На правах рукописи

Фанкина Ирина Владимировна

Краевые задачи о равновесии двуслойных конструкций с включениями и трещинами

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Хлуднев Александр Михайлович**
Официальные оппоненты:	**Чеботарёв Александр Юрьевич,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской группы математического моделирования ФГБУН Институт прикладной математики ДВО РАН
	Вторушин Егор Владимирович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Новосибирского технологического центра компании Бейкер Хьюз
Ведущая организация:	ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 30 марта 2021 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, д.15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН http://www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ,
доктор физико-математических наук Рудой Е.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие конструкции, встречающиеся в практической деятельности, состоят из упругих тел, пластин и балок, соединенных между собой. При создании или эксплуатации в конструкциях могут возникать трещины. Наличие трещин в конструкции может существенно снизить показатели механических свойств изделия. Поэтому исследование математических моделей, описывающих деформирование конструкций с трещинами является актуальной проблемой.

Классический подход к моделированию трещин характеризуется тем, что на их берегах задаются линейные краевые условия. Использование в модели линейных краевых условий часто приводит к физически противоречивому явлению взаимного проникания противоположных берегов трещины. С такой точки зрения наиболее подходящими для описания поведения тел с трещинами являются модели с нелинейными условиями, представляющими собой систему равенств и неравенств и допускающими только контакт или расхождение берегов трещины, причем заранее область контакта неизвестна. Применение условий такого типа приводит к тому, что модель в целом становится нелинейной и относится к классу задач с неизвестной границей.

Последние десятилетия являются периодом интенсивного изучения краевых задач о равновесии упругих тел с трещинами при наличии условий непроникания. К настоящему моменту в работах А.М. Хлуднева, В.А. Ковтуненко, Е.М. Рудого, Н.П. Лазарева, Е.В. Пяткиной, Т.С. Поповой, Н.В. Неустроевой, Т.А. Ротановой, В.В. Щербакова, H. Itou, A. Tani, G. Leugering, M. Bach, J. Sokolowski, D. Knees и др. исследован широкий класс задач теории трещин в рамках моделей с неизвестными границами.

В недавней работе А.М. Хлуднева (2019) была рассмотрена модель для упругого тела с дефектом. Дефект описывается краевыми условиями непроникания, которые содержат положительный параметр повреждаемости: чем больше его значение, тем слабее трение и сцепление берегов дефекта, и наоборот. Когда параметр повреждаемости достигает одного из двух своих предельных значений, модель с нелинейными условиями, задаваемыми на дефекте, принимает вид модели с условиями непроникания, описывающими трещину; с этой точки зрения краевые условия, используемые для моделирования дефектов, являются более общими.

Основной **целью** диссертации является исследование свойств решений нелинейных краевых задач, описывающих равновесие двуслойных конструкций с трещинами и дефектами. Для достижения цели требовалось решить следующие **задачи**:

1. Установить существование решений задач равновесия двуслойных конструкций с трещинами и дефектами в смысле решений вариационных задач, эквивалентных на классе гладких функций краевым задачам.
2. Изучить предельные переходы в задачах равновесия по материальным и геометрическим параметрам, характеризующим конструкции. Обосновать возможность осуществления предельных переходов и получить формулировки предельных задач.
3. Исследовать задачи оптимального управления с целевым функционалом в виде производной функционала энергии конструкции по длине трещины (дефекта), в которых функциями управления являются материальные и геометрические параметры, характеризующие конструкции. Доказать теоремы о существовании решений задач оптимального управления.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, вариационного исчисления, теории пространств Соболева и оптимального управления. В частности, для достижения поставленной цели исследуются вариационные формулировки задач равновесия.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с трещиной, выходящей на внешнюю границу под нулевым углом: установлена разрешимость задачи; получены предельные задачи равновесия конструкций для случаев, когда параметр жесткости верхнего слоя устремляется к нулю и к бесконечности.
2. Для задачи равновесия двуслойной конструкции с жестким слоем при наличии трещины: осуществлен переход к пределу при стремлении параметра размера жесткого слоя к нулю; доказано существование решения задачи оптимального управления, в которой целевым функционалом является производная функционала энергии конструкции по длине трещины, а функцией управления выступает параметр размера верхнего слоя.
3. Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом вдоль линии соединения слоев: доказано существование решения задачи; осу-

ществлены предельные переходы при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности; выполнен переход к пределу в задаче по параметру жесткости верхнего слоя; в предельной задаче равновесия для конструкции с жестким верхним слоем проведен анализ поведения решения при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности.

4. Для задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину прямолинейного дефекта: доказана разрешимость задачи; осуществлены предельные переходы по параметру повреждаемости дефекта; проделаны переходы к пределу по параметру жесткости верхнего слоя; доказано существование решения в задаче оптимального управления, в которой функционал качества – производная функционала энергии конструкции по длине дефекта, функции управления – параметр повреждаемости дефекта и параметр жесткости верхнего слоя.

Научная новизна. В работе установлена разрешимость краевых задач с нелинейными граничными условиями, которые задаются на кривой и моделируют поведение берегов трещин при условии их непроникания друг в друга. Также проведен анализ зависимости решений задач равновесия от различных параметров, характеризующих геометрию и структуру конструкций. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, могут стать основой для дальнейшего теоретического и численного анализа задач.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается строгим математическим обоснованием и сравнением с результатами других авторов.

Апробация работы. Результаты, представляемые в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 11 научных конференциях: XI Всероссийская конференция молодых ученых “Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии” (Шерегеш, 2017); VII Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2017» (Томск, 2017); V Всероссийская конференция с международным участием “Полярная механика” (Новосибирск, 2018); Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», посвященная 90-летию со дня рождения академика Анатолия Семеновича Алексеева и 80-летию члена-корреспондента РАН Владимира Гавриловича Романова (Новосибирск, 2018); Международная школа-конференция "Соболевские чтения", посвященная 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2018); Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященная 100-летию академика Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред" (Новосибирск, 2019); Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова «Математика в приложениях» (Новосибирск, 2019); Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" (Novosibirsk, 2019); IX Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию Владимира Николаевича Врагова (Якутск, 2020); IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Новосибирск, 2020); The Second Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" - 20th Conference of Continuum Mechanics Focusing on Singularities (Novosibirsk-Tokyo, 2020).

Кроме того, результаты диссертации сообщались и обсуждались на научных семинарах под руководством д.ф.-м.н. Хлуднева А.М. (ИГиЛ СО РАН); чл.-корр. РАН Плотникова П.И. и д.ф.-м.н. Старовойтова В.Н. (ИГиЛ СО РАН); д.ф.-м.н. Блохина А.М. (ИМ СО РАН); на конкурсе научных работ молодых ученых ИГиЛ СО РАН.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Постановка задач, представленных в диссертации, была предложена научным руководителем.

Публикации. Содержание и результаты диссертационной работы отражены в 14 публикациях, из которых 4 работы – статьи [1–4] в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК; 11 публикаций – тезисы всероссийских и международных конференций [5–15].

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 80 наименований работ. Главы разделены на параграфы, параграфы – на разделы. Диссертация изложена на 101 странице текста и содержит 9 рисунков.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в диссертационной работе. Сформулированы цель и задачи работы, положения, выносимые на защиту; обозначены методы исследования, научная и практическая значимость. Приведен обзор научной литературы, близкой к теме диссертации. Представлены структура и краткое содержание работы.

В первой главе рассматривается задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с верхним слоем, приклеенным к нижнему по части края. В нижнем слое вдоль линии склейки имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым углом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, исключающие их взаимное проникание.

В параграфе 1.1 сформулирована задача равновесия в дифференциальном и вариационном виде. Пусть на плоскости слоям соответствуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ соответственно (рис. 1). Предполагается, что слои соединяются по линии, которой со-

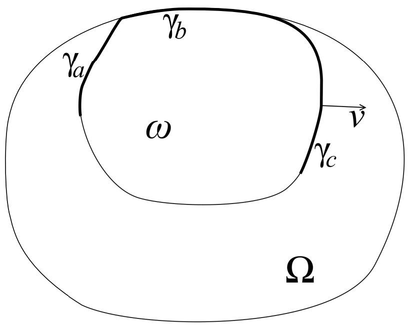

Рис. 1 — Геометрия конструкции на плоскости.

ответствует гладкая кривая γ, не имеющая самопересечений, $\overline{\gamma} \subset \overline{\Omega}$ и $\overline{\gamma} \subset \partial\omega$. Кривую можно представить в виде объединения $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b \cup \gamma_c$ таким образом, что на γ_a слои сцеплены, γ_b соответствует общей границе слоев, вдоль γ_c имеется трещина. Кроме того, считается, что кривая γ_c выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$ под нулевым углом. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к $\partial\omega$, $\tau = (\tau_1,\tau_2) = (-\nu_2,\nu_1)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяются положительный и отрицательный берега $\gamma^{\pm}$. Наличие трещины предполагается на положительном берегу γ_c. Введем обозначения $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$, $\Omega_{\gamma_c} = \Omega \setminus \overline{\gamma_c}$. Пусть $A = \{a_{ijkl}\}, B = \{b_{ijkl}\}$ – симметричные и положительно определенные тензоры модулей упругости слоев. Кроме того, $a_{ijkl} \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $b_{ijkl} \in L^{\infty}(\omega)$, $i,j,k,l = 1,2$.

Пусть $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ – горизонтальные смещения точек нижнего и верхнего слоя соответственно, $u_\nu = u_i\nu_i, i = 1,2$. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$ обозначим тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i})$, $i,j = 1,2$; при этом $w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ – частная производная по соответствующей пространственной переменной x_j. Введем также обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Кроме того, для $P \in \{\sigma,p\}$ верно: $P\nu = (P_{1j}\nu_j,P_{2j}\nu_j)$, $P_\nu = P_{ij}\nu_j\nu_i$, $P_\tau = P_{ij}\nu_j\tau_i$. Все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Запись $[w] = w^+ - w^-$ означает скачок функции на γ, где $w^\pm$ – следы функции w на берегах $\gamma^\pm$.

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции при наличии трещины под действием заданных внешних сил $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ имеет следующий вид. Требуется найти такие функции $u = (u_1,u_2)$, $v = (v_1,v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i,j = 1,2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \;\; \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_{\gamma_c}, \tag{1}$$

$$-\operatorname{div} p = g \quad \text{в} \quad \omega, \;\; p = B\varepsilon(v) \quad \text{в} \quad \omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \gamma, \;\; p\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \setminus \gamma, \tag{3}$$

$$u = v \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b, \;\; [\sigma\nu] = p\nu \quad \text{на} \quad \gamma_a, \;\; -\sigma\nu = p\nu \quad \text{на} \quad \gamma_b, \tag{4}$$

$$u^- = v, \;\; [u_\nu] \geq 0, \;\; \sigma_\nu^+ \leq 0, \;\; \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0, \;\; \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c, \tag{5}$$

$$[\sigma_\nu] = p_\nu, \;\; -\sigma_\tau^- = p_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_c. \tag{6}$$

Соотношения в (1), (2) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для слоев. Условия в (3) описывают поведение внешнего края нижнего и верхнего слоев вне линии склейки. Равенства в (4) соответствуют склейке слоев и совпадению усилий в слоях на линии склейки $\gamma_a \cup \gamma_b$. Второе условие в (5) обеспечивает непроникание берегов трещины $\gamma_c^\pm$ друг в друга. Условия в (6) означают равенство нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих со стороны слоев на линии склейки γ_c.

Определим множество допустимых перемещений:

$$K = \{(\bar{u},\bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega\setminus\gamma}(\Omega_{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2 | \\ \bar{u} = \bar{v} \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b; \bar{u}^- = \bar{v}, \, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c\}.$$

Здесь и далее обозначение $\bar{u} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ означает, что функция $\bar{u}$ принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega)$ и $\bar{u} = 0$ на Γ. Задачу равновесия двуслойной конструкции с трещиной можно записать в вариационном виде:

$$\text{Найти такую} \quad (u,v) \in K, \quad \text{что} \tag{7}$$

$$\int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u}-u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v}-v) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v}-v) \geq 0$$

$$\text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{v}) \in K. \tag{8}$$

Теорема 1.1. *Дифференциальная задача* (1)-(6) *эквивалентна вариационной задаче* (7), (8) *на классе гладких функций.*

В параграфе 1.2 для задачи доказано существование решения. В связи с негладкостью границы области Ω_{γ_c} не удается установить разрешимость задачи равновесия, обращаясь к ее формулировке в виде задачи минимизации функционала энергии. Доказательство разрешимости задачи равновесия основано на методе фиктивных областей. Добавим фиктивную область Ω' с липшицевой границей $\partial\Omega'$ так, чтобы продолжение кривой γ_c разбивало полученную область $\Omega \cup \Omega' \cup int\Sigma$, $\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\Omega'$, на две подобласти D_1 и D_2 с липшицевыми границами ∂D_i, $\partial D_i \cap \partial\Omega^\gamma \neq \emptyset$, $\partial\Omega^\gamma = \partial\Omega \cup \partial\Omega' \setminus (\gamma \cup int\Sigma)$, $i = 1,2$. Важно, что $\partial\Omega' \cap \gamma_b = \emptyset$. Введем обозначения $\Omega^{\gamma_c} = \Omega_{\gamma_c} \cup \Omega' \cup int\Sigma$, $\Omega^\gamma = \Omega_\gamma \cup \Omega' \cup int\Sigma$. Пусть модули упругости a^λ_{ijkl} в области Ω^{γ_c} зависят от малого положительного параметра λ и имеют вид

$$a^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в} \ \ \Omega, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в} \ \ \Omega'. \end{cases}$$

Вариационная задача равновесия двуслойной конструкции, которой соответствует область $\Omega \cup \Omega' \cup int\Sigma$, при каждом $\lambda \in (0,\lambda_0)$ формулируется следующим образом:

$$\text{Найти такую} \quad (u^\lambda,v^\lambda) \in \bar{K}, \text{ что} \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(u^\lambda)\varepsilon(\bar u - u^\lambda) - \int\limits_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar u - u^\lambda) + \int\limits_{\omega} p(v^\lambda)\varepsilon(\bar v - v^\lambda) - \int\limits_{\omega} g(\bar v - v^\lambda) \geq 0$$

$$\text{для всех} \quad (\bar u,\bar v) \in \bar K, \quad (10)$$

при этом множество $\bar K$ имеет вид:

$$\bar K = \{(\bar u,\bar v) \in H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega^{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2)| \\ \bar u = \bar v \quad \text{на} \quad \gamma_a \cup \gamma_b; \bar u^- = \bar v,\ [\bar u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c\}.$$

Справедливы следующие леммы:

Лемма 1.1. *Задача* (9), (10) *имеет единственное решение.*

Лемма 1.2. *В семействе задач типа* (9), (10) *можно осуществить предельный переход при* $\lambda \to 0$.

Получаемая задача при переходе к пределу по параметру λ в семействе задач типа (9), (10) совпадает с задачей (7), (8). Также верно следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Решение задачи* (7), (8) *единственно.*

Тогда в силу теоремы 1.1 и лемм 1.1, 1.2, 1.3 выполняется теорема:

Теорема 1.2. *Существует единственное решение вариационной задачи равновесия* (7), (8). *При условии достаточной гладкости решение* (7), (8) *будет решением задачи* (1)-(6).

В параграфе 1.3 проведен анализ поведения решения задачи равновесия при стремлении параметра, характеризующего жесткость верхнего слоя, к нулю и к бесконечности. Предполагается, что тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от положительного параметра $\delta :\ B_\delta = \{\delta^{-1} b_{ijkl}\}$. Для осуществления в задаче равновесия предельного перехода по параметру δ область Ω расширяется до области $\Omega \cup \Omega' \cup int\Sigma$ аналогично способу в параграфе 1.2. При этом тензор модулей упругости $A_\delta = \{a^\delta_{ijkl}\}$ в расширенной области зависит от параметра δ следующим образом: для случая, когда $\delta \to 0$, модули упругости в фиктивной области Ω' задаются в виде $a^\delta_{ijkl} = \delta^{-1} a_{ijkl}$; для случая, когда $\delta \to \infty$, предполагается, что $a^\delta_{ijkl} = \delta\, a_{ijkl}$ в Ω'. В параграфе обоснованы переходы к пределу в задаче равновесия при стремлении параметра жесткости верхнего слоя к нулю и к бесконечности, а также получены формулировки предельных задач.

Во второй главе изучается задача о равновесии двуслойной конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев. В упругом слое предполагается наличие трещины, проходящей вдоль линии, по которой соединяются части конструкции.

В параграфе 2.1 приводятся дифференциальная и вариационная постановки задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, соответствующая упругому слою. Предполагается, что $\gamma_{l'}$ – гладкая кривая без самопересечений, $\bar{\gamma}_{l'} \subset \Omega$ и $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}_{l'}$; кривая $\gamma_{l'}$ соответствует трещине в упругой части конструкции. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается нормаль единичной длины к $\gamma_{l'}$; $(\tau_1,\tau_2) = (-\nu_2,\nu_1)$ – касательный вектор. Направлением нормали ν определяются положительный и отрицательный берега трещины. Кривая $\gamma_{l'}$ представима в виде объединения $\gamma_{l'} = \gamma_l \cup \gamma_m$. Составляющая γ_m соответствует прямолинейной части трещины, $\gamma_m = (l,l') \times \{0\}$. Кривая γ_l соответствует линии контакта между слоями, $\gamma_l = \{(x_1,x_2) :\ x_1 \in (0,l),\ x_2 = q(x_1)\}$, где $q(x_1) \in C^{1,1}(0,l)$. Полагаем, что на γ_l отслоение имеется только на положительном берегу. Жесткому слою соответствует ограниченная область $\omega^\delta = \{(x_1,x_2) :\ x_1 \in (0,l),\ q(x_1) - \delta < x_2 < q(x_1)\}$, параметр δ характеризует размер жесткого слоя и меняется в пределах полуинтервала $(0,\delta_0]$. При любом $\delta \in (0,\delta_0]$ граница области $\partial\omega^\delta$ является липшицевой и $\gamma_l \subset \partial\omega^\delta$, а также $\omega^\delta \subset \omega^{\delta_0}$. Внешняя нормаль единичной длины к $\partial\omega^\delta$ на γ_l совпадает с нормалью к $\gamma_{l'}$, обозначим ее также через ν. На рис. 2 приводится геометрия конструкции в плоскости Ox_1x_2. Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$ – тензор модулей упругости нижнего слоя, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности. Кроме того, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$.

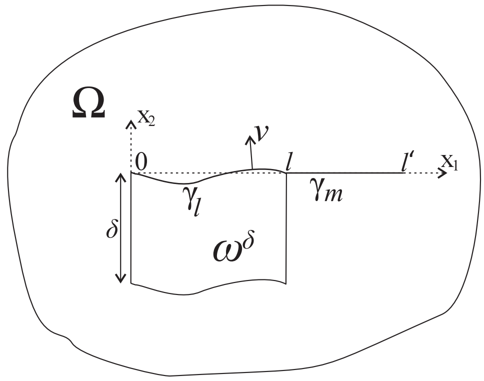

Рис. 2 — Геометрия конструкции на плоскости.

Задача равновесия для двуслойной конструкции с трещиной под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega^\delta)^2$ при каждом фиксированном $\delta \in (0, \delta_0]$ заключается в следующем. Требуется найти такие функции $u^\delta = (u_1^\delta, u_2^\delta)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u^\delta)\}$, $i{,}j = 1{,}2$, $\rho^\delta \in R(\omega^\delta)$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \;\; \sigma - A\varepsilon(u^\delta) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{11}$$

$$u^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \;\; u^{\delta -} = \rho^\delta \quad \text{на} \quad \gamma_l, \tag{12}$$

$$[u_\nu^\delta] \geq 0, \;\; \sigma_\tau^+ = 0, \;\; \sigma_\nu^+ \leq 0, \;\; \sigma_\nu^+[u_\nu^\delta] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_{l'}, \tag{13}$$

$$\sigma_\tau^- = 0, \;\; [\sigma_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_m, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\gamma_l} [\sigma\nu]\varrho + \int\limits_{\omega^\delta} g\varrho = 0 \quad \text{для всех} \quad \varrho \in R(\omega^\delta), \tag{15}$$

где $R(\omega^\delta)$ – пространство инфинитезимальных жестких перемещений на ω^δ:

$$R(\omega^\delta) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \\ \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1{,}c_2), \;\; x = (x_1{,}x_2) \in \omega^\delta; \;\; b, c_1, c_2 = \text{const}\}.$$

Соотношения в (11) – уравнения равновесия и обобщенный закон Гука для упругого слоя конструкции. Первое равенство в (12) соответствует закреплению нижнего слоя по внешнему краю; во втором условии задается структура перемещений на отрицательном берегу γ_l. Равенства и неравенства в (13) и (14) – условия, которые описывают трещину с учетом непроникания противоположных берегов. Условие (15) обеспечивает равновесие жесткого слоя конструкции.

Вариационная формулировка задачи равновесия имеет вид:

$$\text{Найти такую} \quad (u^\delta{,}\rho^\delta) \in K_\delta, \quad \text{что} \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(v - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(v - u^\delta) - \int\limits_{\omega^\delta} g(\varrho - \rho^\delta) \geq 0 \\ \text{для всех} \quad (v{,}\varrho) \in K_\delta, \tag{17}$$

где множество K_δ следующее:

$$K_\delta = \{(v, \varrho) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega^\delta) | \; [v_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_{l'}, \;\; v^- = \varrho \quad \text{на} \quad \gamma_l\}.$$

В параграфе 2.2 исследован случай, когда параметр δ, характеризующий размер верхнего слоя, стремится к нулю. Обоснована возможность осуществления предельного перехода в семействе задач типа (16), (17) при $\delta \to 0$ и получены вариационная и дифференциальная формулировки предельной задачи равновесия.

В параграфе 2.3 рассмотрена задача оптимального управления, в которой функционалом качества является производная функционала энергии конструкции по длине трещины, а функцией управления – параметр, характеризующий размер жесткого слоя. В этом параграфе предполагается, что $f \in C^1(\overline{\Omega})^2$ и модули упругости a_{ijkl} – постоянные. При $\delta \in [0,\delta_0]$ производная функционала энергии по длине трещины имеет вид:

$$G(\delta) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma} \theta_{,1} \varepsilon_{ij}(u^\delta) \sigma_{ij}(u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} u^\delta_{i,1} \theta_{,j} \sigma_{ij}(u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u^\delta_i,$$

при этом функция θ – гладкая функция, причем $\theta = 1$ в достаточно малой окрестности вершины трещины $(l',0)$, а вне этой окрестности $\theta = 0$. Значение $G(\delta,\lambda)$ не зависит от выбора функции θ.

В соответствии с критерием разрушения Гриффитса трещина в упругом слое начнет развиваться, когда производная функционала энергии по длине трещины достигнет критического значения κ (заданный параметр, определяемый свойствами материала). При каждом $\delta \in [0,\delta_0]$ выполняется неравенство $G(\delta) \leq 0$. Также параметр $\kappa < 0$, поэтому в рамках выбранного подхода задача нахождения оптимального параметра δ имеет вид:

$$\text{Найти} \quad \delta^\star \in [0,\delta_0] \quad \text{так, что} \quad G(\delta^\star) = \sup_{\delta \in [0,\delta_0]} G(\delta). \tag{18}$$

Тот факт, что такое значение $\delta^\star$ найдется, формулируется в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Задача оптимального управления* (18) *имеет решение.*

В третьей главе рассматривается задача равновесия двуслойной конструкции с дефектом. Слои склеены по заданной линии. Для верхнего слоя линия склейки является частью края. В нижнем слое вдоль линии соединения имеется дефект. На берегах дефекта задаются нелинейные краевые условия, содержащие параметр повреждаемости.

В параграфе 3.1 сформулирована задача равновесия и с помощью вариационного подхода установлена ее разрешимость. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – области, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 3). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Гладкая кривая γ не имеет самопересечений и соответствует линии соединения слоев, $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\overline{\gamma} \subset \partial\omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$. Через $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$, $(\tau_1,\tau_2) = (-\nu_2,\nu_1)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяется знак берега $\gamma^\pm$. Считается, что вдоль γ^+ в нижнем слое имеется дефект, который характеризуется параметром повреждаемости δ, $\delta \in (0,\infty)$. Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ и $B = \{b_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$ – тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности. Кроме того, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), b_{ijkl} \in L^\infty(\omega)$.

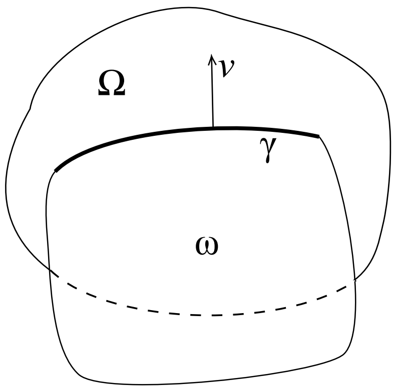

Рис. 3 — Геометрия конструкции на плоскости.

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом. Требуется найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2), \sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i,j = 1,2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \;\; \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{19}$$

$$-\operatorname{div} p = g, \;\; p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \tag{20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \;\; p\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \setminus \gamma, \tag{21}$$

$$u^- = v, \;\; [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{22}$$

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau], \;\; \sigma_\nu^+ \leq \frac{1}{\delta}[u_\nu], \;\; \left(\sigma_\nu^+ - \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{23}$$

$$\sigma_\nu^- + p_\nu = \sigma_\nu^+, \;\; \sigma_\tau^- + p_\tau = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{24}$$

Соотношения в (19), (20) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для слоев. Первое условие в (22) обеспечивает склейку слоев на γ^-, а второе – непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Ограничения в (23) задают связь между нормальными и касательными составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ. Условия в (24) соответствуют равенству нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих на линии соединения слоев.

Задачу равновесия двуслойной конструкции можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала энергии конструкции:

$$\inf_{(\bar u,\bar v)\in K^e} \Big\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar u)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar u + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} p(\bar v)\varepsilon(\bar v) - \int\limits_{\omega} g\bar v + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma}[\bar u]^2\Big\}, \tag{25}$$

где

$$K^e = \{(\bar u,\bar v) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 |\; \bar u^- = \bar v,\, [\bar u_\nu] \ge 0 \quad \text{на} \quad \gamma\}.$$

Слагаемое $\frac{1}{2\delta}\int\limits_\gamma [\bar u]^2$ отвечает за работу сил сцепления берегов дефекта. Поскольку функционал энергии является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу на слабо замкнутом множестве K^e рефлексивного банахова пространства, решение (u,v) задачи (25) существует и удовлетворяет вариационному неравенству:

$$\text{Найти такую} \quad (u,v) \in K^e, \quad \text{что} \tag{26}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar u - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar v - v) - \int\limits_{\omega} g(\bar v - v) +$$

$$+ \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u][\bar u - u] \ge 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u,\bar v) \in K^e. \tag{27}$$

Теорема 3.1. *Формулировки* (19)-(24) *и* (26)-(27) *задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом эквивалентны на классе гладких решений.*

В параграфе 3.2 осуществлен предельный переход в задаче при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности. Получены дифференциальные формулировки соответствующих предельных задач.

В параграфе 3.3 предполагается, что коэффициенты упругости верхнего слоя зависят от параметра $\lambda \in (0,\lambda_0):\ B^\lambda = \{\lambda^{-1} b_{ijkl}\}$. Рассматривается случай стремления параметра жесткости верхнего слоя λ к нулю. В результате предельного перехода при $\lambda \to 0$ в семействе задач типа (26), (27), в которых тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от параметра λ указанным образом, получается вариационная задача следующего вида:

$$\text{Найти такую} \quad (u_0,\rho_0) \in K^r, \quad \text{что} \tag{28}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0)\varepsilon(\bar{u}-u_0) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u_0) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_0][\bar{u}-u_0] - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho}-\rho_0) \geq 0$$

$$\text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{\rho}) \in K^r, \tag{29}$$

где

$$K^r = \{(\bar{u},\bar{\rho}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega) |\ [\bar{u}_\nu] \geq 0,\ \bar{u}^- = \bar{\rho} \quad \text{на} \quad \gamma\},$$

$R(\omega)$ – пространство инфинитезимальных жестких перемещений.

В параграфе 3.4 выведена эквивалентная на классе гладких функций дифференциальная формулировка задачи (28), (29).

В параграфе 3.5 обоснована возможность осуществления предельного переходов в семействе задач типа (28), (29) по параметру повреждаемости дефекта δ и получены формулировки предельных задач равновесия.

В четвертой главе рассматривается задача равновесия двуслойной упругой конструкции с прямолинейным дефектом в нижнем слое. Верхний слой конструкции приклеен по своему краю к нижнему слою и накрывает одну из вершин дефекта. Для моделирования дефекта используются нелинейные краевые условия.

В параграфе 4.1 приводятся дифференциальная и вариационная формулировки задачи равновесия, доказывается существование решения задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – области, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 4). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Через $\nu^b = (\nu_1^b, \nu_2^b)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$; $\tau^b = (\tau_1^b, \tau_2^b) = (-\nu_2^b, \nu_1^b)$ – касательный вектор. Множество $\gamma = (0,l) \times \{0\}$ соответствует дефекту в нижнем слое, $\overline{\gamma} \subset \Omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$. Дефект характеризуется параметром повреждаемости δ, $\delta \in (0,\infty)$. Нормаль единичной длины к γ обозначается через $\nu^d = (\nu_1^d, \nu_2^d)$, а $\tau^d = (\tau_1^d, \tau_2^d) = (-\nu_2^d, \nu_1^d)$ – касательный вектор. С помощью направления ν^d определяется знак берега $\gamma^\pm$. Аналогичным образом направление нормали ν^b определяет знак $\partial\omega^\pm$. Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$ – тензо-

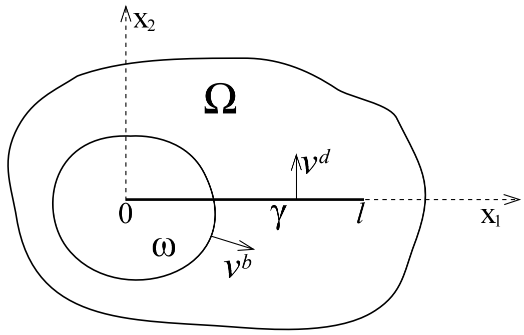

Рис. 4 — Геометрия конструкции на плоскости.

ры модулей упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности. Считаем, что компоненты a_{ijkl}, b_{ijkl} – постоянные.

Задача равновесия для двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин дефекта, под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом. Требуется найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2), \sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i,j = 1,2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega, \;\; \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{30}$$

$$-\operatorname{div} p = g \quad \text{в} \quad \omega, \;\; p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \tag{31}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \;\; u = v, \;\; [\sigma\nu^b] = p\nu^b \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{32}$$

$$[u_{\nu^d}] \geq 0, \;\; [\sigma_{\tau^d}] = 0, \;\; \sigma_{\tau^d} = \frac{1}{\delta}[u_{\tau^d}] \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{33}$$

$$[\sigma_{\nu^d}] = 0, \;\; \sigma_{\nu^d} \leq \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}], \;\; \left(\sigma_{\nu^d} - \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}]\right)[u_{\nu^d}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{34}$$

Соотношения (30), (31) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для нижнего и верхнего слоя соответственно. Последние два условия в (32) соответствуют склейке слоев на $\partial\omega$. Первое условие в (33) обеспечивает непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Остальные ограничения в (33) и (34) задают связь между нормальными и касательными составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ.

Наряду с дифференциальной постановкой задачи можно привести ее формулировку в вариационном виде. Для этого рассмотрим множество допустимых перемещений

$$K = \{(\bar{u},\bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 \mid [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \ \ \bar{u} = \bar{v} \quad \text{на} \quad \partial\omega\}.$$

Задача равновесия имеет следующий вариационный вид:

$$\text{Найти такую} \quad (u,v) \in K, \quad \text{что} \tag{35}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v}-v) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v}-v) + \\ + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u}-u] \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{v}) \in K. \tag{36}$$

Теорема 4.1. *Формулировки* (30)-(34) *и* (35)-(36) *задачи равновесия эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

В параграфе 4.2 предполагается, что тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от параметра $\lambda > 0: \ B_\lambda = \{\lambda^{-1} b_{ijkl}\}$. В задаче осуществлены предельные переходы при стремлении параметра λ к нулю и к бесконечности.

В параграфе 4.3 обоснованы предельные переходы в задаче по параметру повреждаемости дефекта, получены формулировки предельных задач.

В параграфе 4.4 рассмотрена задача оптимального управления, в которой целевым функционалом выбрана производная функционала энергии конструкции по длине дефекта. Функциями управления являются параметры δ и λ. При этом параметры (δ,λ) принадлежат множеству $[\delta_0,\delta_1] \times [0,\lambda_0]$; $0 < \delta_0 < \delta_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Чтобы формула для производной функционала энергии имела смысл, в этом параграфе предполагается, что $f \in C^1(\overline{\Omega})^2$.

При $(\delta,\lambda) \in [\delta_0,\delta_1] \times [0,\lambda_0]$ производная функционала энергии по длине дефекта имеет вид:

$$G(\delta,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u^\delta_\lambda)\varepsilon_{ij}(u^\delta_\lambda)\theta_{,1} - \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u^\delta_\lambda)u^\delta_{\lambda i,1}\theta_{,j} - \\ - \int\limits_{\Omega_\gamma}(\theta f_i)_{,1}u^\delta_{\lambda i} + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma}[u^\delta_\lambda]^2\theta_{,1}. \quad (37)$$

В формуле (37) функция θ – гладкая функция, $\theta = 1$ в достаточно малой окрестности вершины дефекта $(l,0)$, а вне этой окрестности $\theta = 0$.

В соответствии с энергетическим критерием Гриффитса задача оптимального управления формулируется следующим образом:

$$\text{Найти} \quad (\delta^\star,\lambda^\star) \in [\delta_0,\delta_1] \times [0,\lambda_0] \quad \text{так, что} \\ G(\delta^\star,\lambda^\star) = \sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]} G(\delta,\lambda). \quad (38)$$

Теорема 4.7. *Задача оптимального управления* (38) *имеет решение.*

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Хлудневу Александру Михайловичу за постоянное внимание к работе, ценные советы и терпение.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Фанкина И. В.* Оптимальное управление размером жесткого слоя конструкции // *Сиб. журн. чист. прикл. матем.* — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 86–97.

2. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной упругой конструкции при наличии трещины // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2019. — Т. 22, № 4. — С. 107–120.

3. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной конструкции при наличии дефекта // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2019. — Т. 16. — С. 959–974.

4. *Фанкина И. В.* О равновесии двуслойной конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину дефекта // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2020. — Т. 17. — С. 141–160.

5. *Фанкина И. В.* Управление размером жесткого слоя конструкции // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии. Тезисы докладов XI Всероссийской конференции молодых ученых. Под ред. В.В. Козлова. — 2017. — С. 133.

6. *Фанкина И. В.* Задача о поиске оптимального размера жесткой пластины в задаче о равновесии двуслойной конструкции // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2017. Международная молодежная научная конференция. — 2018. — С. 339–340.

7. *Фанкина И. В.* Задача о равновесии двуслойной конструкции с дефектом // Тезисы докладов V Всероссийской конференции с международным участием “Полярная механика”, 9-11 окт. 2018 г. — 2018. — С. 144.

8. *Фанкина И. В.* Задача оптимального управления для двуслойной конструкции с трещиной // Сборник тезисов десятой международной молодежной научной школы-конференции «Теория и методы решения обратных и некорректных задач» Новосибирск, Академгородок, 10-13 окт. 2018 г. — 2018. — С. 73.

9. *Фанкина И. В.* Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной // Тезисы докладов международной школы-конференции “Соболевские чтения”, посвященной 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, 10-16 дек. 2018 г. — 2018. — С. 178.

10. *Фанкина И. В.* Контактная задача для двух упругих тел, одно из которых содержит трещину // Тезисы докладов всероссийской конференции и школы молодых ученых, посвященной 100-летию академика Л.В. Овсянникова “Математические проблемы механики сплошных сред”, 13-17 мая 2019 г. — 2019. — С. 191.

11. *Фанкина И. В.* Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции при наличии дефекта // Тезисы докладов международной конференции «Математика в приложениях» в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова, 4-10 авг. 2019 г. — 2019. — С. 222.

12. *Fankina I.* On an equilibrium problem for a two-layer structure with the upper layer covering a defect tip // Abstracts of Russia-Japan Workshop

"Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications", Nov. 11-13, 2019. — 2019. — P. 7.

13. *Фанкина И. В.* Задача равновесия для двухслойной конструкции, в которой верхний слой накрывает вершину дефекта // Тезисы докладов IX Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 75-летию Владимира Николаевича Врагова, 27 июл. - 01 авг. 2020 г. — 2020. — С. 62.

14. *Фанкина И. В.* Задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с прямолинейным дефектом // Тезисы докладов IX Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", 7-11 сен. 2020 г. — 2020. — С. 245.

15. *Fankina I.* On an equilibrium problem for a two-layer structure with a crack crossing the external boundary at zero angle // Abstracts of the second Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" – 20th Conference of Continuum Mechanics Focusing on Singularities (CoMFoS20), Dec. 15-17, 2020. — 2020. — P. 7.

Выход в свет . Формат 60×84/16.
Объем 1 п.л. Тираж 75 экз. Заказ №
Отпечатано в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
630090, г. Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 15.