Расширенная программа курса

Вариационное исчисление

В.В. Шелухин

для студентов 5 курса, семестр I (лекции 36 ч, семинар 18 ч)

1 Введение

Оптимальный дизайн (выбор наилучшей формы) в проблеме теплопроводности двухкомпонентной среды состоит в следующем (Рис. 1). Область Ω фиксирована. Подобласть с теплопроводностью α задается с помощью характеристической функции $\chi(x)$, т.е. в этой подобласти $\chi = 1$, и $\chi = 0$ там, где теплопроводностью равна β. В произвольной точке теплопроводность определяется формулой

$$a_\chi(x) = \alpha\chi(x) + \beta(1 - \chi(x)).$$

Распределение температуры u в области Ω находится из решения краевой задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_\chi \nabla u) = f & \text{в}\,\Omega \\ u = 0 & \text{на }\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x)$ - источник тепла.

Качество смеси характеризуется функционалом

$$J(\chi) = \int\limits_\Omega \chi(x) g_\alpha(x, u_\chi(x)) + (1 - \chi(x)) g_\beta(x, u_\chi(x))\, dx, \tag{2}$$

где u_χ - решение задачи (1). Объем материала α считается заданным:

$$\int\limits_\Omega \chi(x)\, dx = V_\alpha. \tag{3}$$

Оптимальный дизайн представляется собой следующую задачу минимизации:

$$\inf_{\int\limits_{\Omega} \chi(x)\,dx = V_\alpha} \quad J(\chi) \tag{4}$$

От условия (3) можно избавиться, если перейти к задаче минимизации

$$\inf_{\chi} \quad [J(\chi) + \lambda \int\limits_{\Omega} \chi(x)\,dx] \tag{5}$$

с неопределенным множителем Лагранжа λ. Это следует из следующего утверждения.

Теорема 1.1. Пусть функционалы $F, F_1, \cdots, F_n$ на гильбертовом пространстве V дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x_0 \in M$, где

$$M = \{x \in V : \quad F_i(x) = 0,\, i = 1, \cdots, n\}.$$

Если в точке x_0 достигается локальный экстремум функционала F на множестве M, то существуют числа $\lambda_0,\ \lambda_1, \cdots,\ \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_0 F'(x_0) + \sum_{1}^{n} \lambda_i F_i'(x_0) = 0. \quad \dagger$$

Альтернативой функционалу (2) является функционал

$$J(\chi) = \int\limits_{\Gamma} \chi(x) g_\alpha(x, u_\chi(x)) + (1 - \chi(x)) g_\beta(x, u_\chi(x))\,ds, \tag{6}$$

где Γ - некая гиперповерхность в Ω. Контрпримеры показывают, что в общем случае задача минимизации (5) может не иметь решения среди функций $\chi(x)$ из множества $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$. Оказывается, что оптимальный дизайн возможен, если по-другому определить понятие решения задачи минимизации. Для этого применяется метод гомогенизации.

2 Постановка задачи гомогенизации коэффициента теплопроводности для двухкомпонентной среды с периодической структурой.

Размер ячейки периодичности ε мал по сравнению с размером области Ω, Рис.2. Температура удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u\right) = f & \text{в}\ \Omega \\ u = 0 & \text{на}\ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

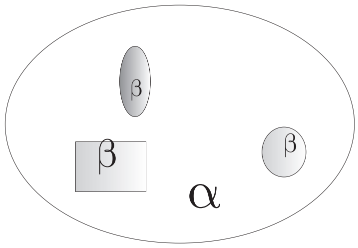

Рис. 1: Двухкомпонентная область Ω с теплопроводностями α и β

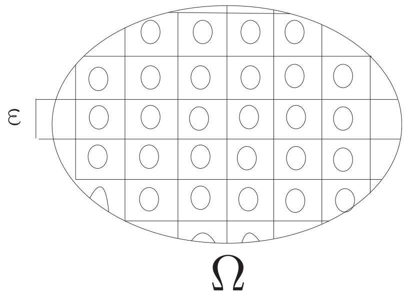

Рис. 2: Периодическая структура

где $A_{ij}(y)$ - периодическая матрица с периодической ячейкой $Y = (0,1)^N$. Проблема гомогенизации состоит в нахождении предела последовательности u_ε при $\varepsilon \to 0$, где u_ε - решение задачи (7). Переменная y называется быстрой.

3 Метод двухмасштабных асимптотических разложений

В рамках формального метода двухмасштабных асимптотических разложений решение $u_\varepsilon(x)$ ищется в виде ряда

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, x/\varepsilon), \tag{8}$$

где функции $u_i(x,y)$ являются Y-периодическими по переменной y. Так как цель гомогенизации состоит в нахождении предела при $\varepsilon \to 0$, то в разложении (8) интерес представляет только коэффициент u_0.

Ввиду формулы

$$\nabla u_i\left(x, x/\varepsilon\right) = \left[\varepsilon^{-1}\nabla_y u_i(x,y) + \nabla_x u_i(x,y)\right]|_{y=x/\varepsilon}$$

уравнение (7) записывается в виде ряда

$$-\varepsilon^{-2}(\cdots)_{-2}(x,y)-\varepsilon^{-1}(\cdots)_{-1}(x,y)-\varepsilon^{0}(\cdots)_{0}(x,y)-\sum_{1}^{\infty}\varepsilon^{i}(\cdots)_{i}(x,y)=f(x), \qquad (9)$$

где $y = x/\varepsilon$. Суть эвристического метода двухмасштабных разложений состоит в постулировании равенств

$$(\cdots)_k(x,y)=0, \quad k=-2,-1,0,\cdots \qquad (10)$$

в которых переменные x, y считаются независимыми. Решение уравнений (10) при $k=-2,-1,0$ приводит к выводам: функция $u_0(x,y)\equiv u(x)$ не зависит от y и удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A^h\nabla u\right)=f & \text{в}\,\Omega \\ u=0 & \text{на}\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (11)$$

где постоянная матрица A^h определяется равенствами

$$A^h_{ij}=\int\limits_Y (A(y)(\mathbf{e}_i+\nabla_y w_i)\cdot(\mathbf{e}_j+\nabla_y w_j)\,dy,$$

в которых $(\mathbf{e}_i)_{1\le i\le N}$ - канонический базис в $\mathbb{R}^N$, а функция $w_i(y)$ представляет собой Y-периодическое решение следующего уравнения на ячейке Y:

$$-\operatorname{div}_y\left[A(y)\left(\mathbf{e}_i+\nabla_y w_i\right)\right]=0. \qquad (12)$$

4 Свойства усредненного тензора теплопроводности

Матрица A^h является симметричной, если $A(y)$ - симметрична при каждом y. Матрица A^h вполне определяется квадратичной формой $A^h\xi\cdot\xi$.

Справедлив вариационный принцип

$$A^h\xi\cdot\xi=\min_{w\in H^1_\sharp(Y)}\int\limits_Y (A(y)(\xi+\nabla_y w)\cdot(\xi+\nabla_y w)\,dy, \qquad (13)$$

где $H^1_\sharp(Y)$ - пространство периодических функций с ограниченным интегралом энергии

$$\int\limits_Y w^2+|\nabla w|^2\,dy.$$

Справедливы оценки

$$\left(\int\limits_Y A^{-1}(y)\right)^{-1}\xi\cdot\xi\le A^h\xi\cdot\xi\le\left(\int\limits_Y A(y)\,dy\right)\xi\cdot\xi. \qquad (14)$$

5 Слабая сходимость

Пусть Ω - открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Для $1 \le p \le \infty$ пространство Лебега $L^p(\Omega)$ состоит из измеримых функций $u(x)$ с ограниченной нормой

$$\|u\|_p = (\int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx)^{1/p} \qquad 1 \le p < \infty$$

и

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Сходимость $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega)$ означает

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_p = 0.$$

Слабая сходимость u_ε к u в $L^p(\Omega)$ при $1 \le p < \infty$ определяется условием

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x)\, dx = \int\limits_\Omega u(x)\phi(x)\, dx \quad \forall \quad \phi \in L^{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{15}$$

и обозначается $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^p(\Omega)$. Последовательность u_ε из $L^\infty(\Omega)$ сходится $*$-слабо к u в $L^\infty(\Omega)$, если условие (15) выполняется $\forall \phi \in L^1(\Omega)$.

Лемма 5.1. Пусть последовательность (u_ε) ограничена в $L^p(\Omega)$, $1 < p \le \infty$. Тогда существуют подпоследовательность (u_ε) (сохранено прежнее обозначение) и функция u такие, что (u_ε) сходится слабо к u в $L^p(\Omega)$, если $1 < p < \infty$, и $*$-слабо, если $p = \infty$.†

Лемма 5.2. Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega)$. Тогда существуют подпоследовательность (u_ε) (сохранено прежнее обозначение)и функция $h \in L^p(\Omega)$ такие, что

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega,$$

$$|u_\varepsilon(x)| \le h(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.†$$

Лемма 5.3. Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть последовательность (u_ε) ограничена в $L^p(\Omega)$, $1 < p \le \infty$, и пусть $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ п.в. в Ω. Тогда $u_\varepsilon \to u$ в $L^q(\Omega)$ при $1 \le q < p$.†

Пример. $u_\varepsilon \equiv \sin(x/\varepsilon) \rightharpoonup 0$, $x \in \mathbb{R}$, в любом пространстве $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. Однако $|u_\varepsilon|^2 \rightharpoonup 1/2$ в любом пространстве $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. Таким образом, слабый предел произведения двух функций не совпадает с произведением слабых пределов.

Лемма 5.4. Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть $u_\varepsilon \to u$ сильно в $L^p(\Omega)$ и $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ в $L^{p'}(\Omega)$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда произведение $u_\varepsilon v_\varepsilon$ сходится к uv в смысле распределений.†

Лемма 5.5. (Интерполяционное неравенство.) Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \le p \le q \le \infty$. Тогда $\in L^r(\Omega)$ и

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha} \quad \text{где} \quad r \in [p,q], \quad \alpha = \frac{q/r - 1}{q/p - 1}.\dagger$$

Следствием является следующее утверждение. Если последовательность u_ε ограничена в $L^p(\Omega)$ и сходится сильно в $L^q(\Omega)$, то она сходится сильно и в $L^r(\Omega)$ при $q \le r < p$.

Пространство Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ содержит все функции из $L^p(\Omega)$, чьи обобщенные производные в смысле распределений также лежат в $L^p(\Omega)$. Норма в $W^{1,p}(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_{1,p}^p = \int\limits_\Omega |u(x)|^p + |\nabla u|^p \, dx.$$

Лемма 5.6. (Rellich.) Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Пусть последовательность u_ε ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Тогда существует подпоследовательность u_ε (сохранено прежнее обозначение) и функция u такие что $u_\varepsilon \to u \in W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$.†

Лемма 5.7. (Теорема вложения.) Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Тогда

$$\|u\|_q \le c\|u\|_{1,p}, \qquad \begin{cases} 1 \le q \le \frac{pN}{N-p} & \text{при} \quad 1 \le p < N \\ 1 \le q < \infty & \text{при} \ \ N \le p, \end{cases}$$

где постоянная c зависит лишь от Ω, p и q.†

Лемма 5.8. Пусть последовательность u_ε содержится в компактном множестве метрического пространства E. Пусть все сходящиеся подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу. Тогда вся последовательность сходится к этому единственному пределу.†

Лемма 5.9. (Неравенство Пуанкаре) Пусть $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \equiv H_0^1(\Omega)$, где $W_0^{1,2}(\Omega)$ - замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W^{1,2}(\Omega)$. Тогда найдется положительная постоянная c такая, что

$$\|u\|_2 \le c\|\nabla u\|_2 \quad \forall \quad u \in H_0^1(\Omega).\dagger$$

Лемма 5.10. Пусть $f \in (W^{1,p}(\Omega))'$, тогда найдутся функции $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, $|\alpha| \leq 1$, такие, что

$$\langle f, \varphi \rangle = -\sum_{|\alpha|\leq 1} \int\limits_{\Omega} f_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\, dx \quad \forall\, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)).\dagger$$

6 Понятие H-сходимости

В этом пункте рассматривается общая ситуация, когда нет гипотезы о периодической структуре пространства и, вообще, речь не идет о двухфазном композите. $\mathcal{M}_N$ - множество квадратных матриц порядка N. При заданных положительных числах α и β со свойством $\alpha\beta \leq 1$ введем подмножетсво

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \{M \in \mathcal{M}_N : M\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2,\ M^{-1}\xi \cdot \xi \geq \beta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\}.$$

Определение 6.1. Последовательность матриц $A^\varepsilon(x)$ из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ сходится в смысле гомогенизации (H-сходится) к матрице $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$, если $\forall f \in H^{-1}(\Omega) \equiv (H_0^1(\Omega))^*$ последовательность u_ε решений задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{в}\,\Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на }\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{16}$$

удовлетворяет свойствам

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A\nabla u & \text{в} \quad L^2(\Omega)^N, \end{cases} \tag{17}$$

где u - решение задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A \nabla u) = f & \text{в}\,\Omega \\ u = 0 & \text{на }\ \partial\Omega. \end{cases} \quad \dagger \tag{18}$$

Для H-сходимости будем использовать обозначение $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A$.

Теорема 6.1. Для любой последовательности матриц $A^\varepsilon(x)$ из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ существует подпоследовательность $A^\varepsilon(x)$ (сохранено прежнее обозначение) и матрица $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ такие, что $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A$.

Теорема 6.2. Пусть $A^\varepsilon(x)$ и $B^\varepsilon(x)$ - две последовательности матриц из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$, которые H-сходятся к $A(x)$ и $B(x)$ соответственно. Пусть Ω_1 открытое множество такое, что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Если $A^\varepsilon(x) = B^\varepsilon(x)$ в Ω_1 то $A(x) = B(x)$ в Ω_1.$\dagger$

Замечание. Из той теоремы вытекает единственность H-предела.

Теорема 6.3. Пусть $A^\varepsilon(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ и $A^\varepsilon(x) \xrightarrow{H} A(x)$. Для любой последовательности $z_\varepsilon(x) \in H^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^\varepsilon \nabla z_\varepsilon) = f_\varepsilon \to f & \text{в } H^{-1}_{loc}(\Omega) \\ z_\varepsilon \rightharpoonup z & \text{в } H^1_{loc}(\Omega), \end{cases} \dagger \tag{19}$$

последовательность A^ε удовлетворяет условию

$$A^\varepsilon \nabla z_\varepsilon \rightharpoonup A\nabla z \quad \text{в } L^2_{loc}(\Omega)^N. \dagger$$

Замечание. Из этой теоремы следует, что понятие сходимости не зависит от граничных условий.

Доказательство указанных центральных теорем по гомогенизации опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 6.1. (div-curl-лемма) Пусть последовательности u_ε и v_ε из $L^2(\Omega)^N$ сходятся слабо в $L^2(\Omega)^N$ к u и v соответственно. Введем матрицу $\mathrm{curl}\, v$

$$(\mathrm{curl}\, v)_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{1 \le i,j \le N}.$$

Предположим, что

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, u_\varepsilon \to \mathrm{div}\, u & \text{в } H^{-1}(\Omega) \\ \mathrm{curl}\, v_\varepsilon \to \mathrm{curl}\, v & \text{в } H^{-1}(\Omega; \mathcal{M}_N) \end{cases}$$

Тогда $u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \to u \cdot v$ в смысле распределений.†

Лемма 6.2. Пусть V_1- сепарабельное банахово пространство и V_2 - рефлексивное банахово пространство. Пусть последовательность S_ε из $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ ограничена в $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Тогда существуют подпоследовательность S_ε (сохранено прежнее обозначение) и ограниченные линейный оператор S_0 такие, что

$$\|S_0\| \le \lim\, \mathrm{inf}_{\varepsilon \to 0} \|S_\varepsilon\|$$

и

$$S_\varepsilon f \rightharpoonup S_0 f \quad \text{в} \quad V_2 \quad \forall f \in V_1. \dagger$$

Лемма 6.3. Пусть V - сепарабельное и рефлексивное банахово пространство. Пусть α и β - положительные постоянные. Пусть последовательность операторов $T_\varepsilon \in \mathcal{L}(V, V')$ обладает свойствами

$$\langle T_\varepsilon v, v \rangle \ge \alpha |v|^2_V \quad \forall\, v \in V, \tag{20}$$

$$\langle T_\varepsilon^{-1} f, f\rangle \geq \beta |f|^2_{V'} \quad \forall\, f \in V' \tag{21}$$

Тогда существуют подпоследовательность T_ε (сохранено прежнее обозначение) и предельный оператор $T_0 \in \mathcal{L}(V, V')$, который обладает свойствами (20),(21) и, кроме того,

$$T_\varepsilon^{-1} f \rightharpoonup T_0^{-1} f \quad \text{в} \quad V' \quad \forall\, f \in V'.\dagger \tag{22}$$

$\mathcal{M}_N^s$ - линейное пространство вещественных квадратных симметричных матриц порядка N. Пусть α, β - положительные постоянные. Введем подмножество

$$\mathcal{M}^s_{\alpha,\beta} = \{M \in \mathcal{M}^s_N : M\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2,\ M^{-1}\xi \cdot \xi \geq \beta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\}. \tag{23}$$

Определение 6.2. Последовательность матриц $A^\varepsilon(x)$ из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ сходится к матрице $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ в смысле G-сходимости, если $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$ последовательность u_ε решений задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{в}\,\Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на }\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{24}$$

сходится слабо в $H^1_0(\Omega)$ к решению u задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A \nabla u) = f & \text{в}\,\Omega \\ u = 0 & \text{на}\,\partial\Omega. \end{cases} \quad \dagger \tag{25}$$

Теорема 6.4. Для любой последовательности матриц $A^\varepsilon(x)$ из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ существует подпоследовательность $A^\varepsilon(x)$ (сохранено прежнее обозначение) и матрица $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ такие, что $A^\varepsilon(x) \xrightarrow{G} A(x)$.

Теорема 6.5. Последовательность матриц $A^\varepsilon(x)$ из $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ сходится к $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}^s_{\alpha,\beta})$ в смысле G-сходимости тогда и только тогда, когда она H-сходится к $A(x)$.†

7 Композитный материал

В этом разделе нет гипотезы о периодической структуре композитного материала. Пусть A, B две симметричные положительно определенные матрицы порядка N, связанные с компонентами среды.

Определение 7.1. Пусть $\chi_\varepsilon \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})$ - последовательность характеристических функций и A_ε - последовательность матриц определена формулой

$$A_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x)A + (1-\chi_\varepsilon(x))B. \tag{26}$$

Предположим, что существуют $\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ и $A^h \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}_N^s)$ такие, что

$$\chi_\varepsilon(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta(x) \quad \text{в} \quad L^\infty(\Omega;[0,1]), \tag{27}$$

$$A_\varepsilon(x) \overset{H}{\to} A^h(x). \tag{28}$$

Матрица $A^h(x)$, полученная в результате H-предела называется гомогенизированным тензором композитного материала, являющегося усреднением компонентов A и B в пропорциях θ и $(1-\theta)$ с микроструктурой, определяемой последовательностью χ_ε.†

При заданной функции плотности θ введем множество

$$\mathcal{G}_\theta = \{A^h \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}_N^s) : \exists\, \chi_\varepsilon \,\text{со свойством}\, (27), \exists\, A_\varepsilon \,\text{вида}\, (26)\, \text{со свойством}\, (27).\} \tag{29}$$

Для более детальной характеристики этого множества рассмотрим частный случай, когда последовательность χ_ε ассоциицрована с периодической гомогенизаций. Для фиксированной постоянной $\theta \in [0,1]$ рассмотрим характеристическую функцию $\chi(y)$ с условием

$$\int\limits_Y \chi(y)\, dy = \theta. \tag{30}$$

Подобно формуле (13) устанавливается, что периодическая гомогенизация приводит к постоянной симметричной матрице A^h, которая определяется по формуле

$$A^h\xi\cdot\xi = \min_{w\in H^1_\sharp(Y)} \int\limits_Y (\chi(y)A + (1-\chi(y))B)(\xi+\nabla_y w)\cdot(\xi+\nabla_y w)\, dy. \tag{31}$$

Введем подмножество P_θ в $\mathcal{M}_N^s$:

$$P_\theta = \{A^h \in \mathcal{M}_N^s : A^h \,\text{определяется формулой}\, (31), \quad \chi(y)\, \text{удовлетворяет}\ (30)\}. \tag{32}$$

Обозначим замыкание этого множества в $\mathcal{M}_N^s$ через G_θ:

$$G_\theta = \overline{P_\theta}. \tag{33}$$

Теорема 7.1. Для любой функции $\theta(x)$ из $L^\infty(\Omega;[0,1])$

$$\mathcal{G}_\theta = \{A^h \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_N^s) : A^h(x) \in G_{\theta(x)} \text{ п.в. в } \Omega\}.\dagger \qquad (34)$$

Отсюда следует, что все композиты, полученные путем периодической гомогенизации, плотны во множестве всех композитов. Множество (34) называется G-замыканием

Доказательство Теоремы 7.1 опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 7.1. Множество $\mathcal{G}_\theta$ устойчиво относительно гомогенизации т.е. предел A^h любой сходящейся последовательности $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_\theta$ также принадлежит $\mathcal{G}_\theta$. †

Лемма 7.2. Пусть $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ - две характеристические функции. Пусть матрицы A_1^h и A_2^h из $\mathcal{M}_N^s$ получены путем периодической гомогенизации матриц $\chi_1 A + (1-\chi_1)B$ и $\chi_2 A + (1-\chi_2)B$ по формуле (31). Тогда существуют положительные постоянные C и δ, не зависящие от χ_1, χ_2, такие что

$$\|A_1^h - A_2^h\| \leq C \left(\int_Y |\chi_1 - \chi_2|\, dy \right)^\delta, \qquad (35)$$

где $\|\cdot\|$ - норма в $\mathcal{M}_N^s$.†

Хаусдорфово расстояние между двумя компактными множествами определяется равенством

$$d(K_1, K_2) = \max_{x_1 \in K_1} \min_{x_2 \in K_2} d(x_1, x_2) + \max_{x_2 \in K_2} \min_{x_1 \in K_1} d(x_2, x_1),$$

где d - евклидово расстояние.

Лемма 7.3. Существуют положительные постоянные C и δ, такие что

$$d(G_{\theta_1}, G_{\theta_2}) \leq C|\theta_1 - \theta_2|^\delta \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in [0,1].\dagger \qquad (36)$$

Теорема 7.2. (Хашин-Штрикман) Для любой матрицы $A^h \in G_\theta$ справедливы оценки

$$A^h : \xi^T \xi \leq B : \xi^T \xi + \theta \min_{\eta \in \mathcal{M}_N} \left[2\xi : \eta + (B-A)^{-1} : \eta^T \eta - (1-\theta) h(\eta) \right] \forall \xi \in \mathcal{M}_N, \quad (37)$$

$$A^h : \xi^T \xi \geq A : \xi^T \xi + (1-\theta) \max_{\eta \in \mathcal{M}_N} \left[2\xi : \eta - (B-A)^{-1} : \eta^T \eta - \theta g(\eta) \right] \forall \xi \in \mathcal{M}_N, \quad (38)$$

где

$$h(\eta) = \min_{k \in \mathbb{Z}^N, k \neq 0} \frac{|\eta k|^2}{Bk \cdot k}, \quad g(\eta) = \max_{k \in \mathbb{Z}^N, k \neq 0} \frac{|\eta k|^2}{Ak \cdot k}.$$

Эти оценки оптимальны. †

В частом случае, когда

$$A = \alpha I, \quad B = \beta I, \quad 0 < \alpha < \beta,$$

справедливо следующее описание множества G_θ.

Теорема 7.3. Множество G_θ является выпуклым и состоит из симметричных матриц, собственные числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ которых удовлетворяют условиям

$$\lambda_\theta^- \le \lambda_i \le \lambda_\theta^+ \quad 1 \le i \le N, \tag{39}$$

$$\sum_1^N \frac{1}{\lambda_i - \alpha} \le \frac{1}{\lambda_\theta^- - \alpha} + \frac{N-1}{\lambda_\theta^+ - \alpha}, \tag{40}$$

$$\sum_1^N \frac{1}{\beta - \lambda_i} \le \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} + \frac{N-1}{\beta - \lambda_\theta^+}, \tag{41}$$

где

$$\lambda_\theta^- = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta}\right)^{-1}, \quad \lambda_\theta^+ = \theta\alpha + (1-\theta)\beta.\dagger$$

8 Понятие обобщенного решения (дизайна) и гомогенизация

Лемма 8.1. Пусть K - подмножество в $\mathbb{R}^p$. Замыканием пространства $L^\infty(\Omega; K)$ в смысле $*$-слабой сходимости является пространство $L^\infty(\Omega; \mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$-замкнутая выпуклая оболочка множества K.†

В классической постановке, т.е. в терминах характеристической функции, задача оптимального дизайна состоит в следующем:

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J(\chi), \tag{42}$$

т.е. требуется найти функцию $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$, на которой достигается минимум функционала

$$J(\chi) = \int_\Omega \chi(x) g_\alpha(x, u_\chi(x)) + (1 - \chi(x)) g_\beta(x, u_\chi(x))\, dx + \lambda \int_\Omega \chi(x)\, dx,$$

где λ - некоторый заданный вещественный параметр и u_χ - единственное решение задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\chi \nabla u_\chi) = f & \text{в } \Omega \\ u_\chi = 0 & \text{на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{43}$$

здесь

$$f \in L^2(\Omega), \quad a_\chi = \alpha\chi + (1-\chi)\beta.$$

Условия на функции $g_\alpha(x,z)$ и $g_\beta(x,z)$:

$$\begin{cases} x \to g_{\alpha,\beta}(x,z) & \text{измирима}\, \forall z \in \mathbb{R} \\ z \to g_{\alpha,\beta}(x,z) & \text{непрерывна для п.в. } x \in \Omega, \\ |g_{\alpha,\beta}(x,z)| \le k(x) + Cz^m, & \text{где}\, k \in L^1\Omega,\ 1 \le m < \frac{2N}{N-2}. \end{cases} \tag{44}$$

(При $N = 1$ или $N = 2$ условие на m имеет вид $1 \le m < \infty$.)

Множество допустимых обобщенных дизайнов:

$$\mathcal{CD} = \{(\theta, A) \in L^\infty(\Omega; [0,1] \times \mathcal{M}_N^s) : A(x) \in G_{\theta(x)} \,\text{п.в. в}\, \Omega\}, \tag{45}$$

где при каждой постоянной $\theta \in [0,1]$ множество G_θ определено Теоремой 7.3.

На множестве $\mathcal{CD}$ рассматривается функционал

$$J^*(\theta, A) = \int\limits_\Omega \theta(x) g_\alpha(x, u(x)) + (1-\theta(x)) g_\beta(x, u(x))\, dx + \lambda \int\limits_\Omega \theta(x)\, dx, \tag{46}$$

где $u \in H_0^1(\Omega)$ единственное решение задачи

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f & \text{в}\, \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{47}$$

Обобщенной постановкой является следующая задача минимизации:

$$\min_{(\theta,A)\in\mathcal{CD}} \quad J^*(\theta, A). \tag{48}$$

Теорема 8.1. Задача (48) является обобщением задачи (42) в следующем смысле:

1. Функционал J^* достигает минимума, по-крайней мере, на одном элементе из $\mathcal{CD}$.

2. Для любой минимизирующей последовательности χ_n классического функционала J существует подпоследовательность χ_n (сохранено прежнее обозначение), сходящаяся $*$-слабо в $L^\infty(\Omega; [0,1])$ к функции плотности θ; соответствующая последовательность проводимостей $a_{\chi_n} = \alpha\chi_n + \beta(1-\chi_n)$ сходится к гомогенизированной матрице A так, что функционал J^* достигает минимума на $(\theta, A) \in \mathcal{CD}$.

3. Для каждого минимизирующего элемента $(\theta, A) \in \mathcal{CD}$ функционала J^* найдется минимизирующая последовательность χ_n классического функционала J, такая, что θ-$*$-слабый предел в $L^\infty(\Omega; [0,1])$ последовательности χ_n и $A \stackrel{H}{\to} a_{\chi_n} = \alpha\chi_n + \beta(1-\chi_n)$. †

Список литературы

[1] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит. 1993.

[2] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. Москва, Мир, 1984.

[3] Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение: методы и приложения. Белая серия в маитематике и физике Т. 3. Новосибирск: Изд-во "Тамара Рожковская 2007.

[4] Gregoire Allaire. Shape Optimization by the Homogenization Method. Springer-Verlag, New York, 2002.

9 Задачи и упражнения

Множители Лагранжа

1. Производная функционала $F : V \to \mathbb{R}$ по Гато:

$$\delta F(x_0, h) = \frac{d}{dt} F(x_0 + th)|_{t=0} \quad x_0, h \in V.$$

Если $\delta F(x_0, h)$ линейно зависит от h, т.е. $\exists F'(x_) \in V'$, $\delta F(x_0, h) = F'(x_0)\dot{h}\ \forall h \in V$, то $F'(x_0)$ - производная по Фреше. Пусть $x_0 \in V$ - точка минимума функционала F(x). Пусть существует $\delta F(x_0, h)$. Доказать, что $\delta F(x_0, h) = 0 \forall h \in V$.

2. (Лемма Лакса-Мильграма.) Пусть $a(u, v)$ - билинейная форма,$V \times V \to \mathbb{R}$, на гильбертовом пространстве V является ограниченной и коэрцитивной:

$$a(u, v) \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$$

$$a(u, u) \geq c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

Пусть $f \in V'$, где V' - сопряженной с V пространство. Тогда существует единственное решение $u \in V$ уравнения

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

3. Пусть билинейная форма $a(u,v)$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$, на гильбертовом пространстве V является симметричной. Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{v \in V} F(v), \quad F(v) = a(v,v)/2 - \langle f, v \rangle.$$

Доказать, что уравнением Эйлера является уравнение $Au = f$, где оператор $A : V \to V'$ определен равенством

$$\langle Au, v \rangle = a(u,v).$$

4. Пусть V - гильбертово пространство. Пусть $0 \neq L_i \in V'$, $i = 1, \cdots, n$. Пусть L_i, $i = 1, \cdots, n$ линейно независимы и

$$E = \{h \in V : L_i \cdot h = 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

Доказать, что $\forall x \in V$ справедливо представление

$$x = \sum_1^n t_i a_i + a,$$

где $a \in E$, $t_i \in \mathbb{R}$ и $(a_i)_1^n$ есть система линейно независимых векторов, лежащих вне E.

5. Пусть V - гильбертово пространство. Пусть $0 \neq L_i \in V'$, $i = 1, \cdots, n$. Пусть L_i, $i = 1, \cdots, n$ линейно независимы и

$$E = \{h \in V : L_i \cdot h = 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

Пусть $(a_i)_1^n$, $i = 1, \cdots, n$, есть система линейно независимых векторов, лежащих вне E. Доказать, что $A_{ij} \equiv L_i \langle a_j \rangle$ - невырожденная матрица.

6. Пусть $L_0 \in V'$. Пусть подпространство E (см. предыдущее упражнение) содержится в подпространстве $E_0 = \{h \in V : L_0 \cdot h = 0\}$. Тогда существуют такие $\lambda_i \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство

$$L_0 \cdot h + \sum_1^n \lambda_i L_i \cdot h = 0.$$

7. (Теорема Люстерника.) Пусть $\Phi_i : V \to \mathbb{R}$ - дифференцируемые функционалы, $i = 1 \cdots, n$. Пусть точка $x_0 \in V$ является неособой, т.е. $\Phi_i'(x_0) \neq 0$, $i = 1 \cdots, n$, и функционалы $\Phi_i'(x_0)$ линейно независимы. Пусть

$$h \in E = \{h \in V : \Phi_i'(x_0) \cdot h = 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

Тогда существуют n линейно независимых векторов $h_i \in V$, лежащих вне E, и n функций s_i переменного $t \in \mathbb{R}$ таких, что при достаточно малых $|t|$

$$x_0 + th + \sum_1^n h_i s_i(t) \in M \equiv \{x \in V : \Phi_i(x) = 0 \quad i = 1, \cdots, n\}$$

и

$$s_i(0) = \frac{d}{dt} s_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

8. (Правило множителей Лагранжа.) Пусть функционалы $F, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x_0 \in M$ (см. предыдущее упражнение). Если в точке $x_0 \in M$ достигается локальный экстремум функционала на F множестве M, то существуют числа λ_0,λ_1, $\cdots$, λ_n, не все равные нулю, такие, что
$$\lambda_0 F'(x_0) + \sum_1^n \lambda_i \Phi_i'(x_0) = 0.$$

Слабая сходимость

1. Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Доказать, что $f \in H^{-1}(\Omega)$ и справедливо представление
$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

2. Пусть $\mathbf{v}^\varepsilon \to \mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon \to \operatorname{div} \mathbf{v}_0$ в $H^{-1}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

3. (*Свойство среднего значения.*) Пусть $g(y)$ - Y-периодическая функция, $g \in L^p(Y)$, $p \geq 1$. Тогда $g(x/\varepsilon) \rightharpoonup \langle g \rangle \equiv \int_Y g(y)\, dy$ в $L^p(Y)$ при $\varepsilon \to 0$.

4. (Div-curl-Лемма.) Пусть $\mathbf{p}^\varepsilon$, $\mathbf{v}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ и
$$\mathbf{p}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{v}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}_0, \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$
Пусть $\operatorname{div} \mathbf{p}^\varepsilon \to f_0$ в $H^{-1}(\Omega)$, $\operatorname{curl} \mathbf{v}^\varepsilon = 0$. Тогда $\mathbf{p}^\varepsilon \cdot \mathbf{v}^\varepsilon \to \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v}_0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$.

5. Доказать справедливость разложения Вейля
$$L^2(Y)^N = L^2_{sol}(Y)^N \oplus \nabla H^1_\sharp(Y),$$
где
$$L^2_{sol}(Y)^N = \{\mathbf{v} \in L^2(Y)^N : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

6. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(Y)^N$, $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$, где

$$(\operatorname{curl} \mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_j}{\partial y_i}.$$

Тогда $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} \rangle \cdot \langle \mathbf{g} \rangle$.

H-сходимость

На интервале $\Omega = (0 < x < 1)$ рассматривается краевая задача

$$\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\varepsilon\right) = f \in L^2(\Omega), \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{49}$$

1. Доказать, что в задаче (49) слабый предел в $L^2(\Omega)$ последовательности

$$p^\varepsilon \equiv a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\varepsilon$$

равен

$$p^0 \equiv F(x) - \int_\Omega F(x)\,dx, \quad F(x) = \int_0^x f\,dx.$$

2. Доказать, что в задаче (49) слабый предел в $L^2(\Omega)$ последовательности $\frac{d}{dx}u^\varepsilon$ равен

$$\langle b \rangle \left(F(x) - \int_0^1 F\,dx\right) \equiv \nabla u^0, \quad u^0 = \int_0^x \nabla u^0\,dx, \quad b(y) \equiv \frac{1}{a(y)}.$$

3. Доказать, что в задаче (49) предельная функция u^0 есть решение краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(\langle b \rangle^{-1}\frac{d}{dx}u^0\right) = f \in L^2(\Omega), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega). \tag{50}$$

4. (Правило вычисления H-предела) Пусть $A_\varepsilon(x) \equiv A(y)|_{y=x/\varepsilon}$ - последовательность матриц,

$$A(y) \in \mathcal{M}_N, \quad \mathbf{v}(y) \in \mathbb{R}^N \oplus \nabla H_\sharp^1(Y), \quad A(y)\cdot\mathbf{v}(y) \in L_{sol}^2(Y). \tag{51}$$

Тогда H-предел A^h последовательности $A_\varepsilon(x)$ находится из равенства

$$A^h \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \langle A(y)\cdot\mathbf{v}(y) \rangle.$$

5. Доказать равенство (50) с помощью правила вычисления H-предела.

6. Пусть $a_1(y_1)$, $a_1(y_1)$ - периодические функции на одномерном интервале $y_1 \in (0,1)$ и
$$A(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} a_1(y_1) & 0 \\ 0 & a_2(y_1) \end{pmatrix}$$
Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \overset{H}{\to} \begin{pmatrix} \langle a_1^{-1}\rangle^{-1} & 0 \\ 0 & \langle a_2\rangle \end{pmatrix} \equiv A^h. \tag{52}$$

7. Пусть ω - положительная константа, $\alpha(y_1)$ -периодическая функция на интервале $y_1 \in (0,1)$ и $\int_0^1 \alpha\, dy_1 = 0$. Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} \omega & \alpha(y_1) \\ -\alpha(y_1) & \omega \end{pmatrix}\Big|_{y=x/\varepsilon} \overset{H}{\to} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1}\langle\alpha^2\rangle + \omega \end{pmatrix} \equiv A^h. \tag{53}$$

8. Пусть $a_{ij}(y_1)$ - периодические функции на интервале $y_1 \in (0,1)$, $i,j = 1,2$. Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(y_1) & a_{12}(y_1) \\ a_{21}(y_1) & a_{22}(y_1) \end{pmatrix}\Big|_{y=x/\varepsilon} \overset{H}{\to} A^h,$$
где
$$A^h_{11} = \langle\frac{1}{a_{11}}\rangle^{-1}, \quad A^h_{12} = \langle\frac{a_{12}}{a_{11}}\rangle\langle\frac{1}{a_{11}}\rangle^{-1}, \quad A^h_{21} = \langle\frac{a_{21}}{a_{11}}\rangle\langle\frac{1}{a_{11}}\rangle^{-1},$$
$$A^h_{22} = \langle a_{22}\rangle\langle\frac{1}{a_{11}}\rangle^{-1}\langle\frac{a_{21}}{a_{11}}\rangle\langle\frac{a_{12}}{a_{11}}\rangle - \langle\frac{a_{21}a_{21}}{a_{11}}\rangle\,.$$

9. Пусть $a_i(y_i)$ - периодические функции на интервале $y_i \in (0,1)$. Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \equiv \prod_1^N a_i(y_i)\cdot I\Big|_{y=x/\varepsilon} \overset{H}{\to} \mathrm{diag}(a_1^0,\cdots,a_N^0)\cdot I \equiv A^h, \quad a_i^0 = \langle\frac{1}{a_i}\rangle^{-1}\langle\frac{\prod_1^N a_i}{a_i}\rangle\,. \tag{54}$$

10. Пусть $A(y) \in \mathcal{M}_N$ и $\mathrm{div}_y\, A = 0$. Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \equiv A(y)|_{y=x/\varepsilon} \overset{H}{\to} \langle A(y)\rangle \equiv A^h\,. \tag{55}$$

11. Пусть $\mathrm{curl}_y\, A^{-1}(y) = 0$, т.е. каждый столбец матрицы $A^{-1}(y)$ безвихревой, $y \in Y$. Доказать предельное равенство
$$A(x/\varepsilon) \equiv A(y)|_{y=x/\varepsilon} \overset{H}{\to} \langle A^{-1}(y)\rangle^{-1} \equiv A^h\,.$$

12. Пусть $A(y), A^*(y) \in \mathcal{M}_N$, $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ и пусть существуют векторы $\mathbf{v}(y)$, $\mathbf{w}(y)$, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \oplus \nabla H^1_\sharp(Y), \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \boldsymbol{\lambda}, \quad \operatorname{div}(A(y)\mathbf{v}(y)) = 0, \tag{56}$$

$$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N \oplus \nabla H^1_\sharp(Y), \quad \langle \mathbf{w} \rangle = \boldsymbol{\xi}, \quad \operatorname{div}(A^*(y)\mathbf{w}(y)) = 0. \tag{57}$$

Доказать, что H-пределы последовательностей $A(x/\varepsilon)$, $A^*(x/\varepsilon)$ удовлетворяют равенству $(A^*)^h = (A^h)^*$.

13. Пусть матрица $A(y)$ коэрцитивна при любом $y \in Y$, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (A(y) \cdot \boldsymbol{\lambda}) \geq \gamma |\boldsymbol{\lambda}|^2, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Пусть $A(y)$ удовлетворяет условию (56). Доказать, что H-предел A^h последовательности $A(x/\varepsilon)$ также коэрцитивен с константой γ.

14. Пусть $A(y)$ удовлетворяет условию (56) и симметрична. Доказать, что H-предел A^h последовательности $A(x/\varepsilon)$ удовлетворяет вариационному принципу

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (A^h \cdot \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{u \in H^1_\sharp(Y)} \int_Y (\boldsymbol{\lambda} + \nabla u) \cdot [A(y) \cdot (\boldsymbol{\lambda} + \nabla u)] \, dy. \tag{58}$$

15. Пусть $(\mathbf{e}_k)$ - канонический базис в $\mathbb{R}^N$ и пусть существуют функции $w_k(y)$, $w_k \in H^1_\sharp(Y)$, и матрица $A(y)$ такие, что условие (56) выполняется для $A(y)$ и $\mathbf{v}(y) = \mathbf{e}_k + \nabla w_k$ при $k = 1, \cdots, N$. Доказать, что H-предел последовательности $A(x/\varepsilon)$ может быть представлен формулой

$$A^h = \int_Y (I + \nabla \mathbf{w})^* A(y)(I + \nabla \mathbf{w}) \, dy, \quad \mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_N)^T, \quad (\nabla \mathbf{w})_{ij} \equiv \frac{\partial w_i}{\partial y_j}.$$

16. Пусть $h \in H^1(\Omega$. Пусть H-предел последовательности $A(x/\varepsilon)$ равен A^h. Введем энергию

$$E_\varepsilon = \inf_{u - h \in H^1_0(\Omega)} \int_\Omega \nabla u (A(x/\varepsilon) \cdot \nabla u) \, dx. \tag{59}$$

Доказать, что энергии сходятся т.е.

$$E_\varepsilon \to \inf_{u - h \in H^1_0(\Omega)} \int_\Omega \nabla u (A^h \cdot \nabla u) \, dx. \dagger$$

17. Пусть k - положительная константа и матрица $A(y) \in \mathcal{M}_2$ удовлетворяет условию

$$A(y)A(C \cdot y) = k\, I, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{R}^2. \tag{60}$$

Пусть $A(x/\varepsilon) \overset{H}{\to} A^h$. Доказать, что $A^h = \sqrt{k}\, I$.

18. Пусть

$$A(y) = \begin{pmatrix} \omega & \alpha(y) \\ -\alpha(y) & \omega\omega \end{pmatrix}, \quad \omega = \text{const} > 0,$$

где $\alpha(y)$ - периодическая функция со свойствами $\alpha^2(y) = t^2 = \text{const}$, $\alpha(C \cdot y) = -\alpha(y)$, $y \in \mathbb{R}^2$. (Здесь матрица C определена формулой (60).) Пусть $A(x/\varepsilon) \overset{H}{\to} A^h$. Доказать, что $A^h = \sqrt{\omega^2 + t^2} I$.

19. (Шахматная структура.) Пусть канонический квадрат $Y = \{|y_i| < 1/2\} \subset \mathbb{R}^2$ разбит на четыре квадрата $Y_1 = Y \cap \{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$, $Y_2 = Y \cap \{y_1 \leq 0, y_2 \geq 0\}$, $Y_3 = Y \cap \{y_1 \leq 0, y_2 \leq 0\}$, $Y_4 = Y \cap \{y_1 \geq 0, y_2 \leq 0\}$. Пусть

$$A(y) = \begin{cases} c_1 I, & \text{при} \quad y \in Y_1 \cup Y_3, \\ c_2 I, & \text{при} \quad y \in Y_2 \cup Y_4. \end{cases}$$

Пусть $A(x/\varepsilon) \overset{H}{\to} A^h$. Доказать формулу $A^h = \sqrt{c_1 c_2} I$.