На правах рукописи

Титова Анастасия Афанасьевна

Задача о форме свободной поверхности потока идеальной жидкости над сингулярным стоком

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук Старовойтов Виктор Николаевич

Официальные оппоненты:
Белых Владимир Никитич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник лаборатории динамических систем

Кучер Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет», профессор кафедры фундаментальной математики

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится 28 декабря 2021 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, д. 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИГиЛ СО РАН и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент Прокудин Д. А.

Общая характеристика работы

К задачам со свободной границей относится большой круг классических задач о движении идеальной жидкости с частично заданными границами. В данной работе речь будет идти только о плоских задачах, поскольку в двумерном случае разработано много различных методов исследования. Задачи со свободными границами часто исследуются в предположении, что жидкость несжимаемая, а течение потенциально. В результате такого подхода потенциал скорости подчиняется уравнению Лапласа в области течения, что позволяет воспользоваться теорией аналитических функций комплексного переменного, в частности, техникой конформных отображений. Неизвестная часть границы определяется с помощью заданных на ней краевых условий. Первое условие заключается в том, что эта граница свободна от напряжений, а второе — в том, что вектор поля скорости жидкости направлен по касательной к ней. Второе условие означает, что свободная граница является линией тока, то есть на ней справедливо уравнение Бернулли.

Задачи со свободными границами представляют большой раздел гидродинамики и входят в классические учебники. Решение многих задач по этой тематике можно найти в монографиях Л. Н. Сретенского, В. Н. Монахова, Д. В. Маклакова, Дж. Лайтхилла и Дж. Уизема.

В научной литературе существует большое количество численных и механических исследований плоских поверхностных гравитационных волн в однородной несжимаемой жидкости, вызванных различными возмущениями. В работах Дж. М. Ванден-Броека, Дж. Б. Келлера, Дж. С. Хокинга, Е. О. Така, Л. К. Форбса, Х. Мекиаса и др. численно исследованы задачи об установившемся потоке с источником или стоком в канале жидкости конечной глубины и бесконечной длины. Дж. М. Ванден-Броеком и Дж. Б. Келлером были исследованы задачи со свободной границей со стоком, погруженным в жидкость и на дне, имеющем уклон в обе стороны от точки стока. Дж. С. Хокинг занимался исследованием задач с точечным источником или стоком на плоском горизонтальном дне. Также им были рассмотрены случаи, когда сток находится в вершине наклонного дна или в потоке над плоским горизонтальным дном.

Математические исследования задач со свободными границами проводились во многих работах. Первые точные результаты о существовании волн установившегося вида были получены А. И. Некрасовым (1921). Им был применён метод Леви-Чивита. Этот метод заключается в том, что сначала область течения конформно отображается на верхний единичный полукруг, причём свободная граница переходит на полуокружность, а затем определяется течение в полукруге. Далее, функция скорости представляется в виде комплексной экспоненты, вещественная часть степени которой отвечает за величину скорости, а мнимая — за направление. После подстановки этой функции в уравнение Бернулли и его дифференцирования получается уравнение, которое теперь называется уравнением Некрасова. Впоследствии близкие результаты при других предположениях были получены Т. Леви-Чивита и Д. Я. Стройком. Следует отметить, что А. И. Некрасов и его последователи изучали гладкие решения этого уравнения, однако есть случай, когда на свободной поверхности образуется излом, что соответствует так называемым волнам Стокса предельной амплитуды. Некоторые результаты, полученные в этих работах, оказались востребованы в данной диссертационной работе.

Диссертационная работа посвящена математическому исследованию задачи со свободной границей, в которой течение жидкости вызвано расположенным на дне сингулярным стоком. Следует отметить, что задачи с сингулярностями в потоке идеальной жидкости уже рассматривались. В частности, в книге М. Л. Милн-Томсона (1964) построено решение задачи о точечном стоке в идеальной жидкости в полосе с заданными непроницаемыми прямыми границами. Плоская задача об источнике в потоке идеальной жидкости со свободной границей исследовалась в монографии Д. В. Маклакова (1997). Также в этой работе доказано существование волн на свободной поверхности при обтекании точечного вихря. Задача о сверхкритическом обтекании вихря также исследовалась в работе А. М. Тер-Киркорова (1965). Задача об обтекании вихря потоком жидкости бесконечной глубины рассматривалась в работе О. М. Киселева и В. А. Лазарева (1968). Несмотря на то, что математические исследования задач со свободными границами проводились во многих работах, задача со свободной границей и точечным стоком в потоке никем ранее не рассматривалась.

Общий метод исследования задачи примерно соответствует работам А. И. Некрасова (1921, 1951), Г. Кеди и Дж. Норбери (1978) и состоит в том, что с помощью метода Леви-Чивита получено уравнение типа Некрасова, которое точно описывает свободную границу. Следует отметить, что уравнение Некрасова включает в себя две неизвестные функции, поэтому оно дополняется одной из формул обращения Гильберта. Таким образом, получается система интегро-дифференциальных уравнений, которая после некоторых преобразований переписывается в виде нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Существенной особенностью задачи с сингулярным стоком является то, что полученное уравнение типа Некрасова не является однородным, то есть у него нет решения, тождественно равного нулю. Поэтому нет возможности искать достаточно малые решения этого уравнения. В этом и состоит отличие задачи со стоком от работ по волнам на поверхности потока тяжёлой идеальной жидкости (без сингулярностей). Стоит ещё отметить, что возможен вывод различных форм уравнения типа Некрасова. Они эквивалентны, однако требуют различных подходов к исследованию. Не все эти варианты оказались удачными. Был выбран тот, который дал возможность доказать разрешимость задачи.

Разрешимость исходной задачи при определённых условиях эквивалентна разрешимости в гильбертовом пространстве уравнения, упомянутого выше. Эти условия продиктованы корректностью преобразований, производимых при выводе уравнения. В частности, свободная граница не должна опрокидываться. В работе показывается, что эти условия выполняются, если число Фруда не является слишком малым.

Рассмотрены три варианта задачи: случай с плоским горизонтальным дном; случай со стоком во впадине на дне канала; случай, когда сток находится в вершине выступа на дне. В случае плоского горизонтального дна разрешимость задачи в гильбертовом пространстве устанавливается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, а затем с помощью принципа сжимающих отображений доказывается его единственность. Следует отметить, что ограничение снизу на число Фруда, которое гарантирует существование решения, значительно ниже, чем то, которое получено для его единственности. Доказано, что свободная поверхность является аналитической всюду кроме точки каспа. Вблизи точки каспа получена асимптотика свободной границы.

В случае задач с неровным дном не удалось получить столь полные результаты. Разрешимость задачи доказана с ограничениями на высоту выступа и на глубину ямки. Дело в том, что в этих случаях задача ещё больше усложняется и включает ещё одно нелинейное интегральное уравнение. Тем не менее, используемые ограничения носят конкретный характер, а не просто доказано, что задача разрешима в случае дна, достаточно мало отличающегося от плоского.

Цели и задачи исследования. Основной целью работы является доказательство разрешимости задачи со свободной границей о течении идеальной несжимаемой жидкости, вызванном сингулярным стоком на дне, а также исследование свойств решения и формы свободной границы.

Методы исследования. Исследование проводилось с использованием теории функций комплексной переменной, анализа Фурье и теории дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

— Выведена математическая постановка двумерной стационарной задачи со свободной границей потока идеальной несжимаемой жидкости с точечным стоком на дне для трёх видов дна: плоское горизонтальное, с треугольной впадиной и с треугольным выступом. Задача приведена к общему виду и записана её эквивалентная формулировка в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве с некоторыми параметрами (число Фруда и геометрические характеристики выступа). Установлены некоторые свойства для входящего в уравнение оператора, а также выведены априорные оценки решения.

— Исследована задача со свободной границей и точечным стоком на плоском горизонтальном дне. Доказана однозначная разрешимость задачи, когда число Фруда превышает некоторое конкретное значение. Установлено, что на свободной границе в точке над стоком образуется касп. Проведено доказательство аналитичности свободной границы всюду кроме точки каспа. Исследована асимптотика свободной границы вблизи точки каспа, а также доказано, что не происходит её опрокидывание.

— Проведено исследование задачи со свободной границей и точечным стоком во впадине на дне. Доказана разрешимость задачи «в малом», а именно при выполнении некоторого условия на параметры задачи. Показано, что при этих условиях не происходит опрокидывания свободной границы.

— Исследована задача со свободной границей и точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне. Доказана разрешимость задачи «в малом», то есть при некотором условии на параметры задачи. Установлено, что при достаточно больших значениях числа Фруда не происходит опрокидывания свободной границы.

Личный вклад автора. Автор диссертационной работы принимал активное участие в получении результатов, отражённых в совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, доказательстве теорем, обсуждении полученных результатов, а также оформлении результатов в виде публикаций. Результаты, представленные в третьей и четвёртой главах, получены автором самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Научная новизна. Выработан общий подход к решению задачи со свободной границей с точечным стоком на дне. Доказана однозначная разрешимость задачи со свободной границей с сингулярным стоком в случае плоского дна, а также доказана разрешимость задачи, когда сток находится во впадине или в вершине треугольного выступа на дне. Все основные результаты диссертации являются новыми, подтверждены полными доказательствами и представляют научный интерес.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших математических и численных исследований задач со свободными границами о потоке идеальной несжимаемой жидкости, инициированном стоком на дне, а также связанных с ними неоднородных операторных уравнений.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, основана на строгости математических доказательств.

Апробация работы. Представленные в диссертации результаты докладывались на 9 научных конференциях: Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения", посвящённая 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2016); 54-ая международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 2016); Russian-French Workshop "Mathematical Hydrodynamics" (Novosibirsk, 2016); XI всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии" (Шерегеш, 2017); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2018); Международная школа-конференция “Соболевские чтения”, посвящённая 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2018); Международная конференция “Математика в приложениях” в честь 90-летия С. К. Годунова (Новосибирск, 2019); IX Международная конференция по математическому моделированию, посвящённая 75-летию В. Н. Врагова (Якутск, 2020); IX Международная конференция, посвящённая 120-летию со дня рождения ак. М. А. Лаврентьева “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике” (Новосибирск, 2020).

Результаты диссертации сообщались и обсуждались на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН Плотникова П. И. и д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманюка Е. В. (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. Ткачёва Д. Л. (ИМ СО РАН); на конкурсе научных работ молодых учёных ИГиЛ СО РАН.

Кроме того, некоторые результаты диссертации были представлены в виде серии докладов на семинаре факультета математики и прикладной математики в Критском университете, г. Ираклион, Греция, 2019г.

Публикации. Содержание и результаты диссертационной работы отражены в 13 публикациях, из которых 4 работы — статьи [1–4] в международных и российских журналах; 9 публикаций — тезисы всероссийских и международных конференций [5–13].

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 76 наименований работ, и приложения. Главы разделены на параграфы, параграфы — на пункты. Полный объём диссертации составляет 114 страниц и содержит 10 рисунков.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в диссертационной работе, приводится обзор научной литературы, близкой к теме данной работы, формулируются цели и задачи работы, положения, выносимые на защиту, описываются методы исследования, научная и практическая значимость, представляются структура и краткое содержание работы.

В диссертационной работе изучается задача о форме свободной границы течения идеальной несжимаемой жидкости. Течение вызвано расположенным на дне в точке O точечным стоком интенсивности $m > 0$. Рассматриваются три случая задачи, отличающиеся друг от друга только формой дна. Для удобства **в первой главе** выписана общая формулировка этих случаев.

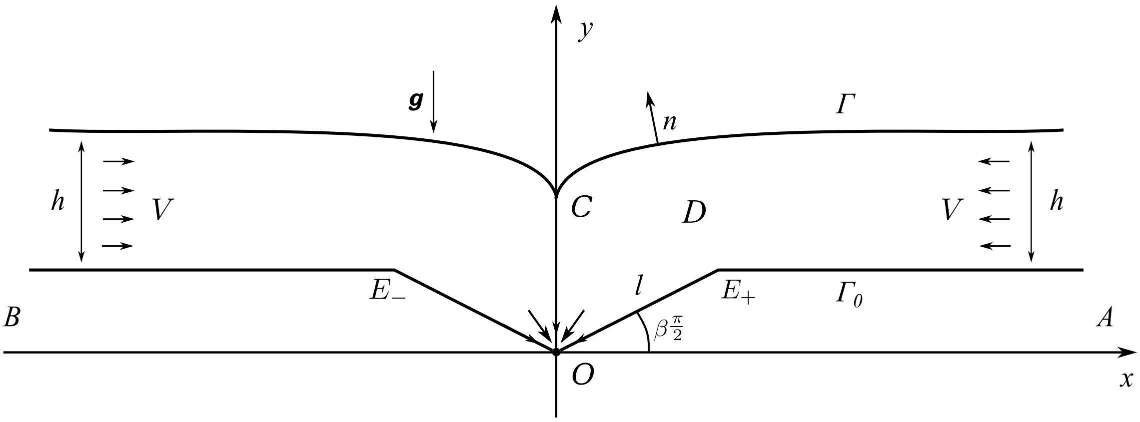
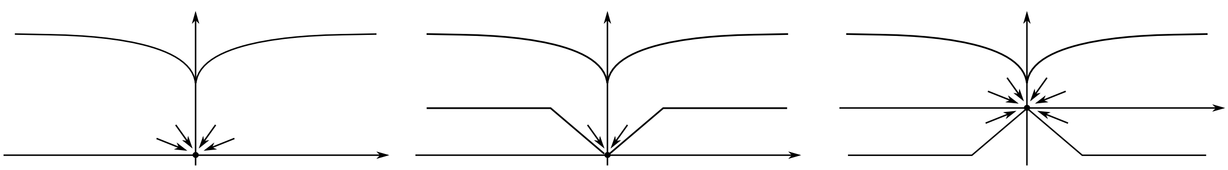


Рис. 1 — Картина течения в физической плоскости.

Параграф 1.1 посвящён математической формулировке задачи в физической плоскости. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область течения жидкости, ограниченная сверху свободной границей Γ и дном Γ_0 снизу. Предполагается, что течение симметрично относительно оси Oy. Дно Γ_0 имеет следующий вид: на промежутках (B, E_-) и (E_+, A) дно горизонтальное, где A и B — бесконечно удалённые точки; отрезки $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$ имеют симметричный наклон, $E_- = (-\ell\cos\beta\frac{\pi}{2}, \ell\sin\beta\frac{\pi}{2})$ и $E_+ = (\ell\cos\beta\frac{\pi}{2}, \ell\sin\beta\frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-1, 1)$ — параметр угла наклона, ℓ — длина отрезков $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$. В зависимости от параметра $\beta \in (-1, 1)$ рассматриваются три случая задачи: при $\beta = 0$ дно является горизонтальной прямой, при $\beta > 0$ на дне образуется треугольная впадина, в нижней точке которой находится сток, а при $\beta < 0$ сток расположен в вершине треугольного выступа.



а) б) в)

Рис. 2 — Картина течений. а) при $\beta = 0$; б) при $\beta > 0$; в) при $\beta < 0$.

Задача со свободной границей течения идеальной несжимаемой жидкости при наличии точечного стока на дне имеет следующий вид:

$$v_x\partial_x \boldsymbol{v} + v_y\partial_y \boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\varrho} + \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0, \tag{2}$$

$$\Big(\boldsymbol{v}(x,y) + \frac{m}{2\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{r}| \to 0, \quad \boldsymbol{r} = (x,y), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \mathit{\Gamma}_0 \setminus \{O\}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \mathit{\Gamma}, \tag{5}$$

$$p = 0 \quad \text{на} \quad \mathit{\Gamma}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}(x,y) \to (\mp V, 0) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty, \tag{7}$$

$$2Vh = \frac{(1-\beta)}{2}\,m. \tag{8}$$

Поле скорости $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ в D удовлетворяет стационарным уравнениям Эйлера (1)–(2) для идеальной несжимаемой жидкости. На жидкость действует сила тяжести $\varrho\boldsymbol{g}$, где $\varrho = const$ — плотность жидкости, $\boldsymbol{g} = (0, -g)$, g — величина ускорения свободного падения, p — давление. Наличие в точке O точечного стока соответствует следующей асимптотике поля скорости $\boldsymbol{v}$ при приближении к этой точке (3). На дне $\mathit{\Gamma}_0$ за исключением точки O выполняется условие непротекания (4). На свободной границе ставится два условия. Условие (5) заключается в том, что поле скорости является касательным к $\mathit{\Gamma}$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали. Условие (6) на $\mathit{\Gamma}$ состоит в том, что давление на $\mathit{\Gamma}$ постоянно и совпадает с атмосферным. Поскольку в уравнения Эйлера входит только градиент давления, давление определяется с точностью до произвольной постоянной. Соотношение (7) это условие на бесконечности. Предполагается, что в бесконечно удалённых точках A и B течение жидкости стремится к равномерному потоку глубины h и постоянной скорости $V > 0$. Значение постоянной V не может быть произвольным. В силу несжимаемости жидкости, эта постоянная должна быть связана с интенсивностью стока соотношением (8). В правой части стоит коэффициент $(1-\beta)/2$, поскольку только часть стока отводит жидкость из области D. Кроме того, предполагается, что поле скорости потенциально. То есть поле скорости жидкости находится из условия, что его потенциал $\varphi = \varphi(x,y)$ и функция тока $\psi = \psi(x,y)$ являются сопряженными гармоническими функциями.

В параграфе 1.2 проводится обезразмеривание и вводится число Фруда $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{gh}$. Для краткости используется параметр $\alpha = \mathrm{Fr}^2/2$. Заметим, что условие (6) можно переписать в другой форме, не включающей давление. Поскольку свободная граница $\varGamma$ является линией тока, на ней справедливо уравнение Бернулли $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + p/\varrho + gy = const$, которое в силу того, что $p = 0$, принимает после обезразмеривания следующий вид:

$$\alpha|\boldsymbol{v}(x,y)|^2 + y = \alpha + \left(1 + \frac{\ell}{h}\sin\beta\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \varGamma. \tag{9}$$

Далее, в этом параграфе, задача переписывается в комплексной форме. С помощью конформного отображения F область течения D переводится в верхний единичный полукруг D^* с центром в нуле плоскости комплексного переменного t (см. рис. 3). Поскольку область D является неизвестной, мы на данном этапе не можем определить и отображение F. Однако для каждой области D указанного вида такое отображение существует и определено единственным образом. Отображение F определяется однозначно по трём точкам на границе, поэтому будем задавать его таким образом, чтобы точка O переходила в точку $O^*(t=0)$, точка C — в точку $C^*(t=i)$, бесконечно удалённые точки A и B — в точки $A^*(t=1)$ и $B^*(t=-1)$ соответственно. В данном случае задаются четыре точки, а не три, поскольку задача симметрична относительно оси Oy. Обозначим через G обратное к F отображение.

Нижняя граница $\varGamma_0$ при отображении F переходит в горизонтальный диаметр $\varGamma_0^* = [B^*, A^*]$, а свободная граница $\varGamma$ — в полуокружность $\varGamma^* = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = G\left(e^{i\sigma}\right),\ \sigma \in [0,\pi]\right\}$. Образами точек $E_\pm^*$ являются точки $\pm s_0$, где $s_0 \in (0,1)$. Значение s_0, вообще говоря, не известно и должно быть определено в процессе решения задачи. Течение в полукруге полностью определено и комплексный потенциал течения в D^* выглядит следующим образом:

$$w^*(t) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{t^2-1}{2t}\right) - i = \frac{2}{\pi}\left(\ln(t+1) + \ln(t-1) - \ln 2t - i\pi/2\right).$$

Заметим, что

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{v\big(G(t)\big)}\,\frac{dw^*}{dt}(t).$$

Таким образом, если мы сможем определить функцию $v\big(G(t)\big)$, то из этого уравнения найдём и отображение G.

Функция $v(z)$ является аналитической в области D и имеет полюс первого порядка в точке $O(z=0)$. Функция G ведёт себя как $t^{1-\beta}$ в окрестности точки $t=0$, так как область D имеет в точке $O(z=0)$ излом. Поэтому функция $v\big(G(t)\big)$ является аналитической в области D^* и имеет особенность порядка $1-\beta$ в точке $O^*(t=0)$. При стремлении t к точкам $A^*(t=1)$ и $B^*(t=-1)$ функция $v\big(G(t)\big)$ остаётся ограниченной и стремится к -1 и 1 соответственно.

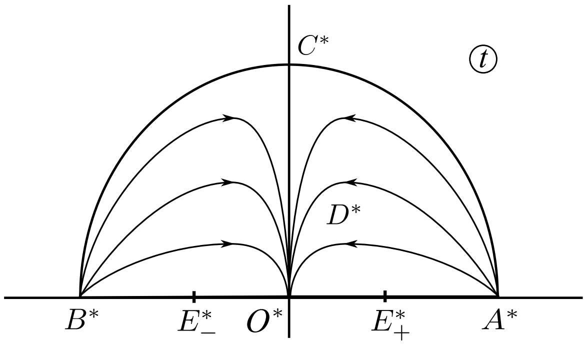


Рис. 3 — Схема течения в единичном полукруге D^*.

Следуя методу Леви-Чивита, определим функции

$$\widehat{\Omega}(t) = \hat{\theta}(t) + i\hat{\tau}(t),$$

$$u(t) = v\big(G(t)\big) = -(t+s_0)^{-\beta/2}(t-s_0)^{-\beta/2}t^{-(1-\beta)}\,e^{-i\widehat{\Omega}(t)}.$$

Функция $\widehat{\Omega}$ является аналитической в D^*, поскольку мы выделили особенности функции $u(t)$ перед экспонентой. Отметим, что функция $\hat{\theta}$ определена с точностью до постоянной $2\pi k$, где k — целое число. Зафиксируем одну ветвь этой функции, выбрав её значение в точке $t=1$, а именно, $\hat{\theta}(1)=0$. Кроме того,

$$\hat{\theta}(t) = Im\,(i\widehat{\Omega}(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \Gamma_0^*. \tag{10}$$

Поскольку Γ^* есть часть единичной окружности, точки на ней представимы в виде $t=e^{i\sigma}$, где $\sigma \in [0,\pi]$. Подставив это представление в тождество Бернулли (9) и продифференцировав по σ, получим:

$$\alpha\,\frac{d\big|v\big(G(e^{i\sigma})\big)\big|^2}{d\sigma} + Im\,\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma \in (0,\pi). \tag{11}$$

Следы функций $\hat{\tau}$ и $\hat{\theta}$ на границе полукруга обозначим следующим образом:

$$\tau(\sigma) = \hat{\tau}(e^{i\sigma}), \quad \theta(\sigma) = \hat{\theta}(e^{i\sigma}), \quad \sigma \in [0,\pi].$$

После подстановки полученных выражений в (11) и небольших преобразований, получим следующую форму уравнения Бернулли при $\sigma \in (0,\pi)$:

$$\frac{d\varrho^{-3\beta}(\sigma)\,e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma} - \frac{3}{\alpha\pi}\,\sin\big((1-\beta)\sigma + \beta\,\phi(\sigma) + \theta(\sigma)\big)\,\operatorname{ctg}\sigma = 0, \tag{12}$$

где

$$(e^{i\sigma}+s_0)(e^{i\sigma}-s_0)=\big(\varrho(\sigma)\,e^{i\phi(\sigma)}\big)^2=\varrho^2(\sigma)\,e^{2i\phi(\sigma)},$$

$$\varrho^2(\sigma)=|e^{i\sigma}+s_0|\,|e^{i\sigma}-s_0|=\big(1+s_0^4-2s_0^2\cos 2\sigma\big)^{1/2},\quad \varrho\geqslant 0,\tag{13}$$

$$\phi(\sigma)=\frac{1}{2}\big(\arg(e^{i\sigma}+s_0)+\arg(e^{i\sigma}-s_0)\big).\tag{14}$$

Функции τ и θ обладают следующими свойствами симметрии:

$$\tau(\pi-\sigma)=\tau(\sigma),\quad \theta(\pi-\sigma)=-\theta(\sigma),\quad \sigma\in[0,\pi].\tag{15}$$

Кроме того, для дальнейшего преобразования уравнения (12) нам потребуется знать значения функций θ и τ в некоторых точках:

$$\tau(0)=\tau(\pi)=\ln(1-s_0^2)^{\beta/2},\quad \theta(0)=\theta(\pi/2)=0.\tag{16}$$

Продолжим преобразование уравнения Бернулли. Проинтегрировав уравнение (12) от 0 до произвольного σ, мы получим:

$$\varrho^{-3\beta}(\sigma)\,e^{3\tau(\sigma)}-\varrho^{-3\beta}(0)\,e^{3\tau(0)}=\frac{3}{\alpha\pi}\int_0^\sigma \sin\big((1-\beta)s+\beta\,\phi(s)+\theta(s)\big)\,\operatorname{ctg} s\,ds.$$

Заметим, что

$$\frac{d\varrho^{-3\beta}(\sigma)\,e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma}=\varrho^{-3\beta}(\sigma)\,e^{3\tau(\sigma)}\left(3\tau'(\sigma)-3\beta\,\frac{d\ln\varrho(\sigma)}{d\sigma}\right),$$

где $\tau'(\sigma)=d\tau(\sigma)/d\sigma$. Подставив это выражение в (12), мы придём к уравнению типа уравнения Некрасова:

$$\tau\,'(\sigma)=\beta\frac{d\ln\varrho(\sigma)}{d\sigma}+\frac{\sin\big((1-\beta)\sigma+\beta\phi(\sigma)+\theta(\sigma)\big)\,\operatorname{ctg}\sigma}{\alpha\pi+3\,\int_0^\sigma \sin\big((1-\beta)s+\beta\phi(s)+\theta(s)\big)\,\operatorname{ctg} s\,ds}.\tag{17}$$

Уравнение Некрасова включает две неизвестные функции τ и θ, поэтому необходимо найти ещё какое-либо соотношение, которое их связывает. Учитывая (10) и следуя принципу симметрии Шварца, функцию $i\widehat{\Omega}$ можно аналитически продолжить на единичный круг $D^*_\circ(|t|<1)$. Мы оставим за продолженными функциями прежние обозначения, а функции τ и θ будем считать заданными на отрезке $[-\pi,\pi]$. Из принципа симметрии Шварца также следует, что

$$\tau(-\sigma)=\tau(\sigma),\quad \theta(-\sigma)=-\theta(\sigma),\quad \sigma\in[-\pi,\pi].\tag{18}$$

Поскольку $\widehat{\Omega}$ является аналитической функцией в круге $D^*_\circ$, для её предельных значений на окружности справедливы формулы обращения Гильберта. Мы будем использовать одну из формул обращения Гильберта, которую в силу свойств симметрии (15) и (18) можно преобразовать к виду с интегралом по четверти окружности:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) \left(\operatorname{ctg}(s-\sigma) - \operatorname{ctg}(s+\sigma) \right) ds. \tag{19}$$

Заметим также, что функции τ и θ зависят от параметра $s_0 \in (0,1)$, значение которого можно найти, решив следующее уравнение:

$$\frac{\ell}{h} = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{1+s^2}{1-s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds. \tag{20}$$

Функцию $\hat{\tau}$ можно определить в круге $D_\circ^*$ с помощью формулы Пуассона:

$$\hat{\tau}(s) = \frac{(1-|s|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\sigma) \left(\frac{1}{|e^{i\sigma} - s|^2} + \frac{1}{|e^{i\sigma} + s|^2} \right) d\sigma. \tag{21}$$

В параграфе 1.3 приведена полная математическая формулировка задачи в терминах функций τ и θ в виде системы (13)$-$(21). В силу симметричности течения относительно мнимой оси, задачу (1)$-$(8) можно сформулировать в терминах функций τ и θ при $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Установлено, что функция

$$\eta(\sigma) = (1-\beta)\sigma + \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)$$

есть угол наклона свободной границы Γ, изображенный на рис. 4. На этом рисунке также изображён касательный вектор $\boldsymbol{q} = \left(d\widetilde{x}/d\sigma, d\widetilde{y}/d\sigma \right)$. Из (16) вытекает, что $\eta(0) = 0$ и $\eta(\pi/2) = \pi/2$. Из последнего, в частности, следует, что в точке над стоком образуется касп, то есть касательная к свободной границе становится вертикальной.

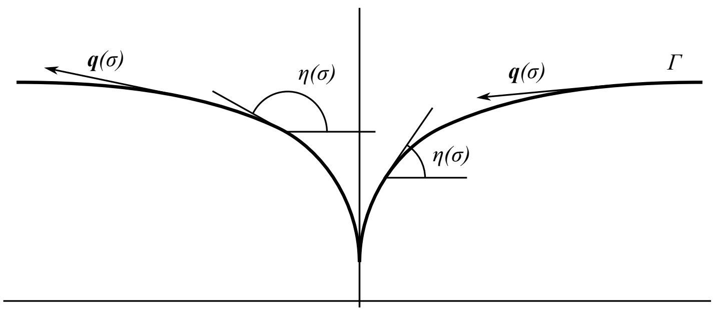


Рис. 4 — Угол $\eta(\sigma)$ между осью x и касательной к Γ.

Заметим, что если $\eta(\sigma) > \pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, то происходит опрокидывание свободной границы (см. рис. 5). Более того, опрокидывание при σ близких к $\pi/2$ означает, что отображения G и F не являются взаимно однозначными (см. рис. 6). Это означает, что решение системы (13)$-$(21), если оно существует, не будет давать решения исходной задачи. Поэтому нам необходимо показать, что такая ситуация невозможна, а именно, угол наклона $\eta(\sigma)$ свободной границы меньше $\pi/2$ при $\sigma \in (0,\pi/2)$. Этот факт установлен, если приведённое число Фруда α не слишком мало (см. теорему 2.5).

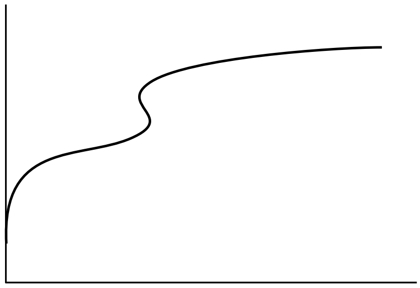


Рис. 5 — Возможная форма свободной границы с $\eta(\sigma_0) \geqslant \pi/2$ для некоторых $\sigma_0 \in (0, \pi/2)$.

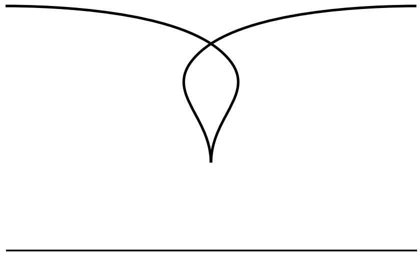


Рис. 6 — Отсутствие инъективности отображений G и F в случае опрокидывания при σ близких к $\pi/2$.

Кроме того, в этом параграфе показано, как определяется поле скорости после нахождения функций τ и θ. Для этого необходимо провести дополнительные построения. Используя значения функций τ и θ на всём отрезке $[0, 2\pi]$, найдём гармонические в единичном круге $D_\circ^*$ функции $\hat\tau$ и $\hat\theta$, которые на границе круга равны τ и θ соответственно. В круге $D_\circ^*$ определим функции $\widehat{\Omega}(t)$, $u(t)$, $w^*(t)$, $v^*(t)$ и, используя соотношения

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{v^*(t)}{u(t)} = -\frac{2}{\pi}\, e^{i\widehat{\Omega}(t)} \frac{(t+s_0)^{\beta/2}(t-s_0)^{\beta/2}}{t^\beta} \frac{t^2+1}{t^2-1} \quad \text{и} \quad G(0) = 0,$$

найдём отображение $z = G(t)$. Далее, определим отображение $F(z)$, решив следующую задачу:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \Big(G'(t)\Big)^{-1}\Big|_{t=F(z)} \quad \text{и} \quad F(0) = 0.$$

После этого находим комплексный потенциал и поле комплексной скорости в плоскости переменной z:

$$w(z) = w^*\big(F(z)\big) \quad \text{и} \quad v(z) = \frac{dw(z)}{dz}.$$

В параграфе 1.4 получена эквивалентная формулировка системы (13)$-$(21) в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Введём функцию:

$$\zeta(\sigma) = 3\tau'(\sigma) - \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^{3\beta}(\sigma). \tag{22}$$

Тогда функция (22) удовлетворяет уравнению

$$\zeta = \varPhi(\zeta), \tag{23}$$

где $\varPhi$ — нелинейный оператор, определённый следующим образом

$$\varPhi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi}\,\frac{\sin\left(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}\,(H\zeta)(\sigma)\right)\,\operatorname{ctg}\sigma}{\exp\int_0^\sigma \zeta\,ds}, \tag{24}$$

$$(H\zeta)(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} K(s,\sigma)\,\zeta(s)\,ds, \quad K(s,\sigma) = \ln\left|\frac{\sin(s+\sigma)}{\sin(s-\sigma)}\right|, \tag{25}$$

$$\mu(\sigma) = 2(\phi(\sigma) - \sigma) = 2\,H\Big(\frac{d}{d\sigma}\ln\varrho\Big)(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2]. \tag{26}$$

Будем искать решения уравнения (23) в банаховом пространстве $L^2(0,\pi/2)$ с нормой

$$\|\zeta\| = \Big(\int_0^{\pi/2} |\zeta(\sigma)|^2\,d\sigma\Big)^{1/2}.$$

Далее, из соображений краткости, будем обозначать $L^2(0,\pi/2)$ через L^2.

В этом параграфе выведены свойства функции μ. Функция $\mu(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0,\pi/2)$, $\mu(0) = \mu(\pi/2) = 0$ и $\operatorname{tg}\mu(\pi/4) = s_0^2$. Функция μ является вогнутой на интервале $(0,\pi/2)$ и зависит от параметра s_0. Кроме того, доказаны некоторые вспомогательные утверждения и получены оценки оператора H.

Во второй главе проводится исследование разрешимости задачи со свободной границей и точечным стоком на плоском горизонтальном дне, то есть при $\beta = 0$ (см. рис. 2a). В этом случае операторное уравнение (23) для системы (13)–(21) примет следующий вид:

$$\zeta = \varPhi(\zeta), \tag{27}$$

$$\varPhi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi}\,\frac{\sin\left(\sigma + \frac{1}{3}\,(H\zeta)(\sigma)\right)\,\operatorname{ctg}\sigma}{\exp\int_0^\sigma \zeta\,ds}, \quad \sigma \in (0,\pi/2]. \tag{28}$$

В параграфе 2.1 с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке доказано существование решения уравнения (27) для чисел Фруда, превышающих некоторое конкретное значение.

Теорема 2.1. *Для любого* $\alpha \geq \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\right) \approx 0{,}76$ *существует неотрицательная функция* $\zeta \in L^2$*, удовлетворяющая уравнению* (27). *Эта функция удовлетворяет оценкам:*

$$0 \leq \sigma + \frac{1}{3}\,(H\zeta)(\sigma) \leqslant \pi \text{ почти для всех } \sigma \in (0,\pi/2), \quad \|\zeta\| \leqslant \frac{9\sqrt{\pi}}{2}.$$

Затем с помощью принципа сжимающих отображений доказывается единственность решения операторного уравнения (27) для несколько бо́льших чисел Фруда.

Теорема 2.2. *Для любого* $\alpha > 8/\pi \approx 2{,}55$ *существует единственная неотрицательная функция* $\zeta \in L^2$, *удовлетворяющая уравнению* (27).

В параграфе 2.2 проведено исследование гладкости решения, формы свободной границы и её асимптотики вблизи точки над стоком. Как было сказано ранее, решение исходной задачи может быть построено, если мы знаем функции τ и θ. Предположим, что $\zeta_* \in L^2$ является неотрицательным решением операторного уравнения (27), существование которого было доказано в предыдущем параграфе. Определим функции τ и θ следующим образом:

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{3}(H\zeta_*)(\sigma), \quad \tau'(\sigma) = \frac{1}{3}\zeta_*(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2). \tag{29}$$

Эти формулы полностью соответствуют обозначениям, введённым ранее. Заметим, что у нас есть дифференциальное уравнение для функции τ, по этой причине нам нужно граничное условие $\tau(0) = 0$, которое берётся из (16). Функции τ и θ, определённые выше, удовлетворяют уравнениям (17) и (19).

Теорема 2.3. *Пусть* τ *и* θ *— функции, определённые в* (29). *Тогда*

1. $(\tau' \sin\sigma)' \in L^2$, $\|(\tau' \sin\sigma)'\| \leqslant 7/(\alpha\sqrt{\pi})$, $\tau \in C^{1,1/2}[\delta, \pi/2]$ *для всех* $\delta \in (0, \pi/2)$ *и* $\tau'(\pi/2) = 0$;
2. $(\theta' \sin\sigma)' \in L^2$, $\|(\theta' \sin\sigma)'\| \leqslant 7/(\alpha\sqrt{\pi})$ *и* $\theta \in C^{1,1/2}[\delta, \pi/2]$ *для всех* $\delta \in (0, \pi/2)$.

Эта теорема устанавливает гладкость функций τ и θ на $[\delta, \pi/2]$ для любого $\delta \in (0, \pi/2)$. Однако условия симметрии (15) и (18) позволяют нам определить эти функции также на $[0, \pi]$. Таким образом, $\tau, \theta \in C^{1,1/2}[\delta, \pi - \delta]$ для любого $\delta \in (0, \pi/2)$. Гладкость функций τ и θ может быть дополнительно улучшена. С помощью теоремы Х. Леви об аналитическом продолжении доказано, что свободная граница является аналитической всюду, кроме точки над стоком, где она имеет касп.

Теорема 2.4. *Функции* τ *и* θ *являются аналитическими на* $(0, \pi)$.

Чтобы показать, что конформное отображение является взаимно однозначным и существует решение исходной задачи, было установлено при каких значениях числа Фруда не происходит опрокидывания свободной границы.

Теорема 2.5. *Если* $\alpha > 5/\sqrt{8} \approx 1{,}768$, *то* $\eta(\sigma) < \pi/2$ *для всех* $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Кроме того, в этом параграфе исследованы асимптотики угла наклона и формы свободной границы при приближении к точке над стоком.

Теорема 2.6. *Если* $\alpha > \alpha_0 = 5/\sqrt{8}$, *то есть* α *удовлетворяет тому же неравенству, что и в теореме 2.5, то*

$$\eta(\sigma) = \pi/2 - \gamma\,(\pi/2 - \sigma) + o(\pi/2 - \sigma) \quad \text{при} \quad \sigma \to \pi/2^-,$$

где $\gamma \in [1 - \alpha_0/\alpha, 1]$ *является константой.*

Теорема 2.7. *Пусть выполняется условие теоремы 2.6, то есть* $\alpha > 5/\sqrt{8}$. *Если свободная граница* Γ *описывается уравнением* $y = q(x)$ *для* $x \geq 0$ *с некоторой функцией* q, *тогда*

$$q(x) = y_0 + a\,x^{2/3} + o(x^{2/3}) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{30}$$

где $y_0 = \widetilde{y}(\pi/2)$ *является* y*-координатой точки, в которой находится касп,* $a = 3^{2/3}\sqrt{c_0}/(2\gamma^{2/3})$, $c_0 = e^{-\tau(\pi/2)}$, *и* γ *определяется в теореме 2.6.*

В третьей главе задача со свободной границей рассматривается в случае, когда сток находится в треугольной впадине на дне, то есть при $\beta > 0$ (см. рис. 2б). Формулировка операторного уравнения в этом случае полностью совпадает с формулировкой уравнения (23). Мы хотим доказать, что существует положительное решение операторного уравнения (23). Но поскольку в операторе Φ из (23) значение функции синус может быть отрицательным, мы рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\Phi_s(\zeta) = \zeta, \tag{31}$$

$$\Phi_s(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi}\,\frac{\sin\left(S(\sigma + \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta(\sigma))\right)\,\operatorname{ctg}\sigma}{\exp\int_0^\sigma \zeta(s)ds}, \quad \sigma \in (0, \pi/2), \tag{32}$$

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \pi/2, & x \geqslant \pi/2, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{33}$$

Для доказательства разрешимости сначала **в параграфе 3.1** устанавливается разрешимость вспомогательной задачи со срезкой.

Теорема 3.1. *Для произвольных* $s_0 \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ *и* $\alpha > 8/\pi \approx 2{,}55$ *существует единственная неотрицательная функция* $\zeta_* \in L^2$, *удовлетворяющая уравнению* (31), *и справедлива оценка:*

$$\|\zeta_*\| < \frac{1}{2}\left(1 + 2\beta + \frac{2\beta\sqrt{2\pi}}{1 - s_0^2}\right).$$

В параграфе 3.2 показано, что при определённых условиях от срезки можно отказаться и не происходит опрокидывания свободной границы, поскольку функция $\eta(\sigma) < \pi/2$ для всех $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Теорема 3.2. *Для любого* $\alpha \geqslant \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, *где*

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{\pi} + 1/6}{\sqrt{2\pi}} + \beta\frac{\sqrt{\pi} + 1/3}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{3}\frac{\beta}{1 - s_0^2}\right)\frac{1 + s_0^2}{1 + s_0^2 - 2\beta s_0^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi} + \frac{1 + 2\beta + 2\beta\sqrt{2\pi}/(1 - s_0^2)}{\pi^{3/2}/2 - 2\beta\pi^{1/2}\mu(\pi/4)},$$

функция $\eta(\sigma) < \pi/2$ *для всех* $\sigma \in (0, \pi/2)$.

В параграфе 3.3 доказано, что решение $\zeta_* \in L^2$ операторного уравнения (23) зависит непрерывно в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega_+$, где

$$\Omega_+ = \left\{(s_0, \alpha, \beta) \mid s_0, \beta \in (0, 1),\, \alpha \in \big(8/\pi, +\infty\big)\right\}.$$

Чтобы решить исходную задачу (13)−(21), нужно определить параметр s_0, являющийся решением уравнения (20) при фиксированных α и β. Для краткости, перепишем уравнение (20) в следующем виде:

$$\frac{\ell}{h} = Y_+(s_0, \alpha, \beta), \tag{34}$$

где

$$Y_+(s_0, \alpha, \beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta}\,\frac{1 + s^2}{1 - s^2}\, e^{-\hat{\tau}(s)}\, ds.$$

Установлено, что функция $Y_+ : \Omega_+ \to \mathbb{R}$ непрерывна, и доказана теорема:

Теорема 3.3. *Существует такая положительная ограниченная функция* $C_+ : [0, 1] \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, *что при выполнении условий* $\alpha > 8/\pi$, $\beta \in (0, 1)$ *и* $0 < \ell/h < \max_{s_0 \in (0,1)} C_+(\beta, s_0)$, *найдётся параметр* $s_0^* \in (0, 1)$, *который удовлетворяет уравнению* (34).

Таким образом, мы можем перейти от задачи (31) к операторному уравнению (23), которое эквивалентно исходной задаче (13)−(21) при $\beta > 0$. Тогда из теорем 3.1−3.3 следует, что существует решение задачи с точечным стоком во впадине на дне канала.

В четвёртой главе задача со свободной границей рассматривается в случае, когда точечный сток находится в вершине треугольного выступа на дне, то есть случай, когда $\beta < 0$ (см. рис. 2в). Для удобства введём новый параметр $\beta^* > 0$, такой что $\beta^* = -\beta$ и $\beta^* \in (0,1)$. Тогда формулировка операторного уравнения (23) в этом случае примет следующий вид:

$$\zeta = \varPhi(\zeta), \tag{35}$$

$$\varPhi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi}\,\frac{\sin\left(\sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}\,(H\zeta)(\sigma)\right)\,\operatorname{ctg}\sigma}{\exp\int_0^\sigma \zeta\,ds}, \quad \sigma \in (0,\pi/2]. \tag{36}$$

В параграфе 4.1 для доказательства разрешимости операторного уравнения (35) используется условие $\beta^*\mu(\sigma) \leqslant \sigma$ для $\sigma \in [0,\pi/2]$. Это условие связано не с механическими, а с математическими трудностями, возникающими при решении задачи.

Теорема 4.1. *Пусть $\beta^*\mu(\sigma) \leqslant \sigma$ для $\sigma \in [0,\pi/2]$. Для любого $\alpha > 8/\pi \approx 2{,}55$ существует единственная неотрицательная функция $\zeta_* \in L^2$, удовлетворяющая уравнению* (35)*, и для неё справедливы оценки:*

$$0 \leqslant \sigma - \beta^*\mu(\sigma) + \frac{1}{3}\big(H\zeta_*\big)(\sigma) \leqslant \pi \quad \textit{при} \quad \sigma \in [0,\pi/2], \tag{37}$$

$$\|\zeta_*\| \leqslant \frac{9\sqrt{\pi}}{2} + \frac{6\beta^*}{\sqrt{\pi}}\,\mu(\pi/4). \tag{38}$$

В параграфе 4.2 показано, что решение операторного уравнения непрерывно зависит от параметра, характеризующего треугольный выступ, и доказано, что при определённых значениях исходных параметров существует решение исходной задачи. Введём множество

$$\Omega_- = \left\{ (s_0,\alpha,\beta^*) \,\middle|\, s_0,\beta^* \in (0,1), \alpha \in \big(8/\pi,+\infty\big), \beta^* \leqslant \frac{1-s_0^2}{2s_0^2} \right\}.$$

Неравенство на β^*, фигурирующее в определении множества Ω_-, есть условие, эквивалентное условию $\beta^*\mu(\sigma) \leqslant \sigma$ для $\sigma \in [0,\pi/2]$ из теоремы 4.1. Установлено, что решение $\zeta_* \in L^2$ операторного уравнения (35) зависит непрерывно в L^2 от параметров $(s_0,\alpha,\beta^*) \in \Omega_-$.

Для того чтобы решить исходную задачу, нам необходимо определить параметр s_0, являющийся решением уравнения (20) при фиксированных α и $\beta < 0$. Обозначим это решение через s_0^*. Уравнение (20) при $\beta = -\beta^*$, где $\beta^* \in (0,1)$, перепишется в следующем виде:

$$\frac{\ell}{h} = Y_-(s_0,\alpha,\beta^*), \tag{39}$$

где

$$Y_-(s_0,\alpha,\beta^*) = \frac{2}{\pi}\int_0^{s_0} \frac{s^{\beta^*}}{(s_0^2-s^2)^{\beta^*/2}}\,\frac{1+s^2}{1-s^2}\,e^{-\hat\tau(s)}\,ds.$$

Установлено, что функция $Y_- : \Omega_- \to \mathbb{R}$ непрерывна, и доказана теорема:
Теорема 4.2. *Существует такая положительная строго убывающая функция* $C_- : (0,1] \to \mathbb{R}$, *что:*
1. $C_-(\beta^*) \to +\infty$ *при* $\beta^* \to 0$ *и* $C_-(1) \approx 0{,}135$;
2. *если* $\alpha > 8/\pi$, $\beta^* \in (0,1)$ *и* $0 < \ell/h < C_-(\beta^*)$, *то найдётся параметр* s_0^*, *такой что* $(s_0^*,\alpha,\beta^*) \in \Omega_-$ *и удовлетворяющий уравнению* (39).

В параграфе 4.3 проведено исследование формы свободной границы. Установлено, что не происходит опрокидывания свободной границы при заданных числах Фруда.
Теорема 4.3. *Для любого* $\alpha \geqslant (2/\pi + 4\pi^{-3/2}) \approx 1{,}355$ *функция* $\eta(\sigma) < \pi/2$ *для всех* $\sigma \in (0,\pi/2)$.

Таким образом, из теорем 4.1–4.3 следует, что решение задачи с точечным стоком в вершине треугольного выступа существует и не происходит опрокидывания свободной границы.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Старовойтову Виктору Николаевичу за постоянное внимание к работе, поддержку и ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Free-surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 722, no. 012035. — P. 1–7.

2. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Steady free surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink on the flat bottom // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* — 2019. — Vol. 49. — P. 111–136.

3. *Титова А. А.* О форме свободной границы течения идеальной несжимаемой жидкости с точечным стоком в вершине треугольного выступа на дне // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2021. — Т. 18, № 1. — С. 207–236.

4. *Титова А. А.* Задача о потоке идеальной жидкости с сингулярным стоком во впадине на дне // *Сиб. Журн. Индустр. Матем.* — 2021. — Т. 24, № 3. — С. 101–121.

5. *Местникова А. А., Старовойтов В. Н.* Задача о форме свободной поверхности идеальной жидкости над сингулярным стоком // Нелинейные волны: теория и новые приложения. Тезисы докладов. — 2016. — С. 75.

6. *Местникова А. А.* Разрешимость задачи о форме свободной поверхности идеальной жидкости над сингулярным стоком // Материалы 54-ой международной научной студенческой конференции: Математика. — 2016. — С. 51.

7. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Solvability of the problem of a free surface potential flow of an ideal fluid caused by a singular sink // Abstracts of the Russian-French Workshop “Mathematical Hydrodynamics”. — 2016. — P. 43.

8. *Местникова А. А.* О свободной поверхности течения идеальной жидкости со стоком в расположенной на дне вершине // XI всероссийская конференция молодых ученых “Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии”. Тезисы докладов XI Всероссийской конференции молодых ученых. Под ред. В. В. Козлова. — 2017. — С. 81.

9. *Местникова А. А.* О форме свободной поверхности потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с сингулярным стоком // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2018. — С. 141–142.

10. *Местникова А. А., Старовойтов В. Н.* О форме свободной поверхности течения идеальной жидкости с точечным стоком // Соболевские чтения. Международная школа-конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева: Тез. докл. Под ред. Г. В. Демиденко. — 2018. — С. 125.

11. *Местникова А. А.* О форме свободной поверхности течения идеальной жидкости с сингулярным стоком на вершине выступа на дне // Мате-

матика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия С. К. Годунова: Тезисы докладов. — 2019. — С. 169.

12. *Титова А. А.* О форме свободной границы течения идеальной жидкости с сингулярным стоком на дне с треугольной впадиной // Тезисы докладов IX Международной конференции по математическому моделированию, посвящённой 75-летию В. Н. Врагова. — 2020. — С. 61.

13. *Титова А. А.* Задача о форме свободной поверхности течения жидкости с точечным стоком на неровном дне // Тезисы докладов IX Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения ак. М. А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". — 2020. — С. 58.

Подписано в печать 19.10.2021.
Формат бумаги 60×84 1/16.
Тираж 75 экз.

Заказ № 295.
Объем 1.4 п.л.
Бесплатно.

Отпечатано на полиграфическом участке
Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 15.