

На правах рукописи

Попова Татьяна Семеновна

**ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ
ПРИ НАЛИЧИИ ОТСЛОЕНИЙ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Новосибирск – 2021

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Северо - Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова»

Научный консультант:

ХЛУДНЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией гидроаэроупругости ФГБУН «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН»

Официальные оппоненты:

САДОВСКИЙ Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительного моделирования СО РАН — обособленное подразделение ФИЦ «Красноярский научный центр СО РАН», директор

ШИФРИН Ефим Ильич, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук», заведующий лабораторией механики прочности и разрушения материалов и конструкций

КОЛПАКОВ Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики», профессор кафедры телекоммуникационных сетей и вычислительных средств

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт проблем машиноведения Российской академии наук»

Защита состоится 22 ноября 2021 г. в 15-00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.054.02 в ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 15. Тел.: (383)333-21-66, Факс: (383)333-16-12, e-mail: larichking@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН <http://www.hydro.nsc.ru>

Автореферат разослан “ ____ ” октября 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

кандидат физико-математических наук

А.Ю.Ларичкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования обусловлена расширением использования композитных материалов, в том числе волокнистых, и необходимостью уточнения математических моделей, использующихся при их изучении. Появление новых материалов, а также возможности производства материалов с заданными свойствами требует обоснования теоретических методов анализа их свойств. В то же время существенная разница физических и геометрических характеристик матрицы и включения приводит к необходимости разработки сложных моделей, корректно отражающих поведение функций перемещений точек тел, находящихся в контакте или в условиях сцепления. Моделирование тонких включений на основе теории упругих балок позволяет рассматривать как модели включений с упругими свойствами, так и предельные случаи при бесконечных значениях параметров жесткости. Отслоение включений от окружающей матрицы также представляет собой не только сложную задачу механики, но и математическую проблему постановки и изучения краевой задачи с нелинейными условиями на границе контакта включения и матрицы. Кроме того, тема исследования содержит задачи сопряжения тонких включений, с которыми связаны явления, наблюдаемые в результате нарушения технологии производства композитных материалов с короткими волокнами, а также дефекты и изломы в самих волокнах. Получаемые в данном случае неоднородности влияют на механические свойства материалов и конструкций в целом, поэтому изучение корректности постановок задач равновесия таких объектов также является актуальной темой исследования.

Обзор исследований по теме диссертации.

В настоящем диссертационном исследовании тонкие упругие включения моделируются в рамках теории упругих балок. Например, используется модель балки Бернулли - Эйлера, которая предполагает, что нормальные к оси балки сечения остаются нормальными к ней и после деформирования, а также модель балки Тимошенко, учитывающая сдвиговые деформации. Этот подход применен в исследованиях Хлуднева А.М., Рудого Е.М., Щербакова В.В., Лазарева Н.П., Itou H., Shavlakadze N., Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F. и др. Моделирование различных видов тонких включений в упругих и неупругих телах, в том числе с отслоением, является предметом широкого ряда исследований (Александров В.М., Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н., Каландия А.И., Мухелишвили Н.И., Пастернак И.М., Сильвестров В.В., Bessoud A.-L., Krasucki F., Koiter W., Saccomandi G., Shield T.W. и др.) Механика разрушения волокнистых композитов описана в большом числе работ, отметим авторов некоторых из них, наиболее близких к теме настоящего исследования: Работнов Ю.Н., Аннин Б.Д.,

Садовский В.М., Парцевский В.В., Фудзии Т., Дзако М., Черепанов Г.П., Andrianov I.V., Danishevskyy V.V., Caillerie D., Carey J., Verpoest I., Lomov S.V., Guinovart-Diaz R., Rodriguez-Ramos R., Chen X.L., Liu Y.J.

Подход, изложенный в настоящей работе, использует граничные условия типа неравенств на берегах трещины, образующейся в результате отслоения тонкого включения и рассматриваемой как часть границы заданной области. Классическая постановка задач о трещине предусматривает линейные краевые условия на ее берегах, которые в ряде прикладных случаев, как показано, например, в работах Морозова Н.Ф., Mueller-Ноерре D.S., Wriggers P., могут приводить к противоречивым явлениям взаимного проникновения точек противоположных берегов трещины. Для предотвращения этого недостатка, в постановке задач могут быть заданы краевые условия, имеющие вид неравенств и заранее исключающие проникание. Данные условия носят нелинейный характер, часто используются в контактных задачах и известны, как “условия непроникания” (“nonpenetration condition”, “Hertz-Signorini-Moreau conditions”). Задачи с краевыми условиями непроникания являются нелинейными и требуют специальных методов исследования. Общие подходы к изучению задач для упругих и неупругих тел с трещинами и условиями непроникания можно найти в монографиях Хлуднева А.М. (2000, 2010), в которых изложен метод вариационных неравенств. Теоретические исследования задач с условиями непроникания интенсивно ведутся в течение последних десятилетий и имеется широкий спектр проблем, изученных в этой области (Хлуднев А.М., Рудой Е.М., Лазарев Н.П., Попова Т.С., Щербаков В.В., Фурцев А.И., Фанкина И.В., Кравчук А.С., Arghir M., Benchekroun O., Wriggers P., Kovtunen V.A., Lebon F., Kollmannsberger S., Rizzoni R., Jean M., Moreau J.J. и др.) Для задач о трещинах с возможным контактом берегов и для ряда задач об отслоившихся включениях с односторонними условиями построены алгоритмы численного решения (Намм Р.В., Ковтуненко В.А., Рудой Е.М.) Вариационный подход распространен также на некоторые неупругие случаи тел с трещинами и контактные задачи с односторонними ограничениями (Попова Т.С., Нап J., Migorski S.) Значительный вклад в развитие математических методов исследования различных задач с условиями типа Синьорини внесли Байокки А., Капело А., Главачек И., Дюво Ж., Киндерлерер Д., Стампаккья Г., Лионс Ж.-Л., Панагиотопулос П., Фикера Г., Экланд И., Темам Р., теоретические результаты, позволяющие получать численные решения вариационных неравенств, изложены в работах и монографиях Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.

Основная часть диссертации отведена задачам сопряжения тонких отслоившихся включений в упругом двумерном теле. Это означает, что два тонких включения могут контактировать между собой в концевых точках,

и для корректного решения задачи в этом случае необходимо задавать условия сопряжения в точке. Полный вид условий сопряжения заранее неизвестен и должен быть получен из вариационной постановки задачи. Задачи сопряжения широко исследуются как математическая проблема, а также с точки зрения приложений в механике, наиболее близкие к тематике настоящего исследования опубликованы авторами Лионс Ж.-Л., Мухелишвили Н.И., Назаров С.А., Санчес-Паленсия Э., Hashin Z., Le Dret H, Gaudiello A., Kolpakov A.G. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в некоторых случаях им соответствуют постановки, содержащие операторы с разрывными коэффициентами, имеющими скачок на границе примыкающих областей. Нарушение непрерывности коэффициентов уравнений может приводить к отсутствию гладкости решений и их производных, некоторые примеры можно найти в работах Аграновича М.С., Самарского А.А., Андреева В.Б. Задачи сопряжения в механике возникают при описании как взаимодействия слоистых систем, так и деформируемых тел с включениями, в постановке которых необходимо задание условий сопряжения на границе раздела слоев или границе включений (например, работы Алехина В.В., Богана Ю.А., Волчкова Ю.М., Gaudiello A., Zappale E. и др.) Условия сопряжения в случае идеального сцепления предполагают непрерывность перемещений и напряжений, а в случае отслоения необходимо задавать условия, аналогичные условиям на трещине. Например, к этому классу можно отнести задачи об объемных упругих и жестких включениях, для которых рассматривались случаи как с отслоением, так и без отслоения (Баев Л.В., Воротынцев А.А., Хлуднев А.М., Лазарев Н.П., Неустроева Н.В., Попова Т.С., Ротанова Т.А., Рудой Е.М., Novotny A., Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B., Kuykendall W., Santosa F., Symes W.W.)

В то же время, результаты, изложенные в диссертации, можно сравнивать с другими известными результатами в теории стержневых систем и балок. Так, например, в случае сопряжения включений с изломом можно провести сравнение получаемых условий сопряжения с известными ранее условиями в точке полного повреждения балки или контакта двух отдельных балок; случай отсутствия излома можно соотнести с задачей о балке без повреждений; задачи с параметром повреждаемости также можно сравнивать с различными моделями повреждения балок, а также с различными условиями, возникающими в моделях с сосредоточенными в точке неоднородностями (Ахтямов А.М., Ильгамов М.А., Ватульян А.О., Осипов А.В., Лебедев И.М., Шифрин Е.И., Chondros T.G., Cicirello A., Palmeri A., Yavari A., Sarkani S., Moyer E.T.)

Несмотря на наличие большого количества работ, посвященных исследованию моделей тонких отслоившихся включений в упругих телах, ос-

нованных на теории балок, недостаточно исследованными остаются задачи о контакте и сопряжении нескольких тонких включений с условиями непроникания. Задачи об отслоившихся тонких упругих и жестких включениях в вязкоупругих телах с использованием нелинейных условий непроникания на сегодняшний день также недостаточно изучены.

Целью диссертационного исследования является выполнение комплекса исследований для проблем равновесия неоднородных деформируемых тел с тонкими включениями при наличии отслоения.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. исследовать задачи сопряжения для широкого класса тонких изотропных и анизотропных включений в двумерных упругих телах и получить соответствующие системы условий сопряжения;
2. для поставленных задач сопряжения проанализировать предельные переходы по параметру жесткости тонких включений;
3. для задач об анизотропных тонких включениях в двумерных упругих телах разработать алгоритмы численного решения с учетом наличия отслоения и сопряжения включений;
4. изучить задачи равновесия двумерных вязкоупругих тел, содержащих тонкие изотропные включения.

Методы исследования. В работе используются современные методы и подходы математической теории упругости, в том числе энергетические принципы, учитывающие геометрические и структурные особенности рассматриваемых задач, метод вариационных неравенств в теории нелинейных краевых задач, а также методы функционального анализа, дифференциальных уравнений с частными производными; в численном решении задач применен метод конечных элементов.

Научная новизна и основные результаты работы.

В диссертации получены следующие результаты, обладающие научной новизной.

1. Разработаны математические модели деформирования двумерных упругих тел с трещинами, содержащих контактирующие в точке тонкие изотропные включения. Модели характеризуются соотношениями теории тонких балок, используемыми для описания деформирования упругих включений и заданной структурой функций перемещений для характеристики тонких жестких включений. Получены условия сопряжения в общей точке включений для различных значений параметра,

описывающего характер соединения. Обоснован предельный переход при стремлении параметра жесткости упругого включения к бесконечности.

2. Исследованы математические модели сопряжения тонких отслоившихся анизотропных включений в двумерном упругом теле. Жесткость анизотропного тонкого включения предполагается бесконечной вдоль одного из направлений и фиксированной вдоль другого направления. Для задач о контакте анизотропных включений с упругими, жесткими и полужесткими тонкими включениями получены условия сопряжения в их общей точке с учетом типа соединения. Обоснован предельный переход при стремлении параметра жесткости упругого или полужесткого включения к бесконечности.
3. Для задач о тонких анизотропных включениях в двумерном упругом теле на основе метода декомпозиции области разработаны алгоритмы их численного решения в случаях одного отслаивающегося включения, а также при сопряжении полужесткого включения с другими типами включений. Итерационные алгоритмы реализованы с учетом особенностей структуры функций перемещений полужесткого включения, условий на берегах трещины, образующейся при отслаивании, а также условий сопряжения. Для решения нелинейной задачи в области с разрезом применяется декомпозиция данной области, и в полученных подобластях решаются соответствующие линейные задачи. Методом множителей Лагранжа обеспечивается выполнение условий непроникания на контактирующих границах подобластей. Построены сходящиеся алгоритмы типа Удзавы для численного решения поставленных задач. Приближенное решение с заданной точностью удовлетворяет всем уравнениям и неравенствам краевых задач.
4. Проведен анализ математических моделей отслоившихся тонких упругих и жестких включений в двумерном вязкоупругом теле. Исследованы вопросы разрешимости соответствующих задач и получены эквивалентные вариационные и дифференциальные постановки. Изучена взаимосвязь задач о тонком жестком включении и об объемном жестком включении в вязкоупругом теле.

Обоснованность и достоверность результатов. Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, согласованностью с ранее известными результатами в смежных направлениях исследований, результатами численной реализации.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Теоретическая значимость результатов, полученных в настоящей диссертации, заключается в расширении класса исследованных задач о тонких включениях в двумерном упругом теле в рамках моделей с неизвестной областью контакта. Практическая значимость результатов определяется возможностью применения разработанных математических моделей при анализе деформирования широкого класса конструкций из композитных материалов.

Апробация результатов исследования.

Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях и научных семинарах: IV, VII, IX межд. конф. по математическому моделированию (Якутск, 2004, 2014, 2020); Межд.конф., посв. 80-летию со дня рожд.акад.М.М.Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики"(Новосибирск, 2012); XII, XVII Int. Sem. "Mathematical models and modeling in laserplasma processes and advanced science technologies"(Montenegro, 2014, 2017); V межд.конф. "Математика, ее приложения и математическое образование"(Улан-Удэ, 2014); Межд. науч.-пр. конф., посв. 20-летию Политехнического института (филиал) СВФУ в г. Мирном. (Мирный, 2014); Int. Conf.-Sem. "Recent trends of mathematical research"(УК, Keele, 2016); Всеросс. науч. конф. "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных посв. 100-летию акад. А.В. Бицадзе (Москва, 2016); XXIV Байкальская всеросс. конф. с межд. уч. "Информационные и математические технологии в науке и управлении"(Иркутск, 2019); Всеросс. конф. и школа для молодых ученых, посв. 100-летию ак. Л. В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред"(Новосибирск, 2019); Межд. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики"(Новосибирск, 2019); IX Евразийский симпозиум по проблемам прочности и ресурса в условиях низких климатических температур "Eurastrencold 2020"(Якутск, 2020); XIII Межд. конф. "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(Казань 2020); Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications"(Новосибирск, 2019, 2020); 91s Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics -2020 (Kassel, Germany, 2021); IX Межд. конф., посв. 120-летию со дня рожд. ак. М. А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике"(Новосибирск, 2020); научный семинар НИИ математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова под рук. д.ф.-м.н. Е.И. Егорова; научный семинар Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова под рук. д.ф.-м.н. Н.П. Лазарева; научный семинар "Краевые задачи механики сплошных сред"Института гидроди-

намики им. М.А. Лаврентьева под рук. д.ф.-м.н. А.М. Хлуднева; научный семинар School of computing and mathematics, Keele University, под руководством prof. J. Karlunov; научный семинар "Математическое моделирование в механике" Института вычислительного моделирования СО РАН под рук. д.ф.-м.н. В.М. Садовского и д.ф.-м.н. В.К. Андреева; научный семинар Отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева под рук. акад. Б.Д. Аннина.

Публикации по теме диссертации.

По теме диссертации опубликовано 38 научных статей, в том числе 33 в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов диссертаций. Данный список публикаций включает 22 научные статьи в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора

При постановке задач исследования, обсуждении научной проблематики и получении результатов вклад соавторов совместных публикаций равнозначен.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 301 страница, список литературы содержит 275 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, приведен обзор литературы по теме, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, приведены новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована достоверность и приведена апробация результатов.

В диссертации исследуются задачи о тонких включениях, математические модели для которых построены в рамках теории тонких упругих балок Бернулли-Эйлера и Тимошенко и их предельных случаев. В **первой главе** рассмотрены как основные модели одиночных изотропных тонких включений (Бернулли - Эйлера, Тимошенко, а также жестких) в упругих двумерных телах, так и случаи анизотропных включений, получаемые предельным переходом по параметрам жесткости в одном из направлений. Глава носит вводный характер, в ней изложены ранее известные теоретические результаты. В разделе 1.1 изложены основные методы теории вариационных неравенств, применяемые в дальнейшем исследовании, в частности, вариационные постановки нелинейных задач об упругих телах с трещинами. В разделах 1.2-1.4 обсуждаются модели одиночных тонких включений в двумерном упругом теле: приведены соотношения теории упругих балок Бернулли-Эйлера и Тимошенко, используемые для описания тонких

упругих включений, а также различные предельные случаи таких моделей при стремлении параметров жесткости включений к бесконечности. Среди указанных предельных случаев различаются случаи изотропных жестких и анизотропных полужестких включений, дано описание структуры функций перемещений для данных моделей.

Во **второй главе** рассмотрены задачи сопряжения тонких изотропных включений различных типов в двумерных упругих телах. К изотропным в данной диссертации отнесены тонкие упругие и тонкие жесткие включения. Исследованы случаи как отслоившихся с образованием трещин включений, так и включений без отслоения.

В **разделе 2.1** рассмотрена задача о равновесии двумерного упругого тела с тонкими включениями Бернулли-Эйлера и Тимошенко. Предполагается, что включения имеют общую точку, и целью изучения является вывод условий сопряжения в этой точке. Пусть упругое тело занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ . Введем следующие обозначения для кривых, задающих форму и положение тонких включений в упругом теле: $\gamma_b = (-1, 0) \times \{0\}$, $\gamma_t = (0, 1) \times \{0\}$, $\gamma = \gamma_b \cup \gamma_t \cup \{(0, 0)\}$, при этом $\bar{\gamma} \subset \Omega$, см. рис. 1. Линии γ_b и γ_t задают соответственно форму упругих включений Бернулли-Эйлера и Тимошенко. Через $\nu = (0, 1)$ обозначим единичный вектор нормали к γ ; $\tau = (0, 1)$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Пусть также задана функция внешних нагрузок $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$.

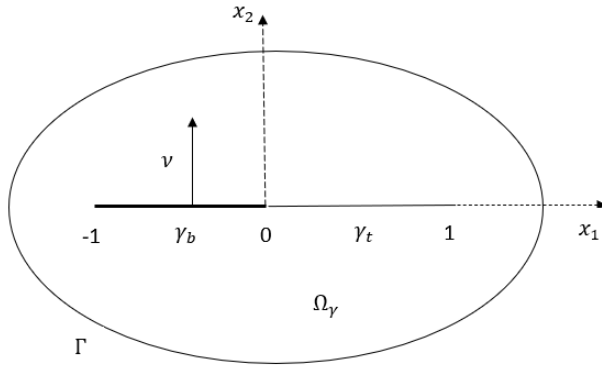


Рис. 1: Упругое тело с упругими включениями Бернулли-Эйлера и Тимошенко

Рассмотрим пространство допустимых функций вида

$$W = \{ \chi = (u, w, v, \varphi) \mid u \in H_0^1(\Omega)^2, (w, v) \in H^1(\gamma)^2, v \in H^2(\gamma_b), \varphi \in H^1(\gamma_t); w = u_\tau, v = u_\nu \text{ на } \gamma; v_{,1}(0-) + \varphi(0+) = 0 \},$$

где обозначения $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\gamma)$, и т.д. введены для стандартных соболев-

ских пространств. Норму в W возьмем в виде

$$\|\chi\|_W^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|(w, v)\|_{H^1(\gamma)}^2 + \|v\|_{H^2(\gamma_b)}^2 + \|\varphi\|_{H^1(\gamma_t)}^2.$$

Последнее из условий в определении пространства W характеризует идеальное сцепление между включениями в точке сопряжения и означает совпадение углов поворота нормального сечения включений в этой точке.

Введем также функционал энергии по формуле:

$$\begin{aligned} \Pi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u)dx - \int_{\Omega_\gamma} f u dx + \\ & + \frac{ES}{2} \int_{\gamma} w_{,1}^2 ds + \frac{E_1 I}{2} \int_{\gamma_b} v_{,11}^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} \{E_2 I \varphi_{,1}^2 + Gh(v_{,1} + \varphi)^2\} ds. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ - тензоры напряжений и деформаций упругого тела соответственно; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\sigma(u)\varepsilon(u) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(u)$, $\sigma(u) = A\varepsilon(u) = \{a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\}$, $i, j = 1, 2$; A - симметричный положительно определенный тензор модулей упругости тела; $\xi_{,k} = \frac{d\xi}{dx_k}$, $k = 1, 2$; E_1 и E_2 - модули упругости включений Бернулли-Эйлера и Тимошенко соответственно; $E(x_1) = E_1$ на γ_b и $E(x_1) = E_2$ на γ_t ; I , S - момент инерции и площадь поперечных сечений, которые будем считать равными для обоих включений; G , h - модуль сдвига и толщина включения Тимошенко. Функции, заданные на кривой γ или ее части, отождествлены с функциями одной переменной x_1 .

Рассмотрим задачу минимизации функционала Π на множестве W . Данная задача имеет единственное решение, удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{aligned} \chi \in W, \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u})dx - \int_{\Omega_\gamma} f \bar{u} dx + \int_{\gamma} ES w_{,1} \bar{w}_{,1} ds + \int_{\gamma_b} E_1 I v_{,11} \bar{v}_{,11} ds + \\ + \int_{\gamma_t} \{Gh(v_{,1} + \varphi)(\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi}) ds + E_2 I \varphi_{,1} \bar{\varphi}_{,1}\} ds = 0 \quad \forall \bar{\chi} \in W. \quad (1) \end{aligned}$$

Из вариационной формулировки (1) получена следующая эквивалентная дифференциальная постановка. Для заданных функций внешних нагрузок $f = (f_1, f_2)$, действующих на тело, найти функции $u = (u_1, u_2)$, w , v , φ , $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (2)$$

$$-(ESw_{,1})_{,1} = [\sigma_\tau] \text{ на } \gamma, \quad E_1 Iv_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_b, \quad (3)$$

$$-Gh(v_{,11} + \varphi_{,1}) = [\sigma_\nu], \quad -E_2 I \varphi_{,11} + Gh(v_{,1} + \varphi) = 0 \text{ на } \gamma_t, \quad (4)$$

$$(u, w, v, \varphi) \in W; \quad w_{,1} = v_{,111} = v_{,11} = 0 \text{ при } x = -1, \quad (5)$$

$$v_{,1} + \varphi = \varphi_{,1} = w_{,1} = 0 \text{ при } x = 1, \quad (6)$$

$$E_1 Sw_{,1}(0-) = E_2 Sw_{,1}(0+), \quad (7)$$

$$-E_1 Iv_{,111}(0-) = Gh(v_{,1} + \varphi)(0+); \quad E_1 Iv_{,11}(0-) = -E_2 I \varphi_{,1}(0+). \quad (8)$$

Нижние индексы ν и τ здесь и далее обозначают нормальную и касательную составляющие вектора, например, в данном случае - нормальные и касательные напряжения. Квадратные скобки обозначают скачок функции на берегах γ : $[\phi] = \phi^+ - \phi^-$, где ϕ^\pm - значения функции на положительном γ^+ и отрицательном γ^- берегах разреза. Заметим, что часть краевых условий для функций u, w, v, φ включена в условие $(u, w, v, \varphi) \in W$. Соотношения (2) - уравнения равновесия упругого тела и закон Гука; (3)-(4) - уравнения равновесия для включений Бернулли-Эйлера и Тимошенко γ_b и γ_t . Правая часть $[\sigma_\nu], [\sigma_\tau]$ в уравнениях (3), (4) описывает воздействие окружающей упругой среды на γ . В соответствии с условием $(u, w, v, \varphi) \in W$, горизонтальные (вдоль оси x_1) и вертикальные (вдоль оси x_2) перемещения упругого тела совпадают с соответствующими перемещениями включения γ . Остальные соотношения из (5), а также (6) соответствуют условиям свободных концов балок Бернулли - Эйлера (при $x_1 = -1$) и Тимошенко (при $x_1 = 1$). Равенства (7) и (8) - условия сопряжения в точке $(0, 0)$. Условие (7) задает равенство продольных сил, действующих в этой точке. Условия (8) определяют равенство поперечных сил и изгибающих моментов в точке сопряжения. Доказано, что формулировки (2)-(8) и (1) эквивалентны для гладких решений.

В п. 2.1.2 исследована задача о сопряжении двух упругих включений в предположении, что часть γ_b включения γ , моделируемая как балка Бернулли-Эйлера, отслаивается от положительного берега γ_b . Это означает наличие трещины между γ_b и упругой матрицей. В этом случае перемещения w, v включения γ_b должны совпадать с перемещениями упругого тела на γ_b^- . При этом на берегах трещины заданы условия непроникания, имеющие вид неравенств. Введем обозначения $\Omega_b = \Omega \setminus \bar{\gamma}_b$ и рассмотрим множество допустимых функций

$$K = \{ \chi = (u, w, v, \varphi) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_b)^2, (w, v) \in H^1(\gamma)^2, v \in H^2(\gamma_b), \\ \varphi \in H^1(\gamma_t), u|_{\gamma^-} = (w, v), [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma_b; v_{,1}(0-) + \varphi(0+) = 0 \},$$

где $H_\Gamma^1(\Omega_b) = \{ \phi \in H^1(\Omega_b) \mid \phi = 0 \text{ на } \Gamma \}$. Ограничение $[u]\nu \geq 0$ на γ_b представляет собой условие типа Синьорини, которое исключает взаим-

ное проникание противоположных берегов трещины друг в друга (условие непроникания). В рассматриваемом случае отслоения одного из включений, а именно γ_b , дифференциальная формулировка (2)-(8) дополняется следующими условиями

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \sigma_\tau^+ = 0, \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \text{ на } \gamma_b, \quad (9)$$

которые вместе с условиями непроникания составляют полную систему граничных условий для задачи о трещине. Кроме того, первое из соотношений (5) заменяется ограничением $(u, w, v, \varphi) \in K$. Для данной задачи также сформулирована вариационная постановка, то есть задача минимизации функционала энергии на выпуклом множестве K . Эта задача эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\begin{aligned} \chi \in K, \quad & \int_{\Omega_b} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) dx - \int_{\Omega_b} f(\bar{u} - u) dx + \int_{\gamma_b} E_1 I v_{,11}(\bar{v}_{,11} - v_{,11}) ds + \\ & + \int_{\gamma_t} \{E_2 I \varphi_{,1}(\bar{\varphi}_{,1} - \varphi_{,1}) + Gh(v_{,1} + \varphi)(\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi} - v_{,1} - \varphi)\} ds + \\ & + \int_{\gamma} E S w_{,1}(\bar{w}_{,1} - w_{,1}) ds \geq 0 \quad \forall \bar{\chi} \in K. \end{aligned}$$

Задача имеет единственное решение. Вариационная и дифференциальная формулировки задачи эквивалентны на классе гладких решений. Система условий сопряжения для задачи об идеальном сцеплении упругих включений включает соотношения (7)-(8), а также условия

$$[w(0)] = [v(0)] = 0, \quad v_{,1}(0-) = -\varphi(0+),$$

где $[w(0)], [v(0)]$ - скачки функций в точке сопряжения включений.

В разделе 2.1.3 вводится в рассмотрение параметр $\delta > 0$, характеризующий жесткость включения Бернулли-Эйлера, а коэффициенты, характеризующие жесткость включения Тимошенко на растяжение (сжатие) и сдвиг считаются фиксированными. Используя вариационную формулировку задачи и переходя к пределу при $\delta \rightarrow \infty$, получена предельная задача, описывающая равновесие упругого тела с жестким включением γ_b и упругим включением Тимошенко γ_t .

В разделе 2.2 исследована задача сопряжения для упругого включения Тимошенко и тонкого жесткого включения, расположенных в упругом теле. Постановка данной задачи является независимой от предельного

перехода, описанного в предыдущем разделе.

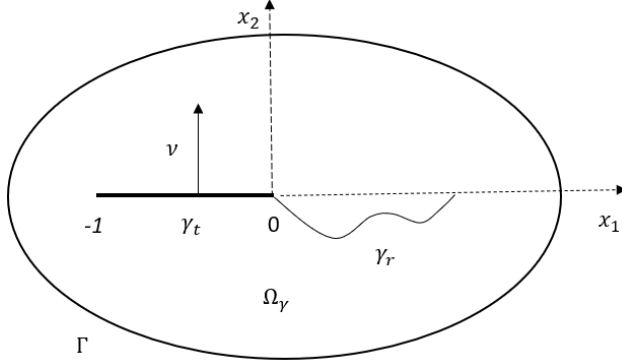


Рис. 2: Упругое тело с упругим и жестким тонкими включениями

$\{(0, 0)\}$ - гладкая кривая, такая, что угол между γ_t и γ_r равен нулю в точке $(0, 0)$, $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к γ ; кроме того $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, см. рис. 2. Будем рассматривать пространство жестких инфинитезимальных перемещений вида

В п.2.2.1 рассмотрен случай идеального сцепления между включениями при отсутствии отслоения, получены вариационная и дифференциальная формулировки, а также условия сопряжения в общей точке включений. Пусть форма тонкого жесткого включения задана с помощью гладкой кривой γ_r , полностью лежащей в области Ω , $\bar{\gamma}_r \subset \Omega$. Ось тонкого упругого включения Тимошенко обозначим $\gamma_t = (-1, 0) \times \{0\}$, при этом $\gamma = \gamma_t \cup \gamma_r \cup$

$$R(\gamma_r) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = c(-x_2, x_1) + (c^1, c^2) \text{ на } \gamma_r\},$$

где постоянные c, c^1, c^2 произвольны. Сформулируем задачу о равновесии упругого тела Ω_γ с тонкими включениями γ_t и γ_r . Пусть задан вектор $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок на упругое тело. Найти функции $u = (u_1, u_2)$, $w, v, \varphi, \sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, а также $\rho^0 \in R(\gamma_r)$ такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (10)$$

$$-ESw_{,11} = [\sigma_\tau] \text{ на } \gamma_t, \quad (11)$$

$$-Gh(v_{,11} + \varphi_{,1}) = [\sigma_\nu], \quad -EI\varphi_{,11} + Gh(v_{,1} + \varphi) = 0 \text{ на } \gamma_t, \quad (12)$$

$$w = u_\tau, \quad v = u_\nu \text{ на } \gamma_t; \quad \varphi(0) = -\rho_{2,1}(0); \quad u = \rho^0 \text{ на } \gamma_r, \quad (13)$$

$$w_{,1} = v_{,1} + \varphi = \varphi_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \quad (14)$$

$$-\int_{\gamma_r} [\sigma\nu]\rho ds + ES(w_{,1}\rho_1)(0) - EI(\varphi_{,1}\rho_{2,1})(0) + Gh((v_{,1} + \varphi)\rho_2)(0) = 0 \quad \forall \rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\gamma_r). \quad (15)$$

Здесь E, G, S, I, h -материальные постоянные для включения Тимошенко. Уравнения балки выполнены только на γ_t , условия свободного конца заданы только в левом конце включения Тимошенко, см. (14). Система условий

сопряжения имеет вид

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1] ds = ES w_{,1}(0), \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2] ds = Gh(v_{,1} + \varphi)(0), \quad (16)$$

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^2]x_1 - [\sigma^1]x_2) ds = -EI\varphi_{,1}(0), \quad (17)$$

$$w(0) = \rho_1^0(0), \quad v(0) = \rho_2^0(0), \quad \varphi(0) = -\rho_{2,1}^0(0), \quad (18)$$

где $\sigma\nu = (\sigma^1, \sigma^2)$, а соотношения (16)-(17) - эквивалентная форма записи (15). Из (16) следует равенство компонент главного вектора сил, действующих на γ_r и сил, действующих на упругое включение в точке $(0, 0)$, а из (17) - равенство момента на γ_r и изгибающего момента упругого включения в точке $(0,0)$; (18) - кинематические условия. Последнее из условий (18) выражает условие идеального сцепления, то есть равенство углов поворота. Таким образом, в случае сопряжения включений без излома условия сопряжения выражают равенство перемещений, углов, моментов и сил. Для задачи (10)-(15) получена вариационная формулировка, эквивалентная дифференциальной при условии достаточной гладкости решений. В п.2.2.2 приведено обоснование предельного перехода при стремлении параметра жесткости включения Тимошенко к бесконечности. Полученная в предельном случае задача соответствует задаче о тонком жестком включении без отслоения.

В п.2.2.3 исследована задача сопряжения, аналогичная предыдущей, но в предположении, что упругая часть γ_t включения γ отслаивается, образуя трещину между γ_t и упругим телом. В этом случае вариационная постановка задачи о равновесии формулируется как задача минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений. Наличие условия непроникания в определении данного множества приводит к формулировке в виде вариационного неравенства. Дифференциальная постановка в данном случае также дополняется условиями непроникания и соотношениями на берегах γ_t , аналогичными (9). Задача однозначно разрешима. В п. 2.2.4 для рассматриваемого случая отслоившегося упругого включения γ_t изучена задача с параметром жесткости включения Тимошенко $\delta > 0$, приведено обоснование предельного перехода при стремлении этого параметра к нулю. Предельная задача совпадает с задачей о равновесии упругого тела с трещиной γ_t и тонким жестким включением γ_r .

Далее, в п.2.2.5 изучена задача о сопряжении включения Тимошенко и тонкого жесткого включения для случая с изломом и при наличии отслоения упругого включения. Наличие излома между включениями означает,

что угол между включениями не является фиксированным, вследствие чего условие равенства углов поворота в определении множества допустимых функций исключается. Система условий сопряжения в точке контакта получено в следующей форме:

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1] ds = ES w_{,1}(0), \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2] ds = Gh(v_{,1} + \varphi)(0), \quad (19)$$

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^2]x_1 - [\sigma^1]x_2) ds = 0, \quad -EI\varphi_{,1}(0) = 0. \quad (20)$$

$$w(0) = \rho_1^0(0), \quad v(0) = \rho_2^0(0). \quad (21)$$

Таким образом, в случае излома между включениями, в отличие от задачи об идеальном сцеплении, главный момент сил, действующих на жесткое включение, а также изгибающий момент в точке $(0, 0)$ упругого включения, равны нулю (20). В точке контакта совпадают перемещения включений, а также продольные и поперечные силы (19), (21).

В вышеописанных разделах изучены задачи о сопряжении включения Тимошенко с тонким жестким включением в упругом теле для двух случаев: при идеальном сцеплении и с изломом в точке контакта включений. В **разделе 2.3** изучен дополнительный случай, когда в точке сопряжения вводится так называемый параметр повреждаемости α , принимающий положительные значения от 0 до бесконечности.

Вводится следующий функционал энергии с параметром:

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_t}} \sigma(u)\varepsilon(u) dx - \int_{\Omega_{\gamma_t}} hu dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} \{ES w_{,1}^2 + EI\varphi_{,1}^2 + Gh(v_{,1} + \varphi)^2\} ds + \frac{1}{2\alpha} (\rho_{2,1}(0+) + \varphi(0-))^2, \end{aligned}$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2) = u|_{\gamma_r}$. Параметр повреждаемости $\alpha > 0$ описывает характер соединения включений γ_r и γ_t в точке $(0, 0)$. Большее значение α соответствует меньшей степени сцепления между включениями и наоборот. Из вариационной задачи минимизации функционала энергии π_α на множестве допустимых функций в задаче с параметром α получены следующие условия сопряжения в общей точке включений:

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1]x_2 ds - \int_{\gamma_r} [\sigma^2]x_1 ds + \frac{1}{\alpha} (\rho_{2,1}(0+) + \varphi(0-)) = 0, \quad (22)$$

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1] ds - ES w_{,1}(0-) = 0, \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2] ds - Gh(v_{,1} + \varphi)(0-) = 0, \quad (23)$$

$$(w, v)(0-) = (\rho_1, \rho_2)(0+), \quad EI\varphi_{,1}(0-) + \frac{1}{\alpha}(\rho_{2,1}(0+) + \varphi(0-)) = 0. \quad (24)$$

В соответствии с условием (22), момент, действующий на жесткое включение γ_r пропорционален разности углов между γ_r и γ_t в точке $(0, 0)$. Более того, из второго соотношения в (24) следует, что момент, действующий на γ_t в точке $(0, 0)$ также пропорционален данной величине. В п. 2.3.2 показано, что предельный случай $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует случаю отсутствия соединения между включениями (излом), а случай $\alpha \rightarrow 0$ соответствует задаче о сопряжении упругого и жесткого включений без излома (идеальное сцепление). Для задач с параметром повреждаемости также обоснован предельный переход по параметру жесткости δ упругого включения. В этом случае задача изначально ставится с использованием двух параметров, однако при предельном переходе по параметру жесткости параметр повреждаемости α предполагается фиксированным. В п.2.3.3 показано, что при бесконечном возрастании параметра жесткости упругого включения в предельном случае получим задачу о сопряжении двух жестких включений.

В **разделе 2.4** приведены примеры, иллюстрирующие свойства функций, являющихся решениями рассмотренных в настоящей главе задач. Численные решения представленных задач получены с помощью метода конечных элементов и реализованы в пакете FreeFem++. В качестве области Ω выберем квадрат $(-2, 2) \times (-2, 2)$, закрепленный по сторонам $\Gamma_D = \{(\pm 2)\} \times (-2, 2)$.

В п.2.4.1 решены задачи о сопряжении включений Бернулли - Эйлера $\gamma_b = (-1, 0) \times \{0\}$ и Тимошенко $\gamma_t = (0, 1) \times \{0\}$. Включения отслаиваются, образуя трещину по всей длине $\gamma = \gamma_b \cup \gamma_t \cup \{(0, 0)\} = (-1, 1) \times \{0\}$, см. рис. 3. При декомпозиции области с разрезом получаем подобласти $\Omega^- = (-1, 1) \times (-1, 0)$ и $\Omega^+ = (-1, 1) \times (0, 1)$, см. рис. 4. Введем обозначения для общей границы этих подобластей: $\bar{\Sigma} = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$, т.е. в данном случае $\Sigma = (-2, 2) \times \{0\}$; $\gamma_g = \Sigma \setminus \bar{\gamma}$. Далее в каждой из подобластей решается линейная задача, решениями которых являются вектор $\chi = (u^-, w, v)$ в Ω^- и функция u^+ в Ω^+ . При этом на решения накладываются следующие ограничения: на $\gamma_g = ((-2, -1) \cup (1, 2)) \times \{0\}$ выполнены условия склейки для функций перемещений точек тела, а на $\gamma = (-1, 1) \times \{0\}$ - система краевых условий для трещины с возможным контактом берегов.

Физические постоянные материала упругой матрицы приняты равными $E = 21 \times 10^7$ Па, $\nu = 0.28$. Параметры, характеризующие жесткость включений Бернулли-Эйлера и Тимошенко взяты одинаковыми и равными

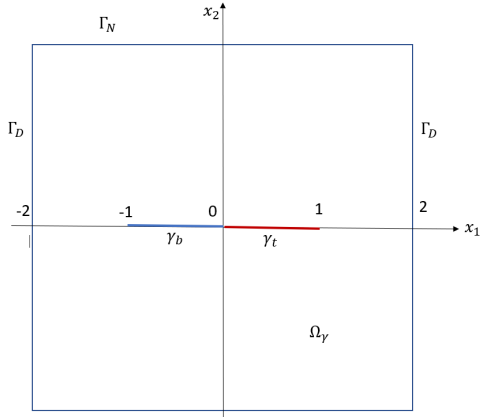


Рис. 3: Область Ω_γ , γ_b - включение Бернулли-Эйлера, γ_t - включение Тимошенко

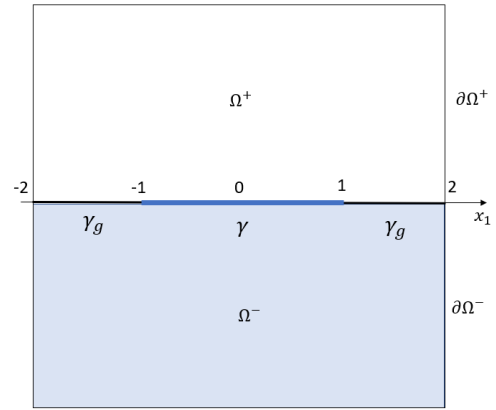


Рис. 4: Разбиение области Ω_γ на под-области Ω^- и Ω^+

$\delta = 10^8$ в соответствующих ед.изм. На нижней и верхней границе области заданы поверхностные силы $f_1 = -0.1\mu x_1$ и $f_2 = 0.1\mu x_1$ соответственно, μ - параметр Ламе. Данный случай нагружения соответствует сжатию вдоль вертикальной оси при $x_1 < 0$ и растяжению при $x_1 > 0$. Подобласти Ω^- и Ω^+ разбиваются на 1246 и 1234 треугольников с 681 и 675 вершинами соответственно. Рассмотрены две задачи: о соединении включений в условиях идеального сцепления и об изломе между включениями. На рис. 5, 6 представлены графики функций вертикальных перемещений для этих задач. В точке сопряжения $(0, 0)$ при идеальном сцеплении функция перемещений точек нижнего берега разреза гладкая (рис. 5), в то время как при изломе наблюдается угловая точка графика (рис. 6). Данный вид нагружения обуславливает смыкание берегов трещины в точках промежутка $-1 < x_1 < -0.4$ (перемещения на берегах совпадают), в остальных точках разреза наблюдается раскрытие трещины.

В п.2.4.2 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие сопряжение упругого включения Тимошенко и тонкого жесткого включения в различных случаях: с изломом, при идеальном сцеплении, а также для задач с параметром повреждаемости и с параметром жесткости.

В **третьей главе** исследованы задачи сопряжения анизотропных включений с другими типами тонких включений, рассмотренными в главе 1. Отметим, что в данной работе под термином “анизотропия” понимается модель тонкого полужесткого включения, в которой жесткость в направлении ортогональных осей меняется независимо друг от друга, в том числе может быть бесконечной в одном направлении и фиксированной - в другом.

Раздел 3.1 посвящен изучению задачи о сопряжении включения Тимошенко с тонким полужестким включением, которые расположены в упругом теле. Термин "полужесткое" обусловлен тем, что включение явля-

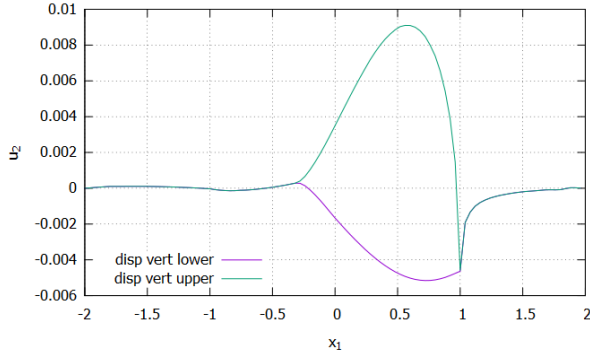


Рис. 5: График функций вертикальных перемещений в точках $(-2, 2)$ оси абсцисс в случае идеального сцепления

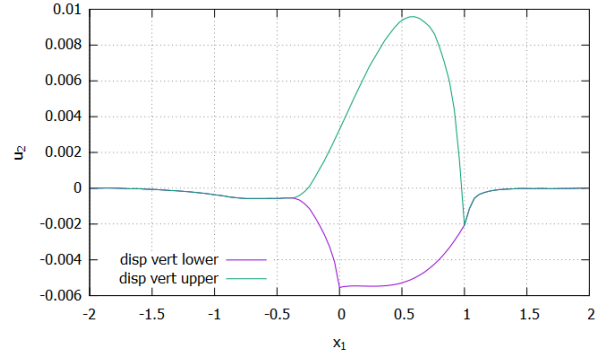


Рис. 6: График функций вертикальных перемещений в точках $(-2, 2)$ оси абсцисс в случае излома между включениями

ется упругим в одном заданном направлении (и удовлетворяет уравнениям равновесия), являясь жестким в другом из направлений. Можно построить различные виды полужестких включений. В данном разделе изучается полужесткое включение, полученное предельным переходом в модели включения Бернулли-Эйлера при стремлении параметра жесткости в одном из направлений к бесконечности

В п.3.1.1 обсуждается первый случай анизотропии, при котором точки полужесткого включения перемещаются как точки упругой балки в направлении x_1 , и как точки жесткого тела в направлении x_2 . Введем обозначения для линий, задающих оси тонких включений $\gamma_t = (-1, 0) \times \{0\}$, $\gamma_s = (0, 1) \times \{0\}$, $\gamma = \gamma_t \cup \gamma_s \cup \{(0, 0)\}$. Срединная линия упругого включения Тимошенко совпадает с линией γ_t , а γ_s соответствует срединной линии полужесткого включения. В этом разделе предполагается идеальное сцепление между включениями, т.е. разность между углом поворота полужесткого и упругого включений в точке сопряжения является фиксированной и для простоты принята равной нулю. Тогда γ можно рассматривать как одно неоднородное включение, состоящее из двух частей γ_t и γ_s . Будем предполагать, что положительная (по отношению к ν) сторона включения γ отслаивается; таким образом, мы имеем трещину между включением и упругим телом. На берегах трещины будем задавать условия непроникания. Дифференциальная постановка задачи о равновесии упругого тела с включениями γ_t, γ_s включает уравнения (10) - (12), при этом уравнение (11) выполнено на всей γ . На функции вертикальных перемещений включения γ_s накладываются ограничения вида $v|_{\gamma_s} \in L(\gamma_s)$, где $L(\gamma_s) = \{l \mid l(x_1) = b^1 x_1 + b^0 \text{ на } \gamma_s; b^0, b^1 \in \mathbb{R}\}$. Ввиду наличия отслоения, на γ выполнена полная система граничных условий для трещины, а также

равенства $w = u_\tau^-, v = u_\nu^-$. Система условий сопряжения имеет вид:

$$[w(0)] = 0, v_{,1}(0+) = -\varphi(0-); [v(0)] = 0,$$

$$\int_{\gamma_s} [\sigma_\nu] ds - Gh(v_{,1} + \varphi)(0-) = 0, \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu] x_1 ds + EI\varphi_{,1}(0-) = 0.$$

Из этих соотношений следует, что условия сопряжения означают равенство поперечных сил и моментов, действующих на включения. Для поставленной задачи получена эквивалентная формулировка в виде задачи минимизации функционала энергии и соответствующего вариационного неравенства. Для задачи с параметром жесткости упругого включения показано, что при стремлении данного параметра к бесконечности, предельная задача описывает равновесие упругого тела с тонким отслоившимся включением γ . При этом часть γ_t включения γ является жесткой, а часть γ_s - полужесткой.

В п.3.1.2 изучен случай, когда между γ_t и γ_s имеется излом в точке $(0, 0)$, то есть угол между γ_t и γ_s в точке $(0, 0)$ не является фиксированным. В этом случае краевая задача имеет следующий вид:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (25)$$

$$-ESw_{,11} = [\sigma_\tau] \text{ на } \gamma, \quad (26)$$

$$-E_1I\varphi_{,11} + Gh(v_{,1} + \varphi) = 0, -Gh(v_{,11} + \varphi_{,1}) = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_t, \quad (27)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; [w(0)] = [v(0)] = 0, \quad (28)$$

$$v|_{\gamma_s} \in L(\gamma_s); w = u_\tau^-, v = u_\nu^- \text{ на } \gamma, \quad (29)$$

$$w_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = \pm 1; \varphi + v_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \quad (30)$$

$$\varphi_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = -1, 0, \quad (31)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \sigma_\nu^+ \leq 0, \sigma_\tau^+ = 0, \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (32)$$

$$\int_{\gamma_s} [\sigma_\nu] ds - Gh(v_{,1} + \varphi)(0-) = 0, \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu] x_1 ds = 0. \quad (33)$$

Из (33) следует, что в случае излома в точке сопряжения изгибающий момент упругого включения, а также момент, действующий на полужесткое включение равны нулю. Вводя параметр жесткости $\delta > 0$ для упругого включения, получаем, что при $\delta \rightarrow \infty$ предельный случай соответствует задаче о сопряжении жесткого и полужесткого включений с изломом между ними.

В п. 3.1.3 обсуждается второй вид анизотропии отслоившегося полу-

жесткого включения. Приведем вид соответствующей краевой задачи:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (34)$$

$$-E_1 S w_{,11} = [\sigma_\tau], \text{ на } \gamma_t, \quad (35)$$

$$-E_1 I \varphi_{,11} + Gh(v_{,1} + \varphi) = 0, \quad -Gh(v_{,11} + \varphi_{,1}) = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_t, \quad (36)$$

$$w = c_0 \in \mathbb{R}, \quad E_2 I v_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_s, \quad (37)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; \quad w = u_\tau^-, \quad v = u_\nu^- \text{ на } \gamma, \quad (38)$$

$$v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = 1, \quad (39)$$

$$w_{,1} = \varphi + v_{,1} = \varphi_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \quad (40)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (41)$$

$$E_2 I v_{,11}(0+) = -E_1 I \varphi_{,1}(0-), \quad E_2 I v_{,111}(0+) = -Gh(v_{,1} + \varphi)(0-), \quad (42)$$

$$v_{,1}(0+) = -\varphi(0-); \quad [w(0)] = [v(0)] = 0; \quad w_{,1}(0-) = 0, \quad (43)$$

$$\int_{\gamma_s} \sigma_\tau^- ds = 0. \quad (44)$$

Если в предыдущем пункте вертикальные перемещения полужесткого включения имели заданную структуру, то в данном случае мы предполагаем, что вертикальные перемещения γ_s удовлетворяют уравнению упругой балки, в то время как горизонтальные являются постоянными (37). Соотношения (35)-(36) - уравнения равновесия упругого включения. Условия сопряжения составляют систему (42)-(44). В данной задаче также обоснован предельный переход по параметру жесткости упругого включения, в результате которого получена задача о сопряжении жесткого и полужесткого включений.

В разделе 3.2, независимо от результатов о предельном переходе в предыдущем разделе, рассмотрена задача о равновесии двумерного упругого тела, содержащего сопрягающиеся жесткое и полужесткое включения. В постановке задач учитывается также наличие трещины в теле по краю включения. В п.3.2.1 исследована задача с изломом между включениями. В этом случае дифференциальная постановка содержит: уравнения равновесия и состояния для упругого тела (34), уравнения и граничные условия на γ_r и γ_s :

$$u = \rho^0, \quad [u] = 0 \text{ на } \gamma_r, \quad (45)$$

$$E I v_{,1111} = [\sigma_\nu], \quad u_1^- = c_1 \in \mathbb{R}, \quad v = u_\nu^- \text{ на } \gamma_s, \quad (46)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma_s, \quad (47)$$

$$v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = -1; \quad v_{,11} = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad (48)$$

а также систему условий сопряжения вида

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1] ds + \int_{\gamma_s} [\sigma^1] ds = 0, \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2] ds = -EIV_{,111}(0), \quad (49)$$

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^2]x_1 - [\sigma^1]x_2) ds = 0, \quad v_{,11}(0) = 0, \quad (50)$$

$$c_1 = \rho_1^0(0), \quad v(0) = \rho_2^0(0), \quad (51)$$

где $\rho^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0) \in R(\gamma_r)$, $R(\gamma_r)$ определяется так же, как и в п.2.2.1. Заметим, что (49) предполагает нулевые нагрузки, приложенные на γ_r ; условие (50) задает нулевой момент на γ_r и нулевой изгибающий момент полужесткого включения γ_s в точке $(0, 0)$. Условия (51) являются кинематическими.

В п.3.2.2 рассмотрен случай, при котором γ_s и γ_r соединены между собой в условиях идеального сцепления, составляя таким образом неоднородное включение, состоящее из жесткой и полужесткой частей. В этом случае угол между γ_s и γ_r в точке $(0, 0)$ является фиксированным и (50) заменяется следующими соотношениями:

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^2]x_1 - [\sigma^1]x_2) ds = EIV_{,11}(0), \quad v_{,1}(0) = \rho_{2,1}^0(0), \quad (52)$$

означающими совпадение моментов и углов для сопрягающихся включений. Рассматривая предельный случай для параметра жесткости включения γ_s , стремящегося к бесконечности в случае модели без излома между γ_s и γ_r , получим модель, описывающую равновесие упругого тела Ω_γ с тонким жестким включением γ . При этом включение γ имеет отслоившуюся часть γ_s^+ .

Раздел 3.3 посвящен изучению задачи о сопряжении двух полужестких включений различного характера.

Пусть $\gamma_1 = (-1, 0) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (0, 1) \times \{0\}$ - два полужестких включения в упругом теле Ω ; $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0, 0)\}$, $\bar{\gamma} \subset \Omega$; $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$ - единичные векторы нормали и касательной к γ ; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, см. рис. 7. Включения γ_1 и γ_2 различны по своим свойствам, в частности, различны уравнения равновесия для них. Включение γ_1 имеет заранее задан-

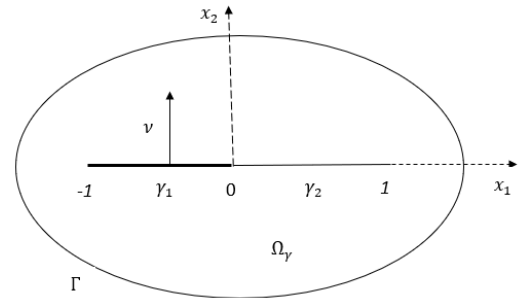


Рис. 7: Два полужестких тонких включения в упругом теле

ную структуру перемещений в направлении x_1 , в то время, как γ_2 имеет перемещения с заранее заданной структурой вдоль x_2 .

В п.3.3.1 получены эквивалентные вариационная и дифференциальная формулировки задачи для случая идеального сцепления между сопрягающимися включениями γ_1, γ_2 . Приведем дифференциальную постановку задачи равновесия. Для заданных внешних нагрузок $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$, действующих на тело, найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ , а также функции w, v , определенные на γ , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (53)$$

$$E_1 I v_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_1; \quad -E_2 S w_{,11} = [\sigma_\tau] \text{ на } \gamma_2, \quad (54)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; \quad w = u_\tau^-, \quad v = u_\nu^-, \text{ на } \gamma, \quad (55)$$

$$w|_{\gamma_1} \in \mathbb{R}, \quad v|_{\gamma_2} \in L(\gamma_2), \quad (56)$$

$$w_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = 1, \quad v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \quad (57)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0 \text{ на } \gamma, \quad (58)$$

$$[w(0)] = [v(0)] = 0, \quad \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] ds = E_1 I v_{,111}(0-), \quad \int_{\gamma_1} \sigma_\tau^- ds = E_2 S w_{,1}(0+), \quad (59)$$

$$[v_{,1}(0)] = 0; \quad \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] x_1 ds = -E_1 I v_{,11}(0-). \quad (60)$$

Здесь $L(\gamma_2)$ определяется аналогично пространству $L(\gamma_s)$ в п.3.1.1; функции w, v соответствуют перемещениям включения γ вдоль осей x_1 и x_2 соответственно. Соотношения (54) - уравнения равновесия для полужестких включений γ_1, γ_2 . В соответствии со второй группой условий (55), вертикальные (вдоль оси x_2) и горизонтальные (вдоль оси x_1) перемещения упругого тела совпадают с соответствующими перемещениями включений на γ^- . В то же время, согласно (56), вертикальные перемещения полужесткого включения γ_2 принадлежат $L(\gamma_2)$, горизонтальные перемещения γ_1 равны постоянной на γ_1 . Ограничения (59)-(60) составляют систему условий сопряжения в точке $(0, 0)$. В частности, между γ_1, γ_2 нет излома, что выражено в фиксированном угле между γ_1 и γ_2 .

В п.3.3.2 рассмотрена задача сопряжения для случая с наличием излома между включениями γ_1 и γ_2 . В данном случае условия сопряжения (60) заменяются на следующие соотношения:

$$E_1 I v_{,11}(0-) = 0, \quad \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] x_1 ds = 0.$$

Для случаев наличия и отсутствия излома между включениями получено обоснование предельного перехода при стремлении параметра жесткости одного из включений к бесконечности.

Четвертая глава посвящена разработке алгоритмов численного решения задач об анизотропных тонких включениях в двумерных упругих телах при наличии отслоения. В литературе имеются результаты численных расчетов для одиночных изотропных включений с отслоением, в то время, как для задач об анизотропных включениях, а также сопряжении их с другими видами включений таких результатов на сегодняшний день не имеется. В случае анизотропного включения численная реализация моделей двумерных упругих тел с тонкими включениями требует построения алгоритмов, учитывающих одновременно уравнения равновесия для перемещений в одном из направлений, а также специальные свойства на перемещения в другом направлении. Для задач о сопряжении двух включений в общей точке включений реализуются условия сопряжения, характерные для заданного вида соединения. В представленных примерах алгоритмы разработаны с использованием метода декомпозиции области, метода конечных элементов и алгоритма типа Удзавы.

В разделе 4.1 построен алгоритм численного решения для задачи о тонком отслоившемся полужестком включении в двумерном упругом теле.

Пусть упругое тело в недеформированном состоянии занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ , $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Тело закреплено по краю вдоль кривой Γ_D и испытывает внешние нагрузки на Γ_N . Через n обозначим единичный вектор нормали к Γ . В области Ω расположено тонкое включение, форма которого задана интервалом $\gamma = (-1, 1) \times \{0\} \subset \Omega$. Пусть $\bar{\gamma} \subset \Sigma$, где Σ - кривая, которая делит область Ω на две подобласти Ω^- и Ω^+ с липшицевыми границами таким образом, чтобы $\text{meas}(\partial\Omega^\pm \cap \Gamma_D) > 0$. Через ν и τ обозначим единичные векторы нормали и касательной к Σ соответственно. Заметим, что $\nu = (0, 1)$ и $\tau = (1, 0)$ на γ . Тонкое включение отслаивается с образованием трещины, поэтому задача рассматривается в области с разрезом $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Для берегов разреза введем обозначения: $\gamma^\pm \subset \partial\Omega^\pm$. Будем считать, что ν совпадает с внешней нормалью к границе $\partial\Omega^-$. Рассмотрим функцию w перемещений точек включения вдоль оси x_1 и вектор-функцию $\chi = (u, w)$. Поскольку перемещения включения совпадают с перемещениями точек тела на нижнем берегу разреза, то на γ^- выполняется условие $u_1 = w$. Перемещения точек нижнего берега разреза вдоль оси x_2 имеют заранее заданную структуру: $u_2 \in L(\gamma)$ на γ^- , где $L(\gamma) = \{l \mid l(x) = c^0 x_1 + c^1; c^0, c^1 \in \mathbb{R}\}$. Задачу о равновесии двумерного упругого тела, содержащего отслоившееся тонкое полужесткое включение, сформулируем в следующем виде. Для заданных на Γ_N функций $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок найти в Ω_γ поле перемеще-

ний $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того на γ найти перемещения w и элемент $l(x)$ пространства $L(\gamma)$ такие, что выполнено:

$$-\sigma_{ij,j}(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \quad (61)$$

$$u_1 = w; \quad u_2 = l \quad \text{на } \gamma^-, \quad (62)$$

$$-ESw_{,11} = [\sigma_\tau], \quad \text{на } \gamma^-, \quad (63)$$

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad i = 1, 2, \quad (64)$$

$$\sigma_{ij}(u)n_j = f_i \quad \text{на } \Gamma_N, \quad i = 1, 2, \quad (65)$$

$$w_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = \pm 1, \quad (66)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (67)$$

$$\int_\gamma [\sigma_\nu] \bar{l} ds = 0 \quad \forall \bar{l} \in L(\gamma). \quad (68)$$

При декомпозиции области с разрезом, Ω_γ делится на две подобласти путем продолжения кривой γ до пересечения с внешней границей. В каждой из полученных подобластей решается линейная задача. При этом в задаче для одной из подобластей учитывается наличие тонкого включения на границе этой подобласти. Решениями в подобластях являются вектор $\chi = (u^-, w)$ в Ω^- и функция u^+ в Ω^+ . Далее с помощью метода множителей Лагранжа строится алгоритм, учитывающий выполнение условий склейки перемещений на общей части границ контактирующих подобластей, исключая точки трещины, а также условий непроникания для точек на берегах трещины. Ввиду условий, заданных на структуру функции жестких вертикальных перемещений, необходимо применение дополнительных аналитических методов, позволяющих находить такие решения. Данные методы основаны на разложении линейного пространства в прямую сумму множества и его ортогонального дополнения.

Определим следующие функциональные пространства

$$V^- = \{\chi = (u^-, w) \in H^1(\Omega^-)^2 \times H^1(\gamma) \mid u_1^- = w \text{ на } \gamma; \\ u_1^- = u_2^- = 0 \text{ на } \partial\Omega^- \cap \Gamma_D\},$$

$$V^+ = \{u^+ \in H^1(\Omega^+)^2 \mid u_1^+ = u_2^+ = 0 \text{ на } \partial\Omega^+ \cap \Gamma_D\}$$

с нормами

$$\|\chi\|_{V^-}^2 = \int_{\Omega^-} \sigma(u^-)\varepsilon(u^-)dx + \int_\gamma ES w_{,1}^2 ds; \quad \|u^+\|_{V^+}^2 = \int_{\Omega^+} \sigma(u^+)\varepsilon(u^+)dx.$$

В пространстве V^- выделим подпространство

$$V_s^- = \{\chi \in V^- \mid u_2^- = l, \text{ на } \gamma, l \in L(\gamma)\}.$$

Для некоторого $p > 0$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ определим множества

$$\Lambda_1^p = \{\lambda_1 \in L^2(\gamma) \mid 0 \leq \lambda_1 \leq p \text{ на } \gamma\},$$

$$\Lambda_j^p = \{\lambda_j \in L^2(\gamma_g) \mid -p \leq \lambda_j \leq p \text{ на } \gamma_g\}, \quad j = 2, 3.$$

Итерационный алгоритм для нахождения решения поставленной задачи имеет следующий вид.

1. Определим вспомогательные функции

$$\chi^{(m)} \in V^-, \quad \chi^{(m)} = (u^{(m)}, w^{(m)}), \quad u_2^{(m)} = l^{(m)} \text{ на } \gamma,$$

такие, что $l^{(1)} = -x_1$, $l^{(2)} = -1$ и выполнено

$$\int_{\Omega^-} \sigma_{ij}(u^{(m)}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}) dx + \int_{\gamma} ES w_{,1}^{(m)} \bar{w}_{,1} ds = 0 \quad \forall \bar{\chi} \in V_{\gamma}^-, \quad m = 1, 2.$$

2. Вычисляем матрицу $B = \{b_{mn}\}_{m,n=1}^2$, где b_{mn} вычисляется как скалярное произведение элементов $\chi^{(m)}$ и $\chi^{(n)}$ в V^- .

3. Нулевая итерация $k = 0$. Задаем первоначальные значения для множителей Лагранжа $\mu^{c,0} \in \Lambda_p^c$, $\mu^{\nu,0} \in \Lambda_p^{\nu}$, $\mu^{\tau,0} \in \Lambda_p^{\tau}$.

4. Находим решение $u^{+,k}$ следующей задачи

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} \sigma_{ij}(u^{+,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}) dx - \int_{\gamma} \mu^{c,k} \bar{u}_2 ds - \int_{\gamma_g} \mu^{\nu,k} \bar{u}_2 ds - \\ & - \int_{\gamma_g} \mu^{\tau,k} \bar{u}_1 ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega^+} f_i \bar{u}_i dx \quad \forall \bar{u} \in V^+. \end{aligned}$$

5. Находим решение $\chi^{g,k} = (u^{g,k}, w^{g,k}) \in V^-$ следующей задачи

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^-} \sigma_{ij}(u^{g,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}) dx + \int_{\gamma} ES w_{,1}^{g,k} \bar{w}_{,1} + \int_{\gamma} \mu^{c,k} \bar{u}_2 ds + \\ & + \int_{\gamma_g} \mu^{\nu,k} \bar{u}_2 ds + \int_{\gamma_g} \mu^{\tau,k} \bar{u}_1 ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega^-} f_i \bar{u}_i ds \quad \forall \bar{\chi} \in V^-. \end{aligned}$$

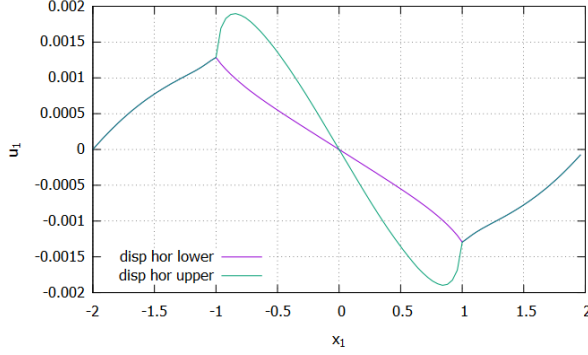


Рис. 8: Горизонтальные перемещения на Σ

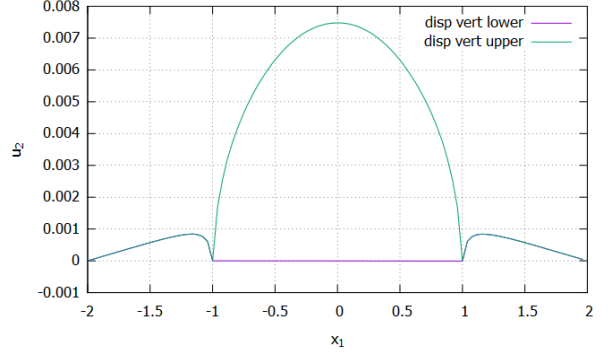


Рис. 9: Вертикальные перемещения на Σ

6. Определяем еще одну вспомогательную функцию $\chi^{0,k} = (u^{0,k}, w^{0,k}) \in V^-$, такую, что $u_2^{0,k} = u_2^{g,k}$ на γ и выполнено

$$\int_{\Omega^-} \sigma_{ij}(u^{0,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}) dx + \int_{\gamma} E S w_{,1}^{0,k} \bar{w}_{,1} ds = 0 \quad \forall \bar{\chi} \in V_{\gamma}^-.$$

7. Вычисляем компоненты вектора $C^k = (c_1^k, c_2^k)$, где c_m^k вычисляется как скалярное произведение элементов $\chi^{0,k}$ и $\chi^{(m)}$, $m = 1, 2$.
8. Определяем компоненты вектора $A^k = (A_1^k, A_2^k)$, $A^k = -C^k B^{-1}$.
9. Находим элемент $\chi^{A^k} = A_1^k \chi^{(1)} + A_2^k \chi^{(2)} + \chi^{(0),k}$.
10. Находим промежуточное решение $\chi^k = \chi^{g,k} - \chi^{A^k}$, $\chi^k = (u^{-,k}, w^k)$.
11. Для следующих итераций находим

$$\mu^{c,k+1} = P_{\Lambda_p^c}(\mu^{c,k} + \theta(u_2^{-,k} - u_2^{+,k})),$$

$$\mu^{\nu,k+1} = P_{\Lambda_p^\nu}(\mu^{\nu,k} + \theta(u_2^{-,k} - u_2^{+,k})),$$

$$\mu^{\tau,k+1} = P_{\Lambda_p^\tau}(\mu^{\tau,k} + \theta(u_1^{-,k} - u_1^{+,k})),$$

где $P_{\Lambda_p^c}$, $P_{\Lambda_p^\nu}$, $P_{\Lambda_p^\tau}$ - операторы проектирования на множества Λ_p^c , Λ_p^ν , Λ_p^τ в $L^2(\gamma)$, $L^2(\gamma_g)$ и $L^2(\gamma_g)$ соответственно.

12. Проверка критерия завершения цикла, при его выполнении $\chi^k, u^{+,k}$ - решение исходной задачи. Иначе переход со следующей итерацией $k + 1$ к шагу 4.

В качестве тестовых задач решены задачи о растяжении, а также нагружении с частичным смыканием трещины. Графики функций горизонтальных и вертикальных перемещений для случая растяжения изображены на рис. 8 и 9. Функции горизонтальных перемещений нижнего берега разреза на участке $(-1, 1)$ удовлетворяют уравнениям упругой линии (63), на

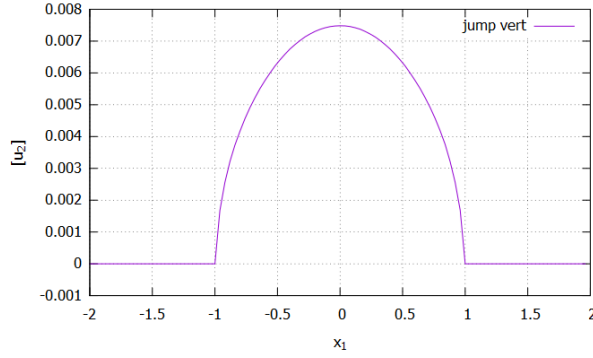


Рис. 10: Скачок нормальных перемещений точек, лежащих на оси абсцисс

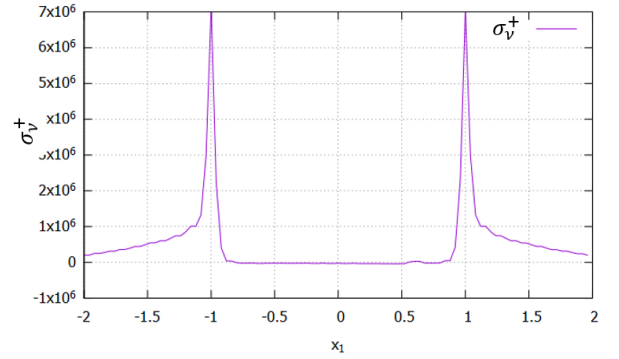


Рис. 11: Нормальные напряжения на Σ^+

остальной части отрезка $(-2, 2)$ перемещения точек на границах верхней и нижней подобластей совпадают. График функции вертикальных перемещений на нижнем берегу трещины линеен (что соответствует полужесткому включению, см. второе условие из (62)), на верхнем - нелинейный, при этом вне точек трещины вертикальные перемещения удовлетворяют условиям склейки. Рис. 10 и 11 иллюстрируют выполнение краевых условий на берегах трещины: во внутренних точках трещины скачки нормальных перемещений положительны, нормальные напряжения на положительном берегу в этих точках имеют близкие к нулю значения. При этом вне трещины скачки равны нулю, что означает выполнение условий склейки перемещений.

В разделе 4.2 разработан алгоритм численного решения задачи о сопряжении включения Тимошенко и тонкого полужесткого включения для случая с изломом.

Дифференциальная постановка задачи с изломом имеет вид (25) - (33), при этом вместо первого условия из (28) будем ставить условия вида:

$$u_i = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_{ij}(u)n_j = f_i \text{ на } \Gamma_N, \quad i = 1, 2, \quad (69)$$

где $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$; n - нормаль к Γ . С помощью разработанного в предыдущем разделе метода нахождения решения задачи о полужестком включении, построен алгоритм для рассматриваемой в данном разделе задачи с учетом условий сопряжения в общей точке включений. Решена тестовая задача о растяжении вдоль вертикальной оси упругого тела с тонким жестким и упругим включениями. Область Ω с границей $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ выбрана такой же, как и в разделе 2.4. Тонкие включения Тимошенко $\gamma_t = (-1, 0) \times \{0\}$ и полужесткое $\gamma_s = (0, 1) \times \{0\}$ отслаиваются, образуя трещину вдоль всей γ .

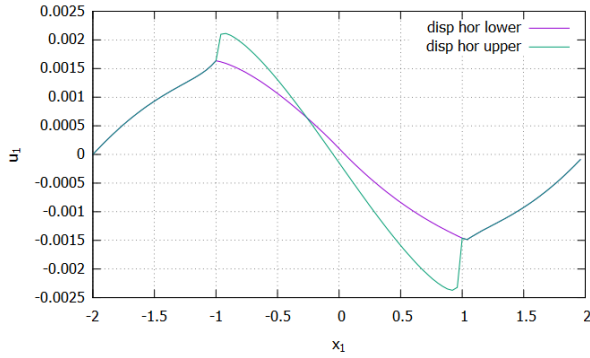


Рис. 12: Горизонтальные перемещения $u_1^\pm(x)$ на Σ

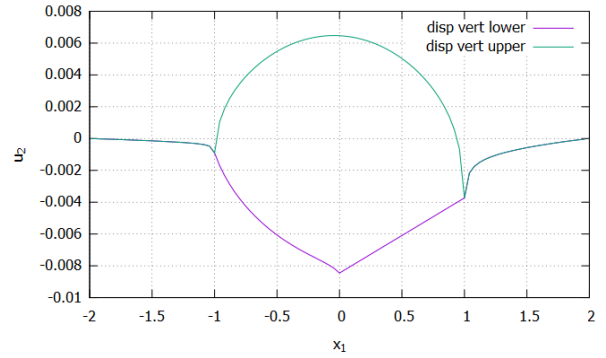


Рис. 13: Вертикальные перемещения $u_2^\pm(x)$ на Σ

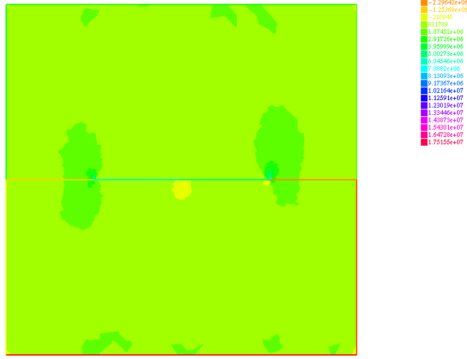


Рис. 14: Распределение компонент σ_{22} напряжений в области Ω_γ

На рис. 12, 13 изображены графики функций горизонтальных и вертикальных перемещений точек Σ^\pm оси абсцисс. На нижнем берегу разреза расположены тонкие включения, перемещения включений соответствуют участку $(-1, 1)$ фиолетовой линии. Функция горизонтальных перемещений w гладкая на γ , функция вертикальных перемещений v имеет угловую точку в $(0, 0)$. При этом функция v на $(-1, 0)$ соответствует упругим перемещениям, а на $(0, 1)$ график имеет линейный

вид, что соответствует жестким вертикальным перемещениям полужесткого включения, т.е. элементу $l \in L(\gamma_s)$. На участках оси абсцисс вне трещины перемещения совпадают, поскольку выполнены условия склейки. Как видно из рис. 14, компоненты тензора напряжений могут иметь особенности не только в концах трещины, но и в точке сопряжения включений.

В разделе 4.3 при аналогичных условиях на геометрию области и включений решена задача о сопряжении полужесткого и жесткого тонких включений в упругом теле. Полужесткое включение определено линией $\gamma_s = (-1, 0) \times \{0\}$, а жесткое - линией $\gamma_r = (0, 1) \times \{0\}$. Таким образом, имеем функцию упругих перемещений вдоль оси x_1 и жесткие перемещения на γ_s^- , а также жесткие вертикальные и горизонтальные перемещения на γ_r^- . На рис. 15, 16 изображены графики функций горизонтальных и вертикальных перемещений точек оси абсцисс, вычисленные на Σ^+ и Σ^- . Графики вертикальных перемещений γ_s , а также горизонтальных и верти-

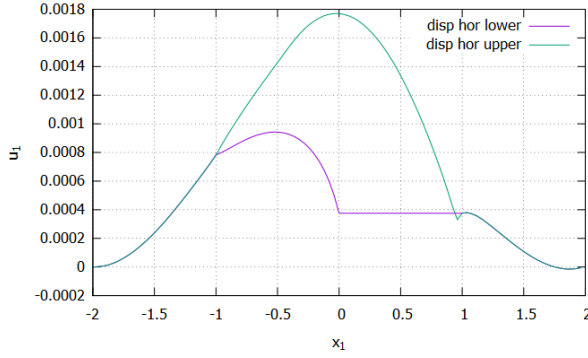


Рис. 15: Горизонтальные перемещения $u_1^\pm(x)$ граничных точек для подобластей Ω^\pm на интервале $(-2, 2) \times \{0\}$

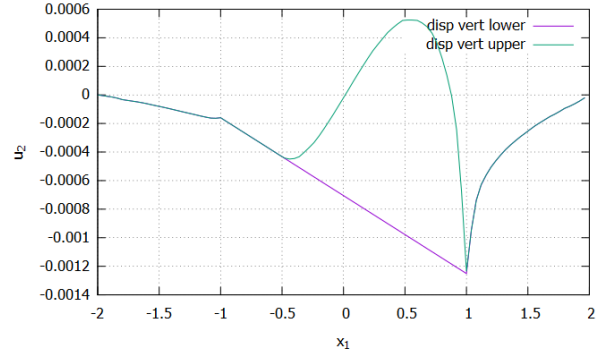


Рис. 16: Вертикальные перемещения $u_2^\pm(x)$ граничных точек для подобластей Ω^\pm на интервале $(-2, 2) \times \{0\}$

кальных перемещений γ_r имеют линейный вид, что соответствует моделям полужесткого и жесткого включений. На участках оси абсцисс вне трещины перемещения совпадают, поскольку выполнены условия склейки.

В **пятой главе** рассмотрены задачи для двумерного вязкоупругого тела с отслоившимся тонким включением.

В **разделе 5.1** рассматривается задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела, имеющего отслоившееся тонкое жесткое включение. Пусть вязкоупругое двумерное тело занимает в естественном недеформированном состоянии область $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей Γ и вектор $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек этого тела.

Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций и напряжений по формулам:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u = u(t, x), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\sigma_{ij}(t, x) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(t, x)) + \int_0^t \bar{a}_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(u(\tau, x)) d\tau, \quad i, j = 1, 2. \quad (70)$$

Введенные уравнения соответствуют закону, характеризующему вязкоупругое состояние тела. Отметим, что в отличие от уравнений равновесия, используемых вместе с законом Гука (упругое состояние), в рассматриваемой задаче величины компонент тензоров деформаций и напряжений не могут быть вычислены локально по t , а зависят от полной истории нагружения. Дифференциальную постановку задачи будем рассматривать в следующем виде. В цилиндре $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0, T)$ найти функции $u, \sigma_{ij}, i, j = 1, 2$, а также на $\gamma \times (0, T)$ найти функции $\rho^0 \in R_\gamma$, для которых выполняется

(70), а также следующие уравнения и граничные условия:

$$-\sigma_{ij,j}(t, x) = f_i(t, x), \quad i = 1, 2 \quad \text{в } Q_\gamma, \quad (71)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (72)$$

$$[u(t, x)]\nu(x) \geq 0, \quad \sigma_\nu^+(t, x) \leq 0, \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \quad (73)$$

$$\sigma_s^+(t, x) = 0, \quad \sigma_\nu^+(t, x)[u(t, x)]\nu(x) = 0 \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \quad (74)$$

$$u^-(t, x) = \rho_0(t, x), \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \quad (75)$$

$$\int_\gamma [\sigma_{ij}(t, x)\nu_j(x)]\bar{\rho}_i(x) ds = 0 \quad \forall \bar{\rho} \in R(\gamma) \text{ п.в. } t \in (0, T). \quad (76)$$

Здесь $R_\gamma = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(t, x) = D(t)x + G(t) \text{ на } \gamma \times (0, T)\}$, где $D(t) = \begin{pmatrix} 0 & d(t) \\ -d(t) & 0 \end{pmatrix}$, $G(t) = (g^1(t), g^2(t))$, $d, g^1, g^2 \in L^2(0, T)$; $R(\gamma)$ определяется так же, как и в разделе 2.2. Задача имеет единственное обобщенное решение, удовлетворяющее соответствующему вариационному неравенству. Для данной задачи доказано существование производной от функции решения при дополнительных условиях гладкости на функцию внешних нагрузок. Кроме того, показано, что задача о тонком жестком включении в вязкоупругом теле является предельной для семейства задач о прямоугольных жестких включениях при стремлении ширины прямоугольника к нулю.

В разделе 5.2 исследована задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела с тонким упругим включением. Тонкое прямолинейное включение будем моделировать как балку Бернулли-Эйлера, ось которой определяет линия $\gamma = (0, 1) \times \{0\}$. Включение отслаивается от вязкоупругой матрицы, образуя трещину по линии γ , на нижнем берегу которой расположено упругое включение. Вектор $u = (u_1, u_2)$ и функции w, v задают перемещения точек двумерного тела и включения соответственно. Вектор - функция перемещений $u = u(t, x)$ задана при $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\gamma$, $t \in (0, T)$, а функции $v = v(t, x_1)$ и $w = w(t, x_1)$ при $0 \leq x_1 \leq 1$, $t \in (0, T)$. Задачу о равновесии двумерного вязкоупругого тела, занимающего область Ω_γ и содержащего отслоившееся тонкое включение Бернулли-Эйлера, форму которого задает γ , сформулируем в следующем виде. Для заданных функций $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок найти поле перемещений $\chi = (u, w, v)$, где u ищется в цилиндре Q_γ , а функции w, v на $\gamma \times (0, T)$, а также найти тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ в Q_γ , такие, что выполнено (70)-(74), а также следующие уравнения и граничные условия:

$$-\delta w_{,11}(t, x_1) = [\sigma_s(t, x)] \quad \text{на } \gamma \times (0, T),$$

$$\begin{aligned} \delta v_{,1111}(t, x_1) &= [\sigma_\nu(t, x)] \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \\ w(t, x_1) &= u_s^-(t, x), \quad v(t, x_1) = u_\nu^-(t, x) \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \\ w_{,1}(t, x_1) &= v_{,11}(t, x_1) = v_{,111}(t, x_1) = 0 \quad \text{при } x = 0, 1; \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь $\delta > 0$ - параметр, характеризующий жесткость материала включения, который в дальнейшем будем устремлять к бесконечности. Доказано, что задача имеет единственное обобщенное решение. В п.5.2.3 показано, что задача о тонком жестком включении (раздел 5.1) является предельной для семейства задач о тонких упругих включениях при стремлении параметра δ к бесконечности.

В **заключении** сформулированы основные научные результаты, полученные в диссертации.

Список публикаций

- [1] Попова Т.С. О регулярности решений задачи равновесия для пластины с трещиной // Мат. заметки ЯГУ. 1996. Т. 3. Вып. 2. С. 124–132.
- [2] Popova T.S. The equilibrium problem for a linear elastic body with a crack // Мат. заметки ЯГУ. 1998. Т. 5. Вып. 1. С. 113–127.
- [3] Popova T.S. The equilibrium problem for a linear viscoelastic body with a crack // Мат. заметки ЯГУ. 1998. Т. 5. Вып. 2. С. 118–134.
- [4] Попова Т.С. Краевая задача с односторонними ограничениями на границе для упругой пластины // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10. Вып. 2. С. 83–89.
- [5] Попова Т.С. Задача о контакте двух вязкоупругих пластин, одна из которых имеет трещину // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12. Вып. 2. С. 60–92.
- [6] Попова Т.С. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13. Вып. 1. С. 105–121.
- [7] Лазарев Н.П., Попова Т.С. Вариационная задача о равновесии пластины с геометрически нелинейным условием непроникания для вертикальной трещины // Вестник Новосибирского государственного университета. 2011. Т. 11. Вып. 2. С. 77–88.
- [8] Попова Т.С. Задача о равновесии трехмерного вязкоупругого тела с жестким включением. Неклассические уравнения математической фи-

зики. Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2012. С. 177–186.

- [9] Попова Т.С. Жесткое включение в задаче о вязкоупругом теле с трещиной // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. Вып. 1. С. 73–92.
- [10] Попова Т.С. Задача о тонком жестком включении в вязкоупругом теле. Математика, ее приложения и математическое образование: материалы V межд. конф. Улан-Удэ, 2014. С. 273–277.
- [11] Попова Т.С. О моделировании вязкоупругого тела с тонким жестким включением // *Mathematica Montisnigri*. 2014. Vol. XXX, № 5 (114). С. 25–36.
- [12] Попова Т.С. Предельный переход в задаче о вязкоупругом теле с жестким включением и трещиной // Вестник СВФУ. 2014. Т. 11, № 1. С. 19–24.
- [13] Попова Т.С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с тонким жестким включением // Мат. заметки СВФУ. 2014. Том 21, № 1. С. 47–55.
- [14] Попова Т.С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким включением // Мат. заметки СВФУ. 2014. Том 21, № 2. С. 94–105.
- [15] Попова Т.С. Задача о контакте вязкоупругой пластины с упругой балкой // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 41–54.
- [16] Хлуднев А.М., Попова Т.С. Об иерархии тонких включений в упругих телах // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 87–105.
- [17] Khludnev A.M., Popova T.S. Junction problem for rigid and semi-rigid inclusions in elastic bodies // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. P. 1565–1577.
- [18] Khludnev A.M., Popova T.S. Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Quart. Appl. Math.* 2016. V. 74. P. 705–718.
- [19] Lazarev N., Popova T., Semenova G. Existence of an optimal size of a rigid inclusion for an equilibrium problem of a Timoshenko plate with Signorini-type boundary condition // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016; 18. P. 1-13.

- [20] Popova T., Rogerson G.A. On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. V. 67(4): 105.
- [21] Khludnev A.M., Popova T.S. On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies // *Z. Angew. Math Mech.* 2017. V. 97. P. 1406–1417.
- [22] Khludnev A.M., Popova T.S. Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2017. V. 30. P. 327–333.
- [23] Khludnev A.M., Popova T.S. On crack propagations in elastic bodies with thin inclusions // *Sib. Elect. Math. Reports.* 2017. V. 14. P. 586–599.
- [24] Khludnev A.M., Popova T.S. On Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary // *AIP Conf. Proceedings.* 2017. V. 1907: 020007.
- [25] Khludnev A.M., Popova T.S. Parameter identification problems for thin inclusions in elastic bodies. // *Journal of Physics: Conference Series.* 2017. V. 894(1):012101.
- [26] Khludnev A.M., Faella L., Popova T.S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Mathematics and Mechanics of Solids.* 2017. V. 22. N 4. P. 737–750.
- [27] Popova T. On the problem of thin elastic inclusion in two-dimensional viscoelastic body // *AIP Conference Proceedings.* 2017. V. 1907: 030045.
- [28] Попова Т.С. Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2018. Т. 21, №2. С. 66–78.
- [29] Лазарев Н.П., Рудой Е.М., Попова Т.С. Задача оптимального управления длиной поперечной трещины в модели о равновесии двумерного тела с двумя пересекающимися трещинами // *Мат. заметки СВФУ.* 2018. Т. 25, № 3. С. 43–53.
- [30] Lazarev N.P., Popova T.S., Rogerson G.A. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. V. 69 (53).
- [31] Khludnev A.M., Popova T.S. Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control // *Computers and Mathematics with Applications.* 2019. V. 77 (1). P. 253–262.

- [32] Хлуднев А.М., Попова Т.С. О задаче сопряжения двух слабо искривленных включений в упругом теле // Сиб. Мат. Ж. 2020. Т. 61, № 4. С. 932–945.
- [33] Khludnev A.M., Popova T.S. Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // J. Comp. Appl. Math. 2020. V. 376. A. 112870.
- [34] Khludnev A.M., Popova T.S. On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2020. V. 100:e202000063.
- [35] Popova T.S. On equilibrium of a two-dimensional viscoelastic body with a thin Timoshenko inclusion // Sib. Electr. Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 1463–1477.
- [36] Popova T.S. On numerical solving of junction problem for semirigid and Timoshenko inclusions in elastic body // Procedia Structural Integrity. 2020. V. 30. P. 113-119.
- [37] Popova T. Mathematical and numerical modeling of junction problems for Timoshenko inclusions in elastic bodies // AIP Conference Proceedings. 2021. V. 2328: 020004.
- [38] Popova T.S. Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28. №1. С.51–66.