^r, \quad \text{что} \quad (3.59)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty) \varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) - \int_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho^\infty) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$. (3.60)

Доказательство. Оценки в (3.50) влекут сходимости (3.57), (3.58) при $\delta \rightarrow \infty$ для подпоследовательности последовательности решений (u^δ, ρ^δ) , обозначаемой так же. В силу (3.57) и (3.58) для функции (u^∞, ρ^∞) верна принадлежность $(u^\infty, \rho^\infty) \in K^r$. Переходя к пределу в вариационной задаче (3.47), (3.48) при $\delta \rightarrow \infty$, получим задачу в виде (3.59), (3.60). Решение задачи (3.59), (3.60) единственно, поэтому сходимости (3.57), (3.58) выполняются для всей последовательности решений (u^δ, ρ^δ) семейства задач типа (3.47), (3.48). Теорема доказана. \square

Предельная вариационная задача (3.59), (3.60) является задачей равновесия двуслойной конструкции с трещиной, состоящей из упругого и жесткого слоя, при этом на берегах трещины отсутствует трение. Исследование данной задачи проведено в работе [57].

Глава 4. Задача равновесия для двуслойной конструкции, в которой верхний слой накрывает вершину дефекта

В этой главе рассматривается задача равновесия двуслойной упругой конструкции с прямолинейным дефектом в нижнем слое. Верхний слой конструкции приклеен по своему краю к нижнему слою и накрывает одну из вершин дефекта. Для моделирования дефекта используются нелинейные краевые условия. С помощью вариационного подхода установлена разрешимость задачи. Выполнены предельные переходы по параметру, характеризующему жесткость верхнего слоя, а также по параметру повреждаемости дефекта. Рассмотрена задача оптимального управления, в которой функционалом стоимости является производная функционала энергии по длине дефекта, а функциями управления выбраны два параметра, которые указаны выше. Доказано, что решение задачи оптимального управления существует.

4.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – области, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 4.1). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Через $\nu^b = (\nu_1^b, \nu_2^b)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$; $\tau^b = (\tau_1^b, \tau_2^b) = (-\nu_2^b, \nu_1^b)$ – касательный вектор. Множество $\gamma = (0, l) \times \{0\}$ соответствует дефекту в нижнем слое, $\bar{\gamma} \subset \Omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Дефект характеризуется параметром повреждаемости δ , $\delta \in (0, \infty)$. Нормаль единичной длины к γ обозначается через $\nu^d = (\nu_1^d, \nu_2^d)$, а $\tau^d = (\tau_1^d, \tau_2^d) = (-\nu_2^d, \nu_1^d)$ – касательный вектор. С помощью направления ν^d определяется знак берега γ^\pm . Аналогичным образом направление нормали ν^b определяет знак $\partial\omega^\pm$. Будет использовано обозначение $[h] = h^+ - h^-$ для скачка функции h на γ или $\partial\omega$, где h^\pm – следы функции h на берегах γ^\pm или $\partial\omega^\pm$.

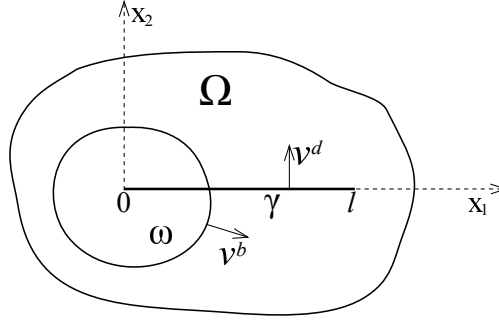


Рисунок 4.1 — Геометрия конструкции на плоскости.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$ — тензоры модулей упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности (1.1), (1.2). Считаем, что компоненты a_{ijkl}, b_{ijkl} — постоянные.

Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ — горизонтальные смещения точек нижнего и верхнего слоя соответственно. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$, $i, j = 1, 2$, будет обозначаться тензор деформаций, определяемый формулой (1.3). Также вводится обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Для векторов напряжений и их касательных и нормальных компонент используются обозначения (1.4).

Задача равновесия для двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин дефекта, под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом:

Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (4.1)$$

$$-\operatorname{div} p = g \quad \text{в} \quad \omega, \quad p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad (4.2)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad u = v, \quad [\sigma\nu^b] = p\nu^b \quad \text{на} \quad \partial\omega, \quad (4.3)$$

$$[u_{\nu^d}] \geq 0, \quad [\sigma_{\tau^d}] = 0, \quad \sigma_{\tau^d} = \frac{1}{\delta}[u_{\tau^d}] \quad \text{на} \quad \gamma, \quad (4.4)$$

$$[\sigma_{\nu^d}] = 0, \quad \sigma_{\nu^d} \leq \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}], \quad \left(\sigma_{\nu^d} - \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}] \right) [u_{\nu^d}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \quad (4.5)$$

Соотношения (4.1), (4.2) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для нижнего и верхнего слоя соответственно. Последние два условия в (4.3) соответствуют склейке слоев на $\partial\omega$. Первое условие в (4.4) обеспечивает непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Остальные ограничения в (4.4) и (4.5) задают связь между нормальными и касательными составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ .

Наряду с дифференциальной постановкой задачи можно привести ее формулировку в вариационном виде. Для этого рассмотрим множество допустимых перемещений

$$K = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 \mid [\bar{u}_{,\nu^d}] \geq 0 \text{ на } \gamma, \bar{u} = \bar{v} \text{ на } \partial\omega\},$$

где $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)$ – пространство Соболева,

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma) = \{\bar{u} \in H^1(\Omega_\gamma) \mid \bar{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Задача равновесия имеет следующий вариационный вид:

$$\text{Найти такую } (u, v) \in K, \text{ что} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] \geq 0 \text{ для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Покажем, что если решение задачи (4.6), (4.7) существует, то оно является слабым решением задачи (4.1)-(4.5), а решение задачи (4.1)-(4.5) есть решение задачи (4.6), (4.7).

Теорема 4.1. *Формулировки (4.1)-(4.5) и (4.6)-(4.7) задачи равновесия эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Получим формулировку (4.1)-(4.5) из (4.6), (4.7).

Выбирая тестовые функции в (4.7) вида $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\phi, \psi)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\phi, \psi)$, $(\phi, \psi) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma \setminus \partial\omega)^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$, установим, что уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } \Omega_\gamma \setminus \partial\omega, \quad -\operatorname{div} p = g \quad \text{в } \omega$$

выполнены в смысле распределений.

Далее, пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\xi, 0)$, $(\xi, 0) \in K$, $\operatorname{supp} \xi \subset \overline{U^+}$, где U^+ – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 4.2). Проинтегрировав по

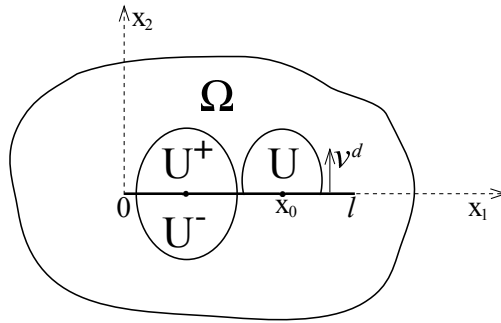


Рисунок 4.2 – Окрестности точек из γ .

частям в (4.7) при тестовой функции (\bar{u}, \bar{v}) , выбранной таким образом, получим неравенство

$$-\int_{\gamma} \sigma_{\nu^{d+}} \cdot \xi + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u] \xi \geq 0,$$

которое можно представить в виде

$$-\int_{\gamma} \sigma_{\nu^d}^+ \xi_{\nu^d} - \int_{\gamma} \sigma_{\tau^d}^+ \xi_{\tau^d} + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\nu^d}] \xi_{\nu^d} + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau^d}] \xi_{\tau^d} \geq 0. \quad (4.8)$$

В силу произвольности ξ_{τ} и неотрицательности ξ_{ν} из (4.8) следует, что

$$-\sigma_{\tau^d}^+ + \frac{1}{\delta} [u_{\tau^d}] = 0, \quad -\sigma_{\nu^d}^+ + \frac{1}{\delta} [u_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (4.9)$$

Предполагая, что $\operatorname{supp} \xi \subset \overline{U^-}$, где U^- – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 4.2), можно получить условия, аналогичные условиям в (4.9):

$$-\sigma_{\tau^d}^- + \frac{1}{\delta} [u_{\tau^d}] = 0, \quad -\sigma_{\nu^d}^- + \frac{1}{\delta} [u_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (4.10)$$

Из условий (4.9) и (4.10) следует, что $[\sigma_{\tau^d}] = 0$ на γ .

Пусть теперь $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\zeta, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\zeta, 0)$, $\zeta \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2$, $[\zeta_{\nu^d}] = 0$, $\text{supp } \zeta \subset \overline{U^- \cup U^+}$, где $U^- \cup U^+$ – окрестность некоторой точки множества γ (рис. 4.2). Проинтегрировав по частям в (4.7) при таких пробных функциях (\bar{u}, \bar{v}) , получим равенство

$$- \int_{\gamma} [\sigma_{\nu^d} \cdot \zeta] + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\zeta] = 0, \quad (4.11)$$

которое можно записать в следующем виде:

$$- \int_{\gamma} [\sigma_{\nu^d}] \zeta_{\nu^d} - \int_{\gamma} \sigma_{\tau^d} [\zeta_{\tau^d}] + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau^d}] [\zeta_{\tau^d}] = 0. \quad (4.12)$$

В силу первого условия в (4.10) из (4.12) следует равенство $[\sigma_{\nu^d}] = 0$ на γ .

Пусть для некоторой точки $x_0 \in \gamma$ выполняется условие $[u_{\nu^d}(x_0)] > 0$. Рассмотрим такую функцию $\varpi \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2$, что $\text{supp } \varpi \subset \bar{U}$, где U – малая окрестность точки $x_0 \in \gamma$ (рис. 4.2). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\beta\varpi, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\beta\varpi, 0)$, β – малый положительный параметр, тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив поочередно выбранные таким образом функции (\bar{u}, \bar{v}) в (4.7) и далее проинтегрировав по частям, получим

$$- \int_{\gamma} \sigma_{\nu^d} \varpi + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u] \varpi = 0,$$

откуда следует, что $\sigma_{\nu^d}^+(x_0) + \frac{1}{\delta} [u_{\nu^d}(x_0)] = 0$. Предполагая, что в точке $x_1 \in \gamma$ выполняется $\sigma_{\nu^d}^+(x_1) + \frac{1}{\delta} [u_{\nu^d}(x_1)] < 0$, получим равенство $[u_{\nu^d}(x_1)] = 0$. Таким образом,

$$[u_{\nu^d}] \left(-\sigma_{\nu^d}^+ + \frac{1}{\delta} [u_{\nu^d}] \right) = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Выбрав поочередно в неравенстве (4.7) в качестве тестовой функции $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\eta, \varphi)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - (\eta, \varphi)$, где $(\eta, \varphi) \in K$, $[\eta_{\nu^d}] = 0$, после

интегрирования по частям получим

$$-\int_{\gamma} [\sigma \nu^d \cdot \eta] + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\eta] + \int_{\partial\omega} p \nu^b \cdot \varphi - \int_{\partial\omega} [\sigma \nu^b] \varphi = 0. \quad (4.13)$$

Сумма первых двух слагаемых в (4.13) равна нулю (см. (4.11)), поэтому из (4.13) следует равенство $p \nu^b = [\sigma \nu^b]$ на $\partial\omega$. Таким образом, все условия формулировки (4.1)-(4.5) получены из вариационной задачи (4.6), (4.7).

Получим теперь формулировку (4.6), (4.7) из (4.1)-(4.5). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$, а (u, v) – решение задачи (4.1)-(4.5). Тогда на основе уравнений равновесия из (4.1) и (4.2) получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma} \setminus \partial\omega} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\omega} (-\operatorname{div} p - g)(\bar{v} - v) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0, \end{aligned}$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma} \setminus \partial\omega} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_{\gamma} \setminus \partial\omega} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] + \int_{\gamma} [\sigma \nu^d(\bar{u} - u)] - \\ - \int_{\partial\omega} p \nu^b(\bar{v} - v) + \int_{\partial\omega} [\sigma \nu^b(\bar{u} - u)] = 0. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Поскольку область интегрирования $\Omega_{\gamma} \setminus \partial\omega$ в (4.14) можно заменить на Ω_{γ} , вариационное неравенство (4.7) следует из равенства (4.14), если выполняется неравенство

$$-\frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u][\bar{u} - u] + \int_{\gamma} [\sigma \nu^d(\bar{u} - u)] - \int_{\partial\omega} p \nu^b(\bar{v} - v) + \int_{\partial\omega} [\sigma \nu^b(\bar{u} - u)] \leq 0.$$

Для слагаемых в левой части последнего неравенства справедлива запись

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\nu^d}] [\bar{u}_{\nu^d} - u_{\nu^d}] - \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\tau^d}] [\bar{u}_{\tau^d} - u_{\tau^d}] + \int_{\gamma} [\sigma_{\nu^d} (\bar{u}_{\nu^d} - u_{\nu^d})] + \\
& + \int_{\gamma} [\sigma_{\tau^d} (\bar{u}_{\tau^d} - u_{\tau^d})] - \int_{\partial\omega} p\nu^b (\bar{v} - v) + \int_{\partial\omega} [\sigma\nu^b (\bar{u} - u)]. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

В силу условий (4.3), (4.4) и (4.5) сумма в (4.15) неположительна, из чего следует, что дифференциальная формулировка (4.1)-(4.5) влечет вариационную постановку (4.6), (4.7). \square

Далее, рассмотрим вопрос о разрешимости задачи равновесия.

Теорема 4.2. *Задача равновесия (4.6), (4.7) имеет решение.*

Доказательство. Чтобы установить существование решения рассматриваемой задачи равновесия обратимся к ее формулировке в виде задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений:

$$\text{Найти такую } (u, v) \in K, \text{ что } \Pi(u, v) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K} \Pi(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.16)$$

При этом функционал энергии $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ имеет следующий вид:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2.$$

Задача (4.16) имеет решение, поскольку K - слабо замкнутое множество рефлексивного пространства $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2 \times H^1(\omega)^2$, а функционал $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того функционал $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ является коэрцитивным на множестве K . Для того, чтобы проверить коэрцитивность

функционала, представим $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ в виде

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{u}, \bar{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2 + \\ & + \alpha \int_{\partial\omega} \bar{v}^2 - \alpha \int_{\partial\omega} \bar{v}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

где α – положительный малый параметр, который выбирается таким образом, чтобы была справедлива теорема о следе [79, гл. 3, § 5, п. 1] и, как следствие, выполнялось неравенство:

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \alpha \int_{\partial\omega} \bar{u}^2 \geq 0. \quad (4.18)$$

По теореме об эквивалентном представлении нормы в пространстве Соболева из [80, гл. 1, § 1, п. 3] для слагаемых в (4.17) выполняется неравенство

$$\int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) + \alpha \int_{\partial\omega} \bar{v}^2 \geq C_1 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)}^2. \quad (4.19)$$

Через C_1 и используемые далее C_2, \dots, C_{17} обозначаются постоянные, не зависящие от оцениваемых функций. В силу (4.18) и (4.19), с учетом того, что $\frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{v}]^2 \geq 0$, представление (4.17) влечет оценку снизу:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) \geq C_2 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)}^2 + C_3 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)}^2 - C_4 \|\bar{u}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)} - C_5 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)},$$

из которой следует коэрцитивность функционала энергии $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ на множестве K . Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4.16) является существование решения вариационной задачи (4.6), (4.7). Таким образом, теорема доказана. \square

Поскольку было доказано, что формулировки (4.6), (4.7) и (4.1)-(4.5) эквивалентны на классе гладких решений, решение задачи (4.6), (4.7) при достаточной гладкости будет решением задачи, сформулированной в виде (4.1)-(4.5).

4.2 Пределный переход по параметру жесткости верхнего слоя

Исследуем поведение решения задачи равновесия (4.6), (4.7) при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю и к бесконечности. Пусть тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от положительного параметра λ : $B_\lambda = \{\lambda^{-1}b_{ijkl}\}$. Тогда при каждом фиксированном $\lambda \in (0, \infty)$ задача (4.6), (4.7) примет вид:

$$\text{Найти такую } (u_\lambda, v_\lambda) \in K, \text{ что} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u_\lambda) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_\lambda) \varepsilon(\bar{v} - v_\lambda) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v_\lambda) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda][\bar{u} - u_\lambda] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Рассмотрим случай, когда параметр λ стремится к нулю. Введем в рассмотрение множество

$$\begin{aligned} K_0 = \{(\bar{u}, \bar{\rho}) \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega) \mid \\ [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \text{ на } \gamma, \bar{u} = \bar{\rho} \text{ на } \partial\omega\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} R(\omega) = \{\varrho = (\varrho_1, \varrho_2) \mid \varrho(x) = d(x_2, -x_1) + (c_1, c_2), \\ x = (x_1, x_2) \in \omega; d, c_1, c_2 = \text{const}\}. \end{aligned}$$

Теорема 4.3. *Для последовательности решений (u_λ, v_λ) семейства задач (4.20), (4.21) имеют место сходимости при $\lambda \rightarrow 0$:*

$$u_\lambda \rightarrow u_0 \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad v_\lambda \rightarrow \rho_0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2.$$

При этом функция (u_0, ρ_0) является решением вариационной задачи:

$$\text{Найти такую } (u_0, \rho_0) \in K_0, \text{ что} \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0) \varepsilon(\bar{u} - u_0) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_0) + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u_0][\bar{u} - u_0] - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho_0) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0$. (4.24)

Доказательство. В результате подстановки в (4.21) функций $(2u_\lambda, 2v_\lambda)$ и $(0, 0)$ в качестве (\bar{u}, \bar{v}) получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda) \varepsilon(u_\lambda) - \int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u_\lambda]^2 + \frac{1}{\lambda} \int_\omega p(v_\lambda) \varepsilon(v_\lambda) - \int_\omega g v_\lambda = 0. \quad (4.25)$$

Добавляя слагаемые $\pm \alpha \int_{\partial\omega} v_\lambda^2$ в (4.25), установим оценки, равномерные по параметру $\lambda \in (0, \lambda_0)$:

$$\|u_\lambda\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2} \leq C_6, \quad \|v_\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_7. \quad (4.26)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно предполагать в силу (4.26), что выполняются сходимости при $\lambda \rightarrow 0$:

$$u_\lambda \rightarrow u_0^* \text{ слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad v_\lambda \rightarrow v_0^* \text{ слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (4.27)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int_\omega p(v_\lambda) \varepsilon(v_\lambda) \leq C_8 \lambda,$$

из которого следует, что предельная функция v_0^* при $\lambda \rightarrow 0$ в области ω является функцией пространства $R(\omega)$, $v_0^* = \rho_0^* \in R(\omega)$.

Выбрав $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0$ тестовой функцией в (4.21), перейдем к нижнему

пределу при $\lambda \rightarrow 0$ на основе (4.27) и получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^*) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} - \int_{\omega} g \bar{\rho} &\geq \\ &\geq \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^*) \varepsilon(u_0^*) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_0^*] [u_0^* - \bar{u}] - \int_{\Omega_\gamma} f u_0^* - \int_{\omega} g \rho_0^*. \end{aligned}$$

Это неравенство с точностью до обозначения искомой функции совпадает с вариационным неравенством (4.24). Кроме того, для решения (u_0^*, ρ_0^*) выполняется включение (4.23), и, таким образом, $(u_0^*, \rho_0^*) = (u_0, \rho_0)$. Решение задачи (4.23), (4.24) единственно, доказательство данного факта аналогично доказательству леммы 1.3. Поэтому сходимости (4.27) справедливы для всей последовательности решений (u_λ, v_λ) . Теорема доказана. \square

В эквивалентном на классе гладких решений дифференциальном виде задача (4.23), (4.24) выглядит следующим образом:

Найти такие функции u_0 , $\sigma(u_0) = \{\sigma(u_0)_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho_0 \in R(\omega)$ что

$$-\operatorname{div} \sigma(u_0) = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega, \quad \sigma(u_0) - A\varepsilon(u_0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad u_0 = \rho_0 \quad \text{на} \quad \partial\omega,$$

$$[u_{0\nu^d}] \geq 0, \quad [\sigma(u_0)_{\tau^d}] = 0, \quad \sigma(u_0)_{\tau^d} = \frac{1}{\delta} [u_{0\tau^d}] \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$[\sigma(u_0)_{\nu^d}] = 0, \quad \sigma(u_0)_{\nu^d} \leq \frac{1}{\delta} [u_{0\nu^d}], \quad \left(\sigma(u_0)_{\nu^d} - \frac{1}{\delta} [u_{0\nu^d}] \right) [u_{0\nu^d}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$\int_{\partial\omega} [\sigma(u_0)_{\nu^b}] \bar{\rho} + \int_{\omega} g \bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\rho} \in R(\omega).$$

Предельная задача (4.23), (4.24) описывает равновесие двуслойной конструкции, в которой верхний жесткий слой накрывает дефект в нижнем упругом слое.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр λ стремится к бесконечности. Определим множество допустимых перемещений K_∞ :

$$K_\infty = \{\bar{u} \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2 \mid [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma\}.$$

Теорема 4.4. Пусть $g = 0$. Для последовательности решений u_λ семейства задач (4.20), (4.21) имеет место сходимость при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$u_\lambda \rightarrow u_\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2.$$

При этом функция u_∞ является решением вариационной задачи:

$$\text{Найти такую } u_\infty \in K_\infty, \quad \text{что} \quad (4.28)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\infty) \varepsilon(\bar{u} - u_\infty) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_\infty) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\infty][\bar{u} - u_\infty] \geq 0$$

для всех $\bar{u} \in K_\infty$. (4.29)

Доказательство. При $g = 0$ равенство (4.25) примет вид:

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda) \varepsilon(u_\lambda) - \int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda]^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_\lambda) \varepsilon(v_\lambda) = 0. \quad (4.30)$$

Из равенства (4.30) получим оценки, равномерные по $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$:

$$\|u_\lambda\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2} \leq C_9, \quad \frac{1}{\lambda} \|v_\lambda\|_{H^1(\omega)^2}^2 \leq C_{10},$$

которые влекут сходимости при $\lambda \rightarrow \infty$

$$u_\lambda \rightarrow u_\infty^* \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} v_\lambda \rightarrow v_\infty^* \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (4.31)$$

Выберем функцию $\bar{u} \in K_\infty$ и продолжим ее в область ω следующим образом: $\bar{u} = \bar{v}$ на $\partial\omega$, $\bar{v} \in H^1(\omega)^2$. Тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив полученную функцию (\bar{u}, \bar{v}) в качестве тестовой в (4.21), перейдем к нижнему пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ на основе (4.31) и получим неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\infty^*) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} \geq \sigma(u_\infty^*) \varepsilon(u_\infty^*) - \int_{\Omega_\gamma} f u_\infty^* + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\infty^*][u_\infty^* - \bar{u}],$$

которое совпадает с неравенством (4.29). При этом предельная функция u_∞^* является элементом множества K_∞ , поэтому $u_\infty^* = u_\infty$. Решение задачи (4.28), (4.29) единственно, поэтому сходимости (4.31) выполняются для всей последовательности решений (u_λ, v_λ) . Теорема доказана. \square

Предельная вариационная задача (4.28), (4.29) представляет собой задачу равновесия упругого тела с дефектом. Исследование аналогичной задачи можно найти в работе [45].

4.3 Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта

Исследуем вопрос о поведении решения задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом при стремлении параметра повреждаемости дефекта δ к нулю и к бесконечности. При каждом фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ задача равновесия (4.6), (4.7) имеет вид:

$$\text{Найти такую } (u^\delta, v^\delta) \in K, \text{ что} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(\bar{v} - v^\delta) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\delta) + \\ & + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u^\delta][\bar{u} - u^\delta] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В результате поочередной подстановки функций $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ в неравенство (4.33) получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(v^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u^\delta]^2 = \int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int_{\omega} g v^\delta,$$

из которого следуют равномерные по $\delta \in (0, \infty)$ оценки

$$\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{11}, \quad \|v^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{12}, \quad (4.34)$$

а также

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{13}\delta. \quad (4.35)$$

Рассмотрим случай, когда параметр δ стремится к нулю. Для этого введем множество

$$K^0 = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega)^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \tilde{u} = \tilde{v} \text{ на } \partial\omega\}.$$

Теорема 4.5. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач (4.32), (4.33) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow 0$:*

$$u^\delta \rightarrow u^0 \text{ слабо в } H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2, \quad v^\delta \rightarrow v^0 \text{ слабо в } H^1(\omega)^2,$$

$$[u^\delta] \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\gamma) \quad ([u^0] = 0 \text{ п.в. на } \gamma).$$

При этом функция (u^0, v^0) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u^0, v^0) \in K^0, \text{ что} \quad (4.36)$$

$$\int_{\Omega} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega} f \tilde{u} - \int_{\omega} p(v^0) \varepsilon(\tilde{v}) - \int_{\omega} g \tilde{v} = 0$$

$$\text{для всех } (\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^0, \quad (4.37)$$

Доказательство. С учетом оценок (4.34) и (4.35) можно предполагать, что при $\delta \rightarrow 0$ выполняются сходимости для подпоследовательности последовательности решений (u^δ, v^δ) , обозначенной так же,

$$u^\delta \rightarrow u^0_* \text{ слабо в } H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2, \quad v^\delta \rightarrow v^0_* \text{ слабо в } H^1(\omega)^2, \quad (4.38)$$

$$[u^\delta] \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\gamma) \quad ([u^0_*] = 0 \text{ п.в. на } \gamma). \quad (4.39)$$

В силу сходимостей (4.38) и (4.39) предельная функция (u^0_*, v^0_*)

является элементом множества K^0 . Пусть $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^0$. Подставив в (4.33) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^\delta, v^\delta) + (\tilde{u}, \tilde{v})$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^\delta, v^\delta) - (\tilde{u}, \tilde{v})$, получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} + \int_{\omega} p(v^\delta) \varepsilon(\tilde{v}) - \int_{\omega} g \tilde{v} = 0. \quad (4.40)$$

Учитывая сходимости (4.38) и (4.39), перейдем к нижнему пределу в (4.32) и (4.40) при $\delta \rightarrow 0$. В пределе получим вариационную задачу вида

Найти такую $(u_*^0, v_*^0) \in K^0$, что

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_*^0) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} - \int_{\omega} p(v_*^0) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} = 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^0.$$

Предельная задача совпадает с задачей (4.36), (4.37), поскольку $[u_*^0] = 0$ на γ . Таким образом, $(u_*^0, v_*^0) = (u^0, v^0)$. Решение задачи (4.36), (4.37) единственно, поэтому сходимости (4.38), (4.39) выполняются для всей последовательности решений (u^δ, v^δ) . Теорема доказана. \square

При условии достаточной гладкости решения задачи (4.36), (4.37) оно будет решением дифференциальной задачи:

Найти такие функции $u^0, v^0, \sigma(u^0) = \{\sigma(u^0)_{ij}\}, p(v^0) = \{p(v^0)_{ij}\}, i, j = 1, 2$, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u^0) &= f \quad \text{в } \Omega \setminus \partial\omega, \quad \sigma(u^0) - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ -\operatorname{div} p(v^0) &= g \quad \text{в } \omega, \quad p(v^0) - B\varepsilon(v^0) = 0 \quad \text{в } \omega, \\ u^0 &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad u^0 = v^0, \quad [\sigma(u^0)\nu^b] = p(v^0)\nu^b \quad \text{на } \partial\omega. \end{aligned}$$

Задача (4.36), (4.37) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции без дефекта.

Обратимся к случаю, когда параметр δ стремится к бесконечности, и покажем, что верно следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач*

(4.32), (4.33) имеют место сходимости при $\delta \rightarrow \infty$:

$$u^\delta \rightarrow u^\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad [u^\delta] \rightarrow [u^\infty] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma),$$

$$v^\delta \rightarrow v^\infty \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2.$$

При этом функция (u^∞, v^∞) является решением вариационной задачи

$$\text{Найти такую } (u^\infty, v^\infty) \in K, \quad \text{что} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty) \varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) + \int_{\omega} p(v^\infty) \varepsilon(\bar{v} - v^\infty) - \\ - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\infty) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Доказательство. Поскольку для нормы функции u^δ верна оценка (4.34), по теореме вложения имеем

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{14}. \quad (4.43)$$

Оценки в (4.34) и (4.43) влекут сходимости при $\delta \rightarrow \infty$:

$$u^\delta \rightarrow u_*^\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad [u^\delta] \rightarrow [u_*^\infty] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma), \quad (4.44)$$

а также

$$v^\delta \rightarrow v_*^\infty \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \quad (4.45)$$

В силу сходимостей (4.44) и (4.45) предельная функция (u_*^∞, v_*^∞) принадлежит множеству K . Осуществляя переход к нижнему пределу в задаче (4.32), (4.33) на основе (4.44) и (4.45), получим вариационную задачу в виде (4.41), (4.42) с точностью до обозначения, $(u_*^\infty, v_*^\infty) = (u^\infty, v^\infty)$. Решение задачи (4.41), (4.42) единственно, поэтому сходимости (4.44) и (4.45) выполняются для всей последовательности решений (u^δ, v^δ) . Теорема доказана. \square

Предельная задача (4.41), (4.42) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин трещины в нижнем слое. Исследование подобных задач проводилось в работах [55; 60; 61].

4.4 Задача оптимального управления

В рамках критерия Гриффитса рассмотрим задачу оптимального управления для двуслойной конструкции с дефектом. В соответствии с критерием дефект в нижнем слое начнет распространяться, когда производная функционала энергии по длине дефекта достигнет критического значения κ (заданного параметра, который определяется свойствами материала). Функциями управления выберем параметры δ и λ , характеризующие повреждаемость дефекта и упругость верхнего слоя конструкции соответственно. При этом параметры (δ, λ) принадлежат множеству $[\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$; $0 < \delta_0 < \delta_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Задача заключается в том, чтобы найти такую пару значений параметров (δ, λ) , при которой производная функционала энергии по длине дефекта будет принимать значение, наиболее удаленное от критического.

Выпишем формулу для функционала качества. Чтобы формула для производной функционала энергии имела смысл, далее предполагается, что $f \in C^1(\bar{\Omega})^2$. При каждой фиксированной паре параметров $(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times (0, \lambda_0]$ задача равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом в виде задачи минимизации функционала энергии выглядит следующим образом:

$$\text{Найти такую } (u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta) \in K, \text{ что } \bar{\Pi}(u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K} \bar{\Pi}(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.46)$$

При этом функционал энергии $\bar{\Pi}(\bar{u}, \bar{v})$ имеет вид:

$$\bar{\Pi}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} + \frac{1}{2\lambda} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [\bar{u}]^2.$$

Рассмотрим задачу, возмущенную по отношению к задаче (4.46). Пусть $\gamma_t = (0, l+t) \times \{0\}$ - обозначение для дефекта, возмущенного вдоль оси Ox_1 с помощью малого параметра $t \geq 0$, $\Omega_{\gamma_t} = \Omega \setminus \bar{\gamma}_t$. Задача минимизации функционала энергии, формулируемая в возмущенной области, имеет вид:

$$\text{Найти такую } (u_\lambda^{\delta t}, v_\lambda^{\delta t}) \in K_t, \text{ что } \bar{\Pi}_t(u_\lambda^{\delta t}, v_\lambda^{\delta t}) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K_t} \bar{\Pi}_t(\bar{u}, \bar{v}).$$

При этом функционал энергии $\bar{\Pi}_t(\bar{u}, \bar{v})$ определяется следующим образом:

$$\bar{\Pi}_t(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_t}} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma_t}} f \bar{u} + \frac{1}{2\lambda} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v} + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma_t} [\bar{u}]^2,$$

а множество допустимых перемещений K_t такое:

$$K_t = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_{\gamma_t})^2 \times H^1(\omega)^2 \mid [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \text{ на } \gamma_t, \bar{u} = \bar{v} \text{ на } \partial\omega\}.$$

При введенных обозначениях производная функционала энергии по параметру возмущения длины дефекта t при $t = 0$

$$G(\delta, \lambda) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\Pi}_t(u_\lambda^{\delta t}, v_\lambda^{\delta t}) - \bar{\Pi}(u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta)}{t}$$

существует, и формула для нее имеет вид:

$$G(\delta, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_\lambda^\delta) \varepsilon_{ij}(u_\lambda^\delta) \theta_{,1} - \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_\lambda^\delta) u_{\lambda i,1}^\delta \theta_{,j} - \\ - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_{\lambda i}^\delta + \frac{1}{2\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda^\delta]^2 \theta_{,1}. \quad (4.47)$$

В формуле (4.47) функция θ - это гладкая функция, причем $\theta = 1$ в некоторой малой окрестности вершины дефекта $(l, 0)$, а вне этой окрестности

$\theta = 0$. Значение $G(\delta, \lambda)$ не зависит от выбора функции θ . Формула (4.47) совпадает с формулой производной функционала энергии по длине дефекта, полученной в работе [45] для упругого тела с дефектом. Формула для производной $G(\delta, 0)$, $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$, выглядит аналогичным образом, поэтому формула (4.47) справедлива при $(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$.

Известно, что для любой пары $(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$ производная $G(\delta, \lambda)$ принимает неположительные значения, а критическое значение κ всегда отрицательно. Поэтому в рамках выбранного подхода задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Найти $(\delta^*, \lambda^*) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$ так, что

$$G(\delta^*, \lambda^*) = \sup_{(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]} G(\delta, \lambda). \quad (4.48)$$

Теорема 4.7. *Задача оптимального управления (4.48) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{(\delta^n, \lambda^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$ – максимизирующая последовательность. В силу компактности множества $[\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0] \subset \mathbb{R}^2$ из последовательности $\{(\delta^n, \lambda^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, элементы которой обозначим так же: $\{(\delta^n, \lambda^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\delta^*, \lambda^*)$, $n \rightarrow \infty$, $(\delta^*, \lambda^*) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$. Для простоты записи далее будет использовано обозначение $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta^*, \lambda^*)$ вместо $\{(\delta^n, \lambda^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\delta^*, \lambda^*)$, $n \rightarrow \infty$. Для того, чтобы доказать утверждение теоремы, требуется рассмотреть следующие случаи:

1. $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$, $\lambda' \in (0, \lambda_0]$,
2. $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$.

При каждой фиксированной паре $(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$ можно привести вариационную задачу, эквивалентную задаче минимизации (4.46), которая заключается в следующем:

$$\text{Найти такую } (u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta) \in K, \text{ что} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\lambda^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_\lambda^\delta) + \frac{1}{\lambda} \int_\omega p(v_\lambda^\delta) \varepsilon(\bar{v} - v_\lambda^\delta) - \int_\omega g(\bar{v} - v_\lambda^\delta) + \\ + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u_\lambda^\delta] [\bar{u} - u_\lambda^\delta] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Из вариационного неравенства (4.50) после подстановки тестовых функций $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta)$, $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ получим равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(u_\lambda^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda^\delta + \frac{1}{\lambda} \int_\omega p(v_\lambda^\delta) \varepsilon(v_\lambda^\delta) - \int_\omega g v_\lambda^\delta + \frac{1}{\delta} \int_\gamma [u_\lambda^\delta]^2 = 0. \quad (4.51)$$

Из равенства (4.51) следуют оценки, равномерные по $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$:

$$\|u_\lambda^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{15}, \quad \|v_\lambda^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{16}. \quad (4.52)$$

Случай 1. Рассмотрим случай, когда $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$, $\lambda' \in (0, \lambda_0]$. В силу оценок (4.52) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$ справедливы сходимости:

$$\begin{aligned} u_\lambda^\delta \rightarrow u_{\lambda^*}^{\delta^*} \quad \text{слабо в } H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2, \quad [u_\lambda^\delta] \rightarrow [u_{\lambda^*}^{\delta^*}] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma), \\ v_\lambda^\delta \rightarrow v_{\lambda^*}^{\delta^*} \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Переходя к нижнему пределу в задаче (4.49), (4.50) на основе (4.53), получим вариационную задачу вида

$$\text{Найти такую } (u_{\lambda^*}^{\delta^*}, v_{\lambda^*}^{\delta^*}) \in K, \quad \text{что} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_{\lambda^*}^{\delta^*}) \varepsilon(\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}) + \frac{1}{\delta'} \int_\gamma [u_{\lambda^*}^{\delta^*}] [\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}] + \\ + \frac{1}{\lambda'} \int_\omega p(v_{\lambda^*}^{\delta^*}) \varepsilon(\bar{v} - v_{\lambda^*}^{\delta^*}) - \int_\omega g(\bar{v} - v_{\lambda^*}^{\delta^*}) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Предельная задача (4.54), (4.55) совпадает с вариационной задачей (4.49), (4.50) при $(\delta, \lambda) = (\delta', \lambda')$, т.е. $(u_{\lambda^*}^{\delta^*}, v_{\lambda^*}^{\delta^*}) = (u_{\lambda'}^{\delta'}, v_{\lambda'}^{\delta'})$.

Для того, чтобы осуществить предельный переход в формуле производной функционала энергии (4.47), требуется установить сходимость

$$u_\lambda^\delta \rightarrow u_{\lambda'}^{\delta'} \quad \text{сильно в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2. \quad (4.56)$$

Стоит отметить, что при $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$ одной из эквивалентных норм для функции u_λ^δ в пространстве $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2$ является норма

$$\|u_\lambda^\delta\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2}^2 = \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(u_\lambda^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda^\delta]^2.$$

В (4.51) перенесем все слагаемые кроме первых двух вправо от знака равенства и перейдем к верхнему пределу при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$. Учитывая равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(u_{\lambda'}^{\delta'}) - \int_{\Omega_\gamma} f u_{\lambda'}^{\delta'} + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2 + \frac{1}{\lambda'} \int_{\omega} p(v_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(v_{\lambda'}^{\delta'}) - \int_{\omega} g v_{\lambda'}^{\delta'} = 0, \quad (4.57)$$

получим ряд предельных соотношений:

$$\begin{aligned} \limsup_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} \left(\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(u_\lambda^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda^\delta]^2 \right) &= \\ &= \limsup_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} \left(-\frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_\lambda^\delta) \varepsilon(v_\lambda^\delta) + \int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda^\delta + \int_{\omega} g v_\lambda^\delta \right) \leq \\ &\leq -\frac{1}{\lambda'} \int_{\omega} p(v_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(v_{\lambda'}^{\delta'}) + \int_{\Omega_\gamma} f u_{\lambda'}^{\delta'} + \int_{\omega} g v_{\lambda'}^{\delta'} = \\ &= \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(u_{\lambda'}^{\delta'}) + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2. \quad (4.58) \end{aligned}$$

В то же время, в силу (4.51) и (4.57) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$ справедлива

следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
& \limsup_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_{\lambda}^{\delta}) \varepsilon(v_{\lambda}^{\delta}) + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda}^{\delta})^2 \right) \leq \\
& \leq - \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(u_{\lambda'}^{\delta'}) - \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2 + \int_{\Omega_{\gamma}} f u_{\lambda'}^{\delta'} + \int_{\omega} g v_{\lambda'}^{\delta'} + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda'}^{\delta'})^2 = \\
& = \frac{1}{\lambda'} \int_{\omega} p(v_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(v_{\lambda'}^{\delta'}) + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda'}^{\delta'})^2. \quad (4.59)
\end{aligned}$$

Далее, учитывая равенство (4.57), осуществим переход к нижнему пределу в равенстве (4.51) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$:

$$\begin{aligned}
& \liminf_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} \left(\int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u_{\lambda}^{\delta}) \varepsilon(u_{\lambda}^{\delta}) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_{\lambda}^{\delta}]^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_{\lambda}^{\delta}) \varepsilon(v_{\lambda}^{\delta}) + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda}^{\delta})^2 \right) = \\
& = \liminf_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} \left(\int_{\Omega_{\gamma}} f u_{\lambda}^{\delta} + \int_{\omega} g v_{\lambda}^{\delta} + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda}^{\delta})^2 \right) \geq \\
& \geq \int_{\Omega_{\gamma}} f u_{\lambda'}^{\delta'} + \int_{\omega} g v_{\lambda'}^{\delta'} + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda'}^{\delta'})^2 = \\
& = \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(u_{\lambda'}^{\delta'}) + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2 + \frac{1}{\lambda'} \int_{\omega} p(v_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon(v_{\lambda'}^{\delta'}) + \alpha \int_{\partial\omega} (v_{\lambda'}^{\delta'})^2. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (4.58), (4.59), (4.60) следуют сходимости норм:

$$\begin{aligned}
& \|u_{\lambda}^{\delta}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2} \rightarrow \|u_{\lambda'}^{\delta'}\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2}, \quad \|v_{\lambda}^{\delta}\|_{H^1(\omega)^2} \rightarrow \|v_{\lambda'}^{\delta'}\|_{H^1(\omega)^2} \\
& \text{при } (\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda'). \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Из сходимости норм в (4.61) и слабой сходимости в (4.53) для u_{λ}^{δ} в пространстве $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_{\gamma})^2$ следует сильная сходимость (4.56).

На основе сходимости (4.56) осуществим предельный переход в

формуле производной функционала энергии (4.47) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$:

$$\begin{aligned} \lim_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} G(\delta, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'}) \varepsilon_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'}) \theta_{,1} - \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'}) u_{\lambda',i,1}^{\delta'} \theta_{,j} - \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_{\lambda',i}^{\delta'} + \frac{1}{2\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2 \theta_{,1} = G(\delta', \lambda'). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Поскольку верна цепочка равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \sup_{(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]} G(\delta, \lambda) &= \lim_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')} G(\delta, \lambda) = \\ &= G(\delta', \lambda') \leq \sup_{(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]} G(\delta, \lambda), \end{aligned}$$

пара $(\delta, \lambda) = (\delta', \lambda')$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$, $\lambda' \in (0, \lambda_0]$, является решением задачи оптимального управления (4.48) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', \lambda')$. Кроме того, функция $u_{\lambda'}^{\delta'}$ в формуле (4.62) – решение задачи (4.54), (4.55).

Случай 2: Обратимся теперь к случаю, когда $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$. Оценки в (4.52) влекут сходимости при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$:

$$\begin{aligned} u_\lambda^\delta \rightarrow u_{\lambda^*}^{\delta^*} \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2, \quad [u_\lambda^\delta] \rightarrow [u_{\lambda^*}^{\delta^*}] \quad \text{слабо в } L^2(\gamma), \\ v_\lambda^\delta \rightarrow v_{\lambda^*}^{\delta^*} \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

В силу равенства (4.51) и оценок (4.52) при $\delta \in [\delta_0, \delta_1]$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_\lambda^\delta) \varepsilon(v_\lambda^\delta) \leq C_{17}. \quad (4.64)$$

Из неравенства (4.64) следует, что предельная функция $v_{\lambda^*}^{\delta^*}$ имеет заданную структуру: $v_{\lambda^*}^{\delta^*} = \rho^*$, $\rho^* \in R(\omega)$.

Выберем в (4.50) в качестве $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$ функцию $(\bar{u}, \varrho) \in K_0$ (см. (4.22)). При такой тестовой функции перейдем к пределу в вариационной задаче (4.49), (4.50) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$ на основе сходимостей (4.63). Получим

задачу в следующем виде:

$$\text{Найти такую } (u_{\lambda^*}^{\delta^*}, \rho^*) \in K_0, \quad \text{что} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_{\lambda^*}^{\delta^*}) \varepsilon(\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}) - \int_{\omega} g(\varrho - \rho^*) + \\ + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_{\lambda^*}^{\delta^*}] [\bar{u} - u_{\lambda^*}^{\delta^*}] \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \varrho) \in K_0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Предельная задача (4.65), (4.66) совпадает с задачей (4.23), (4.24) из теоремы 4.3 при $\delta = \delta'$. Введем обозначение для решения $(u_{\lambda^*}^{\delta^*}, \rho^*) = (u_0^{\delta'}, \rho^{\delta'})$. В силу равенства (4.51) и вариационного неравенства (4.66) имеет место ряд предельных соотношений при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^{\delta'}) \varepsilon(u_0^{\delta'}) + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_0^{\delta'}]^2 &\leq \liminf_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} \left(\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(u_\lambda^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda^\delta]^2 \right) = \\ &= \liminf_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} \left(\int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda^\delta - \frac{1}{\lambda} \int_{\omega} p(v_\lambda^\delta) \varepsilon(v_\lambda^\delta) + \int_{\omega} g v_\lambda^\delta \right) \leq \\ &\leq \liminf_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} \left(\int_{\Omega_\gamma} f u_\lambda^\delta + \int_{\omega} g v_\lambda^\delta \right) = \\ &= \int_{\Omega_\gamma} f u_0^{\delta'} + \int_{\omega} g \rho^{\delta'} = \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^{\delta'}) \varepsilon(u_0^{\delta'}) + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_0^{\delta'}]^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda^\delta) \varepsilon(u_\lambda^\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\gamma} [u_\lambda^\delta]^2 = \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^{\delta'}) \varepsilon(u_0^{\delta'}) + \frac{1}{\delta'} \int_{\gamma} [u_0^{\delta'}]^2. \quad (4.67)$$

Опираясь на полученную сходимость норм в (4.67) и слабую сходимость в (4.63) для функции u_λ^δ в пространстве $H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2$, можно утверждать, что

при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$

$$u_\lambda^\delta \rightarrow u_0^{\delta'} \quad \text{сильно в } H_{\partial\Omega}^1(\Omega_\gamma)^2. \quad (4.68)$$

На основе сходимости (4.68) перейдем к пределу в формуле для производной функционала энергии по длине дефекта (4.47) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} G(\delta, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_0^{\delta'}) \varepsilon_{ij}(u_0^{\delta'}) \theta_{,1} - \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_0^{\delta'}) u_{0i,1}^{\delta'} \theta_{,j} - \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_{0i}^{\delta'} + \frac{1}{2\delta'} \int_{\gamma} [u_0^{\delta'}]^2 \theta_{,1} = G(\delta', 0). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Поскольку верна цепочка равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \sup_{(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]} G(\delta, \lambda) &= \lim_{(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)} G(\delta, \lambda) = \\ &= G(\delta', 0) \leq \sup_{(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]} G(\delta, \lambda), \end{aligned}$$

пара $(\delta, \lambda) = (\delta', 0)$, $\delta' \in [\delta_0, \delta_1]$, является решением задачи оптимального управления (4.48) при $(\delta, \lambda) \rightarrow (\delta', 0)$. Кроме того, функция $u_0^{\delta'}$ в формуле (4.69) – решение задачи (4.65), (4.66). Теорема доказана. \square

Заключение

В рамках двумерной теории упругости исследованы задачи о равновесии двуслойных конструкций с трещинами и дефектами. Для моделирования трещин и дефектов в конструкциях применялись нелинейные краевые условия в виде системы равенств и неравенств, допускающие только контакт и расхождение противоположных берегов. Использование краевых условий такого типа приводит к тому, что задача в целом становится нелинейной и относится к классу задач с неизвестной границей.

В первой главе рассмотрена задача, описывающая равновесие двуслойной упругой конструкции с трещиной. Приведены дифференциальная и вариационная формулировки задачи, эквивалентные на классе гладких функций. С помощью метода фиктивных областей доказана разрешимость исследуемой задачи. Осуществлены предельные переходы в задаче равновесия по параметру жесткости верхнего слоя. Установлено, что при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю решение предельной задачи равновесия описывает поведение упругого тела с трещиной; при стремлении жесткости верхнего слоя к бесконечности предельная задача является задачей равновесия конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев при наличии трещины.

Во второй главе изучена задача о равновесии двуслойной конструкции с трещиной, у которой верхний слой является жестким. Было получено, что при стремлении размера жесткого слоя к нулю решение задачи равновесия двуслойной конструкции стремится к решению задачи, описывающей равновесие упругого тела с тонким жестким включением и трещиной. Основным результатом заключается в доказательстве разрешимости задачи оптимального управления, которая заключается в отыскании оптимального размера жесткого слоя, реализующего наиболее безопасное состояние равновесия конструкции с точки зрения критерия Гриффитса.

Во третьей главе исследована задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с дефектом. Для описания дефекта применялись нелинейные

краевые условия, зависящие от параметра повреждаемости. Установлено, что сформулированная задача разрешима. Получена предельная задача при стремлении жесткости верхнего слоя к бесконечности, описывающая равновесие конструкции с дефектом, в которой один из слоев жесткий. В задаче равновесия упругой конструкции и в предельной задаче для конструкции с жестким и упругим слоями изучено поведение решения при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности. Установлено, что предельные задачи при стремлении параметра повреждаемости к бесконечности соответствуют задачам равновесия, ранее исследованным в рамках моделей с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины без трения. Предельные задачи при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю в обоих случаях описывают равновесие конструкций без дефектов.

В четвертой главе рассмотрена задача равновесия для конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин прямолинейного дефекта. С помощью вариационного подхода установлена разрешимость задачи. Осуществлены предельные переходы в задаче равновесия по параметру жесткости верхнего слоя. Получено, что при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю предельная задача описывает равновесие упругого тела с дефектом, а при стремлении жесткости верхнего слоя к бесконечности – равновесие конструкции с дефектом в упругом слое, одну из вершин которого накрывает жесткий слой. Обоснована возможность осуществления предельных переходов в задаче при стремлении параметра повреждаемости к нулю и к бесконечности, получены формулировки предельных задач. Кроме того, рассмотрена задача оптимального управления, формулируемая на основе критерия Гриффитса. В качестве целевого функционала в задаче выступает производная функционала энергии по длине дефекта, а функциями управления выбраны два параметра, которые характеризуют жесткость верхнего слоя и повреждаемость дефекта. Доказано существование решения задачи оптимального управления.

Полученные результаты вносят вклад в изучение краевых задач в областях с негладкими границами и могут послужить основой для дальнейшего численного и теоретического анализа.

Список литературы

1. *Черноустько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. — Москва: Наука, 1973. — 236 с.
2. *Черепанов Г. П., Ершов Л. В.* Механика разрушения. — Москва: Машиностроение, 1977. — 224 с.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев: Наукова думка, 1981. — 324 с.
4. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. — Москва: Наука, 1984. — 256 с.
5. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамика хрупкого разрушения. — Москва: Машиностроение, 1988. — 240 с.
6. *Слепян Л. И.* Механика трещин. — Ленинград: Судостроение, 1990. — 296 с.
7. *Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.* Нелинейная механика разрушения. — Самара: Самарский университет, 2001. — 562 с.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. ММО.* — 1967. — Т. 16. — С. 209–292.
9. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — Москва: Наука, 1991. — 336 с.
10. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. — SIAM edition. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. — 425 p.
11. *Фукера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — Москва: Мир, 1974. — 159 с.

12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — Москва: Мир, 1971. — 371 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 587 с.
14. *Киндерледер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
15. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
16. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. — Москва: Наука, 1990. — 536 с.
17. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — Москва: МГАПИ, 1997. — 345 с.
18. *Lewy H., Stampacchia G.* On the regularity of the solution of a variational inequality // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. — 1969. — Vol. 22, No. 2. — P. 153–188.
19. *Архипова А. А., Уральцева Н. Н.* Регулярность решений диагональных эллиптических систем при выпуклых ограничениях на границе области // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1986. — Т. 152. — С. 5–17.
20. *Уральцева Н. Н.* О регулярности решений вариационных неравенств // *УМН*. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 151–174.
21. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997. — 388 p.
22. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. — Москва: Физматлит, 2010. — 252 с.
23. *Лазарев Н. П., Попова Т. С.* Вариационная задача о равновесии пластины с геометрически нелинейным условием непроникания для

- вертикальной трещины // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2011. — Т. 11, № 2. — С. 77–88.
24. *Лазарев Н. П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2011. — Т. 14, № 4. — С. 32–43.
25. *Knees D., Schroder A.* Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2012. — Vol. 35, No. 15. — P. 1859–1884.
26. *Kovtunen V. A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack - defect interaction: the anti-plane variational model // *SIAM J. Control Optim.* — 2016. — Vol. 54, No. 3. — P. 1329–1351.
27. *Chambolle A., Conti S., Francfort G.* Approximation of a brittle fracture energy with a constraint of non-interpenetration // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2018. — Vol. 228, No. 3. — P. 867–889.
28. *Степанов В. Д., Хлуднев А. М.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // *Сиб. матем. журн.* — 2003. — Т. 44, № 6. — С. 1350–1364.
29. *Андерссон Л. Э., Хлуднев А. М.* Трещина, выходящая на контактную границу. Метод фиктивных областей и инвариантные интегралы // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 15–29.
30. *Алексеев Г. В., Хлуднев А. М.* Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2009. — Т. 9, № 2. — С. 15–29.
31. *Попова Т. С.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // *Мат. заметки ЯГУ.* — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 105–121.
32. *Лазарев Н. П.* Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 91–104.

33. *Lazarev N. P., Ito H., Neustroeva N. V.* Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // *Japan J. Indust. Appl. Math.* — 2016. — Vol. 33. — P. 63–80.
34. *Lazarev N. P., Everstov V. V., Romanova N. A.* Fictitious domain method for equilibrium problems of the Kirchhoff–Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of plate edges // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* — 2019. — Vol. 12, No. 6. — P. 674–686.
35. *Николаева Н. А.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа–Лява // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 78–90.
36. *Фанкина И. В.* Контактная задача для упругой пластины с тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 90–98.
37. *Ковтуненко В. А.* Вариационная и краевая задачи с трением на внутренней границе // *Сиб. матем. журн.* — 1998. — Т. 39, № 5. — С. 1060–1073.
38. *Kovtunen V. A.* Crack in a solid under Coulomb friction law // *Appl. Math.-Czech.* — 2000. — Vol. 45, No. 4. — P. 265–290.
39. *Ito H., Kovtunen V. A., Tani A.* The interface crack with Coulomb friction between two bonded dissimilar elastic media // *Appl. Math.-Czech.* — 2011. — Vol. 56, No. 1. — P. 69–97.
40. *Nam R. V., Tsoy G. I.* Modified duality methods for solving an elastic crack problem with Coulomb friction on the crack faces // *Open Comput. Sci.* — 2020. — Vol. 10. — P. 276–282.
41. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.
42. *Kovtunen V. A.* Nonconvex problem for crack with nonpenetration // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2005. — Vol. 85, No. 4. — P. 242–251.

43. *Kovtunen V. A.* A hemivariational inequality in crack problems // *Optimization*. — 2011. — Vol. 60, No. 8-9. — P. 1071–1089.
44. Towards optimization of crack resistance of composite materials by adjustment of fiber shapes / Prechtel M., Leugering G., Steinmann P., Stingl M. // *Eng. Fract. Mech.* — 2011. — Vol. 78, No. 6. — P. 944–960.
45. *Khudnev A. M.* On modeling elastic bodies with defects // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2018. — Т. 15. — С. 153–166.
46. *Khudnev A. M.* On thin inclusions in elastic bodies with defects // *Z. Angew. Math. Phys.* — 2019. — Vol. 70, No. 45.
47. *Khudnev A. M.* On thin Timoshenko inclusions in elastic bodies with defects // *Arch. Appl. Mech.* — 2019. — Vol. 89, No. 8. — P. 1691–1704.
48. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — Москва: Наука, 1974. — 640 с.
49. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. — 2-е изд, перераб. и доп. изд. — Москва: Наука, 1985. — 504 с.
50. *Bach M., Khudnev A. M., Kovtunen V. A.* Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2000. — Vol. 23. — P. 515–534.
51. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2002. — Т. 5, № 3. — С. 155–161.
52. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // *Прикл. мех. и технич. физ.* — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 83–94.
53. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в трехмерной теории упругости для тел, содержащих поверхностные трещины // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2005. — Т. 8, № 1. — С. 106–116.

54. *Khudnev A. M., Tani A.* Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces // *Quarterly Appl. Math.* — 2008. — Vol. 66, No. 3. — P. 423–435.
55. *Khudnev A. M.* On crack problem with overlapping domain // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2008. — Vol. 88, No. 8. — P. 650–660.
56. *Gaudiello A., Khudnev A. M.* Crack on the boundary of two overlapping domains // *Z. Angew. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 61, No. 2. — P. 341–356.
57. *Khudnev A. M., Leugering G. R.* Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2011. — Vol. 91, No. 2. — P. 125–137.
58. *Лазарев Н. П.* Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 98–108.
59. *Лазарев Н. П., Дас С., Григорьев М. П.* Оптимальное управление тонким ребром жесткости в модели о равновесии пластины Тимошенко с трещиной // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2018. — Т. 15. — С. 1485–1497.
60. *Пяткина Е. В.* Оптимальное управление размером слоя в задаче о равновесии упругих тел с налегающими областями // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 75–84.
61. *Пяткина Е. В.* О задаче управления для двуслойного упругого тела с трещиной // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 103–112.
62. *Shcherbakov V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* — 2017. — Vol. 68, No. 26.
63. *Хлуднев А. М.* О равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 144–153.

64. Рудой Е. М., Казаринов Н. А., Слесаренко В. Ю. Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной // *Сиб. журн. вычисл. матем.* — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 77–90.
65. Саврук М. П., Кравец В. С. Влияние подкрепляющих накладок на распределение напряжений в пластинах с трещинами // *Прикл. механика.* — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 48–55.
66. Ю. Землянова А., Сильвестров В. В. Задача о подкреплении пластины с вырезом при помощи двумерной накладки // *Прикл. математика и механика.* — 2007. — Т. 71, № 1. — С. 43–55.
67. Васильева Ю. О., Сильвестров В. В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // *Прикл. математика и механика.* — 2011. — Т. 75, № 6. — С. 1017–1037.
68. Freddi L., Roubicek T., Zanini C. Quasistatic delamination of sandwich-like Kirchhoff-Love plates // *J. Elast.* — 2013. — Vol. 113. — P. 219–250.
69. Пяткина Е. В. Контактная задача для двух пластин одинаковой формы, склеенных вдоль одного берега трещины // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2018. — Т. 21, № 2. — С. 79–92.
70. Попова Т. С. Задача о контакте двух вязкоупругих пластин // *Мат. заметки ЯГУ.* — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 60–92.
71. Khludnev A. M., Tani A. Unilateral contact problems for two inclined elastic bodies // *Europ. J. Mech. A/Solids.* — 2008. — Vol. 27, No. 3. — P. 365–377.
72. Неустроева Н. В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 92–105.
73. Неустроева Н. В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* — 2009. — Т. 9, № 4. — С. 51–64.

74. *Ротанова Т. А.* О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 107–118.
75. *Фанкина И. В.* Оптимальное управление размером жесткого слоя конструкции // *Сиб. журн. чист. прикл. матем.* — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 86–97.
76. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной упругой конструкции при наличии трещины // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 107–120.
77. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной конструкции при наличии дефекта // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2019. — Т. 16. — С. 959–974.
78. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину дефекта // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2020. — Т. 17. — С. 141–160.
79. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Москва: Наука, 1976. — 391 с.
80. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. — Москва: Наука, 1991. — 288 с.