На правах рукописи

**Макридин Захар Владимирович**

# Ветвление периодических решений и законы сохранения нелинейных уравнений теории волн

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук Макаренко Николай Иванович

**Официальные оппоненты:**
Гребенев Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий”, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования

Капцов Олег Викторович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр “Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук”, ведущий научный сотрудник отдела информационно-вычислительного моделирования

**Ведущая организация:**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”

Защита состоится 28 июня 2022 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, д.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН http://www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан                2022 г.

И. о. ученого секретаря
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук                Рудой Е.М.

## Общая характеристика работы

Основной математической моделью внутренних волн в невязкой стратифицированной жидкости является система уравнений Эйлера с переменным полем плотности, расслоенным под действием силы тяжести. Задача Штурма–Лиувилля, возникающая при нахождении спектра волновых мод, имеет счетный набор простых собственных значений, которые определяют дисперсионные кривые в пространстве частот и волновых чисел. Поведение этих кривых существенно зависит от параметров фонового течения. В частности, при наличии нескольких локальных максимумов частоты плавучести существуют точки в пространстве спектральных параметров, в малой окрестности которых лежат две и более дисперсионных кривых. Этот феномен называется резонансом Эккарта.

Для описания слабонелинейных эффектов при наличии резонанса Эккарта между двумя модами в работе Гира и Гримшоу (1984) была выведена система зацепленных уравнений Кортевега – де Фриза. Численные расчеты решений типа уединенных волн показали, что существует два принципиально разных вида совместного движения солитонов в соседних слоях: синхронизованное движение, т.е. обе моды движутся с постоянной одинаковой скоростью (бегущие волны), и перескакивающие солитоны (“leapfrogging solitary waves”), когда моды обмениваются энергией друг с другом периодическим по времени образом. Нестационарные решения системы Гира – Гримшоу изучались в работах Б. Маломеда, Ю. Кившаря, Р. Гримшоу и др. при помощи асимптотических разложений в предположении, что зацепляющие члены малы. В работе А. Шеля и Дж. Райта (2007) исследовалась устойчивость решений типа уединенных волн в системе слабосвязанных уравнений Кортевега – да Фриза, которая является частным случаем системы Гира – Гримшоу.

При поиске решений типа бегущих волн система Гира – Гримшоу сводится к четырехмерной динамической системе, спектр линейного оператора которой довольно разнообразен и существенно зависит от параметров, входящих в уравнения. В работах Р. Гримшоу, Ж. Йосса, М. Гровса и др. при помощи метода нормальных форм изучались решения, ответвляющиеся в точках спектра различных типов. В итоге было получено обширное многообразие волновых режимов: классическая уединенная волна (гомоклиническая траектория), обобщенная уединенная волна (солитон с осциллирующими на бесконечности хвостами), солитоны огибающей и вложенные солитоны (локализованные периодические структуры), решения типа кинков (уступообразная волна с профилем типа гиперболического тангенса) и более сложные структуры. В работе К. Фочесато, Ф. Диаса и Р. Гримшоу (2005) исследовались волны типа плато с рябью на концах и в центральном ядре. Такие решения явились результатом резонансного взаимодействия длинных волн с периодическими волнами малой амплитуды.

В диссертационной работе используется альтернативный метод Ляпунова – Шмидта, который позволяет свести исходную задачу о бегущих волнах к эквивалентной конечномерной системе нелинейных уравнений разветвления. Работа с многопараметрической системой уравнений разветвления значительно упрощается, если исходная задача обладает групповой симметрией. Данное обстоятельство было впервые замечено и использовано в работе В. И. Юдовича (1967) при исследовании свободной конвекции в жидкости, заполняющей ограниченную область. Дальнейшее развитие симметрийной теории ветвления содержится в работах Б. В. Логинова, В. А. Треногина, Н. А. Сидорова, Н. И. Макаренко, Ю. А. Кузнецова, Д. Сэттинджера, А. Вандербауведе, Ж. Йосса, Д. Джозефа, М. Голубицкого, И. Стюарта, Д. Шеффера и др. Если ядро линейного оператора инвариантно относительно допускаемой группы, то система уравнений разветвления наследует групповую инвариантность. Тогда, рассматривая параметрические семейства инвариантных решений, можно понизить размерность системы уравнений разветвления.

Если ядро линейного оператора не инвариантно, то полезным может оказаться понятие косимметрии. Согласно оригинальной работе В. И. Юдовича (1991) косимметрия — это векторное поле, ортогональное данному. Указанное условие ортогональности дает дополнительное линейное соотношение между уравнениями разветвления и позволяет выделить подсистему линейно независимых уравнений меньшей размерности. Таким образом, наличие косимметрии тоже обеспечивает существование параметрических семейств решений, но, в отличие от групп симметрий, не существует алгоритма, позволяющего отыскать косимметрию для заданной системы уравнений. Исключение составляют потенциальные системы с инвариантным лагранжианом, для которых, как показано в работе Н. И. Макаренко (1996), косимметриями являются инфинитезимальные операторы допускаемой алгебры Ли.

При дальнейшем анализе редуцированных уравнений разветвления возникают достаточные условия существования орбит ответвляющихся решений. Эти условия формулируются в терминах функции Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова аналогично случаю динамических систем из теории нелинейных колебаний. Корни этих функций, зависящих от нелинейных членов исходных уравнений, дают искомый сдвиг фазы в синхронизованных волновых пакетах или указывают пространственное местоположение захваченных волн над препятствиями. В рамках задач теории волновых движений подобные условия можно трактовать как нелинейные дисперсионные соотношения, поскольку они связывают волновые параметры с бифуркационными.

Другой класс задач, рассматриваемых в диссертации, связан с теорией интегрируемых $n$-компонентных систем гидродинамического типа. Под этим термином в теории интегрируемых систем понимаются квазилинейные гиперболические системы $n$ уравнений с двумя независимыми переменными. Существует множество примеров систем гидродинамического типа, которые записываются в диагональном виде (в инвариантах Римана). Для случая $n = 2$ переход к диагональным переменным возможен всегда, в противном случае существует критерий существования инвариантов Римана, который заключается в равенстве нулю тензора Хаантьеса, компоненты которого вычисляются из компонент матрицы рассматриваемой системы. Дальнейшее развитие теории сконцентрировалось вокруг диагонализируемых систем, для которых в работах С. П. Царева (1985, 1990) было введено понятие интегрируемости. А именно, $n$-компонентная диагональная система гидродинамического типа является интегрируемой, если и только если характеристические скорости удовлетворяют свойству полугамильтоновости. Данное свойство является специальным условием совместности, которое приводит к наличию бесконечное числа гидродинамических законов сохранения (т.е. плотности и токи зависят только от зависимых переменных) и коммутирующих потоков, также являющихся диагональными системами гидродинамического типа. Более того, решение интегрируемой системы может быть найдено в неявном виде с помощью обобщенного метода годографа.

Имеется отдельный класс систем гидродинамического типа с матрицей бесконечного размера. Такие системы называются гидродинамическими цепочками. Ярким примером служит цепочка, полученная в работе Д. Бенни

(1973). В этой же работе показано, что цепочка Бенни может быть представлена в виде бесконечного числа законов сохранения, а в работах Б. А. Купершмидта и Ю. И. Манина (1977, 1978) для нее построены все коммутирующие цепочки. Позднее в статье Дж. Гиббонса и С. П. Царева (1996) было установлено, что цепочка Бенни допускает бесконечное число гидродинамических редукций — $n$-компонентных систем гидродинамического типа. Причем все эти редукции являются диагонализируемыми и для них свойство полугамильтоновости выполняется автоматически. Поскольку для гидродинамических цепочек вычисление инвариантов Римана (а значит и проверка свойства полугамильтоновости) весьма проблематично, то наличие бесконечного числа интегрируемых гидродинамических редукций выбирается в качестве определения интегрируемости.

Для трехмерных обобщений систем гидродинамического типа, т.е. трехмерных гиперболических систем уравнений определение интегрируемости несколько меняется. Аналогично цепочкам, указанная система называется интегрируемой, если она допускает бесконечное число интегрируемых гидродинамических редукций. Только под редукциями здесь понимаются пары коммутирующих $N$-компонентных диагональных систем (число компонент $N$ произвольно), решения которых описывают нелинейное взаимодействие $N$ простых волн или $N$-кратные волны. Аналогично двумерному случаю, трехмерные интегрируемые уравнения вкладываются в пару коммутирующих гидродинамических цепочек.

В трёхмерном случае интегрируемые системы уравнений (простейший пример — уравнение Кадомцева – Петвиашвили) имеют как двумерные, так и трёхмерные законы сохранения. Однако, если процедура построения двумерных законов сохранения как для двумерных, так и для трёхмерных интегрируемых систем хорошо изучена, то построение бесконечного набора трёхмерных законов сохранения для дисперсионных трёхмерных интегрируемых систем связано со значительными вычислительными трудностями из-за учёта высших производных. В связи с этим внимание в диссертации было сосредоточено на бездисперсионных трёхмерных интегрируемых уравнениях Хохлова – Заболоцкой и Михалева, которые могут быть представлены в качестве квазилинейных систем уравнений в частных производных первого порядка. Для указанных уравнений объём вычислений значительно сокращается (по сравнению с дисперсионными уравнениями), что позволяет их довести до конца. Отметим, что существуют законы сохранения, плотности и токи которых содержат не только зависимые функции и их высшие производные, но и независимые переменные. Способы построения таких законов сохранения хорошо изучены, однако их существование не является свойством интегрируемых уравнений.

**Цели и задачи исследования.** Целью настоящей работы является исследование семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза, а также исследование трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева. В диссертации рассматривается следующий ряд задач:

1. Построение и обоснование асимптотики семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза, в частности, получение достаточных условий синхронизации мод.
2. Изучение асимптотического поведения полученных семейств решений в пределе малой амплитуды и анализ предельной формы достаточных условий синхронизации.
3. Построение трехмерных законов сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой.
4. Построение бесконечных наборов трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева.
5. Построение бесконечных наборов трехмерных законов сохранения для редукций пар коммутирующих двумерных интегрируемых цепочек Бенни и Михалева.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы теории бифуркаций, группового анализа и переопределенных систем уравнений в частных производных.

**Основные положения, выносимые на защиту:**
1. Получены достаточные условия существования параметрических семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза и исследована их асимптотика.

2. Для указанных семейств решений изучен предельный случай малой амплитуды, в частности, проанализирована предельная форма достаточных условий существования.
3. Построены трехмерные законы сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой.
4. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих гидродинамических цепочек Бенни и Михалева.
5. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для редукций пар коммутирующих цепочек Бенни и Михалева.

**Личный вклад автора.** Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, изложенных в совместных публикациях, на равноправной основе: постановке задач, доказательстве теорем, обсуждении полученных результатов и оформлении публикаций.

**Научная новизна.** В работе получены достаточные условия существования семейств периодических решений типа бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза. Выписана асимптотика указанных решений и исследован предел малой амплитуды. Построены трехмерные законы сохранения для трехмерного уравнения Хохлова – Заболоцкой. Получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для пар двумерных коммутирующих цепочек Бенни и Михалева и их редукций. Указанные научные результаты являются новыми и подтверждены доказательствами.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в развитие методов построения точных и асимптотических решений нелинейных уравнений, а также могут служить основой для дальнейших теоретических и численных исследований уравнений волновых движений неоднородной жидкости.

**Обоснованность и достоверность результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических доказательств.

**Апробация работы.** Представленные результаты докладывались и обсуждались на конференциях: Всероссийская конференция “Нелинейные волны:

теория и новые приложения", посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова (Новосибирск, 2016); Physics and mathematics of nonlinear phenomena: 50 years of Inverse Scattering Transform (Gallipoli, Italy, 2017); Dispersive hydrodynamics and oceanography: from experiments to theory (Les Houches, France, 2017); Международная конференция "Динамика в Сибири" (Новосибирск, 2017); Summer school on symmetry, similarity and conservation laws in solid and fluid mechanics (Cargese, France, 2018); Modern treatment of symmetries, differential equations and applications (Nakhon Ratchasima, Thailand, 2019); Всероссийская конференция и школа для молодых ученых "Математические проблемы механики сплошных сред", посвященные 100-летию академика РАН Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2019); IX-th International Conference "Solitons, collapses and turbulence: achievements, developments and perspectives" in honor of Vladimir Zakharov's 80th birthday & Scientific school for young scientists "Nonlinear days" (Ярославль, 2019); 22nd EGU General Assembly, (Vienna, Austria, 2020); 11-th International workshop "Waves in inhomogeneous media and integrable system" (Калининград, 2021).

Кроме того, результаты диссертации сообщались и обсуждались на научных семинарах под руководством чл.-корр. РАН Плотникова П. И. и д.ф.-м.н. Старовойтова В. Н. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Пухначёва В. В. и д.ф.-м.н. Ерманюка Е. В. (ИГиЛ СО РАН); акад. РАН Тайманова И. А. (ИМ СО РАН); д.ф.-м.н. Ткачева Д. Л. и д.ф.-м.н. Трахинина Ю. Л. (ИМ СО РАН).

**Публикации.** Результаты по теме диссертационной работы опубликованы в международных и российских журналах из списка ВАК [1–6] и тезисах докладов [7–13].

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц, список литературы содержит 122 наименования.

Глава 3 и параграфы 4 и 5 главы 1 имеют свою независимую от остальных разделов диссертации систему обозначений.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в диссертационной работе. Сформулированы цель и задачи работы, положения, выносимые на защиту; обозначены методы исследования, научная и практическая значимость. Приведен обзор научной литературы, близкой к теме диссертации. Представлены структура и краткое содержание работы.

**В первой главе** приводятся необходимые сведения, которые используются в тексте диссертации. В **параграфе 1.1** изложена схема вывода системы Гира – Гримшоу, описывающей сильной взаимодействие слабонелинейных мод внутренних волн. **Параграф 1.2** посвящен элементам теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений в условиях групповой инвариантности. В **параграфе 1.3** приведен пример, иллюстрирующий ветвление решений в системе нелинейных слабосвязанных осцилляторов. В **параграфах 1.4 и 1.5** обсуждаются основные понятия и известные факты теории интегрируемых систем гидродинамического типа.

**Во второй главе** излагаются результаты по построению и обоснованию асимптотики решений типа периодических бегущих волн модельной системы слабосвязанных уравнений Кортевега – де Фриза.

**Параграф 2.1** посвящен постановке задачи. Рассматривается система уравнений

$$u_t + 3uu_x + u_{xxx} = \varepsilon \left(\Phi_u(u,v,\varepsilon)\right)_x, \quad v_t + 3vv_x + v_{xxx} = \varepsilon \left(\Phi_v(u,v,\varepsilon)\right)_x.$$

Переходя к бегущей переменной и интегрируя один раз, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' = H_u(u,v;\varepsilon),\ v'' = H_v(u,v;\varepsilon),\ H = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 - u^3 - v^3\right) + \varepsilon\Phi(u,v;\varepsilon), \quad (1)$$

где $(\cdot)' = d/dt$, а $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \subset \mathscr{R}$ — малый параметр. Предполагается, что функция $\Phi$ является аналитической и удовлетворяет условиям

$$\Phi(0,0;\varepsilon) = \Phi_u(0,0;\varepsilon) = \Phi_v(0,0;\varepsilon) = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) распадается на два стационарных уравнения КдФ и имеет решение $(u_0, v_0)$ в виде кноидальных волн, которые сдвинуты по фазе. Благодаря инвариантности исходной системы (1) относительно переносов по времени фазовый сдвиг $\nu$ является произвольным для системы в главном порядке по $\varepsilon$. Наша задача заключается в поиске значения фазового параметра $\nu$, которое обеспечивает ответвление решений при возмущении по $\varepsilon$. Будем искать $T(\varepsilon,\delta)$-периодическое решение $w = (u,v)$ в виде $w(t;\omega,\nu,\delta,\varepsilon) = w_0(t;\nu,\delta)+\varepsilon w_1(t;\omega,\nu,\delta,\varepsilon)$, где $w_0 = (u_0, v_0)$, а параметр $\delta$ определяет амплитуду невозмущенного решения. Заменой независимой переменной $\tau = \omega(\varepsilon,\delta)t$, где частота $\omega(\varepsilon,\delta)$ определяется формулой $\omega(\varepsilon,\delta) = T_0(\delta)/T(\varepsilon,\delta)$, задача сводится к поиску $T_0(\delta)$-периодических решений с периодом $T_0(\delta) = T(0,\delta)$ операторного уравнения для возмущения $w_1 = (u_1, v_1)$:

$$\mathbb{A}w_0 + \varepsilon\mathbb{A}w_1 = \frac{3}{2}w_0^2 + \varepsilon\mathbb{R}(w_1;\delta,\varepsilon,\omega,\nu), \quad w_0^2 = (u_0^2,v_0^2) \tag{2}$$

$$\mathbb{A}w_1 = \big(u_1'' + (3u_0 - 1)u_1, v_1'' + (3v_0 - 1)v_1\big), \quad (\cdot)' = d/d\tau. \tag{3}$$

Здесь частота $\omega(\varepsilon,\delta)$ ищется аналитической по параметрам $\delta$ и $\varepsilon$, причем $\omega(0,\delta) = 1$. Компоненты нелинейного оператора $\mathbb{R} = \big(R_1,R_2\big)$ определены следующим образом:

$$R_1 = \varepsilon^{-1}\big(1 - \omega^2\big)\big(u_0'' + \varepsilon u_1''\big) - \frac{3}{2}\varepsilon u_1^2 + \Phi_u(u_0 + \varepsilon u_1, v_0 + \varepsilon v_1; \varepsilon), \tag{4}$$

$$R_2 = \varepsilon^{-1}\big(1 - \omega^2\big)\big(v_0'' + \varepsilon\, v_1''\big) - \frac{3}{2}\varepsilon v_1^2 + \Phi_v(u_0 + \varepsilon u_1, v_0 + \varepsilon v_1; \varepsilon). \tag{5}$$

Определим функциональные классы следующим образом. Для целого числа $k \geq 0$ обозначим через $\mathscr{H}^k$ пространство Соболева $\mathscr{W}_2^k[0,T_0(\delta)]$ вещественных $T_0(\delta)$-периодических функций $u(\tau)$. Всюду далее будем предполагать, что число $k \geq 1$, так как в этом случае норма обладает свойством мультипликативности, что позволяет оценивать нелинейные члены. Для пар $w = (u,v)$ будем использовать пространства $\mathscr{E}_0 = \mathscr{H}^{k+2} \times \mathscr{H}^{k+2}$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^k \times \mathscr{H}^k$, норма в которых задается суммой норм скалярных функций $u$ и $v$ в соответствующих пространствах.

Пространство решений уравнения $\mathbb{A}w = 0$ является линейной оболочкой следующих векторов:

$$e_1 = (u_0',0), \quad e_2 = (0,v_0'), \quad e_3 = (u_*,0), \quad e_4 = (0,v_*), \tag{6}$$

где $u_0$ и $v_0$ — решения невозмущенной системы, а $u_*$, $v_*$ определяются квадратурами по известной формуле Лиувилля. Здесь векторы $e_3$ и $e_4$ в общем случае не являются периодическими функциями, а значит ядро оператора $\mathbb{A}$ двумерное при конечных $\delta$. Однако, при $\delta = 0$ оператор $\mathbb{A}$ принимает вид $\mathbb{A}w = (u''+u,\ v''+v)$, и размерность его ядра удваивается. Такое скачкообразное изменение размерности свидетельствует о неравномерности предельного перехода по параметру $\delta$. Поэтому мы будем рассматривать применение конструкции Ляпунова – Шмидта в случаях $\delta = O(1)$ и $\delta \to 0$ по отдельности.

**В параграфе 2.2** изучается случай, ктогда амплитуда $\delta$ является конечной величиной, поэтому в последующих выкладках этот параметр не будет играть особой роли и его можно опустить.

**Лемма 2.1** *Уравнение* $\mathbb{A}w = f$ *с оператором* $\mathbb{A}$ *из* (3) *и вектор-функцией* $f = \big(f_1, f_2\big)$ *из пространства* $\mathscr{F}_0$ *имеет* $T_0$*-периодическое решение* $w(\tau) \in \mathscr{E}_0$*, если и только если компоненты вектор-функции* $f$ *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int\limits_0^{T_0} f_1(s)u_0'(s)\,ds = 0, \qquad \int\limits_0^{T_0} f_2(s)v_0'(s;\nu)\,ds = 0. \tag{7}$$

*Если равенства* (7) *выполнены, то все* $T_0$*-периодические решения* $w = (u,v)$ *определяются формулами*

$$u(\tau) = \xi_1 u_0'(\tau) + \mathbb{G}_0 f_1(\tau), \quad v(\tau;\nu) = \xi_2 v_0'(\tau;\nu) + \mathbb{G}_\nu f_2(\tau), \quad \xi_1,\xi_2 \in \mathscr{R}, \tag{8}$$

*где* $\mathbb{G}_\nu$ *является оператором Грина неоднородного уравнения* $\mathbb{A}v = f_2$*, а* $\mathbb{G}_0 = \mathbb{G}_\nu\big|_{\nu=0}$*. При этом верны оценки*

$$\big\|\mathbb{G}_0 f_1\big\|_{\mathscr{H}^{k+2}} \le C_1\big\|f_1\big\|_{\mathscr{H}^k}, \quad \big\|\mathbb{G}_\nu f_2\big\|_{\mathscr{H}^{k+2}} \le C_2\big\|f_2\big\|_{\mathscr{H}^k}.$$

В силу леммы 2.1 линейный оператор $\mathbb{A} : \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0$ фредгольмов и имеет двумерное ядро, порожденное элементами $e_1$ и $e_2$. Согласно схеме Ляпунова – Шмидта, отыскание малых решений $w_1 = (u_1,v_1)$ уравнения (2) в виде $w_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma$ эквивалентно решению конечномерной системы уравнений разветвления

$$\mathbb{QR}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma; \omega,\nu,\varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Здесь проектор $\mathbb{Q}$ на дополнение к образу оператора $\mathbb{A}$ задается стандартным образом, а отображение $\sigma = \sigma(\tau;\xi_1,\xi_2,\omega,\nu,\varepsilon)$ определяется неявно из уравнения $\sigma = \widetilde{\mathbb{A}}^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbb{R}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sigma;\omega,\nu,\varepsilon)$, в котором $\widetilde{\mathbb{A}}$ — сужение оператора

$\mathbb{A}$ на дополнение к ядру. Ввиду неавтономности линейного оператора (3) его пространство нулей не инвариантно относительно группы переносов $T_g w = w(\tau + g)$, $w = (u,v)$. Однако, инвариантным является потенциал исходной системы (1)

$$l(w;\varepsilon) = \int\limits_0^{T(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2}\, u'^2(s) + \frac{1}{2}\, v'^2(s) + H(u(s),v(s);\varepsilon) \right\} ds.$$

В этой ситуации в силу леммы из работы Н.И. Макаренко (1996) верно тождество $\langle \nabla l(w;\varepsilon), Xw\rangle_\varepsilon = 0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ — скалярное произведение в пространстве $\mathscr{L}_2[0,T(\varepsilon)] \times \mathscr{L}_2[0,T(\varepsilon)]$, оператор $\nabla l$ есть производная Фреше гладкого функционала $l$, а $X = \partial_\tau$ — инфинитезимальный оператор группы сдвигов по времени. Согласно основному определению, введенному в работе В.И. Юдовича (1991), оператор $X$ является косимметрией для оператора $\nabla l$. Таким образом, по теореме о редукции, доказанной в статье Н.И. Макаренко (1996), двумерная система уравнений разветвления (9) для исходных уравнений (1) сводится к одному скалярному уравнению, которое в главном порядке при $\varepsilon = 0$ записывается в виде

$$\Psi(\nu) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{T_0} \Phi_u(u_0(\tau),u_0(\tau+\nu),0)\, u_0'(\tau) d\tau = 0. \qquad (10)$$

Здесь функция $\Psi(\nu)$ является функцией Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова. Как видно, наличие корня у функции $\Psi(\nu)$ является необходимым условием существования решения вида $w_0 + \varepsilon w_1$ исходной системы (1). Пусть указанное условие выполнено. Тогда после небольших преобразований уравнение разветвления принимает окончательную форму

$$\Psi'(\nu)(\xi_1 - \xi_2) + \Gamma(\omega,\nu) + \varepsilon \Pi(\xi_1,\xi_2;\omega,\nu,\varepsilon) = 0 \qquad (11)$$

с гладкими функциями $\Gamma$ и $\Pi$. Ясно теперь, что при $\Psi'(\nu) \neq 0$ уравнение (11) единственным образом определяет параметр $\xi_2$ как функцию параметров $\xi_1$, $\omega$, $\nu$ и $\varepsilon$. При этом параметры $\xi_1$ и $\omega$ являются свободными в ответвляющейся орбите решений.

**Теорема 2.1** *Если фазовый параметр $\nu$ является простым корнем функции $\Psi$ из* (10), *то при достаточно малых $\varepsilon$ в классе $\mathscr{E}_0$ существует $T_0$-периодическое решение $w_1(\tau)$ операторного уравнения* (2).

**В параграфе 2.3** рассматривается предельный случай $\delta = 0$, когда линейный неавтономный оператор $\mathbb{A}$ становится автономным, и размерность его ядра удваивается. Кроме того, при $\delta = 0$ подпространство $\mathrm{Ker}\,\mathbb{A}$ оказывается инвариантным относительно представления группы сдвигов по времени, допускаемой исходной системой (1). В этом случае схема ветвления претерпевает заметные изменения.

**Пункт 2.3.1** играет подготовительную роль и посвящен вычислению асимптотики невозмущенного решения $(u_0,v_0)$ при $\delta \to 0$. А именно, имеет место представление

$$u_0(t;\delta) = \frac{2}{3} + \delta\phi(t;\delta), \quad v_0(t;\nu,\delta) = u_0(t+\nu;\delta), \quad \phi'' + \phi + \frac{3}{2}\delta\phi^2 = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) для функции $\phi$ интегрируется в явном виде в эллиптических функциях Якоби, для которых можно воспользоваться известным асимптотическим разложением при $\delta \to 0$. Однако, мы хотим остаться здесь в рамках конструкции Ляпунова – Шмидта, чтобы более полно исследовать алгебраический факт скачкообразного изменения размерности ядра фредгольмова оператора в этом предельном переходе. При $\delta = 0$ имеется $2\pi$-периодическое решение $\phi_0 = \varrho\cos(t+\nu_*)$. Решение возмущенного уравнения с периодом $T_0(\delta) = 2\pi/\mu(\delta)$, где $\mu(0) = 1$, будем искать в виде $\phi = \phi_0 + \delta\phi_1$. Вводя новую переменную $y = \mu(\delta)t$, мы переходим к эквивалентной задаче о нахождении $2\pi$-периодических решений уравнения

$$A_0\phi_1 = R_0(\phi_1;\varrho,\nu_*,\mu_*,\delta), \quad \mu_* = \delta^{-1}(1-\mu^2). \qquad (13)$$

$$A_0\phi_1 = \phi_1'' + \phi_1, \quad R_0 = \mu_*(\phi_0'' + \delta\phi_1'') - \frac{3}{2}(\phi_0 + \delta\phi_1)^2, \quad (\,\cdot\,)' = d/dy. \qquad (14)$$

В качестве функциональных классов выбираются пространства Соболева вещественных $2\pi$-периодических функций $\mathscr{W}_2^k[0,2\pi]$ с $k \geq 1$, которые будем обозначать через $\mathscr{H}_{2\pi}^k$.

**Лемма 2.2** *Уравнение $A_0\phi = f_1$ с оператором $A_0$ из (14) и функцией $f_1(y)$ из пространства $\mathscr{H}_{2\pi}^k$ имеет $2\pi$-периодическое решение $\phi(y) \in \mathscr{H}_{2\pi}^{k+2}$, если и только если функция $f_1$ удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int_0^{T_0} f_1(s)\cos s\,ds = 0, \qquad \int_0^{T_0} f_1(s)\sin s\,ds = 0. \qquad (15)$$

*Если равенства (15) выполнены, то все $2\pi$-периодические решения $\phi$*

*определяются выражением* $\phi = \kappa_1 \cos y + \kappa_2 \sin y + \mathcal{G}_0 f_1(y)$, $\xi_1,\xi_2 \in \mathscr{R}$, *с оператором Грина* $\mathcal{G}_0$ *неоднородного уравнения. При этом верна оценка*

$$\|\mathcal{G}_0 f_1\|_{\mathscr{H}^{k+2}_{2\pi}} \le C_5 \|f_1\|_{\mathscr{H}^{k}_{2\pi}}.$$

Таким образом, линейный оператор $A_0 : \mathscr{H}^{k+2}_{2\pi} \to \mathscr{H}^{k}_{2\pi}$ является фредгольмовым с двумерным ядром $\operatorname{Ker} A_0 = \{\cos y, \sin y\}$. В данной ситуации схема редукции системы уравнений разветвления опирается на свойство инвариантности ядра оператора $A_0$. А именно, исходное уравнение (12) является автономным, а значит мы можем положить фазовый сдвиг $\nu_* = 0$ в главном порядке по $\delta$. Кроме того, линейный оператор $A_0$ коммутирует с представлением группы $T_g\phi(y) = \phi(y+g)$. Таким образом, указанное представление $T_g$ индуцирует представление компактной группы Ли $SO(2)$, которое действует 1-стационарно в пространстве параметров $\kappa = (\kappa_1,\kappa_2) \in \mathscr{R}^2$ в том смысле, что любой вектор плоскости $\mathscr{R}^2$ можно повернуть так, чтобы он оказался строго на одной из осей. Таким образом, все малые решения уравнения (13) можно представить в виде орбиты $\phi_1(y) = T_g\Big\{|\kappa|\cos y + \sigma_0(y;|\kappa|,\varrho,\mu_*,\delta)\Big\}$ с произвольным $g \in [0,2\pi]$. В качестве представителя этой орбиты без ограничения общности можно взять элемент с $g = 0$. Заметим далее, что оператор $R_0$ является также инвариантным относительно группы растяжений:

$$L_a R_0\big(|\kappa|\cos y + \sigma_0; \varrho,\mu_*,\delta\big) = R_0\big(L_a(|\kappa|\cos y + \sigma_0); L_{a/2}\varrho, L_{a/2}\mu_*, L_{-a/2}\delta\big),$$

где $L_a\varphi = e^a\varphi$. Инвариантами данной группы являются

$$y = y, \quad \gamma = \delta\mu_*, \quad \varrho_* = \delta\varrho, \quad \kappa_* = \delta^2|\kappa|, \quad \hat{\sigma}_0 = \sigma_0(\varrho + \delta|\kappa|)^{-2}. \qquad (16)$$

Отсюда следует, что отображение $\sigma_0$ может быть представлено в инвариантном виде $\sigma_0 = (\varrho + \delta|\kappa|)^2\hat{\sigma}_0$, где $\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_0(y;\gamma,\varkappa)$ с параметром $\varkappa = \varrho_* + \kappa_*$. Таким образом, система уравнений разветвления сводится к одному уравнению, связывающему параметры $\gamma_* = \gamma\varkappa^{-1}$ и $\varkappa$:

$$\gamma_* - \frac{15}{8}\varkappa + \frac{19}{32}\gamma_*\varkappa^2 - \frac{1755}{512}\varkappa^3 + \ldots = 0.$$

В итоге, принимая во внимание формулу (13) для частоты $\mu = \mu(\varkappa)$, окончательно получаем выражение для решения $u_0$

$$u_0(t;\varkappa) = \frac{2}{3} + \varkappa\cos(\mu t) + \varkappa^2\left\{\frac{1}{4}\cos(2\mu t) - \frac{3}{4}\right\} + \ldots, \qquad (17)$$

где параметр $\varkappa = \delta\varrho + \delta^2|\kappa|$ является инвариантом группы растяжений.

В **пункте 2.3.2** описывается схема ветвления для возмущенной системы (1). В этих уравнениях сделаем замену $\tau = \Omega t$, где частота $\Omega(\varkappa,\varepsilon)$ является аналитической функцией, причем $\Omega(\varkappa,0) = \mu(\varkappa)$. При $\varepsilon = 0$ имеем распавшуюся систему

$$\mu^2 u_0'' - u_0 + \frac{3}{2}u_0^2 = 0, \quad \mu^2 v_0'' - v_0 + \frac{3}{2}v_0^2 = 0,$$

решение которой при $\varkappa \to 0$ дается формулами (см. (12))

$$u_0(\tau;\varkappa) = \frac{2}{3} + \varkappa\phi_*(\tau;\varkappa), \quad v_0(\tau;\varkappa,\nu) = \frac{2}{3} + \varkappa\psi_*(\tau;\varkappa,\nu), \quad \psi_* = \phi_*(\tau+\nu). \tag{18}$$

Ищем решение в виде $w = 2/3 + \varkappa\theta_* + \varepsilon w_1$, где обозначено $\theta_* = (\phi_*,\psi_*)$ и $w_1 = (u_1,v_1)$. Далее переписываем (1) в эквивалентном операторном виде, выделив линейную часть на решении $w_0$ при $\varkappa = \varepsilon = 0$:

$$\mathbb{A}_0 w_1 = -\frac{2}{3} - \varkappa\varepsilon^{-1}\mathbb{A}_0\theta_* + \varepsilon^{-1}\hat{\mathbb{R}}\Big(\frac{2}{3} + \varkappa\theta_* + \varepsilon w_1; \varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu\Big), \tag{19}$$

$$\hat{\mathbb{R}}(w;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu) = (1-\Omega^2)w'' + 2w - \frac{3}{2}w^2 + \varepsilon\nabla_w\Phi(w;\varepsilon) \tag{20}$$

Здесь $w^2 = (u^2,v^2)$, $\nabla_w = (\partial_u,\partial_v)$, а линейный оператор имеет вид $\mathbb{A}_0 = (A_0,A_0)$ с $A_0$ из (14). Обозначим $\mathscr{E}_{2\pi} = \mathscr{H}^{k+2}_{2\pi} \times \mathscr{H}^{k+2}_{2\pi}$ и $\mathscr{F}_{2\pi} = \mathscr{H}^{k}_{2\pi} \times \mathscr{H}^{k}_{2\pi}$. По лемме 2.2 оператор $\mathbb{A}_0 : \mathscr{E}_{2\pi} \to \mathscr{F}_{2\pi}$ является фредгольмовым с четырехмерным инвариантным ядром, порожденным векторами

$$e_1 = (\cos\tau,0), \quad e_2 = (\sin\tau,0), \quad e_3 = (0,\cos(\tau+\nu)), \quad e_2 = (0,\sin(\tau+\nu)).$$

Тогда решение можно представить в виде $w_1 = \varrho_1 e_1 + \varrho_2 e_3 + \sigma(\varrho_1,\varrho_2;\varkappa,\varepsilon,\Omega,\nu)$. Система уравнений разветвления выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\beta_1(\Xi) =& \varkappa a_1(\nu) + \varkappa\Omega_* + b_1\varepsilon\varrho_1 + \varepsilon\varrho_2\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varepsilon\varkappa a_2(\nu) \\
&+ \varkappa g_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\
\beta_2(\Xi) =& -\sin\nu\left(\varkappa\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varrho_2\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varkappa b_2\right) \\
&+ \varkappa g_2(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_2(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\
\beta_3(\Xi) =& \varkappa a_3(\nu) + \varkappa\Omega_* + b_3\varepsilon\varrho_2 + \varepsilon\varrho_1\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varepsilon\varkappa a_4(\nu) \\
&+ \varkappa g_3(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_3(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0, \\
\beta_4(\Xi) =& \sin\nu\left(\varkappa\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varrho_1\Phi^0_{uv} + \varepsilon\varkappa b_4\right) \\
&+ \varkappa g_4(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa) + \varepsilon h_4(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_*,\varkappa,\varepsilon) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\Phi^0_{uv} = \Phi_{uv}(2/3{,}2/3{,}0)$. Функции $g_i$ и $h_i$, разложения которых начинаются с квадратичных членов, обозначают остатки соответствующих рядов, коэффициенты $b_i$ являются постоянными, а $a_i$ зависят от фазы $\nu$. Структура уравнений $\beta_2 = 0$ и $\beta_4 = 0$ такова, что если параметр $\nu$ является корнем уравнения $\sin\nu = 0$, то они удовлетворяются тождественно. Далее, за счет косимметрического тождества уравнения в системе (21) оказываются линейно зависимыми. Следовательно, мы можем исключить, например, уравнение $\beta_3(\Xi) = 0$. Заметим теперь, что если представить искомый параметр $\Omega_*$ в виде $\Omega_* = \Omega_0 - \varepsilon a_2(\nu) + \varepsilon\Omega_{**}$, то уравнение $\beta_1(\Xi) \overset{def}{=} \varkappa\Theta_1 + \varepsilon\Theta_2 = 0$ сводится к следующей системе:

$$\Theta_1 \overset{def}{=} a_1(\nu) + \Omega_0 + g_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\varkappa) = 0, \tag{22}$$

$$\Theta_2 \overset{def}{=} b_1\varrho_1 + \varrho_2\Phi^0_{uv}\cos\nu + \varkappa\Omega_{**} + h_1(\varrho_1,\varrho_2,\Omega_0,\Omega_{**},\varkappa,\varepsilon) = 0. \tag{23}$$

Таким образом, если $\nu = \pm\pi n$ ($n = 0,1,2,\ldots$), то уравнения $\beta_2(\Xi) = 0$ и $\beta_4(\Xi) = 0$ удовлетворяются тождественно. Следовательно из (22) по теореме о неявной функции можно выразить $\Omega_0$ через параметры $\varrho_1$, $\varrho_2$ и $\varkappa$. Наконец, подставляя $\Omega_0$ в (23), по теореме о неявной функции определяем $\varrho_2$ через остальные параметры.

Отметим, что, как и в случае кноидальных волн, параметры $\varrho_1$ и $\Omega_{**}$ остаются свободными, а функция Пуанкаре – Понтрягина – Мельникова принимает простой вид $\widetilde{\Psi}(\nu) = \sin\nu$. В итоге мы приходим к утверждению:

**Теорема 2.2** *Если фазовый параметр $\nu$ в формуле* (18) *принимает одно из значений $\nu = \pm\pi n$ ($n = 0,1,2,\ldots$), то при достаточно малых $\delta$ и $\varepsilon$ в классе $\mathscr{E}_{2\pi}$ существует гладкое $2\pi$-периодическое решение $w_1(\tau)$ операторного уравнения* (19).

Возвращаясь к исходной независимой переменной $t$, мы получаем существование гладкого $T(\varepsilon,\delta)$-периодического решения системы (1) вида $w = 2/3 + \varkappa(\delta)\theta_* + \varepsilon w_1$. Таким образом, даже в этом вырожденном случае простые корни функции $\widetilde{\Psi}$ гарантируют существование зацепленных волн. Ясно, что из всех этих корней интерес представляют только корни $\nu = 0$ (синфазная синхронизация мод периодических волн) и $\nu = \pi$ (сдвиг на половину периода).

Интересно заметить, что формальное разложение функции $\Psi(\nu)$ из

(10) по параметру $\varkappa$ приводит к соотношению

$$\Psi(\nu) = \pi\varkappa^2\Phi^0_{uv}\widetilde{\Psi}(\nu) + O(\varkappa^3).$$

Также необходимо отметить, что в наших рассуждениях предполагалось неравенство $\Phi^0_{uv} \neq 0$. В противном случае следует анализировать разложения уравнений разветвления в более высоких порядках.

**В третьей главе** получены бесконечные наборы трехмерных законов сохранения для пар коммутирующих двумерных цепочек Бенни и Михалева и их редукций. Кроме того, построены трехмерные законы сохранения для уравнения Хохлова – Заболоцкой.

**В параграфе 3.1** приводятся основные свойства цепочки Бенни, которая имеет вид

$$(A_0)_t = (A_1)_x\,, \quad (A_k)_t = (A_{k+1})_x + kA_{k-1}\,(A_0)_x\,, \quad k = 1,2,\ldots. \qquad (24)$$

Указан способ построения иерархии коммутирующих цепочек, первая из них записывается в виде

$$(A_0)_y = (A_2)_x + A_0(A_0)_x + A_0(A_0)_x, \qquad (25)$$

$$(A_k)_y = (A_{k+2})_x + A_0(A_k)_x + (k+1)A_k(A_0)_x + kA_{k-1}(A_1)_x, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Также приведено производящее уравнение двумерных законов сохранения для всей иерархии Бенни. При этом консервативные переменные $H_k$ связаны с моментами $A_k$ уравнением $\lambda(x,t;p(x,t;\lambda)) = \lambda$, где функции $\lambda(x,t;p)$ и $p(x,t;\lambda)$ определяются формальными степенными рядами

$$\lambda(x,t;p) = p + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(x,t)}{p^{k+1}}, \quad p(x,t;\lambda) = \lambda - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x,t)}{\lambda^{k+1}}, \qquad (26)$$

**Пункт 3.1.1** посвящен построению трехмерных законов сохранения вида

$$(a_k(H_0,\ldots,H_k))_y + (b_k(H_0,\ldots,H_k,H_{k+1}))_t + (c_k(H_0,\ldots,H_k,H_{k+1}))_x = 0$$

для первых двух коммутирующих цепочек Бенни, записанных в консервативной форме:

$$p_t = \left(\frac{1}{2}p^2 + H_0\right)_x, \quad p_y = \left(\frac{1}{3}p^3 + H_0p + H_1\right)_x. \qquad (27)$$

**Теорема 3.1** *Производящее уравнение трехмерных законов сохранения для первых двух коммутирующих цепочек Бенни имеет вид*

$$\Big((p(\lambda)-p(\zeta))^3\Big)_y - \Big((p(\lambda)-p(\zeta))^3(p(\lambda)+p(\zeta))\Big)_t \tag{28}$$

$$+\left((p(\lambda)-p(\zeta))^3\left(\frac{1}{5}p^2(\lambda)+\frac{3}{5}p(\lambda)p(\zeta)+\frac{1}{5}p^2(\zeta)-H_0\right)\right)_x = 0,$$

*где* $p(\lambda)$ *определяется соответствующим рядом из* (26), *а производные* $p_y$ *и* $p_t$ *вычисляются по формулам* (27)

В **пункте 3.1.2** строятся трехмерные законы сохanения для уравнения Хохлова – Заболоцкой

$$\Omega_{xy} = \Omega_{tt} + \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2.$$

Доказано, что указанное уравнение допускает десять трехмерных законов сохранения, плотности и токи которых зависят только от вторых производных функции $\Omega$. Кроме того, если определить функцию $\Omega$ так, чтобы $\Omega_{xx} = H_0$, $\Omega_{xt} = H_1$, $\Omega_{xy} = H_2$, то оставшиеся вторые производные также можно выразить через плотности $H_k$:

$$\Omega_{yt} = H_3 - H_0H_1, \quad \Omega_{yy} = \frac{1}{3}H_0^3 - H_0H_2 - H_1^2 + H_4.$$

И тогда становится видно, что законы сохранения, допускаемые уравнением Хохлова – Заболоцкой совпадают с первыми десятью законами сохранения для пары коммутирующих цепочек (27).

В **пункте 3.1.3** строятся трехмерные законы сохранения гидродинамических редукций пары коммутирующих цепочек Бенни (24), (25) вида

$$u_{it} = \left(\frac{1}{2}u_i^2 + A_0(u)\right)_x, \; u_{iy} = \left(\frac{1}{3}u_i^3 + A_0(u)u_i + A_1(u)\right)_x \quad i = 1,\ldots,N. \tag{29}$$

Здесь функция $A_0(u)$ удовлетворяет системе Гиббонса – Царева

$$(u_i - u_k)\frac{\partial^2 A_0}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial A_0}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial A_0}{\partial u_j}\right) - \frac{\partial A_0}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial A_0}{\partial u_j}\right), \quad i \neq k, \tag{30}$$

а функция $A_1$ находится из цепочки Бенни (24). В качестве примера рассматривается “waterbag” редукция:

$$A_k(u) = \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m (u_m)^{k+1}, \quad \sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m = 0, \tag{31}$$

где $\varepsilon_k$ произвольные постоянные. Подстановка указанных выражений в ряд (26) приводит к уравнению Римановой поверхности, ассоциированной с парой коммутирующих систем (29) при выполнении равенств (31):

$$\lambda = p - \sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m \ln(p - u_m). \tag{32}$$

Таким образом, пара коммутирующих двумерных систем гидродинамического типа (29), допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения (28), где зависимость $p(\lambda)$ устанавливается из (32).

**В параграфе 3.2** приводятся основные свойства цепочки Михалева, которая имеет вид производящего уравнения двумерных законов сохранения

$$p_t = \Big((\lambda - u)p\Big)_x, \qquad p(\lambda) = 1 + \frac{\sigma_1}{\lambda} + \frac{\sigma_2}{\lambda} + \ldots. \tag{33}$$

Указан способ построения иерархии коммутирующих цепочек, первая из них записывается в виде

$$p_y = \Big((\lambda^2 - \lambda u - v)p\Big)_x. \tag{34}$$

После подстановки ряда $p(\lambda)$ из (33) в производящие уравнения из (33) и (34) получаем равенства $u = \sigma_1$, $v = \sigma_2 - \sigma_1^2$ и бесконечный набор двумерных законов сохранения:

$$\big(\sigma_k\big)_t = \Big(\sigma_{k+1} - \sigma_1\sigma_k\Big)_x, \ \ \big(\sigma_k\big)_y = \Big(\sigma_{k+2} - \sigma_1\sigma_{k+1} + \big(\sigma_1^2 - \sigma_2\big)\sigma_k\Big)_x. \tag{35}$$

**Пункт 3.2.1** посвящен построению трехмерных законов сохранения для первых двух коммутирующих цепочек Михалева.

**Теорема 3.2**: *Пара коммутирующих цепочек Михалева* (35) *допускает бесконечное число трехмерных законов сохранения*

$$\begin{gathered}\big(\sigma_k\sigma_m\big)_y + \Big(\sigma_1\sigma_k\sigma_m - \big(\sigma_k\sigma_{m+1} + \sigma_m\sigma_{k+1}\big)\Big)_t \qquad (36)\\ +\Big(\sigma_{k+1}\sigma_{m+1} - \sigma_1\big(\sigma_k\sigma_{m+1} + \sigma_m\sigma_{k+1}\big) + \sigma_2\sigma_k\sigma_m\Big)_x = 0, \ \ k{,}m = 1{,}2{,}\ldots\end{gathered}$$

В **Пункте 3.2.2** исследуются трехмерные законы сохранения уравнения Михалева, которое получается из иерархии Михалева путем введения потенциала $w$:

$$w_{xy} = w_{tt} + w_x w_{xt} - w_t w_{xx}.$$

Показано, что это уравнение допускает четыре закона сохранения, плотности и токи которых зависят только от производных функции $w$.

**Пункт 3.2.3** посвящен построению трехмерных законов сохранения для класса гидродинамических редукции, который носит название $\varepsilon$-систем:

$$r_{it} = \Big(r_i - u\Big) r_{ix}, \quad r_{iy} = \Big(r_i^2 - u r_i - v\Big) r_{ix}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{37}$$

где ($\varepsilon_i$ — произвольные постоянные)

$$u = \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m, \quad v = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m^2 - \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m r_m \right)^2 .$$

Производящая функция плотностей двумерных законов сохранения $p(\lambda) \equiv p(\lambda; r)$ находится в квадратурах напрямую из пары производящих уравнений (33), (34):

$$p(\lambda) = \prod_{m=1}^{N} (\lambda - r_m)^{-\varepsilon_m}.$$

откуда находятся все коэффициенты $\sigma_k$.

В **Пункте 3.2.4** рассматривается частный случай системы (37), когда все $\varepsilon_i = 1$.

В **Пункте 3.2.5** построены трехмерные законы сохранения для пары коммутирующих уравнений иерархии Кортевега – де Фриза:

$$u_t = \left( -\frac{3}{2} u^2 + \epsilon^2 u_{xx} \right)_x, \quad u_y = \left( \frac{5}{2} u^3 - \frac{5}{2} \epsilon^2 u_x^2 - 5 \epsilon^2 u u_{xx} + \epsilon^4 u_{xxxx} \right)_x, \tag{38}$$

которая является дисперсионной редукцией пары уравнений (33), (34), в которых $v = -3u^2/2 + \epsilon^2 u_{xx}$. В этом случае коэффициенты $\sigma_k = \sigma_k(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ находятся из уравнения

$$\epsilon^2 \big(p^{-1}(\lambda)\big)_{xxx} = (\lambda + 2u) \big(p^{-1}(\lambda)\big)_x + p^{-1}(\lambda) u_x. \tag{39}$$

Автор выражает искреннюю благодарность своим учителям: д.ф.-м.н. Николаю Ивановичу Макаренко и к.ф.-м.н. Максиму Валентиновичу Павлову за постановку задач и активное внимание к работе.

## Публикации автора по теме диссертации


1. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Synchronization of traveling waves in a dispersive system of weakly coupled equations // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2016. — Vol. 722, no. 1. — P. 012028.

2. *Макаренко Н. И., Макридин З. В.* Периодические колебания и волны в нелинейных слабо связанных системах с дисперсией // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова.* — 2018. — Т. 300. — С. 158–167.

3. *Макридин З. В.* Эффективный алгоритм нахождения многомерных законов сохранения для интегрируемых систем гидродинамического типа // *Теоретическая и математическая физика.* — 2018. — Т. 194, № 2. — С. 320–330.

4. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Bifurcation of periodic solutions to nonlinear dispersive systems with symmetry and cosymmetry // AIP Conference Proceedings. — Vol. 2153. — 2019. — P. 020011.

5. *Makridin Z. V., Pavlov M. V.* Multi-dimensional conservation laws and integrable systems // *Studies in Applied Mathematics.* — 2019. — Vol. 143, no. 4. — P. 339–355.

6. *Makridin Z. V., Pavlov M. V.* Multi-dimensional conservation laws and integrable systems II // *Studies in Applied Mathematics.* — 2022. — Vol. 148, no. 2. — P. 813–824.

7. *Макридин З. В., Макаренко Н. И.* Синхронизация бегущих волн в диспергирующих системах, близких к распавшимся // Тез. докл. всерос. конф. “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, г. Новосибирск. — 29 февраля – 2 марта 2016 г. — С. 71.

8. *Makridin Z. V.* Multi-dimensional conservation laws for intergable systems // Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena: 50 years of IST. Conference abstracts. Gallipoli, Italy. — 17–24 June 2017. — P. 21.

9. *Makridin Z. V., Pavlov M. V.* Multi-dimensional conservation laws for intergable systems // Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications. Conference abstracts. Nakhon Ratchasima, Thailand. — 14–18 January 2019. — P. 31.

10. *Makarenko N. I., Makridin Z. V.* Bifurcation of periodic solutions to nonlinear dispersive systems with symmetries // Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications. Conference abstracts. Nakhon Ratchasima, Thailand. — 14–18 January 2019. — P. 30.

11. *Макридин З. В., Макаренко Н. И.* Периодические волны в нелинейных слабосвязанных системах с дисперсией // Тез. докл. всерос. конф. "Математические проблемы механики сплошных сред", г. Новосибирск. — 13–17 мая 2019 г. — С. 130.

12. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Periodic waves in a system of weakly coupled KDV-type equations // Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives. Conference abstracts. Yaroslavl, Russia. — 5–9 August 2019. — P. 94.

13. *Makridin Z. V., Makarenko N. I.* Synchronization of traveling waves in coupled dispersive systems // EGU General Assembly. Abstracts. Vienna, Austria. — 4–8 May 2020 (Online). — P. 7455.

| | |
|---|---|
| Подписано в печать 27.04.2022 г. | Заказ № 303 |
| Формат бумаги 60×84 1/16 | Объем 1.4 п.л. |
| Тираж 100 экз. | Бесплатно |

Отпечатано на полиграфическом участке ИГиЛ СО РАН

630090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 15